UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD IZTAPALAPA División de Ciencias Básicas e Ingeniería

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

AREA: ECUACIONES DIFERENCIALES Y GEOMETRIA

SOBRE LA OPERACION $\bar{A}$ DEL ANALYSIS SITUS

K. KURATOWSKI
(VARSOVIA)

TRADUCCION DE:

A. S E S T I E R

04.0404.III.19.002.99

Sobre la operación $\bar{A}$ del Analysis Situs

por K. Kuratowski

Introducción

(por A. Sestier)

Solomon Lefschetz en [1] escribe que se puede hablar de matemáticas pre y post-cantorianas: uno de los parteaguas (habrá otros) fundamentales en la historia de esta ciencia lo constituye la aportación de Georg Cantor.

Y uno de los conceptos fundamentales (quizá el principal) creados por Cantor es el de la *operación derivación de conjuntos*; basta señalar que por este concepto tuvo la especie de iluminación que vinieron a ser los *números ordinales transfinitos.*

La derivación fue aplicada por Cantor y después Schönflies, principalmente, a la investigación de muy diversos conjuntos del espacio cartesiano R^n.

Pero no fue antes de 1920 que Kuratowski emprendió el primer estudio amplio de la operación *cerradura* (clausura o cierre) que es una modificación ligera de la operación derivación. En el artículo de 1921 que se presenta, Kuratowski desprende los axiomas y hace una discusión exhaustiva de la operación cerradura en conjuntos arbitrarios de manera particularmente brillante.

Surge la pregunta: si transcurrieron cuarenta años entre el trabajo de Cantor y el de Kuratowski, y si el último es de tal perfección ¿qué no parecería prudente postular algún desarrollo esencial en ese lapso?

En 1908, en el Congreso Internacional de los Matemáticos, celebrado en Roma, el matemático húngaro *Frigyes* (Federico) *Riesz*, conocido por su obra en el "Cálculo Funcional" presentó una ponencia sobre la noción de espacio topológico que por supuesto, llama de otra manera: *el continuo matemático* (ver [2]). Ahí propone que para un conjunto A cualquiera se defina *una función que a todo subconjunto de A asocie el conjunto de sus puntos de acumulación.* Esto era tan solo hacer abstracción de la operación derivación, de Cantor, del ámbito cartesiano, pero es un paso de muy grandes consecuencias.

Riesz, por supuesto, no se conforma con lo anterior sino que propone cuatro postulados:

> "Nuestro primer postulado es que si un elemento es "posición" de acumulación de un subconjunto M, también lo es de cualquier subconjunto que contenga a M. El segundo es que cuando un subconjunto se divide en dos subconjuntos, cada posición de acumulación de ese subconjunto lo sea también de por lo menos, de uno de los otros subconjuntos. El tercer postulado es que un subconjunto que consiste en un solo elemento no tiene posiciones de acumulación. Utilizando el segundo postulado se asegura que solamente los subconjuntos infinitos posean posiciones de acumulación..."

En 1918, en su artículo "Sobre la noción de vecindad en los conjuntos abstractos" (ver [3]), Fréchet presenta los tres axiomas antes citados y el *cuarto axioma* de Riesz en una forma un tanto diferente:

"Siendo E' el derivado de E:
Axiomas 1) y 2) de Riesz:

$$(E + F)' = E' + F'.$$

3) Un subconjunto que tiene un solo elemento carece de puntos de acumulación.
4) Si A es un punto de acumulación de E y si B es distinto de A, existe al menos un conjunto F del cual A es punto de acumulación y B no lo es".

Más adelante, Fréchet propone sustituir la cuarta condición de Riesz por
5): *Todo conjunto derivado es cerrado.*

Así se ve que Riesz puso en 1908 a la operación cerradura en el centro de la topología junto al concepto "espacio definido por la familia de vecindades de sus puntos" debido principalmente a Hausdorff por el año 1912 pero esbozado desde 1906 en la tesis de Fréchet. En dicha tesis define también "los conjuntos abstractos con una noción de límite por sucesiones", que él llama "las clases-L", las cuales 40 ó 50 años más tarde desembocan en la teoría de la convergencia de Moore-Smith y en la teoría de filtros de H. Cartan.

Se debe señalar que en su tesis Fréchet acertó absolutamente con la definición de espacio métrico. Pero se nota, a posteriori claro está, titubeante frente a las dos posibilidades de generalización de los espacios métricos que se le ocurren: la definición de "conjuntos abstractos con sucesiones convergentes" y la definición de "conjuntos con vecindades de cada uno de sus puntos".

En dos tratados clásicos de topología, el trabajo de Kuratowski ocupa una posición central: el tratado de Cech [4] y el de Alexandroff-Hopf [5]. En la página 237 de [4] se escriben los axiomas para un operador cerradura f:

(cl1).- $f(\phi) = \phi$

(cl2).- $A \subset f(A)$, todo A

(cl3).- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Y en la pag. 250 la *operación cerradura es topológica* si además

(cl4).- $ff(A) = f(A)$.

En la página 25 de [5] se definen los espacios topológicos generales como los conjuntos dotados de una operación cerradura, sin condiciones. En la página 37 se define un espacio topológico como un espacio topológico general en el que la cerradura obedece a los axiomas:

I. $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$

II. $A \subset \bar{A}$

III. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

IV. $\bar{0} = 0$

Bibliografía

[1] "*Elementos de Topología*". S. Lefschetz. UNAM (1963).

[2] "*Obras Completas de Frigyes Riesz*".

[3] "*Sobre la noción de vecindad en los conjuntos abstractos*". M. Fréchet. Bulletin des Sciences Mathématiques, (1918).

[4] "*Topological Spaces*". E. Cech. Praga, (1966).

[5] "*Topologie*". Alexandroff und Hopf. Chelsea P. Co. (1972), Reimpresión del original de 1935.

SOBRE LA OPERACIÓN $\overline{A}$ DEL ANALYSIS SITUS

K. KURATOWSKI (VARSOVIA)

ℓ designa el espacio euclidiano de n dimensiones.[1] Si A es un conjunto cualquiera de puntos del espacio, $\ell - A$ o A^1 designa el complemento de A.

