



UNIDAD IZTAPALAPA
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias (Física)

“Un estudio dinámico del problema restringido equilátero
de cuatro cuerpos”

Tesis

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Física)

PRESENTA:

José Alejandro Zepeda Ramírez
Matrícula: 2133803131
Correo: zeral@xanum.uam.mx

Directora:
Dra. Martha Álvarez Ramírez

Jurado:

Presidente:
Dr. Eduardo Piña Garza

Secretaria:
Dra. Martha Álvarez Ramírez

Vocal:
Dr. Arturo Olvera Chavez

Vocal:
Dr. Joaquín Delgado Fernández

Vocal:
Dr. Renato Carlos Calleja Castillo

Iztapalapa, Ciudad de México a 27 de Septiembre de 2024

Índice general

Introducción	1
1. Teoría de sistemas hamiltonianos	7
1.1. Transformaciones simplécticas	7
1.1.1. Transformaciones de Lie	7
1.1.2. Forma normal	9
1.2. Estabilidad de sistemas hamiltonianos	11
1.2.1. Sistemas hamiltonianos lineales	12
1.2.2. Sistemas hamiltonianos no lineales	14
1.3. Estabilidad para hamiltonianos con dos grados de libertad	16
1.4. Teoría de perturbaciones	20
1.4.1. Teoría de promedios	20
1.4.2. Teoría KAM	21
2. El problema de n cuerpos	25
2.1. El problema de Kepler	27
2.2. Integrales primeras	32
2.3. Soluciones de equilibrio y configuraciones centrales	35
3. Problema restringido plano equilátero de cuatro cuerpos	39

3.1. Ecuaciones de movimiento	39
3.2. Formulación hamiltoniana	44
4. Puntos de equilibrio y su estabilidad lineal	49
4.1. Localización y determinación del número de puntos de equilibrio .	49
4.2. Estabilidad lineal de los puntos de equilibrio	56
5. Estabilidad no lineal de los puntos de equilibrio	75
5.1. Normalización del hamiltoniano	75
5.2. Estabilidad de los equilibrios	79
5.2.1. Caso $m_1 = 0.01$	79
5.2.2. Caso $m_1 = 0.99$	80
5.2.3. Determinación de la estabilidad cuando $D_4 = 0$	82
5.2.4. Determinación de la estabilidad en presencia de la resonancia 2:-1	85
5.3. Estabilidad en el caso general	87
5.3.1. Estabilidad de L_3, L_5 y L_6 en la región I	88
5.3.2. Estabilidad de L_3, L_5 y L_6 en la región III	89
5.3.3. Determinación de la estabilidad cuando $D_4 = 0$	90
5.3.4. Estabilidad en presencia de resonancia 2:-1	94
5.3.5. Determinación de la estabilidad en presencia de la resonancia 3:-1 para el caso general	98
6. Reducción singular en el PRECC	105
6.1. Espacio orbital para el flujo de un oscilador bidimensional	106
6.2. Reducción singular para los puntos de equilibrio linealmente estables en el PRECC	114
Apéndice A. Tablas de valores de D_6 donde $D_4 = 0$	129

Apéndice B. Tablas del valor del coeficiente δ del hamiltoniano (5.17)	137
Apéndice C. Tablas de valores de ΔD obtenida a partir de la forma normal en presencia de la resonancia 3:-1	145
Bibliografía	153

Agradecimientos

A mi asesora de tesis:

A la Dra. Martha Alvarez Ramírez

Por su valioso apoyo, tiempo y paciencia
para dirigir mi trabajo de tesis.

A Mis revisores:

Eduardo Piña Garza, Arturo Olvera Chavez,
Joaquín Delgado Fernández, Renato Carlos Calleja Castillo.

A la UAM :

Por la beca con la cual he podido realizar mis estudios de doctorado

Quiero recordar con mucho cariño a mi madre Ángela Dora
que, aunque ya no este le agradezco infinitamente y con
mucho amor el haberme dado la oportunidad
de tener una excelente educación.

Del mismo modo quiero recordar y agradecer
al Dr. José Antonio García Rodríguez
por sus valiosa ayuda y consejos
que me sirvieron para poder realizar esta tesis.

