

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA**

**DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE PROCESOS E HIDRAULICA**

**TESIS DE MAESTRIA EN INGENIERIA QUIMICA
DISEÑO DE UN ESTIMADOR DE ESTADOS
PARA UNA COLUMNA DE DESTILACION:
APLICACIÓN A UN SISTEMA AZEOTROPICO**

PRESENTA:

ALEJANDRO DIAZ HERNANDEZ

ASESOR:

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

COASESOR:

M.I.Q. CARLOS MARTINEZ V.

México, D.F., Diciembre de 1997

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se desarrolló gracias al apoyo económico otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y por Industrias Negromex, S. A.

Deseo agradecer la asesoría del Dr. Jesús Alvarez Calderón, y co-asesoría del M. en IQ. Carlos Martínez Vera durante mis estudios de Maestría y la visión de superación profesional, así como al área de Ingeniería Química de la UAM-Iztapalapa por el ambiente favorable de Trabajo.

A mis hermanos, Elodia, Isauro, Raúl, Jesús y Miguel, por los años compartidos y por su apoyo incondicional.

Deseo agradecer también a todos y cada uno de mis compañeros y amigos de generación por su amistad e invaluable ayuda proporcionada, en especial a: Alma, Ángel, Elizabeth Hector, Ignacio, Ma. de Lourdes; y al grupo de Control de Procesos de la Universidad, Ilse, Teresa, Hector, José de Jesús, Miguel Ángel, Rafael y Ricardo.

Finalmente deseo agradecer a mi tía Reyna Petra por el cobijo de su hogar proporcionado en estos últimos años y en especial a la familia León Becerril, que han estado brindándome lo mejor de su amistad.

ÍNDICE

	pág
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Modelado de Columnas de Destilación: Antecedentes	3
1.3 Control de Columnas de destilación: Antecedentes	4
1.4 Estimación de Estados en Columnas de destilación: Estado del arte	4
1.5 Justificación del Proyecto de Tesis	9
1.6 Objetivos del Proyecto	11
1.7 Organización de la Tesis	11
2. MODELADO Y SIMULACIÓN DE COLUMNAS DE DESTILACIÓN	14
2.1 Introducción	15
2.2 Descripción de la Separación de Mezclas por Destilación	15
2.3 Antecedentes de Modelado	16
2.4 Formulación Matemática	16
2.5 Expresiones Para el Modelo Dinámico (Lazo abierto)	21
2.6 Descripción en Variables de Estado	24
3. UN ESQUEMA ESTRUCTURAL DEL ESTIMADOR DE ESTADOS EN DESTILACIÓN	26
3.1 Introducción	27
3.2 Descripción en Variables de Estado	27
3.3 Conceptos Preliminares	29
3.4 Formulación del Problema	31
3.5 El Estimador de Estados	31

3.6 Planteamiento del Problema	33
3.7 El estimador Convergente	40
3.8 Estudio de la Naturaleza de la Estructura de Observación No lineal	42
3.9 Sumario	48
4 DESEMPEÑO DEL ESTIMADOR NO LINEAL	49
4.1 Introducción	50
4.2 Selección de las Variables a medir	50
4.3 Estrategia y Análisis en la selección de las mediciones	52
5.3.1 Valores Singulares y Número de Condición: Preliminares	
5.3.2 Criterio de Selección	
4.4 Estudio de la Matriz de Detectabilidad mediante DVS	55
4.5 Verificación	57
4.6 Desempeño del Estimador	58
CASO I Índice de Observabilidad Completo	
CASO II Reducción del Índice de Observabilidad	
4.7 Sumario	76
5 CONTROL DE LA COLUMNA CON RETROALIMENTACION DE MEDICIONES	78
5.1 Introducción	79
5.2 Conceptos preliminares	81
5.3 Solución al Problema de Control con Retroalimentación de Estados	84
5.4 Implementación a la Columna de Destilación	90
5.5 Análisis de la Dinámica a Lazo Cerrado	96
6 CONCLUSIONES	106
NOMENCLATURA	109
BIBLIOGRAFIA	111
APÉNDICE:	

- A Esquema experimental
- B Funcionalidades Empleadas en el Modelo Dinámico
- C Propiedades Físico-químicas y parámetros de Operación
- D Observador de Entradas Exógenas
- E Transformación No-lineal de Coordenadas y Parámetros de Operación

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 GENERALIDADES

Para el control de cualquier sistema, se requiere el conocimiento de su comportamiento; en otras palabras, es necesario conocer la evolución de los estados que describen el sistema; asimismo para la regulación de los procesos químicos industriales, a menudo se requiere buen conocimiento de los estados actuales de un sistema transiente, a pesar de la disponibilidad de sólo un número limitado de mediciones secundarias (típicamente temperatura y presión) con ciertos errores, y la presencia de perturbaciones desconocidas al proceso (Aguilar, 1993; Dimitratos y col., 1991). Esta es una situación muy común en el control de procesos y el monitoreo en línea de algunas variables de la planta.

De acuerdo con la teoría de sistemas dinámicos, las medidas indirectas en línea (en algún punto del proceso) pueden usarse y acoplarlas con un modelo matemático del proceso para inferir los estados, los cuales caracterizan el comportamiento dinámico del sistema (Miller y Leskiw, 1987; Dochain y col., 1992). En la teoría de control, la estimación de estados se conoce como el problema de observación o detección. En esta área del conocimiento, varias investigaciones se han realizado en cuanto a estimación de estados en columnas de destilación basadas en modelos completos o con modelos reducidos.

En el presente proyecto se aborda el problema de estimar composiciones y acumulados en una columna de destilación, cuyo sistema a separar es la mezcla binaria azeotrópica de etanol-agua. En la industria, la etapa previa a la solución de este problema es importante, ya que implica diseñar un modelo matemático del proceso, simular las condiciones de operación nominales para validar el modelo y las perturbaciones más comunes afín de obtener una herramienta (modelo matemático del proceso) que pueda

considerarse como sustituto del sistema real. Aunado a esto, se presentan dificultades de operación en sistemas que físicamente imponen restricciones por ellos mismos (por ejemplo, sistemas azeotrópicos) y de mayor importancia cuando se trata de la separación de un componente de alto valor agregado, implicando que la operación se desee con alto grado de pureza.

Tomando en cuenta estas consideraciones, se requiere conocer los estados que describen el sistema para implementar métodos de control más rigurosos, que permitan regular el proceso de destilación en un punto de operación deseable y que garantice las características del producto final.

En general la solución de un problema de diseño de un observador no lineal depende fuertemente de la naturaleza específica del sistema en cuestión. En esta área del conocimiento, entre otros, se encuentran procesos de separación, y sistemas de reacción en donde las no linealidades son inherentes del proceso. Así, la construcción de un observador para sistemas no lineales es interesante y diferentes métodos se han desarrollado para columnas de destilación (Deza y col., 1992b, Baratti y col., 1995a, Baratti y col., 1995b, Mejdell y Skogestad, 1991, Quintero-Marmol y col., 1991, Mejdell y Skogestad, 1993, Fernández, 1996).

El interés del control digital como técnica moderna de control, es que éste debe efectuarse en tiempo real (o en línea). Entendiéndose como *tiempo real*, que la adquisición y procesamiento de señales mediante sensores, la toma de decisiones que se llevan a cabo por medio de cálculos y la acción final de control deben realizarse en forma simultánea a la evolución temporal del proceso.

La necesidad para estimar estados es de importancia fundamental en procesos químicos donde las variables de estados son intrínsecamente difícil de medir (Baratti y col., 1993). Esto justifica el desarrollo de estimadores de estados en varias aplicaciones (Ellis y col 1988; Dimitratos y col. 1989, 1991; Dochain y Pauss 1988, Baratti y col., 1993,

Gauthier y col., 1992). De lo expresado anteriormente, es de notar que el uso de técnicas no lineales no se encuentra limitado a un proceso industrial específico.

Para simular una situación real, se ha seleccionado una planta piloto de destilación disponible, para la cual una caracterización más detallada se presenta en el trabajo de Fernández (1996).

1.2 MODELADO DE COLUMNAS DE DESTILACIÓN: ANTECEDENTES

Los modelos matemáticos dinámicos son ampliamente usados en los procesos químicos, los cuales han resultado ser una herramienta poderosa para un sin número de estudios: por ejemplo, evaluar estructuras alternativas de control, sintonizar controladores, determinar cuantitativamente los efectos dinámicos de perturbaciones, explorar procedimientos de paro y arranque en los procesos, investigar problemas de seguridad potencial, estimar variables de proceso y optimizar la operación de la planta.

En control se han desarrollado modelos lineales simples de función de transferencia que algunas veces se usan para estudios preliminares de la sintonización del controlador, pero modelos rigurosos no lineales son usualmente necesarios para el diseño y la evaluación final del sistema de control desarrollado.

Los modelos dinámicos de columnas de destilación son uno de tantos ejemplos de sistemas no lineales que se encuentran entre los más estudiados, y a la vez los más complejos que hay para una sola unidad de operación. Esto se debe a la gran cantidad de etapas que forman una columna de destilación, relaciones de equilibrio, hidráulica de plato y además de las limitaciones físicas de equipos de medición y control. Así, varios tipos de modelos, involucrando diferentes niveles de complejidad, se pueden usar para simular el comportamiento dinámico de una columna de destilación (Gani y col., 1986).

Los modelos de destilación más comúnmente usados incorporan algunas suposiciones con propósitos de simplificarlos, entre otras; a) vapor retenido en cada plato es

mínimo, b) las presiones en todos los platos se supone constante, c) la dinámica de las ecuaciones de energía se suponen ser tan rápidas que se puede usar una forma algebraica. Sin embargo, también se han desarrollado modelos más rigurosos para este tipo de proceso (Choe y Luyben, 1987), donde los balances de líquido retenido no se han despreciado. Además, Luyben (1987) demuestra por simulaciones digitales que estas suposiciones conducen a una predicción pobre en la respuesta dinámica cuando las presiones son mayores a 10 atm. o bajo presión de vacío.

1.3 CONTROL DE COLUMNAS DE DESTILACIÓN: ANTECEDENTES

En las últimas décadas los cambios drásticos en la tecnología de la computación y en los sistemas de control han permitido la realización de algoritmos sofisticados para el control de procesos a bajo costo. En México, la apertura de mercados obliga a las plantas industriales, tanto públicas como privadas a mejorar en dos puntos; rentabilidad y competitividad, lo que hace necesario usar nuevas tecnologías en sus productos y métodos de control más rigurosos. Asimismo, el incremento en la demanda para ahorrar energía y el incremento en la calidad del producto requieren mayores y mejores sistemas de control confiables; sin embargo, la medición confiable y exacta de las composiciones de producto es una de las principales dificultades en control de columnas de destilación, encontrándose que la mayoría de los analizadores de producto, como el cromatógrafo de gases tienen un tiempo de respuesta lento, lo que hace imposible un control eficiente del proceso.

En resumen, para que las plantas industriales sobrevivan en un mercado abierto, obliga a que sean rentables y, esto implica mejores técnicas de control y estimación.

Los objetivos de un sistema de control utilizado en procesos químicos pueden ser muy diversos de acuerdo a las necesidades de cada proceso y a los objetivos de producción. Estos pueden ser, por ejemplo, mantener segura la operación de un reactor químico, minimizar el gasto de energía consumida por algún proceso de destilación, regular la calidad de un producto terminal o bien una combinaciones de los anteriores.

En virtud de las necesidades anteriores y de otras tantas, resulta natural pensar que es necesario un sistema de control que mantenga operando al proceso lo más cerca de las condiciones de operación para las cuales fue diseñado o en las que se desea su operación.

1.4 ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN COLUMNAS DE DESTILACIÓN: ESTADO DEL ARTE

Una cuestión clave en procesos químicos es como monitorear y controlar los estados del proceso (concentraciones de producto, reactantes, iniciadores, temperatura, etc.) de una manera confiable y con un bajo costo. En muchas aplicaciones prácticas, sólo algunas de las concentraciones de los componentes críticos para el control de calidad están disponibles para la medición en línea. Así, las mediciones en tiempo real de las composiciones de productos no críticos en los sistemas de destilación presentan problemas típicos en la práctica industrial, puesto que los analizadores de composición proveen un tiempo de retraso muy grande en la respuesta; y en muchas situaciones no es factible instalar instrumentación analítica por alguna razón, tales como: inversión alta en un equipo de muestreo, costos altos en su mantenimiento, falta de personal capacitado, retraso inaceptable en la respuesta, o falta de instrumentación adecuada.

En principio, este problema se puede superar con herramientas de teoría de sistemas dinámicos, usando mediciones en línea disponibles junto con un modelo matemático del proceso para inferir los estados, los cuales caracterizan el comportamiento dinámico del sistema. En columnas de destilación se han usado mediciones de temperatura en lugar de las concentración para controlar las composiciones de producto (Kister, 1990).

En esta área del conocimiento de estimación de estados, específicamente en columnas de destilación, Lang y Gilles (1990) presentan un observador para sistemas de separación de alta pureza, que es probado por simulación digital en una columna de 40-platos, donde dos separaciones diferentes fueron examinadas: una separación binaria de

metanol-agua y una separación ternaria de metanol-etanol- agua prueban la aplicación del método a separaciones multicomponentes. Lang y Gilles aplican el concepto de Zeitz (1977) para el diseño de su observador, donde un factor de peso en la diferencia entre las variables de salida medidas y las variables de salida calculadas por el observador es en general una función no-lineal de tiempo y espacio, entradas y variables de estado del observador. Ellos usan los flujos molares totales de vapor como factores de peso en el término de corrección, por lo que, sólo un parámetro escala dicho término, siendo este su único parámetro de sintonización.

Lang y Gilles (1990) realizan un estudio de observabilidad del modelo de la columna ante cambios en el calor de entrada, y caracterizan la columna en regiones de transferencia por un gradiente de temperatura apropiado. Así que, con una medición de temperatura en la región de alta transferencia de masa garantizan la observabilidad del perfil de temperatura y como consecuencia el de composiciones; tal que, al menos un punto de medición debe localizarse en esta región para todas las situaciones de operación.

La ventaja principal del procedimiento de diseño usado por Lang y Gilles es que contiene solo pocos parámetro de diseño, los cuales fácilmente pueden sintonizarse por simulación.

Para determinar los perfiles de composición en cada uno de los platos y composición de alimentación en una columna de destilación, Deza y col. (1992b) presentan observadores que no necesariamente convergen de manera exponencial. Su diseño se basa en las propiedades estructurales de observabilidad del modelo como las de Lang y Gilles (1990), previamente discutidas.

Deza y col. (1992b) aplican la técnica desarrollada en Gauthier y col. (1992), Deza (1991) y Deza y col. (1992a), pero con aplicación a columnas de destilación, y los casos específicos que abordan son: primero, cuando la composición de alimentación es medida, y segundo, cuando ésta no lo es. La metodología que ellos siguen es la siguiente: Primero, estudian la observabilidad del modelo, la cual es un pre-requisito en la síntesis de

observadores (Lang y Gilles, 1990). Segundo, aplican un cambio no lineal de coordenadas adecuado, para poner el modelo en una forma canónica (un bloque lineal más un bloque no lineal). La transformación de coordenadas que realizan es a partir de la composición del domo (salida) en la fase líquida del componente clave, y de su historia de los flujos de vapor y líquido, así como de la misma composición. Con esta transformación, se obtiene una estructura triangular (Gauthier y Bornard, 1981; Gauthier y col., 1992), donde caracterizan por esta forma canónica de observabilidad el sistema no-lineal observable para cualquier salida de la planta. Finalmente, en el nuevo sistema de coordenadas aplican un Filtro de Kalman Extendido con alta ganancia.

La aplicación del esquema propuesto por Deza y col. (1992) se realiza en la columna (de 27- platos) de Alsop y Edgar (1990), donde se lleva a cabo una separación de alta pureza de metanol-etanol.

Otra publicación concerniente a la síntesis de esquemas de estimación en columnas de destilación es la de Baratti y col. (1995b). Con el objetivo de monitorear el comportamiento dinámico de una columnas de destilación binaria en operación continua, presentan una metodología que contribuye al desarrollo de estimadores, basada en la teoría del Filtro de Kalman Extendido (FEK).

El modelo que presentan para el desarrollo del estimador está basado en un acercamiento de colocación ortogonal, donde el desempeño del estimador fue comparado con el comportamiento dinámico de una columna de destilación experimental, separando una mezcla de etanol-agua. En el modelo que presentan Baratti y col. (1995b) al menos para este sistema de estudio sigue las suposiciones clásicas de que los flujos molares de vapor y líquido se suponen constantes para cada sección de la columna, implicando que los balances de energía puedan despreciarse; y que los cambios de los acumulados expresados en volumen del condensador en el domo de la columna y del rehervidor en el fondo de la misma, así como en la platos son despreciados.

El sistema de ecuaciones en su caso de estudio (para 30-etapas) es grande para muchas aplicaciones prácticas cuando se usa el esquema de estimación de Baratti y col. (1995a). Específicamente, Baratti y col. (1995b) abordan y discuten dos problemas:

primero, la posibilidad de usar el estimador propuesto previamente por Baratti y col. (1995a) para el cálculo del movimiento de la onda de temperatura a lo largo de la columna; segundo, el desarrollo de un estimador reducido donde el procedimiento del FKE está acoplado con un modelo aproximado de la columna con colocación ortogonal.

Recientemente, Fernández y col. (1996) desarrollaron un estimador no-lineal para una columna de destilación binaria, el cual está basado en un modelo del proceso que toma en cuenta la hidráulica de plato; además, en este estudio muestran que no debe despreciarse la hidráulica para el diseño del observador del sistema. Al incluir la hidráulica de plato muestran que el sistema no es completamente observable, pero si detectable. El esquema de detección dinámica fue implementado en el modelo de una columna de destilación binaria, cuyo sistema de estudio fue metanol-agua y verificado experimentalmente. En general, el esquema de estimación presenta un excelente desempeño en la estimación de estados, pareciendo ser cualitativamente robusto.

La metodología de estimación no lineal desarrollada por Fernández y col. (1996), hace uso de propiedades estructurales de observabilidad, encontrando que al tomar en cuenta la hidráulica de plato en el modelo, el sistema es solamente detectable. El cálculo para las ganancias se realizó por la técnica convencional de asignación de polos. Aunque el estimador desarrollado por Fernández y col. (1996) es más simple que el que presenta Deza y col. (1992b); ambos observadores fueron probados para sistemas binarios sin azeótropo.

En resumen, la mayoría de las publicaciones sobre estimación de estados en columnas de destilación se basan en mediciones directas, principalmente temperaturas en algún plato como salida para diseñar el estimador. Sin embargo, la estimación de estados para propósitos de control avanzado, pocos estudios están basados en las propiedades de observabilidad como efecto en: el número, ubicación e índice de observabilidad de las mediciones.

Partiendo del esquema desarrollado por Fernández y col. (1996) y Fernández (1996), en este estudio, un esquema que utiliza solamente una o dos mediciones de temperatura y

un modelo del proceso, se abordó el problema de reconstruir o inferir los estados de una columna de destilación binaria azeotrópica, cuya operación y control son difíciles al igual que las columnas de alta pureza. Estudiamos las condiciones en que la presencia de un azeótropo en el sistema binario afecta al esquema de estimación. En particular, el objetivo es estudiar la invertibilidad del jacobiano (matriz de detectabilidad) del sistema, el cual es uno de los elementos clave del esquema de estimación. Se encuentra que la existencia de un azeótropo y los cambios de concavidad en la curva de equilibrio determinan el condicionamiento numérico de la matriz de detectabilidad. Cuando se usa una sola medición se obtiene un sistema mal condicionado; sin embargo, el uso de dos mediciones en línea mejora el condicionamiento numérico de la matriz de detectabilidad. Por lo tanto, cuando se usa una sola medición se espera una reconstrucción lenta del sistema, implicando que dos mediciones se tomen para que funcione satisfactoriamente el estimador.

Entre otras importantes investigaciones dedicadas al problema de estimación de estados en columnas de destilación se encuentran, Quintero-Marmol y col., 1991, Mejdell y Skogestad (1991), Mejdell y Skogestad (1993), pero su aplicación requiere un número muy grande de puntos de medición.

1.5 JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO DE TESIS

La imposibilidad de medir las variables que se desean controlar en un proceso químico, así como la presencia de errores en el modelo (por simplificaciones) y en las mediciones, conducen de manera natural a la necesidad de construir estimadores. Esta necesidad para estimar estados en los procesos químicos ha tenido mayor importancia en los últimos años, ya sea para una caracterización del comportamiento dinámico o para su regulación, donde las variables de estado son difícil de medir, y sólo un número limitado de mediciones en línea están disponibles, justifica el desarrollo de estimadores de estado a múltiples aplicaciones (Ellis y col., 1988; Dimitratos y col. 1989, 1991; Dochain y Paus 1988, Alvarez, 1996, Alvarez, 1997).

El estudio de estimadores de estados en procesos químicos se ha abordado usando diferentes metodologías; de alta ganancia, usando métodos geométricos, de modo deslizante y filtros de Kalman extendidos. En cuanto a los modelos, los cuales forman parte integral del control avanzado de procesos (control basado en modelos) casi todo está conocido. Sin embargo, se encuentra en la literatura que muchas investigaciones aún realizan suposiciones o desprecian algunos efectos involucrados (por ejemplo, acumulados) que en muchas situaciones prácticas no es aplicable.

Específicamente, para sistemas de separación por etapas, en la investigación sobre estimadores se han desarrollado infinidad de trabajos, algunos con modelos rigurosos y sustentando sus desarrollos con resultados experimentales (Baratti y col., 1995a, Fernández, 1996). Al utilizar un filtro de Kalman Extendido (Baratti y col., 1995a) el problema conlleva a resolver un número adicional de ecuaciones, comparado con el observador de Fernández, 1995, pero se realiza para un sistema binario simple; y sólo algunos (Deza y col., 1992), basándose en las propiedades estructurales de observabilidad del modelo de la columna, con un cambio de coordenadas, diseñan su observador para un sistema binario que converge exponencialmente, pero asumiendo acumulados constantes.

Algunas investigaciones en este campo están encaminadas a desarrollar algoritmos en sistemas no lineales que simplifican la carga de trabajo numérico con un número mínimo de medidas en línea disponibles en el proceso, mediante el diseño de Estimadores de estados algunos basados en modelos reducidos (Alvarez y col., 1984; Alvarez y col., 1986; Baratti y col., 1995a; Baratti y col., 1995b).

Un aspecto importante que muy poco se ha tomado en cuenta para la síntesis de observadores es la realización de un estudio de propiedades estructurales de observabilidad del modelo, ya sea no-lineal o una aproximación en el entorno de algún punto de operación. Este aspecto influye en forma directa en la selección de los puntos de medición que deben tomarse en cuenta para la reconstrucción de estados, ya que una selección inadecuada de un punto de medición puede conducir a una reconstrucción lenta de los estados y obtener un

esquema donde el desempeño puede ser muy pobre o el rango de factibilidad de operación (robustez) ante cualquier perturbación sea mínimo.

Lo anterior, motiva y justifica el desarrollo de un estimador de estados, como una extensión de los desarrollos anteriores a sistemas binarios con azeótropo y sistemas multicomponentes, donde se aborda la estimación de estados con énfasis en el estudio de las propiedades de observabilidad.

1.6 OBJETIVOS DEL PROYECTO

Para el desarrollo del presente proyecto de investigación, sobre los problemas de estimación de estados en columnas de destilación, se plantearon los siguientes objetivos:

Diseñar un esquema para estimar composiciones y acumulados en una columna de destilación a partir de mediciones de temperatura (salida secundaria) en línea y un modelo de primeros principios del proceso, con aplicación al sistema azeotrópico etanol-agua.

Estudiar el efecto de incorporar la dinámica de hidráulica de plato en el sistema azeotrópico etanol-agua, con énfasis en la respuesta inicial.

Estudiar bajo que condiciones el sistema azeotrópico puede presentar singularidad en el esquema de estimación al usar una medición de temperatura o problemas frente a errores de integración numérica.

Analizar Desempeño y Robustez al usar una, dos y múltiples salidas en el esquema de estimación de estados del proceso de destilación.

1.7 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Reconociendo que el tema de estimación de estados no ha sido considerado hasta ahora como un tema con personalidad propia, ha parecido oportuno informar al lector acerca de la forma en que se ha organizado el material; así la presente tesis se estructura en seis capítulos, cada uno de la siguiente manera:

- **Introducción.**- En éste capítulo se proporciona una manera descriptiva del estado del arte que guarda el control basado en modelos del proceso de destilación y parte de la problemática que esto implica; por ejemplo, los modelos asociados a la separación de sistemas multicomponentes generalmente son de alto orden, tal que el desarrollo de un controlador resultaría muy complejo. Además, con la finalidad de tener una idea global y de interés de lo que se pretende abordar, se presenta una descripción de los objetivos planteados para el desarrollo de esta investigación.

- **Modelado de columnas de Destilación.**- En este capítulo se presentan los conceptos básicos referentes al proceso de destilación; se construye un modelo matemático de primeros principios, basado en el balance de materia y el cálculo de la temperatura de burbuja como una función de la composición y de la presión total del sistema.

- **Esquema Estructural de un Estimador de Estados en Destilación.**- En este capítulo se construye un esquema de estimación u observación para inferir variables que no es posible medir o determinar de manera directa en el proceso de destilación a partir del modelo del proceso previamente desarrollado y de mediciones en línea de temperatura.

- **Desempeño del Estimador No-lineal.**- En este capítulo se presentan: a) Una técnica como herramienta matemática para un análisis en la selección de una temperatura (salida del proceso); implicando con esto, la posición más adecuada de la salida para la estimación de estados; b).- Resultados obtenidos al usar una medición de temperatura en el esquema de estimación; c).- La elección de un vector adecuado de salidas de dimensión dos y

posteriormente uno de dimensión tres a partir de un conjunto de salidas disponibles para la estimación de estados, usando la misma herramienta matemática; así como los resultados de la implementación en el esquema de estimación; d)-. Un estudio para analizar desempeño y robustez, al reducir el espacio de observación de la salida (de uno, dos o tres sensores de temperatura).

- Estimación de Estados en una Columna Controlada. Como una extensión de la investigación previa se desarrolló un esquema de estimación no lineal para una columna con un esquema de control lineal con configuración LV. El controlador diseñado está basado en una aproximación lineal del modelo de la planta y de subsistemas dinámicos que filtran las señales de las salidas del proceso.

- Conclusiones.- Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de este proyecto de investigación, incluyendo algunas sugerencias acerca de un trabajo futuro en la misma línea de investigación.

CAPÍTULO 2

MODELADO DE COLUMNAS DE DESTILACIÓN

En la primera parte de este capítulo se presenta de manera resumida los principales conceptos referentes a la destilación y los problemas de modelado y solución numérica que implican. Todos estos conceptos son bien conocidos en la literatura de los procesos de separación por etapas, y se exponen con la finalidad de establecer el marco de trabajo, que permitirá formular y justificar las contribuciones o simplificaciones que se hagan en este trabajo de investigación.

