

**Estabilización Global de un Reactor Químico**

**Mediante un Control Lineal**

**con Retroalimentación Estado**

por

Faustino Ricardo García Sosa

Tesis de Maestría

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA  
IZTAPALAPA**

**ESTABILIZACION GLOBAL DE UN REACTOR QUIMICO  
MEDIANTE UN CONTROL LINEAL  
CON RETROALIMENTACION ESTADO**

**TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN MATEMATICAS**

**PRESENTA**

**MAT. FAUSTINO RICARDO GARCIA SOSA.**

**ASESOR**

**DR. RODOLFO SUAREZ CORTES**

**MAYO DE 1996.**

## Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Rodolfo Suárez Cortés por su paciente asesoría en la realización de esta tesis. Así como también al Dr. Jesús Alvarez Calderon, al Dr. Ernesto Pérez Chavela, y al Dr. Jesús Pérez Romero por su accesibilidad para revisar y discutir sobre el trabajo presentado en esta tesis.

Deseo manifestar también mi agradecimiento a CONACYT por su apoyo económico. Así como al departamento de Matemáticas de la UAMI por sus facilidades que me brindó; a mis padres, hermanos y amigos por su gran interés mostrado a lo largo de la realización de este trabajo.

## INDICE

<b>Introducción</b> .....	1
<b>CAPITULO 1</b>	
<b>El Reactor Tanque Agitado De Flujo Continuo</b>	
1.1 Modelación Del Reactor Tanque Agitado. ....	5
1.2 Solución Numérica .....	12
1.3 Puntos Críticos: Multiplicidad, Indice y Tipo. ...	15
<b>CAPITULO 2</b>	
<b>Control lineal Global Del Reactor</b>	
<b>Tanque Agitado De Flujo Continuo</b>	
2.1 Linealización del Sistema de Ecuaciones Diferenciales .....	23
2.2 Propiedades Exstructurales .....	25
2.3 La Forma Canónica Estándard .....	26
2.4 Una Transformación Invertible .....	27
2.5 Control Lineal .....	30

## **CAPITULO 3**

### **Condiciones suficientes Para la Estabilidad Global Del Reactor Tanque Agitado**

3.1 Región Físicamente Factible de Evolución del Reactor	33
3.2 Condicion Suficiente Para la Unicidad del Punto Crítico, por Método Directo. ....	34
3.3 Condiciones Suficientes Para Evitar Ciclos Límite en el Reactor Tanque Agitado, Por Método Directo .....	36
3.4 Condicion Suficiente Para la Unicidad del Punto Crítico por el Método de Transformación del Sistema Asociado al Reactor.	45
3.5 Condiciones Suficientes Para Evitar Ciclos Límite en el Reactor Por el Método de transformación del Sistema.	50

## **CAPITULO 4**

<b>Aplicación Del Control Lineal a un Ejemplo</b>	59
---	----

<b>CONCLUSIONES</b>	67
---------------------	----

<b>Perspectivas</b>	68
---------------------	----

<b>Apéndice</b>	72
-----------------	----

<b>BIBLIOGRAFIA</b>	74
---------------------	----

## INTRODUCCION

Los reactores químicos, que para R.Aris [1], son el corazón de cualquier proceso químico, pues es aquí donde la reacción química se lleva a cabo; se han venido perfeccionando cada vez más mediante mejores controladores automáticos.

El reactor químico que se analiza en esta tesis es un reactor tanque agitado de flujo continuo (RTAFC) de volumen  $v$ , con flujo volumetrico a razon de  $w$  donde tiene lugar una reacción exotérmica irreversible de primer orden de la forma  $A \mapsto P$ . El problema de control consiste en mantener la concentración ( $c$ ) y temperatura ( $T$ ) en un valor específico a pesar de perturbaciones (Estas perturbaciones se originan en la concentración ( $c_e$ ) y temperatura ( $T_e$ ) de entrada). La variable de control es  $T_c(c, T)$ .

El reactor químico es modelado por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal con dos variables de estado (concentración y temperatura) y una variable de entrada (temperatura de enfriamiento), este sistema es difícil de resolver y analizar.

Investigaciones recientes realizadas por Alvarez, Alvarez y González, [6], solucionaron el problema de controlar el reactor tanque agitado de flujo continuo, propuesto anteriormente, mediante un control no lineal de una entrada y una salida (SISO). Este control se obtuvo en base a una transformación no lineal (Hunt, [8]) que mapea el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, asociado al reactor no lineal, a un sistema autónomo lineal controlable equivalente. Para posteriormente construir un control lineal, para el sistema lineal, que después de expresarlo en coordenadas originales reproduce el control no lineal.

La solución se obtuvo en forma analítica, y los resultados garantizaron un proceso a lazo cerrado estable asintóticamente con un único atractor, cuya región de atracción es suficientemente grande para situaciones prácticas.

Alvarez, Suárez, y Sánchez [7], resolvieron el problema de estabilizar en forma global una polimerización de radical libre que se lleva a cabo en un reactor continuo agitado, que tiene como modelo un sistema no lineal con tres

variables de estado y dos variables de entrada (iniciador y temperatura) que se pueden manipular y dos perturbaciones de entrada medibles, variables con el tiempo (temperatura y conversión). El control que se usó para controlar este reactor fue un control no lineal de dos entradas, que se construyó, en forma similar al construido por Alvarez, Alvarez y González,[6], para el problema anterior, en base a una transformación no lineal que mapea el sistema no lineal, asociado al reactor no lineal, a un sistema autónomo lineal controlable equivalente (Hunt,[8]) para posteriormente construir un control proporcional en forma convencional que después de expresarlo en coordenadas originales da origen al control no lineal.

En ambas investigaciones [6] y [7] se hicieron simulaciones numéricas, en donde se muestra la estabilidad global del reactor químico correspondiente.

También en ambas investigaciones [6] y [7] se mostró, mediante simulaciones numéricas, que la parte lineal del control no lineal estabilizaba en forma global al reactor no lineal correspondiente. Sin embargo esta propiedad no se probó matemáticamente, por lo que la tomamos como una conjetura para motivar el presente trabajo y de donde nos surge la siguiente pregunta:

Será necesario construir un control no lineal para controlar un reactor no lineal?

La forma convencional de diseñar un control lineal, sin hacer uso de la Geometría Diferencial usada en los trabajos [6] y [7] anteriores, se basa en la teoría de control multivariable, que consiste en linealizar, con una serie de Taylor truncada, el modelo del reactor no lineal (Ray,[5]; Burghes, [11]) posteriormente se encuentra una transformación lineal que lleva el sistema lineal a un sistema lineal equivalente (a la forma canónica estándar) y de ahí hallar el control lineal, que después de ponerlo en coordenadas originales reproduce el control lineal buscado.

Por construcción del control lineal, este sólo funciona bien en una vecindad del punto de operación. Para solucionar este problema se llevan extensas pruebas que conducen a seleccionar adecuadamente las ganancias del control lineal propuesto y de ahí establecer un proceso a lazo cerrado y su región de atracción.

En este trabajo se resuelve el problema de obtener condiciones suficientes sobre los parámetros involucrados en el proceso del RTAFC y las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$  del controlador lineal, que deben satisfacer para la estabilidad global del RTAFC, a partir de una linealización a primer orden de Taylor del proceso y de la forma canónica estándar(FCE)(Kalman, R.E:1971,[10], [11], [12]); un controlador lineal es entonces construido y afinado

Considerando el RTAFC con un controlador lineal. Para probar su estabilidad global, primeramente intentamos probarla por el criterio de Bendixson la cual nos condujo a que el signo negativo (signo constante) de la divergencia depende de que la ganancia  $k_2$  del control sea muy negativa. También intentamos probar la estabilidad global del RTAFC por el método propuesto por N.G.LLOYD [13]. Pero nuestro sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, que modela al RTAFC, en coordenadas polares no cumplió una de sus condiciones.

Con los intentos fallidos mencionados anteriormente, nos condujo al análisis de la trayectoria en una región invariante que nos da como resultado la no existencia de ciclos límite. Un segundo método propuesto en este trabajo consiste en hacer un cambio de variable en el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal tomando en cuenta ahora el control lineal agregado (A.B.Poore [2]). La distribución de este trabajo se da en la siguiente forma :

En el capítulo 1 obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal que modela al Reactor de Tanque Agitado de Flujo Continuo con una reacción exotérmica (R. Aris [1]), mostramos mediante gráficas el retrato fase de este sistema y mediante un cambio de variable obtenemos el índice, multiplicidad y tipo de los puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, que resumimos en el teorema (1.1)(Aubrey B.Poore [2]).

En el capítulo 2 hallamos el control lineal que estabiliza al sistema que modela al RTAFC, tal diseño está basado en la forma canónica estándar (Kalman,[10], [11], [12]).

En el capítulo 3 hallamos las condiciones suficientes para que el proceso a lazo cerrado, con control lineal, encontrado en el capítulo 2, sea global asintóticamente estable. Primeramente mostrando que el punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal es único y posteriormente



mostramos que no existe ningún ciclo límite del sistema. Estas condiciones suficientes para la estabilidad global del RTAFC con un control lineal son encontradas en dos formas: primero por un método directo, es decir encontramos una región invariante la cual nos asegura la no existencia de ciclos límite; el segundo método es haciendo un cambio de variable en el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (A.B.Poore [2]). Debe observarse que las condiciones suficientes para la estabilidad global del RTAFC que se obtuvieron por el primer y segundo método son diferentes pero muy aproximados

En el capítulo 4 se aplican los resultados obtenidos para resolver un ejemplo particular del RTAFC, es decir para valores fijos de los parámetros de los cuales depende el modelo del RTAFC ([1]). Además se concluye saturando el control lineal propuesto para el RTAFC. Este modificara la teoría y plantea un nuevo problema matemático a estudiar.

# CAPITULO I

## EL REACTOR TANQUE AGITADO

### 1.1 Modelación del Reactor Tanque Agitado

Una de las formas más simples de reactor químico es el así llamado reactor de tanque agitado de flujo continuo, ó bien RTAFC. Este tipo de reactor, como su nombre lo indica, es un tanque dentro del cual fluyen reactivos y desde el cual se saca un flujo del producto (la salida contiene algunos de los reactivos de alimentación así como productos). Esta suficientemente bien agitado para que su composición y temperatura sea uniforme, y puede estar equipado con un controlador de temperatura. Por ejemplo si la reacción es exotérmica y genera calor, entonces el tanque puede tener en su interior una serpentina de enfriado, ó bien un recubrimiento externo a través del cual fluye agua fría; por otro lado una reacción endotérmica podría requerir la inmersión de un calentador.

Se supone que la reacción tiene lugar sólo dentro del reactor, ya sea porque ahí se unen los reactivos por primera vez, o porque el catalizador requerido se encuentra sólo dentro del tanque.

Debido a que está bien agitada, la composición dentro del reactor es la del flujo producto — y si, como frecuentemente es el caso, la razón de reacción decrece conforme el producto se forma, entonces el RTAFC es relativamente ineficiente. Aún así, su simplicidad de diseño puede hacerlo atractivo; mientras que para ciertas reacciones donde los efectos cinéticos y térmicos dan razones de reacción más rápidos, dentro del reactor, que las condiciones de alimentación, el RTAFC tiene ventajas positivas.

Como caso de un reactor simple, el tanque agitado tiene un modelo simple, sin embargo aún considerando las más simples de las reacciones su comportamiento es sorprendentemente interesante. Tal reacción es de primer orden, exotérmica, irreversible, en la cual el reactivo forma el producto a la razón de cambio  $Kc$ , donde  $c$  es la concentración y  $K$  una constante de proporcionalidad, conocida como constante de cambio. La razón constante es una función de la temperatura de la forma:  $K = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$ , donde  $T$  es la temperatura,  $R$  la constante de gas,  $k_0$  la frecuencia o factor pre-exponencial y  $E_a$

es la energía de activación. El volumen,  $v$ , en el reactor es constante debido a que el influjo y el ex-flujo son iguales, digamos  $w$ . Entonces los balances de masa y calor pueden escribirse expresando el hecho de que la razón de acumulación (ya sea de masa o de calor) es igual a la razón de influjo menos la razón de ex-flujo, más la razón de generación. En el balance de masa para el reactivo desaparecido, la generación es "negativa"; el balance de calor tiene dos términos una generación positiva por la reacción exotérmica, y una generación negativa, o retiro, por el serpentín de enfriamiento. El modelo resultante es un par de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \frac{w}{v}(c_e - c) - K(T)c, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{w}{v}(T_e - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} c K(T) - \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p} (T - T_c), \end{aligned} \quad (1.1)$$

expresando la razón de cambio de cada variable en términos de los valores comunes de estas variables, donde  $(-\Delta H)$  es el calor generado por la reacción,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $c_p$  es la capacidad de calor específico del fluido,  $h_w$  es el coeficiente de calor transferido,  $A_w$  es el área de transferencia de calor,  $c_e$ ,  $T_e$  son la concentración y temperatura de alimentación, respectivamente, del reactor.

Estas ecuaciones son no lineales, ya que el lado derecho involucra funciones más complejas que las primeras potencias de  $c$  y  $T$  y no se esperan soluciones simples explícitas. Sin embargo (1.1) puede resolverse numéricamente, y  $c(t)$  y  $T(t)$  pueden calcularse una vez que se dan  $c_0$  y  $T_0$  (sus valores al tiempo  $t = 0$ ). Frecuentemente los valores de  $c$  y  $T$  se aproximan a una constante, o a valores del estado estacionario.

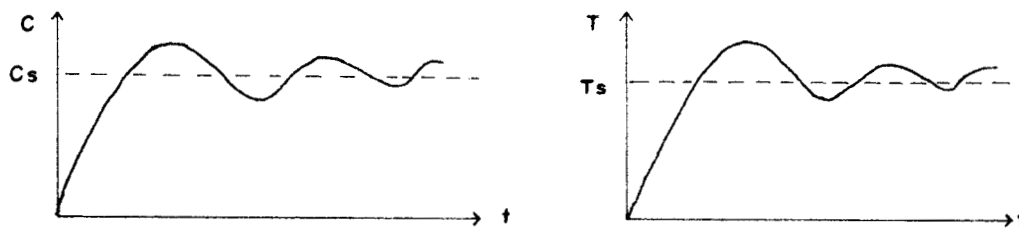


FIG. 1a CONCENTRACION Y TEMPERATURA EN UN REACTOR SE APROXIMAN A UN VALOR ESTADO ESTACIONARIO POR OSCILACIONES AMORTIGUADAS.

La figura 1a) muestra un caso donde la concentración y la temperatura en el reactor se aproximan a valores del estado estacionario mediante oscilaciones amortiguadas. La figura 1b) muestra el retrato fase del reactor cuando se inicia desde un valor elevado de  $c_0$  y temperatura moderada  $T$  (el punto  $P$ ) aparece una gran oscilación a altas temperaturas antes de que decaiga al estado estacionario. En efecto, por consideraciones de seguridad se prohíben las temperaturas que sean mayores que  $T_m$ , el retrato fase mostraría que sería inseguro comenzar por encima de cualquier condición representada por un punto en el área iluminada, pues la trayectoria pasaría por una temperatura muy alta, mayor que  $T_m$ , antes de llegar al estado estacionario.

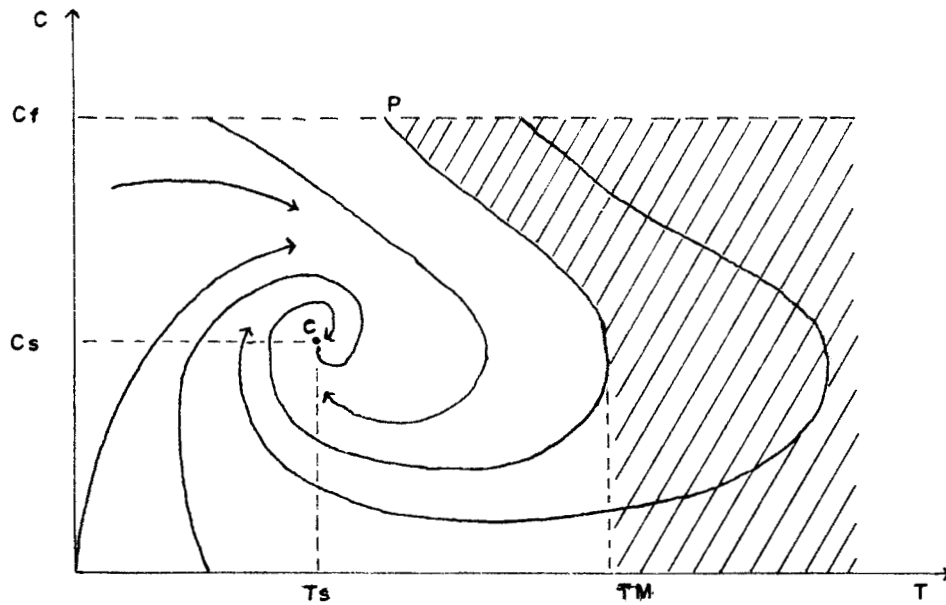


FIG. 1b GRAFICA DE POSIBLES TRAYECTORIAS EN EL PLANO FASE

Los estados estacionarios  $(c_s, T_s)$  también conocidos como puntos críticos, pueden encontrarse haciendo las derivadas igual a cero; esto es resolviendo el sistema:

$$\frac{w}{v}(c_e - c_s) - k_0 c_s e^{\frac{-E_a}{RT_s}} = 0,$$

$$\frac{w}{v}(T_e - T_s) + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} c_s k_0 e^{\frac{-E_a}{RT_s}} - \frac{h_w A_w}{v \rho c_p} (T_s - T_c) = 0.$$

Al resolver la primera ecuación para  $c_s$  en términos de  $T_s$  obtenemos:

$$c_s = \frac{w c_e}{w + v k_0 e^{\frac{-E_a}{RT_s}}}.$$

Sustituyendo el valor de  $c_s$  en la segunda ecuación del sistema se obtiene la ecuación en términos de  $T_s$

$$w \rho c_p (T_s - T_e) + h_w A_w (T_s - T_c) = \frac{(-\Delta H) w c_e v k_0 e^{\frac{-E_a}{RT_s}}}{w + v k_0 e^{\frac{-E_a}{RT_s}}}. \quad (1.2)$$

Esta es simplemente la igualdad del calor generado y el calor removido en el estado estacionario. Los dos lados de la ecuación (1.2) se grafican en la figura 2.a, siendo la primera una línea recta y la otra una curva en forma de S. Su intersección da los estados estacionarios. La intersección de la línea de calor removido,  $\bar{T}$ , es una media ponderada de las temperaturas de alimentación y enfriamiento.