$\overline{A}$ está formado por los puntos de A y sus puntos límites.[2]

Se demuestra fácilmente la validez de los enunciados:

(I.) $$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$$

(II.) $$A \subset \overline{A}$$

(III.) $$\overline{0} = 0$$

(IV.) $$\overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

Esta nota se consagra al análisis de estas proposiciones y de sus consecuencias. Procedemos axiomáticamente: suponemos dado un conjunto arbitrario ℓ y una función $\overline{A}$ tal que , para todo A contenido en ℓ, $\overline{A}$ también esta contenido en ℓ y satisface los axiomas (I)–(IV). Por lo demás , en cuanto al conjunto ℓ, sólo recurriremos a las propiedades de conjuntos enunciadas en los axiomas del álgebra de la Lógica.[3]

Así, los axiomas (I)–(IV) agregados a los del Álgebra de la Lógica forman la base de todas las argumentaciones del texto (salvo aquellas que se han impreso en tipo pequeño).

Si se compara el sistema de axiomas (I)–(III) con el que sirve de definición de las clases abstractas ($\mathcal{L}$) de M. Fréchet, se ve que el primero es más general que el segundo: toda clase ($\mathcal{L}$) satisface los axiomas (I)–(III) pero existen "espacios" que aceptan los axiomas (I)–(IV) y no son clases ($\mathcal{L}$).

[0]Esta memoria constituye la primera parte-ligeramente modificada- de mi tesis presentada el 12 de Mayo de 1920 en la Universidad de Varsovia, para obtener el grado de Doctor en Filosofía.

Traducción de Andrés Sestier B. del artículo de K. Kuratowski *Su l'opération* $\overline{A}$ *de l'Analysis Situs*, Fundamenta Mathematicae **3**, 182–199.

[1]Usamos el símbolo ℓ en lugar de 1, que se usa en el original, para evitar cualquier confusión. N. del T.

[2]"Los puntos límites de los puntos de A", textualmente. N. del T.

[3]Véase L. Couturat, *L'Algèbre de la Logique*, Paris 1914.

1. Propiedades generales de $\overline{A}$

Ahora vamos a establecer las 6 propiedades fundamentales de $\overline{A}$:[4]

Teorema 1. $A \subset B$ implica $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Teorema 2. $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$.

Teorema 3. $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$.[5]

Teorema 4. $\overline{\ell} = \ell$.

Teorema 5. $A^{-1} \subset A^{1-}$.

Teorema 6. $A^{-1-1-1-} = A^{-1-}$.

Los tres primeros teoremas resultan del axioma I. En efecto, la inclusión $A \subset B$ quiere decir que $B = A + B$, de donde $\overline{B} = \overline{A + B}$, y por I: $\overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$; por tanto $\overline{A} \subset \overline{B}$. Para establecer el teorema 2, observemos que $A \times B \subset A$ y $A \times B \subset B$, lo cual implica por el teorema I:

$$\overline{A \times B} \subset \overline{A} \text{ y } \overline{A \times B} \subset \overline{B},$$

luego

$$\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}.$$

Ahora, la fórmula evidente

$$A \subset A + B = (A - B) + B$$

implica

$$\overline{A} \subset \overline{(A - B) + B} = \overline{A - B} + \overline{B},$$

de donde se sigue el teorema 3.

El teorema 4 resulta del axioma II. En efecto, por definición de la función $\overline{A}$, se tiene $\overline{\ell} \subset \ell$, y por II: $\ell \subset \overline{\ell}$, luego $\ell = \overline{\ell}$.

A partir de esta identidad, se deduce el teorema 5 del teorema 3. Pues,

$$A^{-1} = \ell - \overline{A} = \overline{\ell} - \overline{A} \subset \overline{\ell - A} = A^{1-}.$$

Para establecer el teorema 6 tendremos que recurrir a los axiomas I, II, IV.

Según IV y el principio de la "doble negación" ($X^{11} = X$), se tiene

$$A^{-1-} = A^{-1--} = A^{-1--11}.$$

[4] $A \times B$ significa, en la notación moderna, $A \cap B$. N. del T.

[5] Véase Janiszewski y Kuratowski, *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, p. 222.

Según el teorema 5:

$$A^{-1--1} \subset A^{-1-1-},$$

de donde

$$A^{-1-1-1} \subset A^{-1--11} = A^{-1-}$$

y por el teorema 1 y el axioma IV:

$$A^{-1-1-1-} \subset A^{-1-}. \tag{1}$$

Por otra parte,

$$A^{-1-1} \subset A^{-11-} = A^{--} = A^{-},$$

luego entonces

$$(A^{-1-1})^{-1-} \supset (A^{-})^{-1-} = A^{-1-},$$

es decir, que

$$A^{-1-1-1-} \supset A^{-1-} \tag{2}$$

Las fórmulas (1) y (2) dan el teorema 6.

Regresaremos a este teorema en el parrafo §4.

En lo que toca a las sumas y productos de una infinidad de conjuntos, se tiene el teorema siguiente:

Teorema 2a. *Designemos con $\{A_i\}$ una familia cualquiera de conjuntos con el índice variable i. Entonces se tiene*

$$\overline{\prod_i A_i} \subset \prod_i \overline{A_i} \quad y \quad \sum_i \overline{A_i} \subset \overline{\sum_i A_i}.$$

Demostración Para todo índice k se tiene

$$\prod_i A_i \subset A_k \text{ de donde } \overline{\prod_i A_i} \subset \overline{A_k}$$

luego

$$\overline{\prod_i A_i} \subset \prod_i \overline{A_k} = \prod_i \overline{A_i}.$$

En forma totalmente similar, la inclusión $A_k \subset \sum_i A_i$ implica

$$\sum_i \overline{A} = \sum_i \overline{A_k} \subset \overline{\sum_i A_i}$$

l.q.q.d.

Ahora generalizaremos los teoremas 1–3. Convenimos en denotar con σ una sucesión finita cualquiera formada por símbolos "-" y "1". Diremos que σ es par si contiene un número par (≥ 0) de unidades.

