



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

El Problema de Kepler y Métodos Variacionales

Tesis para obtener el grado de
Maestra en Ciencias (Matemáticas) presenta:
Perla Xochitl Fernández Ambrosio
Asesora: Dra. Martha Alvarez Ramírez

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Noviembre del 2008

Índice general

Introducción	5
1. El problema de los n cuerpos y Kepler	9
1.1. Formulación general e integrales de movimiento	9
1.2. El problema de los 2 cuerpos	12
1.2.1. Constantes de movimiento del problema de Kepler	13
1.2.2. Estudio del problema reducido	19
1.3. Regularización de colisiones binarias	21
1.3.1. Regularización tipo Sundman	22
1.3.2. Regularización tipo Levi–Civita	26
2. Cálculo de Variaciones	31
2.1. Conceptos de análisis funcional	32
2.1.1. Espacios reflexivos	34
2.1.2. Espacios de Sobolev	34
2.1.3. Convergencia débil y convergencia fuerte	36
2.1.4. Variación de Gâteaux y derivada de Fréchet	38
2.1.5. Ecuación de Euler–Lagrange	39
2.2. Cálculo de variaciones en el problema de los n cuerpos	43
2.2.1. Principio de simetría de Palais	44
2.3. Existencia de minimizadores	46
2.3.1. Principio variacional	46
2.3.2. Funcional débilmente semicontinuo inferiormente \mathcal{A}	47

2.4. El problema de los n cuerpos y la condición $(NC)_\nu$	48
3. El Problema de Kepler	53
3.1. Resultados clásicos	53
3.2. El funcional de acción en el problema de Kepler	58
3.3. Acción de las órbitas Keplerianas	61
3.4. Teorema de Gordon	65
3.5. Una propiedad minimizadora	67
3.6. Problemas newtonianos de Kepler generalizados	71
Apéndices	75
A. Equivalencia de las expresiones de la energía	77
B. Funciones coercitivas y la condición Palais–Smale	79
Índice	83

Índice de figuras

1.1. El vector de Laplace \mathbf{e} y la anomalía verdadera $f = \theta - \theta_0$	17
1.2. Órbitas de Kepler.	18
1.3. Espacio energía-momento	19
1.4. Ocurre colisión en $r_0 = 0$	23
1.5. Regularización de colisión binaria para $r'(0) > 0$ y $r'(0) < 0$	24
1.6. Cicloide en el caso de soluciones con colisión $r_0 = 0$	27
1.7. Retratos de fases en las coordenadas originales, de Sundman y Levi-Civita, respectivamente. Notemos que en (a) $\dot{r} \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow 0$; (b) $r' \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$; (c) $\xi' \rightarrow \pm\sqrt{\mu}$ si $\xi \rightarrow 0$	29
2.2. $ x(0) - x(\tau_x) \cdot \text{sen } \phi = x(0) \cdot \text{sen } \theta$	49
3.1. Solución extendida con una y dos componentes, respectivamente. . .	63
3.2. Se cumple $\frac{\pi}{2}\sqrt{2-\sigma} \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} W\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } \frac{2}{\sigma} E dE$ para $\sigma \in (0, 2)$	76

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que hicieron posible la culminación de esta tesis: a la Doctora Martha Alvarez por dirigir este trabajo, a los Doctores Jaime Cruz Sampedro, Antonio García y Joaquín Delgado por sus valiosas sugerencias y opiniones para enriquecer la presentación de este trabajo de tesis.

A la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me otorgó para realizar mis estudios de Maestría.

Por supuesto a mi familia por el apoyo incondicional que he recibido durante cada etapa de mi vida, y por último agradezco a todos mis compañeros por su solidaridad.

Introducción

Uno de los problemas centrales de la Mecánica Celeste es el problema de los n cuerpos, el cual ha sido y sigue siendo de gran interés por el desarrollo teórico que ha generado. Isaac Newton en 1687 publicó en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* la formulación matemática del problema de los n cuerpos, basándose en la ley de Gravitación Universal.

El problema de los n cuerpos para $n \geq 3$ presenta una dificultad mayor que el problema de los 2 cuerpos, y la comprensión de su dinámica aún está lejos de ser entendida. Euler en 1767, y Lagrange en 1772 obtuvieron dos clases de soluciones especiales del problema de 3 cuerpos, la solución colineal y la equilátera.

Debido a la dificultad de resolver el problema de los n cuerpos para $n \geq 3$, se sigue la idea de Poincaré [22], que consiste en buscar y estudiar propiedades de soluciones periódicas, es decir, soluciones tales que $x_i(t) = x_i(t + T)$.

Existen dos clases importantes de soluciones periódicas, estas son las soluciones homográficas y las soluciones coreográficas.

Una solución *homográfica* del problema de los n cuerpos es una solución con la propiedad de que la configuración de los n cuerpos permanece similar para todo tiempo. Si una solución periódica homográfica es “rígida” en el sentido de que la configuración permanece congruente a la inicial, entonces se dice que es un *equilibrio relativo*. Por otro lado, una solución *coreográfica* (o *coreografía*) del problema de n cuerpos, es una solución periódica la cual es unión de curvas cerradas, cada una de las cuales es la trayectoria de al menos dos cuerpos. Si existe solamente una curva cerrada, entonces la solución se llama *coreografía simple*.

En la literatura podemos ver que los métodos geométricos y topológicos han sido usados para el estudio de órbitas periódicas en el problema de los n cuerpos, así como recientemente, los métodos variacionales. Por ejemplo en 1993, C. Moore [20] descubrió numéricamente una nueva órbita periódica del problema plano de 3 cuerpos con masas iguales, llamada *órbita ocho*. Posteriormente, basándose en métodos variacionales [6], A. Chenciner y R. Montgomery demostraron rigurosamente la existencia de dicha órbita.

El objetivo de esta tesis es exponer las ideas principales para la construcción y estudio de órbitas periódicas del problema de los n cuerpos por métodos variacionales, en particular los métodos usados por Gordon [14] y Degiovanni–Giannoni [11] para el estudio del problema de Kepler. Queremos recalcar que este trabajo no es original, pues hemos seguido la tesis doctoral de Kuo-Chang Chen [17] y el artículo de Gordon [14]. Mostramos las ideas lo más claro posible, y realizamos en detalle las cuentas para un mejor entendimiento.

Consideremos n cuerpos con masas m_1, m_2, \dots, m_n y posiciones x_1, x_2, \dots, x_n en el espacio, donde $n \geq 2$. Denotemos por V al espacio de configuración (espacio de posiciones); usualmente éste es definido como un subespacio de $(\mathbb{R}^2)^n$ ó $(\mathbb{R}^3)^n$ con centro de masa fijo en el origen 0 . Además denotemos por $\hat{V} = V \setminus \Delta$ al conjunto de configuración libre de colisión (es decir, $x_i \neq x_j$ para alguna $i \neq j$). En el espacio de configuración definimos el potencial Newtoniano como

$$U(x) = - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}.$$

Notemos que el potencial tiene singularidades debidas a colisión, pues $U(x) = +\infty$ cuando $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j$, donde $i = 1, 2, \dots, n$.

El *Lagrangiano* se define como la energía cinética menos la energía *potencial*,

$$L(x, \dot{x}) = K - U = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$$

y el *funcional de acción* es la integral del Lagrangiano $\mathcal{A} : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

Luego, buscamos órbitas periódicas $x(t+T) = x(t) \in V \forall t$, tales que sean puntos críticos del funcional de acción \mathcal{A} en el espacio de trayectorias T periódicas: $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V) = H^1(S_T, V)$ con $S_T = [0, T]/\{0, T\}$.

Sin embargo hay dificultades para seguir la aproximación variacional: la primera es debida a la *falta de coercitividad* del funcional (condición Palais–Smale) en \mathfrak{X} , debido a que en el infinito las fuerzas se anulan: como consecuencia sucesiones de puntos críticos (tales como sucesiones minimizantes) pueden diverger. Además, el potencial U es singular en colisiones y mínimos u otros puntos críticos pueden *a priori* ser *órbitas de colisión*.

Muchas estrategias han sido propuestas para evitar esos problemas. El desarrollo de una teoría adecuada para el estudio de puntos críticos ha sido generada por varios autores, dando como solución las siguientes condiciones.

- Encontrar un subespacio $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ en el cual el funcional \mathcal{A} sea coercitivo ($x \in \mathfrak{X}_0$, $|x| \rightarrow \infty \implies \mathcal{A}(x) \rightarrow \infty$).
- Un teorema que implique (bajo hipótesis adecuadas en \mathfrak{X}_0) que los mínimos del funcional de acción restringido al subespacio \mathfrak{X}_0 no tengan colisiones.

En el ámbito variacional es necesario hablar de la admisibilidad, pues es una manera de garantizar que las curvas en \mathfrak{X}_0 que sufren una ligera perturbación sigan estando en \mathfrak{X}_0 , cabe destacar que el conjunto de variaciones admisibles en \mathfrak{X}_0 es el conjunto de direcciones en \mathfrak{X}_0 en los cuales existe la variación de Gâteaux.

La caracterización variacional de las órbitas circulares y elípticas de Kepler, T periódicas como mínimos del funcional de acción \mathcal{A} en \mathfrak{X} , fue dada por W. B. Gordon en 1977 [14]. En este trabajo la falta de coercitividad de \mathcal{A} , y la existencia colisión fueron resueltos.

En [14], Gordon considera la acción del problema de Kepler dado por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{1}{|x(t)|} \right) dt,$$

donde el espacio de configuración es $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Se define $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ (en el problema de Kepler) como el conjunto de órbitas cerradas que encierran al origen y no lo tocan, tal que cualquier órbita cerrada $x(t)$ con estas características puede ser ligeramente perturbada y seguir permaneciendo dentro de \mathfrak{X}_0 (es decir, que \mathfrak{X}_0 sea admisible).

Gordon considera al espacio de configuración como el espacio de Sobolev $\mathfrak{X} = H^1(S_T, \mathbb{C})$ y

$$\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(t) \neq 0 \text{ y } \text{grad}(x; 0) \neq 0\}$$

donde $\text{grad}(x; 0) \neq 0$ es el grado de la curva, es decir, el número de vueltas que un punto de $x(t)$ da alrededor del origen. Por otro lado, la acción de las elipses Keplerianas de período T es $cT^{\frac{1}{3}}$, donde la constante c es $k^{\frac{2}{3}} 3 \left(\frac{m\alpha^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$. Esta acción es una función que depende únicamente del eje mayor de la elipse, así como de la energía y el período. En consecuencia tenemos que la familia de mínimos, comparten el valor ínfimo de la acción. En la frontera de esta familia están las órbitas de expulsión–colisión. Gordon demostró que la acción de elipses Keplerianas es menor que la acción de las órbitas de expulsión–colisión con más de una colisión. La herramienta que le permitió a Gordon demostrar la exclusión de la posibilidad de más de una colisión por período, es la convexidad de la acción $cT^{\frac{1}{3}}$ de una órbita Kepleriana como una función del período T . Supongamos por ejemplo, que existe un número finito de colisiones, las cuales ocurren en los tiempos $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_n$. Por argumentos estándares del cálculo de variaciones entre colisiones sucesivas, los mínimos deben ser soluciones de Kepler y por lo tanto órbitas de expulsión–colisión. La acción total es entonces

$c \sum(t_i)^{1/3}$. Pero $\sum(t_i)^{1/3} \geq (\sum t_i)^{1/3} = T^{1/3}$, la igualdad se cumple cuando existe sólo una colisión.

El trabajo de Gordon motivó a definir caminos alternativos para la búsqueda de órbitas periódicas por métodos variacionales [14] para otras dimensiones. En particular en el problema de Kepler, si a \mathfrak{X}_0 se le imponen condiciones de frontera (es decir, que la trayectoria se mueve del eje real al eje imaginario) entonces es diferenciable.

El criterio de la condición $(NC)_\nu$ [17], da la coercitividad al funcional de acción \mathcal{A} y garantiza la existencia de mínimos del funcional asociado al problema de los n cuerpos, tal criterio indica que las curvas en \mathfrak{X}_0 no sólo se mueven a lo largo de la dirección central, es decir, las curvas se desvían de su posición inicial sin que \mathfrak{X}_0 deje de ser admisible.

En particular cuando $n = 2$, la condición $(NC)_2$ se cumple y se demuestran las propiedades minimizantes de las órbitas circulares Keplerianas, donde $\mathfrak{X} = H^1(S_{4T}, \mathbb{C})$ y

$$\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}, \text{ donde } \mathfrak{X}_0 \text{ es débilmente cerrado.}$$

Este trabajo de tesis se estructura de la siguiente forma: El capítulo 1 está dedicado al estudio de las propiedades generales del problema de los n cuerpos, y estudiamos muy detalladamente la reducción del problema de 2 cuerpos al problema de Kepler, así como la regularización de colisiones binarias por los métodos de Levi-Civita y Sundman. En el capítulo 2 desarrollamos los conceptos necesarios para el estudio del problema de los n cuerpos por métodos variacionales. Por último, en el capítulo 3, planteamos el problema de Kepler en forma variacional, y demostramos que las órbitas circulares y elípticas que son soluciones del problema de Kepler, son los mínimos del funcional de acción. En resumen, en el capítulo 3 damos los detalles de la demostración del Teorema de Gordon [14] en la versión dada por Kuo-Chang Chen en su tesis doctoral [17].

Capítulo 1

El problema de los n cuerpos y el problema de Kepler

En este capítulo daremos una breve explicación del problema de los n cuerpos y posteriormente estudiaremos el caso particular $n = 2$, resolveremos este problema analíticamente reduciéndolo al *problema de Kepler*. Veremos detalladamente cuáles son las variables que se mantienen constantes para todo tiempo. Por último analizaremos que pasa en caso de que ocurra colisión.

1.1. Formulación general e integrales de movimiento

Consideremos n masas puntuales m_1, m_2, \dots, m_n con posiciones x_1, x_2, \dots, x_n en el espacio ($x_i \in \mathbb{R}^3$), con respecto a un sistema de coordenadas fijo y con el origen en el centro de masas, las cuales interactúan bajo la acción gravitatoria de Newton. Determinar las posiciones y velocidades para todo tiempo t ó caracterizar la totalidad de los posibles movimientos, es lo que se conoce como el *problema de n cuerpos*.

A partir de las leyes de la dinámica de Newton, las ecuaciones de movimiento de las n partículas son n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden definidas en \mathbb{R}^3 .

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (x_i - x_j)}{|x_j - x_i|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Donde G es la constante de gravitación y $|\cdot|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^3 .

Definimos $\Delta_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : x_i = x_j \text{ para } i \neq j\}$ como el conjunto de órbitas donde existe colisión de m_i con m_j .

Observemos que el lado derecho de la ecuación (1.1) representa la fuerza total ejercida por las $(n - 1)$ partículas sobre la i -ésima partícula.

Las ecuaciones de movimiento (1.1) las podemos escribir como un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= M^{-1}y, \\ \dot{y} &= -\nabla U(x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ es el vector de posición, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ es el vector de momentos, esto es $y_i = m_i \dot{x}_i$, $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$ es la matriz de masas, y $\nabla U(x)$ es el vector gradiente del potencial $U(x)$, definido como

$$U(x) = U(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{|x_j - x_i|}.$$

Las ecuaciones (1.2) no están definidas en el conjunto

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

es decir, cuando hay alguna colisión. El dominio definido en el sistema (1.2) o *espacio de fases* es $\varphi = \{(x, y) : (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}\}$, es decir la $\dim \varphi = 6n$. El *espacio de configuración* o espacio de posiciones es $V = \{x \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}$. Las ecuaciones de movimiento del sistema (1.2) se pueden escribir como

$$\dot{x}_i = \frac{y_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j (x_i - x_j)}{|x_j - x_i|^3} = - \frac{\partial H}{\partial x_i},\tag{1.3}$$

donde el *Hamiltoniano* es

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^2}{2m_i} + U(x).\tag{1.4}$$

Como H es independiente del tiempo t , las ecuaciones Hamiltonianas (1.3) son autónomas y por lo tanto el Hamiltoniano es conservativo. En este caso H es una integral primera conocida como *energía* del sistema

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left(- \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Los vectores x y y se llaman *variables conjugadas*.

El problema de los n cuerpos tiene 10 constantes de movimiento, o integrales primeras independientes, las cuales nos permiten reducir la dimensión del espacio de fases a $6n - 10$.

Estas integrales son: la energía H , y tres componentes del *momento lineal*

$$a = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^3;$$

las tres componentes del *centro de masas*

$$at + b = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^3;$$

y las tres componentes del *momento angular*

$$J = \sum_{i=1}^n x_i \times y_i \quad \text{con } J \in \mathbb{R}^3.$$

Para más detalles ver [3], pag 44-49.

Ahora definimos la función *Lagrangiana* como $L(\dot{x}, x) = K(\dot{x}) - U(x)$, donde $K(\dot{x})$ es la energía cinética y $U(x)$ la energía potencial. Notemos que el potencial depende exclusivamente de las coordenadas de posición.

En términos de la Lagrangiana, las ecuaciones de movimiento están dadas a través de las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

El formalismo de Euler–Lagrange es equivalente a la segunda ley de Newton. Para ver esto, notemos que

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

las cuales son las ecuaciones de movimiento (1.1).

La equivalencia de las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Hamilton las obtenemos del siguiente teorema.

Teorema 1.1. *El sistema de ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton)*

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i},\end{aligned}$$

donde $H(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i y_i - L(x, \dot{x}, t)$ es la transformada de Legendre de la función Lagrangiana vista como función de \dot{x} .

Demostración. Ver la demostración en [3] pág. 65. □

1.2. El problema de los 2 cuerpos

El problema de los 2 cuerpos estudia el movimiento de dos partículas que se mueven por su mutua atracción gravitacional. Este problema puede ser reducido al *Problema de Kepler*, considerando el origen de coordenadas en una de las partículas, digamos m_1 , de tal forma que la otra partícula m_2 se mueve bajo la atracción gravitatoria de m_1 .

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ los vectores de posición de dos partículas con masa m_1 y m_2 respectivamente, relativos a un sistema de coordenadas inercial. Utilizando la Ley de Gravitación de Newton, las ecuaciones que describen a este movimiento son

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{Gm_1 m_2 (x_1 - x_2)}{|x_2 - x_1|^3}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2 (x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

El objetivo del problema de los 2 cuerpos es encontrar las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para posiciones y velocidades iniciales dadas, procederemos reduciendo el sistema (1.5), al *problema de fuerza central*, pues a partir de éste podremos encontrar las soluciones.

Dividamos la primera ecuación del sistema (1.5) entre m_1 , la segunda entre m_2 , restamos y consideramos que $x = x_2 - x_1$, entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{Gm_1x}{|x|^3} - \frac{Gm_2x}{|x|^3} \\
&= -\frac{G(m_1 + m_2)x}{|x|^3} \\
&= -\frac{\mu}{|x|^3}x.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\mu = m_1 + m_2$, y sin pérdida de generalidad consideremos de aquí en adelante que $G = 1$.

El *problema de fuerza central* definido en \mathbb{R}^3 (1.6) se conoce como *problema de Kepler*.

Las soluciones de la ecuación (1.6) se llaman órbitas Keplerianas.

1.2.1. Constantes de movimiento del problema de Kepler

Como en el caso general, el *problema de Kepler* tiene 10 constantes de movimiento, es decir, de todas las variables que forman el espacio de fases $\dim\varphi = 6(2)$, 10 se mantienen constantes durante todo el movimiento, a continuación calcularemos cada una de ellas.

Primero mostraremos que el *momento lineal* y el *centro de masa* son constantes.

Si sumamos las ecuaciones de (1.5), llegamos a

$$m_2\ddot{x}_2 + m_1\ddot{x}_1 = -\frac{m_1m_2x}{|x|^3} + \frac{m_1m_2x}{|x|^3} = 0. \tag{1.7}$$

Por lo tanto $m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, es un vector constante lo cuál indica que el momento lineal de las dos partículas que están interactuando se conserva, es decir

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = a, \tag{1.8}$$

Por otro lado, el centro de masa de dos partículas cuyas masas son m_1 y m_2 respectivamente, se define como

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Derivando dos veces esta ecuación y utilizando (1.7), obtenemos

$$\ddot{x}_0 = \frac{m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Ahora, derivando la ecuación del centro de masa x_0 , y usando la ecuación (1.8), llegamos a

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_0 = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = a.$$

Por último, al integrar esta ecuación obtenemos

$$(m_1 + m_2)x_0 = at + b, \quad b \in \mathbb{R}^3, \quad (1.9)$$

esto indica que el centro de masa se mueve uniformemente en una línea recta a velocidad constante.