Índice de figuras

2.1. El problema de Kepler.	31
3.1. El problema restringido plano equilátero de cuatro cuerpos en un sistema de referencia sinódico.	40
4.1. Curvas del nivel cero $f_1(x, y) = 0$ (rojo) y $f_2(x, y) = 0$ (azul) para valores de masas: (a) $m_1 = 0.02$ y $m_2 = 0.01$, (b) $m_1 = 0.4$ y $m_2 = 0.35$. Los puntos de color verde colocados en las intersecciones de las curvas corresponden a los puntos de equilibrio, mientras que los puntos negros corresponden a la posición de los primarios.	50
4.2. Simplejo de parámetros Σ en el espacio de masas (m_1, m_2, m_3) normalizado con $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. El simplejo tiene vértices en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$	51
4.3. Proyección de Σ sobre el plano de masas (m_1, m_2) . En la región verde hay 8 puntos de equilibrio, mientras que en la roja hay 10. Las líneas discontinuas negras indican las posiciones relativas de los primarios.	52
4.4. La evolución de los puntos de equilibrio como función del parámetro de masa m_2 para el valor fijo de: (a) $m_1 = 0.01$ y (b) $m_1 = 0.99$	54
4.5. Evolución de la constante de Jacobi C_J para cada punto de equilibrio en función de m_2 para $m_1 = 0.01$ (<i>izquierda</i>) y $m_1 = 0.99$ (<i>derecha</i>).	55
4.6. Región de Hill para $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$ con $C_J = 3.2548$, $C_J = 3.2275$, $C_J = 3.145$, $C_J = 3.135$, $C_J = 3.0265$, $C_J = 3.01$, $C_J = 3$ y $C_J = 2.985$, respectivamente. Los puntos azules son los primarios, y los puntos rojos corresponden a los puntos de equilibrio. La región sombreada es donde el movimiento de m_0 no está permitido.	64

4.7. Región de Hill para $m_1 = 0.99$ y $m_2 = 0.0077$ con $C_J = 3.142$, $C_J = 3.131$, $C_J = 3.060$, $C_J = 3.058$, $C_J = 3.01$, $C_J = 3.005$, $C_J = 2.999$ y $C_J = 2.995$, respectivamente. Los puntos azules son los primarios, y los puntos rojos corresponden a los puntos de equilibrio. La región sombreada es donde el movimiento de m_0 no está permitido. . . .	65
4.8. Región de Hill para $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$ con $C_J = 3.2548$, $C_J = 3.2275$, $C_J = 3.145$, $C_J = 3.135$, $C_J = 3.0265$, $C_J = 3.01$, $C_J = 3$ y $C_J = 2.985$, respectivamente. Los puntos azules son los primarios, y los puntos rojos corresponden a los puntos de equilibrio. La región sombreada es donde el movimiento de m_0 no está permitido. . . .	66
4.9. Regiones de estabilidad de la configuración de Lagrange (sombreado) e inestabilidad (región en blanco que esta por debajo de la línea $m_1 + m_2 = 1$). El valor de la tercer masa es $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. Las curvas en rojo corresponden al valor crítico de Routh.	67
4.10. Gráficas de las frecuencias ω_1 y ω_2 para $m_1 = 0.01$ como función de m_2 para los puntos de equilibrio: (a) L_3 and (b) L_6	67
4.11. Gráficas de las frecuencias ω_1 y ω_2 para $m_1 = 0.99$ como función de m_2 para los puntos de equilibrio: (a) L_5 , (b) L_6 , (c) L_3	68
4.12. Curvas de resonancia para el punto L_3 en las regiones I y III. . . .	69
4.13. Curvas de resonancia para el punto L_5 en las regiones I y III. . . .	69
4.14. Curvas de resonancia para el punto L_6 en las regiones I y III. . . .	70
4.15. Todas las curvas de resonancia en la región I para los puntos de equilibrio L_3 , L_5 y L_6	70
4.16. Todas las curvas de resonancia para los puntos de equilibrio L_3 , L_5 y L_6 en la región III. La línea recta $m_1 = 1 - 2m_2$ corresponde a $m_2 = m_3$	71
4.17. Curvas de resonancia 1:1 en la región II, donde dos cuerpos primarios tienen masas iguales: $A(0.002736, 0.002716)$ para L_5 y $B(0.01883, 0.01883)$ para L_3 y L_6	71
4.18. Resonancia 1:1 con dos cuerpos primarios con igual masa en la región III: $C(0.002736, 0.994528)$ para L_3 y $D(0.01883, 0.96234)$ para L_5 y L_6	72