2.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos, específicamente los dinámicos son ampliamente usados en el diseño, control y optimización de procesos químicos. Estos han probado ser herramientas poderosas en un sin número de estudios e investigaciones industriales: por ejemplo, permiten evaluar procesos alternativos y estructuras de control, sintonizar controladores, determinar cuantitativamente los efectos dinámicos de ciertas perturbaciones, analizar procedimientos de paro y arranque, investigar problemas de seguridad, y optimizar la operación de la planta (Choe y Luyben, 1987)

2.2 DESCRIPCIÓN DE LA SEPARACIÓN DE MEZCLAS POR DESTILACIÓN

El objetivo general de destilación es la separación de sustancias que tienen presión de vapor diferente a cualquier temperatura dada. La palabra destilación como será usada aquí se refiere a la separación física de una mezcla en dos o más fracciones que tienen puntos de ebullición diferente.

Si una mezcla líquida de dos materiales volátiles se calienta, el vapor que abandona la mezcla tendrá una concentración más alta del material con punto de ebullición más bajo. Inversamente, si un vapor saturado se enfría, el material de punto de ebullición más alto tiene una tendencia a condensar en una proporción más grande que el material de punto de ebullición más bajo.

El desarrollo tecnológico actual ha permitido la separación de mezclas en gran escala por destilación, teniendo sólo unos cuantos grados de diferencia en puntos de ebullición.

Una columna de destilación es un sistema cuyo objetivo es separar mezclas de líquidos miscibles, aprovechando sus diferencias en volatilidad, en dos o más productos relativamente puros. Desde el punto de vista termodinámico, en este proceso de separación

se reduce la entropía de los productos con respecto a la de alimentación. Si las corrientes de productos no contienen más energía que la alimentación, la suma de las entropías de dichas corrientes es menor que la de esta última. De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica esta reducción se logra a espesas de que el sistema incremente su entropía; logrando esto, proporcionando calor al sistema a una determinada temperatura y extrayendolo a una temperatura inferior.

2.3 ANTECEDENTES DE MODELADO

Antes de desarrollar cualquier modelo matemático, introduciremos una definición de la noción modelo adecuada a nuestras necesidades. “Modelo” es una abstracción de la realidad que conceptualmente puede considerarse como sustituto del sistema real, expresado usualmente en términos simbólicos (ecuaciones) que contienen variables que se consideran importantes para describir ciertos aspectos de interés del sistema real (Palomares, 1985). La complejidad del modelo puede depender entre otras cosas, del conocimiento que se disponga del sistema y los objetivos para los cuales se está modelando.

2.4 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Una columna de destilación se modela por un gran numero de ecuaciones diferenciales. En cada plato una ecuación diferencial puede escribirse para: a) un balance de material de cada componente; b) el balance total de materia (dinámica de flujo) y, c) un balance de energía.

Desde una perspectiva fundamental, el modelado de este proceso consiste en el planteamiento de las ecuaciones de conservación de energía y de masa. A esto habría que añadir las ecuaciones de procesos de transporte y las relaciones de equilibrio (segunda ley de la termodinámica). La termodinámica de equilibrio se supone válida debido a que los tiempos de relajación de los procesos al equilibrio son muy rápidos en comparación a las dinámicas que gobiernan los otros aspectos de la columna (Martínez, 1985). Para modelos de procesos por etapas, las suposiciones de rapidez hacia el equilibrio se lleva hasta el

grado de suponer fases perfectamente mezcladas y con mecanismos instantáneos de transporte de masa y calor.

Comúnmente, los modelos de destilación incorporan diferentes suposiciones de simplificación conduciendo a una pobre predicción de respuestas dinámicas; sin embargo, también se han desarrollado modelos rigurosos que no realizan estas suposiciones (Holland, 1966; Luyben, 1990; Choe y Luyben, 1987; Wittgens y Skogestad, 1995; Fernández, 1995).

Con el objeto de hacer notar la complejidad de los modelos que nos ocupan, consideraremos el de una columna no-ideal, con secuencias ordenadas de equilibrio de etapa a etapa (ver Fig. 2.1), donde es posible representar torres con múltiples alimentaciones, extracciones laterales de la misma, enfriadores y calentadores.

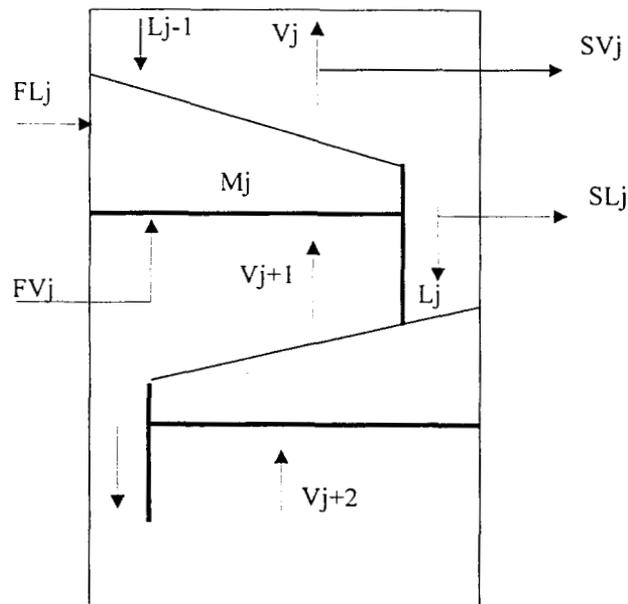


Figura 2.1: Esquema de una etapa generalizada de una columna de destilación binaria.

Donde: L_j = Flujo de líquido (moles / u. de t.);

S_{Vj} = Flujo de vapor extraído (moles / u. de t.);

S_{Lj} = Flujo de líquido extraído (moles/u. de t.);

Q_j = Flujo de calor;

F_j = Flujo alimentado (moles / u. de t.);

M_j = Líquido acumulado (moles) y;

V_j = Flujo de vapor (moles/u. de t)

A pesar de que únicamente se tiene interés en la composición y las razones de las corrientes del producto, éstas dependen de las condiciones en los platos, el evaporador y el condensador, por lo que se deben desarrollar todos los balances de masa, ecuaciones termodinámicas y de hidráulica para lograr comprender la contribución de cada etapa en la dinámica global del proceso.

Utilizando la notación de la Figura 2.1, las ecuaciones que describen a la j -ésima etapa de la columna son las siguientes (suponiendo condensador total):

Balance global de materia

$$\frac{dM(j)}{dt} = \dot{M}(j) = L(j-1) - (L(j) + SL(j)) - (V(j) + SV(j)) + V(j+1) + F^L(j) + F^V(j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.1)$$

donde: N es el número de etapas, M es el líquido retenido o acumulado en cada una de las etapas, $L(j)$ es el flujo de líquido que abandona la etapa, $V(j)$ es el vapor que abandona la j -ésima etapa, SL y SV son los flujos extraídos en fase líquida y vapor respectivamente, F es el flujo de alimentación, donde los superíndices L y V se refieren a las fases líquida y vapor.

Balances de materia para cada componente

$$\frac{dM(j)x(i,j)}{dt} = L(j-1)x(i,j-1) - ((L(j) + SL(j))x(i,j) - (V(j) + SV(j))y(i,j) + V(j+1)y(i,j+1) + F^L(j)x^F(i,j) + F^V(j)y^F(i,j)); \quad 1 \leq i \leq C, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.2)$$

donde C es el número de componentes de la mezcla a separar, x e y son las fracciones mol que corresponden a la fase líquida y vapor respectivamente; el superíndice F hace referencia a la alimentación.

Balance de energía

$$\frac{dM(j)h(j)}{dt} = L(j-1)h(j-1) - (L(j) + SL(j))h(j) - (V(j) + SV(j))H(j) + V(j+1)H(j+1) - Q(j) + F^L(j)h(j) + F^V(j)H(j); \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.3)$$

h denota la entalpía de la fase líquida y, H la correspondiente a la fase vapor

Relaciones Estequiométricas

$$\sum_{i=1}^C y(i, j) = 1.0 \quad 1 \leq i \leq C, 1 \leq j \leq N \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^C x(i, j) = 1.0 \quad 1 \leq i \leq C, 1 \leq j \leq N \quad (2.5)$$

Equilibrio Termodinámico (Relación líquido-vapor)

$$y(i, j) = f(x(i, j), T^L(j), P(j)) \quad (2.6)$$

Propiedades Térmicas

$$H(j) = f(x(i, j), T(j), P(j)) \quad (2.7)$$

$$h(j) = f(y(i, j), T(j)) \quad (2.8)$$

$$H^V(j) = f(y^F(i, j), T^F(j), P(j)) \quad (2.9)$$

$$h^L(j) = f(x^F(i, j), T^F(j)) \quad (2.10)$$

Ecuación de hidráulica de plato

$$M(j) = f(L(j), V(j), x(i, j), T(j), P(j)) \quad (2.11)$$

Una nota importante que hay que tomar en cuenta es que las ecuaciones de conservación se han aplicado sólo a la fase líquida. Esto se justifica por que la densidad de un gas es de alrededor de tres ordenes de magnitud más pequeña que la de un líquido, por lo que para volúmenes comparables de las dos fases la “capacidad” másica y térmica de la fase gas es despreciable, excepto para el caso de columnas que operan a alta presión (Luyben, 1990).

La cantidad de vapor acumulado sobre cada etapa generalmente es despreciable comparado con la masa de líquido retenido en la misma. En caso contrario, es necesario plantear ecuaciones análogas para el balance de materia global en la fase vapor y balances de energía para cada componente en la misma fase. También es necesario considerar las ecuaciones de intercambio de calor en el condensador y en el rehervidor.

Para el desarrollo del modelo matemático a lazo abierto se considera una columna de destilación binaria disponible, marca didacta, modelo IC118DV/92.3, fabricada en Italia (ver Apéndice A), la cual consiste de diez platos, cinco para la sección de agotamiento y cinco platos para la sección de enriquecimiento, con una alimentación en la sección intermedia. El sistema de estudio a separar es etanol-agua; la columna está equipada con doce sensores que permiten las mediciones de temperatura a lo largo de la columna; además, cuenta con un condensador total y un hervidor de circulación natural. Las variables manipuladas o variables de control son el suministro de energía al hervidor y la razón de destilación de producto. Una descripción más detallada del sistema experimental de ésta columna la presenta Fernández (1996).

2.5 EXPRESIONES PARA EL MODELO DINÁMICO (LAZO ABIERTO)

El modelo que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo es una simplificación del que se ha presentado anteriormente (modelo riguroso de primeros principios); nos restringiremos a un sistema binario con el objeto de realizar una comparación con algunos de los resultados disponibles y modelos que presentan las mismas consideraciones. Sin embargo para el problema de estimación se abordará un sistema binario con azeótropo.

Las simplificaciones al modelo anterior son las siguientes:

- 1.- Cantidad de vapor retenido en cada plato despreciable.
- 2.- Los calores latentes de vaporización en ambos componentes son aproximadamente iguales (equimolar).
- 3.- El calor perdido de la columna a los alrededores es mínimo.
- 4.- Dinámica del condensador despreciable (condensador total).
- 5.- La caída de presión dentro de la columna es insignificante.
- 6.- El líquido descendente está relacionado con el retenido por la ecuación de Francis.
- 7.- 100 % de eficiencia de plato.
- 8.- Temperatura de alimentación en su punto de ebullición ($V_R=V_S=V$).

Las ecuaciones que describen al caso de estudio son:

Rehervidor y base de la columna

Balance total:

$$\frac{d(M_B)}{dt} = \dot{M}_B = \alpha(M_1 - M_0)^\beta - V_s - F_B; \quad (2.12a)$$

donde $F_B = \bar{F}_B - kp[V(c_B, M_B) - \bar{V}]$

Balance por componente:

$$\dot{c}_B = \frac{\alpha(M_1 - M_0)^\beta (c_1 - c_B) - V_S (y_B - c_B)}{M_B} \quad (2.12b)$$

Sección de Agotamiento:

Balance total:

$$\dot{M}_j = \alpha(M_{j+1} - M_0)^\beta - \alpha(M_j - M_0)^\beta; \quad 1 \leq j \leq 4 \quad (2.12c)$$

Balance por componente:

$$\dot{c}_j = \frac{\alpha(M_{j+1} - M_0)^\beta (c_{j+1} - c_j) - V_S (y_j - y_{j-1})}{M_j}; \quad 1 \leq j \leq 4 \quad (2.12d)$$

donde $y_{j-1} = y_B$

Balance cercano al plato de alimentación

Balance total:

$$\dot{M}_5 = \alpha_m (M_m - M_0)^{\beta_m} - \alpha (M_5 - M_0)^\beta; \quad (2.12e)$$

Balance por componente:

$$\dot{c}_5 = \frac{\alpha_m (M_m - M_{0m})^{\beta_m} (c_m - c_5) + V_S (y_4 - c_5) - V_E (y_5 - c_5)}{M_5} \quad (2.12f)$$

Sección de Alimentación

Balance total:

$$\dot{M}_m = \alpha (M_6 - M_0)^\beta - \alpha_m (M_m - M_{0m})^{\beta_m} + F_f + V_S - V_R \quad (2.12g)$$

Balance por componente:

$$\dot{c}_m = \frac{\alpha (M_6 - M_0)^\beta (c_6 - c_m) + F_f (z_f - c_m) - V_R (y_m - c_m) + V_S (y_5 - c_m)}{M_m} \quad (2.12h)$$

Sección de Enriquecimiento

Balance total:

$$\dot{M}_j = \alpha(M_{j+1} - M_0)^\beta - \alpha(M_j - M_0)^\beta; \quad 6 \leq j \leq 9 \quad (2.12i)$$

Balance por componente:

$$\dot{c}_j = \frac{\alpha(M_{j+1} - M_0)^\beta (c_{j+1} - c_j) - V_R (y_j - y_{j-1})}{M_j}; \quad 6 \leq j \leq 9 \quad (2.12j)$$

Plato del domo

Balance total:

$$\dot{M}_{10} = R - \alpha(M_{10} - M_0)^\beta \quad (2.12k)$$

Balance por componente:

$$\dot{c}_{10} = \frac{R(x_D - c_{10}) - V_R (y_{10} - x_9)}{M_{10}} \quad (2.12l)$$

y con la siguientes relaciones algebraicas

$$r = \frac{R}{D} \quad (2.13)$$

$$V_R = V_s - L_c \quad (2.14)$$

$$c_D = y_{10} \quad (\text{Condensador total}) \quad (2.15)$$

$$R = \frac{V_R}{\left(1 + \frac{1}{r}\right)} \quad (2.16)$$

En el presente modelo (ecs. 2.12a-2.12l) podemos hacer dos observaciones; una referida a las ecuaciones con términos de líquidos descendentes, relacionados por la ecuación de Francis con parámetros α , β , α_m y β_m que son ajustes al sistema experimental disponible (ver apéndice A) por Fernández (1996), cuyos valores se encuentran en el apéndice B y, el cambio de notación de x por c para las composiciones, con el objeto de

utilizar posteriormente x como un vector de estados del sistema completo, que se usa comúnmente en notación de control.

2.6 DESCRIPCIÓN EN VARIABLES DE ESTADO

En la sección anterior se desarrolló el modelo matemático del proceso de destilación. Desde el punto de vista de control basado en modelos es necesario clasificar las variables y parámetros que aparecen en las ecuaciones del modelo.

Para esto introduciremos las siguientes definiciones.

i) **Variables de entrada.** Representan las acciones que el medio ejerce sobre el sistema. Si estas variables se pueden manipular independientemente se les denomina variables de control. Para el caso específico del sistema de destilación son el flujo de vapor que se alimenta al rehervidor y la cantidad de líquido que se refluja a la torre (ver apéndice A). El resto de las entradas al proceso que no pueden ser susceptibles de alguna medición (variables que el ambiente impone) se denominan perturbaciones. En el caso de estudio la única variable de perturbación que se considera es el cambio en la concentración de alimentación.

ii) **Variables de Salida.** Representan las acciones que el sistema ejerce sobre el medio o sus alrededores y son medibles. Para propósitos de control son las que se alimentan a la lógica de control, o bien pueden usarse para la estimación de otras variables que puedan caracterizar o controlar el comportamiento dinámico del proceso. En los procesos de destilación usualmente son las temperaturas en diferentes platos de la columna.

iii) **Variables de estado.** Este es un concepto matemático y se define como el conjunto de variables que al resolver el sistema de ecuaciones especifican el sistema. Estas variables pueden o no ser medidas. En el caso de estudio son las concentraciones en cada una de las etapas de la columna, y tomando en cuenta la observación de Fernández (1996) y Mejdell y Skogestad (1991), la hidráulica de plato en cada una de las etapas se incorpora en el modelo.

La descripción en variables de estado de la columna de destilación está dado por:

$$T_j = f(x_j, P) \quad (2.17)$$

$x(t)$ es un vector de estados tal que;

$$x(t) = (M_B(t), M_1(t), \dots, M_{10}(t), c_B(t), c_1(t), \dots, c_m(t), c_6(t), \dots, c_{10}(t))^T \quad (2.18)$$

La ecuación (2.17) es una expresión que representa la salida como función de los estados y $T(t)$ es una función vectorial descrita por:

$$T(t) = (T_1(t), T_2(t), \dots, T_n(t))^T \quad (2.19)$$

Naturalmente todo el sistema es un conjunto de ecuaciones no-lineales.

La definición de las variables, constantes termodinámicas, funciones de hidráulica y sus parámetros, se especifican en la nomenclatura y en los apéndices B y C.

CAPÍTULO 3

ESQUEMA ESTRUCTURAL DE UN ESTIMADOR DE ESTADOS EN DESTILACIÓN

En este capítulo se desarrollará un esquema estructural de estimación de estados para la columna de destilación binaria azeotrópica, basado en las propiedades de observabilidad del sistema. El esquema de estimación se basa en desarrollos de estimadores encontrados en la literatura que hacen uso de herramientas geométrico-diferenciales para la síntesis del estimador.

La contribución a los esquemas propuestos es una selección adecuada de la configuración de medición, entendiéndose como el arreglo del número, posición y su índice de observabilidad de las salidas en el esquema de estimación.

3.1 INTRODUCCIÓN

Para diseñar leyes de control de algunos sistemas dinámicos dados por su representación estado-espacio, las variables de estado frecuentemente se consideran conocidas. Pero en realidad no lo son, y los estados actuales deben estimarse por algún sistema dinámico auxiliar: *el estimador*.

Dado un sistema lineal o no-lineal, un *estimador* es un sistema dinámico cuya tarea es la reconstrucción de estados, que se construye de un modelo (de la planta), en el que actúan como términos forzantes las mediciones de entrada y salida del sistema dado; y como resultado se obtiene la evolución de los estados reconstruidos $\hat{x}(t)$ de el estado $x(t)$ del sistema original.

El problema de estimación de estados en destilación consiste en reconstruir los estados de la columna (composiciones y acumulados), usando únicamente mediciones de temperatura y un modelo de primeros principios del proceso de destilación.

En este trabajo se presenta un esquema de estimación de estados basado en el enfoque de Alvarez (1997) para el diseño de un estimador no lineal. La metodología de sintonización de las ganancias está basada en la técnica convencional de asignación de polos, donde las ganancias están parametrizadas por un factor de aceleración/retardo S_0 , con lo que se logra un procedimiento simple en el diseño y sintonización en las ganancias del estimador.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO

En notación de control, el modelo no lineal para la columna que se describió en el Capítulo 2 obtenido de los principios básicos de conservación, representado por el sistema de ecuaciones 2.12 se puede representar por un modelo matemático Σ en la siguiente forma;

$$\Sigma \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f[x, u(t)]; \quad \dim x = n = 24 \\ y = h[x]; \quad \dim u = 2; \dim y = m \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

para el cual se desarrolla el esquema de estimación de estados. De manera que el sistema (3.1) contiene los estados (acumulados y composiciones) del sistema de destilación binaria, tal que;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(M_j, M_{j+1}) \\ f_2(M_{j+1}, M_j, w(c_{j-1}), c_j, w(c_j), c_{j+1}) \end{bmatrix} \quad (3.1a)$$

donde x_H y x_C son vectores columna de dimensión 12 tales que

$$x_H = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_B \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{10} \end{bmatrix}$$

$$x_C = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{14} \\ \vdots \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{10} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = [q(t) \quad r(t)]^T; \quad \dim u = p = 2$$

$$y = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)]^T; \quad \dim y = m$$

Donde $x \in \mathcal{R}^n$ es el vector de *estados* que describen el sistema, $u \in \mathcal{R}^p$ es un vector de *entradas exógenas* medidas, t es el tiempo y $y \in \mathcal{R}^m$ es un vector de salida de *variables*

medidas, en este caso específico, temperaturas; f y h son campos vectoriales infinitamente diferenciables. En este sentido, la estructura del sistema esta definida (por ejemplo, las funciones f y h son conocidas de las leyes físicas).

El conjunto $u(t) = [q(t), r(t)]^T$ será referido como el vector de entradas exógenas, y de la física del sistema $u(t) \geq 0$, para todo $t > 0$. Además, se supondrá que $u(t)$ es suave para todo $t > 0$ y que $\|u(t)\| \leq \infty$.

Aunque las funcionalidades termodinámicas a utilizar en el equilibrio sean simples, rigurosamente el sistema (3.1) genera un problema de estimación no-lineal.

3.3 CONCEPTOS PRELIMINARES

Para la estimación de estados, generalmente se han adoptado los conceptos de observabilidad y estimabilidad (Kwakernaak y Sivan, 1972; Diop y Fliess, 1991a; Hermann y Krener, 1977; Alvarez, 1997). La condición de Observabilidad para la estimación de estados en sistemas lineales es fácil de probar; sin embargo, no lo es para sistemas no lineales, y aunque Hermann y Krener (1987) prueban que la observabilidad en sistemas no-lineales puede verificarse vía una condición de rango en cierta álgebra de Lie asociada al sistema, esta no es aplicable a sistemas parcialmente observables. En esta situación, se utilizarán algunos conceptos y resultados relativos con la observabilidad lineal (Kwakernaak y Sivan, 1972) y estimabilidad no lineal (Alvarez, 1997).

Definición de Observabilidad lineal (Kwakernaak y Sivan, 1972)

Observabilidad significa que es posible determinar los estados de la planta en un tiempo presente a partir de mediciones pasadas.

Teorema. El sistema lineal n-dimensional:

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n$$

$$y=Cx$$

es *completamente observable* si y solo si los vectores renglón de la matriz de observabilidad $\mathcal{O} = [C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T$ genera un espacio n-dimensional (rango de $\mathcal{O}=n$).

Definición 1. La versión lineal del sistema (3.1) es *detectable* si el subespacio no observable está contenido en el subespacio estable.

En general, la observabilidad en sistemas lineales puede conocerse por medio de la bien conocida condición de rango de la matriz de observabilidad.

Definición de Estimabilidad no lineal

Alvarez (1997) establece las siguiente definición para determinar la estimabilidad (cualquiera, observabilidad o detectabilidad) en sistemas no lineales,

Definición 2. La planta no-lineal

$$\dot{x} = f[x, u(t)];$$

$$y = h[x];$$

es *RE (robustamente exponencialmente)-estimable* si existen m-enteros $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ (uno para cada salida), ($\sum \kappa_i \leq n$, $\kappa_i > 0$) denominados índices de observabilidad y un $(n-\kappa)$ mapa dimensional suave $\phi_{II}(x, u) = [\phi_{\kappa+1}(x, u), \dots, \phi_n(x, u)]^T$ de modo que, para cualquier $u(t)$,

(i) el mapa $\Phi(x, t) = \begin{bmatrix} \phi_I(x, u) \\ \phi_{II}(x, u) \end{bmatrix}$ es invertible en x .

$$\text{donde } \phi_I(x, u) = [h_1, \dots, L_f^{(\kappa_1-1)} h_1; \dots; h_m, \dots, L_f^{(\kappa_m-1)} h_m]^T$$

(ii) el mapa $\varphi = [L_f^{\kappa_1} h_1(x), \dots, L_f^{\kappa_m} h_m(x)]$ es L(Lipschitz)-continuo

(iii) las trayectorias de la dinámica no observable ($\dim=n-\kappa$) son *RE-estables*.

Si $n=\kappa$ entonces la planta es *RE-observable*; y si $\kappa < n$ entonces es *RE-detectable*.

3.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El problema particular de estimación de estados en una columna de destilación binaria azeotrópica es como sigue: Dadas las temperaturas en *ciertos* platos de la columna y un modelo matemático del proceso, estudiar la estructura de observación para diseñar un estimador de estados, que garantice estabilidad robusta y convergencia asintótica.

3.5 EL ESTIMADOR DE ESTADOS

Para estimar los estados en la columna de destilación se hará uso del esquema de estimación que sigue el enfoque de Alvarez (1997), teniendo como términos forzantes la medición de salidas secundarias disponibles y es de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= f(\chi, u(t), t) + G(\chi, t)(y - h(\chi)) & \dim \chi &= n \\ y &= h(\chi) & \dim y &= m \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde χ es un valor estimado del estado x de la columna, $G(\chi, t)$ son las innovaciones del esquema de estimación, y es un vector de mediciones (salidas reales del proceso) y, $h(\chi)$ es la salida estimada.

La innovación se define como:

$$G(\chi, t) = \phi_x^{-1}(\chi) K_0(\zeta_0, \tau_0) \quad (3.3)$$

donde $\phi_x(\chi)$ es el jacobiano de la transformación no lineal de estados:

$$z = \begin{bmatrix} z_I \\ z_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_I(x, u) \\ \phi_{II}(x, u) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

K_0 es una matriz de ganancias en bloque diagonal parametrizadas por un factor de aceleración/retardo (s_0). La matriz de ganancias tiene un bloque diagonal de dimensión κ_i para la i -ésima salida, tal que para m -salidas es:

$$K_0(\zeta_0, \tau_0) = \begin{bmatrix} k_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_m^0 \end{bmatrix}$$

así los elementos $k_i^0 = [s_0 k_{1i}^0, s_0^2 k_{2i}^0, \dots, s_0^{\kappa_i} k_{\kappa_i i}^0]^T$ en K_0 son vectores de ganancias para cada salida (medición), cuyas entradas (k_{ij}^0) son elegidas, tal que la dinámica del error de estimación lineal, no interactiva, con polos asignable (LNPA)

$$\varepsilon_i^{y(\kappa_i)} + k_{1i}^0 \varepsilon_i^{y(\kappa_i-1)} + \dots + k_{\kappa_i i}^0 \varepsilon_i^y = 0, 1 \leq i \leq m \quad (3.5)$$

es estable.

El cálculo del vector de ganancias para la i -ésima salida se realiza con base en la dinámica del error de estimación correspondiente a la salida i , $\varepsilon_i^y = y_i - h_i(\chi)$; siendo (3.5) lineal para el error y de κ_i polos asignables, calculados como las raíces del polinomio característico asociado a la i -ésima salida.

Para que el estimador funcione satisfactoriamente, la dinámica no observable (acumulados) debe garantizar algún tipo de estabilidad. El desarrollo de la estabilidad de este esquema se encuentra en Alvarez (1997).

Una observación importante del esquema de estimación (3.2) es que Fernández (1996) ha verificado experimentalmente su aplicación a procesos de separación: La destilación de un sistema metanol-agua.

Partiendo del enfoque de Alvarez (1997) y de los resultados de Fernández (1996), existen ciertos grados de libertad para la estimación de estados que no se han tratado; estos son: posición e índice de observabilidad para cada salida, entendiéndose estos argumentos como elementos de la estructura de estimación en la síntesis de un estimador.