Sin pérdida de generalidad, fijemos el centro de masa en el origen de coordenadas

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0. \quad (1.10)$$

Sumando y restando el término m_2x_1 en la ecuación anterior, tenemos que

$$m_1x_1 + m_2x_1 + m_2x_2 - m_2x_1 = 0,$$

de donde

$$x_1(m_1 + m_2) + m_2x_2 = 0.$$

Si despejamos x_1 de la ecuación anterior, tenemos

$$x_1 = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}x_2.$$

De forma similar sumamos y restamos m_1x_2 en la ecuación (1.10)

$$m_1x_2 + m_2x_2 - m_1x_2 + m_1x_1 = 0$$

y factorizando obtenemos

$$x_2(m_1 + m_2) - m_1x_1 = 0.$$

Por último despejamos x_2 de la ecuación anterior

$$x_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}x_1.$$

Hemos obtenido que el movimiento de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ será como el de $x(t)$, excepto por un múltiplo escalar que depende de las masas.

Ahora estudiaremos otras constantes de movimiento del problema que son la *energía* y el *momento angular*. Iniciemos por multiplicar escalarmente la primera

ecuación de (1.5) por \dot{x}_1 y la segunda por \dot{x}_2 , y por último las sumamos. Agrupando términos, obtenemos

$$m_2\ddot{x}_2\dot{x}_2 + m_1\ddot{x}_1\dot{x}_1 = -\frac{m_1m_2x}{|x|^3}\dot{x}_2 + \frac{m_1m_2x}{|x|^3}\dot{x}_1.$$

Como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_2|\dot{x}_2|^2 + m_1|\dot{x}_1|^2) = -\frac{m_1m_2}{|x|^3}x\dot{x} = \frac{d}{dt}\frac{m_1m_2}{|x|}, \quad (1.11)$$

entonces la energía total del sistema (1.6)

$$h = \frac{1}{2}(m_1|\dot{x}_1|^2 + m_2|\dot{x}_2|^2) - \frac{m_1m_2}{|x|}$$

es una constante de movimiento. Observemos que tanto la energía cinética, como la energía potencial están explícitas en la ecuación anterior y $h \in \mathbb{R}$. Considerando a (1.11) y a la ecuación de movimiento para el problema de fuerza central (1.6), tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_1|\dot{x}_1|^2 + m_2|\dot{x}_2|^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1m_2}{\mu}|\dot{x}|^2\right).$$

Generalmente se simplifica la energía multiplicándola por el término $\frac{\mu}{m_1m_2}$. Así obtenemos la siguiente ecuación de energía del problema de Kepler.

$$h^* = \frac{\mu}{m_1m_2}h = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{\mu}{|x|}.$$

Si consideramos a $h^* = h$, la expresión anterior queda de la siguiente manera

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{\mu}{|x|}. \quad (1.12)$$

Por último mostraremos que el *momento angular* $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^3$ es otra constante de movimiento para el *problema de Kepler*, obteniendo un total de 10 integrales primeras o constantes de movimiento.

El producto vectorial entre el vector posición x y el vector velocidad \dot{x} se llama $\mathbf{J} = x \times \dot{x}$ *momento angular*, tal vector es constante pues

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{d}{dt}(x \times \dot{x}) = (x \times \ddot{x}) + (\dot{x} \times \dot{x}) = -\frac{\mu}{|x|^3}(x \times x) + 0 = 0.$$

Como \mathbf{J} es un vector constante a lo largo del movimiento, en particular se tiene que $\mathbf{J} = x(0) \times \dot{x}(0)$, es decir, \mathbf{J} es determinado por las condiciones iniciales, y es un dato del problema.

Notemos que para el movimiento de fuerza central si $\mathbf{J} = 0$ se tiene que x y \dot{x} son colineales, es decir el movimiento de m_1 y m_2 se realiza en una línea recta que pasa por el origen. Por otro lado, si $\mathbf{J} \neq 0$ sabemos que $\mathbf{J} \cdot x = 0$, entonces el movimiento tiene lugar exactamente en el plano ortogonal a \mathbf{J} que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 . Entonces sin pérdida de generalidad podemos restringirnos a estudiar el movimiento en \mathbb{R}^2 .

Observemos que la conservación del vector momento angular (la magnitud del momento angular) genera la *segunda ley de Kepler*, la cual dice que; el vector posición de una partícula barre áreas iguales en tiempos iguales, pues el movimiento de la partícula m_2 describe una órbita elíptica alrededor de m_1 fija como foco (*primera ley de Kepler*).

Enseguida vamos a demostrar que las soluciones del problema de los 2 cuerpos en el plano son secciones cónicas.

El vector unitario $x/|x|$, con $x \neq 0$ tiene la dirección del movimiento de la partícula m_2 y puede ser determinado para todo tiempo. Para determinar cuándo esta dirección cambia con el tiempo, vamos a derivarla con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{|x|\dot{x} - x|\dot{x}|}{|x|^2} = \frac{|x|^2\dot{x} - x|x||\dot{x}|}{|x|^3}.$$

Como $|x|^2 = x \cdot x$, tenemos que $|x||\dot{x}| = x \cdot \dot{x}$, tal que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{(x \cdot x)\dot{x} - (x \cdot \dot{x})x}{|x|^3}.$$

Por otro lado, usando la siguiente identidad en la ecuación anterior para $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u,$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{(x \times \dot{x}) \times x}{|x|^3} = \frac{\mathbf{J} \times x}{|x|^3}. \quad (1.13)$$

Por último usando la ecuación anterior y la ecuación de movimiento (1.6), obtenemos la siguiente relación

$$\frac{d}{dt} \frac{x}{|x|} = \frac{\ddot{x} \times \mathbf{J}}{\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x} \times \mathbf{J}}{\mu}.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación llegamos a que

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{x}{|x|} \right) = \dot{x} \times \mathbf{J}, \quad (1.14)$$

donde \mathbf{e} es una constante de integración que se llama *vector de excentricidad* ó *vector de Laplace*.

Multiplicando escalarmente por x a la ecuación (1.14) y considerando que $J = |\mathbf{J}|$, obtenemos

$$\mu(\mathbf{e} \cdot x + |x|) = J^2 \quad (1.15)$$

Sea θ_0 el ángulo entre el vector de Laplace \mathbf{e} y el eje de las abcisas x_1 y sea $f = \theta - \theta_0$ el ángulo entre el vector de Laplace \mathbf{e} y el vector de posición $r = |x|$, tal ángulo se llama *anomalía verdadera* (ver la Figura 1.1). Luego, tenemos que $\mathbf{e} \cdot x = |\mathbf{e}| |x| \cos f = e r \cos f$. Con esta notación la ecuación (1.15) se puede escribir como

$$r = \frac{J^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (1.16)$$

la cual es la ecuación de una cónica en coordenadas polares. Como consecuencia obtenemos que las órbitas de m_2 relativas a m_1 son cónicas con excentricidad e , y con un foco en el origen de coordenadas. Además la ecuación (1.16) nos permite dar una interpretación geométrica del vector e (ver la Figura 1.2), pues su magnitud es la excentricidad de la cónica y su dirección da la orientación del semieje mayor.

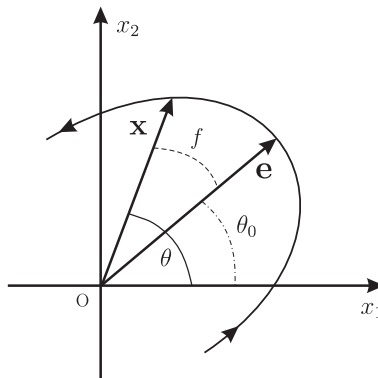


Figura 1.1: El vector de Laplace \mathbf{e} y la anomalía verdadera $f = \theta - \theta_0$.

De la teoría de secciones cónicas podemos clasificar las órbitas Keplerianas:

- $e = 0$ la curva es una circunferencia
- $0 < e < 1$ la curva es una elipse
- $e = 1$ la curva es una parábola
- $e > 1$ la curva es una hipérbola.

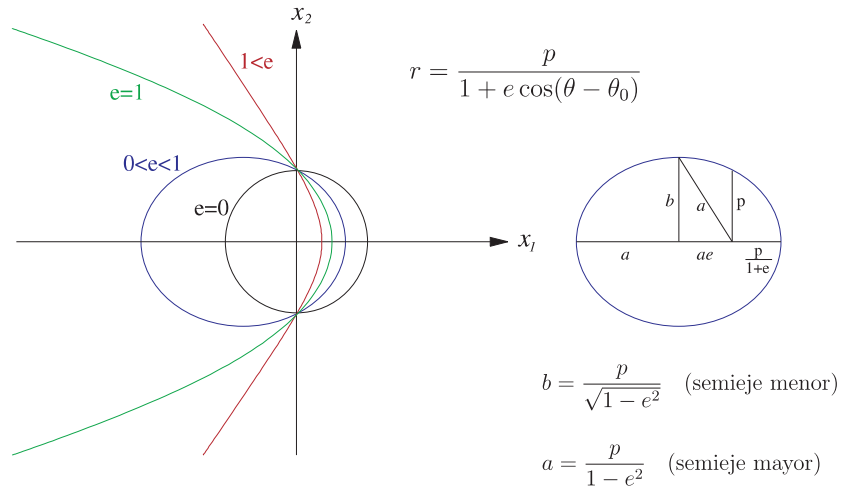


Figura 1.2: Órbitas de Kepler.

Podemos encontrar una relación entre las constantes J , e y h a partir de la ecuación (1.14). Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación (1.14) y consideramos que \dot{x} y \mathbf{J} son ortogonales, entonces

$$\mu^2 \left(1 + e^2 + \frac{2}{|x|} \mathbf{e} \cdot x \right) = |\dot{x}|^2 J^2.$$

Ahora sustituimos $|\dot{x}|^2$ de la ecuación de la energía (1.12) y $\mathbf{e} \cdot x$ de (1.15),

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hJ^2 \tag{1.17}$$

la cual se llama *ecuación fundamental*. Despejando h de esta ecuación obtenemos

$$h = \frac{\mu^2}{2J^2}(e^2 - 1) \quad \text{si } J \neq 0.$$

Luego, si conocemos la excentricidad (e) de la órbita podemos conocer el valor de la energía (h). Mediante un cálculo sencillo tenemos la siguiente tabla:

<i>excentricidad</i>	<i>energía</i>	<i>órbita</i>
$e = 0$	$h = -\mu^2/2J^2$	Circunferencia
$0 < e < 1$	$h < 0$	Elipse
$e = 1$	$h = 0$	Parábola
$e > 1$	$h > 0$	Hipérbola

En la Figura 1.3 ilustramos el plano de parámetros (h, J) , energía y momento angular. Éste consiste en la curva $h = -\mu^2/2J^2$ y dos ejes coordenados $J = 0$ y $h = 0$.

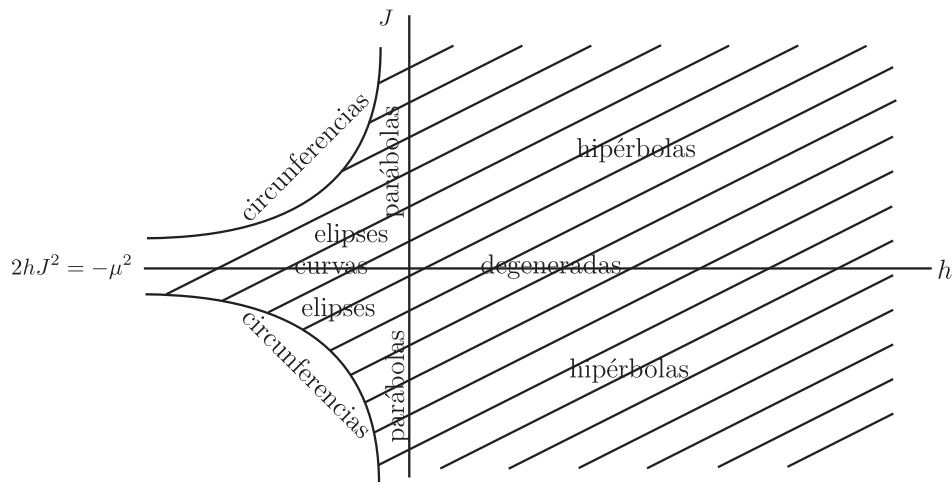


Figura 1.3: Espacio energía-momento

Notemos que cuando $\mathbf{J} = \dot{x} \times x = 0$ el movimiento es unidimensional, de tal forma que el movimiento de m_1 y m_2 es colineal.

1.2.2. Estudio del problema reducido

Hemos visto que el problema de los 2 cuerpos está definido por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad U = U(x) = -\frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|}$$

cuyas soluciones son secciones cónicas.

Ya que el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central se realiza en el plano, es natural introducir coordenadas polares $r = |x|$ y θ . Sea $e_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ el vector unitario que apunta desde el origen la masa puntual y $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ el vector unitario perpendicular a e_r y apunta en dirección de valores crecientes del ángulo θ . Entonces los vectores de posición, velocidad y aceleración pueden escribirse

en coordenadas polares como

$$\begin{aligned}x &= r e_r, \\ \dot{x} &= \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta, \\ \ddot{x} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \right) e_\theta.\end{aligned}$$

Ahora sustituimos x y \dot{x} en la ecuación de momento angular $\mathbf{J} = x \times \dot{x}$, obteniendo $\mathbf{J} = r^2 \dot{\theta} u$, donde u es un vector unitario perpendicular al plano que contiene a e_r y e_θ . Luego el momento angular que es constante se puede escribir escalarmente como

$$J = r^2 \dot{\theta}.$$

Por otro lado, como la ecuación (1.6) define un campo de fuerza central

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \right) e_\theta = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} e_r.$$

Luego la ecuación de movimiento en coordenadas polares es de la forma

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0.$$

Usando la relación $\dot{\theta} = J/r^2$, determinada por las condiciones iniciales, tenemos

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r \frac{J^2}{r^4} \quad \text{ó} \quad \ddot{r} = -\frac{\partial W}{\partial r} \quad (1.18)$$

donde $W = W(r) = \frac{J^2}{2r^2} + U = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$ se llama *energía potencial efectiva* o *potencial efectivo*, $W = U_{efec}$.

El problema de Kepler se resume en resolver el sistema (1.18), es decir saber cuál es el comportamiento de r como función del tiempo t .

Observación 1.2. La energía total del problema de dimensión uno (pues la única variable, es la variable radial r) está dada por

$$h_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + W(r), \quad \text{esto es} \quad h_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \quad (1.19)$$

y es la misma que la energía total del problema original

$$h = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

ya que

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{(\dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta)^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2r^2}.$$

Abusando de la notación, a partir de aquí consideraremos que $h_1 = h$. Entonces la ecuación de la energía total es

$$\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2} \right) = \frac{\mu}{r} + h$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2} \leq \frac{\mu}{r} + h.$$

Multiplicando esta última ecuación por r^2 tenemos

$$\frac{1}{2} J^2 \leq \mu r + hr^2.$$

Como consecuencia vemos que si $r \rightarrow 0$, entonces $J = 0$.

Observación 1.3. Por otro lado, si la ecuación de la energía (1.19) la multiplicamos por r tenemos

$$\dot{r}^2 r + \frac{J^2}{r} = 2\mu + 2hr$$

y en particular si $J = 0$ se cumple que

$$\dot{r}^2 r \leq 2\mu + 2hr$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \dot{r}^2 r \leq \lim_{r \rightarrow 0} (2\mu + 2hr) = 2\mu.$$

Esto significa que a pesar de que $\dot{r} \rightarrow \infty$ como lo indica la ecuación (1.19) cuando $J = 0$, la cantidad $\dot{r}^2 r$ se conserva acotada en colisión.

El comportamiento asintótico de $r(t)$ y $\dot{r}(t)$ cerca de colisión, es el mismo para cualquier valor de h , esto se logra regularizando la función $r(t)$. En la próxima sección se mostrará esta afirmación.

1.3. Regularización de colisiones binarias

La ecuación (1.18) tiene una singularidad cuando $r = 0$ la cual corresponde a colisión. Notemos que cuando $r \rightarrow 0$ el potencial $W = -\frac{\mu}{r} \rightarrow -\infty$. Sea $t = t^*$ el tiempo en que ocurre la colisión. Una solución $(r(t), \dot{r}(t))$ de (1.18) se llama *órbita de colisión* si $r(t) \rightarrow 0$ y $\dot{r}(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t^*$. Si el intervalo máximo de definición de la solución $r(t)$ es $[t_1, t^*)$ con $t^* < \infty$, decimos que la solución tiene una singularidad en $t = t^*$.

Las singularidades de las ecuaciones de movimiento (1.18) se pueden remover bajo un cambio adecuado de variable para la posición, velocidad y tiempo, las cuales se expresan en forma paramétrica en términos de una nueva variable. Este proceso se llama *regularización de colisión*.

En esta sección estudiaremos las dos regularizaciones de colisión binaria más conocidas, la de Sundman y la de Levi-Civita.

1.3.1. Regularización tipo Sundman

La idea principal de este método es compensar el crecimiento infinito de la velocidad (pues cuando existe colisión, $\dot{r} \rightarrow \infty$), multiplicando el vector velocidad \dot{r} por un factor escalar adecuado que se anule ahí. Esta regularización fue introducida por Sundman en 1902 para el problema general de los 3 cuerpos en el plano, ver [30].

Multipliquemos la ecuación de la energía (1.19) por r^2 para quitar la singularidad del denominador y como estamos en el caso de colisión $J = 0$, entonces

$$\frac{1}{2}(\dot{r}r)^2 = hr^2 + \mu r. \quad (1.20)$$

Sea k una constante, la cual nos permitirá normalizar. Consideremos el reescalamiento del tiempo dado por $dt = \frac{r}{k}d\tau$. Luego tenemos que

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{r}{k} \frac{dr}{dt} \quad (1.21)$$

es decir,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{k}{r} \frac{dr}{d\tau} = \frac{k}{r} r'.$$

Si sustituimos \dot{r} en la ecuación (1.20) entonces obtenemos

$$\frac{1}{2}k^2(r')^2 = hr^2 + \mu r. \quad (1.22)$$

Derivamos esta ecuación con respecto a τ y dividimos entre r' , de tal forma que llegamos a

$$k^2 r'' = 2hr + \mu. \quad (1.23)$$

Como nos interesa saber qué pasa con el movimiento en caso de colisión, analizaremos fijando la energía ($h = 0$, $h > 0$ y $h < 0$) qué sucede con m_2 antes, durante y

después de colisionar con m_1 . Esta información la obtenemos a partir de las condiciones iniciales.

Caso I: Sea $h = 0$ y consideremos que $k^2 = \mu$ entonces de (1.23), obtenemos

$$r'' = 1. \quad (1.24)$$

En este caso, analizaremos qué pasa cuando ocurre colisión ($r_0 = 0$), y cerca de colisión ($r_0 > 0$). Iniciemos por considerar $r_0 = 0$, en cuyo caso tomamos las condiciones iniciales $r(0) = 0$ y $r'(0) = 0$, donde $\tau(0) = \tau_0 = 0$ y $t_0 = 0$. Usando la reparametrización del tiempo dada en (1.21), obtenemos el vector posición r y el tiempo real t como funciones regulares de τ , es decir

$$r(\tau) = \frac{\tau^2}{2}, \quad t(\tau) = \frac{1}{k} \int_0^\tau r d\tau = \frac{\tau^3}{6k}. \quad (1.25)$$

Ahora, a partir de (1.25) calculemos $r(t)$, de tal forma que obtenemos

$$r(t) = r(\tau(t)) = \frac{(6k)^{\frac{2}{3}}}{2} t^{\frac{2}{3}}. \quad (1.26)$$

La ecuación anterior tiene una singularidad en $t = \tau = 0$, que es justo cuando ocurre colisión.

Es importante notar que r no es diferenciable para todo $t \in \mathbb{R}$ (1.26), mientras que en el tiempo ficticio r se transforma en una función diferenciable (1.25) para todo $\tau \in \mathbb{R}$, ver la figura 1.4.

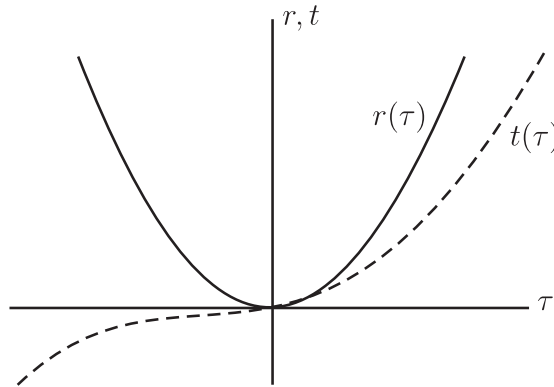


Figura 1.4: Ocurre colisión en $r_0 = 0$.

Ahora analizaremos qué pasa cerca de colisión, es decir para $r_0 > 0$.