4.19. La región $CYVX$ es el área de estabilidad lineal de los primarios en el espacio de masas, donde $R_4 = CST$, $R_6 = CUT$ y $R_5 = CUVY$ son las regiones de estabilidad de los puntos de equilibrio L_5 , L_3 and L_6	72
4.20. (a) Los diferentes colores indican el número total de puntos de equilibrio estables en la región I. Esto es tomado de [74]. (b) Curvas de resonancia 1:1 en la región I y los dominios de estabilidad para L_3 , L_5 y L_6	73
4.21. (a) Los diferentes colores indican el número total de puntos de equilibrio estables en la región III. Esto es tomado de [74].	73
5.1. Gráfica de D_4 en función de m_2 con $m_1 = 0.01$ para L_3 . El valor de m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1, también existe un valor de m_2 donde $D_4 = 0$	80
5.2. Gráfica de D_4 en función de m_2 con $m_1 = 0.01$ para L_6 . El valor de m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad (asíntota vertical) corresponde a la resonancia 2:-1 resonancia, también existe un valor de m_2 para donde $D_4 = 0$	81
5.3. Gráficas de D_4 en función de m_2 para L_5 con $m_1 = 0.99$ y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. (a) $D_4 \neq 0$ para todo valor de m_2 donde L_5 es linealmente estable. La discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1. (b) Amplificación de la región cercana a la resonancia 2 : -1. (c) Amplificación de la región donde $D_4 = 0$	82
5.4. Gráficas de D_4 en función de m_2 para L_6 con $m_1 = 0.99$ y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. (a) La figura muestra a $D_4 \neq 0$ en el rango de valores donde m_2 es linealmente estable. La discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1. (b) Amplificación de la región cercana a la resonancia 2:-1. (c) Amplificación de la región donde el determinante D_4 se anula.	83
5.5. Gráfica de D_4 en función de m_2 , para L_3 con $m_1 = 0.99$	84
5.6. Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_3 en la región I. El valor m_1 y m_2 donde la gráfica de D_4 tiene una discontinuidad que corresponde a la resonancia 2:-1.	89
5.7. Curvas de nivel de D_4 para L_3 en la región I. En particular resaltamos la curva donde $D_4 = 0$	90

5.8. Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_5 en la región I. Los valores de m_1 y m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad corresponden a la resonancia 2:-1.	91
5.9. Curvas de nivel del determinate D_4 para L_5 en la región I. Notemos la existencia una curva donde $D_4 = 0$	92
5.10. Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_6 en la región I. El valor m_1 y m_2 donde el determinante D_4 tiene una discontinuidad que corresponde a la resonancia 2:-1.	93
5.11. Curvas de nivel de D_4 para L_6 en la región II. Notar la existencia de la curva donde $D_4 = 0$	94
5.12. Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_3 en la región III. El valor m_1 y m_2 donde el determinante D_4 tiene una discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1.	95
5.13. Curvas de nivel de D_4 en el plano m_2m_1 para L_3 en la región III. En particular existe una curva donde $D_4 = 0$	96
5.14. Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_5 en la región III. El valor m_1 y m_2 donde el determinante D_4 tiene una discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1.	97
5.15. Curvas de nivel de D_4 para L_5 en la región III. Notemos que existe una curva donde $D_4 = 0$	98
5.16. Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_6 en la región III. El valor m_1 y m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad, la cual corresponde a la resonancia 2:-1.	99
5.17. Curvas de nivel del determinate D_4 para L_6 en la región III, la curva de nivel donde $D_4 = 0$ y la curva de resonancia 2:-1.	100
5.18. Curvas de resonancia, curva $D_4 = 0$ (color naranja) para: (a) L_3 en la región I, (b) L_3 en la región III.	101
5.19. Domino de estabilidad lineal, curvas de resonancia y la curva donde $D_4 = 0$ (color naranja) para: (a) L_5 en la región I, (b) L_5 en la región III.	103
5.20. Curvas de resonancia y la curva donde $D_4 = 0$ (color naranja) para: (a) L_6 en la región I, (b) L_6 en la región III.	104

5.21. Curvas $D_4 = 0$ para: (a) L_3, L_5 y L_6 en la región I. (b) L_3, L_5 y L_6 en la región III.	104
6.1. Una representación de \mathbb{S}^3 . Estas figuras fueron tomadas de [41].	107
6.2. Secciones en \mathbb{S}^3 cuando $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$. Esta figura fue tomada de [41].	109
6.3. Secciones en \mathbb{S}^3 cuando $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$. Esta figura fue tomada de [41].	111
6.4. Fila superior: ρ versus a_1 . Fila inferior: Espacios orbitales.	113
6.5. Espacios orbitales para tres distintas resonancias: (a)-(c) 2:-1, (d)-(f) 3:-1, (g)-(i) 4:-1, con distintos signos en la energía $h < 0, h = 0, h > 0$ respectivamente.	124
6.6. Flujo sobre el espacio orbital para la resonancia 2:-1.	125
6.7. Diagramas de bifurcación para: (a) $h < 0, (b) h > 0$	126
6.8. Flujo en el espacio orbital para la resonancia 3:-1 cuando $h < 0$	127
6.9. Flujo en el espacio orbital para la resonancia 3:-1 cuando $h > 0$	128

Introducción

La ley de la gravitación universal motivo una nueva rama de la astronomía, la llamada *mecánica celeste*, la cual se ocupa de la teoría matemática de los movimientos de los cuerpos celestes. En otras palabras, esta disciplina describe en forma matemática las fuerzas que actúan sobre un determinado sistema de cuerpos celestes (fuerzas gravitacionales, resistencia atmosférica, presión de radiación, etc.) obteniendo como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, que en teoría, al ser resueltas permiten determinar el vector posición y velocidad de cada cuerpo para un cierto instante de tiempo. En particular, esta herramienta matemática nos permite analizar la dinámica del movimiento de los planetas alrededor del Sol, la órbita de un cometa, el de la luna en torno a la Tierra o bien de una nave espacial a través del sistema solar, entre otros.