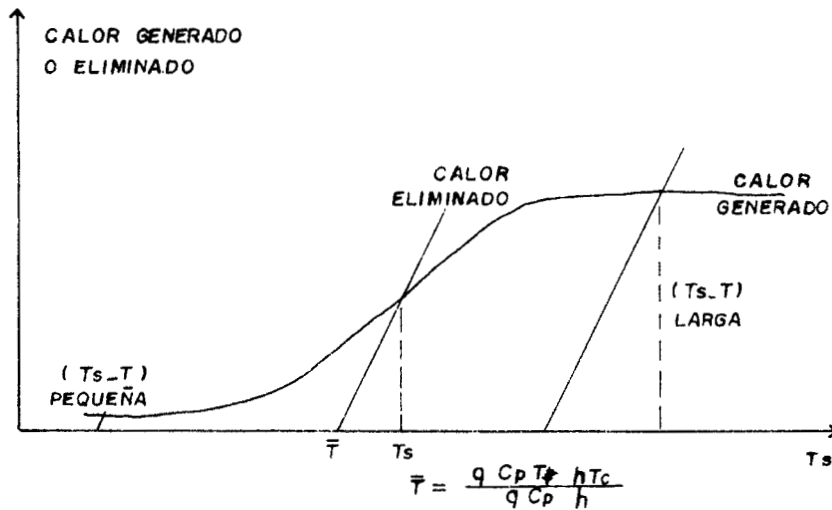


FIG. 2a MUESTRA QUE EL PUNTO ESTACIONARIO ES LA INTERSECCION DE UNA LINEA RECTA Y UNA CURVA EN FORMA DE S

En el valor más bajo de  $\bar{T}$  la temperatura de estado estacionario  $T_s$  no es mucho más grande que la  $\bar{T}$  misma (i.e.  $T_s - \bar{T}$  es pequeña, como lo muestra

el triángulo de la izquierda), pero cuando  $\bar{T}$  es grande  $T_s - \bar{T}$  se aproxima a la asíntota  $\frac{(-\Delta H)c_s w}{(w c_p + h_w A_w)}$ , como lo muestra el triángulo de la derecha. Físicamente, esto corresponde a una reacción completa con liberación de calor, lo más grande posible.

De aquí surge una pregunta interesante: que pasa si la línea recta del calor removido es tan inclinada que el diagrama se ve como el de la fig.2b.

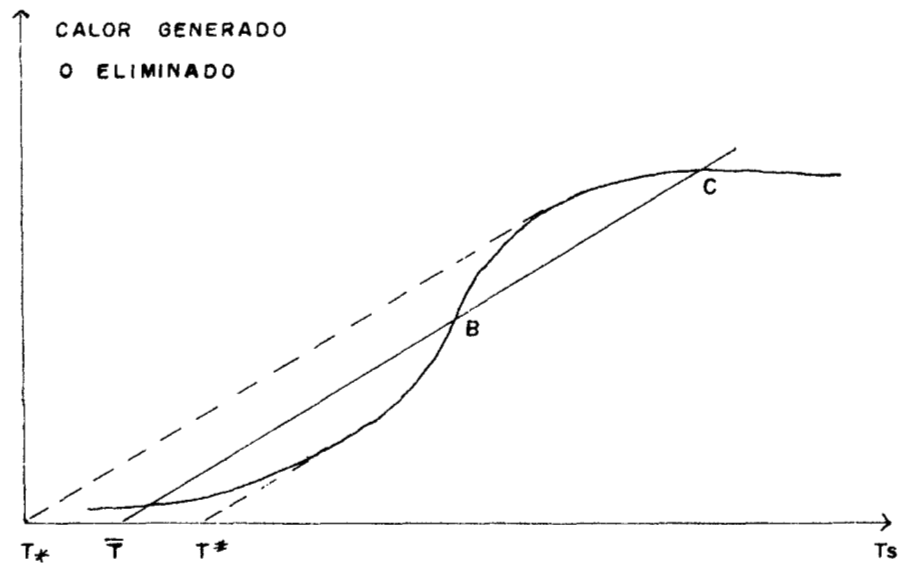


FIG. 2b COMO EN 2a PERO CON UNA LINEA QUE DA TRES ESTADOS ESTACIONARIOS

Si la pendiente más grande de la generación de calor es más grande que la pendiente de la línea de calor removido, entonces, esta figura 2b muestra que siempre habrá dos temperaturas  $T_*$  y  $T^*$  tal que si  $\bar{T}$  está entre  $T_*$  y  $T^*$  existirán tres intersecciones (mostrados como A, B, C). Esto significa que hay tres posibles estados estacionarios para cualesquiera de tales valores de  $\bar{T}$ . Claramente los valores de  $T_*$  y  $T^*$  dependen de la pendiente de la línea de calor removido, si esta es más pequeña que la pendiente máxima de la línea de generación de calor, como en la fig.3a. entonces variando  $\bar{T}$  podemos graficar la razón de generación de calor en el estado estacionario

como función de  $\bar{T}$  (en la parte baja de la figura), obteniendo una curva que de retorno se dobla sobre ella misma entre  $T_*$  y  $T^*$ .

No hay un camino natural para obtener cualquier punto representativo para el doblez inferior de la superficie, y esto no debería sorprendernos, ya que esto corresponde a estados estacionarios inestables. Un estado estacionario inestable es uno que es teóricamente posible pero no puede ser realizado en la práctica, ya que la desviación más ligera desde él, crecería hasta que el sistema terminara en un estado completamente remoto. En contraste un estado estacionario es localmente estable si cualquier desviación suficientemente pequeña muere lentamente, y el sistema regresa al estado original del cual fue inicialmente desplazado. El único estado estacionario en la figura 1b) es estable; de hecho, es globalmente estable, ya que no importa que tan grande se haga el desplazamiento, el estado siempre regresa al punto crítico  $C$ .

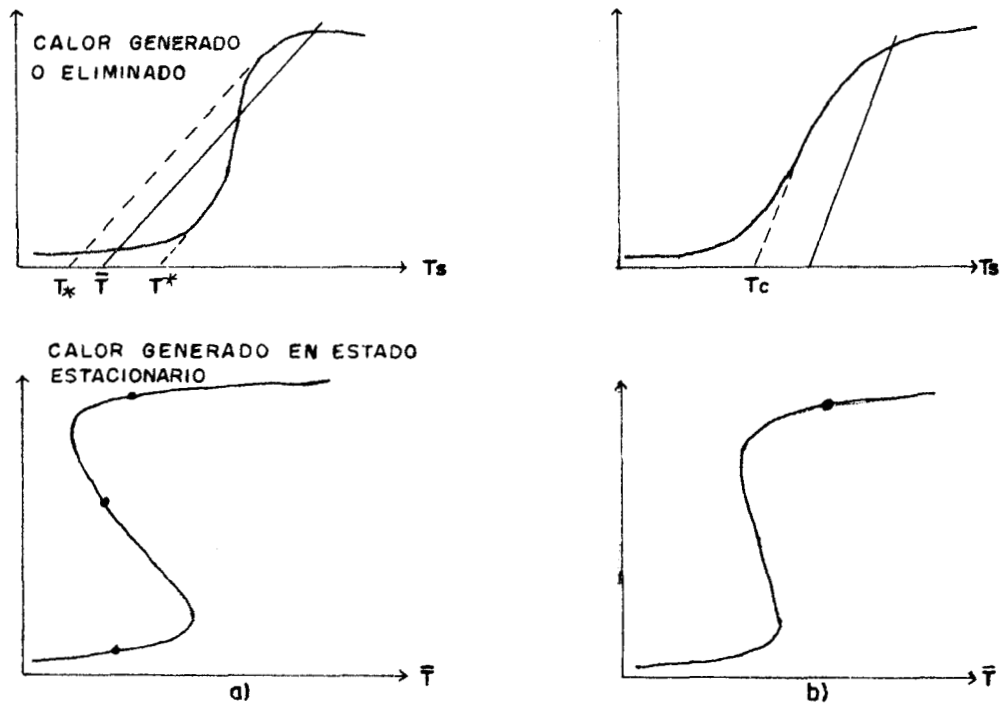


FIG. 3 a) UN CASO DONDE LA PENDIENTE DE LA LINEA CALOR ELIMINADO ES MENOR QUE LA MAXIMA DE LA CURVA GENERACION DE CALOR b) UN CASO DONDE EL VALOR  $(q C_p + h)$  ES JUSTO IGUAL A LA PENDIENTE MAS GRANDE DE LA CURVA GENERACION DE CALOR

El argumento clásico para demostrar que el doblez inferior es inestable se muestra en la figura 4. El estado estacionario intermedio  $B$ , es tal que si la temperatura estuviera aumentando ligeramente, podríamos encontrar que la velocidad de generación de calor excede la velocidad de pérdida de calor, una situación que obviamente conduce a un enparejamiento en temperaturas más altas. Inversamente, si la temperatura desciende la pérdida de calor es mayor que la generación de calor y la temperatura continúa descendiendo. Esto es claramente una situación inestable y es el resultado de que la pendiente de la curva de generación de calor comience a hacerse más grande que la de la línea de pérdida de calor. Desafortunadamente, esto no nos asegura concluir que si la línea de pérdida de calor tiene una pendiente más grande que la curva de generación de calor en su intersección, entonces el estado estacionario es estable. Son necesarias dos condiciones para mostrar que cualquier posible desviación muere lentamente. La Fig.4 fue dibujada desde una ecuación que ya contenía la solución de la otra, debido a que resolvimos  $w(c_c - c_s) - vkc_s = 0$  para  $c_s$  y sustituimos en el balance de calor. Así cualquier desviación de  $T_s$  que pueda ser mostrada en la figura 4 implica una desviación particular de  $c_s$ , que satisface la última ecuación. Esto es también especial para asegurar que una desviación arbitraria de  $c_s$  y  $T_s$  morirán lentamente.

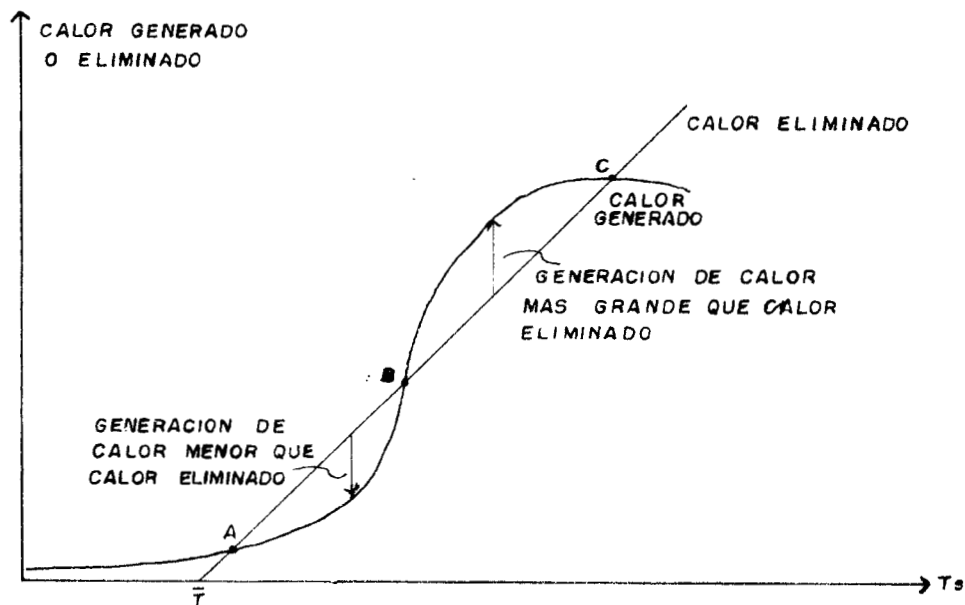


FIG. 4 DEMUESTRA QUE EL DOBLEZ INFERIOR ES INESTABLE



## 1.2 Solución numérica

El retrato fase del sistema cuando existen tres estados estacionarios se ilustra en la figura 5. El estado  $A$ , donde la velocidad de reacción es lenta, corresponde a un valor alto de  $c_s$  (debido a que poco del reactivo a reaccionado), así que los tres estados estacionarios están disponibles en el plano  $T, c$  como se muestra. Supongamos que  $A$  y  $C$  son estables;  $B$ , como sabemos debe ser inestable, se llega a esta conclusión después de analizar la velocidad de generación de calor y velocidad de pérdida de calor; al variar la temperatura en una vecindad del punto crítico  $B$ , hecho anteriormente. El comportamiento del sistema se muestra completamente por el retrato fase.

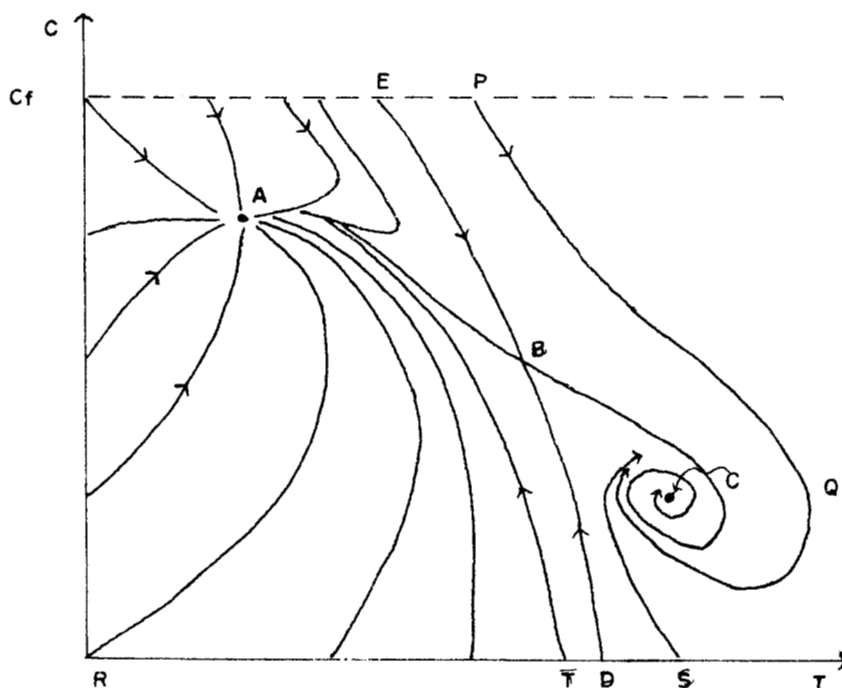


FIG. 5 RETRATO FASE DE UN SISTEMA DONDE HAY TRES ESTADOS ESTACIONARIOS

Si el reactor comienza en estado tal como  $P$ , la concentración disminuirá rápidamente y la temperatura aumenta hasta que el primer brote de la reacción es completado por el uso del reactivo y el sistema pasa por un máximo de temperatura en  $Q$  antes de que el enfriamiento tome lugar y regrese al estado estacionario  $C$  mediante oscilaciones amortiguadas: Si el estado comienza en  $R$ , él pasa mucho más derecho al otro estado estable estacionario en  $A$ . En efecto hay una línea,  $DBE$ , la cual divide al plano en dos partes, los estados iniciales a la izquierda de esta separatriz,  $DBE$ , nos conducen a  $A$ , mientras que aquellos del lado derecho nos conducen a  $C$ . Esto es inmensamente importante para comenzar ya que  $A$  es un estado estacionario inaprovechable y  $C$  es uno con velocidad de reacción favorable, el retrato fase muestra la combinación inicial correcta de  $c_0$  y  $T_0$ . Al mismo tiempo advierte que el punto de partida digamos  $P$  puede conducir a excursiones peligrosas de temperatura: Realmente sugiere que una condición inicial segura puede ser un punto semejante a  $S$ , obtenido al llevar al reactor con una sustancia inerte y elevando la temperatura al nivel del estado estacionario deseado. Así cuando la alimentación es introducida, la sustancia inerte sirve tanto como un disolvente o como un absorbedor de calor y la temperatura baja antes de aumentar de nuevo y retornar al valor estacionario, con un modesto exceso. Notemos que la separatriz consiste de dos trayectorias que comienzan en las fronteras y realmente conducen al estado inestable  $B$ . Así de delicado es este filo que no es posible integrar las ecuaciones desde  $D$  ó  $E$  a  $B$  en la computadora, porque el error de redondeo proporcionaría una desviación que crecería y conduciría la trayectoria ya sea a  $A$  ó a  $C$ . Como se muestra en la figura 5,  $C$  es un foco estable;  $A$  es un nodo estable y  $B$  es un punto silla. Es también posible tener nodos inestables y foco desde el cual la trayectoria se aleja.

Sin embargo los estados estacionarios no son las únicas características críticas de la solución de las ecuaciones modelo. También puede haber ciclos límite, tal como la curva  $\Gamma$  en figura 6a. Interior a  $\Gamma$ ,  $C$  es el único punto estacionario, pero éste es inestable, es decir toda trayectoria se aleja de él y se aproxima al ciclo límite. Similarmente cualquier trayectoria de afuera fluye hacia  $\Gamma$ ; mientras que sí la trayectoria comienza en  $\Gamma$  permanecerá sobre  $\Gamma$  para todo tiempo. Así que  $\Gamma$  es un ciclo límite estable.

La Figura 6b muestra que puede haber también ciclos límite inestables. Aquí el único estado estacionario es estable y se encuentra dentro de un ciclo

límite inestable,  $\Gamma'$ , el cual a su vez se encuentra dentro de  $\Gamma$ , un ciclo límite estable.