Apoyándonos en el teorema 1 y el "principio de contraposición" (según el cual $A \subset B$ implica $B^1 \subset A^1$), se establecen fácilmente las fórmulas siguientes:

1°) Si σ es par, se tiene:

(3) $A \subset B$ *implica* $A^\sigma \subset B^\sigma$,
(4) $(A \times B)^\sigma \subset A^\sigma \times B^\sigma \subset A^\sigma + B^\sigma \subset (A+B)^\sigma$,
(5) $(\prod_i A_i)^\sigma \subset \prod_i A_i^\sigma \subset \sum_i A_i^\sigma \subset (\sum_i A_i)^\sigma$;

2°) Cuando σ es impar, se tiene

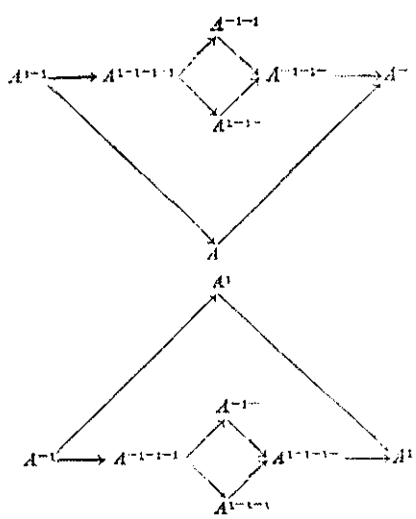
(6) $A \subset B$ implica $B^\sigma \subset A^\sigma$,
(7) $(A+B)^\sigma \subset A^\sigma \times B^\sigma \subset A^\sigma + B^\sigma \subset (A \times B)^\sigma$;
(8) $(\sum_i A_i)^\sigma \subset \prod_i A_i^\sigma \subset \sum_i A_i^\sigma \subset (\prod_i A_i)^\sigma$.

En cuanto al teorema 3 se muestra que

$$(9) \quad \begin{cases} \text{cuando } \sigma \text{ es par :} & A^\sigma - B^\sigma \subset \overline{A-B} \\ \text{cuando } \sigma \text{ es impar :} & A^\sigma - B^\sigma \subset \overline{B-A}. \end{cases}$$

En efecto[6], según el teorema 3: $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A-B}$ a la vez que en virtud de la identidad evidente $A^1 - B^1 = B - A$, se tiene $A^1 - B^1 \subset \overline{B-A}$. Por otra parte, si el teorema es verdadero para una sucesión τ y $A^\tau - B^\tau \subset \overline{A-B}$, entonces $A^{\tau-} - B^{\tau-} \subset \overline{\overline{A-B}} = \overline{A-B}$ y $A^{\tau 1} - B^{\tau 1} = B^\tau - A^\tau \subset \overline{B-A}$; en completa analogía, si $A^\tau - B^\tau \subset \overline{B-A}$, se concluye que $A^{\tau-} - B^{\tau-} \subset \overline{B-A}$ y $A^{\tau 1} - B^{\tau 1} \subset \overline{A-B}$. Nuestra afirmación es por lo tanto verdadera para todo σ.

Apoyándonos en los teoremas ya demostrados, se puede construir la tabla T de relaciones que sigue, y que nos será de mucha utilidad en lo sucesivo:



$A^\sigma \to A^\tau$ indica que es verdadero para todo A que $A^\sigma \subset A^\tau$.

[6]La demostración de (9) está impresa en letra pequeña y ello se refiere a la advertencia hecha en la primera pagina. N. del T.

2. Nociones fundamentales del Analysis Situs

En este párrafo definiremos algunas nociones del Analysis situs, apoyándonos en la operación $\overline{A}$.

El conjunto A se dice *cerrado*, cuando $\overline{A} = A$. Según I la suma de dos conjuntos cerrados es cerrada; según II y 2a, el producto[7] de dos conjuntos cerrados es cerrado.

Luego se ve que suponiendo al conjunto A cerrado, es posible reducir la tabla (T) de relaciones como sigue:

$$A^{1-1} \to A^{1-1-} \to A$$

$$A^{1} \to A^{1-1-1} \to A^{1-}.$$

Un conjunto se llama *continuo en el sentido más amplio*, cuando no es la suma de dos conjuntos cerrados no vacíos cuyo producto fuera vacío.[8]

Se demuestra con ayuda de los axiomas I y II que

1°: la suma de dos continuos (en el sentido más amplio) cuyo producto no es vacío es un continuo (en el sentido más amplio)[9]

2° si la suma y el producto de dos conjuntos cerrados son continuos (en el sentido más amplio) estos conjuntos son igualmente continuos (en el sentido más amplio).[10],

Si A es un conjunto arbitrario, es válida la descomposición siguiente:

$$A = A \times A^{1-} + A \times A^{1-1} = A \times A^{1-} + A^{1-1}.$$

Llamaremos $A \times A^{1-}$ *el borde*[11] de A. El conjunto A^{1-1} se llama *el interior* de A (o el conjunto de puntos interiores de A). Consideraremos dos casos, según se anule el interior o el borde.

1.- Sea $A^{1-1} = 0$, por lo cual $A = A \times A^{1-}$. Entonces A se llama *conjunto frontera*.

De la fórmula (3) resulta que todo subconjunto de un conjunto frontera es también frontera.

Teorema 7. *El borde de todo conjunto es un conjunto frontera.*

Demostración. Según (4):

$$(A \times A^{1-})^{1-1} \subset A^{1-1} \times A^{1-1-1}$$

[7] Intersección. N. del T.

[8] Diremos que un conjunto es continuo en sentido estricto, si contiene más de un punto.

[9] Véase Knaster y Kuratowski: *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p.212, théorème IV'. En la misma nota varias propiedades globales de conjuntos conexos se demuestran con ayuda de los axiomas I y II.

[10] Janiszewski y Kuratowski, l. c. Teorema I.