El problema newtoniano de N cuerpos consiste en estudiar los movimientos que N masas no nulas que interactúan mutuamente según las leyes de la gravitación universal de Newton. Este problema tiene su origen en el siglo XVII, el cual por su historia y sus desafíos, es un problema fundamental en la física matemática. La ley de la gravitación universal fue formulada por Isaac Newton en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en 1687 ([51]), donde también resolvió el problema de dos cuerpos (reducido al problema de Kepler), proporcionando una demostración matemática de las tres leyes de Kepler. En particular, la primera ley de Kepler, la cual dice que el movimiento de los planetas es periódico y sus trayectorias son elipses, con el Sol en uno de los dos focos. Además, Newton demostró que el problema de N cuerpos, para $N \geq 3$, no tiene integrales primeras, adicionales de las diez integrales clásicas (centro de masa, momento lineal, momento angular y energía) y la eliminación de nodos de Jacobi, que permiten integrar el problema, para mayores detalles ver [57]. Más aún, él creía que este problema era demasiado difícil de resolver. Hoy día todavía no existe una solución exacta para el problema de $N \geq 3$ cuerpos, y sigue siendo un problema abierto.

Una alternativa para estudiar el problema de N cuerpos es considerar algunas simplificaciones de éste, por ejemplo, el caso donde la masa de un cuerpo sea

infinitesimal m_0 (pero no nula), el cual se mueve bajo la influencia gravitatoria de $N - 1$ cuerpos de masas positivas (llamados *primarios*) cuyas órbitas son una solución del problema de $N - 1$ cuerpos. La fuerza ejercida por la masa infinitesimal sobre los primarios puede ignorarse ya que tiene una masa despreciable. El estudio del movimiento de m_0 se conoce como el *problema restringido de N cuerpos*.

El problema restringido más estudiado es el problema restringido circular de tres cuerpos, en el cual se asume que los dos primarios describen órbitas circulares, o bien elípticas (lo cual es una buena aproximación para el sistema Sol-Tierra-Luna). Este ha sido ampliamente estudiado por muchos matemáticos y físicos famosos, como Lagrange en el siglo XVIII y Poincaré al final del siglo XIX. En el problema circular existen cinco puntos de equilibrio: tres colineales (puntos de Euler) y dos que se localizan en el tercer vértice de triángulos equiláteros formados con las dos primarios (puntos de Lagrange). En el sistema Sol-Júpiter los puntos lagrangianos están en la misma órbita de Júpiter, pero 60° por delante o por detrás, y forman con el Sol y Júpiter una configuración de triángulo equilátero. El que estos puntos estén ocupados por los asteroides troyanos constituye una bella confirmación. El libro de Szebehely [68] presenta una recopilación de muchos estudios analíticos y numéricos de este problema.

Esta tesis esta dedicada al estudio del problema restringido equilátero de cuatro cuerpos (que abreviaremos como *PRECC*), en el cual, se considera el movimiento de un cuerpo con masa infinitesimal bajo la influencia gravitacional de tres cuerpos de masas positivas (primarios) m_1 , m_2 y m_3 , las cuales se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas común, con velocidad angular constante ω , formando una configuración de triángulo equilátero o de Lagrange, para todo tiempo, y su movimiento no se ve afectado por m_0 . Además, suponemos que el movimiento de m_0 está confinado en el mismo plano de los primarios.

El problema de cuatro cuerpos, en varias versiones, ha sido utilizado por muchos científicos para diversas aplicaciones prácticas. Un ejemplo del PRECC es el sistema Saturno-Tetis-Telesto (o Calipso)-nave espacial, donde Tetis es la luna mas grande de Saturno y dos pequeños satélites coorbitales, Telesto y Calipso, se encuentran en los puntos de Lagrange L_4 y L_5 , 60° a lo largo de la órbita, delante y detrás de Tetis.

El PRECC ha sido objeto de varios trabajos de investigación, aquí mencionaremos algunos de éstos. El caso cuando los tres primarios tienen masas iguales fue estudiado en [5]. Por otro lado, en [4] los autores consideraron la regularización de colisiones binarias entre el cuerpo infinitesimal y cualquiera de los primarios. Con respecto a la localización y estabilidad lineal de los puntos de equilibrio, existe una cantidad sustancial de trabajos, pero sólo mencionaremos los mas relevantes.