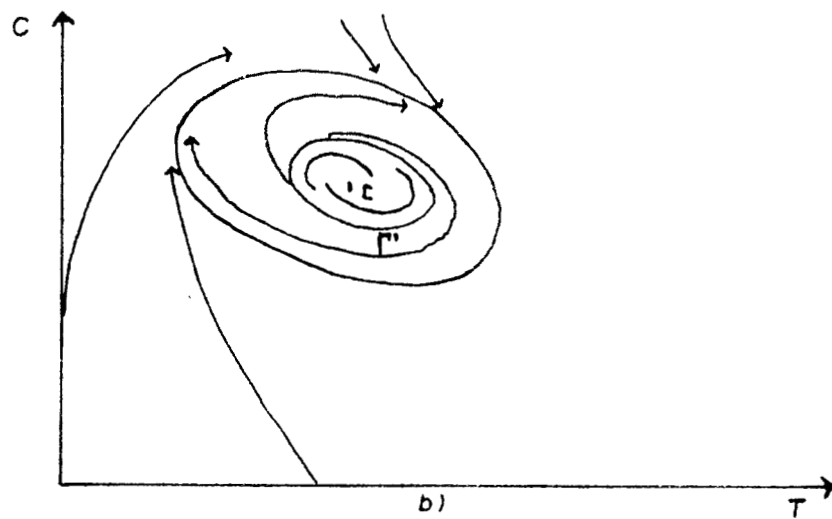
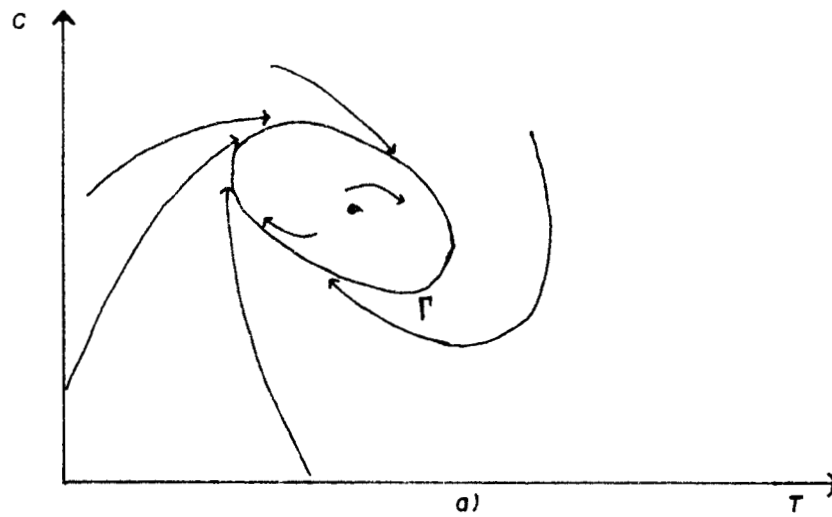


FIG. 8. CICLOS LÍMITE  $\Gamma$  ES ESTABLE Y  $\Gamma'$  INESTABLE QUE SE OBTIENEN AL VARIAR  $T_0$

### 1.3 Puntos críticos: multiplicidad, índice y tipo

Para investigar los puntos críticos necesitamos discernir y discutir el número de parámetros del sistema. Una ecuación como:

$$v \frac{dc}{dt} = wc_e - wc - ck_0 e^{-\frac{E_a}{RT}},$$

tiene todos sus términos de la misma dimensión, en éste caso cantidad por unidad de tiempo. Al elegir las unidades, digamos gramos mol por hora, ésta tendrá ciertas magnitudes, pero existen ciertas magnitudes naturales que son características del problema. Así la concentración de alimentación de los reactivos es característica de la concentración y, si definimos  $c = c_e(1 - x)$ ,  $x$  no tendrá dimensiones y sería la conversión fraccional de los reactivos en productos. De modo que ésta siempre estará entre 0 y 1. Un modo similar de hacer adimensional la temperatura sería tomar la  $y$  desviación  $(T - T_e)$  como una fracción de  $T_e$ ; pero resulta mejor multiplicar ésta por  $\gamma = \frac{E_a}{RT_e}$  y escribir  $T = T_e(1 + \frac{y}{\gamma})$ , porque entonces

$$K(T) = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}} = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT_e}} e^{y(1 + \frac{y}{\gamma})}.$$

Los dos primeros factores dan  $K(T_e)$ , mientras, debido a que  $T$  es una temperatura absoluta y  $T - T_e$  es pequeña comparada con  $T_e$ ,  $\frac{y}{\gamma}$  frecuentemente puede ser omitida en comparación con 1 para dar  $K(T) = K(T_e)e^y$ .

Además si seleccionamos la cantidad  $\frac{vc_p}{h}$ , donde  $h = h_w A_w$ , para adimensionar el tiempo. y definimos

$$\tau = \frac{ht}{vc_p}, \quad T_c = T_e \quad \text{y} \quad \rho = 1.$$

Entonces el sistema de ecuaciones (1) se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{(-x)}{\theta} + D(1 - x)e^y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(1 + \frac{1}{\theta})y + BD(1 - x)e^y. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Estas ecuaciones contienen tres parámetros: el tiempo de residencia adimensional ó bien el recíproco de la razón de flujo,  $\theta = \frac{h}{wc_p}$ ; el así llamado

número de Damkoler,  $D = \frac{vK(T_c)c_p}{h}$ , que es una medida de la intensidad de la reacción ya que es proporcional a  $K(T_c)$  y  $B = \frac{(-\Delta H)c_e E_a}{Rc_p T_c^2}$ , una medida de exotermicidad de la reacción.

Los puntos críticos  $(x_s, y_s)$  son por definición soluciones de las ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned}\frac{(-x_s)}{\theta} + D(1 - x_s)e^{y_s} &= 0, \\ -(1 + \frac{1}{\theta})y_s + BD(1 - x_s)e^{y_s} &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo la primera ecuación del sistema de ecuaciones para  $x_s$  obtenemos

$$x_s = \theta D(1 - x_s)e^{y_s},$$

entonces la segunda ecuación del sistema se expresa como :

$$-(1 + \frac{1}{\theta})y_s + \frac{B(x_s)}{\theta} = 0,$$

de donde

$$y_s = \frac{Bx_s}{\theta + 1},$$

sustituyendo  $y_s$  en la segunda ecuación del sistema obtenemos

$$-(1 + \frac{1}{\theta})\frac{Bx_s}{\theta + 1} + BD(1 - x_s)e^{\frac{Bx_s}{\theta + 1}} = 0,$$

de aquí que

$$D = \frac{x_s}{\theta(1 - x_s)e^{\frac{Bx_s}{\theta + 1}}}. \quad (1.4)$$

Veamos ahora las condiciones de multiplicidad de los puntos críticos como función de variación del parámetro  $D$ .

$$\frac{dD}{dx_s} = \frac{e^{-\frac{Bx_s}{\theta + 1}}[\theta + 1 - Bx_s + Bx_s^2]}{\theta(\theta + 1)(1 - x_s)^2}.$$

Entonces  $\frac{dD}{dx_s} = 0$  si y sólo si :

$$\theta + 1 - Bx_s + Bx_s^2 = 0,$$

de donde obtenemos las raíces

$$x_{s1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_{s2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que  $B < 4(\theta + 1)$  implica que  $x_{s1}, x_{s2}$  son complejas que a su vez implica  $\frac{dD}{dx_s} > 0$  para  $x_s \in (0, 1)$ .

$B = 4(\theta + 1)$  implica  $\frac{dD}{dx_s} > 0$  excepto para  $x_{s1} = x_{s2} = \frac{1}{2}$  donde  $\frac{dD}{dx_s} = 0$ . Así, para  $B \leq 4(\theta + 1)$  tenemos una correspondencia única entre  $D$  y  $x_s$ .

Sea  $B > 4(\theta + 1)$ ; entonces  $\frac{dD}{dx_s} > 0$  para  $x_s \in (0, x_{s1}) \cup (x_{s2}, 1)$  y  $\frac{dD}{dx_s} < 0$  para  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$ .

Sea

$$D_1 = D(x_{s1}),$$

$$D_2 = D(x_{s2}),$$

entonces la situación es como en la figura 7; para  $B > 4(\theta + 1)$  tenemos una única solución de ecuación (1.4) mientras que  $D \in (0, D_2) \cup (D_1, \infty)$  y tres soluciones de la ecuación (1.4) siempre que  $D \in (D_2, D_1)$ . Para  $D = D_1$  ó  $D = D_2$ , existen exactamente 2 puntos críticos.

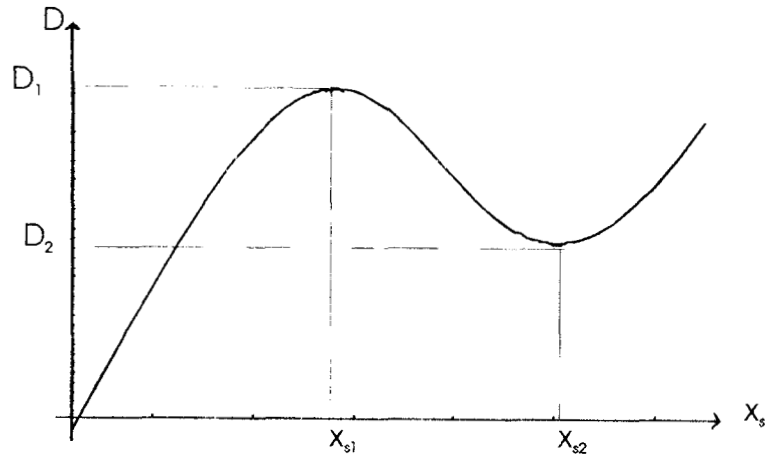


Fig. 7

Ahora determinemos el índice de cada punto crítico. Usando el criterio de rotación del campo vectorial asociado con el sistema de ecuaciones (1.3) (ver[4]) y calculando la rotación sobre el círculo que encierra al punto crítico  $(x_s, y_s)$ , fácilmente se concluye que  $Ind(x_s, y_s) = 1$  para  $x_s = x_{s1}$  ó  $x_{s2}$  cuando  $B = 4(\theta + 1)$  y  $Ind(x_s, y_s) = 0$  para  $x_s = x_{s1}$  ó  $x_{s2}$  cuando  $B > 4(\theta + 1)$ . En estos casos  $det(A) = 0$  donde  $A = \Delta F(x_s, y_s)$  ( $A$  es el jacobiano del sistema (1.3)). Para  $det(A) \neq 0$ , el índice es  $+1$  si  $det(A) > 0$  y  $-1$  si  $det(A) < 0$ ; por lo tanto (ver apéndice)

$$Ind(x_s, y_s) = \frac{det(A)}{|det(A)|} \quad si \quad det(A) \neq 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta} - De^{y_s} & D(1 - x_s)e^{y_s} \\ -BDe^{y_s} & -\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) + BD(1 - x_s)e^{y_s} \end{pmatrix},$$

como

$$y_s = \frac{Bx_s}{\theta + 1},$$

$$D = \frac{x_s}{\theta(1 - x_s)e^{\frac{Bx_s}{\theta+1}}},$$

obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta(1 - x_s)} & \frac{x_s}{\theta} \\ \frac{-Bx_s}{\theta(1 - x_s)} & \frac{Bx_s - \theta - 1}{\theta} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det(A) = \frac{1}{\theta^2} \left[ \frac{Bx_s^2 - Bx_s + \theta + 1}{1 - x_s} \right].$$

Expresando  $\det(A)$  como función de  $\frac{dD}{dx_s}$  obtenemos

$$\det(A) = \frac{(1 - x_s)(\theta + 1)e^{\frac{Bx_s}{\theta+1}}}{\theta} \left[ \frac{dD}{dx_s} \right],$$

lo que implica por la definición de  $Ind(x_s, y_s)$ ;

$$Ind(x_s, y_s) = 1 \quad \text{si} \quad \frac{dD}{dx_s} > 0, \quad y.$$

$$Ind(x_s, y_s) = -1 \quad \text{si} \quad \frac{dD}{dx_s} < 0.$$

Con lo cual hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 1.1: Sean

$$x_{s1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}},$$

$$x_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}},$$

$$D_i = D(x_{si}) = \frac{x_{si}}{\theta(1 - x_{si})e^{\frac{Bx_{si}}{\theta+1}}}$$

para  $i = 1, 2$ . Sea  $(x_s, y_s)$  un punto crítico del sistema autónomo (1.3). Entonces tenemos lo siguiente:

1. Cuando  $B \leq 4(\theta + 1)$  ó cuando  $B > 4(\theta + 1)$  y  $D \in (0, D_2) \cup (D_1, \infty)$ , existe un solo punto crítico del sistema autónomo (1.3). El índice  $Ind(x_s, y_s) = 1$ .
2. Cuando  $B > 4(\theta + 1)$  y  $D = D_1 = D_2$ , existen exactamente dos puntos críticos. Un punto crítico tiene índice positivo y el otro ( $x_s = x_{s1}$  y  $D = D_1$  ó  $x_s = x_{s2}$  y  $D = D_2$ ) tiene un índice de cero.



3. Cuando  $B > 4(\theta + 1)$  y  $D \in (D_2, D_1)$ , existen exactamente tres puntos críticos para cada  $D$ ,  $\theta$  y  $B$ . El índice  $Ind(x_s, y_s) = 1$  cuando  $x_s \in (0, x_{s1}) \cup (x_{s2}, 1)$  y  $Ind(x_s, y_s) = -1$  cuando  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$ .

Veamos el problema de la estabilidad de los puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales (1.3).

La parte lineal del sistema (1.3) se puede expresar como:

$$\frac{dz}{d\tau} = Az,$$

donde  $A = \Delta F(x_s, y_s)$ ,  $(x_s, y_s)$  punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales (1.3). Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta(1-x_s)} & \frac{x_s}{\theta} \\ \frac{-Bx_s}{\theta(1-x_s)} & \frac{Bx_s - \theta - 1}{\theta} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det(A) = \frac{1}{\theta^2} \left[ \frac{Bx_s^2 - Bx_s + \theta + 1}{1 - x_s} \right],$$

$$\text{Tr}A = -\frac{1}{\theta(1-x_s)} + \frac{Bx_s - \theta - 1}{\theta},$$

reduciendo obtenemos

$$\text{Tr}A = -\frac{Bx_s^2 - (B + \theta + 1)x_s + (2 + \theta)}{\theta(1-x_s)}.$$

Las raíces de  $\text{Tr}A = 0$  son:

$$r_1 = \frac{B + \theta + 1}{2B} - \frac{1}{2B} \sqrt{(B + \theta + 1)^2 - 4B(\theta + 2)},$$

$$r_2 = \frac{B + \theta + 1}{2B} + \frac{1}{2B} \sqrt{(B + \theta + 1)^2 - 4B(\theta + 2)}.$$

las raíces de  $\det(A) = 0$  son :

$$x_{s1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}},$$

$$x_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}}.$$

Por el teorema de estabilidad. Podemos concluir que el punto crítico  $(x_s, y_s)$  del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (1.3) es un foco ó nodo estable asintóticamente si  $\det(A) > 0$  y  $TrA < 0$ . El punto crítico  $(x_s, y_s)$  será un punto silla si  $\det(A) < 0$  y el punto crítico  $(x_s, y_s)$  es un foco ó nodo inestable si  $\det(A) > 0$  y  $TrA > 0$ .

Para  $B < 4(\theta + 1)$ ,  $x_{s1}$  y  $x_{s2}$  son raíces imaginarias que a su vez implican que  $\det(A) > 0$  para todo valor de  $D > 0$  y  $x_s \in (0, 1)$  puesto que  $\det(A) > 0$  para  $x_s = 0$ . Así la estabilidad es determinada por el signo de  $TrA$ . Para  $B < 3 + \theta + 2\sqrt{\theta + 2}$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son raíces imaginarias ó  $r_2 > r_1 > 1$  de modo que  $TrA < 0$  para todo  $D > 0$  y  $x_s \in (0, 1)$ . Así todos los puntos críticos son focos ó nodos estables asintóticamente cuando  $B < 4(\theta + 1)$  y  $B < 3 + \theta + 2\sqrt{\theta + 2}$ .

Para  $B < 4(1 + \theta)$ ;  $\det(A) > 0$  y  $B > 3 + \theta + 2\sqrt{\theta + 2}$  y  $x_s \in (r_1, r_2)$  implica  $TrA > 0$ . Así todos los puntos críticos son focos ó nodos inestables cuando  $3 + \theta + 2\sqrt{\theta + 2} < B < 4(1 + \theta)$ .

Para  $B > 4(1 + \theta)$  y  $B < 3 + \theta + 2\sqrt{\theta + 2}$   $r_1$  y  $r_2$  son raíces imaginarias pero  $x_{s1}$  y  $x_{s2}$  son reales. Para  $x_s \in (0, x_{s1}) \cup (x_{s2}, 1)$ ,  $\det(A) > 0$  y  $TrA < 0$  así que todos los puntos críticos son focos ó nodos estables. Mientras para  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$ ,  $\det(A) < 0$  entonces los puntos críticos son silla.

Si  $\frac{(1+\theta)^3}{\theta} < B$  para  $0 \leq \theta < \infty$ , existen tres puntos críticos para  $D \in (D_2, D_1)$  y un punto crítico para  $D \in (0, D_2) \cup (D_1, \infty)$ . Tenemos  $0 < x_{s1} < r_1 < x_{s2} < r_2 < 1$ . El punto crítico es nodo ó espiral asintóticamente estable para  $x_s \in (0, x_{s1}) \cup (r_2, 1)$ , un punto tipo silla inestable para  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$  y un espiral ó nodo inestable para  $x_s \in (x_{s2}, r_2)$ . para probar esta afirmación supongamos  $B > \max\{4(1+\theta), 3+\theta+2\sqrt{2+\theta}\}$ .

Entonces  $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son reales y  $TrA < 0$  para  $x_s \in (0, r_1) \cup (r_2, 1)$ ,  $TrA > 0$  para  $x_s \in (r_1, r_2)$ ,  $detA < 0$  para  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$ , y  $detA > 0$  para  $x_s \in (0, x_{s1}) \cup (x_{s2}, 1)$ . por comparación de las raíces  $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$ ,  $r_1$  y  $r_2$  podemos determinar todas las relaciones entre estabilidad y multiplicidad.

Si  $4(1 + \theta) < B < \frac{(1+\theta)^3}{\theta}$ , y  $\theta > 1$  existen tres puntos críticos para  $D \in (D_2, D_1)$  y uno para  $D \in (0, D_2) \cup (D_1, \infty)$ . Tenemos que  $0 < r_1 < x_{s1} < x_{s2} < r_2 < 1$ . El punto crítico es nodo ó foco estable asintóticamente para  $x_s \in (0, r_1) \cup (r_2, 1)$ , un punto silla para  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$  y un foco ó nodo inestable para  $x_s \in (r_1, x_{s1}) \cup (x_{s2}, r_2)$ . Ver figura 8.