[11] El Sr. Hausdorff emplea el término *frontera* en lugar de borde (*Grundzüge der Mengenlehre*, p. 214, Leipzig 1914.).

y de acuerdo con la tabla (T):

$$A^{1-1-1} \subset A^{1-};$$

luego entonces

$$(A \times A^{1-})^{1-1} \subset A^{1-1} \times A^{1-} = 0.$$

l.q.q.d.

Un conjunto A se llama *no denso*, cuando $\overline{A}$ es un conjunto frontera; es decir, cuando $A^{-1-1} = 0$.

Se sigue que todo subconjunto de un conjunto no denso también es no denso. Todo conjunto no denso es, con más razón, frontera. por otra parte, un conjunto frontera cerrado siempre es no denso.

El borde de un conjunto cerrado es un producto de dos conjuntos cerrados y deducimos del terorema 7 que:

Corolario. *El borde de un conjunto cerrado es no denso.*

Teorema 8. *La suma de dos conjuntos no densos es un conjunto no denso.*

Demostración. Sean A y B dos conjuntos no densos. Entonces $A^{-1-} = \ell$ y $B^{-1-} = \ell$. Se trata de demostrar que $(A+B)^{-1-} = \ell$.

Ahora bien,

$$(A+B)^{-1-} = (\overline{A} + \overline{B})^{1-} = (A^{-1} - B^{-})^{-}$$

y según el teorema 3:

$$(A^{-1} - B^{-})^{-} \supset A^{-1-} - B^{--} = \ell - B^{-} = B^{-1}.$$

Luego,

$$(A+B)^{-1-} \supset B^{-1}$$

y según IV y el teorema 1:

$$(A+B)^{-1-} = (A+B)^{-1--} \supset B^{-1-} = \ell,$$

l.q.q.d.

2.- Consideremos ahora el caso en que el borde de A se anula: $A \times A^{1-} = 0$, luego $A = A^{1-1}$.

En este caso A se llama *dominio abierto.*

Se sigue inmediatamente de esta definición que para que un conjunto A sea un dominio abierto es necesario y suficiente que su complementario A^{1} sea cerrado. Se concluye que la suma de dominios abiertos es un dominio abierto y que el producto de dos dominios abiertos también es un dominio abierto.

Se observará finalmene que el interior de todo conjunto es un dominio abierto, pues $(A^{1-1})^{1-1} = A^{1--1} = A^{1-1}$; El interior de A es además el mayor dominio abierto contenido en A. En efecto, si $X \subset A$, se tiene en virtud de (3): $X^{1-1} \subset A^{1-1}$; pero, si X es un dominio abierto, se concluye que $X = X^{1-1} \subset A^{1-1}$.

Con ayuda de la operación $\overline{A}$ es fácil definr también la noción de *frontera*. Se llama frontera de A al producto $\overline{A} \times A^{1-}$.

Consideremos la descomposición siguiente:

$$\overline{A} \times A^{1-} = \overline{A} \times A^{1-} \times A + \overline{A} \times A^{1-} \times A^1.$$

Pero, como $A \subset \overline{A}$ y $A^1 \subset A^{1-}$, se concluye que

$$\overline{A} \times A^{1-} = A \times A^{1-} + \overline{A} \times A^1,$$

es decir, la frontera de A es la suma del borde de A y del borde de $\ell - A$.

Cuando A es cerrado, su frontera se reduce a $A \times A^{1-}$; cuando A es un dominio abierto, su frontera coincide con $\overline{A} \times A^1$;

Varias propiedades más fueron establecidas por Janiszewski con ayuda del los axiomas I–IV, en su articulo *Sur les coupures du plan*[12]

La noción de borde conduce de una manera natural a la de *residuo*.

El conjunto $\overline{A} - A$ es el borde del complemento de A. Consideremos el borde del conjunto complementario de $\overline{A} - A$; es el conjunto:

$$\overline{\overline{A} - A} - (\overline{A} - A) = A \times \overline{\overline{A} - A} + (\overline{\overline{A} - A} - \overline{A}) = A \times \overline{\overline{A} - A},$$

pues $\overline{\overline{A} - A} - \overline{A} = 0$.

El conjunto $A \times \overline{\overline{A} - A}$ es, según el Sr. Hausdorff[13], el residuo de A: lo designaremos mediante A_r.

Para resaltar el sentido topológico de esta noción, vamos a introducir el término de conjunto *localmente cerrado*. Se dice que E es un entorno del punto p, cuando p está situado en el interior de E. De manera análoga, un subconjunto E de A se dice que es *entorno relativo de p* con respecto a A, cuando p está situado en el interior relativo de E: es decir: cuando $p \in (E - \overline{A - E})$.

Digo que el conjunto A es localmente cerrado en el punto p, si existe un entorno relativo de p en A que sea cerrado y acotado.

Vamos a mostrar que A_r está constituido por todos los puntos de A donde el conjunto A no es localmente cerrado.

Sea *p no contenido en* A_r. En consecuencia $p \in (A - \overline{\overline{A} - A})$ y existe una esfera S de centro p que satisface la igualdad $S \times (\overline{A} - A) = 0$. El conjunto cerrado y acotado $S \times A$ es efectivamente entorno relativo de p en A. El conjunto A por lo tanto es localmene cerrado en el punto p.

Por otro lado, sea E un entorno relativo cerrado de p. Se puede rodear p de una esfera S tal que $S \times A \subset E$, lo cual implica $S \times (\overline{A} - E) = 0$. Se sigue que p no es un punto límite de $\overline{A} - E$ ni, con más razón, de $\overline{A} - A$. Dicho de otra manera: p no está contenido en $A \times \overline{\overline{A} - A}$. l.q.q.d.

Las nociones de vecindad relativa y de conjunto acotado y cerrado son invariantes del Analysis situs por lo cual también lo es la propiedad del conjunto A de ser

[12] *Prace Matematyczno-Fizyczne* XXVI, Varsovie 1913 (en polaco).

[13] L. c., p.281.

localmente cerrado en el punto p. Consideremos algunas consecuencias importantes de la invariancia de esta propiedad.