Comenzamos con el trabajo de Pedersen [54, 55], quien utilizó una combinación de métodos numéricos y analíticos para calcular el número y las posiciones de los puntos de equilibrio de la masa infinitesimal en el problema restringido de $3 + 1$ cuerpos, cuando los tres primarios forman una configuración triangular equilátera de Lagrange. Él encontró que, puede haber 8, 9 ó 10 puntos de equilibrio, dependiendo de los valores de las masas de los primarios. Más aún, Pedersen demostró que el conjunto de masas para las cuales existe bifurcación del número de puntos de equilibrio forman una curva cerrada y simple, contenida en el interior del triángulo de masas positivas (denotada en este trabajo como Σ), el cual está contenido en el espacio de las masas. A esta curva la denotaremos por \mathcal{B} . Los cálculos numéricos de Pedersen fueron confirmados posteriormente en el trabajo de Simó [61], quien realizó un estudio numérico para determinar el número de puntos de equilibrio relativos en el problema general de cuatro cuerpos. En el trabajo de Arenstorf [7] se esbozan algunas pruebas analíticas de los principales resultados obtenidos por Pedersen en [54, 55]. En la parte final de su artículo, Arenstorf afirma que un análisis riguroso que demuestran sus resultados numéricos esta contenido en la tesis de doctorado de Gannaway [27], pero solo hay poca evidencia analítica para unas afirmaciones particulares. Es claro, que la mayor parte de las afirmaciones sobre las bifurcaciones de las configuraciones centrales fueron nuevamente verificadas solo de forma numérica. Estos estudios fueron posteriormente completados por Barros y Leandro [13, 14]. Ellos utilizaron técnicas de geometría algebraica para dar una demostración matemática rigurosa (asistida por computadora) de que \mathcal{B} es una curva simple, cerrada y continua y que está contenida en el triángulo de masas Σ . Adicionalmente, Leandro y Barros confirmaron que existen 8, 9 y 10 puntos de equilibrio y, demostraron que 6 de ellos están localizados afuera de la configuración de triángulo equilátero de los primarios. Mas recientemente, Figueras *et al.* [26] dieron una demostración alternativa a la dada por Barros y Leandro [13, 14], donde aplicaron técnicas de análisis real y usaron resultados asistidos por computadora. La finitud del número de equilibrios en el PRECC fue demostrada por Kulevich *et al.* [33]. Ellos usaron herramientas de geometría algebraica para demostrar que el número de equilibrios en el PRECC es finito, para cualquier elección de las masas y, que es menor a 196. Sin embargo, ellos afirmaron que la mayoría de estas soluciones encontradas no tienen significado físico. Las simulaciones numéricas desarrolladas por ellos mostraron que el número de puntos de equilibrio varía de 8 a 10, dependiendo del valor de las masas.

En lo que sigue vamos a mencionar algunos estudios relacionados con la estabilidad no lineal de los puntos de equilibrio en el PRECC. El caso donde dos primarios tienen masas iguales fue estudiado por Alvarez-Ramírez *et al.* [4] y, aplicaron el teorema de Arnold en presencia de resonancia $2:-1$ (ver [40]). Zepeda Ramírez *et al.* [72] realizaron un estudio de la estabilidad no lineal para un caso

particular del PRECC con valores de masas distintas y aplicaron el teorema de Arnold en presencia de resonancia 2:−1 y 3:−1 para determinar la estabilidad.

Estudios relacionados con las orbitas periódicas en el PRECC, desde el punto de vista teórico y numérico, fueron llevados a cabo, entre otros, por Baltagiannis y Papadakis [11], Burgos-García y Delgado [17], Papadakis [53], Mireles-James y Murray [46], Burgos-García y Bengochea [18].

Por otro lado, existe una diversidad de trabajos relacionados con el estudio del PRECC donde se consideran conexiones de órbitas de tipo heteroclínico y homoclínico, así como efecto sky-blue y el problema de Hill de cuatro cuerpos con primarios en configuración de Lagrange, etc. Una lista de éstos, no exhaustiva, fueron realizados por Burgos-García y Gidea [29], Álvarez-Ramírez y Barrabés [3], Mireles James y Murray [46], Kepley y Mireles James [32], She *et al.* [60], She y Cheng [60], Burgos-García y Delgado [16], Burgos-García y Gidea [20] y Burgos-García *et al.* [19].