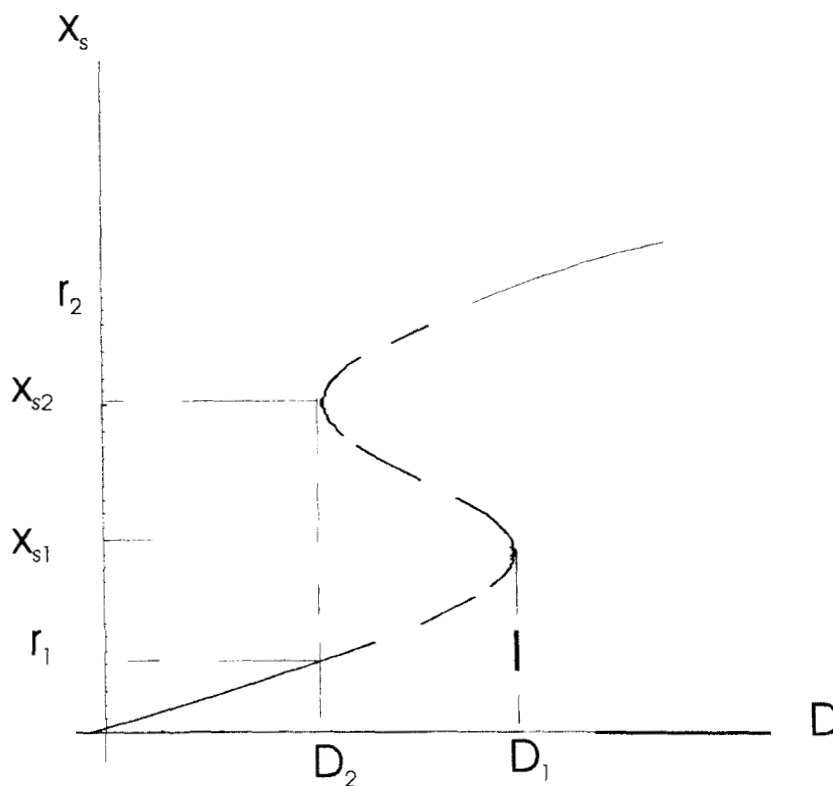


Fig. 8  
 — Puntos críticos estables asintóticamente  
 - - Puntos críticos inestables

## CAPITULO II

### CONTROL LINEAL GLOBAL DEL REACTOR TANQUE AGITADO DE FLUJO CONTINUO

#### 2.1 Linealización del sistema de ecuaciones diferenciales

En el capítulo anterior mostramos que el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal que modela el **Reactor Tanque Agitado** es:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= \frac{w}{v}(c_e - c) - c\alpha e^{\frac{-\delta}{T}}, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{w}{v}(T_e - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} c\alpha e^{\frac{-\delta}{T}} - \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p} (T - T_c),\end{aligned}$$

donde  $c$  y  $T$  son la concentración y temperatura del reactor y  $T_c$  es la temperatura de enfriamiento. Y además estudiamos multiplicidad, índice y estabilidad de puntos críticos. Ahora el problema de control consiste en mantener la concentración y temperatura en un valor específico (punto crítico) a pesar de perturbaciones (se originan en la concentración  $c_e$  y la temperatura  $T_e$  de entrada). La variable de control es  $T_c(c, T)$ . Si definimos los parámetros:  $\alpha = K_0$ ,  $\theta = \frac{w}{v}$ ,  $\delta = \frac{E_a}{R}$ ,  $\beta = \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p}$  y  $\gamma = \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p}$  entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) se expresa como:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= \theta(c_e - c) - c\alpha e^{\frac{-\delta}{T}}, \\ \frac{dT}{dt} &= \theta(T_e - T) + \beta c\alpha e^{\frac{-\delta}{T}} - \gamma(T - T_c).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Supongamos que un punto estacionario  $(\bar{c}, \bar{T})$ , estable o inestable, de (2.1) ha sido seleccionado. Los valores correspondientes de estado y variables de entrada se denotan por  $\bar{c}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{c}_e$ ,  $\bar{T}_e$ , y  $\bar{T}_c$ . Si definimos las variables,  $x_1 = c - \bar{c}$ ,  $x_2 = T - \bar{T}$  y  $u = T_c - \bar{T}_c$ , el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) puede ser escrito en forma matricial como:

$$\dot{X} = f(X) + gu : \quad X, f, g \in R^2 \quad y \quad u \in R, \quad (2.2)$$

donde

$$f_1(x_1, x_2) = \theta \bar{c}_e - \theta(\bar{c} + x_1) - \alpha(\bar{c} + x_1)e^{\frac{-\delta}{\bar{T} + x_2}},$$

$$f_2(x_1, x_2) = \theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma)(\bar{T} + x_2) + \alpha\beta(\bar{c} + x_1)e^{\frac{-\delta}{\bar{T} + x_2}},$$

$$g_1 = 0,$$

$$g_2 = \gamma.$$

El objetivo es hallar una función de control  $u(X)$  :

$$u : W \longrightarrow R,$$

donde  $W$  es un conjunto conexo abierto en  $R^2$  donde el funcionamiento del control es asegurado. Debemos tener siempre presente que  $u(X)$  y  $W$  dependen de la elección del punto crítico. El diseño del control lineal esta basado en la forma canónica estandar(FCE)(Kalman).

Consideremos el siguiente sistema(posiblemente inestable):

$$\dot{X} = AX + Bu. \quad (2.3)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}; \quad a_{12} \quad y \quad b_2 \neq 0,$$

donde  $b_2 \neq 0$  asegura la presencia de la acción del control y  $a_{12} \neq 0$  permite el acceso del control a la variable  $x_1$ . En efecto, una linealización Taylor a primer orden del modelo del reactor (2.2) tiene la forma del sistema (2.3). Donde  $A = \Delta f(0, 0)$  es decir:

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\theta - \alpha e^{\frac{-\delta}{T+x_2}} & -\alpha(\bar{c} + x_1) \frac{\delta}{(\bar{T} + x_2)^2} e^{\frac{-\delta}{T+x_2}} \\ \alpha\beta e^{\frac{-\delta}{T+x_2}} & -(\theta + \gamma) + \alpha\beta(\bar{c} + x_1) \frac{\delta}{(\bar{T} + x_2)^2} e^{\frac{-\delta}{T+x_2}} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} -\theta - \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} & -\alpha(\bar{c}) \frac{\delta}{(\bar{T})^2} e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} \\ \alpha\beta e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} & -(\theta + \gamma) + \alpha\beta(\bar{c}) \frac{\delta}{(\bar{T})^2} e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

El objetivo es diseñar un controlador proporcional( $u$ ) de la forma :

$$u = K^T X, \quad K^T = (k_1, k_2). \quad (2.4)$$

de modo que el proceso a lazo cerrado tenga dos eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2$ .

El diseño del controlador(2.4) puede ser hecho seleccionando el vector ganancia  $K^T$  de modo que la matriz a lazo cerrado ( $A + BK^T$ ) tenga  $\lambda_1, \lambda_2$  como eigenvalores.

## 2.2 Propiedades estructurales

El control anteriormente diseñado da ciertas propiedades inherentes al sistema (2.3). Es bién conocido que la teoría de sistemas lineales proveé herramientas en materia estructural como controlabilidad, estabilidad y transformabilidad a formas equivalentes (Kwakernaak y Sivan,[18]; Kailath,[19]; Balakrishnan,[20]).

Si  $a_{12}$  ó  $b_2 = 0$  el control diseñado tiene problemas. Esto puede ser detectado y explicado con el concepto de controlabilidad la cual depende del

par  $(A, B)$ . El problema mencionado anteriormente es llevado a la transformabilidad y estabilidad del sistema porque estas propiedades dependen de la controlabilidad. Supongase que  $A$  tiene eigenvalores distintos, la teoría lineal provee los siguientes resultados. El sistema (2.3) es:

- (i) Asintóticamente estable si y solo si  $Re\lambda_{Ai} < 0$  ( $i = 1, 2$ ).
- (ii) Controlable si y solo si  $rang[A, b] = 2$ .
- (iii) Transformable a la FCE si es Controlable.

### 2.3 La forma conónica estándar

La forma conónica estándar (FCE) para un par  $(A, B)$  controlable con entrada singular fue propuesta en varios trabajos alrededor de 1961, pero quien primero lo publicó fue Popov. La FCE es útil para el diseño del control estado que alcanza una deseada asignación de eigenvalores.

Supóngase que el sistema (2.3) tiene  $n$  estados y  $m$  entradas

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X \in R^n \quad y \quad u \in R^m$$

y el polinomio característico de la matriz  $A$  es :

$$p(\lambda) = \lambda^n - (a_1 + a_2\lambda + \dots + a_n\lambda^{n-1}).$$

Si el sistema es controlable ( $rang[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ ), existe una transformación invertible que lleva el sistema a la FCE (Kalman):

$$\dot{Z} = GZ + Qv,$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & - & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & - & - & - & - & a_n \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En el presente caso,  $n = 2$ ,  $m = 1$ , la FCE será :

$$\dot{Z} = GZ + Qv, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde  $a_1 = \det(A)$ ,  $a_2 = \text{Tr}(A)$ .

## 2.4 Una transformación invertible

En esta parte obtendremos una transformación que lleva al sistema (2.3) a la FCE (2.5). Primero daremos un proceso general para obtener una transformación que lleva al sistema (2.3) al sistema (2.5) con  $X \in R^n$  y  $u \in R$ . Como el sistema (2.3) es controlable,  $\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ , los vectores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  forman una base del conjunto solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.3), es decir,

$$X = \sum_{i=1}^n \epsilon_i A^{i-1} B, \quad \epsilon_i \in R.$$

Como el vector  $Q$  tiene valor cero en las  $n - 1$  componentes y valor 1 en la  $n$ -ésima componente entonces se busca un vector  $C \in R^n$  tal que:

$$C^T A^i B = 0 \quad 0 \leq i \leq n - 2. \quad (2.6)$$

$$C^T A^{n-1} B = 1. \quad (2.7)$$

Si definimos:



$$T_i^T = C^T A^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

entonces la transformación  $T$  es:

$$T = \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \\ \vdots \\ T_n^T \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Definamos

$$Z = TX.$$

En nuestro caso particular ( $n=2$ ), tenemos, de las ecuaciones (2.6) y (2.7) para  $C \in R^2$ ,  $C = (c_1, c_2)$

$$\begin{aligned} C^T B &= 0, \\ C^T AB &= 1, \end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned} c_1 0 + c_2 b_2 &= 0, \\ c_1 a_{12} b_2 + c_2 a_{22} b_2 &= 1, \end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ c_1 &= \frac{1}{a_{12} b_2}. \end{aligned}$$

De la ecuación (2.8):

$$T_1^T = C^T A^0 = \left( \frac{1}{a_{12} b_2}, 0 \right),$$

$$T_2^T = C^T A = \left( \frac{a_{11}}{a_{12}b_2}, \frac{a_{12}}{a_{12}b_2} \right).$$

Por ecuación (2.9) la transformación invertible T es:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{12}b_2} & 0 \\ \frac{a_{11}}{a_{12}b_2} & \frac{a_{12}}{a_{12}b_2} \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{aligned} z_1(x_1) &= \frac{x_1}{a_{12}b_2}, \\ z_2(x_1, x_2) &= \frac{a_{11}x_1}{a_{12}b_2} + \frac{a_{12}x_2}{a_{12}b_2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para hallar  $v$ . De la ecuación (2.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a_1 z_1 + a_2 z_2 + v, \end{aligned} \tag{2.11}$$

de donde

$$v = \dot{z}_2 - a_1 z_1 - a_2 z_2. \tag{2.12}$$

Sustituyendo el valor de  $\dot{z}_2$  desde ecuación (2.10) en la ecuación (2.12) obtenemos a  $v$ .

Por lo tanto la transformación que se buscaba es:

$$\begin{aligned} z_1(x_1) &= \frac{x_1}{a_{12}b_2}, \\ z_2(x_1, x_2) &= \frac{a_{11}x_1}{a_{12}b_2} + \frac{a_{12}x_2}{a_{12}b_2}, \end{aligned}$$

$$v(x_1, x_2) = \frac{a_{11}}{a_{12}b_2}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{a_{12}}{a_{12}b_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + \frac{a_{12}b_2}{a_{12}b_2}u - \frac{a_1}{a_{12}b_2}x_1 - \frac{a_2a_{11}}{a_{12}b_2}x_1. \quad (2.13)$$

## 2.5 Control lineal

La FCE preserva los eigenvalores a lazo cerrado. De aquí, que la asignación de los eigenvalores puede hacerse sobre el sistema equivalente (2.5). Consideremos el control lineal para la FCE (2.5):

$$v = F^T Z; \quad F^T = (k_1 - a_1, k_2 - a_2). \quad (2.14)$$

El proceso a lazo-cerrado equivalente es

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} Z. \quad (2.15)$$

Las ganancias se definen de acuerdo a las siguientes expresiones

$$k_1 = -\lambda_1\lambda_2, k_2 = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.16)$$

La ley de control se obtiene al expresar la ecuación (2.14) en términos de las coordenadas originales, es decir, de la ecuación (2.14) obtenemos

$$v = k_1 z_1 - a_1 z_1 + k_2 z_2 - a_2 z_2,$$

por otro lado, sustituyendo el valor de  $v$  en (2.12) de la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{z}_2 = k_1 z_1 + k_2 z_2. \quad (2.17)$$

Ahora sustituyendo los valores de  $\dot{z}_2$ ,  $z_1$  y  $z_2$ , desde la ecuación (2.10), en la ecuación (2.17) y despejando a  $u$  se obtiene:

$$u = \frac{k_1 x_1}{a_{12} b_2} + k_2 \frac{a_{11} x_1 + a_{12} x_2}{b_2 a_{12}} - a_{11} \frac{a_{11} x_1 + a_{12} x_2}{a_{12} b_2} - a_{12} \frac{a_{21} x_1 + a_{22} x_2}{a_{12} b_2}. \quad (2.18)$$

Ahora bien como : (anteriormente definidas)

$$x_1 = c - \bar{c},$$

$$x_2 = T - \bar{T},$$

$$u = T_c - \bar{T}_c,$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales controlable (2.2) se puede expresar en términos de la concentración y temperatura de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \theta(\bar{c}_e - c) - \alpha c e^{\frac{-\delta}{T}}, \\ \frac{dT}{dt} &= \theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma)T + \beta \alpha c e^{\frac{-\delta}{T}} + \gamma u, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde

$$u = \frac{(k_1 + k_2 a_{11} - a_{11}^2 - a_{12} a_{21})}{a_{12} b_2} (c - \bar{c}) + \frac{(k_2 a_{12} - a_{11} a_{12} - a_{12} a_{22})}{a_{12} b_2} (T - \bar{T}),$$

para facilitar el álgebra escribimos al controlador  $u$  en la siguiente forma

$$u = M(c - \bar{c}) + N(T - \bar{T}). \quad (2.20)$$

donde claramente

$$M = \frac{k_1 + k_2 a_{11} - a_{11}^2 - a_{12} a_{21}}{a_{12} b_2} y$$

$$N = \frac{k_2 a_{12} - a_{11} a_{12} - a_{12} a_{22}}{a_{12} b_2}.$$

## CAPITULO III

### CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA ESTABILIDAD - GLOBAL DEL REACTOR TANQUE AGITADO DE FLUJO CON- TINUO

Claramente, como el control lineal del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) se encontró basandose en el sistema de ecuaciones diferenciales linealizado (2.3), la estabilidad para el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (2.2) se cumple en una vecindad del punto crítico  $(\bar{c}, \bar{T})$ , siempre que este sea hiperbólico; que es este caso, pues los valores propios son reales, diferentes de cero y negativos. En esta parte del trabajo se encontrarán las condiciones que deben cumplir algunos parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal controlable (2.19), para que éste sea globalmente estable. Entendiéndose por estabilidad global no en todo el plano  $c, T$  si no en el dominio en donde las variables  $c, T$  tienen sentido físico.

Para esto probemos primero que no existe otro punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales (2.19) diferente a  $(\bar{c}, \bar{T})$ . Y después mostraremos que éste sistema no tiene ciclos límite.

#### 3.1 Región Físicamente Factible De Evolución del Reactor.

La región en donde tiene sentido físico establecer o analizar la estabilidad global de la concentración y temperatura de una reacción exotérmica irreversible, que se lleva a cabo en un reactor tanque agitado, modelado por el sistema (2.1); es el conjunto:

$$W = \{(c, T) \in R^2 : 0 \leq c \leq 1, T_* \leq T \leq T^*\},$$

en donde

$$T_* = \min\{T_e, T_c\},$$

$$T^* = \beta + \max\{T_e, T_c\}.$$

Esta región se obtuvo, después de observar que la concentración mínima es cero, el valor máximo de la concentración de entrada ( $c_e$ ) es uno, y el incremento de temperatura adiabática (No hay intercambio de calor con el medio ambiente) es siempre positiva. Además se ha probado, por Alvarez, [14], que  $W$  es una región invariante. figura 9.

### 3.2 Condición suficiente para la unicidad del punto crítico por método directo

PROPOSICION 3.1: Si

$$k_2 - \beta \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} < -\theta - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}, \quad (3.1)$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (2.19) tiene a  $(\bar{c}, \bar{T})$  como único punto crítico.

DEMOSTRACION:

Supongamos que  $(c_s, T_s)$  es un punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales (2.19), esto implicará:

$$\theta(\bar{c}_e - c_s) - \alpha c_s e^{\frac{\delta}{T_s}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) T_s + \beta \alpha c_s e^{\frac{\delta}{T_s}} + \gamma M(c_s - \bar{c}) + \gamma N(T_s - \bar{T}) = 0, \quad (3.3)$$

despejando  $c_s$  de ecuación (3.2), obtenemos

$$c_s = \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}}}.$$

Sustituyendo el valor de  $c_s$  en la ecuación (3.3), obtenemos

$$\theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) T_s + (\beta \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} + \gamma M) \left( \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}}} \right) - \gamma M \bar{c} + \gamma N(T_s - \bar{T}) = 0. \quad (3.4)$$

Observemos que la ecuación (3.4) es función de la variable  $T_s$ , entonces consideremos a

$$w(T_s) = \theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) T_s + (\beta \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} + \gamma M) \left( \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}}} \right) - \gamma M \bar{c} + \gamma N (T_s - \bar{T}),$$

entonces,  $w(T_s)$  cruzará al eje  $c$  solo una vez si  $\frac{d}{dT_s} w(T_s)$  es de un solo signo, es decir  $\frac{d}{dT_s} w(T_s) \neq 0$ .

$$\frac{d}{dT_s} w(T_s) = -(\theta + \gamma) + (\beta \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} + \gamma M) \left( \frac{-\theta \bar{c}_e \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} \delta}{(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}})^2 T_s^2} \right) + \left( \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}}} \right) \left( \beta \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} \frac{\delta}{T_s^2} \right) + \gamma N,$$

de donde

$$\frac{d}{dT_s} w = \frac{[\gamma N - (\theta + \gamma)](\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}})^2 T_s^2 - \theta \bar{c}_e \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} \delta (\gamma M - \beta \theta)}{T_s^2 (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}})^2},$$

entonces

$$\frac{d}{dT_s} w \neq 0 \quad \text{si y solo si,}$$

$$[\gamma N - (\theta + \gamma)](\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}})^2 T_s^2 \neq \theta \bar{c}_e \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} \delta (\gamma M - \beta \theta),$$

si y sólo si

$$\frac{\gamma N - (\theta + \gamma)}{\gamma M - \beta \theta} \neq \frac{\theta \bar{c}_e \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}} \delta}{(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T_s}})^2 T_s^2},$$

como  $\theta$ ,  $\bar{c}_e$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ , son parámetros positivos y  $T_s^2$  es positivo, siempre que  $T_s \neq 0$ . Entonces

$$\frac{\gamma N - (\theta + \gamma)}{\gamma M - \beta \theta} \neq 0,$$

de donde

$$\gamma N - (\theta + \gamma) \neq 0. \quad (3.5)$$

Si expresamos la desigualdad (3.5) en términos de los parámetros, tenemos que por definición :

$$\gamma N = k_2 + \theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}} + (\theta + \gamma) - \beta \bar{c} \frac{\delta}{T^2} \alpha e^{\frac{\delta}{T}}, \quad (3.6)$$



entonces

$$\gamma N - (\theta + \gamma) = k_2 + \theta + \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} - \beta \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}};$$

entonces

$$\gamma N - (\theta + \gamma) < 0 \quad \text{si}$$

$$k_2 - \beta \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} < -\theta - \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}}. \quad (3.1)$$

QED.