Sea $A_r = 0$. Es decir, que A es localmente cerrado en todo punto. La igualdad $A_r = 0$ es pues invariante. Pero esta igualdad equivale a la hipótesis de que A es una diferencia de conjuntos cerrados[14]. Así que la propiedad de ser diferencia de dos conjuntos cerrados es invariante[15].

La igualdad $A_r = A$ también es invariante. Como lo demostró el Sr. Hausdorff nunca tiene lugar con los conjuntos (no vacíos) que a la vez son F_σ y G_δ. Ahora bien, sea A un conjunto homogéneo[16]. Esta última hipótesis implica que $A_r = 0$ o bien $A_r = A$. Por la hipótesis anterior se tiene pues $A_r = 0$, lo que significa que A es una diferencia de dos conjuntos cerrados. Queda establecido así que un conjunto F_σ y G_δ homogéneo es la diferencia de dos conjuntos cerrados.

La noción de conjunto localmente cerrado merece atención también desde el punto de vista de los problemas que conciernen las elecciones efectivas y la aplicación del axioma de Zermelo.

Se sabe cómo hacer corresponder a cada conjunto cerrado acotado uno de sus elementos. En efecto, si $x_1, x_2, \ldots . x_n$ designan las coordenadas del espacio considerado y A es cerrado y acotado, existen puntos de A con x_1 mínimo.

Si es sólo un punto, éste será el que se haga corresponder a A. En caso contrario, se considerará entre los puntos de mínimo x_1 aquellos de x_2 mínimo, etc. En todo caso se llegará a determinar un punto bien definido $f(A)$ de A.

También se podría definir la función $f(A)$, suponiendo que A admite puntos interiores aislados. La noción de conjunto localmente cerrado permite generalizar estos resultados: definiremos un punto $g(A)$ de A para todo A tal que $A \neq A_r$.

Sea $S_1, S_2, \ldots$ la sucesión de esferas con centro y radio racionales. Puesto que A es localmente cerrado en uno de sus puntos, existen esferas que tienen intersección cerrada y acotada con $A(\neq 0)$; sea $n(A)$ el índice más pequeño de dichas esferas.

El conjunto $S_n(A) \times A$ es cerrado y acotado, por lo tanto

$$g(A) = f(S_{n(A)} \times A).$$

De manera que sin el auxilio del axioma de elección es posible hacer corresponder a todo conjunto A para el que $A \neq A_r$, un punto bien determinado de A.[17]

[14] Ibid.

[15] Véase Kuratowski y sierpiński:*Sur les différences de deux ensembles fermés*, por aparecer en Tohoku Math. Journ.

[16] Un conjunto A se dice homogéneo si para p y q puntos arbitrarios de A, existe una transformación biunivoca y bicontinua de A en sí mismo que transforma p en q.

[17] D e la noción de *residuo* hasta el final del parrafo 2, la impresión del original es en tipo pequeño y ello re refiere a la advertencia de la pagina 1.

3. 3. La relativización

Sea R un conjunto arbitrario de puntos. De los axiomas I-IV se deducen las fórmulas siguientes:

$$R \times \overline{A+B} = R \times \overline{A} + R \times \overline{B}$$
$$A \subset R \times \overline{A}$$
$$R \times \overline{R \times \overline{A}} = R \times \overline{A},$$

donde A y B designan subconjuntos arbitrarios de R.

Estas fórmulas muestran que la función $R \times \overline{A}$ satisface respecto de todo A contenido en R, los axiomas I-IV. Por consiguiente, haciendo $A^R = R - A$, se podrá escribir A^R en vez de A^1, y $R \times \overline{A}$ en vez de $\overline{A}$ en todos los teoremas deducidos de I-IV. Diremos que hemos relativizado[18] dichos teoremas. La misma operación conduce a nociones relativas[19].

Si se supone en particular que el conjunto R es cerrado, para relativizar los teoremas habra tan sólo que reemplazar "1" por "R", dado que $R \times \overline{A} = \overline{A}$.

Al relativizar la definición de conjunto cerrado, se llega a lo siguiente: un subconjunto A de R es cerrado en R, cuando $A = R \times \overline{A}$. Así, un conjunto cerrado en R es el producto (intersección, N. del T.) de R con un conjunto cerrado. Lo recíproco es igualmente verdadero: el producto de R y un conjunto cerrado siempre es cerrado en R.

Análogamente, A es un dominio respecto a R, cuando $A^R = R \times A^{R-}$. Pero, para que un conjunto sea un dominio relativo respecto a R, es necesario y suficiente que sea el producto de un dominio y de R.

Se llega a una noción importante, al relativizar la noción de conjunto no denso con respecto a los continuos. En especial, se dice que un continuo K es un continuo de *condensación* del continuo C si es denso con respecto a C[20]. Relativizando el teorema 8 y el enunciado 1° del parrafo 2 se concluye que la suma (unión) de dos conjuntos de condensación cuyo producto no es vacío es igualmente un continuo de condensación[21].

Sea σ una sucesión finita compuesta de "-" y "1". Designemos mediante σ_k la sucesión que se obtiene de σ poniendo "R" en vez de "1". Si

[18] Término que tomamos como neologismo. N. del T.

[19] Véase Hausdorff, l.c.p. 249 *Relativbegriffe*.

[20] Janiszewski: *Sur les continus irrèductibles entre deux points*, Journ. Ec. Polytechn. (2)**16**,1912.

[21] Véase ibid, Thèoréme VI.

se supone cerrado al conjunto R, establecemos las fórmulas siguientes:

$$(10)\qquad \begin{cases} \text{cuando } \sigma \text{ es par,} & A^{\sigma} \subset A^{\sigma R} \\ \text{cuando } \sigma \text{ es impar,} & A^{\sigma R} \subset A^{\sigma}. \end{cases}$$

Observemos en primer lugar que para cada σ se tiene $A^{\sigma R} \subset R$, pues $A^{-} \subset R$ y $A^{R} \subset R$.