Los objetivos de este trabajo de tesis son varios. Primero la localización de los puntos de equilibrio en el PRECC en el caso donde los valores de las masas de los primarios son diferentes (es decir, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$). Posteriormente, determinar su estabilidad lineal y en el caso de que el punto de equilibrio sea elíptico determinar su estabilidad no lineal haciendo uso del teorema de Arnold (ver Meyer y Offin [41]) en ausencia de resonancias. Para el caso donde hay resonancias, aplicaremos los teoremas de Markeev (ver [40], [39]) y Meyer [41], así como reducción singular.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. En el capítulo 1 presentamos brevemente los resultados sobre la teoría de sistemas hamiltonianos donde incluimos cuestiones relevantes de la teoría de perturbaciones, transformaciones de Lie, formas normales, teoría de reducción, teoría de estabilidad y teoría KAM. El capítulo 2 está dedicado a introducir el problema de N cuerpos, así como temas relacionados con problema de Kepler y configuraciones centrales. El problema restringido equilátero de cuatro cuerpos (PRECC) es introducido en el capítulo 3, en el cual normalizamos la masa total a uno ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$), y como consecuencia el PRECC se transforma en un problema biparamétrico, el cual es de difícil estudio analítico.

El capítulo 4 está dedicado a la localización y estudio numérico de estabilidad lineal de las soluciones de equilibrio. Es claro que el número, localización y la estabilidad de las soluciones de equilibrio dependen de los valores de las masas de los primarios. En la sección 4.1 se describe un método para poder determinar la localización y número de puntos de equilibrio, así como su distribución sobre el triángulo de masas Σ . Posteriormente, en la sección 4.2 determinamos la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio, para lo cual utilizamos la matriz del

sistema lineal del PRECC asociado en cada equilibrio en todo Σ . Luego, mostramos las regiones de estabilidad lineal en Σ y construimos las *curvas de resonancia* de los equilibrios que son linealmente estables, las cuales están determinadas por una relación diofántica entre los valores propios de la matriz del sistema lineal asociado.

En el capítulo 5 estudiamos la estabilidad no lineal de las soluciones de equilibrio que son linealmente estables, en ausencia y presencia de ciertas resonancias. La forma normal del hamiltoniano la obtenemos en la sección 5.1, donde se construye un cambio simpléctico de coordenadas adecuado que lleva a la parte cuadrática del hamiltoniano a su forma más simple, es decir, a su forma normal de Birkhoff, para lo cual se aplica algoritmo de transformaciones del triángulo de Lie [41]. En particular, esta forma normal la obtenemos a cuarto orden en variables complejas, así como en variables acción-ángulo.

Una vez obtenida la forma normal procedemos a aplicar el teorema de Arnold y determinamos la estabilidad no lineal de los equilibrios en ausencia de resonancias. Los casos donde hay resonancias aplicamos los teoremas de Markeev [40] y el de Meyer-Alfried [41] para resonancia 2:−1, mientras que el teorema de Meyer [41] es aplicado para el caso de resonancia 3:−1. La sección 5.2 contiene los resultados la estabilidad no lineal para los puntos de equilibrio elípticos en ausencia y en presencia de la resonancia 2:−1, para dos valores particulares del primario $m_1 = 0.01, 0.99$, y el parámetro libre es m_2 .

En la sección 5.3 se determina la estabilidad no lineal para los puntos de equilibrio elípticos para el caso general, es decir, en las regiones de estabilidad lineal delimitadas por las curvas de resonancia 1:−1, en particular consideramos las curvas de resonancia 2:−1 y 3:−1, obteniendo la forma normal para cada pareja de valores masas que forman estas curvas. En este caso los coeficientes de la forma normal dependen de los valores de (m_1, m_2) .

Finalmente, el capítulo 6 se lleva a cabo un estudio más profundo en las resonancias consideradas, usando una técnica conocida como reducción singular, ver [41] y [45]. Esta nos ayuda a visualizar la existencia de orbitas periódicas y sus bifurcaciones, así como la existencia de toros KAM en la vecindad de los puntos de equilibrio elípticos. En la sección 6.1 introducimos la teoría de la reducción singular, cuyo material está inspirado en lo expuesto en los capítulos 1 y 12 del libro de Meyer y Offin [41]. La sección 6.2 incluye un estudio del efecto de las resonancias en la dinámica del PRECC en uno de los puntos de equilibrio elípticos, donde aplicamos la teoría de reducción singular. Los resultados obtenidos permiten visualizar de manera geométrica, en los llamados *espacios orbitales*, la estabilidad de algunas orbitas periódicas vistas como puntos críticos del flujo reducido en estos

espacios, además de la existencia de algunas bifurcaciones de órbitas, así como la existencia de toros KAM cercanos a las orbitas periódicas.