Como ejemplo considere:  $k_2 < 0$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $0 < \bar{c} < 1$ ,  $\bar{T} > 0$ ,  $\alpha = e^{25}$ ,  $\beta = 200$ , entonces la desigualdad (3.1) se cumple. Por lo tanto siempre se cumple

$$\gamma N - (\theta + \gamma) < 0.$$

Observación: Los valores de  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  fueron tomados de los artículos de R.Aris y Amudson de 1958. Sin embargo podemos considerar valores en vecindades correspondientes de  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  donde se cumpla la desigualdad (3.1).

### 3.3 Condiciones suficientes para evitar ciclos límite en el Reactor Tanque Agitado, por método directo

PROPOSICION 3.2: Una condición suficiente para la no existencia de ciclos límite en el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (2.19) es:

$$[k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}}) - (\theta + \alpha e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}})^2] > 0. \quad (3.7)$$

DEMOSTRACION:

Para probar que el sistema de ecuaciones diferenciales (2.19) no tiene ciclos límite analizaremos el retrato fase de este sistema de ecuaciones diferenciales en la región que tiene como frontera a las curvas:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= 0 & \text{para} & \quad \bar{c} < c, \\ T &= \bar{T} & \text{para} & \quad \bar{c} < c, \\ c &= c_e & \text{y la curva} & \quad T = 0. \end{aligned}$$

Y mostraremos que esta es una región invariante. Esto será suficiente, pues toda órbita cerrada debe contener en su interior al menos un punto crítico. (ver figura 9)

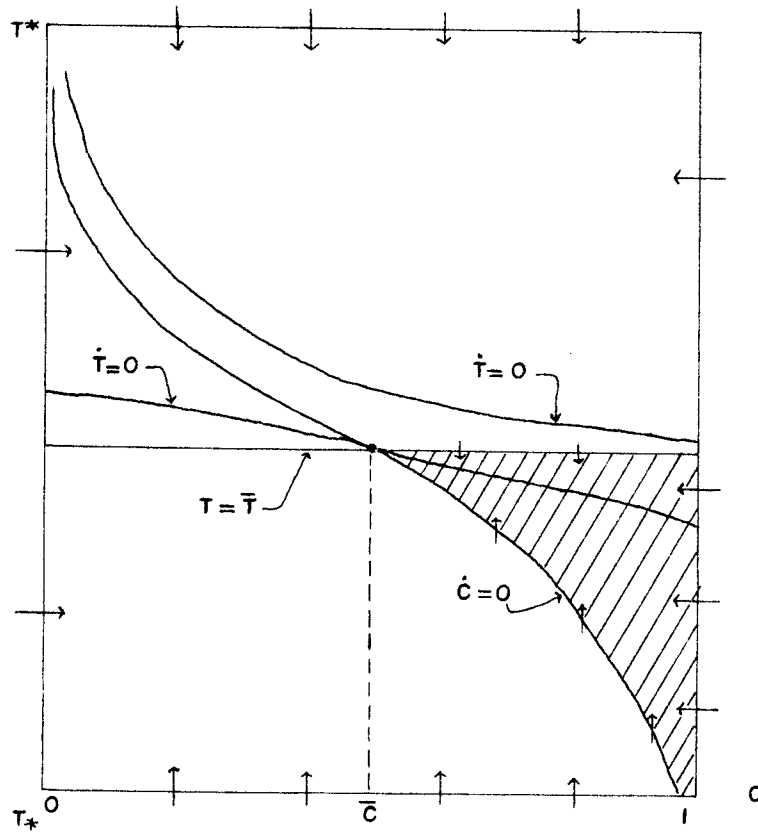


FIG. 9 MUESTRA UNA REGION INVARIANTE  
EN EL PLANO FASE

$\dot{c} = 0$  implica; (de la ecuación 2.19),

$$\theta(\bar{c}_e - c) - \alpha c e^{\frac{-\delta}{T}} = 0,$$

de donde

$$c = \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{-\delta}{T}}}.$$

se observa que cuando  $T$  tiende a 0, entonces  $c$  tiende a  $\bar{c}_e$ . Por lo tanto la curva  $c = \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{-\delta}{T}}}$  corta al eje  $c$  en  $c = \bar{c}_e$ .

Si en lugar de despejar a  $c$ , de la ecuación  $\dot{c} = 0$ , despejamos a la variable  $T$  obtenemos:

$$T = \frac{-\delta}{\ln\left[\frac{\theta(\bar{c}_e - c)}{\alpha c}\right]}. \quad (3.8)$$

Ahora probemos que la función  $T$  de la ecuación (3.8) es decreciente. Si derivamos a  $T$  respecto a  $c$  obtenemos:

$$\frac{dT}{dc} = \frac{\delta \left[ \frac{-\theta \bar{c}_e \alpha}{\alpha c \theta (\bar{c}_e - c)} \right]}{\left[ \ln\left( \frac{\theta \bar{c}_e - c}{\alpha c} \right) \right]^2},$$

como  $\alpha c \theta (\bar{c}_e - c) > 0$ , dado que  $\bar{c}_e > c$ , entonces la función :

$$T = \frac{-\delta}{\ln\left[\frac{\theta(\bar{c}_e - c)}{\alpha c}\right]},$$

es decreciente.

Ahora veamos en que dirección apunta el campo vectorial asociado al sistema de ecuaciones diferenciales (2.19) a lo largo de la curva

$$c = \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{-\delta}{T}}},$$

restringido al dominio  $\bar{c} < c$  y  $\bar{T} > T$ .

Si sustituimos el valor de  $c$ , de la anterior ecuación, en la segunda ecuación del sistema (2.19) obtenemos:

$$\dot{T} = \theta\bar{T}_e + \gamma\bar{T}_c - (\theta + \gamma)T + \frac{\beta\alpha\theta\bar{c}_e e^{-\frac{\delta}{T}}}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}} + \frac{\gamma M\theta\bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}} - \gamma M\bar{c} + \gamma N(T - \bar{T}).$$

Sustituyendo  $\gamma N$ , definida en la ecuación (3.6), en esta ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{T} = & \theta\bar{T}_e + \gamma\bar{T}_c - (\theta + \gamma)T + \frac{\beta\alpha\theta\bar{c}_e e^{-\frac{\delta}{T}}}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}} + \frac{\gamma M}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}}[\theta\bar{c}_e - \bar{c}(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}})] \\ & + [k_2 + \theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}} + (\theta + \gamma) - \beta\bar{c}\frac{\delta}{T^2}\alpha e^{-\frac{\delta}{T}}][T - \bar{T}], \end{aligned}$$

de donde se observa que el término  $(\theta + \gamma)T$  tiene signos opuestos. Por lo que se elimina. Además

$$\theta(T - \bar{T}) + (\theta + \gamma)(-\bar{T}) = \theta T - 2\theta\bar{T} - \gamma\bar{T},$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \dot{T} = & \theta\bar{T}_e + \gamma\bar{T}_c + \frac{\beta\alpha\theta\bar{c}_e e^{-\frac{\delta}{T}}}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}} + \frac{\gamma M}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}}[\theta\bar{c}_e - \bar{c}(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}})] \\ & + \theta T - 2\theta\bar{T} - \gamma\bar{T} + [k_2 + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}} - \beta\bar{c}\frac{\delta}{T^2}\alpha e^{-\frac{\delta}{T}}][T - \bar{T}], \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \dot{T} = & \left\{ (\theta\bar{T}_e + \gamma\bar{T}_c + \theta T - 2\theta\bar{T} - \gamma\bar{T})(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}) + \beta\alpha\theta\bar{c}_e e^{-\frac{\delta}{T}} + \gamma M[\theta\bar{c}_e - \bar{c}(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}})] \right. \\ & \left. + (k_2 + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}} - \beta\bar{c}\frac{\delta}{T^2}\alpha e^{-\frac{\delta}{T}})(T - \bar{T})(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}) \right\} \div (\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}). \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $M$ , definida anteriormente,

$$\begin{aligned}
\dot{T} = & \left\{ (\theta\bar{T}_e + \gamma\bar{T}_c + \theta T - 2\theta\bar{T} - \gamma\bar{T})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})(-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}}) \right. \\
& + (\beta\alpha\theta\bar{c}_e e^{\frac{\delta}{T}})(-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}}) \\
& + [k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) - \theta^2 - 2\theta\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha^2 e^{\frac{-2\delta}{T}} + \alpha^2\beta\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{-2\delta}{T}}][\theta\bar{c}_e - \bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})] \\
& \left. + (k_2 + \alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \beta\bar{c}\frac{\delta}{T^2}\alpha e^{\frac{\delta}{T}})(T - \bar{T})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})(-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}}) \right\} \div (-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}).
\end{aligned}$$

Dado que  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  son parámetros positivos y  $\bar{c}$ ,  $\bar{T}$  son positivos;

$$(-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}),$$

es siempre negativo.

entonces será  $\dot{T} > 0$  siempre que el numerador ( $Num$ ) de la anterior ecuación sea negativo.

Desarrollando productos en el numerador ( $Num$ ) de la anterior ecuación llegamos a:

$$\begin{aligned}
Num = & (\theta\bar{T}_e + \gamma\bar{T}_c + \theta T - 2\theta\bar{T} - \gamma\bar{T})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})(-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}}) \\
& + (\beta\alpha\theta\bar{c}_e e^{\frac{\delta}{T}})(-\alpha\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{\delta}{T}}) + k_1\theta\bar{c}_e - k_2\theta\bar{c}_e(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) - \theta^3\bar{c}_e \\
& - 2\theta^2\bar{c}_e\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha^2\theta\bar{c}_e e^{\frac{-2\delta}{T}} + \alpha^2\beta\theta\bar{c}_e\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{-2\delta}{T}} - k_1\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) \\
& - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})[\bar{c}\frac{\delta}{T^2}(T - \bar{T})\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})] + \theta^2\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) \\
& + 2\theta\alpha\bar{c}e^{\frac{\delta}{T}}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) + \alpha^2\bar{c}e^{\frac{-2\delta}{T}}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) - \alpha^2\beta\bar{c}^2\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{-2\delta}{T}}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) \\
& - \alpha^2\bar{c}\frac{\delta}{T^2}e^{\frac{-2\delta}{T}}(T - \bar{T})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) + \alpha^2\beta\bar{c}^2\frac{\delta^2}{T^4}e^{\frac{-2\delta}{T}}(T - \bar{T})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}).
\end{aligned}$$

Como  $(\bar{c}, \bar{T})$  es un punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales (2.19) entonces los términos 13 y 14 se pueden expresar como:

$$\alpha e^{\frac{\delta}{T}}\theta(\bar{c}_e - \bar{c})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}),$$

y

$$-\theta(\bar{c}_e - \bar{c})\frac{\delta}{\bar{T}^2}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})\beta\bar{c}\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}},$$

respectivamente.

Ahora factorizando  $-\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}$  de los términos 6, 7, 12 y 13,  $-\theta(\bar{c}_e - \bar{c})\frac{\delta}{\bar{T}^2}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})$  de los términos 1, 14 y 15,  $-\theta(\bar{c}_e - \bar{c})\frac{\delta}{\bar{T}^2}$  de los términos 2 y 8. Entonces  $Num$  se expresa como:

$$\begin{aligned} Num = & -\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} [2\theta^2\bar{c}_e + \theta\bar{c}_e\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - 2\theta\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta(\bar{c}_e - \bar{c})(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})] \\ & - \theta^3\bar{c}_e + \theta^2\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - k_2\theta\bar{c}_e(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - k_1[\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta\bar{c}_e] \\ & - \theta(\bar{c}_e - \bar{c})\frac{\delta}{\bar{T}^2}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})[\theta(T - \bar{T}) + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}(T - \bar{T}) - \beta\bar{c}\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}\frac{\delta}{\bar{T}^2}(T - \bar{T})] \\ & - \theta(\bar{c}_e - \bar{c})\frac{\delta}{\bar{T}^2}[\beta\theta\bar{c}_e\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \beta\theta\bar{c}_e\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}] - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})[\bar{c}\frac{\delta}{\bar{T}^2}(T - \bar{T})\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \theta\bar{c}_e], \end{aligned}$$

para simplificar un poco el numerador observemos que:

$$\theta\bar{c}_e = \bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}),$$

implica

$$-\theta^3\bar{c}_e + \theta^2\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) = -\theta^2\bar{c}(\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}).$$

Además, el segundo factor del primer término del numerador se puede simplificar a:

$$\theta^2\bar{c}_e - \theta^2\bar{c}\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} + \theta\bar{c}_e(\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}),$$

mas aún, por el valor de  $\theta\bar{c}_e$ , definido anteriormente, el segundo factor del primer término del numerador es:

$$(2\theta\bar{c} + \bar{c}\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})(\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}),$$

y

$$\bar{c}(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta\bar{c}_e = \bar{c}(\alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}
Num = & -\alpha e^{\frac{\delta}{T}} (2\theta \bar{c} + \bar{c} \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta^2 \bar{c} (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - k_1 \bar{c} (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) \\
& - \theta (\bar{c}_e - \bar{c}) \frac{\delta}{\bar{T}^2} (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \beta \bar{c} \alpha e^{\frac{\delta}{T}} (\frac{\delta}{\bar{T}^2})) (T - \bar{T}) \\
& - \theta (\bar{c}_e - \bar{c}) \frac{\delta}{\bar{T}^2} \beta \theta \bar{c}_e (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - k_2 \theta \bar{c}_e (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) \\
& - k_2 (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) (\bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) (T - \bar{T}),
\end{aligned}$$

debido a que,

$$-\alpha e^{\frac{\delta}{T}} (2\theta \bar{c} + \bar{c} \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) = -\theta (\bar{c}_e - \bar{c}) (2\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}),$$

y agrupando los términos 2 y 3; 4, 5 y 1; 6 y 7, obtenemos que el numerador se expresa como:

$$\begin{aligned}
Num = & (\theta^2 \bar{c} - k_1 \bar{c}) (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) \\
& - \theta (\bar{c}_e - \bar{c}) \frac{\delta}{\bar{T}^2} \times \left\{ (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \beta \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) (T - \bar{T}) \right. \\
& + \left. [\beta \theta \bar{c}_e - \frac{\bar{T}^2}{\delta} (2\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})] (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) \right\} \\
& - k_2 [\theta \bar{c}_e (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) + \frac{\delta}{\bar{T}^2} (T - \bar{T}) \bar{c} \alpha e^{\frac{\delta}{T}} (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})],
\end{aligned}$$

o en términos de la temperatura se obtiene:

$$\begin{aligned}
Num = & (\theta^2 \bar{c} - k_1 \bar{c}) (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta (\bar{c}_e - \bar{c}) \frac{\delta}{\bar{T}^2} \times \left\{ [\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}} \right. \\
& + \frac{\delta}{\bar{T}^2} (\theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) \bar{T})] (T - \bar{T}) (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}}) + [\theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) \bar{T} \\
& + \frac{\theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) \bar{T}}{\theta (\bar{c}_e - \bar{c})} + \frac{\bar{T}^2}{\delta} (2\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})] (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) \left. \right\} \\
& - k_2 [\theta \bar{c}_e (\alpha e^{\frac{\delta}{T}} - \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) + \frac{\delta}{\bar{T}^2} (T - \bar{T}) \bar{c} \alpha e^{\frac{\delta}{T}} (\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{T}})].
\end{aligned}$$

Ahora como  $\dot{c} < c$ ,  $T < \bar{T}$ ,  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ ,  $0 < c < 1$  y  $0 < T$  llegamos a que éste numerador es negativo. Por lo tanto a lo largo de la curva

$$c = \frac{\theta \bar{c}_e}{\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}},$$

$$\dot{T} > 0 \quad \text{para} \quad \bar{c} < c \quad \text{y} \quad T < \bar{T}.$$

$$\text{Si } T = \bar{T} \quad \text{y} \quad c > \bar{c},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \dot{T} = & \theta \bar{T}_e + \gamma \bar{T}_c - (\theta + \gamma) \bar{T} \\ & + \frac{\alpha \beta \bar{c} e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} (-\alpha \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} e^{\frac{\delta}{\bar{T}}})}{-\alpha \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}} \\ & + \frac{[k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta^2 - 2\theta \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha^2 e^{\frac{-2\delta}{\bar{T}}} + \alpha^2 \beta \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} e^{\frac{-2\delta}{\bar{T}}}] (c - \bar{c})}{-\alpha \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}}, \end{aligned}$$

entonces tomando en cuenta que  $(c, \bar{T})$  es punto crítico, para poder reducir la ecuación, llegamos a

$$\dot{T} = \frac{[k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta^2 - 2\theta \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha^2 e^{\frac{-2\delta}{\bar{T}}}] (c - \bar{c})}{-\alpha \bar{c} \frac{\delta}{\bar{T}^2} e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}},$$

de donde  $\dot{T} < 0$  si y solo si el numerador de la anterior ecuación es positivo. es decir,

$$[k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}}) - \theta^2 - 2\theta \alpha e^{\frac{\delta}{\bar{T}}} - \alpha^2 e^{\frac{-2\delta}{\bar{T}}}] (c - \bar{c}) > 0,$$

si y solo si



$$[k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}}) - (\theta + \alpha e^{\frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}})^2](c - \bar{c}) > 0,$$

como  $(c - \bar{c}) > 0$ , entonces  $\dot{T} < 0$  siempre que

$$[k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{\frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}}) - (\theta + \alpha e^{\frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}})^2] > 0$$

(condición (3.7) de la hipótesis).

Por último si

$$c = \bar{c}_e,$$

entonces, de la primera ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales (2.19)

$$\dot{c} = -\alpha \bar{c}_e e^{\frac{\bar{\delta}}{\bar{T}}},$$

que es siempre negativo, por lo tanto la región que tiene como frontera a las curvas

$$\dot{c} = 0 \quad \text{donde} \quad \bar{T} > T,$$

$$T = \bar{T} \quad \text{para} \quad c > \bar{c} \quad \text{y}$$

$$c = \bar{c}_e$$

es una región invariante.