3.6 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para abordar este problema es necesario realizar un análisis preliminar con la finalidad de verificar si el problema tiene solución, estableciendo un planteamiento cualitativo y uno cuantitativo, ambos sujetos a verificación.

3.6.1 Cualitativo

Estudiar el efecto de posición y su índice de observabilidad de las salidas del proceso en el condicionamiento numérico del mapa de detectabilidad.

Las siguientes conclusiones se pueden establecer después de realizar un análisis cualitativo:

A). Para una medición

1.- Se presenta un mal condicionamiento en el jacobiano del mapa de detectabilidad si se elige una salida cerca de una “meseta” en la curva de equilibrio o de pendiente igual a cero (por ejemplo, la separación de un sistema azeotrópico que es el caso de estudio o bien uno de alta pureza donde se presentan estas singularidades).

2.- Se favorece un buen condicionamiento numérico si:

a).- Es posible colocar la medición donde existe la máxima separación entre fases; es decir, la zona de máxima sensibilidad a cambios en temperatura.

- b).- Se elige un índice de observabilidad bajo para la estimación de estados; Siempre y cuando los estados reconstruidos garanticen estabilidad.

3.- La existencia de un azeótropo exige un compromiso entre:

- a).- Elegir una medición donde existe alta separación entre fases y elegir una en los extremos, que generalmente es de interés para propósitos de control, pero con poca sensibilidad y difícil de identificar del ruido de medición.

- b).-La posición de la medición y su índice de observabilidad.

B) Para dos mediciones

1.- Se presenta un mal condicionamiento en el jacobiano del mapa de detectabilidad si se elige al menos una de las salidas cerca de una “meseta” en la curva de equilibrio o de pendiente igual a cero.

2.- El buen condicionamiento numérico se favorece si:

- a).- Es posible colocar una medición en cada sección de la columna.

- b).- Se elige un índice de observabilidad bajo para la zona de menor sensibilidad en temperatura.

3.- La existencia de un azeótropo y dos mediciones disponibles para la estimación exige un compromiso entre:

- a).- Elegir un par de mediciones colocadas en la sección intermedia, una para cada sección de la columna y elegir el par de salidas colocadas en los extremos, generalmente para propósitos de control de columnas en dos puntos.

b).-La posición de las mediciones y su índice de observabilidad respectivo, que tendrá un efecto directo en el desempeño dinámico del estimador.

3.6.2 Cuantitativo

Basándose en las definiciones anteriores de Observabilidad lineal y detectabilidad no lineal, se *construirá* el esquema de estimación y, en él se analizará el planteamiento cuantitativo en términos técnicos.

Para abordar el problema de estimación de estados se utilizará la metodología de Alvarez (1996), quien aplica herramientas de geometría diferencial en el diseño de estimadores convergentes para sistemas no-lineales. La metodología a seguir consiste principalmente en encontrar un sistema equivalente mediante una transformación no-lineal de estados a partir del modelo no-lineal. Una vez obtenido el sistema equivalente, es posible obtener un estimador candidato, el cual es una copia del sistema equivalente más un término que depende de las salidas. Este término adicional es una medida entre la salida del sistema y el estimado de la salida. La principal desventaja de esta aproximación en sistemas no lineales se debe a que no existe un algoritmo general para encontrar tal transformación.

Si la columna es detectable en el sentido de Alvarez (1997), entonces existe un cambio de coordenadas que puede en principio ser:

$$z = \phi(x, u(t))$$

y mapear la planta en un nuevo sistema. El sistema en sus nuevas coordenadas debe contener la parte observable y la no observable, tal que:

$$z = \begin{bmatrix} z_I \\ z_{II} \end{bmatrix} = \phi(x, u(t)) = \begin{bmatrix} \phi_I(x, u(t)) \\ \phi_{II}(x, u(t)) \end{bmatrix}$$

es decir, que exista un mapa (variante en tiempo) $\phi(x, u(t))$ que sea invertible en el conjunto X si existe un mapa inverso ϕ^{-1} tal que:

$$\phi^{-1}[\phi(x, u(t))] = x, \quad \forall x \in X, t \geq 0$$

Así, el mapa

$$\phi_1(x, u(t)) = [h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{k-1} h_1(x); \dots; h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{k-1} h_m(x)]^T$$

correspondiente a la parte observable define otro conjunto de variables de estado

$$z_j = L_f^{j-1} h(x); \quad j = 1, 2, \dots, \kappa$$

donde la derivada direccional de un campo escalar $h[x] = cx$, infinitamente diferenciable en el espacio n -dimensional a lo largo de un campo vectorial variante en tiempo $f[x, u(t)]$ (derivada de Lie) y su fórmula recursiva se definen como:

$$L_f h = \langle dh, f \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto dual dado por

$$\langle dh, f \rangle = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} f_n$$

Esta derivada de Lie es también un campo escalar infinitamente diferenciable en el espacio n -dimensional. Así, se pueden construir derivadas de Lie de orden superior

$$L_f^0 h = h \quad L_f^k h = L_f [L_f^{k-1} h] = \langle dL_f^{k-1} h, f \rangle, \quad k=2, 3, \dots$$

El sistema en las nuevas variables se puede expresar en función de m -salidas $h_1(x)$, $h_2(x), \dots, h_m(x)$ como:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\kappa \\ \text{---} \\ z_{\kappa+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\kappa_1-1)} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\kappa_2-1)} h_2(x) \\ h_m(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\kappa_m-1)} h_m(x) \\ \text{---} \\ \phi_{\kappa+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ son enteros estrictamente positivos, que indican los índices de observabilidad para cada una de las mediciones y ; $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_m = \kappa$ es el índice de observabilidad del sistema. De tal forma que las derivadas de z_1 satisfacen las siguiente dinámica lineal:

Parte observable (composiciones)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_1 &= L_f^{\kappa_1} h_1(x) = \varphi_1(z, u(t)) \quad y_1 = z_1 \\ \text{---} &\text{---} \\ \dot{z}_{\kappa_1+1} &= z_{\kappa_1+2} \\ &\vdots \\ \dot{z}_\kappa &= L_f^\kappa h_2(x) = \varphi_2(z, u(t)) \quad y_2 = z_{\kappa_1+1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\varphi_i(z_1, u(t))$ es una función analítica no lineal, $y \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medidas y κ_i es el índice de observabilidad asociado a la salida y_i .

$$\varphi(z, u(t)) = [\varphi_1(z, u(t)), \dots, \varphi_m(z, u(t))]^T = [L_f^{\kappa_1} h_1(x), \dots, L_f^{\kappa_p} h_m(x)]^T$$

y para el caso de Z_{II} correspondiente a la parte no-observable

$$\begin{aligned} \dot{z}_{13} &= \theta_1(z, v(t)) \\ \dot{z}_{14} &= \theta_2(z, v(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{24} = \dot{z}_n &= \theta_{n-\kappa}(z, v(t)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

En forma vectorial el sistema (3.7) y (3.8) se puede reescribir como:

$$\Sigma_1 \left\{ \begin{array}{ll} \dot{z}_I = \Gamma z_I + \Pi \varphi[z, v(t)] & \dim z_I = \kappa \quad (\text{parte observable}) \\ y = \Delta z_I & \dim y = p \\ z_{II} = \theta[z, v(t)] & \dim z_{II} = n - \kappa \quad (\text{parte no observable}) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

el cual es equivalente a Σ mediante una transformación no-lineal de estados.

donde:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\kappa_i \times \kappa_i}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{bmatrix} \quad \pi_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\kappa_i \times 1}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad \delta_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathfrak{R}^{1 \times \kappa_i}$$

Donde el par (Γ, Δ) es completamente observable en el nuevo sistema de coordenadas y , a este arreglo se le denomina *Forma dual de Brounovski*.

Para construir un estimador del sistema (3.1) basado en el enfoque de Alvarez (1997) se tomará la ventaja de la propiedad de observabilidad del par (Δ, Γ) en el sistema (3.9), tal que;

se considera $\zeta \in \mathfrak{R}^n$

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_I &= \Gamma \zeta_I + \Pi \varphi[\zeta, u(t)] + K_0(y - \delta_i \zeta_i) \\ \dot{\zeta}_{II} &= \theta(\zeta, u(t))\end{aligned}\quad (3.10)$$

como un estimador candidato del sistema (3.1). De tal forma que la matriz $A_0 = [\Gamma - K_0 \Delta]$ tenga sus valores propios dentro del plano complejo con parte real negativa [por ejemplo: $\sigma(\Gamma - K_0 \Delta) \subset C^-$]. Donde K_0 son las ganancias del estimador, teniendo una estructura de bloque para cada medición.

$$K_0(\zeta_0, \tau_0) = \begin{bmatrix} k_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_m^0 \end{bmatrix}$$

así:

$$k_i^0 = [s_0 k_{1i}^0, s_0^2 k_{2i}^0, \dots, s_0^{\kappa_i} k_{\kappa_i i}^0]^T; s_0 > 0$$

cuyas entradas (k_{ij}^0) son elegidas, tal que la dinámica del error de estimación LNPA

$$\varepsilon_i^{y(\kappa_i)} + k_{1i}^0 \varepsilon_i^{y(\kappa_i-1)} + \dots + k_{\kappa_i i}^0 \varepsilon_i^y = 0, 1 \leq i \leq m$$

es estable.

El sistema en sus coordenadas originales (físicas) es:

$$\dot{\chi} = f(\chi, u(t), t) + \phi_x^{-1}(\chi) K_0 (y - h(\chi)) \quad (3.11)$$

En subsistemas observable y no observable es:

$$\dot{\chi}_1 = f_1(\chi, u(t), t) \quad (3.11a)$$

$$\dot{\chi}_2 = f_2(\chi(t), u(t), t) + \sigma_2^{-1}(\chi)K_0(y - h(\chi)) \quad (3.11b)$$

donde

$$\phi_x^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{12 \times 12} & I_{12 \times 12} \\ \sigma_2^{-1} & -\sigma_2^{-1} \sigma_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24}$$

es la matriz jacobiana de la transformación de estados $z = \Phi(x, u(t))$.

Una observación muy importante es que, el estimador (3.11) tiene una estructura simple, el cual es una copia del modelo de la planta más un término que depende de las desviaciones de la salida del proceso y la salida del estimado, K_0 debe seleccionarse tal que garantice convergencia asintótica del estado estimado al real en un punto, así como estabilidad del sistema total.

3.7 EL ESTIMADOR CONVERGENTE

Prueba:

Restando el sistema (3.10) del (3.9) se obtiene la siguiente expresión dinámica:

$$\dot{e}_1 = \Gamma e_1 + \Pi[\varphi(\zeta) - \varphi(z)] + K_0 \Delta e_1 \quad (3.12)$$

donde $e_1 = (z_1 - \zeta_1)$ se define como el error de estimación del sistema del sistema (3.9) y $\eta = y - \hat{y}$ como el error de salida. Así, la dinámica del error es:

$$\dot{e}_1 = (\Gamma - K_0 \Delta) e_1 + \Pi \varphi(e_1, e_{II}) \quad (3.13)$$

Para garantizar el requisito indispensable de convergencia, K_0 debe seleccionarse tal que: el error de observación $e_1 \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$, y el término que representa la parte no observable tenga un peso mínimo, así, $\varphi(0, e_{11}) \rightarrow 0$. Además, la estabilidad de $A_0 = (\Gamma - K_0 \Delta)$ sea el término dominante en la expresión (3.13).

Debido a la forma especial (Canónica de Brownosky) de las matrices Γ y Δ ,

$$A_i^0 = [\Gamma_i - K_i^0 \delta_i] = \begin{bmatrix} -s_0 k_{1i} & 1 & 0 & \dots \\ -s_0^2 k_{2i} & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \\ -s_0^{\kappa_i} k_{\kappa_i i} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\kappa_i \times \kappa_i} \quad (3.14)$$

donde A_i^0 es la matriz compañera vertical izquierda asociada a la i -ésima salida. Así, las expresiones dinámicas del error de estimación del sistema (3.13) correspondientes a la parte lineal son:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -s_0 k_{1i}^0 e_1 + e_2 \\ &\vdots \\ \dot{e}_j &= -s_0^j k_{ji}^0 e_1 + e_{j+1} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\kappa_i} &= -s_0^{\kappa_i} k_{\kappa_i i}^0 e_1 + e_{\kappa_i+1} \end{aligned}$$

cuyo polinomio característico asociado a la salida i se puede representar como:

$$\rho(\varepsilon) = \varepsilon_i^{y(\kappa_i)} + k_{1i}^0 \varepsilon_i^{y(\kappa_i-1)} + \dots + k_{\kappa_i i}^0 \varepsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.15)$$

3.8 ESTUDIO DE LA NATURALEZA DE LA ESTRUCTURA DE ESTIMABILIDAD NO LINEAL

Para abordar un problema de control, es necesario identificar la estructura de observabilidad y controlabilidad (Hermann y Krener, 1977), entendidas como propiedades fundamentales que establecen las limitaciones esenciales de lo que se puede lograr con cualquier esquema de control, ya sea convencional o avanzado.

En el sentido de los conceptos anteriores, es necesario conocer la salida y un número finito de sus derivadas para determinar la observabilidad del sistema o en su caso la detectabilidad del mismo. Sin embargo, en vista de que resulta demasiado laborioso desarrollar todas las derivadas analíticamente hasta obtener κ -funciones linealmente independientes se realiza una aproximación del sistema no lineal y de manera constructiva se analiza la estimabilidad del sistema verificándose numéricamente. A este número de filas linealmente independientes se le denomina *índice de observabilidad*.

Considerese el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x}(t) + b\tilde{u}(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ \tilde{y} &= c\tilde{x}(t)\end{aligned}\tag{3.16}$$

como una aproximación lineal del sistema dinámico (3.1) expresado en variables de desviación. Así, alrededor de (\bar{x}, \bar{u}) se puede determinar si el sistema es observable o detectable. Donde $A = f_x(x, u)$ es una matriz jacobiana de dimensión 24×24 , $b = f_u(x, u)$ de dimensión 24×1 y $c = h_x(x)$ de dimensión 1×24 ; son matrices de elementos $\langle A \rangle_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $\langle b \rangle_{ij} = \partial f_i / \partial u_j$, y $\langle c \rangle_{ij} = \partial h_i / \partial x_j$.

En términos de las expresión (3.1a), la forma simplificada de la matriz en el sistema lineal, se puede representar como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} &= \begin{pmatrix} 0 & c_2 \end{pmatrix} \tilde{x}\end{aligned}\tag{3.17}$$

El bloque A_{11} de la partición de A denota la dependencia de los acumulados que existe sobre una etapa en particular: El líquido que abandona la etapa (diagonal principal) y líquido que llega de una etapa superior (arreglo diagonal, por arriba de la diagonal principal). En el bloque $A_{12}=0$ se puede observar que no existe ninguna dependencia de las composiciones sobre los líquidos retenidos en las etapas. El tercer bloque de la partición (A_{21}) denota la dependencia de las composiciones en cada etapa con respecto a los líquidos retenidos, en este caso sólo dependen de una etapa superior. Cuando en el modelo no se considera la dinámica de la hidráulica, la matriz del sistema sólo corresponde a la partición A_{22} .

Para determinar la estimabilidad del sistema, la parte constructiva se realiza desarrollando las derivadas de la salida del sistema lineal, obteniéndose

$$y = \mathfrak{G}(x)x\tag{3.18}$$

Donde y es un vector aumentado de salidas, $\mathfrak{G}(x)$ es la matriz de observabilidad si el rango (κ) es igual a n . Sin embargo, si κ es menor a n , esta matriz se denomina de detectabilidad.

$$y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\kappa-1)} \end{bmatrix} \quad \mathfrak{G}(x) = \begin{bmatrix} c(\bar{x}) \\ c(\bar{x})A(\bar{x}) \\ \vdots \\ c(\bar{x})A^{(\kappa-1)}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

En términos de Algebra de Lie, se obtiene

$$\dot{y} = \phi_I(x, u(t)) = \mathfrak{G}(x)x$$

y

$$\frac{\partial \phi_I(x, u)}{\partial x} = \mathfrak{G}(x)$$

donde $\phi_I(x, u)$ es el mapa de detectabilidad del sistema no lineal si κ es estrictamente menor que n .

Donde el par $\{A_{22}, c_2\}$ es completamente observable si la *matriz* $\mathfrak{G}(x)$ es de rango doce.

Para el modelo matemático del sistema de destilación, con dinámica de hidráulica se verificó que con cualquier salida $h(x)$ individual el índice de observabilidad fue doce. Cuando en el modelo no se consideran los cambios en la hidráulica, es completamente observable.

Como el rango del mapa de detectabilidad $\phi_I(x, u(t))$ es 12 ($\kappa=12$), existen $(n-\kappa)$ campos escalares tales que el mapeo

$$\Phi(x, u(t)) = [\phi_I(x, u(t)) \quad \phi_{II}(x, u(t))]^T \quad (3.19)$$

debe ser globalmente invertible para x .

donde $\phi_{II}(x, u(t)) = \begin{bmatrix} \phi_{\kappa+1}(x, u(t)) \\ \phi_{\kappa+2}(x, u(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(x, u(t)) \end{bmatrix}_{12 \times 1}$ (3.20)

En tanto que las κ -coordenadas $\phi_I(x, u(t))$ están ya definidas, las $(n-\kappa)$ se pueden elegir libremente, siempre y cuando se cumpla que

$$\text{rgo}[\Phi_x(x, u(t))] = 24$$

Para los $(n-\kappa)$ campos escalares restantes se pueden elegir los acumulados expresados en moles, en volumen o alguna combinación de las variables obtenidas, siempre y cuando sean

estables. Para este caso se seleccionaron los acumulados en cada uno de los platos expresados en moles que corresponden a la dinámica no observable (interna) tal que:

$$\phi_{II}(x, u(t)) = \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{14} \\ \vdots \\ \phi_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_B \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{10} \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad (3.21)$$

donde el jacobiano del mapa no observable genera el siguiente arreglo

$$\phi_{IIx} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} = \begin{bmatrix} I_{12 \times 12} & 0_{12 \times 12} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

de manera que, el jacobiano del sistema completo se puede expresar como:

$$\Phi_x(x, u(t)) = \begin{bmatrix} \phi_{Ix}(x, u(t)) \\ \phi_{IIx}(x, u(t)) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

el cual es necesario invertir para determinar de manera única los n-estados de la columna de destilación como función de las salidas y de al menos $(\kappa - 1)$ derivadas de la salida respecto al tiempo. En las nuevas coordenadas es equivalente a

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_I \\ \dot{z}_{II} \end{bmatrix} = \Phi_x(x, u(t)) = \begin{bmatrix} \phi_{Ix}(x, u(t)) \\ \phi_{IIx}(x, u(t)) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \phi_{IM} & \phi_{IC} \\ \phi_{IIM} & \phi_{IIC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

denotando el subsistema \dot{z}_{II} como dinámica cero (o dinámica interna), que corresponde a la dinámica no observable. En el modelo matemático, las tasas de cambio en los líquidos retenidos es la *dinámica no observable* a partir de mediciones de temperatura.

La elección de la dinámica no-observable debe ser tal que se satisfagan dos condiciones; esto es, la transformación $z=\Phi(x,u(t))$ debe ser invertible para x (condición i, de la definición 2). Además, para que la estructura de observación pueda ser admisible, debe ser tal que la dinámica interna sea asintóticamente estable (condición iii, de la definición 2).

Como la dinámica interna en el sistema azeotrópico etanol-agua corresponde a la parte no observable (Acumulados), no es posible acelerarla como se puede hacer con la parte observable, por tal razón debe exigirse que sea la más rápida posible, lográndose esto a expensas de una buena selección en la variables de salida del proceso para la estimación de estados. Esto es, si se eligen ciertas salidas secundarias del proceso para la estimación que dependen de una “dinámica rápida”, entonces el tiempo de respuesta del sistema a lazo cerrado estará dominado por la dinámica rápida del sistema y el estimador presentará un buen desempeño en la reconstrucción.

Por el contrario, si se eligen variables que tienen una dinámica más lenta, el tiempo de respuesta del estimador estará dominado por la dinámica asociada a la salida.

Para la columna de destilación se seleccionaron las siguientes coordenadas z_{II} y dinámicas internas;

Caso I: Índice de Observabilidad Completo

En este caso se seleccionaron los acumulados en cada una de las etapas expresados en moles (M_B, M_1, \dots, M_{10});

coordenadas;

$$z_{II} = \phi_{II}(x, u(t)) = \begin{bmatrix} M_B \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{10} \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad (3.26)$$

dinámicas internas;

$$\dot{z}_{II} = \phi_{IIx} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} = \begin{bmatrix} I_{12 \times 12} & 0_{12 \times 12} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

tal que la transformación no-lineal de estados del sistema a invertir, con índice de observabilidad 12 es

$$\dot{z} = \phi_x(x, u(t)) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La forma en que aparece el sistema en las nuevas coordenadas (3.28) es independiente del número de sensores a utilizar en la estimación de estados, pero dependiente de lo que se ha denominado estructura de estimación.

Caso II: Reducción del índice de Observabilidad

Reducir el índice de observabilidad implica reducir el espacio de observación para las i -ésimas salidas disponibles en la reconstrucción de estados; sin embargo, impone una selección adecuada de las dinámicas que son representativas del sistema.

La reducción del índice de observabilidad en el vector de salidas $y=h(x)$, tal que $\Phi_x(x, u)$ sea globalmente invertible para x se debe considerar como dinámica no-observable a los acumulados en cada plato (**Caso I**) y ciertas composiciones que tienen una dinámica muy **lenta**, o bien las composiciones que se encuentran más alejadas del punto de medición, reduciendo con esto el error que se tiene por la aproximación en la derivación del vector de salidas con respecto al tiempo.

Las siguiente reducción en los índices de observabilidad se realizó, y el desempeño de esta reducción se presenta en el siguiente capítulo.

a).-Un punto de medición

$$y = h(x), \in \mathbb{R}^1$$

$$\kappa = 6$$

$$\kappa = 2$$

b).-Dos puntos de medición

$$y = h(x) = (h_1(x), h_2(x)), \in \mathfrak{R}^2$$

$$\kappa = 6; \kappa_1 = \kappa_2 = 3$$

$$\kappa = 2; \kappa_1 = \kappa_2 = 1$$

La dinámica no-observable en ambos casos debe ser estable según la condición iii de la definición 2, lo cual implica que debe existir un punto de equilibrio. En los sistemas de destilación, físicamente los acumulados forman la parte estable.

3.9 SUMARIO

Sin olvidar la física del problema se puede establecer, que a partir de temperaturas se logra inferir composiciones, pero no se obtiene ninguna información acerca de la cantidad de los líquidos retenidos (M_i) en los platos de la columna.

CAPÍTULO 4

DESEMPEÑO DEL ESTIMADOR NO LINEAL

En la primera parte de este capítulo se presentará una verificación cuantitativa de que el problema de estimación de estados para el sistema azeotrópico tiene solución si se elige una estructura de observación que no singularice el sistema, esta selección se realiza mediante un estudio del condicionamiento numérico del mapa de detectabilidad. En la segunda parte del capítulo, mediante simulaciones numéricas se presenta el desempeño del estimador ante perturbaciones tipo escalón en la composición de alimentación, relación de reflujo y flujo de vapor suministrado. Todo esto, con la estructura de observación que presenta el menor número de condición.

4.1 INTRODUCCIÓN

Se ha sugerido por varios autores (Foss, 1973; Stephanopoulos, 1982) que el problema relevante en control de procesos en ingeniería química, no es el desarrollar algoritmos sofisticados, más bien el establecimiento de un esquema estructural para seleccionar las variables manipuladas, así como las medidas y relacionarlas apropiadamente.

Partiendo del esquema de estimación para el proceso de destilación desarrollado en el capítulo anterior, se plantea un análisis de tal manera que se le pueda establecer una estructura de observación al esquema teórico. Dicha estructura debe garantizar una estimación óptima y asintótica de las composiciones y acumulados cuando se incorporan nuevas salidas del proceso, seleccionas de un conjunto de ellas disponibles. Así, las conclusiones cualitativas del capítulo anterior son un marco conceptual y, a la vez una conjetura sujeta a verificación. En este capítulo se realizará la verificación, la cual será de dos tipos, a).- evaluación cuantitativa del condicionamiento numérico del mapa de detectabilidad y b).- desempeño del estimador bajo diferentes estructuras de medición.

Además de lo anteriormente señalado, es factible conocer el comportamiento del sistema bajo diferentes perturbaciones y condiciones de operación, con el fin de analizar desempeño y robustez del estimador, y en su caso implementar políticas para su operación eficiente y segura tendientes a mejorar la calidad del producto.

4.2 SELECCIÓN DE LAS VARIABLES A MEDIR

La implementación de un esquema de control (convencional o avanzado) en un proceso requiere, en mayor o menor grado el conocimiento de la conducta dinámica del proceso. Este conocimiento puede proceder de dos fuentes importantes: a) De un modelo matemático que describe el proceso, el cual puede ser un conjunto de ecuaciones diferenciales (posiblemente un modelo reducido), un modelo de entradas-salidas

representado como una función de transferencia o un simple modelo de ganancia estática; y,
b) La segunda fuente de conocimiento son medidas directas del proceso (salidas).

A lo anterior cabe mencionar que, cuando las variables primarias de control no pueden medirse directamente, entonces medidas secundarias tienen que seleccionarse y usarse en conjunción con estimadores para inferir el valor de las variables no medidas. En procesos químicos, las perturbaciones del proceso no medidas (ruido por excitación de estados), normalmente son de mayor importancia, dominando al error causado por ruido de medición.

La selección adecuada de medidas secundarias es una tarea de importancia fundamental para la síntesis de estructuras de control, estas medidas secundarias disponibles deben elegirse para minimizar el error de estimación, que puede ser causado por diferencias entre el sistema real y el modelo del proceso (el cual es fundamental para el diseño del estimador), o por ruido de medición.

Una variedad de criterios para seleccionar la medición son presentados por Morari y Stephanopoulos (1980) con el objetivo de minimizar el error de estimación (que en la mayoría de los casos se usa como criterio para seleccionar un estimador); Sin embargo, existen limitaciones a este acercamiento causado por los requerimientos de observabilidad y detectabilidad, ya sean lineal o no lineal. Estas limitaciones pueden superarse realizando un estudio de Descomposición en Valores Singulares (DVS) del sistema, que pueda identificar fuertes acoplamientos entrada-salida (como es el caso azeotrópico o uno de alta pureza) o bien, para minimizar la influencia de subespacio no observado en los estimados, principalmente en la respuesta inicial de un transitorio ante cualquier perturbación.

Para aplicaciones en ingeniería química, la presencia de no linealidades puede ser detrimental cuando las perturbaciones alejan al proceso tan lejos del estado supuesto para linealización; sin embargo, esto no es una limitante de su aplicación en sistemas altamente no lineales.

Con base en la disposición de las mediciones en línea de temperatura a lo largo de la columna $T(c_2)$, $T(c_4)$, $T(c_6)$, $T(c_8)$, $T(c_{10})$, $T(c_{12})$, se plantea el siguiente problema:

Problema 1: En términos de bondad, - ¿Cuál es la mejor estructura de medición en línea que debe seleccionarse para reproducir el sistema con convergencia asintótica al estado real de la planta?. Entendiéndose como estructura de medición al número de sensores e índice de observabilidad de las salidas.