La fórmula (10) es verdad cuando σ está compuesta por un sólo elemento y supongámosla verdadera todavía para $\sigma = \tau$. Se distinguen dos casos:

1°. τ es par; se tiene $A^{\tau} \subset A^{\tau R}$. Luego entonces $A^{\tau -} \subset A^{\tau R -}$ y $A^{\tau R 1} \subset A^{\tau 1}$ lo cual implica, en virtud de $A^{\tau R R} \subset A^{\tau R 1}$, la inclusión: $A^{\tau R R} \subset A^{\tau 1}$.

2°. τ es impar; se tiene $A^{\tau R} \subset A^{\tau}$. Por lo tanto, $A^{\tau R -} \subset A^{\tau -}$ y $A^{\tau 1} \subset A^{\tau R 1}$. Pero siendo $\tau 1$ impar, se tiene por la tabla (T): $A^{\tau 1} \subset \overline{A} \subset R$. Por consiguiente

$$A^{\tau 1} \subset R \times A^{\tau R 1} = A^{\tau R R}.$$

Nuestra afirmación queda entonces demostrada.

4. 4. Los conjuntos regulares

Digo que A es *un conjunto cerrado regular*, cuando

$$(11)\qquad A^{1-1-} = A.$$

Para que un conjunto A sea cerrado regular, es necesario y suficiente que exista un dominio abierto D tal que $A = \overline{D}$[22]. En efecto, si $A = A^{1-1-}$, se tiene $A = (A^{1-1})^{-}$ donde el conjunto A^{1-1} es un dominio abierto. Por otra parte si D es un dominio abierto y $A = \overline{D}$, se tiene por definición de dominio, $A = (D^{1-1})^{-}$, de donde $A^{1-1-} = D^{1-1-1-1-} = D^{1-1-}$, por el teorema 6. Por tanto, $A^{1-1-} = A$.

La parte regular de un conjunto A se define como el producto $A \times A^{1-1-}$. El interior de A está evidentemente contenido en la parte regular de A. Así, la diferencia entre A y su parte regular es un conjunto frontera incluido en el borde de A (teorema 7); además, cuando A es cerrado, es no denso. En este caso $A \times A^{1-1-} = A^{1-1-}$.

Ejemplos: en el plano, un círculo es un conjunto cerrado regular. Dos círculos ajenos unidos por un segmento forman un conjunto no regular; su parte regular se compone de dos círculos.

[22] Con la hipótesis adicional de que D es acotado, el Sr. Lebesgue llama $\overline{D}$ "dominio cerrado". (*Sur les correspondances entre les points de deux espaces*. Fund. Math. II, p.273).

Sea R el conjunto de puntos (x, y) sujeto a las condiciones:

$$\begin{cases} \text{para,} & -1 \leq x < 0, \quad y = 0, \\ \text{para,} & x = 0, \quad -1 \leq y \leq 1, \\ \text{para,} & 0 < x \leq 1, \quad y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}. \end{cases}$$

El conjunto formado por los dos segmentos de recta no es regular respecto a R. El conjunto de puntos de R con abcisa ≥ 0 es regular respecto a R.

Pasamos a la demostración de las propiedades de conjuntos regulares.

El sentido topológico del teorema 6 puede expresarse de la siguiente manera:

Teorema 9. *Si A es cerrado, A^{1-} es regular.*

Teorema 10. *La suma de dos conjuntos regulares cerrados es un conjunto regular cerrado; en general si los conjuntos A_i son regulares cerrados, el conjunto $\overline{\sum_i A_i}$ lo es también.*

Demostración. Se observará que cuando A es cerrado, la inclusión $A \subset A^{1-1-}$ implica en virtud de la tabla T reducida, que A es regular.

Ahora, sea $A = A^{1-1-}$ y $B = A^{1-1-}$. De acuerdo a (4):

$$A + B = A^{1-1-} + B^{1-1-} \subset (A + B)^{1-1-},$$

lo que prueba que $A + B$ es regular cerrado.

Así también, si $A_i = A_i^{1-1-}$, se tiene (fórmula 5):

$$\sum_i A_i = \sum_i A_i^{1-1-} \subset (\sum_i A_i)^{1-1-}$$

y como según (3),

$$(\sum_i A_i)^{1-1-} \subset (\sum_i A_i)^{-1-1-},$$

se tiene

$$\overline{\sum_i A_i} \subset (\sum_i A_i)^{-1-1--} = (\sum A_i)^{-1-1-}$$

l.q.q.d.

Teorema 11. *Si el conjunto R es cerrado regular y A es un subconjunto cerrado de R, la parte regular absoluta de A es idéntica a su parte regular relativa respecto a R.*

Demostración. Por la fórmula (10): $A^{1-1-} \subset A^{R-R-}$. Se trata entonces de domstrar que $A^{R-R-} \subset A^{1-1-}$.

Pero, según (9),

$$R^{1-1-} - A^{1-1-} \subset \overline{R - A},$$

lo cual, en virtud de $R = R^{1-1-}$,

$$R - A^{1-1-} \subset R^{R-},$$

de donde

$$R - A^{R-} \subset A^{1-1-}$$

(ya que las inclusiones $X - Y \subset Z$ y $X - Z \subset Y$ son equivalentes).

Por tanto,

$$A^{R-R} \subset A^{1-1-}$$

y por IV y teorema 1:

$$A^{R-R-} \subset A^{1-1-}$$

l.q.q.d.

Corolario 1. *Para que un subconjunto A de un conjunto cerrado regular R sea cerrado regular, es necesario y suficiente que sea cerrado regular respecto a R.*

"Relativizando" este corolario con respecto a un conjunto cerrado S, se ve que si A es cerrado regular con respecto a R y R es cerrado regular con respecto a S, entonces A es cerrado regular respecto a S. Esto se puede expresar todavía de otra manera:

Corolario 2. *La propiedad de ser un conjunto cerrado regular respecto a un conjunto cerrado es transitiva.*

Corolario 3. *Si R es cerrado regular y A es cerrado , $\overline{R - A}$ es regular.*

Demostración. Se tiene

$$R - A = R - R \times A = (R \times A)^R,$$

de donde

$$\overline{R - A} = (R \times A)^{R-}.$$

Pero, como $R \times A$ es un subconjunto cerrado de R, se concluye, al "relativizar" el teorema 9 respecto a R, que $(R \times A)^{R-}$ es cerrado regular respecto a R y por el corolario 1– cerrado regular absoluto, l.q.q.d.