### 3.4 Condición suficiente para la unicidad del punto crítico por el método de transformación del sistema asociado al Reactor

Para establecer las condiciones que deben satisfacer los parámetros, primero expresemos el sistema de ecuaciones diferenciales (2.3) en términos de los parámetros  $w$ ,  $v$ ,  $(-\delta H)$ ,  $A_w$ , etc. .Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= \frac{w}{v}(c_e - c) - K(T)c, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{w}{v}(T_e - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} c K(T) - \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p} (T - T_c) + \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p} M(c - \bar{c}) \\ &+ \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p} N(T - \bar{T}).\end{aligned}$$

Si este último sistema de ecuaciones diferenciales lo expresamos en función de las variables  $y$ ,  $x$ , y parámetros  $\theta$ ,  $D$ ,  $B$  ya definidos con anterioridad, llegamos a:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{(-x)}{\theta} + D(1-x)e^y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(1 + \frac{1}{\theta})y + BD(1-x)e^y + \frac{E_a c_e}{RT_e^2} M(\bar{x} - x) + N(y - \bar{y}),\end{aligned}\tag{3.9}$$

en donde:

$$N = \frac{k_2 + \frac{w}{v} + k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} + \frac{w}{v} + \frac{h}{v \rho c_p} - (\frac{-\Delta H}{\rho c_p}) \bar{c} \frac{E_a}{RT^2} k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}}}{\frac{h}{v c_p}},$$

al simplificar llegamos a:

$$N = k_2 \frac{v c_p}{h} + \frac{2}{\theta} + 1 + D e^{\bar{y}} - D e^{\bar{y}} B(1 - \bar{x}),$$

y considerando  $\rho = 1$ ,  $M$  se expresa como :

$$M = \frac{\frac{k_1 v^2 c_p^2}{h^2} - k_2 \frac{v c_p}{h} (\frac{1}{\theta} + D e^{\bar{y}}) - \frac{w^2 c_p^2}{h^2} - 2 \frac{w c_p}{h} D e^{\bar{y}} + D^2 e^{2\bar{y}} + B(1 - \bar{x}) D^2 e^{2\bar{y}}}{-c_e (1 - \bar{x}) D \frac{E_a}{RT_e^2}},$$

de donde

$$\frac{E_a c_e}{RT_e^2} M = \frac{\frac{k_1 v^2 c_p^2}{h^2} - k_2 \frac{v c_p}{h} \left( \frac{1}{\theta} + D e^{\bar{y}} \right) - \frac{1}{\theta^2} - 2 \frac{1}{\theta} D e^{\bar{y}} + D^2 e^{2\bar{y}} [(1 + B(1 - \bar{x}))]}{-(1 - \bar{x})D}.$$

PROPOSICION 3.3: Si  $B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M \leq 4(\theta + 1 - N\theta)$  entonces el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (3.9) tiene un único punto crítico. Y si  $B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M > 4(\theta + 1 - N\theta)$  entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) tiene un único punto crítico mientras  $D \in (0, D_2) \cup (D_1, \infty)$  y tres puntos críticos siempre que  $D \in (D_2, D_1)$ . Para  $D = D_1$  ó  $D = D_2$  existen exactamente dos puntos críticos.

DEMOSTRACION:

Los puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{-x_s}{\theta} + D(1 - x_s)e^{y_s} &= 0, \\ -\left(\frac{1}{\theta} + 1 - N\right)y_s + BD e^{y_s}(1 - x_s) + \frac{E_a c_e}{RT_e^2} M(\bar{x} - x_s) - N\bar{y} &= 0, \end{aligned}$$

de la primera ecuación, obtenemos

$$x_s = \theta D(1 - x_s)e^{y_s},$$

sustituyendo el valor de  $x_s$  en la segunda ecuación y despejando a la variable  $y_s$ , obtenemos:

$$y_s = \frac{\frac{Bx_s}{\theta} + \frac{E_{a,c_e}}{RT_e^2} M(\bar{x} - x_s) - N(\bar{y})}{\frac{\theta+1-N\theta}{\theta}},$$

sustituyendo el valor de  $y_s$  en la segunda ecuación del último sistema de ecuaciones, obtenemos

$$-\frac{Bx_s}{\theta} + BD(1 - x_s)e^{\frac{Bx_s}{\theta+1-N\theta} + \frac{\theta E_{a,c_e}}{RT_e^2(\theta+1-N\theta)} M(\bar{x}-x_s) - \frac{\theta N}{\theta+1-N\theta} \bar{y}} = 0,$$

si despejamos al parametro D, obtenemos

$$D = \frac{x_s}{\theta(1 - x_s)e^{\frac{Bx_s}{\theta+1-N\theta} + \frac{\theta E_{a,c_e}}{RT_e^2(\theta+1-N\theta)} M(\bar{x}-x_s) - \frac{\theta N}{\theta+1-N\theta} \bar{y}}}, \quad (3.10)$$

de donde

$$\frac{dD}{dx_s} = \frac{\theta(1 - x_s) + \theta x_s - \theta x_s(1 - x_s)\left(\frac{B}{\theta+1-N\theta} - \frac{\theta E_{a,c_e}}{RT_e^2(\theta+1-N\theta)} M\right)}{\theta^2(1 - x_s)^2 e^{\frac{Bx_s}{\theta+1-N\theta} + \frac{\theta E_{a,c_e}}{RT_e^2(\theta+1-N\theta)} M(\bar{x}-x_s) - \frac{\theta N}{\theta+1-N\theta} \bar{y}}},$$

entonces

$$\frac{dD}{dx_s} = 0,$$

si y solo si

$$x_s^2 - x_s + \frac{\theta + 1 - N\theta}{B - \frac{\theta E_{a,c_e}}{RT_e^2} M} = 0,$$

si y solo si

$$x_{s1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{(\theta + 1 - N\theta)}{B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M}},$$

$$x_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{(\theta + 1 - N\theta)}{B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M}}.$$

Notemos que si  $B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M < 4(\theta + 1 - N\theta)$  entonces  $x_{s1}, x_{s2}$  son raíces complejas que a su vez implican que  $\frac{dD}{dx_s} > 0$  para  $x_s \in (0, 1)$ .

Si  $B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M = 4(\theta + 1 - N\theta)$  implica  $\frac{dD}{dx_s} > 0$  excepto para  $x_{s1} = x_{s2} = \frac{1}{2}$  donde  $\frac{dD}{dx_s} = 0$ .

Así, para  $B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M \leq 4(\theta + 1 - N\theta)$  tenemos una correspondencia única entre  $D$  y  $x_s$ .

Sea  $B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M > 4(\theta + 1 - N\theta)$ ; entonces  $\frac{dD}{dx_s} > 0$  para  $x_s \in (0, x_{s1}) \cup (x_{s2}, 1)$  y  $\frac{dD}{dx_s} < 0$  para  $x_s \in (x_{s1}, x_{s2})$ .

Sea

$$D_1 = D(x_{s1}),$$

$$D_2 = D(x_{s2}).$$

entonces la situación es como lo muestra la fig. 10 ; para:

$$B - \frac{\theta E_a c_e}{RT_e^2} M > 4(\theta + 1 - N\theta),$$

existe una única solución de la ecuación (3.10) mientras  $D \in (0, D_2) \cup (D_1, \infty)$  y tres soluciones para la ecuación (3.10) siempre que  $D \in (D_2, D_1)$ . Para  $D = D_1$  ó  $D = D_2$  existen exactamente 2 puntos críticos.

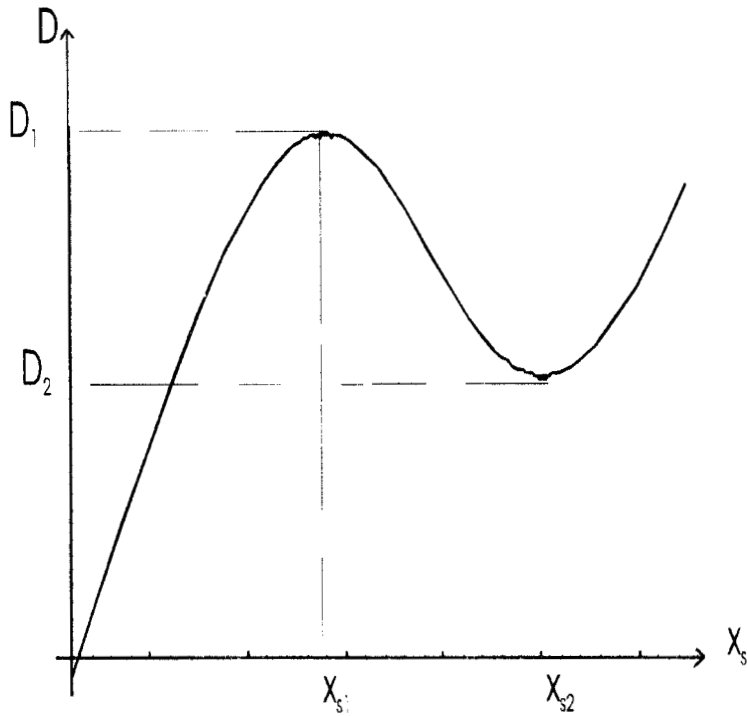


Fig. 10

### 3.5 Condiciones suficientes para evitar ciclos límite en el Reactor por el método de transformación del sistema

Para establecer las condiciones que los parámetros deben satisfacer para la no existencia de ciclos límite es necesario la definición y los siguientes dos teoremas

El dominio,  $U$ , del sistema (3.9) esta definido por :

$$U = \{(x, y) : y \in (-\infty, \infty), x \in (0, 1)\}.$$

**TEOREMA 3.4:** Si  $\theta + 1 - N\theta > 0$ .  $D > 0$  y  $B \geq 0$ , entonces hay una única solución que existe para todo  $\tau \geq 0$  a el problema (3.9) para  $(x(0), y(0)) = p \in U$ . La semiórbita positiva  $\gamma^+(p)$  que pasa por  $p$  está contenida en un subconjunto compacto de  $U$  para cualquier  $p \in U$ . Este subconjunto compacto es tal que  $y$  es acotada independientemente de  $D$ . Además, toda órbita periódica existente puede ser contenida en un subconjunto compacto de  $U$  de tal forma que la  $y$  - acotada es dependiente sólo de  $\theta$ ,  $B$  mientras que es independiente de  $D$  y la condición inicial.

#### DEMOSTRACION

Desde que  $F = (F_1, F_2)$  dado en (3.9) es analítica en  $(x, y)$ ,  $F$  satisface una condición de Lipschitz en  $(x, y)$  en alguna vecindad de cada punto de  $U$ . Por lo tanto, concluimos (ver Hurewicz [15]) que existe una única solución al problema de valores iniciales asociado con (3.9) con las propiedades adicionales siguientes:

i) La solución está definida para todo  $\tau \geq 0$ ; ó

ii) Si la solución no es definida para  $\tau > \tau_1$  con algún  $\tau_1 > 0$ , entonces  $(x(\tau), y(\tau))$  se aproxima a la frontera de  $U$  ó bien puede suceder que  $y(\tau)$  o  $x(\tau)$  llegan a ser no acotadas cuando  $\tau \rightarrow \tau_1 - 0$  (no hay singularidades).

Primero mostremos que *ii*) no puede ocurrir de modo que la única solución existe para todo  $\tau \geq 0$ . Notemos que en  $x = 1$ ;  $\frac{dx}{d\tau} = -\frac{1}{\theta} < 0$  y en  $x = 0$ ;  $\frac{dx}{d\tau} = De^y > 0$ . Así  $x(\tau) \in [0, 1]$  para todo  $\tau \in [0, \tau_1)$ . Continuando observemos que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) puede ser escrito como:

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} y) = Be^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} f(x, y) + [M(\bar{x} - x) - N\bar{y}]e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\frac{\tau}{\theta}} x) = e^{\frac{\tau}{\theta}} f(x, y),$$

donde  $f(x, y) = D(1 - x)e^y$ .

En efecto

De la primera ecuación obtenemos:

$$e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} \frac{(1 + \theta - N\theta)}{\theta} y + e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} \frac{dy}{d\tau} = Be^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} f(x, y) + [M(\bar{x} - x) - N\bar{y}]e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau},$$

de donde

$$\frac{(1 + \theta - N\theta)}{\theta} y + \frac{dy}{d\tau} = Bf(x, y) + M(\bar{x} - x) - N\bar{y},$$

que implica

$$\frac{dy}{d\tau} = Bf(x, y) - \left[\frac{1}{\theta} + 1\right]y + M(\bar{x} - x) + N(y - \bar{y}).$$



Y de la segunda ecuación del sistema obtenemos

$$e^{\frac{\tau}{\theta}} \frac{x}{\theta} + e^{\frac{\tau}{\theta}} \frac{dx}{d\tau} = e^{\frac{\tau}{\theta}} f(x, y),$$

de donde

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{x}{\theta} + f(x, y),$$

con lo cual hemos probado lo afirmado.

Continuando, la primera ecuación del sistema se puede escribir como

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} y) = B e^{\frac{(\theta-N\theta)}{\theta}\tau} e^{\frac{\tau}{\theta}} f(x, y) + [M(\bar{x} - x) - N\bar{y}] e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau}.$$

Ahora sustituyendo la segunda ecuación en la primera ecuación obtenemos

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} y) = B e^{\frac{(\theta-N\theta)}{\theta}\tau} \frac{d}{d\tau}(e^{\frac{\tau}{\theta}} x) + [M(\bar{x} - x) - N\bar{y}] e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau},$$

integrando de 0 a  $\tau$

$$\begin{aligned} e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} y(\tau) - y(0) &= \frac{\theta M \bar{x}}{1 + \theta - N\theta} e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} - \frac{\theta M \bar{x}}{1 + \theta - N\theta} \\ &- \int_0^{\tau} [M x e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau}] d\tau - \frac{\theta N \bar{y}}{1 + \theta - N\theta} e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} + \frac{\theta N \bar{y}}{1 + \theta - N\theta} \\ &+ B e^{\frac{(\theta-N\theta)}{\theta}\tau} e^{\frac{\tau}{\theta}} x(\tau) - B x(0) - \int_0^{\tau} \left[ \frac{(\theta - N\theta)}{\theta} B e^{\frac{(\theta-N\theta)}{\theta}\tau} e^{\frac{\tau}{\theta}} x \right] d\tau, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} &y(\tau) - \frac{\theta M \bar{x}}{1 + \theta - N\theta} + \frac{\theta N \bar{y}}{1 + \theta - N\theta} - B x(\tau) \\ &- [y(0) - \frac{\theta M \bar{x}}{1 + \theta - N\theta} + \frac{\theta N \bar{y}}{1 + \theta - N\theta} - B x(0)] e^{-\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}\tau} \quad (3.11) \\ &= - \int_0^{\tau} \left[ \frac{(\theta - N\theta)}{\theta} B + M \right] e^{\frac{(1+\theta-N\theta)}{\theta}(t-\tau)} x(t) dt, \end{aligned}$$

donde  $0 < \tau < \tau_1$ . Dado que  $x(\tau) \in [0, 1]$ , la ecuación (3.11) implica inmediatamente que  $y(\tau)$  es uniformemente acotada cuando  $\tau \rightarrow \tau_1 - 0$ , es decir  $|y(\tau)| < K$ . Claramente  $K$  puede ser seleccionada independiente de  $D$ .

Dado que  $y(\tau)$  es acotada uniformemente sobre  $[0, \tau_1)$ ,  $\frac{dx}{d\tau} = De^y > 0$  en  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{d\tau} = -\frac{1}{\theta}$  en  $x = 1$ , y de la continuidad de  $F_1(x, y, D)$  (ver ec. 3.9), implican que  $x$  es acotada lejos de la frontera para  $\tau \in [0, \tau_1)$ . Así  $(x(\tau), y(\tau))$  no se aproxima a la frontera de  $U$  cuando  $\tau \rightarrow \tau_1 - 0$  de modo que  $(x(\tau), y(\tau))$  existe para  $\tau > 0$ .

Observemos que el anterior argumento es válido para  $\tau_1$  reemplazado por  $\infty$  de modo que si  $\gamma^+(p)$  denota la semiórbita positiva para  $p \in U$ , entonces  $\gamma^+(p)$  es contenida en algún subconjunto compacto de  $U$ . QED.

**TEOREMA 3.5 :** Si  $\gamma^+(p)$  para  $p \in U$  es cualquier semiórbita del sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) ó si  $\gamma^-(p)$  es una semiórbita negativa contenida en algún subconjunto compacto de  $U$ , entonces una de las siguientes condiciones se cumple para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9)

i)  $w(\gamma^+)(\alpha(\gamma^-))$  es un punto crítico.

ii)  $w(\gamma^+)(\alpha(\gamma^-))$  es una órbita periódica con  $\gamma^+ = w(\gamma^+)(\alpha^- = \alpha(\gamma^-))$  ó

$$w(\gamma^+) = \bar{\gamma}^+ - \gamma^+(\alpha(\gamma^-) = \bar{\gamma}^- - \gamma^-)$$

donde la barra denota cerradura.

iii)  $w(\gamma^+)(\alpha(\gamma^-))$  consiste de un número finito de puntos críticos y un conjunto de órbitas completas  $\gamma_i$  con  $\alpha(\gamma^i)$  y  $w(\gamma^i)$  consistente de un punto crítico para cada órbita  $\gamma^i$ .

## DEMOSTRACION

Por teorema (3.4) se cumple que para cualquier  $p \in U$ ,  $\gamma^+(p)$  está contenida en un subconjunto compacto de  $U$ . En la proposición (3.3) se muestran las condiciones de existencia de uno, dos y tres puntos críticos en  $U$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9). Dado que por hipótesis cualquier órbita existente  $\gamma^-(p)$  está contenida en un subconjunto compacto de  $U$ , la conclusión del teorema ahora se sigue del teorema de Poincaré Bendixon, encontrado en J.Hale[16]. Q.E.D.

La parte lineal del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (3.9) se expresa como

$$\frac{dZ}{d\tau} = AZ,$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta} - De^{y_s} & D(1 - x_s)e^{y_s} \\ -BD e^{y_s} - M \frac{E_a c_e}{RT_e^2} & -\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) + BD(1 - x_s)e^{y_s} + N \end{pmatrix};$$

puesto que

$$y_s = \frac{\frac{Bx_s}{\theta} + \frac{E_a c_e}{RT_e^2} M(\bar{x} - x_s) - N\bar{y}}{\frac{\theta+1-N\theta}{\theta}},$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\theta(1-x_s)} & \frac{x_s}{\theta} \\ \frac{-Bx_s}{\theta(1-x_s)} - M \frac{E_a c_e}{RT_e^2} & \frac{Bx_s - \theta - 1}{\theta} + N \end{pmatrix},$$

de donde

$$\det(A) = \frac{1}{\theta^2(1-x_s)} \left[ x_s^2 - x_s + \frac{\theta + 1 - \theta N}{B - \theta M \frac{E_{ac_e}}{RT_e^2}} \right],$$

$$\text{Tr}A = -\frac{Bx_s^2 - (B + \theta - N\theta + 1)x_s + 2 + \theta - N\theta}{\theta(1-x_s)}.$$

Las raíces de  $\det(A) = 0$  son:

$$x_{s1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\theta + 1 - \theta N}{B - \theta M \frac{E_{ac_e}}{RT_e^2}} \right)},$$

$$x_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\theta + 1 - \theta N}{B - \theta M \frac{E_{ac_e}}{RT_e^2}} \right)}.$$

y las raíces de  $\text{Tr}A = 0$  son:

$$r_1 = \frac{B + \theta - N\theta + 1}{2B} - \frac{1}{2B} \sqrt{(B + \theta - N\theta + 1)^2 - 4B(\theta + 2 - N\theta)},$$

$$r_2 = \frac{B + \theta - N\theta + 1}{2B} + \frac{1}{2B} \sqrt{(B + \theta - N\theta + 1)^2 - 4B(\theta + 2 - N\theta)}.$$

Para establecer la estabilidad ó inestabilidad de un punto crítico del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal (3.9) en una vecindad del punto crítico será necesario por el teorema de estabilidad, mencionado en el primer capítulo, conocer los signos de  $\det(A)$  y  $\text{Tr}(A)$ .