El problema 1 esquemáticamente se representa en la Figura 4.1.

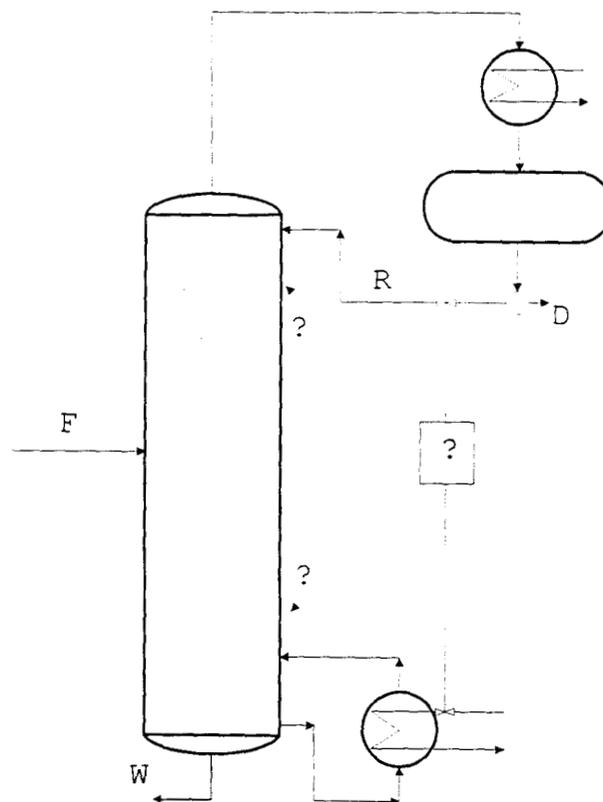


Figura 4.1: Esquema del problema planteado para la localización de sensores a lo largo de la columna.

4.3 ESTRATEGIA Y ANÁLISIS EN LA SELECCIÓN DE LAS MEDICIONES

La estrategia para seleccionar o evaluar opciones cuando se tienen interacciones y direccionalidad de sistemas multivariables se puede realizar por descomposición de valores

singulares, herramienta matemática que descompone la matriz de un sistema lineal o el jacobiano de una aproximación lineal (de uno no lineal) en subsistemas con propiedades definidas. Esta técnica muestra medidas cuantitativas de interacción y sensibilidad para los nodos, así como para el sistema completo; en la teoría de control se ha usado la DVS en la síntesis de estructuras de control y estudios de direccionalidad de columnas de destilación no ideal.

La aplicación directa en este trabajo de la DVS se realiza sobre el jacobiano de la transformación no lineal de coordenadas (matriz de detectabilidad, $\phi_x(x,u)$), cuyo objetivo de aplicación se realiza para seleccionar la ubicación, número de sensores e índice de observabilidad de las salidas. La matriz de detectabilidad es el elemento clave para la estimación de estados, la cual contiene información de la medición o mediciones a estudiar o analizar.

Una característica importante adicional de la estrategia de DVS es su habilidad de identificar aspectos de modelamiento, tales como errores de modelado, los cuales afectan la ejecución de la estructura del control del proceso resultante. El método difiere de los encontrados en la literatura a través de su aplicación general, mejor desempeño y simplicidad del procedimiento de construcción y rigor matemático de la derivación.

4.3.1 Valores Singulares y Número de Condición: Preliminares

El objeto de esta sección es introducir algunas bases de la descomposición de valores singulares, las cuales son comúnmente usadas cuando se evalúan interacciones y direccionalidad de sistemas multivariable. La atención de muchos investigadores con aplicaciones diversas de la descomposición de valores singulares se encuentran en la literatura de control de procesos (Palomares, 1985; Lau y col. 1985; Skogestad y Morari, 1988a; Piette y col., 1995).

4.3.2 Criterio de Selección

Los valores singulares proporcionan información importante acerca de un sistema. Es bien conocido en análisis numérico (Forsythe, 1977) que el número de condición de una matriz se define como:

$$\gamma \equiv \frac{\sigma^*}{\sigma} \quad (4.1)$$

donde σ^* y σ denotan el máximo y mínimo valor singular, respectivamente. El número de condición o función de sensibilidad es un parámetro que cuantifica la sensibilidad del sistema con respecto a incertidumbres en la matriz (errores de modelado), no linealidades y perturbaciones aditivas (Klema y Laub, 1980). La magnitud del valor singular mínimo, es una medida de la distancia mínima a la matriz singular mas cercana y de aquí que también una medida de la invertibilidad del sistema. En otras palabras, un sistema mal condicionado (número de condición alto) amplifica este tipo de errores. Desde el punto de vista numérico, sistemas de ecuaciones que tienen un número de condición grande conducen a sistemas muy sensibles a la propagación de errores por incertidumbres en el modelado.

Desde un punto de vista de control, las columnas de destilación son usualmente altamente “interactivas”. Esto significa que un cambio en cualquier entrada (por ejemplo, L o V), generalmente afecta ambas salidas (y_D y x_B). Además, para plantas multivariables, generalmente existe la propiedad de que las salidas son más sensitivas a alguna combinación de entradas que otras. Por ejemplo, para columnas de destilación de alta pureza, las composiciones de producto son muy sensitivas a cambios en los flujos externos y mucho menos a los flujos internos (Rosenbrock, 1962), en tal caso, la planta está mal condicionada o equivalentemente tiene un alto grado de direccionalidad.

Como un antecedente, Joseph y Brosilow (1978) usaron la DVS para seleccionar la estructura de medición de un control inferencial. En este trabajo se propone usar la técnica de DVS para seleccionar la estructura de medición de un estimador y con base en los aspectos teóricos, resulta evidente que la estructura de medición que presente menor

número de condición es la más recomendable para el diseño del estimador y la menos recomendable es aquella que presente el mayor número de condición de las estructuras analizadas.

4.4 ESTUDIO DE LA MATRIZ DE DETECTABILIDAD MEDIANTE DVS

En las siguientes tablas se presentan los resultados de la descomposición en valores singulares de la matriz de detectabilidad; el valor singular máximo, mínimo y el cociente de ellos, mejor conocido en la literatura como número de condición o relación de rigidez en el estudio de sistemas dinámicos. El conjunto de valores singulares está asociado a un conjunto de salidas en puntos diferentes en la columna, que corresponden a la separación de alta pureza del sistema etanol-agua.

CASO I: Índice de Observabilidad Completo

A) Una medición

Tabla 4.1: Descomposición en Valores Singulares de la Matriz de Detectabilidad

$$\Phi_x(x,u).$$

	$h_1(x_{24})$	$h_1(x_{22})$	$h_1(x_{20})$	$h_1(x_{18})$	$h_1(x_{16})$	$h_1(x_{14})$
	1.0e+009 *	1.0e+010 *	1.0e+011 *	1.0e+011 *	1.0e+010 *	1.0e+012 *
σ^*	9.26994942	5.5530249	7.42006065	4.44742367	9.21398406	1.41770113
σ_*	7E-14	2.6E-13	5E-14	1.1E-13	8.4E-13	0
γ	1.3243E+14	2.1358E+13	1.484E+14	4.0431E+13	1.0969E+13	0

Los resultados de la Tabla 4.1 indican que el uso de una medición en línea de temperatura para la estimación de *todos* los estados deberá realizarse con la salida que presente la mayor sensibilidad ante cualquier perturbación. Físicamente, corresponde a seleccionar una salida en la etapa donde existe la mayor separación del sistema etanol-agua,

resultando en este caso la temperatura del plato no. 3, por tener el menor índice de observabilidad

B) Múltiples Mediciones

Resulta natural pensar que el uso de dos mediciones en un esquema de estimación mejora el desempeño. Sin embargo, también resulta cuestionable cuales deben elegirse. Para la columna experimental (Apéndice A) con seis puntos para monitorear temperaturas, tres en cada sección, se obtiene una combinación de 36, lo cual resulta ilógico analizar combinaciones de salidas adyacentes o cercanas, ya que, una combinación de salidas adyacentes singulariza el esquema de estimación, debido a la relación de escalonamiento o deslizamiento que existe de una composición a otra en la columna.

Tabla 4.2: Descomposición en Valores Singulares de la matriz de detectabilidad usando dos mediciones de temperatura como salidas.

	$h_1(x_{14})-$ $h_2(x_{20})-$	$h_1(x_{14})-$ $h_2(x_{22})-$	$h_1(x_{14})-$ $h_2(x_{24})-$	$h_1(x_{16})-$ $h_2(x_{20})-$	$h_1(x_{16})-$ $h_2(x_{22})-$	$h_1(x_{16})-$ $h_2(x_{24})-$	$h_1(x_{18})-$ $h_2(x_{20})-$	$h_1(x_{18})-$ $h_2(x_{22})-$	$h_1(x_{18})-$ $h_2(x_{24})-$
	1.0e+006	1.0e+006	1.0e+006	1.0e+005	1.0e+005	1.0e+005	1.0e+005	1.0e+005	1.0e+005
σ^*	2.3E+0	2.3E+0	2.3E+0	3.5E+0	1.1E+0	1.1E+0	4.1E+0	2.1E+0	2.1E+0
σ_*	14.7E-9	18.6E-9	20.5E-9	226.0E-9	387.1E-9	77.9E-9	719.9E-9	232.0E-9	16.9E-9
γ	155.5E+6	122.7E+6	111.6E+6	15.6E+6	2.9E+6	14.3E+6	5.7E+6	9.2E+6	125.2E+6

Por tal razón, resultaron nueve combinaciones a estudiar por DVS que aparecen en la Tabla 4.2. El estudio revela que la combinación de salidas con las cuales el estimador debe diseñarse es con el juego de $h_1(x_{16})-$ $h_2(x_{22})$, cuyo numero de condición es de 2.9E+6, que corresponden a las salidas de temperatura en los platos 3 y 8. Esto, puede no coincidir con la práctica industrial, donde las mediciones disponibles corresponden a los extremos en una columna de destilación binaria, que usan dichas salidas para propósitos de control, pero no de monitoreo.

4.5 VERIFICACIÓN

Para corroborar estos resultados se realizaron las simulaciones con la salida o juego de salidas que resultaron con menor número de condición γ , seleccionadas como entradas forzantes del estimador, estas simulaciones se presentan en la siguiente figura.

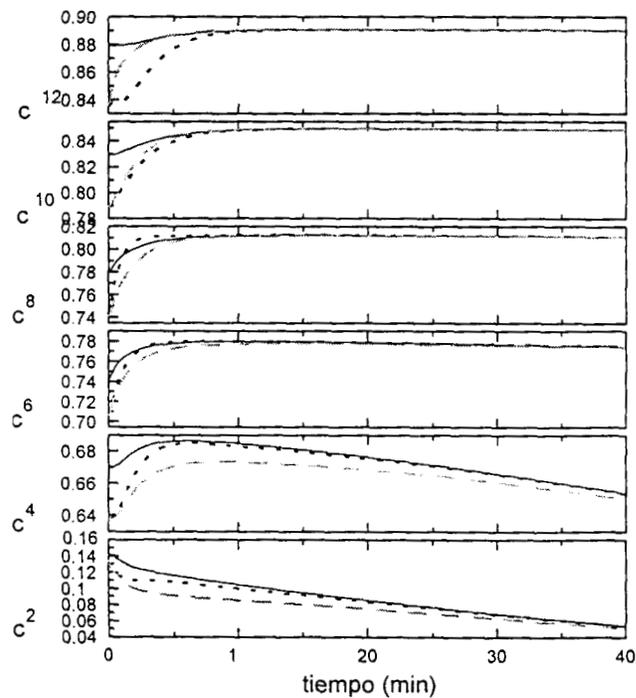


Figura 4.3 Verificación de los resultados de la DVS para dos salidas
 — Planta, - - - γ pequeña, - · - γ grande.

En la Figura 4.3 se observa que efectivamente cuando una salida o juego de salidas con número de condición grande el tiempo de convergencia del estimador se incrementa, obteniéndose un desempeño muy pobre.

4.6 DESEMPEÑO DEL ESTIMADOR

La respuesta dinámica del estimador se obtuvo mediante simulaciones numéricas para los casos expuestos, considerando las siguientes condiciones iniciales (x_0) estables

$M_B = x_1 = 600$ ml	$C_B = x_{13} = 0.0107$
$M_1 = x_2 = 1.270$	$C_1 = x_{14} = 0.1424$
$M_2 = x_3 = 1.270$	$C_2 = x_{15} = 0.5239$
$M_3 = x_4 = 1.270$	$C_3 = x_{16} = 0.6706$
$M_4 = x_5 = 1.270$	$C_4 = x_{17} = 0.7218$
$M_5 = x_6 = 1.270$	$C_5 = x_{18} = 0.7425$
$M_m = x_7 = 0.4907$	$C_m = x_{19} = 0.7514$
$M_6 = x_8 = 0.8896$	$C_6 = x_{20} = 0.7798$
$M_7 = x_9 = 0.8896$	$C_7 = x_{21} = 0.8052$
$M_8 = x_{10} = 0.8896$	$C_8 = x_{22} = 0.8294$
$M_9 = x_{11} = 0.8896$	$C_9 = x_{23} = 0.8536$
$M_{10} = x_{12} = 0.8896$	$C_{10} = x_{24} = 0.8792$

para las cuales existe una separación de alta pureza del sistema etanol-agua. Las condiciones de operación bajo las cuales se realizaron las simulaciones son: composición de alimentación $z_f = 0.75$, flujo de vapor desde el evaporador, $V = 3.04$ gr-mol/min; Relación de reflujo, $RR = 1.3$, temperatura de alimentación al punto de Burbuja $T_f = 353^\circ\text{K}$, y los parámetros para la sintonización de las ganancias del estimador fueron $\xi = 0.97$, $\tau_c = 7$ min.

Caso I: Índice de Observabilidad Completo

A).- Una medición

Un punto de medición o de monitoreo en algún punto del proceso es el número mínimo de salidas del proceso necesarias para la reconstrucción de estados, vía un sistema dinámico

auxiliar como el estimador de estados, pero implica identificar la zona de máxima sensibilidad.

Para analizar la respuesta dinámica del estimador de estados se realizaron perturbaciones en ciertas condiciones de operación del proceso, iniciando el estimador con un modelo perfecto y con condiciones iniciales del 5% fuera de las condiciones iniciales de arranque del proceso. La magnitud de la perturbación en el proceso fue de $\pm 5\%$ del valor nominal de la variable perturbada.

En las figuras 4.4 a 4.6 muestran la respuesta dinámica del estimador bajo perturbaciones en la composición de alimentación, relación de reflujo y flujo de vapor alimentado a la columna, obteniéndose los siguientes resultados.

A.1) Variación en la composición de alimentación

Se aplicaron variaciones tipo escalón en la composición de alimentación para analizar la respuesta del estimador, inicialmente de 0.75 a 0.7875 y posteriormente de 0.75 a 0.7125

En la Figura 4.4a se muestra en forma representativa la relación que guarda la ubicación de cada plato en la columna con los resultados obtenidos en los mismos por simulación y que se presentarán en ese orden para el resto del capítulo.

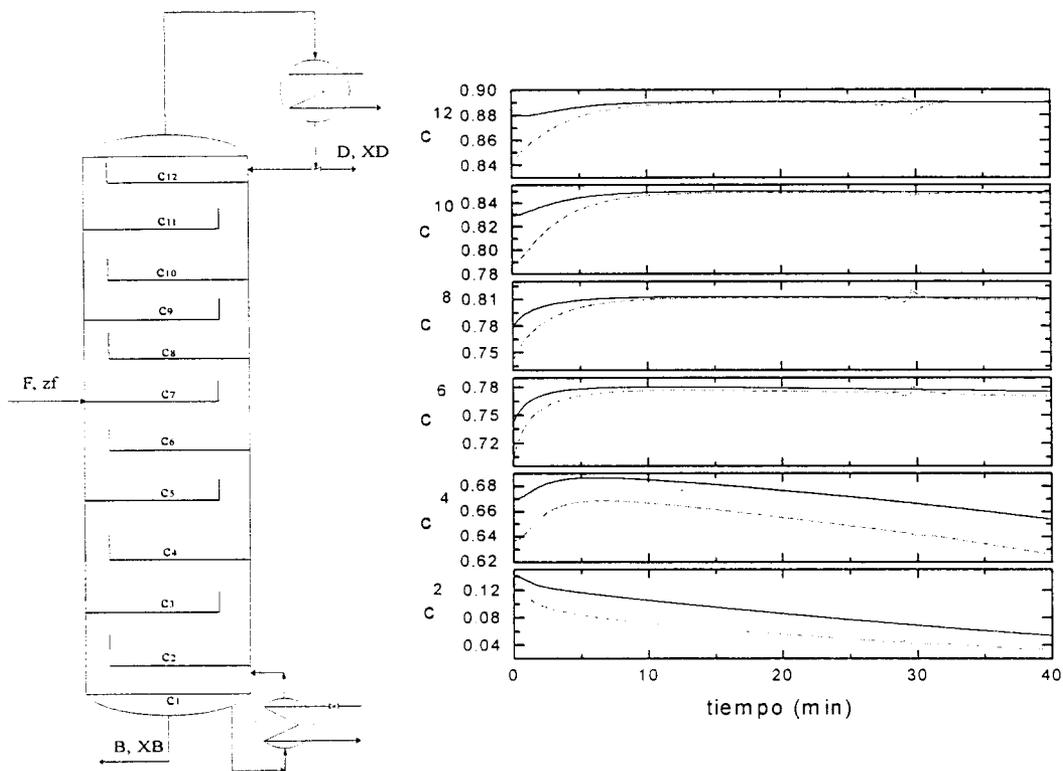


Figura 4.4a: Evolución de las composiciones reconstruidas ante un cambio en la composición de alimentación.

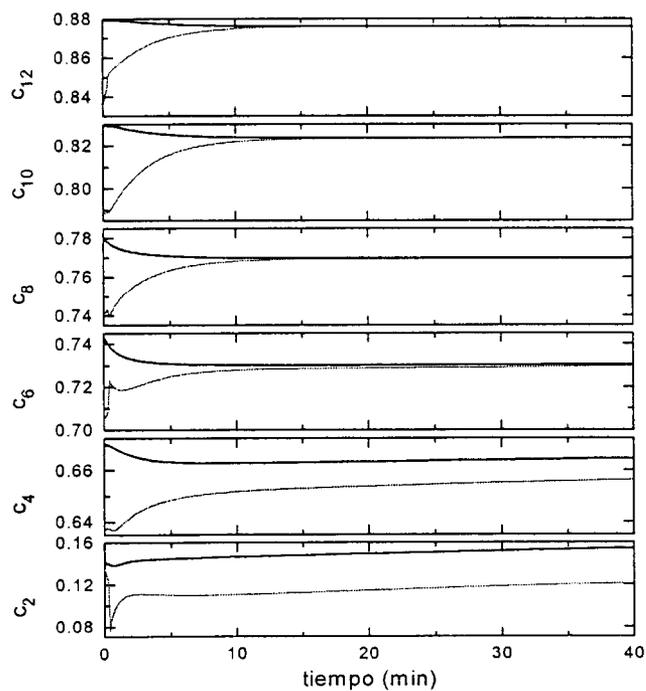


Figura 4.4b: Evolución de las composiciones reconstruidas ante un cambio en la composición de alimentación, — Planta; - - - Estimador.

En ambos casos, la rapidez de estimación es más rápida en la zona de enriquecimiento comparada con la de agotamiento, limitada desde luego por la presencia del azeótropo. Cuando se aumentó la composición de alimentación (Fig. 4.4a) y teniendo el punto de medición en la zona de máxima sensibilidad (plato 3), el tiempo de convergencia en la sección de enriquecimiento es de 10 min.; mientras, la sección de agotamiento con dinámica más lenta el tiempo se incrementa, pero asintóticamente el valor estimado converge al estado real de la planta.

A.2) Variación en la relación de reflujo

La relación de reflujo es una de las variables de control en el proceso de destilación en la configuración LV (Stephanopoulos, 1982), e implícitamente, conocer el efecto de tal variación es indispensable en la estimación de estados como etapa previa para el control del proceso. La respuesta dinámica del estimador (Fig. 4.5a,b) se presentan cuando se realiza una perturbación en la relación de reflujo de $\pm 5\%$ del valor nominal, permaneciendo el resto de las variables constantes. Un aumento o disminución en la relación de reflujo tiene un efecto que se propaga desde el domo de la columna hasta el fondo de la misma, y que el mismo sistema puede amortiguar dependiendo de la magnitud de la perturbación.

Las Figuras 4.5a,b muestran una estimación de composiciones ante una perturbación en la relación de reflujo (tipo escalón), obteniéndose que al usar un sensor de temperatura en la zona de alta transferencia de masa permite una estimación aceptable en la zona de mínima transferencia de masa (cerca del punto azeotrópico), sin embargo, aunque la medición se localiza en la zona de alta sensibilidad, es necesario tener una estimación más rápida, pero limitada por la dinámica natural del proceso, teniendo un retraso en la respuesta en la zona que es más lenta.

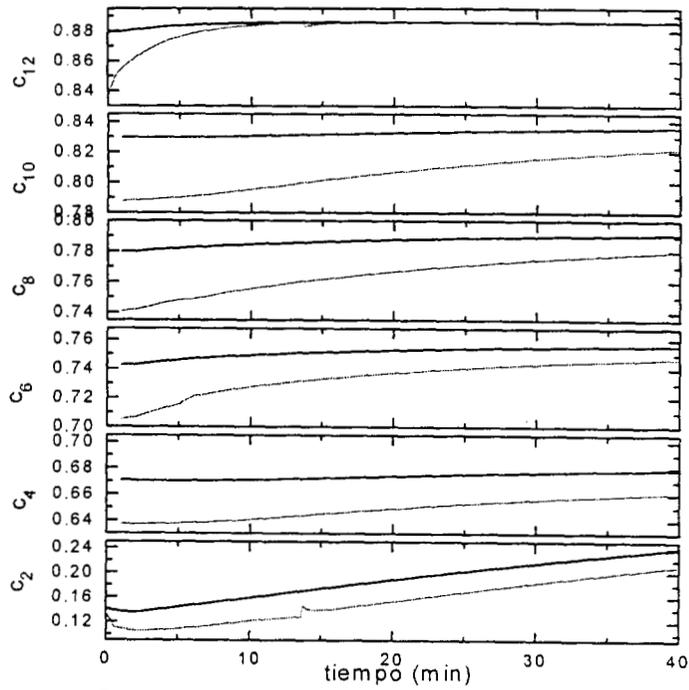


Figura 4.5a: Evolución de las composiciones reconstruidas ante un cambio en la relación de reflujo (+5% de su valor nominal); — Planta; - - - Estimador.

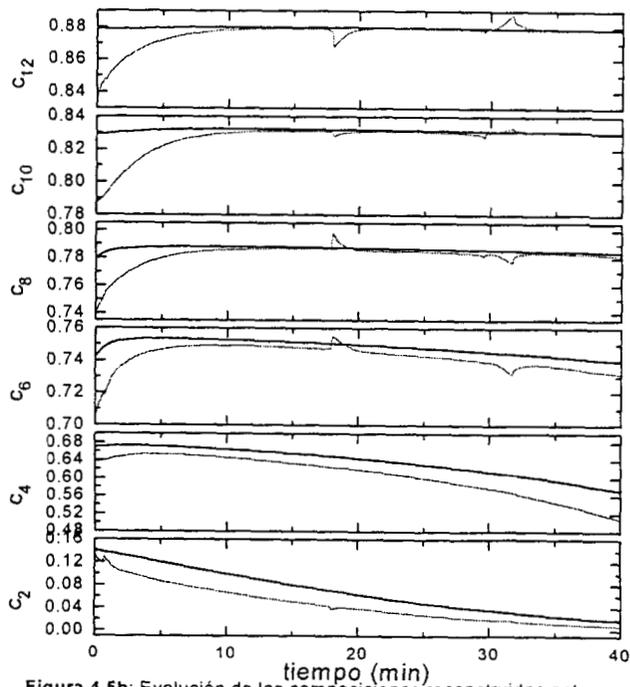


Figura 4.5b: Evolución de las composiciones reconstruidas ante una perturbación en la relación de reflujo (-5% del valor nominal) — Planta, - - - Estimador.

A.3) Variación en el flujo de vapor suministrado

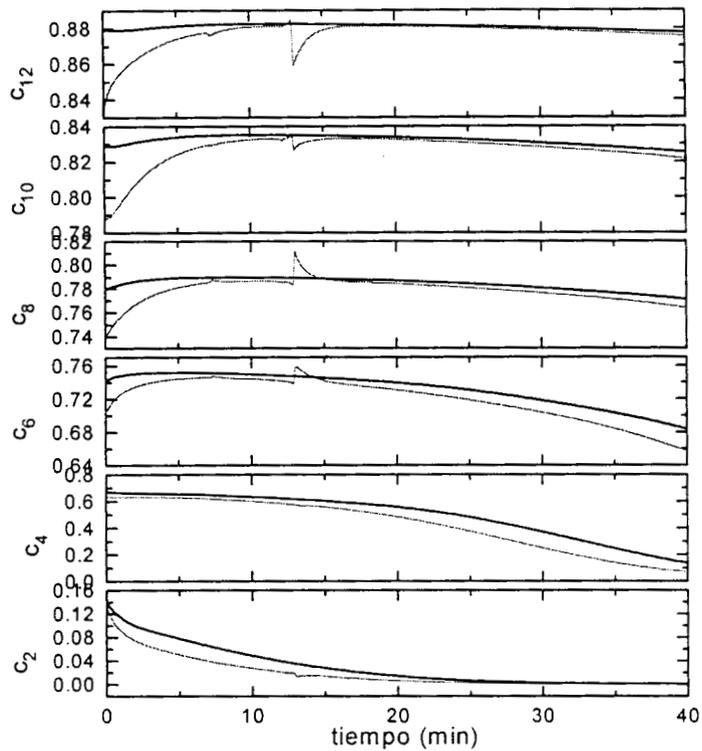


Figura 4.6a: Evolución de las composiciones ante una perturbación en el flujo de vapor suministrado (+5% de su valor nominal)
— Planta; - - - Estimador.

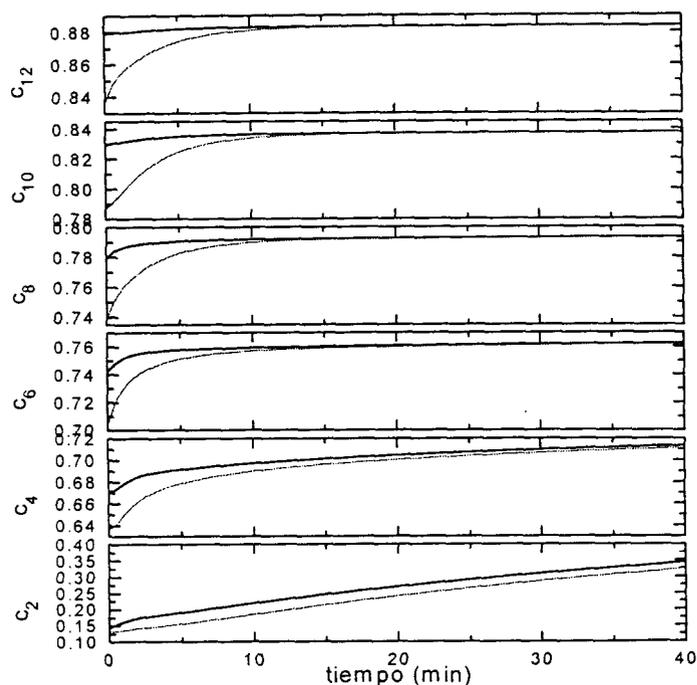


Figura 4.6b: Comportamiento dinámico de las composiciones ante una perturbación en el flujo de vapor suministrado
 — Planta; — Estimador.