Obsérvese ahora que si la parte regular de un conjunto cerrado A es vacía ($A^{1-1} = 0$), el conjunto A es no denso. Por el axioma III, el recíproco es verdad también: la parte regular de un conjunto no denso es vacía. Se deduce de ello, en virtud del Teorema 11, el

Corolario 4. *Para que un subconjunto cerrado de un conjunto cerrado regular R sea no denso, es necesario y suficiente que sea no denso respecto a R.*

Además de los conjuntos regulares cerrados, vamos a considerar también los conjuntos regulares abiertos. Diremos que A es un conjunto regular abierto, cuando

$$A = A^{-1-1},$$

Se reconoce con facilidad apoyándose en la identidad $X^{11} = X$, que el complemento de un conjunto cerrado regular es un conjunto abierto regular y viceversa. Así, varias propiedades de conjuntos regulares abiertos resultan directamente de los teoremas sobre los conjuntos regulares cerrados. Se muestra, en particular, que si A es un dominio abierto, A^{-1} es un conjunto regular abierto.

La siguiente es una propiedad importante de los conjuntos regulares abiertos que es independiente de los axiomas I–IV.

Se sabe que un dominio abierto es la suma de dominios abiertos conexos que no se traslapan. La frontera de cada uno de estos dominios constituyentes está contenida en la frontera de todo el dominio. Ahora bien, demostraremos que si C *es un dominio constituyente de un conjunto regular abierto* D, C *también es un abierto regular*.

Para establecer la igualdad $C = C^{-1-1}$, es suficiente mostrar, en virtud de la tabla (T), que $C^{-1-1} \subset C$. Pero,

$$C^{-1-1} \times C^1 \subset C^- \times C^1 \subset D^- \times D^1$$

y por otra parte, según (3):

$$C^{-1-1} \subset D^{-1-1} = D.$$

Luego entonces,

$$C^{-1-1} \times C^1 \subset D^- \times D^1 \times D = 0,$$

lo que demuestra $C^{-1-1} \subset C$.[23]

5. El análisis lógico de los axiomas I–IV

La tabla (T) (p.4) encierra 14 conjuntos que se pueden obtener de un conjunto dado A combinando las operaciones $\overline{A}$ y A^1. Apoyándose en el axioma IV, el teorema 6 y el principio de la doble negación ($A^{11} = A$), es fácil mostrar que el número de 14 conjuntos no se puede incrementar. Mostraremos que tampoco es posible reducirlo.

Para precisar el problema diremos que una sucesión σ de símbolos, "-" y "1" es irreducible, cuando para toda sucesión τ extraída de σ existe un conjunto A (de puntos de un espacio euclideano) tal que $A^\tau \neq A^\sigma$. Ahora bien, se trata de demostrar que todas las sucesiones σ comprendidas en la tabla (T) son irreducibles.

La solución de este problema la vamos a deducir de la siguiente proposición:

cada teorema de la forma "$A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$" (para todo conjunto de puntos A) está encerrado en la tabla (T).

(Consideramos también representados por la tabla (T) los teoremas que de ahí resultan por silogismo; por ejemplo, $A^{-1-1} \to A^-$, ya que $A^{-1-1} \to A^{-1-1-} \to A^-$).

[23] Las fronteras de conjuntos regulares abiertos gozan de interesantes propiedades. El Sr. Lebesgue estableció algunas en el volumen anterior de esta publicación. El emplea el término "frontera de $n-1$ dimensiones" cuando el conjunto regular abierto es acotado y de una pieza, siendo n el número de dimensiones del espacio considerado.

Para establecer esta proposición se debe demostrar que si σ_1 y σ_2 son dos sucesiones irreducibles y la inclusión $A^{\sigma_1} \to A^{\sigma_2}$ no está representada por la tabla (T), existe un conjunto A tal que A^{σ_1} NO $\subset A^{\sigma_2}$.

Ahora, consideremos el conjunto compuesto: por todos los números del segmento $(0, \frac{1}{2})$, por todos los números racionales del segmento $(\frac{1}{2}, 1)$ y por el número 2.

Al examinar este conjunto, se reconoce con facilidad que no subsisten las inclusiones siguientes:

$$(\rho_1)\ \ A \to A^{-1-1-};(\rho_2)\ \ A^{1-1-} \to A^{-1-1};$$
$$(\rho_3)\ \ A^{-1-1} \to A^{1-1-};(\rho_4)\ \ A^{-1} \to A^{-}.$$

Establecido lo anterior, mostraremos que ninguna relación de la forma $A^{\sigma_1} \to A^{\sigma_2}$ tiene lugar a parte de las encerradas en la tabla.

Supongamos primeramente que la sucesión σ es par.

Según (ρ_1) nunca se tiene $A \to A^{\sigma}$, cuando σ es distinto de "$-$", con mayor razón, $\overline{A} \to A^{\sigma}$ no es posible ya que $A \subset \overline{A}$. Por otra parte, si para una σ diferente de "$1-1$" se tuviera: $A^{\sigma} \to A$, la inclusión $A^{1-1-1-1} \to A$ se cumpliría, de donde $A^{1} \to A^{1-1-1-}$ y, poniendo $A^{1} = B$, se tendría $B \to B^{-1-1-}$, es decir la inclusión (ρ_1). Con mayor razón, ninguna nueva inclusión de la forma $A^{\sigma} \to A^{1-1}$ tiene lugar.

Ya que no se dan las inclusiones (ρ_2) y (ρ_3), no se puede agregar ninguna nueva inclusión a la mitad superior de la tabla (T). Como, además, la mitad inferior se obtiene de la superior por medio del principio de contraposición, la mitad inferior está igualmente completa.

Queda pues por demostrar que no subsiste ninguna inclusión entre dos conjuntos de las mitades diferentes de la tabla. supongamos que $A^{\sigma_1} \to A^{\sigma_2}$; por simetría, se puede suponer σ_1 impar y σ_2 par. Se sigue de inmediato que tendríamos $A^{-1} \to A^{-}$, es decir la inclusión (ρ_4), lo cual es imposible.