Por las raíces de la ecuación  $\det(A) = 0$ , establecidas anteriormente, se observa que para  $B - \frac{\theta E_{ac_e}}{RT_e^2} M < 4(\theta + 1 - N\theta)$   $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$  son raíces complejas;

que a su vez implican que  $\det(A) > 0$  para todo valor de  $D > 0$  y  $x_s \in (0, 1)$ . Así la estabilidad en este caso esta determinada por el signo  $TrA$ .

Para establecer el signo de  $Tr(A)$ . Veamos cuando las raíces de la ecuación  $Tr(A) = 0$  son complejas.

$r_i$  para  $i = 1, 2$  será una raíz complejas simple que :

$$(B + \theta - N\theta + 1)^2 - 4B(\theta + 2 - N\theta) < 0,$$

si y solo si

$$B^2 + B(-2\theta - 6 + 2N\theta) + \theta^2 + 2\theta - 2N\theta^2 + 1 - 2N\theta + N^2\theta^2 < 0,$$

si y solo si

$$B < \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}.$$

Así las raíces  $r_1, r_2$  son complejas ó  $r_2 > r_1 > 1$  siempre que  $B < \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$  lo que implica que  $Tr(A) < 0$ . y

para  $B > \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$  y  $x_s \in (r_1, r_2)$  implican  $TrA > 0$ . Con lo cual hemos probado la siguiente:

**PROPOSICION 3.6 :** Si  $B - \theta M \frac{E_{acc}}{RT_e^2} < 4(\theta + 1 - \theta N)$  y  $B < \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$  entonces todos los puntos críticos son focos o nodos estables asintóticamente. Y

sí  $B - \frac{\theta E_{acc}}{RT_e^2} M < 4(\theta + 1 - N\theta)$  y  $B > \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$  y además  $x_s \in (r_1, r_2)$  entonces todos los puntos críticos son focos o nodos inestables.

**LEMA:** Si  $B < \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$  entonces cualquier órbita periódica existente debe ser orbitalmente estable asintóticamente.

DEMOSTRACION:

Examinemos el criterio de Poincaré (ver W.A. Coppel [17])

$$\int_0^{\tau_0} \nabla \cdot F dt = \int_0^{\tau_0} \left[ -\frac{1}{\theta} - De^y - \left(\frac{1}{\theta} + 1\right) + BD(1-x)e^y + N \right] dt,$$

debido a que

$$\dot{x} + \frac{x}{\theta} = D(1-x)e^y,$$

ó

$$\frac{\dot{x}\theta + x}{\theta(1-x)} = De^y,$$

entonces

$$\int_0^{\tau_0} \nabla \cdot F dt = \int_0^{\tau_0} \left[ -\frac{2}{\theta} - \frac{\dot{x}\theta + x}{\theta(1-x)} - 1 + B\left(\dot{x} + \frac{x}{\theta}\right) + N \right] dt,$$

simplificando llegamos a:

$$\int_0^{\tau_0} \nabla \cdot F dt = \int_0^{\tau_0} \left[ \frac{-2 + x - \theta + \theta x + Bx - Bx^2 + N\theta - N\theta x}{\theta(1-x)} \right] dt + \int_0^{\tau_0} \left[ B\dot{x} - \frac{\dot{x}}{1-x} \right] dt,$$

la última integral es cero, por periodicidad, de modo que

$$\int_0^{\tau_0} \nabla \cdot F dt = - \int_0^{\tau_0} \left[ \frac{Bx^2 - (B + 1 + \theta - N\theta)x + 2 + \theta - N\theta}{\theta(1-x)} \right] dt.$$

Cuando  $B \leq \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$ , tenemos que  $Bx^2 - (B + 1 + \theta - N\theta)x + 2 + \theta - N\theta > 0$  para  $x \in (0, 1)$  excepto para el punto  $x = \frac{B + \theta - N\theta + 1}{2B}$  que es cuando  $B = \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$ .

Así tenemos que  $\int_0^{\tau_0} \nabla \cdot \bar{F} dt < 0$  cuando  $B \leq \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$ . El criterio de Poincare implica que la órbita periódica supuesta es asintóticamente orbitalmente estable para  $B \leq \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$ . Q.E.D.

**TEOREMA 3.7 :** Si  $B - \theta M \frac{E_{acc}}{RT^2} < 4(\theta + 1 - \theta N)$  y  $B < \theta + 3 - N\theta + 2\sqrt{\theta + 2 - N\theta}$ . Entonces  $w(\gamma^+)$  es el único punto crítico estable para cada  $\gamma^+(p)$  para cualquier  $P = (x(0), y(0)) \in U$ . Es decir tenemos la propiedad de estabilidad global.

#### DEMOSTRACION:

De proposición anterior se sigue que para  $B, \theta, D, M, N$  seleccionadas como en la hipótesis, existe un único punto crítico estable asintóticamente. Del teorema 3.5  $w(\gamma^+)$  debe ser ya sea una órbita periódica o el punto crítico para cualquier  $\gamma^+(p)$  siempre que  $p \in U$ . Supongamos que  $w(\gamma^+)$  es una órbita periódica. Por lema anterior ésta supuesta órbita periódica debe ser asintóticamente estable orbitalmente y también debe encerrar al punto crítico, él cual tiene indice 1, por teorema (3.3). Consideremos ahora el problema de valores iniciales (3.9) con  $(x(0), y(0)) = q$  en el interior de ésta órbita periódica pero distinto del punto crítico. Por la tecnica similar a la usada en la prueba del teorema (3.4) uno puede establecer la existencia de la órbita completa  $\gamma(q)$  a través de  $q$ . Así  $\gamma^-(q)$  está contenida en el interior de la órbita periódica. Dado que la órbita periódica es orbitalmente estable asintóticamente y la órbita punto crítico es estable asintóticamente, se sigue de teorema (3.5) que  $\alpha(\gamma^-(q))$  debe ser una órbita periódica que debe entonces ser inestable. Esta es una contradicción dado que toda órbita periódica existente debe ser orbitalmente estable asintóticamente por lema anterior. Q.E.D.

## CAPITULO IV

### APLICACION DEL CONTROL LINEAL A UN EJEMPLO

Como ya se ha visto el proceso del reactor químico es modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1)

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= \frac{w}{v}(c_e - c) - K(T)c, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{w}{v}(T_e - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} c K(T) - \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p} (T - T_c),\end{aligned}$$

que por la definición de los parámetros siguientes :

$$\alpha = k_0, \theta = \frac{w}{v}, \delta = \frac{E_a}{R}, \beta = \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p}, \gamma = \frac{h_w A_w}{v_p \rho c_p}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= \theta(c_e - c) - \alpha c e^{-\frac{\delta}{T}}, \\ \frac{dT}{dt} &= \theta(T_e - T) + \beta \alpha c e^{-\frac{\delta}{T}} - \gamma(T - T_c).\end{aligned}$$

$(\bar{c}, \bar{T})$  es un punto crítico de este sistema de ecuaciones diferenciales, si y sólo si

$$\begin{aligned}0 &= \theta(c_e - \bar{c}) - \bar{c} \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}}, \\ 0 &= \theta(T_e - \bar{T}) + \beta \bar{c} \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}} - \gamma(\bar{T} - T_c).\end{aligned}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$\bar{c} = \frac{\theta c_e}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}}}, \quad (4.1)$$

sustituyendo el valor de  $\bar{c}$  en la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$\theta(T_e - \bar{T}) - \gamma(\bar{T} - T_c) + \frac{\beta \theta c_e \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}}}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}}} = 0, \quad (4.2)$$



de donde

$$\gamma T_c = -\theta(T_e - \bar{T}) + \gamma \bar{T} - \frac{\beta \theta c_e \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}}}{\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}}}. \quad (4.3)$$

entonces

$$\frac{d\gamma T_c}{d\bar{T}} = \frac{(\theta + \gamma)(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}})^2 - \beta \theta^2 c_e \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}} \frac{\delta}{\bar{T}^2}}{(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}})^2},$$

de donde

$$\frac{dT_c}{d\bar{T}} = 0,$$

si y solo si

$$(\theta + \gamma)(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}})^2 - \beta \theta^2 c_e \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}} \frac{\delta}{\bar{T}^2} = 0,$$

si y solo si

$$\bar{T}^2 \alpha^2 e^{-\frac{2\delta}{\bar{T}}} (\theta + \gamma) + \alpha e^{-\frac{\delta}{\bar{T}}} (2\bar{T}^2 \theta^2 + 2\bar{T}^2 \gamma \theta - \theta^2 \beta c_e \delta) + \bar{T}^2 \theta^3 + \bar{T}^2 \gamma \theta^2 = 0,$$

de donde existen dos raíces  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ . Implica que  $T_c$  tendrá, como función de  $\bar{T}$  dos puntos extremos (máximo ó mínimo)  $T_c^+$  y  $T_c^-$ . A la gráfica de  $T_c$  en función de  $\bar{T}$ , ecuación (4.3), se le llama mapeo de bifurcación; figura (11).

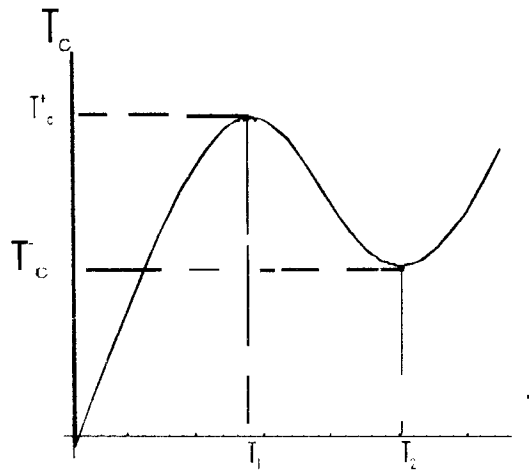


Fig. 11 Muestra el mapeo de bifurcación del RTAFC

Para valores de los parámetros, que se tomaron de los artículos de R.Aris y Amudson, [1] :

$$\theta = 1, \gamma = 1, c_e = 1, \delta = 10000, \alpha = e^{25}, \beta = 200 ;$$

$$T_c = -350 + 2\bar{T} - \frac{200e^{\frac{-10000}{\bar{T}}+25}}{1 + e^{\frac{-10000}{\bar{T}}+25}},$$

y  $\frac{dT_c}{d\bar{T}} = 0$  si y solo si,

$$2\bar{T}^2 e^{\frac{-20000}{\bar{T}}+50} + e^{\frac{-10000}{\bar{T}}+25}(4\bar{T}^2 - 2000000) + 2\bar{T}^2 = 0,$$

de donde

$$\bar{T}_1 = 376.2, \bar{T}_2 = 420.4.$$

Sustituyendo los valores de  $\bar{T}_1$  y  $\bar{T}_2$  en la ecuación (4.3), obtenemos los valores de  $T_c^+ = 367.7$  y  $T_c^- = 337.5$  respectivamente.

Por el mapeo de bifurcación, se observa que si  $T_c \in (T_c^- = 337.5, T_c^+ = 367.7)$  entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) tendrá tres puntos críticos. Consideremos como ejemplo particular a  $T_c = 350$ .

Para determinar los valores de los tres puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) retornemos a la ecuación (4.2). De la cual se obtiene

$$e^{\frac{-\delta}{\bar{T}}} = \frac{-\frac{\theta}{\alpha}[\theta(T_e - \bar{T}) - \gamma(\bar{T} - T_c)]}{\theta(T_e - \bar{T}) - \gamma(\bar{T} - T_c) + \beta\theta c_e}.$$

Si los valores de los parámetros son iguales a los que ya se establecieron anteriormente y además  $T_e = 350$  entonces

$$e^{\frac{-10000}{\bar{T}}} = \frac{2\bar{T} - 700}{(-2\bar{T} + 900)e^{25}},$$

de donde los valores de  $\bar{T}$  que satisfacen esta ecuación son:

$$\bar{T} = 353.6, \bar{T} = 400, \bar{T} = 441.1.$$

sustituyendo cada uno de los valores de  $\bar{T}$  en la ecuación (4.1) obtenemos los valores

$\bar{c} = .964$ ,  $\bar{c} = .5$ ,  $\bar{c} = .088$  respectivamente.

Por lo tanto los puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales son:

$$(\bar{c} = .964, \bar{T} = 353.6), (\bar{c} = .5, \bar{T} = 400), (\bar{c} = .088, \bar{T} = 441.1).$$

Haciendo una simulación dinámica del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) con valores de los parámetros definidos anteriormente se observa que en el retrato fase los puntos críticos  $(\bar{c} = .964, \bar{T} = 353.6)$  y  $(\bar{c} = .088, \bar{T} = 441.1)$  son estables, mientras que  $(\bar{c} = .5, \bar{T} = 400)$  es inestable. Ver figura 12.

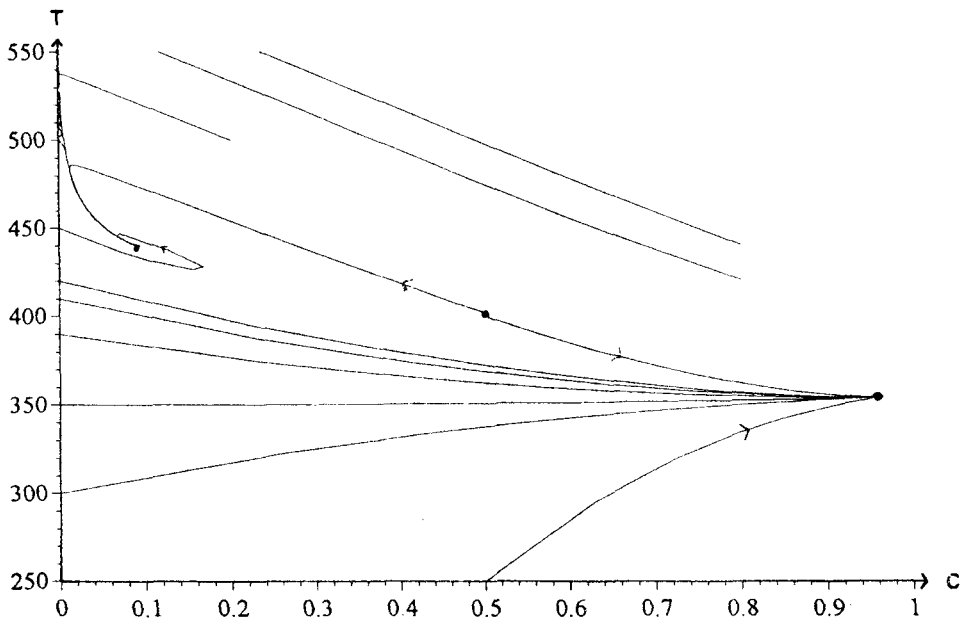


FIG. 12

Lo anterior reafirma nuestro análisis hecho en el capítulo 1, dado que para los valores de los parámetros dados anteriormente del sistema, los parámetros del nuevo sistema de ecuaciones diferenciales (1.3),  $B$ ,  $D$  y  $\theta$  tienen valores de 16.32653, .028 y 1 respectivamente. Ahora si  $B = 16.32653$ ,  $D = .028$  y  $\theta = 1$ , entonces se cumple la desigualdad

$$B > 4(\theta + 1),$$

y la condición :

$$D \in (D_2, D_1),$$

donde:

$$x_{si} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(\theta + 1)}{B}},$$

de donde

$$x_{s1} = .1429,$$

$$x_{s2} = .857.$$

Por definición de  $D_i$ , dada en teorema (1.1), obtenemos

$$D_1 = .051926,$$

$$D_2 = .0054.$$

como

$$r_i = \frac{B + \theta + 1}{2B} \mp \frac{1}{2B} \sqrt{(B + \theta + 1)^2 - 4B(\theta + 2)},$$

entonces

$$r_1 = .1989,$$

$$r_2 = .9235.$$

Si se cumple la desigualdad y condición anterior entonces el teorema (1.1) implica que existen tres puntos críticos.

Haciendo una simulación del sistema ecuaciones diferenciales (1.3) se observa en el retrato fase los puntos críticos.(ver figura 13)

$(x_s = .0363, y_s = .296)$  estable,  $(x_s = .5, y_s = 4.08)$  inestable y  $(x_s = .9889, y_s = 8.0727)$  estable.

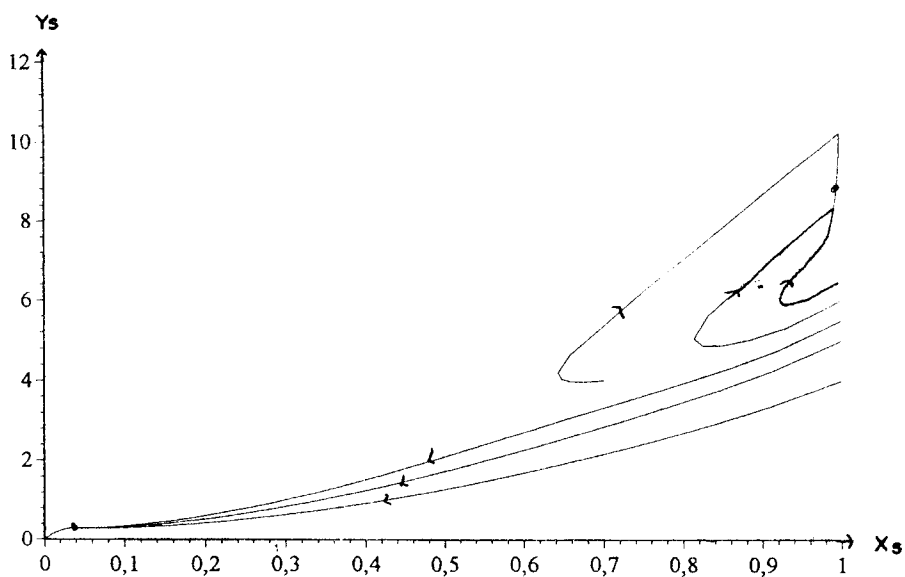


FIG. 13

Que coincide a lo establecido en la parte de estabilidad del primer capítulo, dado que:

$$(x_s = .0363 \in (0, x_{s1}) = (0, .1429),$$

$$(x_s = .5 \in (x_{s1}, x_{s2}) = (.1429, .857),$$

$$(x_s = .9889 \in (r_2, 1) = (.9235, 1).$$

En el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) con valores de los parámetros fijos se encontraron tres puntos críticos, de los cuales uno ( $\bar{c} = .5, \bar{T} = 400$ ) es inestable. Para estabilizar el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) se le agregó un control lineal,  $u(\bar{c}, \bar{T})$ , que depende del punto crítico, de los parámetros del sistema y de las ganancias del control  $k_1, k_2$  obteniéndose el sistema de ecuaciones diferenciales (2.19). Si  $\bar{c} = .5, \bar{T} = 400$  y ganancias en el control de  $k_1 = -3, k_2 = -4$ , entonces haciendo una simulación del sistema de ecuaciones diferenciales (2.19), el retrato fase muestra al punto crítico ( $\bar{c} = .5, \bar{T} = 400$ ) estable (ver figura 14) y

$$u(\bar{c}, \bar{T}) = -232(c - \bar{c}) + -6.25(T - \bar{T}).$$

Para mostrar que el punto crítico ( $\bar{c} = .5, \bar{T} = 400$ ) es globalmente estable notemos que la condición para la unicidad del punto crítico, ecuación (3.1) y la condición para la no existencia de ciclos límite, desigualdad (3.7), se cumple, dado que :

$$k_2 - \beta c \frac{\delta}{T^2} \alpha e^{-\frac{\delta}{T}} < -\theta - \alpha e^{-\frac{\delta}{T}},$$

esto es

$$-4 - 6.25 < -1 - 1$$

y

$$k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}) - (\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}})^2 = -3 - (-4)(2) - 4.$$

$$k_1 - k_2(\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}}) - (\theta + \alpha e^{-\frac{\delta}{T}})^2 = 1.$$

$$\gamma N - (\theta + \gamma)N = -8.25,$$

$$\gamma M - \beta\theta = -432.$$

Por lo tanto el punto crítico ( $\bar{c} = .5, \bar{T} = 400$ ) es global asintóticamente estable.