Para el sistema azeotrópico etanol-agua a presión constante, la temperatura en los extremos es un indicador exacto de la composición en dichos puntos, sin embargo, como puede verse de la Figura 4.3, la variación de temperatura es muy pequeña en los extremos de la columna y resulta difícil distinguir del ruido de medición. Además, las temperaturas más alejadas de los extremos son preferidas (Nisenfeld y Seeman, 1981). Con esta precaución, el uso de una *sola* temperatura como indicativo de la composición de producto generalmente no es confiable por lo siguiente (Mejdell y Skogestad, 1991):

- a).- Aún para mezclas binarias, la relación entre una temperatura y una composición de producto depende de la composición de alimentación y también de la composición en el otro extremo de la columna.
- b).- Para mezclas multicomponentes, la presencia de componentes no-clave implica que en los extremos de la columna, la temperatura no es un indicador exacto de la composición. El efecto de variaciones en componentes no clave es más grande cerca de la alimentación y en los extremos de la columna.

c).- Cuando existen pulsos en el flujo o un mezclado inadecuado en los platos pueden causar variaciones de temperatura, las cuales tiene un pico a frecuencias intermedias y son más grandes en alguna sección de la columna a gradientes mayores de temperatura.

B) Múltiples temperaturas

Una solución a los problemas que se presentan al usar un punto de medición es, usar múltiples puntos de mediciones de temperatura para inferir las composiciones dentro de la columna y de los productos (x_D y x_B).

El uso de dos puntos de monitoréo en temperatura e índice de observabilidad completo permite obtener una respuesta de los estados estimados tan rápida como sea posible, debido a la mayor información que podría obtenerse de los mismos. En principio, una elección heurística podría realizarse para colocar los sensores de temperatura, los cuales podrían establecerse en los extremos de la columna como puntos importantes en el control de este proceso. Sin embargo, como se observó en la Figura 4.3, los extremos presentan variaciones mínimas en composición, lo cual dificulta una correcta lectura de temperatura, o equipos de mayor precisión son requeridos.

En la sección 4.4 la DVS permitió determinar un juego de temperaturas posibles para la estimación de estados (ver Tabla 4.2). El par de temperaturas es $y_1=h_1(x)$ y $y_2=h_2(x)$, las cuales corresponden, una a cada sección de la columna. Asimismo, la DVS permitió deshacerse de combinaciones de salidas del proceso adyacentes en una y otra sección de la columna.

En las Figuras 4.7 y 4.9 presentan los resultados de la respuesta dinámica de las composiciones con dos mediciones de temperatura en línea e índice de observabilidad igual a doce ($\kappa_1=\kappa_2=6$). Los siguientes parámetros en el cálculo de las ganancias fueron usados: $\xi_1=0.97$ y $\tau_1=6$ min. para la primera medición; y $\xi_1=0.97$, $\tau_1=7$ min. para la segunda medición.

El análisis dinámico del estimador se realizó con las mismas perturbaciones que las efectuadas con una sola medición con el fin de analizar el desempeño al usar mayor información para la reconstrucción de estados.

B.1) Perturbación en la Composición de Alimentación

Las figuras 4.7a, b presentan la respuesta dinámica de las composiciones ante una perturbación en la composición de alimentación tipo escalón. La estimación de composiciones se lleva a cabo con dos entradas forzantes (salidas del proceso) en el esquema de estimación, seleccionadas por la técnica de descomposición en valores singulares (Tabla 4.2).

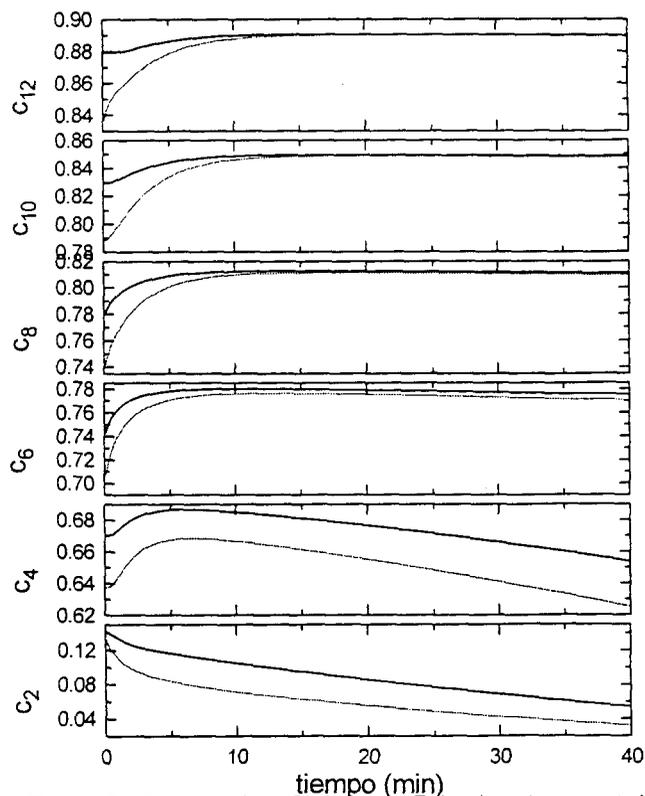


Figura 4.7a: Comportamiento Dinámico del Estimador ante una perturbación en la composición de Alimentación, de $z_i=0.75$ a 0.7875 ,
 — Planta; - - - Estimador.

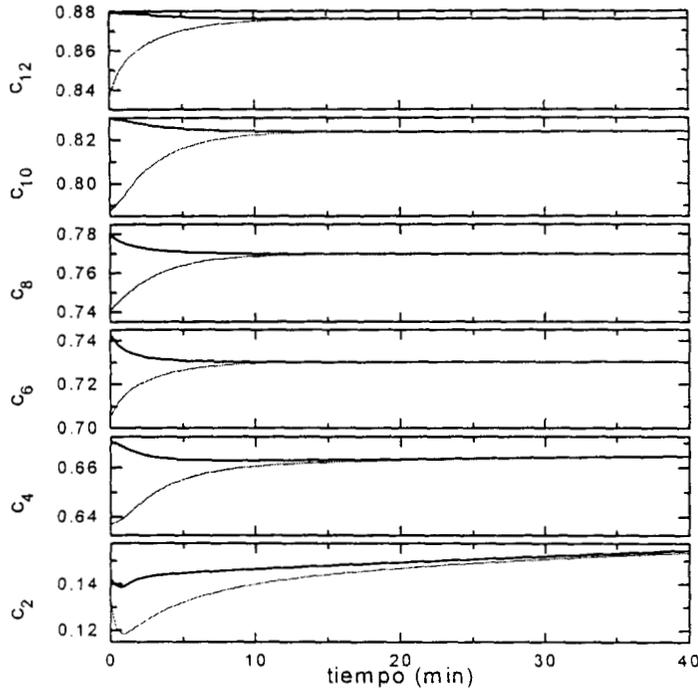


Figura 4.7b: Evolución de las composiciones estimadas ante una perturbación en la composición de alimentación, de $z_i=0.75$ a 0.7125
 — Planta; - - - Estimador

En estas gráficas se puede observar que ante perturbaciones en la composición de alimentación, el uso de dos mediciones permite una reconstrucción asintótica de las composiciones, teniendo un tiempo de convergencia de 10 min. para la sección de enriquecimiento, mientras que la sección de agotamiento con dinámica más lenta el tiempo máximo con una composición estimada aceptable es de 15 min.

B.2) Perturbación en la relación de Reflujo

Las Figuras 4.8a,b muestran una estimación de composiciones ante una perturbación en la relación de reflujo, obteniéndose un mejor desempeño que al usar sólo un sensor de temperatura en la zona de alta transferencia de masa (Figs 4.5a,b), es posible minimizar el error por integración numérica que se presentaba en el caso de una medición; también es apreciable que el tiempo de convergencia al estado real de la planta se minimiza, aun para las zona con dinámica más lenta.

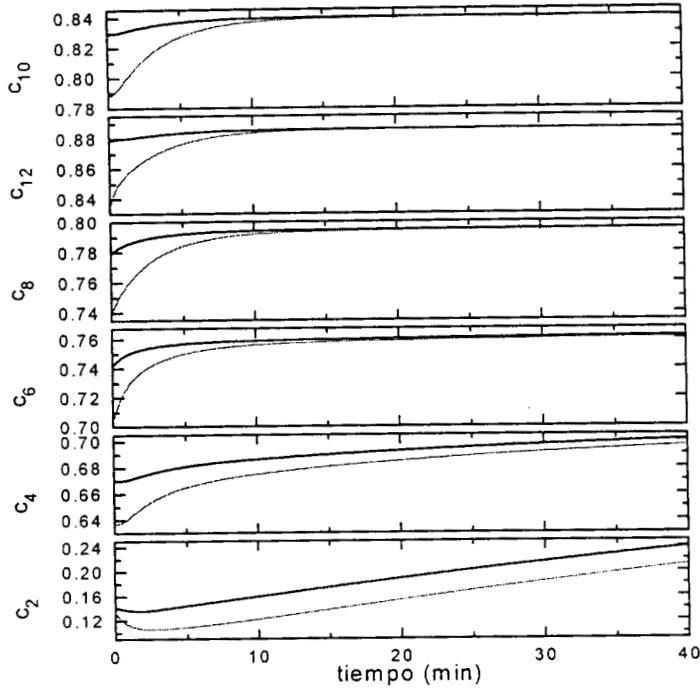


Figura 4.8a: Evolución de las composiciones estimadas ante una perturbación en la relación de reflujo de $rr=1.3$ a 1.365 .
 — Planta; — Estimador

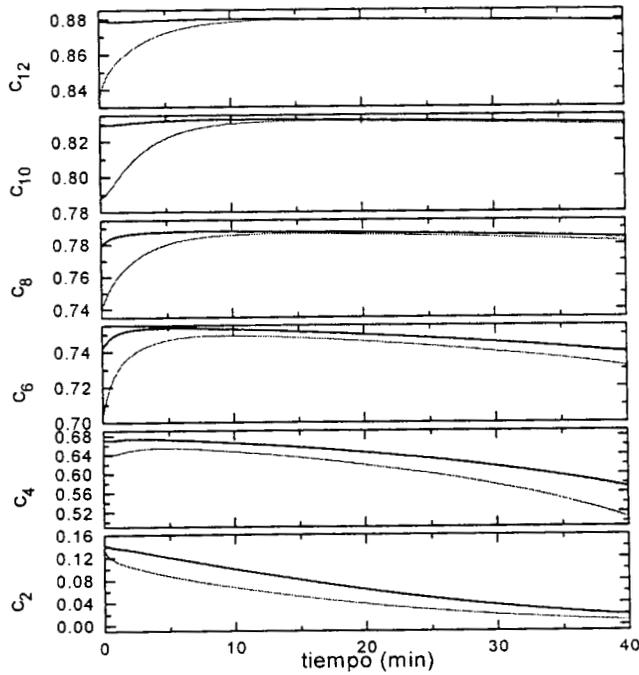


Figura 4.8b: Evolución de las composiciones estimadas ante una perturbación en la relación de reflujo de $rr= 1.3$ a 1.235 .
 — Planta; — Estimador.

B.3) Perturbación en el flujo de Vapor

Las Figuras 4.9a,b no presentan notable mejoría con respecto a las Figs 4.6a,b que usan un solo punto de medición para la estimación de estados, pero las composiciones estimadas que inicialmente presentaban irregularidades por problemas de integración ahora presentan una convergencia suave al usar dos entradas forzantes en el estimador, lo que se ve reflejado en un mejor desempeño y robustez del estimador.

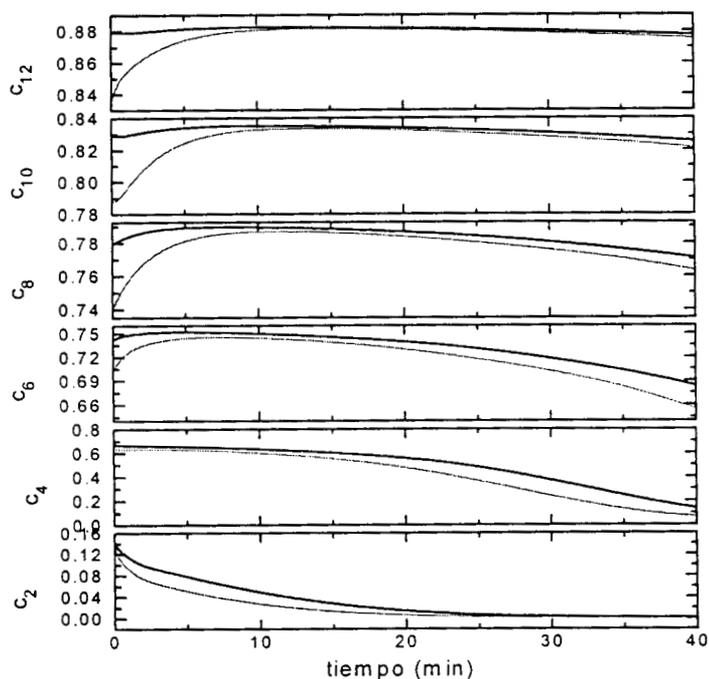


Figura 4.9a: Evolución de las composiciones estimadas ante perturbaciones en el flujo de vapor suministrado, de $V_a = 3.04$ a 3.192 mol/min
— Planta; - - - Estimador

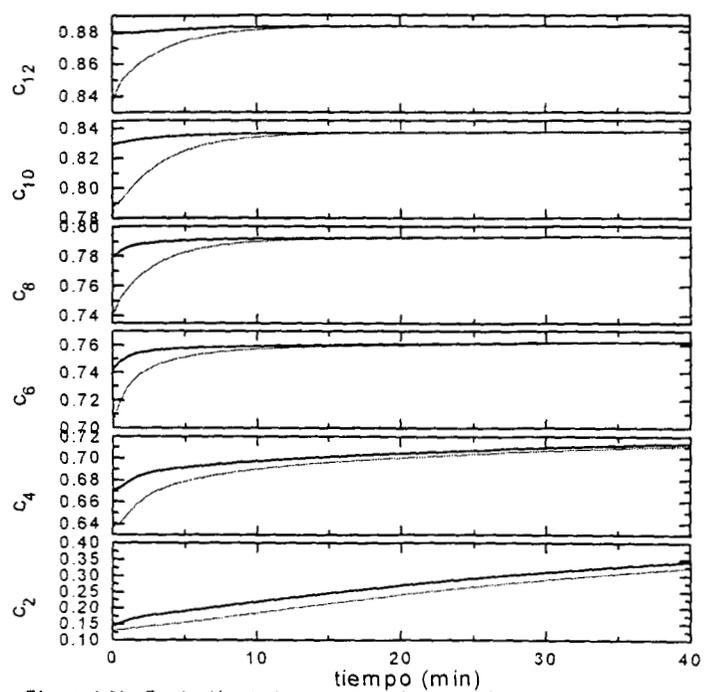


Figura 4.9b: Evolución de las composiciones estimadas ante perturbaciones en el flujo de vapor suministrado, de $V_a = 3.04$ a 2.88 mol/min
— Planta; - - - Estimador.

CASO II: Reducción del Índice de Observabilidad

Se aplicaran algunos criterios de desempeño aplicados en el diseño de sistema de control (Stephanopoulos, 1984) que pueden usarse perfectamente en el diseño de estimadores de estados con diferentes índices de observabilidad.

Los criterios de desempeño en el *diseño* de estimadores, entre otros pueden ser:

Retornar el estado estimado al real tan pronto como sea posible.

Mantener una desviación máxima tan pequeña como sea posible del estimado

Retornar al nivel deseado de operación y permanecer cerca de éste en el tiempo más corto cuando se aplican en sistemas de control

A) Una medición

Tabla 4.3 Descomposición en Valores Singulares de la matriz de detectabilidad usando la salida ($h_1(x_{16})$) con menor número de condición.

	$\kappa=12$	$\kappa=11$	$\kappa=10$	$\kappa=9$	$\kappa=8$	$\kappa=7$	$\kappa=6$	$\kappa=5$	$\kappa=4$	$\kappa=3$	$\kappa=2$	$\kappa=1$
	1.0e+010	1.0e+009	1.0e+008	1.0e+007	1.0e+006	1.0e+005	1.0e+005	1.0e+004	1.0e+003	1.0e+002		
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
σ	9.213984	8.661922	8.277860	8.145359	8.403869	9.301484	1.111551	1.413037	8.850968	2.655798	41.88091	8.7
σ	8.4E-13	1.968E-11	4.3135E-10	6.3095E-10	1.6057E-08	6.9683E-07	1.6716E-07	2.4416E-09	2.6242E-08	0.002232	0.287101	1
γ	1.0969E+13	4.4014E+11	1.9191E+10	1.291E+10	5233681	1334823	6649434	5787294	3372832	1189.388	145.8747	8.7

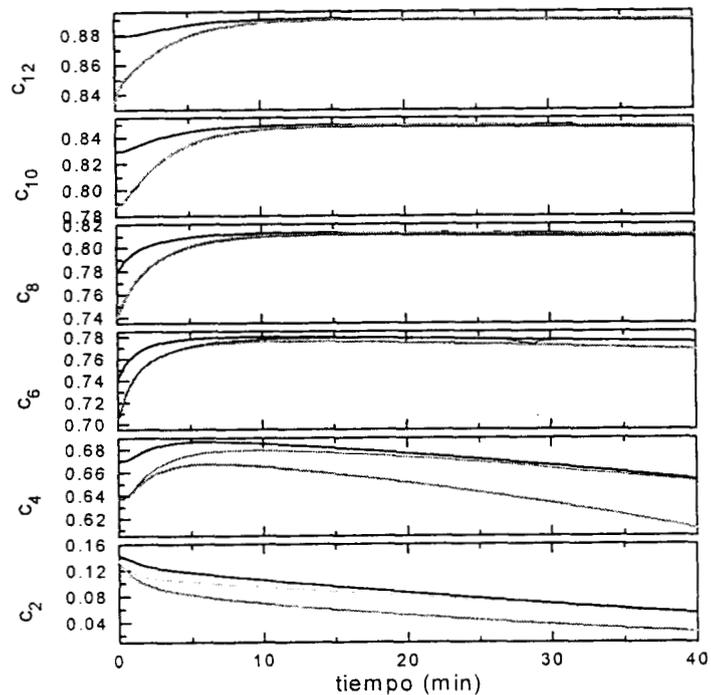


Figura 4.10: Estimación de las composiciones al perturbar la composición de alimentación de $z_1=0.75$ a 0.7875

— Planta — $\kappa=6$ ··· $\kappa=1$

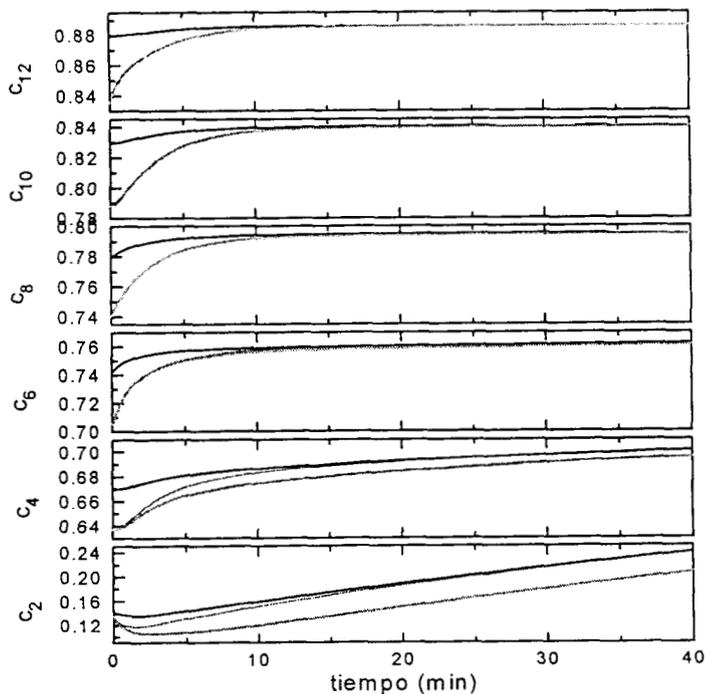


Figura 4.11: Comportamiento Dinámico de las composiciones reconstruidas ante un cambio en la relación de reflujo de $rr=1.3$ a 1.365 ,

— Planta: — $\kappa=6$: ··· $\kappa=1$.

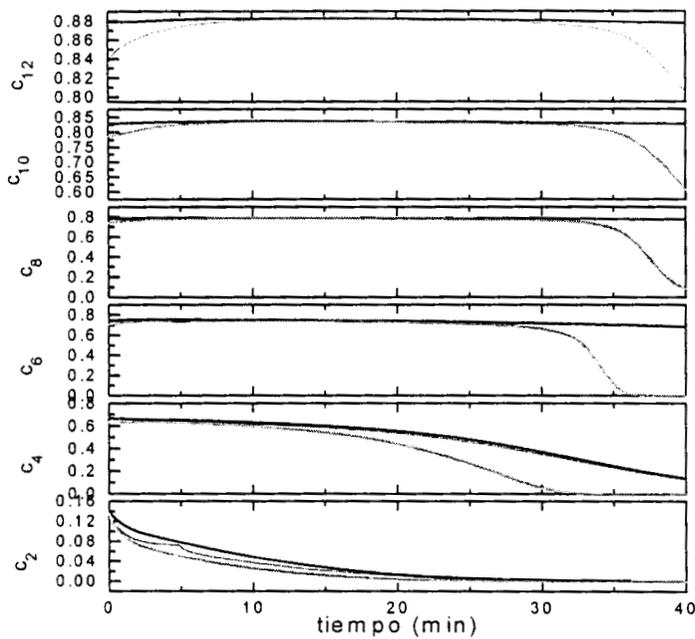


Figura 4.12: Evolución de las composiciones Estimadas ante un cambio en el flujo de vapor suministrado de $V_a=3.04$ a 3.192 mol/min.
 — Planta; $\kappa=6$; - - - $\kappa=1$

B) Dos mediciones

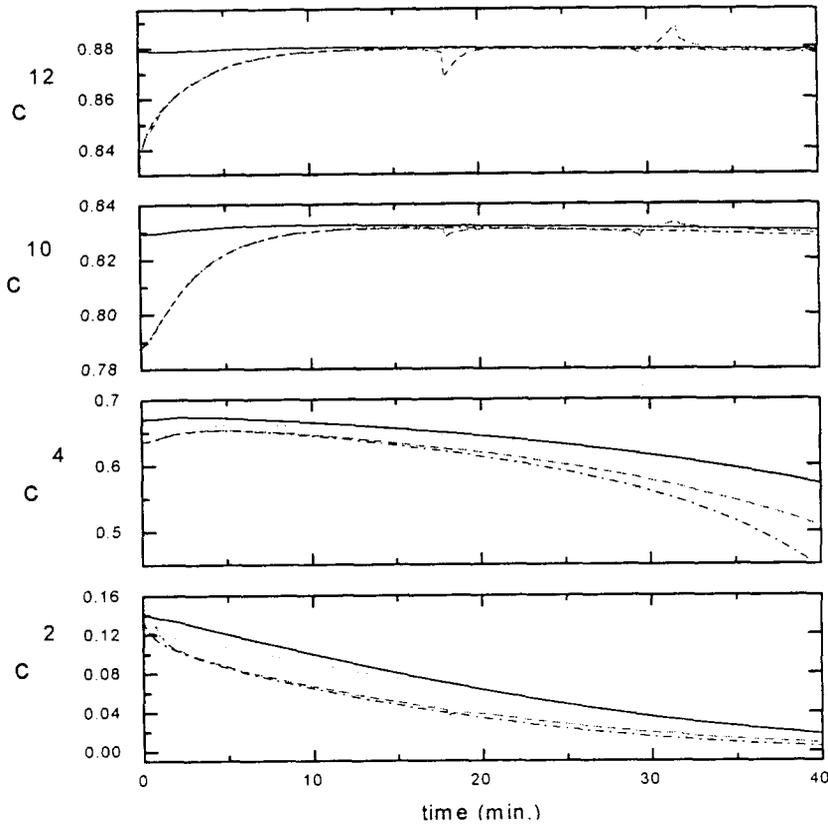


Figure 4.13 Respuesta del observador cuando una temperatura es medida a cada intervalo de tiempo, con tres diferentes índices de observabilidad

— Plant; - - - - k=12; k=6; ····· k=1.

C) Tres mediciones

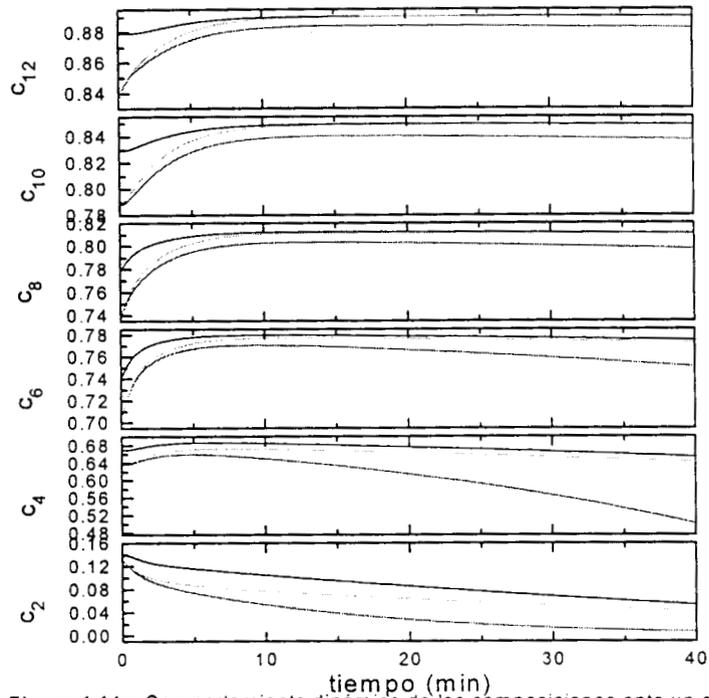


Figura 4.14a: Comportamiento dinámico de las composiciones ante un cambio en la composición de alimentación, $z_f=0.75$ a 0.785 , usando tres puntos de medición. — % Planta; - - - $\kappa=6$ ($\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$); ···· $\kappa=3$ ($\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=1$).