Cuando las condiciones iniciales son $r_0 > 0$ y $r'(0) = \sqrt{2r_0}$ con $\tau_0 = 0$, tenemos que m_2 después de colisionar diferenciablemente con m_1 en el instante $\tau = -\sqrt{2r_0}$, la partícula se aleja a lo largo de una trayectoria parabólica, ver figura 1.5.

$$r(\tau) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \sqrt{r_0} \right)^2, \quad t(\tau) = \frac{1}{k} \int_0^\tau r d\tau = \frac{\tau^3}{6k} + \sqrt{\frac{r_0}{2}} \frac{\tau^2}{k} + \frac{r_0^2}{k} \tau + t_0. \quad (1.27)$$

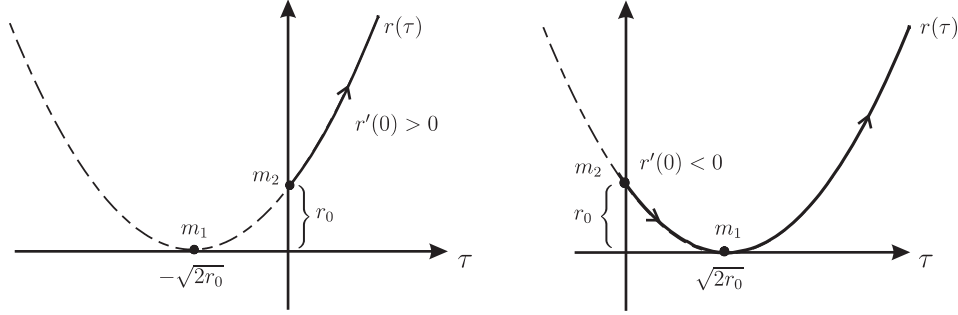


Figura 1.5: Regularización de colisión binaria para $r'(0) > 0$ y $r'(0) < 0$.

Por otro lado si las condiciones iniciales son $r_0 > 0$ y $r'(0) = -\sqrt{2r_0}$ y consideramos a $\tau_0 = 0$, obtenemos que m_2 se aproxima a m_1 parabólicamente, sufre colisión en $\tau = \sqrt{2r_0}$ y es expulsada a lo largo de la misma órbita, la cual queda descrita por $r(\tau)$ diferenciable para todo $\tau \in \mathbb{R}$, ver figura 1.5.

$$r(\tau) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} - \sqrt{r_0} \right)^2, \quad t(\tau) = \frac{1}{k} \int_0^\tau r d\tau = \frac{\tau^3}{6k} - \sqrt{\frac{r_0}{2}} \frac{\tau^2}{k} + \frac{r_0^2}{k} \tau + t_0. \quad (1.28)$$

Es importante notar que si en las ecuaciones (1.27) y (1.28), sustituimos $r_0 = 0$ y $t_0 = 0$, recuperamos el sistema (1.25), como era de esperarse, pues éste es sólo un caso particular de cualquiera de los dos ya mencionados.

Por otro lado observemos que en las ecuaciones (1.27) y (1.28), $t'(\tau) > 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, de tal forma que t como función de τ es monótona creciente y por lo tanto $t(\tau)$ es un difeomorfismo, y las ecuaciones (1.27) y (1.28) definen a r de forma implícita como función regular de t . Como consecuencia hemos obtenido soluciones diferenciables de (1.24) para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Enseguida consideraremos el caso cuando la energía es positiva $h > 0$.

Caso II: Sea $h > 0$ y elijamos a $k^2 = 2h$, entonces la ecuación (1.23) es equivalente

$$r'' - r = \frac{\mu}{k^2}. \quad (1.29)$$

Como en el caso anterior consideraremos $r_0 = 0$ y $r'_0 > 0$ con condiciones iniciales específicas.

Para el caso en que ocurre colisión al tiempo cero, $r_0 = 0$, tomamos en cuenta las condiciones iniciales $r_0 = 0$ y $r'(0) = 0$ con $\tau = 0$ y $t_0 = 0$, y consideramos (1.21), para obtener las siguientes funciones regulares en el nuevo tiempo τ :

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(\cosh \tau - 1), \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\sinh \tau - \tau). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ahora vamos a ver cuáles son las soluciones de (1.29), cuando $r(\tau)$ está cerca de colisión. Primero consideremos las condiciones iniciales $r_0 > 0$ y $r'(0) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}$, con $\tau_0 = 0$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(\cosh \tau - 1) + r_0 \cosh \tau + \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}} \sinh \tau, \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\sinh \tau - \tau) + \frac{r_0}{k} \sinh \tau + \frac{1}{k} \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}(\cosh \tau - 1) + t_0. \end{aligned}$$

El sistema anterior se puede simplificar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}[-1 + \cosh(\phi + \tau)], \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}[-\tau + \sinh(\phi + \tau) - \sinh \phi] + t_0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde $\cosh \phi = \left(\frac{k^2 r_0}{\mu} + 1\right)$, $\sinh \phi = \frac{k r_0}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} + k^2}$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Por otro lado, cuando las condiciones iniciales son $r_0 > 0$ y $r'(0) = -\sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}$ con $\tau_0 = 0$, las soluciones son

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(\cosh \tau - 1) + r_0 \cosh \tau - \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}} \sinh \tau, \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\sinh \tau - \tau) + \frac{r_0}{k} \sinh \tau - \frac{1}{k} \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mu r_0}{k^2}}(\cosh \tau - 1) + t_0. \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos

$$r(\tau) = \frac{\mu}{k^2}[-1 - \cosh(\phi + \tau)], \quad (1.32)$$

$$t(\tau) = \frac{\mu}{k^3}[-\tau - \sinh(\phi + \tau) + \sinh \phi] + t_0, \quad (1.33)$$

Por lo tanto hemos obtenido soluciones regulares en el tiempo τ , las cuales tienen un comportamiento hiperbólico.

Caso III: Sea $h < 0$ y hacemos $k^2 = -2h$, entonces la ecuación (1.23) es equivalente a

$$r'' + r = \frac{\mu}{k^2},$$

la cual modela un oscilador armónico al que se le aplica una fuerza externa constante.

Primero consideraremos el caso $r_0 = 0$, con condiciones iniciales $r_0 = 0$ y $r'(0) = 0$ y tomando en cuenta que $\tau_0 = 0$ y $t_0 = 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(1 - \cos \tau), \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\tau - \sin \tau). \end{aligned} \tag{1.34}$$

En el caso de soluciones en que la colisión binaria ocurre al tiempo cero, $r_0 = 0$, estas ecuaciones describen una cicloide, ver la gráfica que se muestran en la figura 1.6.

Considerando condiciones iniciales $r_0 > 0$ y $r'(0) = \pm \sqrt{\frac{2\mu r_0}{k^2} - r_0^2}$, $\tau_0 = 0$. La solución es

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}(1 - \cos \tau) + r_0 \cos \tau \pm \sqrt{\frac{2\mu r_0}{k^2} - r_0^2} \sin \tau, \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}(\tau - \sin \tau) + \frac{r_0}{k} \sin \tau \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2\mu r_0}{k^2} - r_0^2} (1 - \cos \tau) + t_0. \end{aligned}$$

Si consideramos que $\cos \phi = \left(\frac{k^2 r_0}{\mu} - 1\right)$ y $\sin \phi = \frac{kr_0}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} - k^2}$, con $\phi \in [0, 2\pi)$, entonces el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{\mu}{k^2}[1 \pm \cos(\tau - \phi)], \\ t(\tau) &= \frac{\mu}{k^3}[\tau \pm \sin(\tau - \phi) \pm \sin \phi] + t_0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Las funciones $r(\tau)$ y $t(\tau)$ son regulares en la variable τ , y su comportamiento es periódico.

1.3.2. Regularización tipo Levi–Civita

La regularización de Levi–Civita, consiste en efectuar un cambio de variable en el espacio de fases, y otro en el tiempo para hacer más lentas las órbitas que van a colisión, obteniendo ecuaciones sin singularidades.

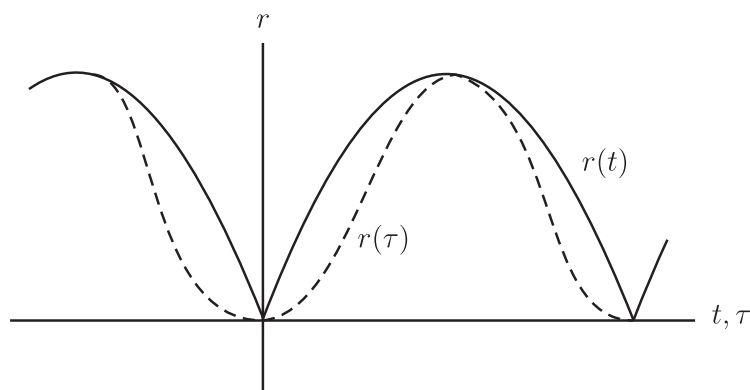


Figura 1.6: Cicloide en el caso de soluciones con colisión $r_0 = 0$.

Consideremos a x y $y = \dot{x}$ y realizamos el cambio de coordenadas $x = \frac{\xi^2}{2}$, $y = \frac{\eta}{\xi}$. El sistema de primer orden asociado a la ecuación de segundo orden del problema de Kepler es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{\mu}{|x|^2},\end{aligned}\tag{1.36}$$

y la energía como $h = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{\mu}{|x|}$. En las coordenadas (ξ, η) , este último sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{\eta}{|\xi|^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{|\eta|^2 - 4\mu}{|\xi|^4}\xi.\end{aligned}$$

Ya que estas ecuaciones todavía tienen una singularidad en $\xi = 0$, vamos a regularizarlas haciendo un reescalamiento del tiempo mediante $\frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{|\xi|^2} = \frac{1}{|x|}$, de tal forma que con este cambio se logra frenar las soluciones que van a colisión y eliminar la singularidad. Luego obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{\eta}{2}, \\ \eta' &= h\xi,\end{aligned}\tag{1.37}$$

y

$$h = \frac{|\eta|^2 - 4\mu}{2|\xi|^2},\tag{1.38}$$

es la energía expresada en las nuevas coordenadas. A partir del sistema (1.37) obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\xi'' - \frac{h}{2}\xi = 0. \quad (1.39)$$

Ahora, veamos cuáles son las soluciones de (1.39) para los diferentes valores de la energía.

- $h < 0$

Aquí la ecuación (1.39) representa un oscilador armónico simple, cuyas curvas solución en el espacio fase son curvas cerradas centradas en el origen, es decir el origen es un centro.

- $h = 0$

En este caso la solución general de (1.39) es $\xi = a(\tau - \tau_0)$ y sólo existen dos valores posibles para a que satisfacen la ecuación de la energía (1.38),

$$4|\xi'|^2 - 4\mu = 0$$

estos son $a = \pm\sqrt{\mu}$. Por lo tanto, en el plano fase las curvas son líneas rectas con $\xi' = \pm\sqrt{\mu}$.

Luego en las variables originales tenemos

$$x = \xi^2 = \mu(\tau - \tau_0)^2, \quad t = \frac{\mu}{6}(\tau - \tau_0)^3.$$

- $h > 0$

En este caso la ecuación (1.39) con condiciones iniciales $\xi_0 = \xi(0)$ y $\xi'_0 = \xi'(0)$ tiene por solución

$$\xi = c_1 e^{\sqrt{h/2}\tau} + c_2 e^{-\sqrt{h/2}\tau}$$

donde $c_1 = \frac{\xi_0}{2} + \frac{\xi'_0}{2}\sqrt{\frac{2}{h}}$, $c_2 = \frac{\xi_0}{2} - \frac{\xi'_0}{2}\sqrt{\frac{2}{h}}$.

Por otro lado, la relación energía $4|\xi|^2 - 2h|\xi'|^2 = 4\mu$ puede escribirse como

$$\frac{|\xi'|^2}{\mu} - h\frac{|\xi|^2}{2\mu} = 1$$

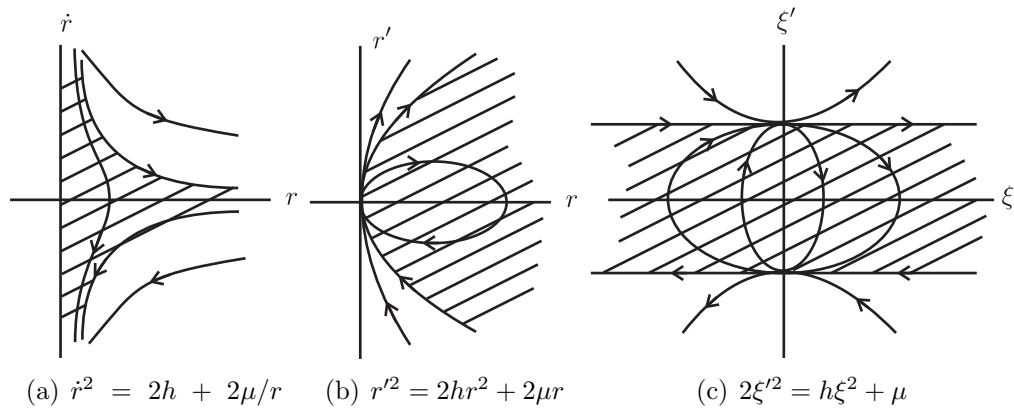


Figura 1.7: Retratos de fases en las coordenadas originales, de Sundman y Levi-Civita, respectivamente. Notemos que en (a) $\dot{r} \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow 0$; (b) $r' \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$; (c) $\xi' \rightarrow \pm\sqrt{\mu}$ si $\xi \rightarrow 0$.

la cual representa una hipérbola en el plano (ξ, ξ') cuyas hojas abren hacia el eje de las ξ' , teniendo por vértices los puntos con coordenadas $(\xi, \xi') = (0, \pm\sqrt{\mu})$, respectivamente.

En la Figura 1.7 comparamos los espacios de fases para el problema colineal de fuerza central (con colisión) para las distintas variables consideradas.

En cada caso las curvas solución se obtienen como curvas de nivel de las ecuaciones de energía ahí mostradas para diversos valores de h . Las regiones sombreadas en la Figura 1.7 corresponden a $h < 0$.

La orientación de las órbitas pueden encontrarse a partir de las ecuaciones diferenciales, pero la forma más simple es a partir de que en cada caso una variable es derivada de la otra con respecto a su variable independiente (tiempo). Por lo tanto, en el primero y segundo cuadrante, por ejemplo, todas las soluciones van hacia la derecha puesto que la derivada es positiva y la r ó la ξ aumentan. La situación se invierte en el tercer y cuarto cuadrante.

Observamos que la descripción de las soluciones en las variables de Sundman y en las de Levi-Civita es estrictamente válida sólo para cada h fija; esto explica el aparente paso de diversas soluciones por un mismo punto (el origen y $(0, \pm\sqrt{\mu})$, respectivamente), sin que éste sea punto de equilibrio para las ecuaciones diferenciales.

Capítulo 2

Algunos resultados del cálculo de variaciones

El problema central del cálculo de variaciones consiste en encontrar extremos (máximos y mínimos) de un funcional $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cuyo dominio consiste en un espacio de funciones, tal dominio puede ser de dimensión finita o infinita. Generalmente los funcionales están determinados por integrales definidas de la forma

$$F(x(t)) = \int_a^b f(t, x, x', \dots, x^{(k)}) dt$$

donde la función $x(t)$ pertenece a algún espacio de funciones (espacio de Banach, espacio de Hilbert), y tanto ella como sus derivadas pueden tener restricciones.

El problema de encontrar extremos se reduce a obtener los puntos críticos del funcional $F'(x(t)) = 0$ ó encontrar criterios necesarios y suficientes para la existencia de puntos críticos, así como de condiciones que permitan su cálculo.

Existen muchos métodos para encontrar el mínimo de un funcional F , en este trabajo buscaremos al mínimo siguiendo el *Teorema de Weierstrass* generalizado, para funciones continuas en espacios compactos de dimensión infinita, para esto, se requieren conceptos básicos de topología y de análisis funcional.

Para el caso de dimensión infinita, tenemos las siguientes características:

- Los compactos en la topología fuerte son pocos, por ello consideraremos a la topología débil.
- El funcional deberá ser semicontinuo inferiormente en la topología débil, es decir, *débilmente semicontinuo inferiormente*.

Para resolver el problema de compacidad, se considera a X como un espacio de Banach reflexivo dotado de la topología débil para que todo acotado sea relativamente compacto. Para poder pasar al límite supondremos que F es débilmente semicontinuo inferiormente. Esto es,

1. Se elige una clase de funciones X junto con una noción adecuada de convergencia para que X sea completo.
2. Hay que mostrar que F está bien definido en X y que está acotado inferiormente, de modo que $F(x_k) \rightarrow \inf_{x \in X} F(x)$ sea finito. Esto implica que se puede construir una sucesión minimizante, $x_k \in X$, tal que $F(x_k) \rightarrow \inf_{x \in X} F(x)$.
3. Debemos probar que F es semicontinuo inferiormente (secuencialmente), es decir, que $x_k \rightarrow x$ implica

$$F(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k)$$

4. Finalmente, debemos demostrar que X es compacto (secuencialmente) con respecto a la convergencia considerada en el punto 1.

2.1. Conceptos de análisis funcional y resultados previos

En esta sección vamos a introducir algunos conceptos de Análisis Funcional, así como algunos resultados básicos de cálculo de variaciones para establecer los teoremas necesarios para la demostración de los resultados de esta tesis.

Definición 2.1. Un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ es un *espacio vectorial* (sobre un campo K , que puede ser real o complejo), equipado con una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ llamada *norma*, la cual cumple:

- i) $\|x\|_X \geq 0$ donde $x \in X$, la igualdad se cumple si y sólo si $x = 0$,
- ii) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$ para toda $x \in X$ y $\lambda \in K$,
- iii) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ para toda $x, y \in X$.

Ejemplo 2.2. Espacios normados.

1. $C^0[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow K \mid f \text{ es continua en } [a, b]\}$ con $\|f\| = |f|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

2. $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es continuamente diferenciable en } [a, b]\}$ con

$$\|f\| \equiv \|f\|_1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

3. $C^0[a, b]$ con $\|f\| \equiv \|f\|_0 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2}$.

Definición 2.3. Si X es un espacio vectorial normado y completo (toda sucesión de Cauchy converge en X), entonces X es un *espacio de Banach*.

Ejemplo 2.4. Espacios de Banach.

1. Los espacios de funciones $C^0[a, b]$ con la norma $\|f\|_0$ y $C^1[a, b]$ con la norma $\|f\|_1$ son espacios de Banach.
2. $C^0[a, b]$ con la $\|f\|_0$ no es un espacio de Banach ([4], página 38).

Definición 2.5. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial completo, con respecto a la norma definida por el producto interior, $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Observación 2.6. Cada espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interior que tiene asociada el espacio de Hilbert.

Ejemplo 2.7. El espacio

$$L^2[a, b] = \left\{ f(x) \text{ con } \int_a^b f(x)^2 dx < \infty \right\}$$

donde la integral es tipo Lebesgue, equipado con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

es un espacio de Hilbert.

Definición 2.8. Sean X y Y dos espacios de Banach. Un operador $T : X \rightarrow Y$ es *compacto* si para todo subconjunto M acotado de X , la imagen $T(M)$ es relativamente compacta, esto es, $\overline{T(M)}$ es compacto.

Teorema 2.9 (Representación de Riesz). *Todo funcional lineal acotado F en un espacio de Hilbert X puede ser representado en términos del producto interior, es decir,*

$$F(x) = \langle x, v \rangle$$

donde v es único y depende de F , y tiene norma $\|v\| = \|F\|$.

Demostración. Ver la demostración en [16] página 189. □

2.1.1. Espacios reflexivos

Definición 2.10. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Definimos la *norma del funcional lineal* $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\|g\|_* = \sup_{\|x\|=1} |g(x)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}. \quad (2.1)$$

Además, definimos

$$X^* = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal con } \|g\|_* < \infty\}.$$

X^* equipado con la norma (2.1) es llamado el *espacio dual* de $(X, \|\cdot\|)$.

Sea X un espacio de Banach y $f \in X^*$. La función $\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ genera la aplicación $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$.

Cuando f recorre X^* se obtiene una familia $\{\varphi_f\}_{f \in X^*}$ de aplicaciones de X a \mathbb{R} .

Definición 2.11. Sea X un espacio de Banach y sea $i : X \rightarrow X^{**}$ la inyección canónica definida como $\langle i(x), (f) \rangle = \langle f, x \rangle$ para todo $x \in X$ y $f \in X^*$, como consecuencia del Teorema de Hahn–Banach, esta inyección es inyectiva, en caso de que i sea suprayectiva ($i(X) = X^{**}$), entonces X es *reflexivo*.