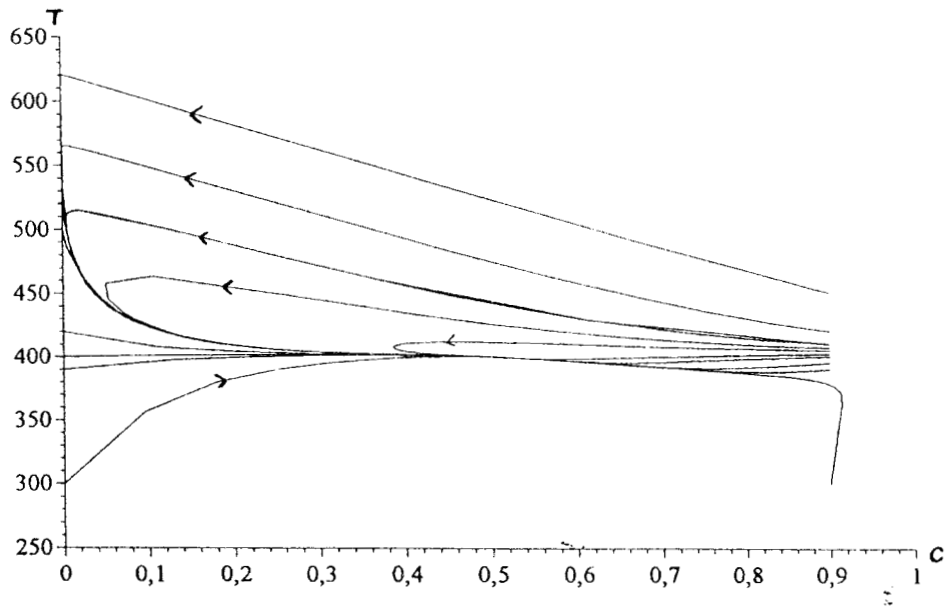


FIG. 14

## CONCLUSIONES

En la primera parte se estableció el mapeo de bifurcación del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, asociado a un reactor tanque agitado de flujo continuo, sin control. En donde se muestra que existen puntos estacionarios inestables en el reactor químico no lineal, teorema 1.

En la segunda parte se resolvió el problema de estabilizar en forma global la concentración y temperatura de una reacción exotérmica irreversible, que se lleva a cabo en un reactor tanque agitado de flujo continuo; mediante un control lineal de una entrada y una salida, ecuación (2.18). Debiendo cumplir las ganancias del control construido,  $k_1$  y  $k_2$ , condiciones suficientes; que se encontraron por dos métodos diferentes:

Por un método directo las condiciones que se encontraron se establecieron en las ecuaciones (3.1) y (3.7). Por el método de cambio de variable estas condiciones se resumen en el teorema (3.7). Observe que aunque los resultados de las condiciones del primer y segundo método son diferentes, estos son aproximados.

Por último se realizaron simulaciones numéricas, en donde se muestra una estabilidad global de el proceso a lazo cerrado, en una región suficientemente grande para situaciones prácticas.

Con lo anterior se mostró que no es necesario construir un control no lineal para controlar un reactor no lineal, al menos para el tipo de proceso desarrollado en este trabajo.



## Perspectivas

Pero que pasa si el control lineal  $u(x)$  es saturado (acotado)?.

La estabilidad global del RTAFC con un control lineal  $u(x)$  implementado deja de ser válido si el controlador  $u(x)$  es saturado.(que se muestra posteriormente con un ejemplo). Entendiéndose por saturación en el control lo siguiente :

Sea  $u(x)$  un controlador del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1), y  $[u^-, u^+]$ ,  $u^- < 0 < u^+$ , el conjunto de valores admisibles de entrada. La saturación de  $u(x)$  es:

$$\Psi(u(x)) = \left\{ \begin{array}{lll} u^- & \text{si} & u(x) \leq u^- \\ u(x) & \text{si} & u^- < u(x) < u^+ \\ u^+ & \text{si} & u^+ \leq u(x) \end{array} \right\}, \quad (4.4)$$

al control saturado lo denotamos por:

$$u_{sat}(x) = \Psi(u(x)).$$

Saturación en el control  $u(x)$  induce una partición de  $R^2$  en tres regiones(posiblementes disconexas):

$$S^+ = \{x \in R^2 : u(x) > u^+\},$$

$$S^0 = \{x \in R^2 : u^- < u(x) < u^+\},$$

$$S^- = \{x \in R^2 : u(x) \leq u^-\}.$$

Con  $S^+ \cup S^0 \cup S^- = R^2$ .  $S^+$  y  $S^-$  son denominadas regiones de saturación. En  $S^+$  y  $S^-$ , el sistema (2.19) se comporta como el sistema a lazo abierto (2.1) con entradas  $u = u^+$  y  $u = u^-$ , respectivamente. En  $S^0$  el sistema (2.19) se comporta como un sistema a lazo cerrado  $\dot{x} = f(x) + \gamma u(x)$ .

$S^-$  y  $S^0$  son separados por la curvas  $C^- = \{x \in R^2 : u(x) = u^-\}$ .

$S^+$  y  $S^0$  son separados por la curvas  $C^+ = \{x \in R^2 : u(x) = u^+\}$ .

Un punto de equilibrio del sistema a lazo cerrado con entrada acotada es un punto equilibrio indeseado  $x_u$  si  $x_u \in S^+ \cup S^-$ .

Como el objetivo es obtener la estabilidad global para un punto nominal en  $S^+ \cup S^0 \cup S^-$ . Los puntos de equilibrio indeseados deben ser evitados. El siguiente teorema establece las condiciones para la no existencia ó evitar puntos de equilibrio indeseados, en términos del mapeo de bifurcación de la abscisa a lazo-abierto y las cotas del control de entrada. La demostración de este teorema y para mayor detalle ver teorema 4 de Alvarez, Alvarez y Suárez [14].

**TEOREMA:** Para el reactor a lazo cerrado acotado (2.19) y (4.4), las siguientes afirmaciones se cumplen:

a) Sí la concentración  $\bar{c}$  de un punto nominal corresponde a un único punto equilibrio a lazo abierto  $(\bar{c}, \bar{T})$ . Entonces, no existen puntos equilibrio indeseados.

b) Sí existen tres puntos equilibrio las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para evitar puntos equilibrio indeseados.

b.1) Sí la concentración  $\bar{c}$  de un punto nominal es alta. Entonces  $u^- < u_b^-$ .

b.2) Sí la concentración  $\bar{c}$  de un punto nominal es baja. Entonces  $u^+ < u_b^+$ .

b.3) Sí la concentración  $\bar{c}$  de un punto nominal es inestable. Entonces  $u^- < u_b^-$  y  $u^+ > u_b^+$ .

Continuando la simulación numérica del ejemplo anterior, para los valores de los parámetros ya establecidos, con control lineal  $u(x)$  no saturado, encontramos que el reactor tiene tres puntos críticos de los cuales uno ( $\bar{c} = .5, \bar{T} = 400$ ) es inestable y que  $u_b^- = 337.5, u_b^+ = 367.7$ .

De acuerdo al teorema anterior las condiciones para evitar puntos críticos indeseados son:  $u^- < u_b^-$  y  $u^+ > u_b^+$ .

Para ilustrar el efecto de violación de esas condiciones la figura 15 muestra el retrato fase para  $u^+ = 365 < u_b^+$  y para valores en las ganancias de

$k_1 = -3$ ,  $k_2 = -4$ . Si ahora  $u^+ = 375$  el reactor tendrá un solo punto crítico estable, como se muestra en la figura 16.

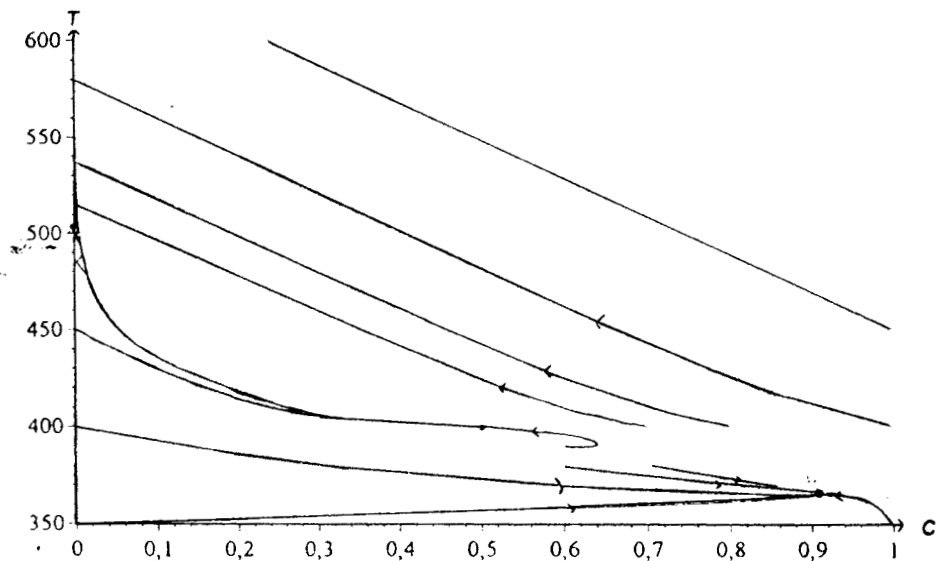


FIG. 15

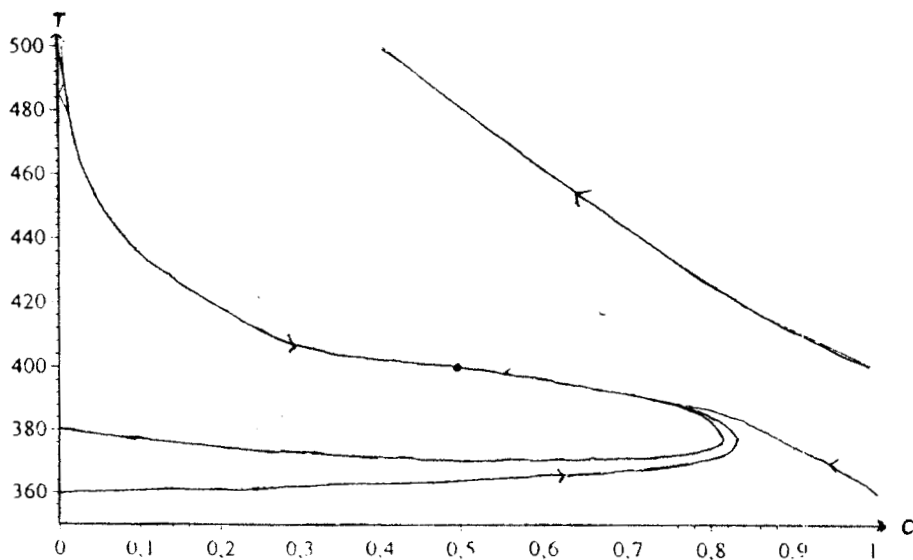


FIG. 16

Un problema abierto es encontrar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los parámetros, de los cuales depende el modelo del RTAFC, y las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$  para establecer el número de ciclos límite en el RTAFC, dado que para el ejemplo particular en donde  $l_1 = -10$ ,  $l_2 = -10$  obtenemos un retrato fase del RTAFC con un ciclo límite. Figura 17.

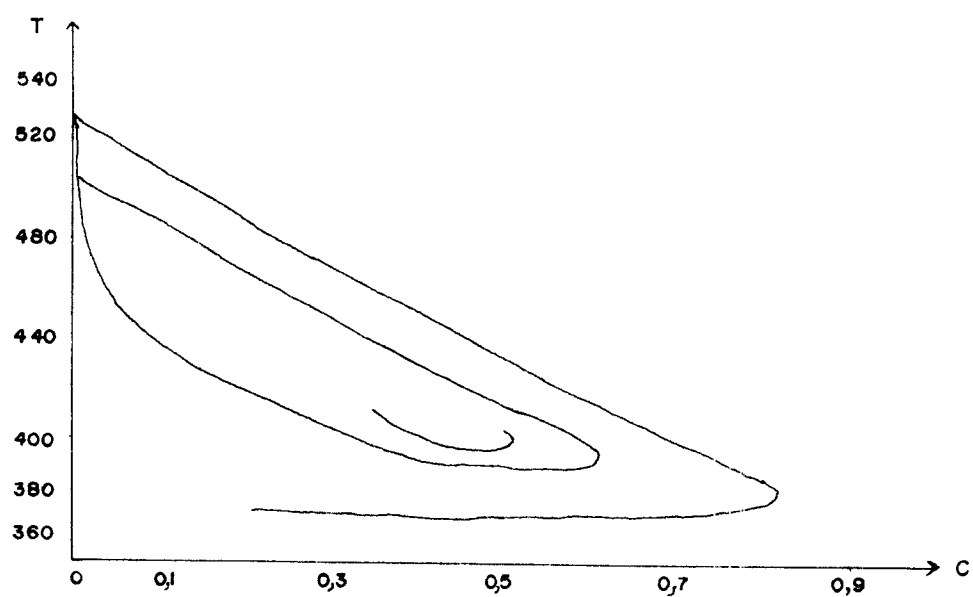


FIG. 17

## APENDICE

PROPOSICION : Si  $f = (f_1, f_2)$  es el vector definido como:

$$\dot{x} = f_1(x, y) = ax + by + g_1(x, y)$$

$$\dot{y} = f_2(x, y) = cx + dy + g_2(x, y),$$

entonces,  $\text{Ind}(0) = -1$  ó  $+1$ , de acuerdo si el origen es o no un punto silla para para el sistema lineal:

$$\dot{x} = ax + by = X$$

$$\dot{y} = cx + dy = Y.$$

### DEMOSTRACION

Por la teoría desarrollada del índice de Poincaré, es suficiente calcular el índice en el origen para el sistema lineal. que en forma analítica se encuentra mediante:

$$\begin{aligned} \text{Ind}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\arctan \frac{dY}{dX} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(ax + by)d(cx + dy) - (cx + dy)d(ax + by)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2} \end{aligned}$$

donde  $\Gamma$  es una curva de Jordan que encierra al origen. Si se toma en particular la curva de Jordan,  $\Gamma$ , como la elipse,  $\gamma$ :

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1.$$

Entonces

$$\text{Ind}(0) = \frac{q}{2\pi} \int_{\gamma} xdy - ydx, \quad q = ad - bc.$$

Sea  $S$  el área de la elipse, por un resultado ya conocido,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx = \frac{\pi}{q},$$

esto implica:  $Ind(0) = \frac{q}{|q|}$ , cuando  $ad - bc \neq 0$ .

Por lo tanto

$$Ind(0) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{si } q > 0 \\ -1 & \text{si } q < 0 \end{array} \right\},$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R., Chemical Reactors and Some Bifurcation Phenomena, Annals New York Academy of Sciences., 314-331(1979).
- [2] Poore, A.B., A Model Equation Arising from Chemical Reactor Theory, Arch Rational Mech.Anal., 352-387(1973).
- [3] Friedrichs, K. O., Advanced Ordinary Differential Equations. New York: Gordon and Breach (1965).
- [4] Coddington, E.A., and N. Levinson., Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Mcgraw-Hill (1955).
- [5] Ray, H., Advanced Process Control, Mcgraw-Hill, New York (1981).
- [6] Alvarez, J., Alvarez, J., and González, E., Global Nonlinear Control Of A Continuous Stirred Tank Reactor, Chem. Engng sci., 44. 1147-1160(1989).
- [7] Alvarez, J., Suárez, R., and Sánchez, A., Nonlinear Decoupling Control Of Free-Radical Polymerization Continuous Stirred Tank Reactors, Chem. Engng sci., 45. 001-017(1990).
- [8] Hunt, L.R., Global Transformations Of Nonlinear Systems, IEEE Transactions On Automatic Control. Vol. Ac-28., no. 1. 24-30(1983).
- [9] Aris, R., and Amundson, N.R., An analysis of chemical reactor stability and control. Chem. Engng sci., 7. 121-126(1958).
- [10] Kalman, R.E., Kronecker invariants and feedback, in proceeding of conference on Ordinary Differential Equations, Naval Research Laboratory, Washington. Academic press. New York (1972).
- [11] Burghes, D.N., and Graham, A., Introduction to Control Theory Including Optimal Control. New York (1980).
- [12] Wonham, W. M., Linear Multivariable Control a Geometric Approach —3ro Ed — New York: Springer - Verlag, 334p --- (Applications of Mathematics; 10), (1985).

- [13] Lloyd, N.G., A note on The Number of Limit Cycles In Certain two - Dimensional Systems, J. London Math. soc. 227-286, (1979).
- [14] Alvarez, J., Alvarez, J., and Suárez, R., Nonlinear Bounded Control for a Class of Continuous Agitated Tank Reactors, Chem. Engng sci., 46. 3235-3249(1990).
- [15] Hurewicz, H., Lectures on Ordinary Differential Equations. Cambridge: MIT Press (1968).
- [16] Hale, J., Ordinary Differential Equations. New York: Wiley - Interscience (1969).
- [17] Coppel, W. A., Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Boston: D.C. Heath (1965).
- [18] Kwakernaak, H., and Sivan, R., Linear Optimal Control Systems. Wiley, New York (1972).
- [19] Kailath, T., Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1980).
- [20] Balakrishnan, A. V., Elements of State Space Theory of Systems. Optimization Software, New York (1983).
- [21] Georgakis, C., On the use of extensive variables in process dynamics and control. Chem. Engng sci., 41. 1471-1484(1986).
- [22] Su, R., On the linear equivalents of nonlinear systems. Systems Control lett., 2. 48-52(1982).