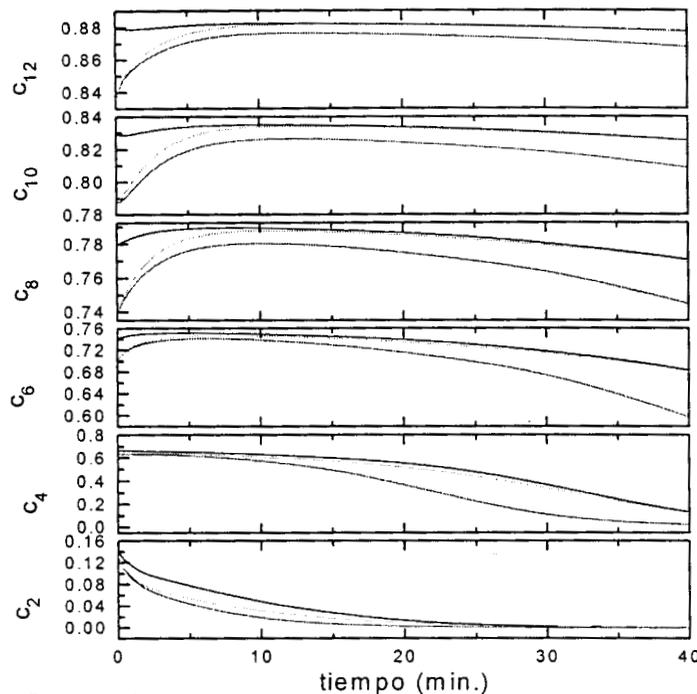


Figura 4.14b: Desempeño del estimador al usar tres puntos de medición y diferentes índices de observabilidad, ante un cambio en el flujo de vapor, $V_a=3.04$ a 3.192 . — Planta; $\kappa=6(\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2)$; - · - · $\kappa=3(\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=1)$.

4.7 SUMARIO

En general, el diseño del estimador presenta un desempeño aceptable ante las perturbaciones aplicadas al sistema a pesar de usar una sola medición.

Con respecto a las mediciones de temperatura, si sólo se toma una, seleccionada por DVS se tendrán buenas predicciones en todos los estados del sistema y preferentemente en la sección de la columna donde se sitúe la medición, ya sea en la sección de enriquecimiento o agotamiento, pero siempre limitando las predicciones por la naturaleza física que impone el sistema azeotrópico y la dinámica natural del proceso.

El desempeño y robustez en la estimación de los estados variando los índices de observabilidad para una, dos y tres mediciones muestra que es posible reducir el espacio de observación, pero éste no es necesario reducirlo al máximo, ya que se obtienen estados que divergen, aun usando tres mediciones de temperatura en el estimador.

El uso de tres mediciones de temperatura (plato 3, plato de alimentación y plato 8) permite lograr una estimación perfecta en las composiciones, con tiempos de convergencia aceptables aun para el caso de reducción de índices de observabilidad, sin llegar al mínimo espacio de observación de la salida.

CAPÍTULO 5

ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN UNA COLUMNA CONTROLADA

Para extender la investigación previa, se propone estimar los estados en la columna binaria azeotrópica controlada con un esquema lineal. El esquema de control líquido-vapor (LV) se propuso con la intención de mantener productos de alta pureza en una columna de destilación, mediante una retroalimentación de mediciones. Si bien, no significa que la configuración LV es la preferida para el control de este proceso, se eligió porque L y V tienen efecto directo en las composiciones extremas y su efecto es además débilmente dependiente en la sintonización de los lazos de nivel.

En este capítulo se presenta el estudio de un esquema de control con configuración LV para una columna de destilación binaria azeotrópica. Los controladores diseñados están basados en una aproximación lineal del modelo de la planta, presentando un desempeño aceptable ante perturbaciones conocidas y estimados en las señales de las salidas del proceso.

5.1 INTRODUCCIÓN

Si bien, la teoría de control lineal es un campo bien establecido, la teoría de control de sistemas no lineales sigue teniendo avances importantes, estos han sido por ejemplo, la caracterización de sistemas linealizables, lo cual significa, que puedan linealizarse por medio de un cambio de coordenadas y/o una retroalimentación de estados (Krener, 1973; Brockett, 1978; Meyer y Cicolani, 1980; Hunt y col., 1983; Isidori, 1989). Las transformaciones de sistemas no lineales en este sentido se basan en la cancelación de las no linealidades, asumiendo un conocimiento perfecto de las mismas en el sistema.

Aunque el uso de herramientas geométricas se realizaba para el diseño de sistemas de control de vuelos automáticos en aeronaves, el tratamiento de problemas de control con técnicas geométricas no lineales se ha extendido a una diversidad de sistemas de control en procesos químicos: control con retroalimentación de estados (Hoo y Kantor, 1985; Kravaris y Chung, 1987; Alvarez, 1996); estimación no lineal de estados (Kantor, 1989; Alvarez, 1997); control con retroalimentación de salidas (Hoo y Kantor, 1985; Kravaris y Chung, 1987; Alvarez, 1996), y que antes eran sólo para sistemas de control de la navegación.

Recientemente, en ingeniería química se han diseñado controladores geométricos con retroalimentación de salidas, combinando teóricamente controladores con retroalimentación de estados con estimadores de estados, y consecuentemente los controladores correspondientes han adolecido de criterios de estabilidad a lazo cerrado y de procedimientos sistemáticos en el diseño y sintonización. Sin embargo, un detector candidato a lazo cerrado fue construido por Alvarez (1996) para estudiar la estabilidad de la interconexión resultante de una planta y un controlador. La aplicación de su estudio se llevó a cabo en un reactor de homopolimerización de radicales libres, a lazo abierto e inestable.

La dinámica a lazo abierto del proceso de destilación ha sido estudiada en una serie de investigaciones (Davidson, 1956; Skogestad y Morari, 1987a, Skogestad y Morari, 1988; Fernández, 1996), consistiendo de ecuaciones de balance en cada plato para las

composiciones y los acumulados, junto con ecuaciones algebraicas con fuertes no linealidades en las relaciones termodinámicas. Aún para el caso binario-ideal, la destilación es típicamente un proceso no lineal y numéricamente un sistema mal condicionado, especialmente si las purezas de producto son altas (Haggblom y Lehtinen, 1995), entre otros aspectos de las no linealidades son: volatilidad relativa, efectos en la calidad del producto, magnitud y tipo de perturbación (Fuentes y Luyben, 1983) y, múltiples estados estacionarios (Jacobsen y Skogestad, 1995). Además, una planta mal condicionada está caracterizada por una fuerte direccionalidad, esto significa que la ganancia de la planta depende fuertemente de la dirección de la entrada, esto es, la interacción entre las variables de control. Aunque ésta es una propiedad de sistemas lineales, el comportamiento es parecido al de un sistema no lineal.

A pesar de su importancia en la industria de los procesos, y que en muchos casos representa la etapa final, los esquemas de control de las columnas adolecen de un procedimiento sistemático que tolere errores de modelado, que el esquema de sintonización tome en cuenta el problema de robustez, y que el esquema de sintonización que se provee permita visualizar, implementar y verificar como los esquemas de control lineal convencional de una entrada-una salida.

Dado el interés que se ha venido desarrollando en cuanto a la solución del problema de control en este tipo de sistemas (por la direccionalidad y por lo interactivos). Nuestro interés principal es estudiar la existencia de solución al problema de estimación de estados en una columna controlada y su naturaleza que esto implica. Entendiéndose como el problema de estimación en control: (a) la elección de un conjunto de entradas-salidas disponibles y; (b) la interconexión (arreglo entrada-salida) entre las variables, originando un problema de encontrar la mejor alternativa de control para obtener: robustez, estabilidad y tiempos razonables en el control de las variables.

El principio de separación (Kailath, 1980) garantiza la estabilidad de una planta lineal a lazo cerrado por combinar un controlador con un estimador de estados (Wonham,

1985), pero no es aplicable para el caso de plantas no lineales, incrementando el estudio de la estabilidad como un tópico del control y en algunos casos específicos a procesos como polimerización (Alvarez, 1996) y destilación.

Con respecto al esquema de control, en este estudio se resuelve el problema de regular las composiciones en los extremos de la columna con retroalimentación de mediciones (en este caso, temperaturas), controlando los flujos de vapor y de líquido mediante el conocimiento en principio de todos los estados considerados en el proceso. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos no se conocen los estados en tiempo real, lo que hace necesario auxiliarse de herramientas adicionales como estimadores de estados, adquiriendo mayor interés al tener sólo mediciones alternativas, donde la planta pueda operar en un estado nominal \bar{x} , con entrada \bar{u} y salida \bar{y} nominales. Específicamente, $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, $\bar{y} = h(\bar{x})$, complicando así la estabilidad del sistema.

5.2 CONCEPTOS PRELIMINARES

El problema de control con retroalimentación de estados se puede abordar con la técnica del control no lineal, que se basa en geometría diferencial (Isidori, 1989). La metodología consiste principalmente en obtener un sistema lineal equivalente. Una vez obtenido el sistema equivalente, es posible aplicar herramientas de sistemas lineales para el diseño de los controladores como pueden ser: criterios de diseño, criterios de estabilidad, sintonización, etc. La linealización total o parcial de un sistema no lineal se logra mediante una transformación de estados y/o entradas de control (Krener, 1973; Brockett, 1978; Meyer y Cicolani, 1980; Hunt y col., 1983; Isidori, 1989), logrando en muchos casos un sistema lineal equivalente controlable y observable (en el sentido de teoría de control). Este sistema es exacto en comparación con una aproximación lineal en series de Taylor (linealización local).

Para desarrollar el esquema de control se considera un sistema no lineal de la forma:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = f[x, u(t), d(t)]; & \dim x = n = 24 \\ y = h[x]; \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $x \in X \subset \mathcal{R}^n$, $y \in Y \subset \mathcal{R}^m$, $u \in U \subset \mathcal{R}^m$. f y h son campos vectoriales suaves (infinitamente diferenciables) en el conjunto $X \times U$, x son los estados del sistema, y son las salidas, u son las entradas de control y d son las entradas exógenas conocidas, siendo continuas en el tiempo.

5.2.1 Inversa Dinámica

Definición 1. Se dice que un sistema es invertible en el sentido de Hirschorn (1979), si para cada salida $y(t)$ existe una única entrada $u(t)$ que aplicada al sistema da como salida $y(t)$; y además no depende de la extensión dinámica de la variable de control ($u, \dot{u}, \dots, u^{(n)}$).

La invertibilidad de sistemas no lineales multivariables en el sentido de Hirschorn consiste esencialmente en un algoritmo de construir una secuencia de sistemas, que se obtienen derivando las salidas $y(t)$ con respecto al tiempo t . Las derivadas deben efectuarse hasta que el vector de entradas $u(t)$ aparezca explícitamente, permitiendo resolver $u(t)$ en términos de x y y .

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k_1)} \\ y_2^{(k_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(k_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{k_1} h_1(x, d) \\ L_f^{k_2} h_2(x, d) \\ \vdots \\ L_f^{k_m} h_m(x, d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{k_1-1} h_1(x, d) & L_{g_2} L_f^{k_1-1} h_1(x, d) \cdots L_{g_m} L_f^{k_1-1} h_1(x, d) \\ L_{g_1} L_f^{k_2-1} h_2(x, d) & L_{g_2} L_f^{k_2-1} h_2(x, d) \cdots L_{g_m} L_f^{k_2-1} h_2(x, d) \\ \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{k_m-1} h_m(x, d) & L_{g_2} L_f^{k_m-1} h_m(x, d) \cdots L_{g_m} L_f^{k_m-1} h_m(x, d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f h_i &= \langle dh_i, f \rangle = \frac{\partial h_i}{\partial x} f \\ \mathcal{L}_f h_i &= L_f h_i + h_{id} \dot{d} = h_{ix} f + h_{id} \dot{d} \\ \mathcal{L}_f^0 h_i &= h_i \\ \mathcal{L}_f^{i+1} h_i &= \mathcal{L}_f (\mathcal{L}_f^i h_i) \\ h_{ix} &= \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_n} \right], h_{id} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial d_1} \quad \frac{\partial h_i}{\partial d_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial h_i}{\partial d_n} \right] \end{aligned}$$

κ_i es el grado relativo de la i -ésima salida. Así, el grado relativo κ_i es exactamente igual al número de veces que es necesario derivar la salida $y_i(t)$ con respecto al tiempo para obtener el valor $u_i(t)$ de la entrada apareciendo explícitamente, y $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_m$ es el grado relativo total del sistema.

La expresión;

$$v = b(x, d) + A(x, d)u \quad (5.3)$$

representa la forma compacta del sistema (5.2) y tiene solución para las entradas de control ($u(t)$).

$$u = A^{-1}(x, d)[v - b(x, d)] \quad (5.3a)$$

si la matriz de coeficientes del vector de entradas A , llamada *matriz de desacoplamiento*, es no singular.

5.2.2 Linealización Entrada-Salida

Definición 2. La planta (5.1) es linealizable entrada-salida si existe una retroalimentación de estados con prealimentación de perturbaciones (un nuevo control v y una nueva perturbación w);

$$u = \mu(x, w, v) \quad (5.4)$$

de tal forma que la planta a lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f[x, \mu(x, w, v), d(t)] \\ y &= h(x, d)\end{aligned}\quad (5.5)$$

adquiere la siguiente dinámica entrada-salida

$$y_i^{(\kappa_i)} = v_i \quad (5.6)$$

(κ_i es el grado relativo de la i -ésima salida, obtenida a partir de la inversa dinámica en el sentido de Hirschorn).

Teorema 1 La planta (5.1) es linealizable entrada-salida si y solo si:

i) $L_{g_i} L_f^{\kappa_i - 1} h = 0, \quad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq m$

ii) Existen $n - \kappa$ campos escalares $\phi_{\kappa+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ tales que el mapeo

$$\phi(x) = [h_1(x), \dots, L_f^{\kappa_1 - 1} h_1(x); \dots; h_m(x), \dots, L_f^{\kappa_m - 1} h_m(x); \phi_{\kappa+1}(x), \dots, \phi_n(x)]^T$$

es invertible para x .

iii) $\det[L_{g_i} L_f^{\kappa_i - 1} h] \neq 0$

5.3 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE CONTROL CON RETROALIMENTACION DE ESTADOS

Para plantear una solución al problema de control con retroalimentación de estados es necesario considerar en principio que los estados y las perturbaciones son conocidas, o al menos tener un estimado de los estados mediante alguna medición en línea y de alguna magnitud finita estimada de las perturbaciones.

Desde un enfoque de control geométrico no lineal, en esta sección se presentan condiciones de solución al problema con retroalimentación de estados de la planta (5.1); ya sea con linealización completa o parcial mediante retroalimentación de estados (Isidori, 1989).

El problema de control con retroalimentación de estados nos lleva a enunciar la siguiente definición:

Definición 3: Considerando un conjunto de estados $x \in X$, un conjunto de perturbaciones conocidas $d(t) \in D$ y un conjunto de salidas de referencia $\bar{y} \in Y$. El problema de control con retroalimentación de estados (Isidori, 1989) de la planta (Ec. 5.1) tiene solución (localmente) si existe un controlador no lineal suave,

$$u = \mu(x, D_y y, D_d d) \quad (5.7)$$

donde $D_d d$ son las perturbaciones y sus derivadas, y $D_y y$ las salidas de referencia y sus derivadas; que, aplicado a la planta se obtiene el sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f[x + G\mu(x, D_y y, D_d d)] \\ y &= h[x]; \end{aligned} \quad (5.8)$$

con el siguiente comportamiento:

a) Rechazo a perturbaciones;

$$x_0 = \bar{x}_0 \Rightarrow y(y) = \bar{y}(t), \quad x(t) = \bar{x}(t)$$

b) La dinámica del error de salida ε_i es lineal, no interactiva y con κ_i polos asignables

(LNPA);

$$\varepsilon_i^{y(\kappa_i)} + k_{1i}^c \varepsilon_i^{y(\kappa_i-1)} + \dots + k_{\kappa_i}^c \varepsilon_i^y = 0$$

$$\varepsilon_i = y_i(t) - \bar{y}_i(t),$$

c) Estabilidad interna global y asintótica

$$x_0 \neq \bar{x}_0 \Rightarrow y(y) \rightarrow \bar{y}(t), \quad x(t) \rightarrow \bar{x}(t)$$

siendo $\bar{x}(t)$ una trayectoria nominal de estados.

Para establecer condiciones necesarias y suficientes al problema con retroalimentación de estados, la siguiente notación y definición de la derivada direccional de un campo escalar $h(x)$ con respecto a un campo vectorial $f(x)$, y su fórmula de recursión deben presentarse, las cuales están dadas por

$$L_f^{i+1} h = L_f(L_f^i h), \quad L_f^0 h = h, \quad L_f h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i$$

A partir de esta definición, un conjunto $\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ de m -enteros positivos determinan los vectores

$$\phi_1(x) = \left[h_1(x), \dots, L_f^{\kappa_1-1} h_1(x); \dots; h_m(x), \dots, L_f^{\kappa_m-1} h_m(x) \right]^T, \dim \phi_1 = \kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_m \quad (5.9)$$

$$b(x) = \left[L_f^{\kappa_1} h_1(x), \dots, L_f^{\kappa_m} h_m(x) \right]^T \quad (5.10)$$

y la matriz de desacoplamiento

$$A(x) = \text{mat} \left[L_{g_j} L_f^{\kappa_i} h_i(x) \right], \dim A(x) = \kappa \times \kappa \quad (5.11)$$

$$\dot{x} = f(x) - G(x)A^{-1}(x)b(x) \quad (5.12a)$$

Teorema 2 Para la planta (5.1), el problema con retroalimentación de estados tiene solución localmente si y solo si existen m -enteros positivos $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ tales que;

i) $\kappa_1, \dots, \kappa_m = \kappa \leq n$

ii) La planta es linealizable entrada salida.

$$|A(\bar{x})| \neq 0$$

ii) La dinámica cero es semiglobalmente estable.

Si los mapas $f(x)$, $G(x)$, y $h(x)$ de la planta (5.1) satisfacen las condiciones del teorema 2 entonces el controlador no-lineal (5.7) está dado por

$$\mu(x) = A(x)^{-1} \left\{ K_c \left[\phi_1(x) - \phi_1(\bar{x}) \right] - b(x) \right\} \quad (5.13)$$

donde K_c es una matriz en bloque diagonal con κ -entradas ajustables diferentes de cero.

En este controlador, los elementos

$$k_i^c = \left[s_0 k_{1i}^c, s_0^2 k_{2i}^c, \dots, s_0^{\kappa_i} k_{\kappa_i i}^c \right]^T$$

en K_c son vectores de ganancias para cada salida, cuyas entradas (k_{ij}^c) son elegidas tal que la planta (5.8) a lazo cerrado tiene la siguiente dinámica del error de salida LNPA

$$\varepsilon_i^{y(\kappa_i)} + k_{1i}^0 \varepsilon_i^{y(\kappa_i-1)} + \dots + k_{\kappa_i i}^0 \varepsilon_i^y = 0, 1 \leq i \leq m \quad (5.14)$$

estable.

5.3.1 Construcción de las Leyes de Control

Dado que el sistema (E.7) (Apéndice E) se encuentra en una forma canónica y es controlable, entonces existe un control lineal equivalente, $v = \mathfrak{G}(x, u, t)$:

$$v = \bar{v} + K_p (z(t) - \bar{z}) \quad (5.15)$$

que en coordenadas originales es:

$$v = \bar{v} + K_p (y - \bar{y}) \quad (5.16)$$

La expresión (5.15) es una señal con salida actuante proporcional al error, donde K_p es la ganancia proporcional del controlador y \bar{v} es la señal nominal (por ejemplo, cuando el error de salida es igual a cero).

Un controlador proporcional se describe por el valor de su *ganancia proporcional* K_p o equivalentemente por el valor de su *banda proporcional* BP, donde $BP=100/K_p$. La banda proporcional caracteriza el rango sobre el cual el error debe cambiar para llevar la señal actuante de el controlador sobre su rango completo.

Para considerar errores de modelado y rechazo ante perturbaciones, así como eliminación del sesgo se introduce la acción integral. Es decir, un control con acción proporcional-integral (PI)

$$v = \bar{v} + K_p (y - \bar{y}) + K_i \int (y - \bar{y}) dt \quad (5.17)$$

donde \bar{v}, \bar{y} son sus respectivos valores en la condición nominal (por ejemplo, un estado estacionario).

Sustituyendo (5.17) en (5.3a) se obtienen las *leyes de control* para la columna de destilación, cada una de forma independiente.

$$u_i = \bar{u}_i + A^{-1}(x) \left[\bar{u}_i + K_p (y_i - \bar{y}_i) + K_i \int (y_i - \bar{y}_i) dt - b(x) \right] \quad (5.18)$$

5.3.2 Sintonización de los Lazos de Control

En esta sección se establece la forma de seleccionar las ganancias del controlador, K_p y K_i , de tal forma que el sistema a lazo cerrado garantice convergencia y estabilidad robusta. El cálculo de las ganancias se realiza por la técnica convencional de asignación de polos, llevándose a cabo la sintonización en el sistema lineal equivalente aplicando la teoría de control lineal. La selección adecuada deberá generar una respuesta dinámica lo más rápido posible y sin que por ello genere inestabilidad en el sistema.

I Acción Proporcional

La sustitución de la ecuación de control (5.17) con acción proporcional en el sistema equivalente (5.8) genera el siguiente sistema:

$$\dot{z}_1 = (\Gamma + \Pi K_p)z_1 + \Pi \bar{v} - \Pi K_p \bar{z}_1 \quad (5.19)$$

$$y = \Delta z \quad (5.20)$$

que, definiendo el error de salida como $\epsilon = z_1 - \bar{z}_1$, donde \bar{z}_1 corresponde a la condición nominal. Entonces, la dinámica del error de salida es:

$$\dot{\epsilon} = \dot{z}_1 - \dot{\bar{z}}_1 \quad (5.21)$$

y sustituyendo (5.21) en (5.19) se obtiene la siguiente dinámica lineal en el error de salida

$$\dot{\epsilon} = (\Gamma + \Pi K_p)\epsilon \quad (5.22)$$

Con el fin de lograr de que el sistema a lazo cerrado sea estable es necesario seleccionar la matriz de ganancias K_p , de tal forma que $(\Gamma + \Pi K_p)$ tenga valores propios con parte real negativa, y que a su vez debe satisfacer $\epsilon(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$.

De el sistema de ecuaciones (5.22) se puede obtener una, que representa la forma individual; donde

$$\dot{\varepsilon}_i - K_{pi}\varepsilon_i = 0 \quad (5.23)$$

es una ecuación lineal con dinámica de primer orden, la cual se puede escribir en notación estándar de control como:

$$\tau_i \dot{\varepsilon}_i + \varepsilon_i = 0 \quad (5.24)$$

donde τ es la constante de tiempo del proceso, y se define como el tiempo de asentamiento por periodo.

Dado que la dinámica del error de salida es de primer orden y su respuesta de este tipo de sistemas es exponencial, se puede acelerar mediante la selección de las ganancias para obtener una respuesta lo más rápido posible y sin sobredisparos. La relación entre la expresión dinámica del error y de un sistema de primer orden es directa, estableciéndose la siguiente relación entre tiempo de asentamiento y ganancias del controlador.

$$K_{pi} = -\frac{1}{\tau_i} \quad (5.25)$$

II Acción Proporcional-Integral

Un desarrollo similar a la acción proporcional, pero con acción proporcional-Integral se obtiene una dinámica en el error de salida en un orden superior que el caso I.

$$\ddot{\varepsilon} - K_{pi}\dot{\varepsilon}_i - K_{Ii}\varepsilon_i = 0 \quad (5.26)$$

la cual en notación estándar de control se puede escribir como:

$$\tau_i^2 \ddot{\varepsilon} + 2\xi\tau_i \dot{\varepsilon}_i + \varepsilon_i = 0 \quad (5.27)$$

donde τ es la constante de tiempo del proceso, y ξ es el factor de amortiguamiento.

Una comparación entre las expresiones (5.26) y (5.27) se llega establecer la siguientes relaciones entre ganancias y parámetros de sintonización (τ, ξ):

$$\begin{aligned} K_{pi} &= -\frac{2\xi_i}{\tau_i} \\ K_{li} &= -\frac{1}{\tau_i^2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

La constante de tiempo máxima para el cálculo de las ganancias se puede establecer como el tiempo natural del proceso para el cual no existe cambio significativo después de una perturbación al sistema, y el factor de amortiguamiento ($\xi < 1$) se puede elegir cuando se tienen dos polos complejos conjugados. Con el fin de obtener una respuesta poco oscilatoria en el sistema de control a lazo cerrado es conveniente elegir valores en un rango de $0.7 < \xi < 1$.

5.4 IMPLEMENTACIÓN A LA COLUMNA DE DESTILACIÓN

5.4.1 Selección de la Configuración de Control

El control con retroalimentación de estados tiene un potencial teórico para control perfecto. Sin embargo, una de las partes más importantes a la solución del problema de control depende en buena medida de la selección de la configuración de control elegida, dado que en ésta intervienen de manera directa: (a) la existencia de solución al problema de control y (b) la rapidez de respuesta a lazo cerrado.

La mayoría de las columnas industriales son operadas con un punto de control (ya sea, en el fondo o en el domo de la columna). No obstante, Finco y col. (1989) justificaron el uso de dos puntos de control como un incentivo. En este capítulo se presenta un estudio

con dos puntos de control, analizando la configuración LV. Además, se considera el caso de desacoplar cada uno de los lazos de control, logrando un esquema de control descentralizado, formado por dos lazos independientes de una entrada-una salida (UEUS), y que puede mostrar algunas ventajas frente al caso multivariable (MEMS).

5.4.2 Objetivos de control

Suponer que en el modelo (5.1) el flujo de vapor se utiliza como una entrada de control, esto es posible al manipular la carga térmica del rehervidor. Además, suponer que se desea controlar alguna medida especificada del producto de destilado manteniendo la recirculación contante. Con las restricciones anteriores se establecen los dos siguiente objetivos de control en este estudio

- 1) Controlar la pureza del destilado: x_d
- 2) Controlar la pureza de fondos, x_b

En lo siguiente, se planteará el problema de control como una entrada una salida, teniendo lazos independientes. El esquema de control LV se propone para mantener productos de alta pureza en una columna de destilación, el cual es una elección común en la práctica industrial (Skogestad y Morari, 1988). Esta configuración fue elegida porque L y V tienen efecto directo en las composiciones extremas y su efecto es además débilmente dependiente en la sintonización de los lazos de nivel.

5.4.3 Control Lineal con Retroalimentación de Mediciones

El esquema de diseño del controlador no lineal con retroalimentación de salidas de Alvarez (1996), basado en combinar un estimador y un controlador con retroalimentación de estados, puede aplicarse al diseño de un controlador no lineal con retroalimentación de mediciones para el caso de destilación, con criterios de estabilidad y de un procedimiento de sintonización como el de Padilla y Alvarez (1997); Sin embargo, en vez de construir un

controlador no lineal basado en un estimador, se diseñará un controlador lineal: la aproximación lineal del control riguroso no lineal (Castellanos, 1997), que es más simple en construcción.

De la ley de control rigurosa (5.7) (Castellanos, 1997) que se puede expresar como:

$$u = \mu(x, v) \quad (5.29)$$

y a partir de la dinámica inversa (en el sentido de Hirschorn), las entradas de control no lineal para (5.30) sin entradas exógenas o perturbaciones está dado por

$$u = \mu(x, v) = A^{-1}(x)[v - b(x)] \quad (5.30)$$

donde

$$v = \left[K_p (h(x) - \bar{y}) + K_i \int (h(x) - \bar{y}) dt \right]$$

es la acción de control, con módulos integral y proporcional.