Lema 2.12. *Sea X un espacio de Banach, entonces X es un espacio reflexivo, si y sólo si, X^* es reflexivo.*

Teorema 2.13 (Eberlein–Šmulian). *Sea X un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ en X convergente en la topología débil $\sigma(X, X^*)$, entonces X es reflexivo.*

Demostración. Ver la demostración en [4], página 50. □

2.1.2. Espacios de Sobolev

Definición 2.14. El *soporte de una función continua* es el complementario del mayor abierto sobre el que f se anula. Se dice que una función tiene *soporte compacto* si el conjunto donde no se anula, forma un conjunto cerrado y acotado, es decir,

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 2.15. Denotamos por $C_c^k(\Omega)$ el espacio de Banach de las *funciones continuas con soporte compacto*, equipado con la norma

$$\|u\| = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Ahora, consideremos $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, y $I = (a, b)$. Definimos

$$L^p(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible y } \int_a^b |f|^p < \infty\}.$$

Definición 2.16. Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado o no, y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, un *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ se define como

$$W^{1,p}(I) = \left\{ x \in L^p(I) \mid \exists y \in L^p(I) \text{ tal que } \int x\varphi' = - \int y\varphi \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Definición 2.17. Sea I y p descritas como en la definición anterior, entonces definimos a $H^{1,p}(I)$ como la completación de $\{x \in C^1(I) : \|x\|_{1,p} < \infty\}$, donde $\|x\|_{1,p} = (\int_I (|x(t)|^p + |\dot{x}(t)|^p) dt)^{\frac{1}{p}}$.

Obsérvese que no siempre $H^{1,p} = W^{1,p}$ (ver [26], página. 67).

En particular si $p = 2$, tenemos que $H^1 = H^{1,2}(I) = W^{1,2}(I)$ y

$$W^{1,2}(I) = \left\{ x \in L^2(I) \mid \exists y \in L^2(I) \text{ tal que } \int x\varphi' = - \int y\varphi \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Proposición 2.18. *El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W^{1,p}$ es reflexivo¹ para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio H^1 es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración. Ver la demostración en [4], página 121. □

Teorema 2.19 (Densidad). *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \rightarrow u$ en $W^{1,p}(I)$.*

Demostración. Ver la demostración en [4], página 127. □

Teorema 2.20. *Existe una constante C (dependiente sólo de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{para toda } u \in W^{1,p}(I), \quad \text{para toda } 1 \leq p \leq \infty,$$

dicho de otro modo $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ con inyección continua para todo $1 \leq p \leq \infty$. Además cuando I es acotado se verifica

(a) *la inyección $W^{1,p}(I) \subset C^0(\bar{I})$ es compacta para $1 < p \leq \infty$.*

(b) *la inyección $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ es compacta para $1 \leq q < \infty$.*

Demostración. Ver la demostración en [4], página 129. □

¹Esta propiedad es una ventaja *considerable* del espacio $W^{1,p}$ con respecto al espacio de funciones de clase C^1 , el cual no es reflexivo.

2.1.3. Convergencia débil y convergencia fuerte

Definición 2.21. (Convergencia Fuerte) Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio vectorial normado X , *converge fuertemente* si existe un elemento $x \in X$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Se dice que x es el *límite fuerte* de $\{x_n\}$ y se denota como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, ó simplemente $x_n \rightarrow x$.

Definición 2.22. (Convergencia Débil) Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio vectorial normado X , *converge débilmente* si existe un elemento $x \in X$ tal que, para cada $f \in X^*$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

Se dice que x es el *límite débil* de $\{x_n\}$ y se denota como $x_n \rightarrow x$, o simplemente $x_n \rightharpoonup x$.

Definición 2.23. La *topología débil* sobre X , denotada por $\sigma(X, X^*)$, es la topología menos fina (con un número mínimo de abiertos) sobre X , tal que todas las aplicaciones $\{\varphi_f\}_{f \in X^*}$ son continuas.

Lema 2.24. Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente en un espacio normado X . Entonces:

- i) El límite débil x de $\{x_n\}$ es único.
- ii) Toda subsucesión de $\{x_n\}$ converge débilmente a x .
- iii) La sucesión $\{\|x_n\|\}$ es acotada.

Demostración. Ver la demostración en [16], página 258. □

Definición 2.25. Sea Ω un subconjunto de X . Decimos que Ω es *débilmente cerrado* si para toda $x_n \in \Omega$, tal que $x_n \rightharpoonup x$, se cumple que $x \in \Omega$.

Proposición 2.26. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que

- i) $x_n \rightarrow x$ en $\sigma(X, X^*)$ si y sólo si $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, para toda $f \in X^*$.
- ii) Si $x_n \rightarrow x$, converge fuertemente, entonces $x_n \rightarrow x$ converge débilmente para $\sigma(X, X^*)$.

Lema 2.27 (Convergencia fuerte y débil). Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio vectorial normado X , entonces se cumple lo siguiente:

i) Si $\{x_n\}$ converge fuertemente, entonces $\{x_n\}$ converge débilmente al mismo límite x .

ii) Si $\dim X < \infty$, entonces la convergencia débil implica la convergencia fuerte.

Demostración. Ver la demostración en [16] página 259. \square

Definición 2.28. Sea X un espacio de Banach reflexivo, decimos que un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *débilmente semicontinuo inferiormente*, si dada una sucesión tal que $x_n \rightharpoonup x$, se cumple que $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$.

Lema 2.29. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

i) Si $x_n \rightharpoonup x$ converge débilmente en $\sigma(X, X^*)$, entonces $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$, es decir la norma es débilmente semicontinua inferiormente.

ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ converge débilmente en $\sigma(X, X^*)$ y $f_n \rightarrow f$ converge fuertemente en X^* (es decir, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$), entonces $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demostración. Ver la demostración en [4], página 36. \square

Definición 2.30. Sean X y Y espacios de Banach. Un operador $T \in L(X, Y)$ (conjunto de funciones lineales de X a Y) es *compacto*, si para toda sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$, $\{T(x_n)\}$ tiene una subsucesión convergente en Y .

Teorema 2.31. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto y $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente a x en X , entonces $\{T(x_n)\}$ converge fuertemente a $y = T(x)$ en Y .

Demostración. Ver demostración en [16], página 410. \square

Ahora, vamos a definir una topología particular sobre el espacio dual X^* , la cual es una topología débil*, denotada por $\sigma(X^*, X)$. Para cada $x \in X$, consideremos la aplicación $\varphi_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_x(f) = f(x)$. Cuando x recorre a todo X , obtenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ continuas.

Definición 2.32. Una *topología débil**, denotada por $\sigma(X^*, X)$, es la topología menos fina (con un número mínimo de abiertos) sobre X^* de tal forma que todas las aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ son continuas.

Teorema 2.33 (Banach–Alaoglu–Bourbaki). La bola unitaria en X^* , es decir $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ es compacta en la topología débil* $\sigma(X^*, X)$.

Demostración. Ver la demostración en [4], página 42. \square

2.1.4. Variación de Gâteaux y derivada de Fréchet

Como estamos en busca de condiciones para que el funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tenga un mínimo, necesitamos una generalización del concepto de derivada, la más simple es la derivada de Gâteaux.

Sea X un espacio de Banach equipado con la norma $\|\cdot\|_X$ y sea $F(x) < +\infty$. Consideremos que para cada $h \in X$ existe un funcional acotada L en X , tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(x + sh) - F(x) - L(sh)\} = 0$$

ó equivalentemente

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(x + sh) - F(x)\} = L(h)$$

entonces $\delta_x F(h) := L(h)$ es llamada la *variación de Gâteaux de F en x* en la dirección de $h \in X$.

Sea $\mathfrak{D}_x = \{h \in X \text{ tal que } \delta_x F(h) \text{ existe}\}$, es decir el espacio de direcciones para los cuales está definida la variación de Gâteaux. La aplicación $\delta_x F : h \mapsto \delta_x F(h)$ es llamada variación de Gâteaux (o primera variación) de F en x , la cual es lineal en el espacio de variaciones admisibles en x .

F se dice que es Gâteaux diferenciable en $x \in X$ si $\mathfrak{D}_x = X$ y en este caso $\delta_x F$ es llamada la *derivada de Gâteaux de F en x* .

Observación 2.34. Notemos que si $s \in \mathbb{R}$ es suficientemente pequeño, podemos tomar $s \rightarrow F(x + sh)$, y como consecuencia, si existe la variación de Gâteaux de F en x en la dirección de h , debemos tener

$$\delta_x F(h) = \left. \frac{d}{ds} F(x + sh) \right|_{s=0}.$$

Definición 2.35. Sea $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional, y supongamos que $F(x_0) < +\infty$. Decimos que F es *Fréchet diferenciable* en x_0 si existe $L \in X^*$ tal que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{F(x + v) - F(x) - L(v)}{\|v\|} = 0.$$

L se llama *derivada de Fréchet* de F en x_0 y se denota por $DF(x_0) = L$.

Si $DF(x) = 0$, entonces x es llamado *punto crítico de F* . Si $X_0 \subset X$ es un subespacio de X y $DF(x) = 0$ es un funcional lineal en $T_x X_0$, entonces x es llamado *punto crítico de F en X_0* .

Si F es diferenciable en el sentido de Fréchet, claramente F es continua, Gâteaux diferenciable y $DF(x) = \delta_x F$, donde ambas están bien definidas. Por otro lado, si X

es un espacio de Hilbert con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, entonces por el Teorema de la Representación de Riesz, existe un único $\nabla F(x) \in X$, llamado el X -gradiente de F en x , tal que $DF(x)(h) = \langle \nabla F(x), h \rangle_X$, para todo $h \in X$.

Lema 2.36. Sean F , X , \mathfrak{D}_x definidos como antes. Supongamos que F restringido al subconjunto X_0 de X tiene un extremo relativo finito $x \in X_0$. Si existe un subconjunto balanceado² no vacío \mathfrak{B} de \mathfrak{D}_x tal que satisface que $x + \mathfrak{B} \subset X_0$, entonces

$$\delta_x F(h) = 0 \text{ para cualquier } h \in \mathfrak{B}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $F|_{X_0}$ tiene un mínimo x , entonces para cualquier $|s| < 1$, con $h \in \mathfrak{B}$ y $x \pm sh \in X_0$ (ya que \mathfrak{B} es un subconjunto balanceado), tenemos

$$-\delta_x F(h) \leq \frac{1}{s} \{F(x + sh) - F(x) - \delta_x F(sh)\}, \quad (2.2)$$

$$\delta_x F(h) \leq \frac{1}{s} \{F(x - sh) - F(x) + \delta_x F(sh)\}.$$

Luego de (2.2) tenemos que cuando $s \rightarrow 0$, $-\delta_x F(h) \leq 0$ y $\delta_x F(h) \leq 0$, y como consecuencia concluimos que $\delta_x F(h) = 0$. \square

2.1.5. Ecuación de Euler–Lagrange

La ecuación de *Euler–Lagrange* en cálculo de variaciones es la condición necesaria para la existencia de un máximo o un mínimo, a lo largo de esta sección se darán los detalles de esta afirmación.

Sea $T > 0$, un entero positivo y sea F un funcional definido como

$$F(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.3)$$

donde

$$x \in \mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{R}^n) = W^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^n)$$

y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es acotada inferiormente y de clase C^2 en un conjunto abierto de la forma $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

²Un conjunto C se dice balanceado si dado un $x \in C$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < 1$ se tiene $\lambda x \in C$.

Supongamos que se cumple lo siguiente

$$x \in H^1([0, T], \Omega) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \quad (2.4)$$

donde $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ y por lo tanto $f(x, \dot{x}, t)$ es C^1 en \dot{x} , pues suponemos que $f \in C^2$ en un abierto de la forma $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Sea $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Para toda $|s|$ suficientemente pequeña, $x(t) + sh(t) \in \Omega$, para todo $t \in [0, T]$ y

$$f(x + sh, \dot{x} + s\dot{h}, t) = f(x, \dot{x}, t) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} \right) s + O(s^2).$$

Ya que $x \in H^1$ y $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t)$ es continua, tenemos que

$$\Phi_x(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau$$

está bien definida. Integrando por partes $\int_0^T \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h \, dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{F(x + sh) - F(x)}{s} &= \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} \right) dt + O(s) \\ &= \Phi_x(T) \cdot h(T) + \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} \, dt + O(s). \end{aligned}$$

Notemos que la integral

$$\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} \, dt$$

es una función continua. Además, considerando (2.4), tenemos que $C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{D}_x$ y

$$\delta_x F(h) = \Phi_x(T) \cdot h(T) + \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} \, dt.$$

Por otro lado, es conveniente considerar al conjunto de variaciones admisibles como un conjunto balanceado, es decir:

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{t \in [0, T]} |h(t)| < \epsilon\}. \quad (2.5)$$

Sea $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$, la variación de Gâteaux de F , es

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt. \quad (2.6)$$

Integrando nuevamente por partes ahora $\int_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} dt$, tenemos que

$$\delta_x F(h) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot h \Big|_0^T + \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \right) \cdot h dt.$$

Luego si $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ entonces la fórmula para la variación de Gâteaux está dada por

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \right) \cdot h dt \quad (2.7)$$

Ahora, vamos a calcular la variación de Gâteaux de determinados funcionales.

Ejemplo 2.37. Sea $F : \Omega \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un funcional definido como

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(a(t)|\dot{x}(t)|^2 + b(t)|x(t)|^2 \right) dt, \quad a(t), b(t) \in C^1(\mathbb{R}).$$

donde $\Omega = \{x \in H^1([0, T], \mathbb{R}) : x(0) = x(T)\}$ es el dominio de F .

Dados $x, y \in \Omega$ tal que, $x + sy \in \Omega$ para toda $s \in \mathbb{R}$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x + sy) &= \int_0^T \left[a(t) \cdot (\dot{x}(t) + s\dot{y}(t))^2 + b(t) \cdot (x(t) + sy(t))^2 \right] dt \\ &= \int_0^T \left[a(t) \cdot (\dot{x}(t))^2 + b(t) \cdot (x(t))^2 \right] dt \\ &\quad + 2s \int_0^T \left[a(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t) + b(t)x(t)y(t) \right] dt \\ &\quad + s^2 \int_0^T \left[a(t)(\dot{y}(t))^2 + b(t)(y(t))^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Por la Observación 2.34 tenemos que

$$\delta_x \mathcal{A}(y) = \frac{d}{ds} \mathcal{A}(x + sy) \Big|_{s=0} = 2 \int_0^T \left[a(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t) + b(t)x(t)y(t) \right] dt.$$

Por último para obtener la derivada de Gâteaux, calculamos la integral anterior por partes,

$$\begin{aligned} \delta_x \mathcal{A}(y) &= 2a(t)\dot{x}(t)y(t) \Big|_0^T - 2 \int_0^T \left[\dot{a}(t)\dot{x}(t) + a\ddot{x}(t) \right] y(t) dt + 2 \int_0^T b(t)x(t)y(t) dt \\ &= 2a(T)\dot{x}(T)y(T) - 2a(0)\dot{x}(0)y(0) + 2 \int_0^T \left[-a(t)\ddot{x}(t) - \dot{a}(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) \right] y(t) dt \\ &= 2 \int_0^T \left[-a(t)\ddot{x}(t) - \dot{a}(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) \right] y(t) dt. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.38. Sea

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{\alpha}{|x(t)|} \right) dt$$

con $x \in H^1([0, T], \mathbb{C})$. Sea $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ dado por (2.5), luego por (2.7) la variación de Gâteaux es:

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \int_0^T \left(m\ddot{x}(t) - \alpha \frac{x(t)}{|x(t)|^3} \right) \cdot h dt.$$

Ahora vamos a enunciar un resultado conocido como Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones o Lema de Du–Bois Reymond, el cual proporciona una primera condición necesaria para la existencia de un mínimo.

Lema 2.39 (Du Bois–Raymond). *Si $H \in (C^0[0, T], \mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_a^T H(t)\dot{h}(t)dt = 0$$

para cualquier $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$, entonces existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(t) = c$ para $t \in [0, T]$.

Demostración. Sea $c = \frac{1}{T} \int_0^T H(t)dt$ y $h(t) = \frac{1}{k} \int_0^t (H(\tau) - c)d\tau$, con $k > 0$ elegido tal que $\sup_{[0, T]} |h| < \epsilon$. Entonces $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$, $\dot{h}(t) = \frac{1}{k}(H(t) - c)$, de donde $H(t) - c = k\dot{h}(t)$. Luego

$$\int_0^T |H(t) - c|^2 dt = \int_0^T (H(t) - c)(H(t) - c) dt$$

y como consecuencia

$$\begin{aligned} \int_0^T |H(t) - c|^2 dt &= k \int_0^T (H(t) - c) \dot{h}(t) dt \\ &= k \int_0^T H(t)\dot{h}(t) dt - k \int_0^T c \dot{h}(t) dt \\ &= 0 - kc \int_0^T \dot{h}(t) dt \\ &= -kc(h(T) - h(0)) = 0 \end{aligned}$$

pues $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$. Por lo tanto $H(t) - c = 0$, y como consecuencia $H(t) = c$. \square

Teorema 2.40. *Sea $F, f, \mathfrak{X}, \mathfrak{B}_\epsilon$ definidos como en (2.3), (2.4) y (2.5). Supongamos que F restringido al subconjunto \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} tiene un extremo relativo en x , y $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \quad (2.8)$$

donde $t \in [0, T]$.

Demostración. Iniciemos por observar que \mathfrak{B}_ϵ está contenido en \mathfrak{D}_ϵ (variaciones admisibles en x) y \mathfrak{B}_ϵ es un conjunto balanceado para $\epsilon > 0$. Ya que x es un extremo relativo de $F|_{\mathfrak{X}_0}$, tenemos que $\delta_x F(h) = 0$. Por los Lemas 2.36 y 2.39 y la fórmula (2.6)

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right) \dot{h} dt = 0,$$

y por lo tanto para algún $c \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \int_a^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) = c \quad (2.9)$$

para cualquier $t \in [0, T]$. Por hipótesis $\int_a^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)$ es diferenciable con respecto a t , así como $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t)$. Derivando (2.9) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

la cual es la fórmula (2.8).

Ahora consideremos que \mathfrak{X}_0 es un subespacio de \mathfrak{X} . El cálculo de la fórmula (2.6) se realiza bajo la hipótesis de que se cumple $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$. Luego, si x es un punto crítico de F en \mathfrak{X}_0 , se cumple $\delta_x F(x) = DF(x)$ y por el Lema 2.39 la fórmula (2.8) se cumple en $[0, T]$. \square

Observación 2.41. El resultado anterior afirma que las ecuaciones de Euler–Lagrange (2.8) son condiciones necesarias para la existencia de un mínimo del funcional de acción F , sin embargo una solución x de la ecuación de Euler–Lagrange no necesariamente es un punto crítico de F , pues la derivada de Fréchet $DF(x)$ no siempre existe.

2.2. Cálculo de variaciones en el problema de los n cuerpos

En esta sección vamos a estudiar el problema de los n cuerpos en el ambiente variacional. Sea $V = \{x \in (\mathbb{R}^3)^n : m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = 0\}$ el espacio de configuraciones, es decir, el espacio de posiciones con el centro de masa en el origen de coordenadas, y sea

$$\mathfrak{X} = H^1([0, T], V) = W^{1,2}([0, T], V). \quad (2.10)$$

El Lagrangiano $L(x, \dot{x})$ de $x \in \mathfrak{X}$ está definido por

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\dot{x}_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|. \quad (2.11)$$

Notemos que el Lagrangiano está bien definido casi en todas partes, pues x es absolutamente continua. Sea $\Omega = V \setminus \Delta$, donde $\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n : x_i = x_j \text{ para alguna } i \neq j\}$ es el conjunto de colisiones. Sea $x(t) \in \Omega$ para cualquier $t \in [0, T]$, y vamos a suponer que x satisface las condiciones dadas en (2.4).

El funcional de acción $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ asociado a la ecuación de movimiento de n cuerpos (1.1) en el intervalo $[0, T]$ está definido por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt. \quad (2.12)$$

Observemos que $H^1([0, T], V)$ es el espacio natural de trayectorias, pues la integral contiene términos con derivada al cuadrado.

Notemos que $L(x, y)$ como una función del espacio tangente de V (TV) es diferenciable en (x, y) excepto para $x \in \Delta$. Si $x \in V \setminus \Delta$ para $t \in [0, T]$, entonces existe un $\epsilon > 0$ pequeño tal que, $x(t) + h(t) \in V \setminus \Delta$ para todo $t \in [0, T] \in \mathfrak{B}_\epsilon$, donde

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T], V) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{t \in [0, T]} |h(t)| < \epsilon\}. \quad (2.13)$$

Por el Teorema 2.40 se concluye el siguiente corolario.