Capítulo 1

Teoría de sistemas hamiltonianos

En este capítulo enunciamos los resultados necesarios sobre la teoría de sistemas hamiltonianos para el desarrollo de esta tesis. En particular, aquellos relacionados a la teoría de perturbaciones, transformaciones de Lie, formas normales, teoría de reducción, teoría de estabilidad, teoría KAM y teoría de bifurcaciones.

1.1. Transformaciones simplécticas

El uso de transformaciones simplécticas de coordenadas se utiliza como una herramienta para simplificar el estudio de los sistemas hamiltonianos, y así resolver problemas relacionados con la teoría de la estabilidad y mecánica celeste.

1.1.1. Transformaciones de Lie

En esta sección revisaremos el método de transformaciones de Lie e introducimos la noción y definición de forma normal para un sistema hamiltoniano.

El método de transformaciones de Lie fue desarrollado en 1969 por Deprit [23], [41]. Este es un procedimiento para construir una transformación simpléctica de coordenadas próxima a la identidad para sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro.

Consideremos el sistema dinámico de dimensión $2n$ definido por las ecuaciones

$$\dot{x} = J\nabla H(x, t), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (1.1)$$

este es un *sistema hamiltoniano* con n grados de libertad. La función escalar suave $H : D \subseteq \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función hamiltoniana*, J la matriz simpléctica e I denota la matriz identidad $n \times n$.

Definición 1. Se dice que $x \equiv X(y, \varepsilon)$ es un cambio de coordenadas simpléctico próximo a la identidad, si X es simpléctico para cada ε y tiene la forma $X(y, \varepsilon) = y + \mathcal{O}(\varepsilon)$, es decir, $X(y, 0) = y$.

Ya que $X(y, 0) = 0$ y $\partial X(y, \varepsilon)/\partial y = I + \mathcal{O}(\varepsilon)$ el cambio de coordenadas es no singular para ε suficientemente pequeño, aplicando el teorema de la función inversa obtenemos que la función $y \mapsto X(y, \varepsilon)$ tiene inversa diferenciable. Luego, si $y \equiv Y(X(y, \varepsilon), \varepsilon)$ es la inversa de $x \equiv X(Y(x, \varepsilon), \varepsilon)$ ambos cambios de variable son simplécticos para ε fijo.

Teorema 1. La transformación $X(y, \varepsilon)$ es un cambio de variables simpléctico cercano a la identidad si y solo si es solución general de un sistema hamiltoniano de la forma

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = J\nabla W(x, \varepsilon), \quad x(0) = y$$

donde W es diferenciable y J es la matriz antisimétrica clásica.

La demostración de este teorema se puede consultar en [41].

Sea $H(x, \varepsilon)$ un hamiltoniano y $G(y, \varepsilon) \equiv H(X(y, \varepsilon), \varepsilon)$ su expresión en las nuevas coordenadas. G se denomina la transformación de Lie de H generada por W . Sea $H = H_*$ y $G = H^*$, luego el método de la *transformada de Lie* es dado por las siguientes fórmulas:

$$H(\varepsilon, x) = H_*(\varepsilon, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(x), \quad (1.2)$$

$$G(\varepsilon, y) = H^*(\varepsilon, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(y), \quad (1.3)$$

$$W(\varepsilon, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} W_{i+1}(x), \quad (1.4)$$

donde $\{H_j^i\}$ para $i = 1, 2, \dots$ y $j = 0, 1, 2, \dots$ satisfacen la identidades recursivas

$$H_j^i = H_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}, \quad (1.5)$$

donde $\{\cdot, \cdot\}$ es el paréntesis de Poisson. Notemos que debido a que la transformación generatriz W es próxima a la identidad, las funciones H_* y H^* tienen el mismo primer término H_0^0 . Además, la expansión de W inicia con W_1 .

La dependencia de las funciones $\{H_j^i\}$ puede ser entendida más fácilmente en el llamado triángulo de Lie:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_0^0 & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 H_1^0 & \rightarrow & H_0^1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H_2^0 & \rightarrow & H_1^1 & \rightarrow & H_2^0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array} \tag{1.6}$$

Los coeficientes de la expansión del antiguo hamiltoniano H_* son los elementos de la columna de la izquierda, mientras que los del nuevo hamiltoniano H^* son los de la diagonal. La fórmula (1.5) nos dice que para calcular cualquier elemento del triángulo de Lie es necesario conocer los elementos en la columna en cada etapa a la izquierda y arriba. Por ejemplo, para calcular la expansión en series de H^* hasta orden ε^2 , primero calculamos H_0^1 usando la fórmula

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\}, \tag{1.7}$$

la cual da el término de orden ε , y luego calculamos

$$\begin{aligned}
 H_1^1 &= H_2^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\}, \\
 H_0^2 &= H_1^1 + \{H_0^1, W_1\}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Entonces $H^*(x, \varepsilon) = H_0^0(x) + H_0^1(x)\varepsilon + \frac{1}{2}H_0^2(x)\varepsilon^2 + \dots$.