En términos de un desarrollo en series de Taylor cerca del punto nominal (ejemp., $x = \bar{x}, v = \bar{v} = 0$), el controlador no lineal (5.30) puede escribirse como una expresión de dos términos lineales y uno agrupando las no linealidades;

$$u = \bar{u} + \hat{K}_p [h(x) - \bar{y}] + H(\bar{x})(x - \bar{x}) + O(v, x - \bar{x}) \quad (5.31)$$

En esta expresión; $\bar{u} = A^{-1}(\bar{x})[\bar{v} - b(\bar{x})]$ corresponde al valor de las entradas de control en su condición nominal, $\hat{K}_p = [A^{-1}(x)]K_p$, $H(x, v) = \frac{\partial}{\partial x} [A^{-1}(x)b(x)]$ y, $O(v, x - \bar{x})$ agrupa términos cuadráticos y de orden superior. Si se sustituye $h(x)$ por y , y se desprecian los términos cuadráticos en x y de orden superior en x y v , se obtiene una aproximación del controlador no-lineal con retroalimentación de mediciones:

$$u = \bar{u} + \hat{K}_p (y - \bar{y})$$

del controlador (5.30). Con este controlador, la columna a lazo cerrado es

$$\dot{x} = f(x, d) + G(x, d)[\bar{u} + \hat{K}_p (y - \bar{y})]$$

Siguiendo la metodología expuesta del caso no lineal, se puede plantear la solución al problema de control de la columna en función a dos puntos de control independientes.

Controlador en la base de la columna, u_1 :

Dada la salida (localizada en el plato número 3)

$$y_1 = h_1(x) = \phi_1(x) = \phi_{\kappa_1}(x)$$

la ley de control se puede construir a partir de la derivada de la salida, de tal forma que aparezca explícitamente la entrada de control; es decir, que exista una función u -invertible, en términos de la derivada de la salida y de los estados.

$$\dot{y}_1 = v_1 = \phi_{1x}(x)f(x, u) = \phi_{1x}(x)f(x, u_1, u_2)$$

$$v_1 = \phi_{1x}(x)f(x, u_1, u_2) = \varphi_1(x, V, 0)$$

obteniéndose la ley de control estática que regula el flujo de vapor que asciende por la columna

$$u_1 = V = \varphi_1^{-1}(x, v_1) = \mu_1(x, v_1) \quad (5.32)$$

y en la aproximación lineal de la planta, el controlador está dado por

$$u_1 = \mu_1(x, v) = \bar{u}_1 + (cb)^{-1} K_p (y_1 - \bar{y}_1) - (cb)^{-1} \left[K_I \int (y_1 - \bar{y}_1) dt \right] \quad (5.33)$$

donde:

$$K_p = k_{11}, K_I = k_{11}$$

Controlador en el domo de la columna, u_2 :

Con la salida (en el plato No. 8)

$$y_2 = h_2(x) = \phi_2(x) = \phi_{\kappa_1+1}(x)$$

y sus derivadas con respecto al tiempo

$$\dot{y}_2 = \frac{\partial h_2}{\partial x} f(x, u_1, u_2 = 0) = \phi_{\kappa_1+2}(x, u_1, 0)$$

$$\ddot{y}_2 = v_2 = \varphi_2(x, u_1, \dot{u}_1, u_2) = \varphi_2(x, V, \dot{V}, R)$$

es posible obtener la ley de control para regular el reflujo.

$$u_2 = R = \varphi_2^{-1}(x, u_1, \dot{u}_1, v_2) = \mu_2(x, x_u, v_1) \quad (5.34)$$

donde:

$$x_u = [u_1, \dot{u}_1]^T$$

y que en la aproximación lineal de la planta, el controlador está dado por

$$u_2 = \mu(x, x_u, v_2) = \bar{u}_2 + (cAb)^{-1} K_p (y_2 - \bar{y}_2) - (cAb)^{-1} \left[K_I \int (y_2 - \bar{y}_2) dt \right] \quad (5.35)$$

donde:

$$K_p = k_{11}, K_I = k_{12}$$

El modulo integral en las acciones de control se ha adicionado con el propósito de eliminar el sesgo de estado estacionario; que además, permite cierto margen de tolerancia al esquema de control frente a errores de modelado.

La solución a este problema está basada en la suposición de que el estado \mathbf{x} puede medirse y está disponible para propósitos de control. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas sólo la medición de la salida y está disponible para control. Dadas estas limitaciones, el esquema de control que se propone está basado en valores estimados de: a) las señales de la salida; b) de el estado \mathbf{x} (χ) y, c) de x_u (χ_u).

Para estimar las salidas y las entradas exógenas en las expresiones (5.32) y (5.34) es necesario auxiliarse de los siguientes sistemas dinámicos:

Asociado a la salida y

$$\dot{\mathbf{x}}_y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \Gamma_y \mathbf{x}_y + \Pi_y v(\mathbf{x}_y)$$

$$y_y = y = \delta \mathbf{x}_y$$

el estimador es

$$\dot{\chi}_y = \Gamma_y \chi_y + 0 + K_y (y_y - \delta \chi_y)$$

y asociando \mathbf{u} al estado \mathbf{x}_u de un exo-sistema dinámico (para construcción, ver Apéndice D)

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \Gamma_u \mathbf{x}_u + \Pi_u v(t)$$

$$y_u = \mathbf{u} = \delta \mathbf{x}_u$$

con exo-observador en coordenadas originales

$$\dot{\chi}_u = A_u \chi_u + 0 + K_u \mathbf{u}$$

donde A_u se define en el Apéndice D.

5.5 ANÁLISIS DE LA DINÁMICA A LAZO CERRADO

Considerar la columna de destilación (Apéndice A), donde se analizará la respuesta dinámica del sistema a lazo cerrado, llevándose a cabo mediante simulación numérica para: a) un cambio en escalón en la composición de alimentación y, b) una perturbación tipo senoidal en la misma. Las condiciones iniciales (x_0) de la columna son las mismas que se presentaron para el diseño del observador (Cap. 4).

Para la operación aceptable de una columna binaria se requiere las siguientes variables a valores deseados:

- 1.- Composición de la corriente de destilado, x_D
- 2.- Composición de la corriente de fondos, x_B
- 3.- Líquido acumulado en el tanque de reflujo, M_{TR}
- 4.- Líquido acumulado en la base de la columna, M_B

mostrándose en la Figura 5.1 los cuatro lazos comunes de control para una columna de destilación; dos de control de nivel y dos de control de composiciones.

Debe hacerse notar que estas cuatro especificaciones de los objetivos de control pueden diferir, de acuerdo con los objetivos específicos de operación, y que en el caso particular es mantener x_D y x_B en valores deseados \bar{x}_D y \bar{x}_B respectivamente.

columnas; sin embargo es un buen punto de partida para desarrollar esquemas geométricos como un tópico en el control de procesos.

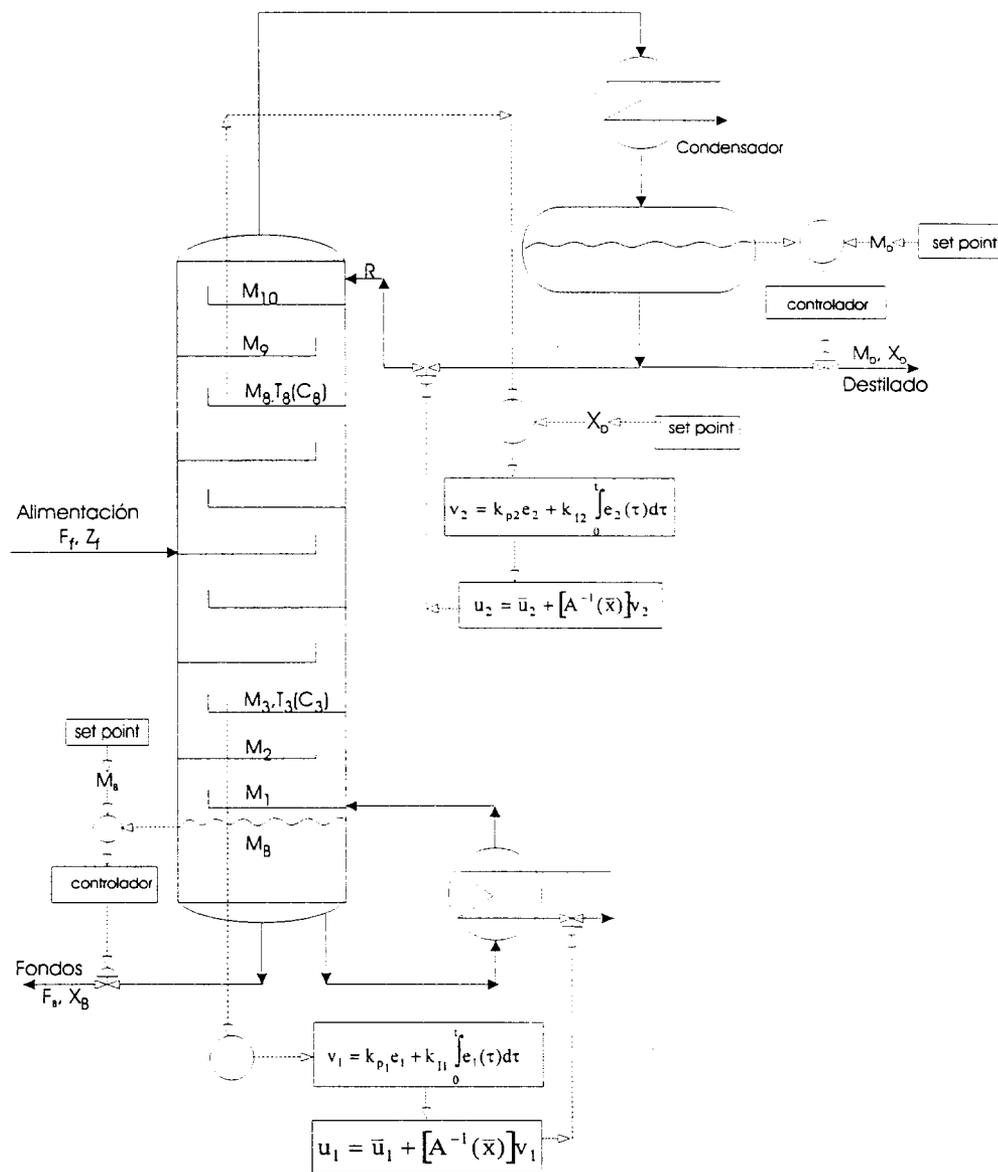


Figura 5.2a: Control Riguroso de una Columna de destilación

La Figura 5.2b presenta un esquema de control lineal con dos puntos de medición, donde las señales de salida en los platos 3 y 8 son filtradas, para después alimentarse al controlador correspondiente. Las ganancias para los filtros con dinámica lineal de primer orden fueron sintonizadas de acuerdo a los siguientes tiempo, $\tau_{y1}=\tau_{y2}=2$ min.

Inicialmente la operación de la columna se controló sólo en un punto, como un caso (regulando el flujo de vapor) y, para el caso de dos puntos de control se adicionó el controlador que regula el reflujo a la columna, con el propósito de mantener las composiciones extremas en sus valores deseados, ambas respuestas se presentan en la Figura 5.3.

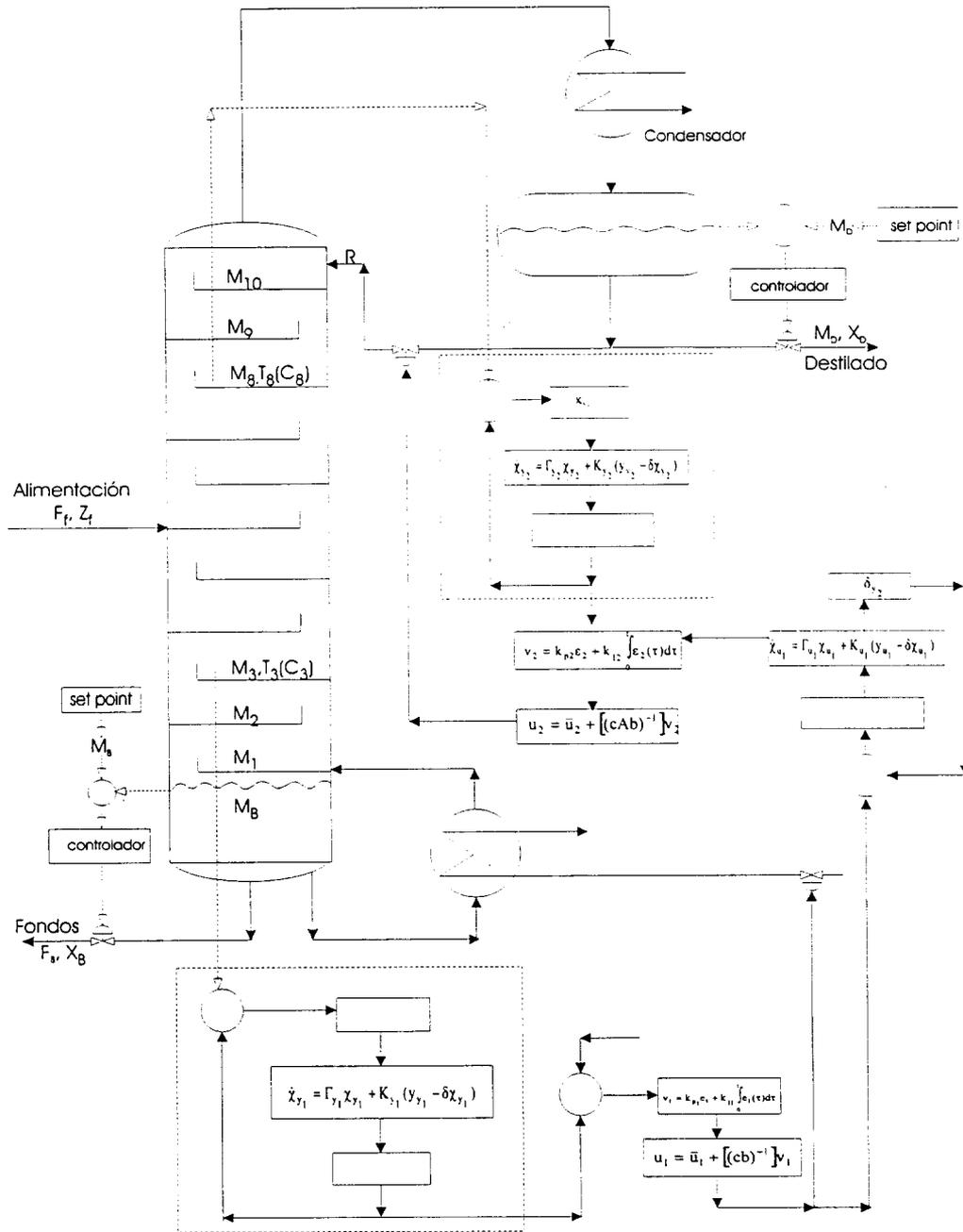


Figura 5.2b: Control Lineal con Retroalimentación de Mediciones y Estimación de Perturbaciones

Es de mencionar, que las constantes de proporcionalidad fueron sintonizadas a ser τ tan pequeños como fue posible con la finalidad de llevar la salida al punto de referencia en el menor tiempo posible, siempre y cuando se alimentaran valores razonables en las entradas de control.

La Figura 5.3 presenta el desempeño del esquema de control lineal con retroalimentación de mediciones ante un cambio en escalón en la composición de alimentación de $z_f 0.75=$ a $z_f=0.7878$. Es apreciable el efecto en las respuesta de los estados al incorporar el segundo controlador que regula el reflujo, teniendo como consecuencia un tiempo de convergencia al punto de consigna menor comparado con el controlador de UEUS.

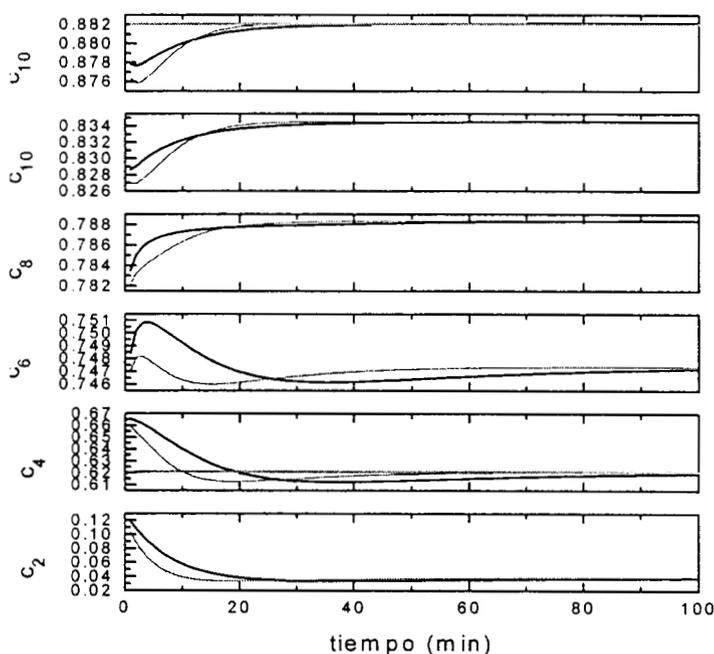


Figura 5.3: Comportamiento dinámico de los estados de la columna:
 — UEUS; — MEMS; — Nominal

Las acciones de control se presentan en la figura 5.4 (una entrada-una salida) y en 5.5 (dos entradas-dos salidas), las cuales para llegar al punto de consigna son suaves, tanto en el flujo de vapor (un punto de control) como de flujo de vapor y reflujo a la columna (dos puntos de control), comparadas con ciertos casos multivariables, donde la interacción entre lazos de control se encuentra en la magnitud de cada uno de los elementos de la matriz de desacoplamiento, originando saturaciones en las acciones de control.

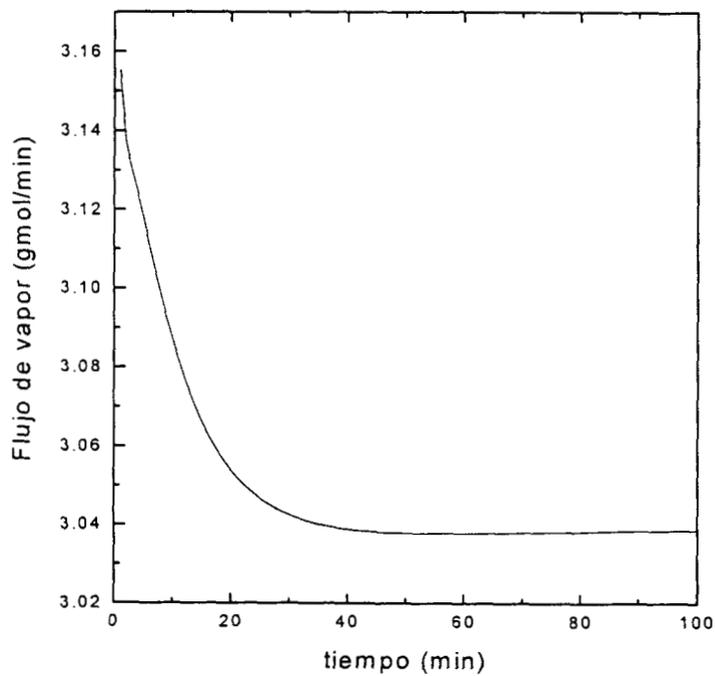


Figura 5.4: Acción de control (UEUS).

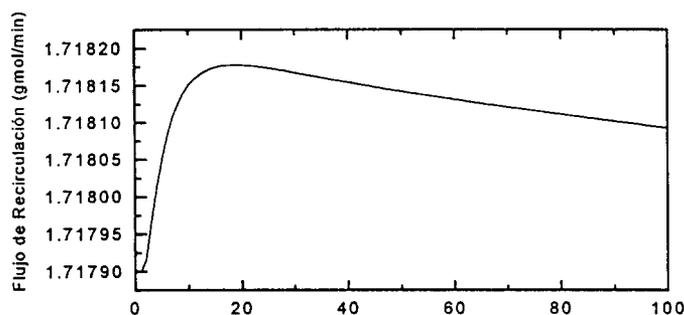


Figura 5.5a: Acción de control con MEMS, Reflujo.

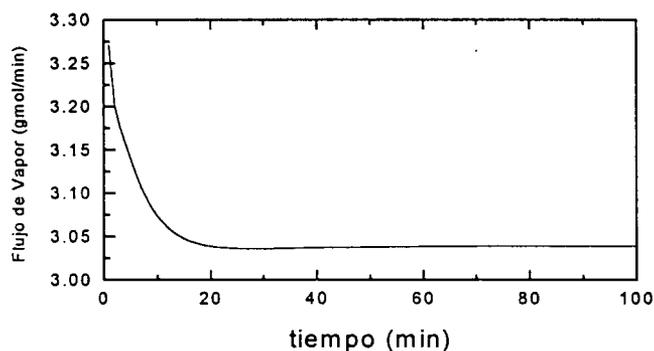


Figura 5.5b: Acciones de Control con MEMS, vapor.

Una ventaja adicional de este esquema de control es que las acciones pueden hacerse arbitrariamente suaves (independientemente) por hacer las constantes de proporcionalidad suficientemente grandes, lo que ayuda a tener un desgaste mínimo en los elementos finales de control.

5.5.1 Rechazo ante perturbaciones

Para incluir un caso más práctico de situaciones industriales se realiza una perturbación (en este caso conocida) en la composición de alimentación con la finalidad de verificar la robustez del esquema de control frente a perturbaciones de magnitud finita.

La Figura 5.6 presenta un comportamiento senoidal $z_{fd} = 0.75 + 0.005 \sin(\omega t)$ en la composición de alimentación a la columna, donde existe mayor posibilidad de tener entradas exógenas o perturbaciones directas al sistema.

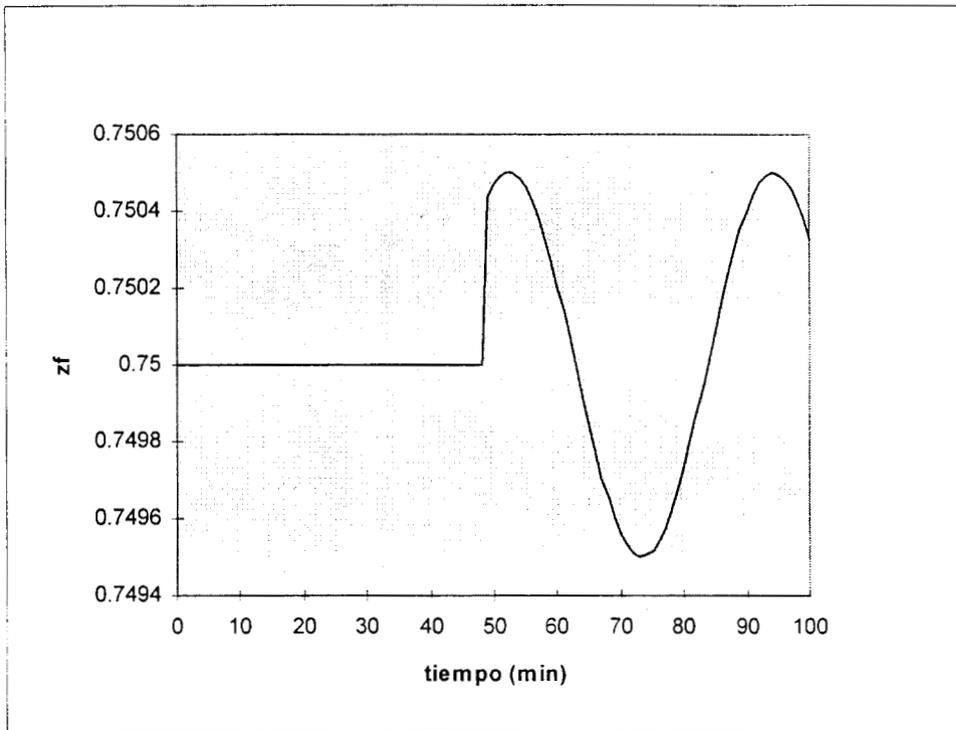


Figura 5.6: Perturbación en la composición de Alimentación

Al introducir una perturbación en la composición de alimentación (al tiempo, $t=50$ min.) a la columna se observa que el esquema lineal con dos puntos de control actúa rechazando la perturbación, ya que algunos estados de la columna permanecen sin cambio aparente, exceptuando los estados cercanos a la alimentación, lo cual es natural por la perturbación alimentada. En los puntos de control, los estados se mantienen oscilando alrededor de la condición nominal (Fig.5.7); manteniendo un “offset” de 2%, pero que realmente no afectan las composiciones extremas (x_D , x_B), las cuales son de interés como producto de la separación, ya sea la continuación de un proceso determinado o como materia prima para uno nuevo.

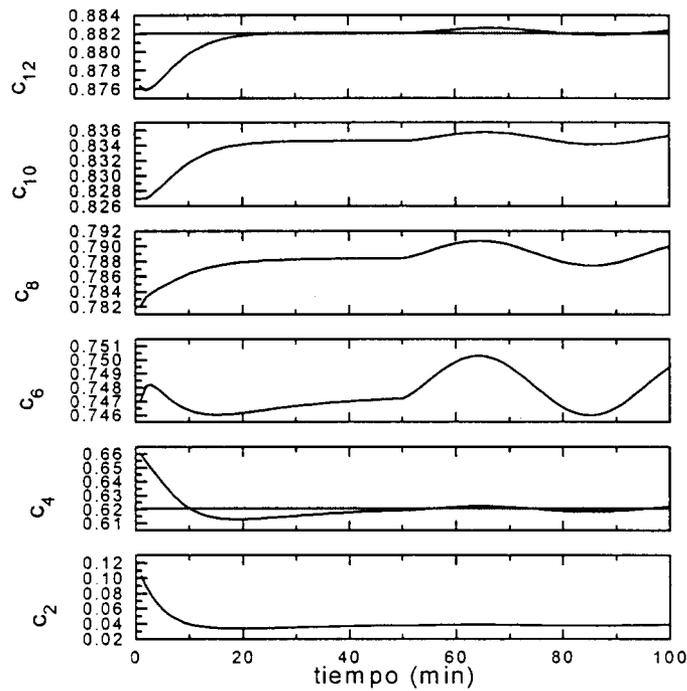


Figura 5.7: Comportamiento dinámico de los estados ante una perturbación en la composición de alimentación; $zfd = z_f + 0.005 \sin(\omega t)$
 — x; — Nominal.

A pesar de usar una aproximación del modelo de la planta, el controlador presenta excelente desempeño en los puntos de control, siendo sus acciones de control suaves ante la perturbación senoidal persistente (Figura 8a,b) y que se ve reflejado en la convergencia asintótica de los estados al punto deseado.

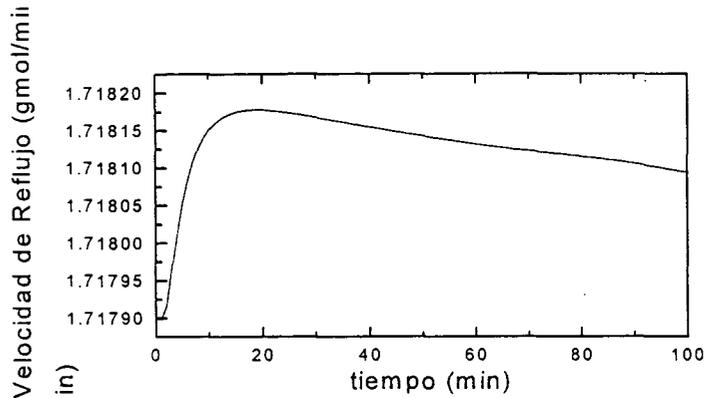


Figura 5.8a: Acción de control en el domo de la columna; reflujo (gmol/min).