Corolario 2.42. *Sea \mathcal{A} , \mathfrak{X} , \mathfrak{B}_ϵ definidas por (2.10), (2.12) y (2.13). Supongamos que existe un extremo relativo x de \mathcal{A} en el subconjunto \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} . Si $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ y $x(t) \in V \setminus \Delta$ para cualquier $t \in [0, T]$, entonces $x(t)$ es una solución de la ecuación de movimiento del problema de los n cuerpos.*

Por otro lado, supongamos que \mathfrak{X}_0 es un subespacio de \mathfrak{X} , y x es un punto crítico de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 . Si $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$, entonces $x(t)$ resuelve la ecuación de movimiento para el problema de los n cuerpos para todo $x(t) \in V \setminus \Delta$.

2.2.1. Principio de simetría de Palais

En esta sección trataremos la relación entre los puntos críticos y las simetrías del funcional F . Si restringimos F a un subespacio \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} , con frecuencia es conveniente considerar elementos en \mathfrak{X}_0 los cuales comparten ciertas simetrías de F .

Supongamos que G es un grupo que actúa en \mathfrak{X}_0 por difeomorfismos a través de la acción $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{X}_0)$ y supongamos que F es ρ invariante en \mathfrak{X}_0 (es decir, $F(\rho(g)x) = F(x)$, para todo $x \in \mathfrak{X}_0$).

Sea

$$\mathfrak{X}_0^\rho = \{x \in \mathfrak{X}_0 : \rho(g)x = x \ \forall g \in G\} \quad (2.14)$$

es decir, el conjunto de elementos ρ invariantes en \mathfrak{X}_0 . Decimos que \mathfrak{X}_0^ρ es un subespacio, si ρ es una representación lineal (es decir, $\rho(g)$ es un automorfismo lineal

para todo $g \in G$). El conjunto de puntos críticos de la restricción $F|_{\mathfrak{X}_0}: \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son llamados ρ -puntos críticos de F en \mathfrak{X}_0 . La pregunta natural que surge es: ¿un punto ρ -crítico es un punto crítico?. El siguiente teorema responde a esta pregunta.

Teorema 2.43. *Sea F el funcional definido como en (2.3) y $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Consideremos a $F|_{\mathfrak{X}_0}$, donde \mathfrak{X}_0 es un subespacio de \mathfrak{X} . Sea G un grupo que actúa sobre \mathfrak{X}_0 a través de la representación ortogonal $\rho: G \rightarrow GL(\mathfrak{X}_0)$, donde $GL(\mathfrak{X}_0)$ denota el grupo de automorfismos lineales en \mathfrak{X}_0 . Supongamos que $F|_{\mathfrak{X}_0}$ es invariante bajo la representación ρ y es Fréchet diferenciable en $x \in \mathfrak{X}_0$.*

- (a) *Sea $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$ un punto ρ -crítico de F en \mathfrak{X}_0 , entonces x es un punto crítico de F en \mathfrak{X}_0 .*
- (b) *Sean f, \mathfrak{B}_ϵ como en (2.4) y (2.13). Si $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces un punto x, ρ crítico de F en \mathfrak{X}_0 es solución de la ecuación de Euler–Lagrange (2.8).*

Demostración. Denotemos a $F|_{\mathfrak{X}_0} = F$. Como F es invariante bajo la representación ρ y es Fréchet diferenciable en $\rho(g)x$ para toda $g \in G$, entonces

$$DF(x) = D(F \circ \rho(g))(x) = DF(\rho(g)x) \circ \rho(g).$$

Sea $\nabla F(x)$ el gradiente H^1 de F en x , ya que $\rho(g)$ es ortogonal, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(x), h \rangle_{H^1} &= DF(x)(h) \\ &= DF(\rho(g)x)(\rho(g)h) \\ &= \langle \nabla F(\rho(g)x), \rho(g)h \rangle_{H^1} \\ &= \langle \rho(g)^{-1} \nabla F(\rho(g)x), h \rangle_{H^1} \quad \forall g \in G, \forall h \in \mathfrak{X}_0. \end{aligned}$$

Es decir, ∇F es *equivariante* con respecto a ρ en el sentido de que se satisface $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(\rho(g)x)$ para toda $g \in G$ y $x \in \mathfrak{X}_0$.

Por otro lado, supongamos que x es ρ invariante, entonces $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(x)$ para toda $g \in G$, luego $\nabla F(x) \in \mathfrak{X}_0^\rho$. Si $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$ es un punto ρ -crítico de F en \mathfrak{X}_0 , por definición de gradiente, $\nabla F(x)$ es ortogonal en \mathfrak{X}_0^ρ . Por lo tanto $\nabla F(x) = 0$, es decir los puntos ρ -críticos de F son puntos críticos de F en \mathfrak{X}_0 , por lo tanto se satisface la primera parte del Teorema.

Por el inciso (a) todo punto ρ -crítico de $F|_{\mathfrak{X}_0}$ es un punto de $F|_{\mathfrak{X}_0}$ y por el Teorema 2.40, x satisface la ecuación Euler–Lagrange. \square

2.3. Existencia de minimizadores

2.3.1. Principio variacional

El funcional de acción $\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt$ (asociado al problema de n cuerpos) restringido al espacio $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$ ó $H^1(S_T, V)$ con $S_T := [0, T]/\{0, T\}$, no alcanza su mínimo. Tenemos que $\mathcal{A}(x) > 0$ para toda $x \in \mathfrak{X}$. Consideremos la sucesión $(x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)) \in (\mathbb{R}^3)^n$ definida por

$$x_i^{(k)}(t) \equiv (k \cos(2\pi i/k), k \sin(2\pi i/k), 0).$$

Esta sucesión $x^{(k)}$ es divergente y $\mathcal{A}(x^{(k)}) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$. Luego $\inf_{\mathfrak{X}} \mathcal{A} = 0$, es decir, el ínfimo no se alcanza en \mathfrak{X} .

Por otro lado, el Teorema 2.40 y Corolario 2.42, nos permiten restringir el problema al subespacio \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} . Para asegurar la existencia de mínimos, el subespacio a elegir debe ser de tal forma que las sucesiones convergentes puedan ser minimizantes. Una condición para garantizar esto es pedir que \mathcal{A} sea *coercitivo* en $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$.

Definición 2.44. Un funcional F en un espacio normado \mathfrak{X} , es llamado *coercitivo* en un subconjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ si $F(x) \rightarrow +\infty$, cuando $\|x\| \rightarrow +\infty, x \in \mathfrak{X}_0$.

Definición 2.45. Un funcional F es *coercitivo*, si y sólo si existen dos constantes positivas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $F(x) > \alpha\|x\| + \beta$, para todo $x \in \mathfrak{X}$.

Teorema 2.46. Sea \mathfrak{D} un espacio de Banach reflexivo, con norma $\|\cdot\|$, y sea $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$ un subconjunto débilmente cerrado. Supongamos que $F : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, satisfice las siguientes condiciones:

- (a) F es coercitivo en \mathfrak{D}_0 ,
- (b) F es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en \mathfrak{D}_0 ,

entonces F restringido en \mathfrak{D}_0 es acotado inferiormente y alcanza su mínimo.

Demostración. Si $F \equiv +\infty$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $F \not\equiv +\infty$, $F|_{\mathfrak{D}_0}$ es acotado inferiormente pues F es coercitivo (Definición 2.45). Sea $\{x_n\} \in \mathfrak{D}_0$ una sucesión infinizante, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \inf_{\mathfrak{D}_0} F(x) = \gamma$ y existe una constante $M > 0$ tal que $\|x_n\| < M$ en \mathfrak{D}_0 . Por el Teorema 2.33 y por reflexividad \mathfrak{D}_0 es compacto en la topología débil*. Por el Teorema 2.13 (Eberlein–Šmulian) es secuencialmente débilmente compacto, entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge en la topología débil, sin pérdida de generalidad $x_n \rightharpoonup x$ en \mathfrak{D}_0 , pues

\mathfrak{D}_0 es débilmente cerrado. Como F es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en \mathfrak{D}_0 entonces,

$$F(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_n) = \inf_{\mathfrak{D}_0} F(x) = \gamma$$

y por lo tanto F alcanza su mínimo en \mathfrak{D}_0 . \square

2.3.2. Funcional débilmente semicontinuo inferiormente \mathcal{A}

Para aplicar el Teorema 2.46 al sistema de ecuaciones que corresponde al problema de n cuerpos, es necesario probar la semicontinuidad débil inferior del funcional de acción correspondiente. Iniciemos con el siguiente lema.

Lema 2.47. *Sea \mathcal{A} , L , \mathfrak{X} definidos como en (2.10), (2.11) y (2.12). Entonces \mathcal{A} es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en \mathfrak{X} .*

Demostración. Sea $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ una sucesión en \mathfrak{X} , la cual converge débilmente a $x = (x_1, \dots, x_n)$. Es suficiente considerar el caso en que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) = c < +\infty$. Si fuese necesario tomar una subsucesión de $x^{(k)}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{A}(x^{(k)})$ es acotada y $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) = c < +\infty$.

Sea $r_{ij}^{(k)} := |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|$, entonces $r_{ij}^{(k)}$ converge uniformemente a r_{ij} en $C^0([0, T], V)$, pues el encaje $\mathfrak{X} \hookrightarrow C^0([0, T], V)$ es compacto (Teorema 2.20). Para cualquier par (i, j) , con $1 \leq i < j \leq n$, la sucesión $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$ es acotada en $L^1[0, T]$, pues $\mathcal{A}(x^{(k)})$ es acotada.

Sea $E_{ij} \subset [0, T]$ el conjunto de las órbitas $x(t)$ que sufren colisión, con $r_{ij} \neq 0$. Notemos que la medida de Lebesgue de E_{ij} es T . Supongamos lo contrario, digamos $|[0, T] \setminus E_{ij}| = \kappa_{ij} > 0$. Sea $\epsilon_{ij} = \frac{1}{C} m_i m_j \kappa_{ij}$ y sea $N_{ij} \in \mathbb{N}$, tal que $\|r_{ij}^{(k)} - r_{ij}\|_{C^0} < \epsilon_{ij}$ siempre que $k \geq N_{ij}$ (observemos que la convergencia $r_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k} r_{ij}$ es uniforme), entonces

$$\mathcal{A}(x^{(k)}) \geq m_i m_j \int_{[0, T] \setminus E_{ij}} \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt > \frac{m_i m_j \kappa_{ij}}{\epsilon_{ij}} = C,$$

lo cual contradice lo supuesto al inicio de la demostración.

En el conjunto E_{ij} la sucesión $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$ converge puntualmente a $\frac{1}{r_{ij}}$. Luego aplicando el Lema de Fatou tenemos

$$\int_0^T \frac{1}{r_{ij}} dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt.$$

Como $x^{(k)}$ converge fuertemente a x en $L^2([0, T], V)$ y como la norma es débilmente semicontinua inferiormente (Teorema 2.29), tenemos que para todo j , se cumple

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 &= \|x_j\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_0^T m_j \|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_0^T m_j \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A}(x)$ es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en \mathfrak{X} . \square

2.4. El problema de los n cuerpos y la condición $(NC)_\nu$

En esta sección mostraremos un criterio general para la existencia de mínimos.

Definición 2.48. Sea $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$, el subconjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ satisface la *condición de $(NC)_\nu$* en \mathfrak{X} , $\nu \in (0, 2]$ si para alguna $x \in \mathfrak{X}_0$ existe algún $\tau_x \in (0, T]$, tal que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|. \quad (2.15)$$

Es claro que la ecuación anterior es válida para $\nu \leq 0$, y falsa para $\nu > 2$ (por la desigualdad de Cauchy–Schwartz). Además, el hecho de que $\nu \in (0, 2]$ es independiente de que $x \in \mathfrak{X}_0$, esto garantiza que las curvas en \mathfrak{X}_0 deben desviarse de su posición inicial en un cierto ángulo. En este sentido la ecuación (2.15) es una *condición no central*, la cual prohíbe que las curvas se muevan sólo a lo largo de la dirección central.

Teorema 2.49. Sea \mathfrak{X} , L , \mathcal{A} , \mathfrak{B}_ϵ definidas como en (2.10), (2.11), (2.12) y (2.5). Supongamos que \mathfrak{X}_0 es un subconjunto débilmente cerrado de \mathfrak{X} que satisface la condición $(NC)_\nu$ para algún $\nu \in (0, 2]$, entonces \mathcal{A} es coercitivo y alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_0 . Si además el mínimo $x \in \mathfrak{X}_0$ satisface que $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces x es solución de (1.6) siempre que $x(t) \in V \setminus \Delta$.

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{X}_0$ y consideremos la función

$$\delta(x) := \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Ya que \mathfrak{X}_0 satisface la condición $(NC)_\nu$, escogemos un $\tau_x \in (0, T]$ tal que se satisfaga

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|.$$

Consideremos primero el caso donde $x(0) \neq 0$ y $x(\tau_x) \neq 0$. Sea θ el ángulo entre $x(0)$ y $x(\tau_x)$, $\theta \in [0, \pi]$ (ver la Figura 2.2).

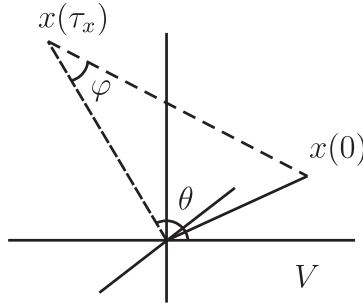


Figura 2.2: $|x(0) - x(\tau_x)| \cdot \text{sen } \phi = |x(0)| \cdot \text{sen } \theta$

Luego, $\phi = |x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| \text{sen } \theta$ y la igualdad se cumple sólo cuando $x(0) - x(\tau_x)$ es perpendicular a $x(\tau_x)$. Por hipótesis tenemos que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|,$$

o equivalentemente,

$$\frac{x(0) \cdot x(\tau_x)}{|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|} \leq (1 - \nu).$$

Ya que $x(0) \cdot x(\tau_x) = |x(0)| \cdot |x(\tau_x)| \cos \theta$, tenemos que $\cos \theta \leq (1 - \nu)$. Realicemos el estudio en varios casos.

- Caso 1. Si $\cos \theta > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &\leq (1 - \nu)^2 \\ 1 - \text{sen}^2 \theta &\leq 1 - 2\nu + \nu^2 \\ \text{sen}^2 \theta &\geq 2\nu - \nu^2 \\ \text{sen } \theta &\geq \sqrt{\nu(2 - \nu)} := C_\nu \end{aligned}$$

Entonces $|x(0) - x(\tau_x)| = |x(0)| \text{sen } \theta \geq C_\nu |x(0)|$ y por lo tanto $|x(0) - x(\tau_x)| \geq C_\nu |x(0)|$.

- Caso 2. Si $\nu = 2$. En este caso tenemos que $\cos \theta \leq -1$, $\theta = \pi$, ya que $|\cos \theta| \leq 1$. Esto implica que $x(\tau_x)$ y $x(0)$ son paralelos, luego $x(\tau_x) = Cx(0)$, con $C < 0$. Entonces, $x(0) - x(\tau_x) = x(0) - Cx(0) = (1 - C)x(0)$, y por lo tanto $|x(0) - x(\tau_x)| = (1 - C)|x(0)| \geq |x(0)|$ pues $C < 0$.
- Caso 3. $1 \leq \nu < 2$. Esto implica que $\cos \theta \leq 1 - \nu \leq 0$ lo cual implica que $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, y se sigue que $x(\tau_x) \cdot x(0) \leq 0$. Además tenemos que $|x(0) - x(\tau_x)|^2 = |x(0)|^2 - 2x(\tau_x) \cdot x(0) + |x(\tau_x)|^2 \geq |x(0)|^2$, pero $\nu \leq 1$ con lo cual tenemos $|x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| = 1|x(0)| \geq C_\nu|x(0)|$.
- Caso 4. $0 < \nu \leq 1$. Aquí tenemos que $0 \leq 1 - \nu$, así como $\cos \theta < 0$ con $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ya que x es continua, podemos elegir un nuevo $\bar{\tau}_x$ tal que

$$\cos \theta > 0 \quad \text{y} \quad \cos \theta < 1 - \nu.$$

Con lo cual el resultado se sigue del Caso 1.

Observemos que si $x(0) = 0$ ó $x(\tau_x) = 0$, tenemos

$$|x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| \geq C_\nu|x(0)|.$$

En conclusión, tenemos que en cualquiera de los casos siempre se cumple:

$$|x(0) - x(\tau_x)| \geq C_\nu|x(0)|.$$

Notemos que $|x(0)| \leq \frac{|x(0) - x(\tau_x)|}{C_\nu}$, y por lo tanto para toda $t \in (0, T]$ se cumple

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \delta(x) \leq \frac{|x(0) - x(\tau_x)|}{C_\nu} + \delta(x) \leq \left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right) \delta(x).$$

Ahora, elevando al cuadrado e integrando, tenemos

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 \delta(x)^2 T.$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz obtenemos la siguiente desigualdad

$$\delta^2(x) \leq \left| \int_0^T \dot{x} dt \right|^2 \leq \left(\int_0^T |\dot{x}| dt \right)^2 \leq T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt.$$

Finalmente la norma de Sobolev es acotada por la acción, pues se cumple:

$$\begin{aligned}
\|x\|_{H^1}^2 &= \int_0^T |x|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\
&\leq \left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 \delta(x)^2 T + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\
&\leq \left[\frac{1}{C_\nu} + 1\right]^2 T T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 T^2 + 1\right] \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\
&< \frac{2}{m} \left[\left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 T^2 + 1\right] \mathcal{A}(x)
\end{aligned}$$

donde $m = \min_i \{m_i\}$. Esto implica que sí $\|x\|_{H^1}^2 \rightarrow \infty$ entonces $\mathcal{A}(x) \rightarrow \infty$, es decir, $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_0}$ es coercitivo. Entonces por el Teorema 2.46 y Lema 2.47, el funcional de acción \mathcal{A} restringido a \mathfrak{X}_0 alcanza su mínimo.

Si $x \in \mathfrak{X}_0$ es un mínimo tal que $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para alguna $\epsilon > 0$, entonces por el Corolario 2.42, x es solución de las ecuaciones (1.2) del problema de los n cuerpos, siempre que $x(t) \in V \setminus \Delta$. Con esto queda demostrada la segunda parte del teorema. \square

Ejemplo 2.50. Sea $\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}$, entonces \mathfrak{X}_0 es débilmente cerrado y satisface la condición $(NC)_\nu$ (escogiendo $\tau = \tau_x = T$) para algún $x \in \mathfrak{X}_0$, entonces la ecuación (2.15) se satisface con $\nu = 1$. Por el Teorema 2.49, \mathcal{A} alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_0 y tal mínimo resuelve las ecuaciones de movimiento para el problema de n cuerpos, para $x \neq 0$.

Ejemplo 2.51. Sea \mathfrak{X}_1 el espacio de órbitas cerradas antisimétricas en $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$, es decir

$$\mathfrak{X}_1 := \{x \in \mathfrak{X} : x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) \text{ donde } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}.$$

\mathfrak{X}_1 es débilmente cerrado y satisface la condición $(NC)_2$: elegimos $\tau = \tau_x = \frac{T}{2}$, para todo $x \in \mathfrak{X}_1$, entonces la ecuación (2.15) se satisface con $\nu = 2$. Como consecuencia, el funcional de acción \mathcal{A} alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_1 , y tal mínimo resuelve la ecuación de movimiento para el problema de n cuerpos y $x(t) \in V \setminus \Delta$.

Observación 2.52. La simetría $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$ es llamada *simetría italiana* en [7] y [8] ya que ella fue introducida y estudiada por los matemáticos italianos: [10] y [9], [28].

Capítulo 3

Métodos variacionales en el problema de Kepler

En este capítulo caracterizaremos las soluciones elípticas T periódicas del problema de Kepler en \mathbb{R}^2 (de período mínimo) como mínimos del funcional de acción, definido por la integral del Lagrangiano en el espacio de curvas cerradas, excluyendo las colisiones, bajo la restricción topológica de que el índice de rotación del cuerpo alrededor del centro de masa no sea nulo. Este resultado fue demostrado por Gordon [14].

3.1. Resultados clásicos

Sea $V = \mathbb{C}$ el espacio de configuración, y consideremos el espacio de Sobolev definido por $\mathfrak{X} := H^1([0, T], \mathbb{C})$ ó $\mathfrak{X} := H^1(S_T, \mathbb{C})$ donde $S_T = [0, T]/\{0, T\}$.

En el Capítulo 1 obtuvimos que las ecuaciones de movimiento del problema de Kepler están dadas por el sistema

$$m\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{|x|^3} \quad (3.1)$$

donde $x = |x_1 - x_2| \in \mathbb{C}$ es el vector de posición, $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ y $\alpha = m_1 m_2$.

El sistema (3.1) representa las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional de acción definido por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt = \int_0^T \left(\frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{m_1 m_2}{|x|} \right) dt, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Ya que $x \in \mathbb{C}$, tomamos $x = x_1 + ix_2$ de donde $x_1 = r \cos \theta$ y $x_2 = r \sin \theta$, y obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta, \\ \dot{x}_2^2 &= \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta\end{aligned}$$

de tal forma que $|\dot{x}|^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.