Así queda completamente establecida nuestra proposición. Resulta en particular que todas las sucesiones σ de la tabla (T) son irreducibles, pues de otra foma habría en esta tabla, σ y τ para las cuales $A^{\sigma} \to A^{\tau}$ y $A^{\tau} \to A^{\sigma}$.

Como la tabla (T) fue deducida de los axiomas I-IV, podemos pues afirmar que no subsite en el espacio euclideano, ningún teorema de la forma $A^{\sigma} \to A^{\tau}$ que sea independiente de estos axiomas. De modo que si se quisiera agregar al sistema de axiomas I-IV un nuevo axioma, no se podría obtener con tan sólo la ayuda de las operaciones $\overline{A}$ y A^{1}.

Los problemas tratados en este parrafo pueden ser considerados además desde un punto de vista más general cuando se considereran, además de las operaciones $\overline{A}$ y A^{1}, también la adición (unión, N. del T.) y la multiplicación (intersección, N. del T.). Designemos con $\phi(A)$ una función de A obtenida con ayuda de las 4 operaciones mencionadas. Se impone el problema: ¿existe un teorema de la forma $\phi(A) = 0$ que sea independiente de los axiomas I-IV? Para el caso particular en que $\phi(A) = A^{\sigma_1} \times A^{\sigma_2}$, la respuesta es- como ya la vimos- negativa. El caso general no será tratado aquí.

Vamos solamente a indicar una propiedad de la función $\phi(A)$. Hemos demostrado antes que con ayuda de la operación A^σ sólo se obtienen 14 funciones diferentes. Pero la operación $\phi(A)$ conduce a una infinidad de funciones.

Para convercernos, consideremos la sucesión de residuos A_r, A_{rr}, $A_{rrr}, \ldots$, donde $A_r = A \times \overline{\overline{A} - A} = \phi(A)$. Sea B un conjunto lineal bien ordenado del tipo de orden ω^ω. suprimamos en él los elementos de la forma: $\alpha + \omega$, $\alpha + \omega^3$, $\alpha + \omega^5, \ldots$, y denotemos por A el conjunto así obtenido.

Es fácil ver que A_r se conforma de los elementos de A que son de la forma $\alpha + \omega^n$ con $n \geq 2$, los de A_{rr} son de la forma $\alpha + \omega^n$ con $n \geq 4$, etc. La operación A_r conduce entonces a una infinidad de conjuntos diferentes.

Los axiomas I-IV son independientes entre sí. Cada una de las cuatro siguientes interpretaciones prueba la independencia del axioma correspondiente.

Sea L un conjunto compuesto por los tres elementos:a, b, c. Además:

1°: $\overline{0} = 0$, $(\overline{a}) = (a)$, $(\overline{b}) = (b)$, $(\overline{c}) = (c)$ y para los demás A sea $\overline{A} = L$;

2°: $\overline{A} = 0$;

3°: $\overline{A} = L$;

4°: $\overline{0} = 0$, $\overline{(a)} = (a, b)$, $\overline{(b)} = (b, c)$, $(c) = (a, c)$ y para los demás A, sea $\overline{A} = L$.

Terminando esta nota vamos a considerar un sistema de axiomas que podría también servir de base para nuestros razonamientos.

Si se elige como punto de partida la noción de derivado (A'), subsisten los axiomas siguientes:

I'. $(A + B)' = A' + B'$,
II'. $\ell' = \ell$,
III'. $0' = 0$,
IV'. $A'' \subset A'$.[24]

Para demostrar la independencia de estos axiomas, basta reemplazar el símbolo "$-$" por "$'$" en los ejemplos 1° a 4°. Modificando de la misma

[24] Algunas propiedades de esta especie fueron estudiadas por M. Riesz (Congres International des Math., Rome) y por M. Fréchet (Bull. Sc. Math. 1918).

manera los teoremas 1-6, se obtienen teoremas que pueden deducirse de los axiomas $I' - IV'$

De manera análoga, designando con σ una sucesión finita de los símbolos "$'$" y "1" se muestra que todo teorema de la forma $A^{\sigma_1} \rightarrow A^{\sigma_2}$ resulta de los axiomas $I' - IV'$. en cuanto al problema vinculado a la función ϕ, tal vez sea interesante ver para el espacio con $n \geq 2$ dimensiones que aún es válido un teorema independiente de los axioma $I' - IV'$ que se enuncia con la ayuda de las 4 operaciones: A', A^1, adición y multiplicación.

Este es el teorema:

$$(A \times A^{1'} + A^1 \times A')' = A' \times A^{1'};$$

lo cual significa que el derivado de la frontera de A está formado por los puntos que pertenecen al derivado de A y al derivado del complemento de A. (Además, se podría reemplazar " $=$ " por " $\supset$ " pues la inclusión inversa se puede deducir de los axiomas $I' - IV'$).

La independencia de este teorema se evidencia designando con l al espacio lineal y con A un segmento cualquiera.

Para expresar $\overline{A}$ en términos de A' sólo habría que tomar en cuenta la fórmula $\overline{A} = A + A'$. pero no se puede pasar tan fácilmente de $\overline{A}$ a A'. Más precisamente: no existe una función $\phi(A)$, en el sentido antes establecido, y tal que $A' = \phi(A)$. En efecto, supongamos que existe. Sea $l =$ el espacio lineal;$A =$ el conjunto constituido por 0 y los puntos de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$. Se tiene evidentemente: $\overline{A} = A$ y $A^{1-} = l$. Por consiguiente sólo hay cuatro conjuntos que es factible obtener de A con ayuda de la función ϕ, a saber: A, A', 0 y l; el conjunto A' no está entre ellos.

A' no se puede entonces definir por una identidad de la forma $A = \phi(A)$. Sin embargo, es factible definir A' en términos de $\overline{A}$ como sigue: $A' =$ conjunto de todos los puntos p tales que $p \in \overline{A - (p)}$.