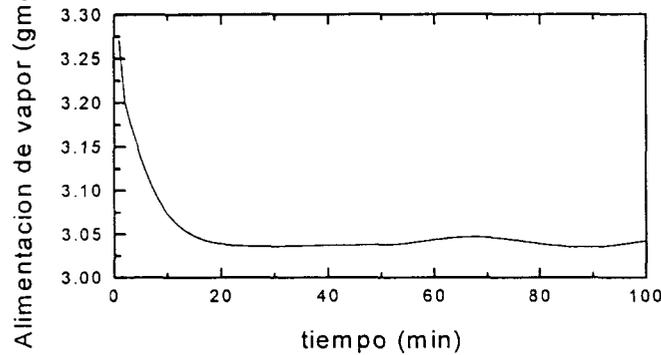


Figura 5.8b: Acción de Control en la base de la columna ante una perturbación en la composición de alimentación; Vapor, (gmol/min).

Algunas conclusiones generales del diseño y desempeño del controlador lineal son:

Para existir solución al problema de control con retroalimentación de mediciones es necesario que exista solución al problema con retroalimentación de estados, abordando el problema con linealización total, parcial y por combinar controladores con retroalimentación de estados y estimadores.

La contribución al esquema de estimación diseñado fue la obtención de respuestas más rápidas cuando es posible mantener las variables en el punto de operación deseado. La aplicación es de interés para propósitos de monitoreo o de tener un controlador adicional externo que dependa sólo de la información que proporcione el estimador.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En el campo de control procesos se ha estudiado una estrategia para reconstruir estados que no es posible medir en línea para propósitos de control o de monitoréo. La aplicación de la estrategia fue propuesta para reconstruir las composiciones de una columna de destilación binaria azeotrópica usando teoría de estimación no lineal, en la cual se han determinado las condiciones necesarias bajo las cuales el problema tiene solución.

Se establece que una columna de destilación con hidráulica de plato y medidas de temperatura para la estimación de estados es detectable (no completamente observable), con la hidráulica de plato siendo los estados inobservables pero estables. Específicamente, la columna de destilación binaria azeotrópica es detectable con cualquier medición de temperatura.

Con lo que respecta a la dinámica interna del sistema azeotrópico (acumulados) se obtuvo que como ésta corresponde a la parte no observable del sistema, entonces una forma de favorecer la respuesta dinámica global del sistema a lazo cerrado consiste en no despreciarla, la cual tiene su efecto principalmente en la respuesta inicial.

Se encuentra que la existencia del azeótropo, así como los cambios de concavidad en la curva de equilibrio determinan el condicionamiento numérico de la matriz de detectabilidad, elemento clave para la reconstrucción de estados. Por lo tanto, el sistema azeotrópico etanol-agua impone restricciones que deben tomarse en cuenta. Así, para determinar si es posible aplicar un esquema de estimación que requiere la inversión de la matriz jacobiana de una transformación no lineal es, en buena medida necesario identificar las variables de salida y su relación para una buena estimación.

El estimador de estados fue probado sujeto a cambios drásticos en la relación de reflujo, Flujo de vapor y composición de alimentación, mostrando estabilidad y convergencia asintótica ante dichos cambios.

Los resultados obtenidos numéricamente del esquema propuesto muestran que la reducción del espacio de observación mejora el condicionamiento numérico de la matriz de detectabilidad. Sin embargo, la reducción máxima del espacio de observación de las salidas que se puede lograr origina problemas de desempeño en la estimación de los estados mas alejados de la medición; existiendo con esto, un compromiso entre el número de mediciones y su índice de observabilidad, y que en este contexto denominamos estructura de observación.

Los resultados ilustran que se puede generalizar la técnica empleada para un número de problemas particulares de Múltiples Entradas-Múltiples Salidas, siempre y cuando se realice en estudio en la estructura de observación. Sin embargo, debido a la falta de una forma canónica para múltiples salidas no fue posible establecer un resultado general de la propiedad de observabilidad de las salidas, ya que en sistemas no lineales depende de las entradas.

Como una investigación a futuro se sugiere estudiar la estabilidad robusta del estimador propuesto ante variación de parámetros, funcionalidades termodinámicas, condiciones de operación y frente a errores de integración numérica, y de ser posible proponer un esquema de construcción-sintonización que explícitamente tome en cuenta el problema de estabilidad robusta y que garantice convergencia asintótica, todo esto sin olvidar las limitaciones físicas de cada sistema.

Otra de las posibles investigaciones como una extensión del esquema propuesto es su aplicación a columnas de separación multicomponente donde se pueden presentar singularidades en el observador del sistema y es en algunos casos difícil de seleccionar un componente clave que permita una reconstrucción adecuada de los estados. De igual forma, para un trabajo futuro se sugiere el estudio de sistemas de separación presurizados o de

vacío, en los cuales podría resultar conveniente adicionar mediciones de presión como entradas forzantes al observador.

Una más de posibles investigaciones a realizar en este campo es: Estudiar los problemas asociados con el diseño y control de sistemas acoplados Columna-Reactor, usando hasta donde sea posible el esquema propuesto de estimación de estados.

NOMENCLATURA

Notación básica del modelo de la columna:

c_i	Fracción mol de el componente más volátil;
F_f	Flujo de mezcla de alimentación;
h	Entalpia de la fase líquida;
H	Entalpia de la fase Vapor;
L_i	Flujo de líquido abandonando la etapa;
M_i	Líquido retenido en el plato (gr-mol);
P	Presión total (kpa);
P_i^s	Presión de vapor del componente puro (kpa)
r	Relación de reflujo;
T_i	Temperatura (°K);
t	Tiempo(min);
V	Flujo de vapor

Letras Griegas:

α	Parámetro en la fórmula de Francis($1/\text{min}\sqrt{\text{gr} - \text{mol}}$);
β	Parámetro en la Fórmula de Francis;
γ_j	Coefficiente de actividad;
λ_j	Calor latente de vaporización del componente puro (joule/mol);
ρ_j	Densidad del componente puro (gr/mol);

Subíndices:

B	Sección de Fondos de la columna;
C	Condensado;

D	Destilado
f	Alimentación;
i	i-ésimo componente;
j	j-ésima etapa;
m	Mezclador;
N	Ultimo plato del domo;
S	Sección de agotamiento;
R	Sección de enriquecimiento;

Superíndices:

L	Referido a la fase líquida;
V	Refiere a la fase vapor.

BIBLIOGRAFÍA

Alsop, A. W. y Edgar, T. F., 1990 "Nonlinear Control of a High-purity Distillation Column by use of Partially Linearize Control Variables", *Comp. Chem. Eng.*, **14**, pág. 665-678.

Aguilar, L. R., 1993, Análisis de la operación y control en un reactor por lotes para la polimerización de n-Butadieno. Tesis de Maestría en Ing. Química, UAM-I, México, D. F.

Alvarez, J. y Gamas, C. E., 1986. "Estimadores para Control de Procesos". *Ciencia, México.*, 37 pág. 71-88.

Alvarez, J., 1996. "Output-Feedback Control of Nonlinear Plants". *AIChE Journal*, **42(9)**, pág 2540-2554.

Alvarez, J., 1997. "A Robust State Estimator Design For Nonlinear Plants". *Proceedings of the American Control Conference*, **5**, pág. 3058-3061.

Baratti, R., Alvarez, J., y Morbidelli, M., 1993. "Design and Experimental Verification of a Nonlinear Catalytic Reactor Estimator ". *Chem. Engng. Sci.* **48(14)**., pág. 2573-2585.

Baratti, R., Bertucco, A., Da Rold, A. y Morbidelli, M., 1995a. "Compositions Estimators For a Distillation Column: Theory and Experiments". *DyCord + 95*, pág. 489-494.

Baratti, R., Bertucco, A., Da Rold, A. y Morbidelli, M., 1995b. "Development of a Composition Estimator For Binary Distillation Columns: Application to a Pilot Plant". *Chem. Engng. Sci.* **50(10)**., pág. 1541-1550.

- Brockett, R. W., 1976. "Nonlinear Systems and Differential Geometry". *Proc IEEE*, **64**, pág. 61-72.
- Castellanos, S. E., 1997, Control Geométrico de Columnas de Destilación Mediante Retroalimentación de Mediciones. Tesis de Maestría, U de G, México.
- Cho, Y. y Luyben, W. L., 1987, "Rigorous Dynamic Models of Distillation Columns". *Ind. Eng. Chem. Res.*, **26**, pág. 2158-2161.
- Deza, F., Busvelle, E., and Gauthier, J. P. y Rakotopara, D., 1992a. "High Gain Estimation for Nonlinear Systems". *System & Control Letters* **18**, pág. 295-299.
- Deza, F., Busvelle, E., and Gauthier, J. P., 1992b. "Exponentially Converging Observers for Distillation Columns and Internal Stability of the Dynamic Output Feedback". *Chem. Engng. Sci.* **47**, pág. 3935-3941.
- Dimitratos, J., Georgakis, C., El-Aaser, M., y Klein, A., 1991. "An Experimental Study of Adaptive Kalman Filtering in Emulsion Copolymerization". *Chem. Engng. Sci.* **46**, pág. 3203-3218.
- DoChain, D. y Pauss, A., 1988. "On-line estimation of microbial specific growth-rates: an illustrative case study". *Can. J. Engng.* **66**, pág. 626-631.
- DoChain, D., Perrier, M. y Ydstie, B. E., 1992. "Asymptotic Observer for Stirred Tank Reactors". *Chem. Eng. Sci.*, **42**, pág. 4167-4177.
- Ellis, M. F., Taylor, T. W., Gonzalez, V. y Jensen, K. F., 1988. "Estimation of the molecular weight distribution in batch polymerization". *AIChE Journal*, **34**, pág. 1341-1353.

Fernández, Z. C., Díaz, H. A., Martínez, V. C. y Alvarez, C. J., 1996. "Desarrollo de un Modelo para Control de Columnas de Destilación y de un Estimador No-lineal de Composiciones". *Avances en Ingeniería Química*, **5**(3), pág 301-306.

Fernández, Z. C., 1996. *Inferencia de Estados Basados en Mediciones de Temperatura*. Tesis de Maestría en Ing. Química, UAM-I, México, D. F.

Finco, M. V., Luyben, L. W. y Polleck, R. E. 1989. "Control of Distillation Columns with Low Relative Volatilities", *Ind. Eng. Chem. Res.*, **28**, pág. 75-83.

Forythe, G. E., M. A. Malconlm, y C. B. Moler, 1977. *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ

Fuentes, C. y Luyben, L. W., 1983, "Control of High-Purity Distillation Columns", *Ind. Eng. Chem. Process Des.*, **22**, pág. 361-366.

Gani, R., C. A. Ruiz, e I. T. Cameron, 1996. "A Generalized Model for Distillation Columns-I". *Comp. Chem. Eng.*, **10**, pág. 181-198.

Gauthier, J. P. y Bornard, G., 1981. "Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems". *IEEE Trans. Autom. Control*, **26**(4), pág. 922-926.

Gauthier, J. P., Hammouri, H. y Othman, S., 1992. "A simple Observer for Nonlinear Systems: Applications to Bioreactors". *IEEE Trans. Autom. Control*, **37**(6), pág. 875-880.

Hägglblom, K. E. y Lehtinen, K. 1995 "Investigation of Operability and Controllability Properties of a Pilot-Scale Distillation Column", *Dycord +95*, pág. 339-344.

Hermann, R. y Krener, A. J., 1977. "Nonlinear Controllability and Observability". *IEEE Trans. Autom. Control*, **22**(5), pág. 728-740.

Hirschorn, R. M., 1979., "Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems". IEEE Trans. Autom. Control, **24**(6). pág. 855-865.

Holmes, M. J y Van Winkle, M., 1970., "Prediction of Ternary Vapor-Liquid Equilibria from Binary Data". Ind. Eng. Chem., **62**(1), pág. 21-31.

Hoo, K. A. y Kantor, J., 1985, "An exothermic continuous stirred tank reactor is feedback equivalent to a linear system" Chem. Engng. Commun. **37**, pág. 1-10.

Hunt, L. R., Su, R. and Meyer, G., 1983. "Global Transformations of Nonlinear Systems". IEEE., **28**(1), pág. 24-30.

Isidori, A., 1995, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Great Britain.

Joseph, B., y C. Brosilow, 1978 "Inferential Control of Process I: Steady State Analysis and Design," AIChE J., (**24**), pág 485

Jacobsen, E. W. y Skogestad, S. 1995 "Multiple Steady States and Instability in Distillation: Implications for Operation and Control", Ind. Eng. Chem. Res., **34**, pág. 4395-4405.

Kailath, T., 1980, *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Kravaris, C. y Chung, C. B., 1987. "Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization". AIChE J., **33**, pág. 592-603.

Krener, A. J., 1973. "On the equivalence of Control Systems and Linearization of Nonlinear Systems". SIAM J. Contr., **11**, pág. 670-676.

Kwakernaak, H. y Sivan, R., 1972, *Linear Optimal Control Systems*. J. Wiley, New York.

Lau, H. Alvarez, J. y Jensen, K. F., 1985, "Synthesis of Control Structures by Singular Value Analysis: Dynamic Measures of Sensitivity and Interaction", *AIChEJ*, **31**(3), pág. 427-439.

Lang, L. y Gilles, E. D., 1990, "Nonlinear observer for distillation columns", *Comp. Chem. Engng.*, **14**(11), pág. 1297-1301.

Luyben, L. W., 1990, *Process Modeling, Simulation and Control*, McGraw-Hill. New York.

Miller, S. K. y Leskiw, M. D; *An introduction to Kalman Filtering With Applications.*, Roberte E. Krieger Publishing Company; Malabar, Florida, 1987.

Mejdell, T. y Skogestad, S., 1991 "Estimation of Distillation Compositions From Multiple Temperature Measurements Using Partial-Least-Squares Regression", *Ind. Eng. Chem. Res.*, **30**, pág. 2543-2555.

Mejdell, T. y Skogestad, S., 1993 "Output Estimation Using Multiple Secondary Measurements: High-Purity Distillation", *AICHE J.*, **39**(10), pág. 1641-1653.

Morari, M. y Sthephanopoulos, G., 1980. "Optimal Selection of Secondary Measurements within the Framework of State Estimation in the Presence of Persistent Unknown Disturbances". *AICHE J*, **26**(2), pág. 247-259.

Padilla, L. S. y Alvarez, J, 1997a. "Control of Continuous Copolymerization Reactors". *AIChE Journal*, **48**(2), pág. 448-462.

Padilla, L. S y Alvarez, J 1997b. "Linear Output Feedback Control of Copolymerization Reactors". *Proceedings of the American Control Conference*. **4**, pág. 2444-2448.

Palomares, G. D., 1985. Selección de Estructuras de Control Para Columnas de Destilación. Tesis de Maestría en Ing. Química, UAM-I, México, D. F.

Quintero-Marmol, E., Luyben W. L., y Georgakis, C., 1991, Application of an extended Luengerber Observer to the Control of a Multicomponent Batch Distillation, Ind. Eng. Chem. Res., **30**, pág. 180-188.

Skogestad, S. y Morari, M., 1988a. "Understanding the Dynamic Behavior of Distillation Columns". Ind. Eng. Chem. Res., **27**, pág. 1848-1862.

Skogestad, S. y Morari, M., 1988b. "LV-Control of a High-Purity Distillation Columns". Chem. Engng. Sci., **43**(1), pág. 33-48.

Stephanopoulos, G. 1982, *Chemical Process Control: An introduction to theory and practice*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Wittgens, B. y Skogestad, S., 1995. "Evaluation of Dynamic Models of Distillation Columns with Emphasis on the Initial Response". DyCord + 95, pág. 261-267.

APÉNDICE A

SISTEMA EXPERIMENTAL

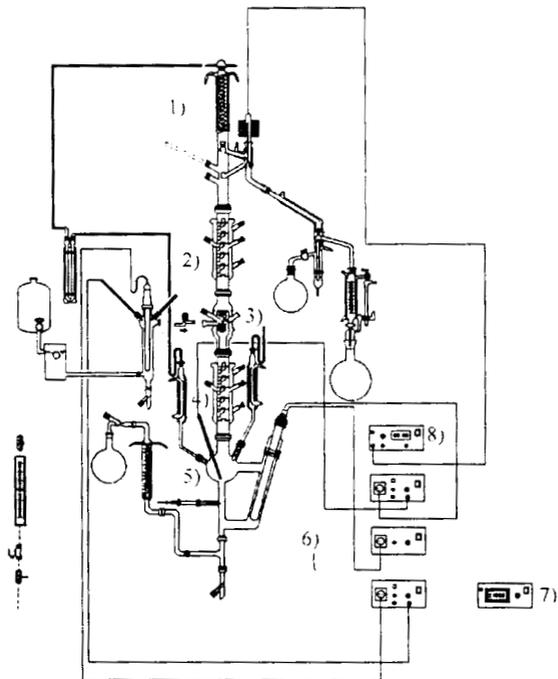


Figura A.1: Sistema experimental; 1) Condensador; 2) Sección de enriquecimiento; 3) Zona de alimentación; 4) Sección de agotamiento; 5) Evaporador; 6) Control de suministro de Calor; 7) Sistema digital de Temperaturas ; 8) Control de Reflujo.

APÉNDICE B

FUNCIONALIDADES Y DATOS TERMODINÁMICO EMPLEADOS EN EL MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA AZEOTRÓPICO ETANOL AGUAL

Ecuación de Wilson

$$\ln \gamma_i = 1 - \ln \left[\sum_{j=1}^N x_j A_{ij} \right] - \frac{\sum_{k=1}^N \frac{x_k A_{ki}}{\sum_{j=1}^N x_j A_{kj}}}{\sum_{j=1}^N x_j A_{ij}} \quad (\text{B.1})$$

Donde

$$A_{i,j} \equiv \frac{v_j^L}{v_i^L} \exp \left[\frac{-(\lambda_{i,j} - \lambda_{i,i})}{RT} \right] \quad (\text{B.2})$$

Tabla B.1 Constantes de Antoine

Componente	A	B	C	Rango de Temp. (°C)
Agua (H ₂ O)	7.96681	1668.21	228.00	60 A 150
Etanol (C ₂ H ₄ OH)	8.04494	1554.30	222.65

Tabla B.2 Datos de volumen Molar

Componente	T ₁ , °K	v ^L ₁ , cm ³ /gmol	T ₂ , °K	v ^L ₂ , cm ³ /gmol	T ₃ , °K	v ^L ₃ , cm ³ /gmol
Agua	277.13	18.060	323.15	18.278	373.15	18.844
Etanol	273.15	57.141	323.15	60.356	373.15	64.371

Tabla B.3 Parámetros de Wilson

Componente		$\lambda_{12}-\lambda_{11}$	$\lambda_{12}-\lambda_{22}$	Presión
1	2	cal/gmol	cal/gmol	mmHg
Etanol	Agua	382.30	955.45	760

APÉNDICE C

PROPIEDADES FÍSICO-QUÍMICAS Y PARÁMETROS DE OPERACIÓN

C_{p1} ,	Capacidad calorífica del etanol, [= 96 joul/mol °K]
C_{p2} ,	Capacidad calorífica del agua, [=76 joul/mol °K]
M_{W1} ,	Peso Molecular del etanol, [= 46.07 gr/mol]
M_{W2} ,	Peso Molecular del agua, [= 18 gr/mol]
$V_s = 0.9$	mol
r ,	Relación de reflujo al sistema, [= 0.22]
P ,	Presión del sistema, [= 101.3 kPa]
F_f ,	Flujo de alimentación a la columna, [= 35 ml/min.]
c_f ,	Composición de alimentacion a la columna, [= 0.4]
λ_1 ,	Peso Molecular del etanol, [= 35270.4 joul/mol]
λ_2 ,	Peso Molecular del agua, [=40656.2 joul/mol]
T_f ,	Temperatura de alimentación, [= 75 °C]
ρ_1 ,	Peso Molecular del etanol, [= 0.789 gr/ml]
ρ_2 ,	Peso Molecular del agua, [= 1.0 gr/ml]

Parámetros de Hidráulica:

De plato:

$$\alpha = 3.0$$

$$\beta = 1.5$$

$$M_0 = 0.1$$

Del mezclador:

$$\alpha_m = 8.5$$

$$\beta_m = 1.0$$

$$M_m = 0.1 \text{ mol}$$

APÉNDICE D

OBSERVADOR DE ENTRADAS EXÓGENAS (Exo-observador)

El sistema dinámico asociado a las entradas exógenas es de la forma:

$$\dot{x}_u = \Gamma_u x_u + \Pi_u v(t), \quad u = \Delta_u x_u, \quad v = \left[u_1^{(v_1)}, \dots, u_{n_u}^{(v_{n_u})} \right] \quad (D.1)$$

donde x_u es visto como un estado dinámico forzado por la entrada exógena $v(t)$, que se supone es continua por tramos (es decir, es Lipschitz). El subsistema (D.1) junto con la planta no lineal (5.1) se considera como la versión aumentada (Alvarez, 1997) de la planta.

Haciendo un cambio adecuado de coordenada

$$z_u = x_u$$

del sistema (D.1) se obtiene

$$\dot{z}_u = \Gamma_u z_u + \Pi_u v(t), \quad u = \Delta_u x_u \quad (D.2)$$

como $v(t)$ es acotada, entonces puede aproximarse a cero en el exo-observador, el cual estará dado por:

$$\dot{\zeta}_u = \Gamma_u \zeta_u + \Pi_u (0) + K_u (u - \Delta_u \zeta), \quad u = \Delta_u x_u \quad (D.3)$$

después de escribir el sistema (D.3) en coordenadas- χ_u , uno obtiene el siguiente estimador candidato de entradas exógenas en coordenadas físicas para la planta (5.1):

$$\dot{\chi}_u = A_u \chi_u + K_u u, \quad u = \Delta_u x_u \quad (D.4)$$

donde K_u es una matriz de ganancias en bloque diagonal parametrizada por s_u ,
 $A_u = \Gamma_u - K_u \Delta_u$, y

$$K_u(s_u) = \text{bd} \left[s_u k_{1i}^0, s_u^2 k_{2i}^0, \dots, s_u^{k_i} k_{k_i i}^0 \right]^T, s_u > 0$$

D.1 El sistema convergente robustamente

La sustracción de (D.2) de (D.3) se obtiene la dinámica del error de estimación

$$\dot{e}_u = A_u e_u + \Pi_u v(t) \quad (\text{D.5})$$

Esta ecuación diferencial matricial tiene solución;

$$e_u(t) = \exp[A_u(t-t_0)] * e_{u0} + \int_0^t \exp[A_u(t-\tau)] \Pi_u v(\tau) d\tau \quad (\text{D.6})$$

Además, si A_u es estable, entonces existen números a_u, λ_u, s_u , tales que:

$$\|\exp[A_u t]\| \leq a_u \exp[-\lambda_u s_u t] \quad (\text{D.7})$$

de tal forma que tomando normas a la expresión (D.6) y sustituyendo la desigualdad (D.7) se obtiene;

$$\|e_u(t)\| \leq a_u \|e_{u0}\| \exp[-\lambda_u s_u (t-t_0)] + \int_0^t a_u \exp[-\lambda_u s_u (t-\tau)] \varepsilon_u d\tau \quad (\text{D.8})$$

$$\leq a_u \|e_{u0}\| \exp[-\lambda_u s_u (t-t_0)] + \frac{a_u}{s_u \lambda_u} \varepsilon_u \quad (\text{D.9})$$

donde $\varepsilon_u = \|\Pi_u v(t)\|$.

APÉNDICE E

TRANSFORMACIÓN NO-LINEAL DE COORDENADAS MEDIANTE RETROALIMENTACION DE SALIDAS

Considerando la planta no lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = f[x, u(t), d(t)]; \\ y = h[x]; \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

donde $x \in X \subset \mathcal{R}^n$, $y \in Y \subset \mathcal{R}^m$, $u \in U \subset \mathcal{R}^m$. f y h son campos vectoriales suaves (infinitamente diferenciables) en el conjunto $X \times U$, x son los estados del sistema, y son las salidas, u son las entradas de control y d son las entradas exógenas conocidas, siendo continuas en el tiempo; y con base en las nociones de invertibilidad y linealización entrada-salida es posible definir el sistema (E.1) en un sistema equivalente mediante una transformación no lineal de estados;

$$z = \phi(x, u) - \phi(\bar{x}, \bar{u}) \quad (\text{E.2})$$

como un nuevo sistema de coordenadas que representa el vector estados x , y

$$v = \varphi(x, u, t) \quad (\text{E.3})$$

como un nuevo sistema que representa las entradas u (visto como una nueva entrada de control).

Correspondiendo a:

$$z = \begin{bmatrix} z_I \\ z_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\kappa \\ \dots \\ z_{\kappa+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\kappa_1-1)} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\kappa_2-1)} h_2(x) \\ h_m(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\kappa_m-1)} h_m(x) \\ \dots \\ \phi_{\kappa+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\kappa_1} h_1 + \sum_{i=1}^m L g_i L_f^{(\kappa_1-1)} h_1 u_i \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_m} h_m + \sum_{i=1}^m L g_i L_f^{(\kappa_m-1)} h_m u_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

De tal forma que las derivadas de z_I satisfacen la siguiente dinámica lineal:

$$\begin{array}{l}
\dot{z}_1 = z_2 \\
\dot{z}_2 = z_3 \\
\vdots \\
\dot{z}_{\kappa_1-1} = z_{\kappa_1} \\
\dot{z}_{\kappa_1} = v_1 \qquad y_1 = z_1 \\
\text{-----} \\
\vdots \\
\text{-----} \\
\dot{z}_{\kappa-\kappa_m+1} = z_{\kappa-\kappa_m+2} \\
\vdots \\
\dot{z}_{\kappa} = v_m \qquad y_m = z_{\kappa-\kappa_m+1}
\end{array} \tag{E.5}$$

y para z_{II} es

$$\dot{z}_{II} = \theta(z_I, z_{II}, \mu(x, v)) \tag{E.6}$$

denotando este subsistema como dinámica cero (o dinámica interna).

En forma vectorial el sistema (E.5) y (E.6) se puede reescribir como:

$$\Sigma_I \left\{ \begin{array}{l}
\dot{z}_I = \Gamma z_I + \Pi v \qquad \dim z_I = \kappa \qquad (\text{dinámica observable}) \\
y = \Delta z_I \qquad \dim y = p \\
\dot{z}_{II} = \theta(z_I, z_{II}, \mu(x, v)) \qquad \dim z_{II} = n - \kappa \qquad (\text{dinámica no-observable})
\end{array} \right. \tag{E.7}$$

el cual es equivalente a Σ (Ecuación 5.1) mediante un cambio de coordenadas.

Donde Γ , Π y Δ se definen como:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\kappa, \kappa}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{bmatrix} \quad \pi_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\kappa_i \times 1}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad \delta_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathfrak{R}^{1 \times \kappa_i}$$

Así, el par (Γ, Π) es controlable y el par (Γ, Δ) es completamente observable en el nuevo sistema de coordenadas y, a este arreglo se le denomina **Forma dual de Brounovski**.