En términos de coordenadas polares, $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, el Lagrangiano está dado por

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = K(r, \dot{r}, \dot{\theta}) - U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}. \quad (3.2)$$

La ecuación de movimiento en coordenadas polares toma la forma

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\alpha}{r^2}, \\ mr^2\dot{\theta} = J \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $J = |\mathbf{J}|$. Ahora, reordenemos los términos de la primera ecuación del sistema anterior para obtener

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= -\frac{\alpha}{r^2} \\ m\ddot{r} &= -\frac{\alpha}{r^2} + mr\dot{\theta}^2 \\ m\ddot{r} &= -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{J^2}{mr^3} = -U'_{efec}(r).\end{aligned}$$

El *potencial efectivo* es $U_{efec}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} + U(r)$.

Recordemos que si el movimiento es colineal, el momento angular $J = 0$. Por otro lado, cuando $J \neq 0$, tenemos que $r \neq 0$ y $\dot{\theta} \neq 0$. Ahora realicemos el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ y eliminamos el tiempo en las ecuaciones (3.3). Hacemos uso de la regla de cadena de tal forma que

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{J}{m} \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{J}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{J}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{J}{m} \right)^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}\end{aligned}$$

y obtenemos la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2r}{dt^2} - mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\alpha}{r^2}$$

la cual se transforma en

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m\alpha}{J^2} \quad (3.4)$$

con solución general

$$u(\theta) = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + \frac{m\alpha}{J^2}. \quad (3.5)$$

Ahora, si tomamos $c_1 = R \cos \theta_0$, $c_2 = R \sin \theta_0$, $B^2 = c_1^2 + c_2^2$ y $\tan \theta_0 = \frac{c_2}{c_1}$ tenemos que

$$u(\theta) = \frac{m\alpha}{J^2} + B \cos(\theta - \theta_0), \quad B \geq 0, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi) \quad (3.6)$$

pues

$$B \cos(\theta - \theta_0) = B \cos \theta \cos \theta_0 + B \sin \theta \sin \theta_0.$$

En la ecuación (3.6) r y θ están relacionadas en la siguiente expresión

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (3.7)$$

donde $2p = \frac{2J^2}{m\alpha} > 0$ es el *lactus rectum*, $e = \frac{BJ^2}{m\alpha} \geq 0$ la *excentricidad*. La ecuación (3.7) es exactamente la ecuación (1.16) obtenida en el Capítulo 1.

Ahora, consideremos la energía H en coordenadas polares, y obtenemos

$$\begin{aligned} H(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{J^2}{2m} \left(\left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ entonces $\frac{d}{d\theta}u(\theta) = \frac{1}{d\theta} \left(\frac{1}{r(\theta)} \right)$, y usando (3.6) tenemos

$$\begin{aligned}
H(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) &= \frac{J^2}{2m} \left([u'(\theta)]^2 + [u(\theta)]^2 \right) - \alpha u(\theta) \\
&= \frac{J^2}{2m} \left(B^2 \operatorname{sen}^2(\theta - \theta_0) + \frac{m^2 \alpha^2}{J^4} + \frac{2m\alpha B}{J^2} \cos(\theta - \theta_0) + B^2 \cos^2(\theta - \theta_0) \right) \\
&\quad - \alpha \left(\frac{m\alpha}{J^2} + B \cos(\theta - \theta_0) \right) \\
&= \frac{J^2}{2m} \left(B^2 + \frac{m^2 \alpha^2}{J^4} + \frac{2m\alpha B}{J^2} \cos(\theta - \theta_0) \right) - \frac{m\alpha^2}{J^2} - B\alpha \cos(\theta - \theta_0) \\
&= \frac{m\alpha^2}{2J^2} + \frac{B^2 J^2}{2m} - \frac{m\alpha^2}{J^2} = -\frac{1}{2} \frac{m\alpha^2}{J^2} + \frac{1}{2} \frac{B^2 J^2}{m} \\
&= \frac{m\alpha^2}{2J^2} \left(\frac{B^2 J^4}{m^2 \alpha^2} - 1 \right) \\
&= \frac{m\alpha^2}{2J^2} (e^2 - 1).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$H(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m\alpha^2}{2J^2} (e^2 - 1). \quad (3.9)$$

A partir de las ecuaciones (3.7) y (3.9), tenemos que la órbita Kepleriana x con momento angular $J \neq 0$ es periódica si y sólo si cumple una de las siguientes condiciones:

<i>Excentricidad</i>	<i>Energía</i>	<i>Órbita</i>
$e = 0$	$H = -\frac{m\alpha^2}{2J^2}$	x es circular
$0 < e < 1$	$H < 0$	x es elíptica

Supongamos que x es una órbita Kepleriana elíptica con período mínimo T . Escogiendo de manera adecuada las coordenadas y haciendo una traslación de la variable correspondiente al tiempo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\theta_0 = 0$ y $\theta(0) = 0$. Para la segunda ecuación de (3.3) obtenemos

$$\frac{JT}{2m} = \int_0^{\frac{T}{2}} r^2 \dot{\theta} dt = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{p^2 \pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sea a el semieje mayor de la órbita elíptica, y consideremos la ecuación (3.9), además de $p = \frac{J^2}{m\alpha}$, entonces tenemos que $a = \frac{p}{(1 - e^2)} = -\frac{\alpha}{2H}$.

Como $\frac{JT}{2m} = \frac{p^2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$, despejamos a T y elevando al cuadrado para obtener lo siguiente

$$T^2 = 4m\pi^2 \left(\frac{p^3}{(1-e^2)^3} \right) \left(\frac{mp}{J^2} \right) = 4m\pi^2 a^3 \frac{mp}{J^2} = \frac{4m\pi^2}{\alpha} a^3. \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) se refiere a la *tercera ley de Kepler*, es decir el cuadrado del período es proporcional al cubo del eje mayor.

Otra forma de obtener la ecuación (3.10) es tomar la primera igualdad de la ecuación (3.8) y considerar la variable auxiliar E (*anomalía excéntrica*).

Sea r definida por

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3.11)$$

Despejando $|\dot{r}|$ de la primera igualdad de la ecuación (3.8) y considerando la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} |\dot{r}| &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(H + \frac{\alpha}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(-\frac{\alpha}{2a} + \frac{\alpha}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{mr^2} \left(-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{p}{2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{mr^2} \left(-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{a(1-e^2)}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sqrt{-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{a(1-e^2)}{2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $\frac{r}{a} - 1 = -e \cos E$. Elevando al cuadrado ambos lados y reordenando los términos obtenemos

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a} = -\frac{2}{a} \left(r - \frac{r^2}{2a} \right) = e^2 \cos^2 E - 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sqrt{-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{a(1-e^2)}{2}} &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sqrt{-\frac{a}{2}(e^2 \cos^2 E - 1) - \frac{a}{2} + \frac{ae^2}{2}} \\
&= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sqrt{\frac{ae^2}{2}(1 - \cos^2 E)} \\
&= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\alpha a}{m}} e \operatorname{sen} E \\
&= \frac{a}{r} \sqrt{\frac{\alpha}{ma}} e \operatorname{sen} E \\
&= \sqrt{\frac{\alpha}{ma}} \left(\frac{e \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{\alpha}{ma}} \left(\frac{e \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E} \right).$$

Por otro lado, de (3.11) calculamos $\frac{dr}{dE}$, además consideramos la última ecuación para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\dot{r}|} dr &= \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \left(\frac{1 - e \cos E}{e \operatorname{sen} E} \right) \\
&= a \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} (1 - e \cos E) dE \\
&= \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} (1 - e \cos E) dE.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sea r_{min} y r_{max} los valores máximo y mínimo que toma r , entonces tenemos

$$\frac{T}{2} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\dot{r}} dr = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} \int_0^\pi (1 - e \cos E) dE = \pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}}. \tag{3.13}$$

Observemos que ésto es equivalente a lo obtenido en (3.10).

3.2. El funcional de acción en el problema de Kepler

Sea $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$, el funcional de acción asociado a (3.1) está dado por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{\alpha}{|x(t)|} \right) dt, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Proposición 3.1. Sea $\mathfrak{X}_0 := \{x \in \mathfrak{X} : x(0), x(T) \in \mathbb{R}\}$, entonces \mathcal{A} alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_0 y cualquier mínimo resuelve la ecuación (3.1), donde $x \neq 0$.

Demostración. Sea \mathfrak{X}_0 un subespacio débilmente cerrado en \mathfrak{X} , esto se da por la compacidad del encaje $\mathfrak{X} \hookrightarrow C^0([0, T], V)$, además es cerrado en la topología débil.

Sea $x \in \mathfrak{X}_0$, y consideremos la función

$$\delta(x) = \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Además notemos que

$$\delta(x) \geq |x(0) - x(T)| = \sqrt{|x(0)|^2 + |x(T)|^2} \geq |x(0)|.$$

Como $|x(t)| - |x(0)| \leq |x(t) - x(0)| \leq \delta(x) := \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|$, entonces

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \delta(x) \leq 2\delta(x), \text{ para cualquier } t \in [0, T].$$

Elevando al cuadrado e integrando, obtenemos

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq 4\delta(x)^2 T.$$

Por otro lado, aplicamos la desigualdad de Cauchy–Schwarz a $|\dot{x} \cdot 1|$,

$$\left(\int_0^T |\dot{x} \cdot 1| \right)^2 \leq \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \int_0^T |1|^2 dt$$

Resolviendo la última integral, obtenemos

$$\left(\int_0^T |\dot{x} \cdot 1| \right)^2 \leq T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt$$

finalmente

$$\frac{1}{T} \left(\int_0^T |\dot{x} \cdot 1| \right)^2 \leq \int_0^T |\dot{x}|^2 dt$$

Entonces obtenemos

$$\int_0^T |\dot{x}|^2 dt \geq \frac{1}{T} \left(\int_0^T |\dot{x}| \right)^2 \geq \frac{\delta(x)^2}{T}$$

Por último calculamos la norma de Sobolev

$$\|x\|_{H^1}^2 = \int_0^T |x|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq (4T^2 + 1) \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq (4T^2 + 1) \left(\frac{2}{m} \right) \mathcal{A}(x).$$

de donde concluimos que $\mathcal{A}(x)$ restringido a \mathfrak{X}_0 es coercitivo. Por el Teorema 2.46 y Lema 2.47 tenemos que $\mathcal{A}(x)|_{\mathfrak{X}_0}$ alcanza su mínimo. Observemos que $\mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para alguna $\epsilon > 0$. Ahora, por el Corolario 2.42, cualquier mínimo resuelve la ecuación (3.1) siempre que $x \neq 0$. \square

Proposición 3.2. Sea $\mathfrak{X}_1 = \{x \in \mathfrak{X} : x(t) = -x(t + \frac{T}{2}), \text{ donde } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}$, entonces $\mathcal{A}(x)$ alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_1 , y tal mínimo resuelve la ecuación (3.1), con $x \neq 0$.

Demostración. El subespacio $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ es cerrado en las topologías fuerte y débil. Sea $x \in \mathfrak{X}_1$ y $x(0) = x(T)$ puede extenderse a una función periódica en \mathbb{R} con la simetría italiana $x(t) = -x(t + \frac{T}{2})$, para alguna $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= \frac{1}{4} \left| x\left(t + \frac{T}{2}\right) - x(t) \right|^2 \leq \frac{1}{4} \left(\int_t^{t+\frac{T}{2}} |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau \right)^2 \text{ Desigualdad de Jensen} \\ &\leq \frac{T}{8} \int_t^{t+\frac{T}{2}} |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau = \frac{T}{16} \int_0^T |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto al integrar con respecto de t , obtenemos

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{16} \int_0^T |\dot{x}(t)|^2 dt,$$

la norma de Sobolev es

$$\|x\|_{H^1}^2 = \int_0^T |x|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq \left(\frac{T^2}{16} + 1 \right) \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq \left(\frac{T^2}{16} + 1 \right) \left(\frac{2}{m} \right) \mathcal{A}(x).$$

Entonces el funcional de acción $\mathcal{A}(x)$ alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_1 .

Ahora, para verificar la última afirmación de la proposición necesitamos tener en cuenta algunas cuestiones. Ya que el subespacio \mathfrak{X}_1 no contiene ningún \mathfrak{B}_ϵ , no se puede aplicar directamente el Corolario 2.42. Consideremos el siguiente espacio de funciones

$$\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0) = x(T)\}.$$

Si $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces el Corolario 2.42 se puede aplicar. Observemos que $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_0$ el cual es invariante bajo la representación ortogonal $\rho : \mathbb{Z}_2 \rightarrow GL(\mathfrak{X})$ definida como

$$\rho(1)(x(t)) := -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Esto es $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_0^\rho$. El funcional de acción \mathcal{A} no es coercitivo en \mathfrak{X}_0 , entonces necesitamos considerar los mínimos de $\mathcal{A}(x)$ en \mathfrak{X}_1 . Tomando en cuenta que $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_1}$ es ρ invariante, la afirmación de que cualquier mínimo $x \in \mathfrak{X}$ resuelve la ecuación (3.1), es consecuencia del Teorema 2.43. \square

3.3. Acción de las órbitas Keplerianas elípticas y colineales

Iniciemos con algunas definiciones necesarias para los resultados del resto del capítulo.

Definición 3.3. [15] Sea C una curva cerrada y orientada, definida por $x(t)$ con $t \in [a, b]$, y sea p un punto del plano que no está en la curva. Entonces, la función $\varphi : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$\varphi = \frac{x(t) - p}{|x(t) - p|}, \quad t \in [a, b],$$

define la aplicación que da la posición de la curva relativa al punto p . Cuando un punto en C da vuelta alrededor de la curva una vez, su punto imagen $\varphi(x(t))$ se moverá alrededor de \mathbb{S}^1 un número de veces, este número es llamado el *grado de la curva* (número de vueltas) C relativo al punto p , y denotamos esto por $\text{grad}(x, p)$.

Definición 3.4. Si $x(t)$ es una órbita T periódica de grado k , definimos el *período mínimo* de la órbita como $\frac{T}{k}$. La órbita $\frac{T}{k}$ periódica se dice *órbita de período mínimo*.

Sea $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ una órbita Kepleriana elíptica con período mínimo T . Supongamos que $\theta(0) = 0$ y el ángulo fase $\theta_0 = 0$. Luego al integrar la energía potencial tenemos

$$\int_0^T U(x)dt = 2\alpha \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{r} dt = 2\alpha \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r\dot{r}} dr.$$

Ahora, dado que

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r\dot{r}} dr &= 2\alpha \int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} (1 - e \cos E) dE \\ &= 2\sqrt{m\alpha a^3} \int_0^\pi \frac{(1 - e \cos E)}{r} dE \\ &= 2\sqrt{m\alpha a^3} \int_0^\pi \frac{1}{a} dE = 2\sqrt{m\alpha a^3} \frac{\pi}{a} \\ &= 2\sqrt{m\alpha a} \pi \end{aligned}$$

y como consecuencia

$$\int_0^T U(x)dt = 2\sqrt{m\alpha a} \pi.$$

Por lo tanto el funcional de acción está dado por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T (K(\dot{x}) + U(x))dt = \int_0^T H dt + 2 \int_0^T U(x)dt = HT + 4\sqrt{m\alpha a} \pi.$$

Notemos que en la ecuación anterior, se utilizó el hecho de que $K(\dot{x}) = H + U(x)$. Ahora de la ecuación (3.13), despejamos $a = \left(\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\right)^{\frac{2}{3}}$ y tomando en cuenta que $H = -\frac{\alpha}{2a}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= HT + 4\sqrt{m\alpha a} \pi \\
&= -\frac{\alpha}{2a} + 4\sqrt{m\alpha a} \pi \\
&= -\frac{\alpha T}{2\left(\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\right)^{\frac{2}{3}}} + 4(m\alpha)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\right)^{\frac{1}{3}} \pi \\
&= -\left(\frac{m\alpha^2\pi^2 T}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 4\left(\frac{m\alpha^2\pi^2 T}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

El resultado anterior lo resumimos en el siguiente lema.

Lema 3.5. *Sea $x(t)$ una órbita de la ecuación (3.1) con período mínimo T , entonces el funcional de acción está dado por*

$$\mathcal{A}(x) = 3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}. \quad (3.14)$$

Notemos que la acción no depende de la excentricidad de la órbita e .

Observación 3.6. Sea $x = x(t)$ una órbita elíptica Kepleriana T periódica con período mínimo T , y sea $y = y(t)$ una órbita elíptica Kepleriana T periódica con período mínimo $\frac{T}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces la órbita x se obtiene de repetir k veces la órbita y , ($x(t) = y(\frac{t}{k})$), y el funcional de acción es

$$k\mathcal{A}(y) = 3k\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{T}{k}\right)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}}3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}}\mathcal{A}(x).$$

Por lo tanto la acción de la órbita $y(t)$ con período mínimo $\frac{T}{k}$ es

$$\mathcal{A}(y) = k^{\frac{2}{3}}3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}.$$

Es decir, la acción de una órbita con período mínimo T , es menor que la acción de una órbita con período mínimo $\frac{T}{k}$.

Ahora consideremos las órbitas Keplerianas colineales (es decir con $J = 0$). Una *solución extendida* $x(t)$ de la ecuación de movimiento (3.1), con $t \in [0, T]$, es una curva continua cuya trayectoria es la unión de órbitas Keplerianas y el origen. Sea $E_x \subset [0, T]$ un conjunto cerrado en el cual x se anula. Por continuidad $x(t)$ inicia ó termina en colisión en cada componente de $[0, T] \setminus E_x$, de tal forma que las componentes de $x(t)$ son líneas rectas, pues las órbitas Keplerianas colisionan sólo en configuración colineal.

La figura 3.1 muestra una solución extendida con una única componente, además de una solución extendida de dos componentes. Esta última tiene componentes de periodos T_1 y T_2 , y el período total de la trayectoria es $T = T_1 + T_2$, la cual inicia en el punto de reposo q_1 , luego la partícula va hacia el origen, emergiendo de aquí con un ángulo arbitrario para moverse hacia el punto q_2 , donde toca la curva de velocidad cero; luego en q_2 toma camino de reversa, y la trayectoria termina en q_1 .

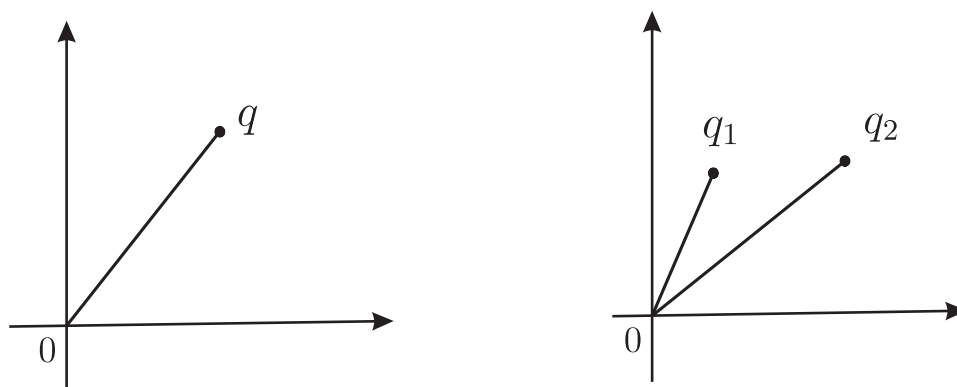


Figura 3.1: Solución extendida con una y dos componentes, respectivamente.

En este contexto, consideremos el caso de órbitas de colisión–expulsión con una única colisión, es decir tomemos las órbitas Keplerianas que inician con velocidad cero y se mueven hacia el origen hasta que ocurre colisión en $t = \frac{T}{2}$, entonces las masas después de colisionar regresan a su posición inicial en $t = T$. Este es un caso particular de las soluciones T periódicas extendidas para el problema de Kepler, las cuales pueden ser consideradas como órbitas elípticas degeneradas con $e = 1$. En este caso momento angular es cero y el eje mayor $a = |x(0)|$.

A partir de (3.11) y (3.13), la fórmula del cuadrado del período (3.10) puede ser obtenida para una de las órbitas colineales. Notemos que ésta no depende de e . Los cálculos para la acción de x son similares, esto es, ya que la colisión ocurre al tiempo $\frac{T}{2}$, definimos $\tau = \frac{T}{2}$ y por tanto $T = 2\tau$. Luego como un caso particular del Lema 3.5

tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{A}(x(2\tau)) &= \frac{1}{2}3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(2\tau)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

En [14], Gordon llama *piernas* a las componentes de las soluciones extendidas, por lo tanto estas pueden ser órbitas de colisión–expulsión ó expulsión–colisión. Si una órbita extendida tiene k componentes con tiempos de colisión τ_i entonces el periodo total $T = \sum_{i=1}^k 2\tau_i$.

Resumimos los últimos cálculos en el siguiente lema.

Lema 3.7. *i) Sea $x(t)$ una órbita Kepleriana colineal extendida con período mínimo T , tal que satisfice*

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad x(t) = x(T - t), \quad \text{para todo } t \in [0, \frac{T}{2}], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0. \quad (3.15)$$

Entonces el funcional de acción en x está dado por (3.14).

ii) Si $\dot{x}(0) = 0$ y la órbita $x(t)$ se mueve hacia el origen hasta que ocurre una colisión en $x(\tau) = 0$, entonces

$$\int_0^\tau L(x, \dot{x})dt = \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}.$$

Observación 3.8. Observemos que $g(t) = t^{\frac{1}{3}}$ es una función convexa para $t \in [0, \infty)$. Sea x una órbita periódica extendida del problema de Kepler, y sea t_j las longitudes de los componentes de E_x . Si la acción de x es finita y consideramos $\sum_j t_j = T$ y por convexidad se cumple

$$\sum_j t_j^{\frac{1}{3}} \geq \left(\sum_j t_j\right)^{\frac{1}{3}} = T^{\frac{1}{3}}.$$

Como consecuencia la acción total satisfice

$$\begin{aligned}
3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\sum_j t_j^{\frac{1}{3}} &= 3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}}\sum_j \left(\frac{t_j}{T}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq 3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}}\left(\sum_j \left(\frac{t_j}{T}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

En particular si x es una órbita con una única colisión tenemos que $t_1 = t_2 = \frac{T}{2}$. Luego la igualdad se cumple en la ecuación anterior si y sólo si existe sólo una colisión. En otras palabras, la acción de las soluciones periódicas extendidas del problema de Kepler de la forma (3.15) tienen una acción menor que las órbitas extendidas con más de una colisión.

3.4. Teorema de Gordon

En 1977, W. Gordon [14] demostró que los mínimos del funcional de acción \mathcal{A} en \mathfrak{X}_T para el problema de Kepler con período mínimo T , son exactamente las órbitas Keplerianas.

En esta sección vamos a redemostrar el Teorema de Gordon dado en [14] y caracterizaremos los mínimos de la acción en el espacio de las órbitas cerradas (lazos) de grado k alrededor del origen (centro de masa). Sí $k = \pm 1$, los mínimos son exactamente las elipses de Kepler, directas o retrógradas.

A pesar de que el funcional de acción \mathcal{A} no tiene mínimos en el espacio $\mathfrak{X} := H^1([0, T], \mathbb{C})$ ó $\mathfrak{X}_T := H^1(S_T, \mathbb{C})$, $S_T = [0, T]/\{0, T\}$ (ver el ejemplo al inicio de la sección 2.3.1), Gordon demostró que cualquier órbita periódica Kepleriana con período mínimo T es un mínimo local de la acción \mathcal{A} en \mathfrak{X}_T . Este resultado revolucionó la aplicación de los métodos variacionales en el estudio del problema de los n cuerpos.

En la sección anterior definimos el grado de una curva, la cual podemos considerar de forma equivalente tomando $\text{grad}(x; a)$ como el número de vueltas que da la curva $x(t)$ alrededor del punto $a \in \mathbb{C}$.

Iniciemos por considerar el espacio de curvas cerradas (lazos) \mathfrak{X}_T en $\mathfrak{X} := H^1([0, T], \mathbb{C})$ que dan vueltas alrededor del origen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_2 &:= \{x \in \mathfrak{X}_T : x(t) \neq 0 \text{ y } \text{grad}(x; 0) \neq 0\} \\ \mathfrak{X}_2^* &:= \mathfrak{X}_2 \cup \{x \in \mathfrak{X}_T : \mathcal{A}(x) < +\infty, x(t) = 0 \text{ para alguna } t \in [0, T]\}.\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes espacios ya vistos en la sección anterior:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_0 &:= \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}, \\ \mathfrak{X}_1 &:= \{x \in \mathfrak{X} : x(t) = -x(t + \frac{T}{2}) \text{ cuando } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

El conjunto \mathfrak{X}_2 no es subespacio y no es débilmente cerrado tanto en \mathfrak{X} como en \mathfrak{X}_T .

Lema 3.9. *Sea $\mathcal{A}^c, c \in \mathbb{R}$ denota el conjunto de nivel $\mathcal{A}^{-1}((-\infty, c]) \subset \mathfrak{X}_T$ de \mathcal{A} , entonces*

- (a) $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2^*}$ es coercitivo,
- (b) \mathfrak{X}_2 es abierto en \mathfrak{X}_T ,
- (c) $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$ es débilmente cerrado en \mathfrak{X}_T para algún $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para cualquier $x \in \mathfrak{X}_2^*$, existe algún $\tau_x \in (0, T)$ tal que $x(0)$ y $x(\tau_x)$ están en dirección opuesta, es decir $x(0) \cdot x(\tau_x) = -|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|$, por lo tanto \mathfrak{X}_2^* satisface la condición $(NC)_2$ y por el Teorema 2.49, $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2^*}$ es coercitivo.

(b) Dado que el encaje $H^1 \hookrightarrow C^0$ es compacto, tenemos que para cualquier $x \in \mathfrak{X}_2$ podemos definir $\epsilon_x := \|x\|_{C^0}$, el cual es un número positivo y se satisface

$$\|x - y\|_{C^0} \leq C\|x - y\|_{H^1} < \epsilon_x$$

para alguna $C > 0$ independiente de x , y para cualquier y tal que $\|x - y\|_{H^1} < \frac{\epsilon_x}{C}$. Entonces $y \in \mathfrak{X}_2$ si y está en una H^1 vecindad pequeña de x .

Ahora demostremos el inciso (c). En el caso $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^* = \emptyset$ el resultado es obvio. Luego, supongamos que $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^* \neq \emptyset$ y sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$. Ya que $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$ es coercitivo, obtenemos que $\{x_k\}$ es acotada, y aplicando el Teorema de Banach–Alaoglu [4], obtenemos que $\{x_k\}$ tiene un límite débil $x \in \mathfrak{X}_T$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{x_k\}$ converge débilmente a x . Notemos que como consecuencia de la compacidad del encaje $H^1 \hookrightarrow C^0$ se cumple $x \in \mathfrak{X}_2^*$. Por el Lema 2.47, tenemos

$$\mathcal{A}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x_k) \leq c.$$

Entonces $x \in \mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$, y por lo tanto se cumple $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$ es débilmente cerrado. \square

Ahora sí, estamos en posibilidad de demostrar el Teorema de Gordon [14].

Teorema 3.10. $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2}$ alcanza sus mínimos en las órbitas elípticas Keplerianas soluciones de (3.1), donde T es el período mínimo.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^* \neq \emptyset$. Por los Lemas 2.47, 3.9 y el Teorema 2.46, el funcional de acción \mathcal{A} alcanza su mínimo en $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$.

Supongamos que $x \in \mathfrak{X}_2^* \setminus \mathfrak{X}_2$ es un mínimo de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_2^* . Por la observación 3.8 x tiene una solución extendida con una sola colisión en S_T , y ésta tiene la forma (3.15). Por el lema 3.7, x tiene la misma acción que una órbita Kepleriana elíptica con período mínimo T . Por lo tanto $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2^*}$ (y luego $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2}$) alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_2 . Por el Lema 3.5, estos mínimos son órbitas Keplerianas elípticas de (3.1), donde T es el período mínimo. \square

3.5. Una propiedad minimizadora de las órbitas circulares

En esta sección se estudiará el problema de los mínimos como en la Proposición 3.1, donde el funcional de acción está restringido a $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$,

$$\mathfrak{X}_0 := \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que \mathfrak{X}_0 es el conjunto de trayectorias en \mathfrak{X} las cuales se mueven del eje real al eje imaginario. El resultado más importante en esta sección es el siguiente:

Teorema 3.11. *El funcional de acción \mathcal{A} restringido a \mathfrak{X}_0 tiene exactamente cuatro mínimos, donde cada uno es un cuarto de la órbita periódica circular para la ecuación del problema de Kepler con período mínimo $4T$.*

Este teorema es debido a Chenciner-Desolneux [5] y Coti Zelati [9], y Kuo-Chang Chen da una demostración novedosa, la cual se presenta en este trabajo.

La existencia de mínimos está incluida en la Proposición 3.1. Para poder demostrar este teorema, es necesario probar los siguientes lemas.

Lema 3.12. *Sea $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ un mínimo de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 . Entonces x resuelve a la ecuación (3.1). Por lo tanto si $r(0) > 0$ entonces $\dot{r}(0) = 0$, y si $r(T) > 0$, entonces $\dot{r}(T) = 0$.*

Demostración. La primera afirmación es obvia, pues (3.1) es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de acción \mathcal{A} y hay singularidad cuando $x = 0$.

El Lagrangiano en forma polar es

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{2}.$$

Supongamos que $r(0) > 0$, entonces x resuelve (3.1) al menos en una vecindad de 0. Calculando la primera variación de Gâteaux de \mathcal{A} con respecto a r en la dirección de h , tenemos

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} h(T) - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} h(0) + \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) h dt$$

Como x es un mínimo, entonces es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange y la primera variación de

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} h(T) - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} h(0)$$

Como h es una variación admisible para la variable r la cual es suave y cumple que $h(0) \neq 0$ para una vecindad de 0, entonces $h(T) = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \cdot h(0) = 0$.

Luego, al calcular la derivada y evaluar en $t = 0$, obtenemos $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mh(0)\dot{r}(0) = 0$, por lo tanto concluimos que $\dot{r}(0) = 0$.

Por otro lado cuando consideramos $r(T) > 0$, la demostración es similar. \square

Sea $\mathfrak{X}_{0,C}$ el conjunto de trayectorias que experimentan colisión en \mathfrak{X}_0 ,

$$\mathfrak{X}_{0,C} := \{x \in \mathfrak{X}_0 : x(t) = 0 \text{ para alguna } t \in [0, T]\}.$$

Nuestro siguiente objetivo es excluir órbitas con colisiones entre los minimizadores de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 y posteriormente demostrar el Teorema 3.11.

Lema 3.13. *Para toda $x \in \mathfrak{X}_{0,C}$, donde el funcional de acción $\mathcal{A}(x)$ es finito, existe $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{0,C}$ con sólo una colisión en $[0, T]$, tal que \bar{x} tiene momento angular cero casi en todas partes, $\mathcal{A}(\bar{x}) \leq \mathcal{A}(x)$, y la igualdad se cumple cuando x tiene momento angular cero casi en todas partes, y se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

- i) $x(0) = 0$, donde $|x|$ es creciente en $[0, T]$,*
- ii) $x(T) = 0$, donde $|x|$ es decreciente en $[0, T]$,*
- iii) $x(\tau) = 0$, para algún $\tau \in (0, T)$, $|x|$ es monótona en $[0, \tau]$ y $(\tau, T]$.*

Demostración. Sea $x(t) \in \mathfrak{X}_{0,C}$ en forma polar $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, el momento angular $mr^2\dot{\theta}$ de x está definida casi en todas partes. Si el funcional de acción en x es finito, entonces el momento angular es cero casi en todas partes si y sólo si $\dot{\theta} = 0$ casi en todas partes. Sea $t_1 = \inf \Delta_x$, donde $\Delta_x = \{t \in [0, T] : x(t) = 0\}$, entonces $x(t_1) = 0$ pues en caso contrario existe un $\xi > 0$ tal que $x(t) \neq 0$ para todo $t \in (t_1 - \xi, t_1 + \xi)$, y t_1 puede ser 0 ó T en caso de que x inicie o termine en colisión.

Sea $\bar{x} = \bar{r}(t)e^{i\bar{\theta}(t)}$, donde

$$\bar{r}(t) := \begin{cases} \sup_{s \in [t, t_1]} r(s) & \text{cuando } t \in [0, t_1], \\ \sup_{s \in [t_1, t]} r(s) & \text{cuando } t \in (t_1, T], \end{cases}$$

$$\bar{\theta}(t) := \begin{cases} 0 & \text{cuando } t \in [0, t_1], \\ \frac{\pi}{2} & \text{cuando } t \in (t_1, T]. \end{cases}$$

Observemos que $\bar{\theta} = 0$ para $t \in [0, t_1]$, y en este caso la trayectoria \bar{x} está sobre el eje real en $[0, t_1]$ y tiene una (y sólo una) colisión en $t = t_1$, y posteriormente está en el eje imaginario con $t \in (t_1, T]$. Por otro lado, ya que x tiene acción finita, tenemos $r \neq 0$ casi en todas partes y $\bar{r} > 0$ en $[0, t_1] \cup (t_1, T] = [0, T] \setminus t_1$. Además

- $r \leq \bar{r}$ en $[0, T]$,
- $|\dot{r}| \geq |\dot{\bar{r}}|$ casi en todas partes en $[0, T]$,
- $\dot{\theta} = 0$ casi en todas partes en $[0, T]$.

Entonces $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{0,C}$ y

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \int_0^T \frac{m}{2} \dot{\bar{r}}^2 + \frac{\alpha}{2} dt \leq \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{2} dt = \mathcal{A}(x).$$

La igualdad se cumple si y sólo si $r \equiv \bar{r}$ y $\dot{\theta} = 0$, casi en todas partes. Por construcción de \bar{r} esto puede pasar sólo si se cumple cualquiera de las condiciones *i*), *ii*) ó *iii*). \square

Lema 3.14. *Para toda $x \in \mathfrak{X}_{0,C}$ con acción finita existe $\bar{x} \in \mathfrak{X}_{0,C}$ del tipo *i*) ó *ii*) del lema 3.13 con momento angular cero casi en todas partes, tal que $\mathcal{A}(\bar{x}) \leq \mathcal{A}(x)$.*

Demostración. Por el Lema 3.13 es suficiente considerar el caso donde x es de tipo *iii*) y tiene momento angular cero casi en todas partes. Sea τ el único cero de x en $(0, T)$. Supongamos que $r_T = |x(T)| \leq |x(0)|$ y sea $t_0 = \inf\{s \in [0, \tau] : |x(s)| = r_T\}$. Usando la forma polar $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ y considerando $\bar{x}(t) := \bar{r}(t)e^{i\theta(t)}$, donde \bar{r} está definida como

$$\bar{r}(t) := \begin{cases} r(t) & \text{cuando } t \in [0, t_0], \\ r_T & \text{cuando } t \in (t_0, \tau], \\ r(\tau + T - t) & \text{cuando } t \in (\tau, T]. \end{cases}$$

Notemos que $\bar{x}(T) = \bar{r}(T)e^{i\theta(T)} = 0$. La trayectoria \bar{x} es de tipo *ii*) del Lema 3.13. Ésta tiene la misma acción que en $[0, t_0]$, y en $[\tau, T]$, y tiene una acción menor en $[t_0, \tau]$.

La demostración del caso donde $r_0 := |x(0)| \leq |x(T)|$ es similar, si tomamos a $t_2 = \inf\{s \in (\tau, T] : |x(s)| = r_0\}$ y

$$\bar{r}(t) := \begin{cases} r(\tau - t) & \text{cuando } t \in [0, \tau], \\ r_0 & \text{cuando } t \in (\tau, t_2], \\ r(t) & \text{cuando } t \in (t_2, T]. \end{cases}$$

El segmento \bar{x} es de tipo *i*) y tiene una acción menor que en x . \square

Lema 3.15.

$$\inf_{x \in \mathfrak{X}_0} \mathcal{A}(x) < \inf_{x \in \mathfrak{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x)$$

Demostración. Demostraremos por contradicción. Supongamos que $\inf_{x \in \mathfrak{X}_0} \mathcal{A}(x) \geq \inf_{x \in \mathfrak{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x)$, entonces por el Lema 3.14 existe una $x \in \mathfrak{X}_{0,C}$ del tipo *i*) ó *ii*) la cual minimiza al funcional \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 , y x tiene momento angular cero casi en todas partes. Observemos que toda trayectoria de tipo *i*) puede ser obtenida a partir de la trayectoria *ii*) rotándola 90° e inversamente también. Como la acción es invariante bajo esta rotación, podemos suponer sin pérdida de generalidad que x es de tipo *ii*). Por el Lema 3.12, x es solución del problema de Kepler (3.1) en $[0, T)$ con colisión en $t = T$. Por lo tanto x es de clase C^1 y tiene momento angular cero casi en todas partes, por lo tanto x permanece en la recta real para todo tiempo. Por el Lema 3.12 la velocidad inicial es cero. Entonces por el Lema 3.7 *ii*), el funcional de acción está dado por

$$\mathcal{A}(x) = \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2T)^{\frac{1}{3}}$$

por lo tanto la trayectoria

$$y(t) := \left(\frac{4\alpha T^2}{m\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi t}{2T}i} \in \mathfrak{X}_0$$

tiene la acción

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(y) &= \int_0^T \frac{m}{2} |\dot{y}|^2 + \frac{\alpha}{|y|} dt \\ &= \int_0^T \frac{m}{2} \left(\left(\frac{4\alpha T^2}{m\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{2T} \right)^2 + \left(\frac{m\pi^2\alpha^3}{4\alpha T^2}\right)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \int_0^T \frac{3}{2^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= 3 \cdot 2^{-\frac{5}{2}} (m\alpha^2\pi^2T) < \mathcal{A}(x). \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{A}(y) \leq \mathcal{A}(x)$ lo cual es una contradicción, de donde concluimos que $\inf \mathcal{A}(y) \leq \inf \mathcal{A}(x)$. \square

Ahora sí, estamos listos para demostrar el Teorema 3.11.

Demostración del Teorema 3.11. Por los Lemas 3.12 y 3.15 un mínimo $x = re^{i\theta}$ de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 es una órbita Kepleriana con momento angular distinto de cero y $\dot{r}(0) = \dot{r}(T) = 0$. Usando la ecuación (3.7), tenemos

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_0)$$

para alguna $p > 0$, $e \geq 0$, y $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Derivando la ecuación anterior y evaluando en $t = 0$ y $t = T$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{p}{r(0)^2} \dot{r}(0) = -e \operatorname{sen}(-\theta_0) \cdot \dot{\theta}(0) = e \operatorname{sen}(\theta_0) \cdot \dot{\theta}(0), \\
0 &= -\frac{p}{r(T)^2} \dot{r}(T) = -e \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}(T) = -e \operatorname{cos}(\theta_0) \cdot \dot{\theta}(T).
\end{aligned}$$

Notemos que $\dot{\theta}(0)$ y $\dot{\theta}(T)$ son distintos de cero cuando el momento angular es distinto de cero (casi en todas partes). Por lo tanto la excentricidad e tiene que ser cero, en tal caso la órbita es circular. Haciendo unos cálculos, tales mínimos son $\pm R^{\frac{1}{3}} e^{\pm \frac{\pi i}{2T}}$, donde $R = \frac{4\alpha T^2}{m\pi^2}$. \square

Observación 3.16. En el Lema 3.15 y el Teorema 3.11 obtenemos formas cerradas para el mínimo del funcional de acción \mathcal{A} en $\mathfrak{X}_{0,C}$

$$2^{\frac{2}{3}} \inf_{x \in \mathfrak{X}_0} \mathcal{A}(x) = \inf_{x \in \mathfrak{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x) = \frac{3}{2} (m\alpha^2 \pi^2 T)^{\frac{1}{3}}.$$

3.6. Problemas newtonianos de Kepler generalizados

En esta sección damos la generalización del Teorema 3.11 a problemas de tipo Kepler con energía potencial de la forma

$$U_\sigma = U_\sigma(|x_1 - x_2|) = \frac{\alpha}{|x_1 - x_2|^\sigma}, \quad \alpha > 0, \sigma > 0$$

y la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{|x|^{2+\sigma}}. \quad (3.17)$$

Los espacios de funciones \mathfrak{X} , \mathfrak{X}_0 , $\mathfrak{X}_{0,C}$ son los mismos que definimos en la sección anterior. El funcional de acción es

$$A_\sigma(x) = \int_0^T \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{\alpha}{\sigma |x|^\sigma} dt, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

En los casos de *fuerzas fuertes* ($\sigma \geq 2$) el funcional de acción satisface la condición de Palais–Smale (es decir cumple la compacidad), entonces muchos argumentos de métodos variacionales pueden ser aplicados. Además, en este caso las trayectorias en \mathfrak{X}_0 que terminan en el origen tienen acción infinita, y por lo tanto los minimizadores

de la acción están libres de colisión. En el libro [1] y las referencias incluidas en él, existe una amplia gama de resultados relacionados a esto.

El hecho de que las órbitas circulares minimicen el funcional de acción para el problema de Kepler no debe sorprendernos. Se puede demostrar que las órbitas circulares siempre tienen una acción menor que las trayectorias con colisión, teniendo como consecuencia que los minimizadores están libres de colisión.

Teorema 3.17. *Para cualquier $\sigma > 0$ todas las trayectorias que minimizan la acción en \mathfrak{X}_0 están libres de colisión.*

Un problema similar con restricciones topológicas en el espacio de trayectorias (como en el trabajo de Gordon) fue estudiado en detalle por Ramos y Terracini en [27]. En la demostración del Teorema 3.17 se incluye los hechos bien conocidos que en el caso de fuerzas fuertes las trayectorias con colisión tienen acción infinita.

Para cada $\sigma > 0$ hay exactamente cuatro órbitas circulares en \mathfrak{X}_0 , las cuales resuelven la ecuación (3.17). Todas éstas tienen la misma acción y son de la forma $\pm y_\sigma(\pm t)$, donde $R = \frac{4\alpha T^2}{m\pi^2}$ y $y_\sigma(t) := R^{\frac{1}{2+\sigma}} e^{\frac{\pi t}{2T}i}$.

La órbita $y(t)$ con $\sigma = 1$, $y_1(t)$, es la órbita que se considero en la demostración del Lema 3.15. La acción de y_σ es

$$\begin{aligned}
A_\sigma(y_\sigma) &= \int_0^T \frac{m}{2} |\dot{y}_\sigma|^2 + \frac{\alpha}{\sigma |y_\sigma|^\sigma} dt \\
&= \int_0^T \frac{m}{2} \left(\left(\frac{4\alpha T^2}{m\pi^2} \right)^{\frac{1}{2+\sigma}} \frac{\pi}{2T} \right)^2 + \frac{\alpha}{\sigma \left(\frac{4\alpha T^2}{m\pi^2} \right)^{\frac{\sigma}{2+\sigma}}} \\
&= \int_0^T \frac{m}{8} \left(\frac{4\alpha\pi^\sigma}{mT^\sigma} \right)^{\frac{2}{2+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{m\pi^2\alpha^{\frac{2}{\sigma}}}{4T^2} \right)^{\frac{\sigma}{2+\sigma}} dt \\
&= \int_0^T \frac{1}{8\sigma} \left(\frac{m}{4} \right)^{\frac{\sigma}{2+\sigma}} \left(\frac{\pi}{T} \right)^{\frac{2\sigma}{2+\sigma}} \alpha^{\frac{2}{2+\sigma}} (4\sigma + 8) dt \\
&= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2}{\sigma} \right) (4\alpha)^{\frac{\sigma}{2+\sigma}} \cdot (m\pi^2)^{\frac{\sigma}{2+\sigma}} \cdot T^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} \\
&= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2}{\sigma} \right) \sqrt{m\alpha} \left(\frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}}
\end{aligned}$$

Para poder demostrar el Teorema 3.17, es suficiente considerar un T fijo, el resto de los casos se obtienen mediante un reescalamiento del tiempo t y multiplicando la trayectoria por un escalar adecuado. Por conveniencia, en lo siguiente supondremos que

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

tal que en el plano complejo la órbita circular y_σ tiene radio 1, y la acción está dada por

$$\mathcal{A}_\sigma(y_\sigma) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) \sqrt{m\alpha}. \quad (3.18)$$

En el conjunto de órbitas con colisión $\mathfrak{X}_{0,C}$, la acción \mathcal{A}_σ alcanza su infimo y todos los minimizadores resuelven la ecuación (3.17). Por el Lema 3.14, un mínimo de \mathcal{A}_σ en $\mathfrak{X}_{0,C}$ se encuentra en el eje real ó en el eje imaginario para cualquier $t \in [0, T]$, y terminaran ó iniciaran en colisión.

Supongamos que los mínimos inician en el eje real positivo (sin pérdida de generalidad), entonces por el Lema 3.12, el mínimo que inicia con velocidad cero, se mueve hacia el origen en $[0, T]$, y termina en el origen. Esto es lo único que caracteriza a los minimizadores, denotados por $x_\sigma(t)$.

Lema 3.18. *Sea $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ y $x_\sigma(0) = r_0$. Entonces para cualquier $\sigma > 0$,*

$$r_0^{\frac{\sigma}{2}+1} = \frac{2^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma} \pi}{W(1/\sigma)} \quad (3.19)$$

donde $W(\tau) = \int_0^\pi (1 - \cos E)^\tau dE$.

Demostración. Sea $x_\sigma(t) = r(t)$. Usando el hecho de que $\dot{r}(0) = 0$, entonces

$$m\ddot{r} = -\frac{\alpha}{r^{1+\sigma}} \quad \text{y} \quad \frac{m}{2} \dot{r}^2 = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{1}{r^\sigma} - \frac{1}{r_0^\sigma} \right). \quad (3.20)$$

Aquí T y r_0 están relacionadas por las siguiente expresión

$$T = \int_{r_0}^0 \frac{1}{\dot{r}} dr = \sqrt{\frac{m\sigma}{2\alpha}} \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^\sigma} - \frac{1}{r_0^\sigma}}} dr.$$

Sea $r^\sigma = \frac{1}{2} r_0^\sigma (1 - \cos E)$, y como consecuencia $1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \cos E)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^\sigma} - \frac{1}{r_0^\sigma}}} &= \sqrt{\frac{r_0^\sigma (1 - \cos E) 2r^\sigma}{4r^\sigma - (1 - \cos E)^2 r_0^\sigma}} \\ &= \frac{2r^\sigma}{\sqrt{4r^\sigma \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^\sigma\right)}} \\ &= \frac{r_0^\sigma (1 - \cos E)}{\sqrt{r_0^\sigma (1 - \cos E) (1 + \cos E)}} \\ &= \frac{r_0^{\frac{\sigma}{2}} (1 - \cos E)}{\text{sen } E}. \end{aligned}$$

Despejando r de $r^\sigma = \frac{1}{2}r_0^\sigma(1 - \cos E)$ y derivando, tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{m\sigma}{2\alpha}} r_0^{\frac{\sigma}{2}} \int_0^\pi \frac{1 - \cos E}{\sin E} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \frac{r_0}{\sigma} \cdot (1 - \cos E)^{\frac{1}{\sigma}-1} \cdot \sin E \, dE \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{\alpha\sigma}} r_0^{\frac{\sigma}{2}+1} \cdot W\left(\frac{1}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ en la ecuación anterior y despejando $r_0^{\frac{\sigma}{2}+1}$, obtenemos

$$r_0^{\frac{\sigma}{2}+1} = \frac{2^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}}{W(1/\sigma)}.$$

□

Lema 3.19. *Se $W(\tau)$ como en el Lema 3.18, entonces*

(a) *Para cualquier $\tau > -\frac{1}{2}$,*

$$W(\tau) = 2^{\tau+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\tau} \varphi \, d\varphi = 2^{3\tau+2} \int_0^1 \frac{t^{2\tau}}{(1+t^2)^{2\tau+1}} dt \quad (3.21)$$

y $W(\tau) = +\infty$ cuando $\tau \leq -\frac{1}{2}$.

(b) *Para cualquier $\tau > \frac{1}{2}$,*

$$\frac{W(\tau-1)}{W(\tau)} = \frac{\tau}{2\tau-1}. \quad (3.22)$$

Demostración. La primera identidad de (a) es inmediata. La segunda identidad se sigue al elegir la sustitución de Weierstrass dada por $t = \tan^{-1} \varphi$, y ésto en particular implica que $W(\tau)$ es finita si y sólo si $\tau > -\frac{1}{2}$.

La parte (b) se sigue de (a) y de la fórmula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\tau} \varphi \, d\varphi = \frac{2\tau-1}{2\tau} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\tau-2} \varphi \, d\varphi \quad \text{para algún } \tau > \frac{1}{2}.$$

□

Demostración. (Teorema 3.17) Como x_σ tiene una acción menor que todas las órbitas de colisión $x \in \mathfrak{X}_0$, entonces es suficiente demostrar que $\mathcal{A}_\sigma(y_\sigma) < \mathcal{A}_\sigma(x_\sigma)$. Sea $r(t)$ y E definidas igual que en la demostración del Lema 3.18 y supongamos que $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$. Por la ecuación (3.20) la acción de x_σ está dada por

$$\mathcal{A}_\sigma(x_\sigma) = \int_0^T \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\alpha}{\sigma_0^\sigma} dt = \frac{2\alpha}{\sigma} \int_0^T \frac{1}{r^\sigma} dt - \frac{\alpha T}{\sigma r_0^\sigma}. \quad (3.23)$$

Por el Lema 3.18 y la elección de T , el término $\frac{\alpha T}{\sigma r_0^\sigma}$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\frac{\alpha T}{\sigma r_0^\sigma} &= \frac{\pi \alpha}{2\sigma} \cdot \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \left(\frac{2^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma} \pi}{W(1/\sigma)} \right)^{\frac{-2\sigma}{2+\sigma}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{m\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{2(1+\sigma)}{2+\sigma}} W(1/\sigma)^{\frac{2\sigma}{2+\sigma}}.\end{aligned}$$

Cambiando la variable r por E como en la demostración del Lema 3.18. Después hacemos algunos cálculos similares a los del Lema 3.18, y tomamos en cuenta (3.19), y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{r^\sigma} dt &= \sqrt{\frac{m\sigma}{2\alpha}} \int_0^{r_0} \frac{1}{r^\sigma \sqrt{\frac{1}{r^\sigma} - \frac{1}{r_0^\sigma}}} dr \\ &= \sqrt{\frac{m}{\alpha\sigma}} r_0^{\frac{-\sigma}{2}+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}} \int_0^\pi (1 - \cos E)^{\frac{1}{\sigma}-1} dE \\ &= \sqrt{\frac{m}{\alpha\sigma}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma} \pi}{W(1/\sigma)} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} W\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{2+\sigma}} W(1/\sigma)^{\frac{-2+\sigma}{2+\sigma}} W\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{2\alpha}{\sigma} \int_0^T \frac{1}{r^\sigma} dt = 2\sqrt{m\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{2(1+\sigma)}{2+\sigma}} W(1/\sigma)^{\frac{-2+\sigma}{2+\sigma}} W\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right).$$

Este término es infinito cuando $\sigma \geq 2$, que corresponde al caso de *fuerzas fuertes* donde ésta acción es infinita.

Ahora consideremos $\sigma \in (0, 2)$. Por (3.22) y (3.23), la acción de x_σ es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\sigma(x_\sigma) &= \sqrt{m\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{2(1+\sigma)}{2+\sigma}} W(1/\sigma)^{\frac{2\sigma}{2+\sigma}} W\left(\frac{2W(\frac{1}{\sigma} - 1)}{W(\frac{1}{\sigma})} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{m\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2-\sigma}{2+\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\frac{2(1+\sigma)}{2+\sigma}} \frac{2 + \sigma}{2(2 - \sigma)} W(1/\sigma)^{\frac{2\sigma}{2+\sigma}}.\end{aligned}$$

Comparado esto con (3.22) y usando (3.23), $\mathcal{A}_\sigma(y_\sigma) < \mathcal{A}_\sigma(x_\sigma)$ si y sólo si

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{2 - \sigma} \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} W\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2/\sigma} E dE. \quad (3.24)$$

El lado derecho decrece de $\frac{\pi}{\sqrt{2e}}$ a 0, cuando σ crece de 0 a 2. La integral de (3.24) puede ser calculada por las fórmulas del Lema 3.19, y la ecuación (3.24) se cumple para $\sigma \in (0, 2)$, véase la Figura 3.2. \square

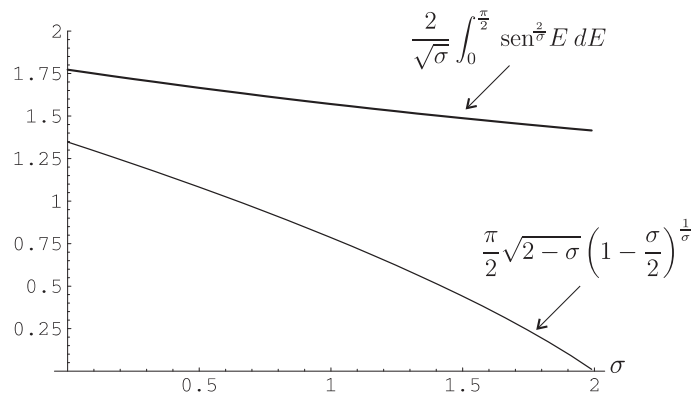


Figura 3.2: Se cumple $\frac{\pi}{2} \sqrt{2-\sigma} \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} W\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{\frac{\sigma}{2}} E \, dE$ para $\sigma \in (0, 2)$.

Apéndice A

Equivalencia de las expresiones de la energía

En este apéndice describimos la equivalencia de las expresiones de energía obtenidas en el Capítulo 1 y Capítulo 3.

A lo largo de este trabajo hemos usado la siguiente notación:

$$\mu = m_1 + m_2, \quad \alpha = m_1 m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

En la expresión de la energía

$$H = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} |\dot{x}|^2 - \frac{m_1 m_2}{|x|} = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 - \frac{\alpha}{|x|} \quad (\text{A.1})$$

despejamos $|\dot{x}|^2$ para obtener

$$|\dot{x}|^2 = \frac{2}{m} \left(H + \frac{\alpha}{|x|} \right).$$

Ahora de la expresión $J^2 = \mu(\mathbf{e} \cdot x + |x|)$ despejamos $\mathbf{e} \cdot x = J^2/\mu + |x|$, y la sustituimos en $|\dot{x}|^2 J^2 = \mu^2(1 + e^2 + \frac{2}{|x|} \mathbf{e} \cdot x)$. Luego obtenemos

$$\begin{aligned} \mu^2 \left(1 + e^2 + \frac{2}{|x|} \left(\frac{J^2}{\mu} - |x| \right) \right) &= 2 \frac{H}{m} J^2 + 2 \frac{\alpha}{|x| m} J^2 \\ \mu^2 + \mu^2 e^2 + 2 \frac{J^2}{|x|} \mu - 2 \mu^2 &= 2 \frac{H}{m} J^2 + 2 \frac{\alpha}{|x| m} J^2 \\ \mu^2 (e^2 - 1) &= \frac{2HJ^2}{m} \end{aligned}$$

y como consecuencia

$$H = m \frac{\mu^2}{2J^2} (e^2 - 1).$$

En la Sección 1.2 obtuvimos $H^* = \frac{\mu}{m_1 m_2} H$ y por lo tanto $H = \frac{m_1 m_2}{\mu} H^*$. Por otro lado, en la ecuación (3.9) obtenemos que $H^* = \frac{\mu^2}{2J^2} (e^2 - 1)$, de donde concluimos que

$$H = \frac{m_1 m_2}{\mu} \frac{\mu^2}{2J^2} (e^2 - 1) = m \frac{\mu^2}{2J^2} (e^2 - 1). \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto podemos concluir las expresiones de la energía (A.1) y (A.2) son equivalentes.

Apéndice B

Funciones coercitivas y la condición Palais–Smale

En este apéndice presentamos una condición de compacidad, conocida como la condición de Palais–Smale, la cual es una herramienta útil en la demostración de la existencia de puntos críticos de funciones definidos en espacios de Banach.

En particular, tomamos atención en el resultado de Shujie [29], quien en 1986 demostró que si la función F definida en un espacio de Banach es de clase C^1 , acotado inferiormente y satisface la condición (PS) entonces F es coercitivo.

Dada una función $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ en un espacio de Banach X , F se dice que es *coercitivo* si $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$. Esto es equivalente a decir que, para toda $d \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$F^d = \{x \in X | F(x) \leq d\}$$

está acotado.

En pocas palabras, una función coercitiva está acotada. No obstante el inverso no se cumple, es decir, una función acotada por abajo no necesariamente tiene un mínimo, por ejemplo la función exponencial.

Teorema B.1. *Sea X un espacio de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, acotada inferiormente. Si, para cada $c \in \mathbb{R}$, toda sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \in X$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = c, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F'(x_n) = 0$$

está acotada, entonces F es coercitiva.

Para estudiar la existencia de puntos críticos de una función acotada inferiormente, introduciremos variantes en las condiciones de compacidad, debidas a Palais y Smale.

Sea X un espacio de Banach y $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciable. La condición original de Palais–Smale es la siguiente:

Definición B.2. Una *sucesión de Palais-Smale* para F es una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \in X$ tal que $(F\{x_n\}_{n \geq 1})$ está acotada y $(F'\{x_n\}_{n \geq 1})$ converge a 0. La función F satisface la *condición de Palais–Smale* (PS) si cada sucesión de Palais-Smale contiene una subsucesión convergente.

Una condición más débil es la siguiente:

Definición B.3. Sea X un espacio de Banach y $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciable. Una sucesión de Palais-Smale en el nivel c para F es una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = c, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F'(x_n) = 0.$$

La función F satisface la *condición de (PS)_c* si la existencia de una sucesión de Palais-Smale en el nivel c implica que c es un valor crítico de F .

Observación B.4. Por el Teorema B.1, una función $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, acotada inferiormente, que tiene, para cada $c \in \mathbb{R}$ sus sucesiones (PS)_c son acotadas, es coercitiva. Recíprocamente, se tiene que una función coercitiva tiene todas las sucesiones (PS)_c acotadas.

Proposición B.5. Sea X un espacio de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, acotado inferiormente. Si F satisface la condición (PS)_c para $c = \inf_X F$, entonces F tiene un mínimo y c es un valor crítico de F .

Bibliografía

- [1] Ambrosetti A. y Coti Zelati V., *Periodic solutions of singular Lagrangian systems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 10. Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [2] Armendáriz P, Lacombe E. y Peredo F., *Notas de Mecánica Celeste*, UAM–Iztapalapa, México, 1978.
- [3] Arnold V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, USA, 1978.
- [4] Brezis H., *Análisis Funcional*. Alianza Editorial, España, 1984.
- [5] Chenciner A y Desolneux N., *Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de n corps*. C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **326** (1998), no. 10, 1209–1212. Corrección: C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **327** (1998), no. 2, 193.
- [6] Chenciner A. y Montgomery R., *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2) **152** (2000), no. 3, 881–901.
- [7] Chenciner A., *Action minimizing solutions of the Newtonian n -body problem: from homology to symmetry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 279–294, Higher Ed. Press, China, 2002.
- [8] Chenciner A., *A simpler proof of regular polygon solutions of the N -body problem*, Phys. Lett. A 300 (2002), no. 1, 101–102.
- [9] Coti Zelati V., *Periodic solutions for N -body type problems*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **7** (1990), no. 5, 477–492.
- [10] Degiovanni M., Giannoni M, Marino A., *Dynamical systems with Newtonian type potentials*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **81** (1987), no. 3, 271–277 (1988).
- [11] Degiovanni M. y Giannoni F., *Dynamical systems with Newtonian type potentials*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **15** (1988), no. 3, 467–494 (1989).

- [12] Lamache Ize., *Cálculo de Variaciones*, Edit. Fenomec, México, 2000.
- [13] Gómez G., y Llibre J., *A note on a conjecture of Poincaré*. *Celestial Mech.* **24** (1981), no. 4, 335–343.
- [14] Gordon W. B. , *A minimizing property of Keplerian orbits*, *Amer. J. Math.* **99**(1977), no. 5, 961–971.
- [15] Hsiung C. C., *A first course in differential geometry*. International Press, 1997.
- [16] Kreysig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. 1978.
- [17] Chen Kuo-Chang, *Variational methods and periodic solutions of the Newtonian N -body problem*, Tesis Doctoral, University of Minnesota, 2001.
- [18] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1980.
- [19] Mateus de Souza E., *Metodos Variacionais e aplicacoes aos problemas de Kepler, tres e quatro corpos*, Tesis de Mestrado em Matemática, UFPE, Brasil, 2005.
- [20] Moore C., *Braids in classical dynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), no. 24, 3675–3679.
- [21] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Tome I. Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [22] Poincaré H., *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, C.R.A.S. 1896, t. 123, pp. 915–918; in *Oeuvres*, tome VII.
- [23] Pollard H., *Qualitative methods in the n -body problem*. 1966 Space Mathematics (Proc. Summer Seminar, Ithaca, N.Y., 1963), Part 1 pp. 259–291 Amer. Math. Soc., USA.
- [24] Pollard H., *A mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice Hall, USA, 1967.
- [25] Pollard H., *Applied Mathematics: An Introduction*. Addison-Wesley, USA, 1972.
- [26] Adams Robert A., *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003
- [27] Ramos M. y Terracini S., *Noncollision periodic solutions to some singular dynamical systems with very weak forces*. *J. Differential Equations* **118** (1995), no. 1, 121–152.
- [28] Serra E. y Terracini S., *Collisionless periodic solutions to some three-body problems*. *Arch. Rational Mech. Anal.* **120** (1992), no. 4, 305–325.

- [29] Shujie L., *Some aspects of critical point theory*, preprint (1986).
- [30] Stiefel E. L., y Scheifele G., *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, USA, 1971.
- [31] Struwe M., *Variational methods*. Springer Verlag, USA, 1990.