1.1.2. Forma normal

Consideremos un hamiltoniano analítico y autónomo, tal que $x = 0$ es un punto de equilibrio y $H(0) = 0$. Entonces $H(x)$ tiene un desarrollo formal en serie de potencias de Taylor en una vecindad del origen de la forma

$$H_*(x) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(x), \tag{1.9}$$

donde H_i es polinomio homogéneo en x de grado i . En este desarrollo hemos omitido el término constante H_0 , pues no contribuye al sistema hamiltoniano, así

como al término H_1 debido a que estamos en un punto de equilibrio y es precisamente donde se anula el sistema hamiltoniano. Luego $H_2 = \frac{1}{2}x^T Sx$, donde S es una matriz real simétrica de orden $2n \times 2n$ y $A = JS$ es una matriz hamiltoniana. La linealización del sistema alrededor del punto de equilibrio $x = 0$ es

$$\dot{x} = Ax = JSx = J\nabla H_2(x), \quad (1.10)$$

con solución $\psi(t, \xi) = \exp(At)\xi$.

Ahora, consideremos una sucesión de cambios de coordenadas simplécticas cercanas a la identidad. Ya que $x = X(y) = y + \dots$ en las nuevas coordenadas el hamiltoniano (1.9) es el siguiente:

$$H^*(y) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(y). \quad (1.11)$$

En general la transformación de Lie y el hamiltoniano se desarrollan hasta cierto orden n y la función generatriz se trunca en ese mismo orden. Esto significa que la precisión de esas expresiones es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$.

Teorema 2. *Sea $A \in M_{2n \times 2n}$ semisimple (diagonalizable en los complejos). Entonces existe un cambio formal simpléctico de variables, $x = X(y, \varepsilon) = y + \dots$ el cual transforma el hamiltoniano (1.9) en (1.11), donde H_0^i es un polinomio homogéneo de grado $i + 2$ tal que*

$$H_0^i(e^{At}y) \equiv H_0^i(y), \quad (1.12)$$

para toda $i = 0, 1, \dots$, toda $y \in \mathbb{R}^{2n}$ y toda $t \in \mathbb{R}$.

Decimos que los términos H_0^1, H_0^2, \dots están en forma normal si se verifica la condición

$$\{H_0^0, H_0^i\} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

donde $H_0^0 = H_2$ es el término lineal asociado a la parte cuadrática. Cuando el hamiltoniano (1.11), y por lo tanto sus ecuaciones, tienen la expresión lo más simple posible que (1.9), decimos que está en *forma normal* y el proceso se denomina *normalización*.

Para ilustrar mejor la idea del proceso de normalización, damos el siguiente ejemplo. Consideramos un sistema con dos grados de libertad, donde la matriz A es el término lineal en (1.10), la cual tiene valores propios imaginarios puros $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$. En este caso existe un cambio de coordenadas lineal simpléctico que transforma a la parte cuadrática a la siguiente forma

$$H_2(x) = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + x_3^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + x_4^2). \quad (1.13)$$

Ahora introducimos variables acción-ángulo

$$I_1 = (x_1^2 + x_3^2), \quad I_2 = \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + x_4^2), \quad \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{x_3}{x_1}\right), \quad \phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{x_4}{x_2}\right) \quad (1.14)$$

para transformar a (1.13) en

$$H_2 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2. \quad (1.15)$$

Luego el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (1.10) es

$$\dot{I}_1 = 0, \quad \dot{I}_2 = 0, \quad \dot{\phi}_1 = -\omega_1, \quad \dot{\phi}_2 = -\omega_2 \quad (1.16)$$

Este sistema de ecuaciones tiene por solución

$$I_1 = A_0, \quad I_2 = B_0, \quad \text{con } \phi_1 = D_0 - \omega_1 t, \quad \phi_2 = C_0 - \omega_2 t, \quad (1.17)$$

donde A_0 , B_0 , C_0 y D_0 son constantes de integración. $A_0 > 0$ y $B_0 > 0$ definen un toro de dimensión dos con coordenadas angulares ϕ_1 y ϕ_2 . Para poder aplicar (2), debemos verificar que los términos en la forma normal permanezcan constantes en las soluciones de este sistema. Como consecuencia la forma normal dependerá de que el cociente de frecuencias es racional o irracional .

En el caso $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ el flujo sobre el toro es denso y la forma normal solo depende de las variables de acción I_1 e I_2 , entonces la forma normal del sistema es

$$H^*(I_1, I_2) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(I_1, I_2). \quad (1.18)$$

En el caso $\omega_1/\omega_2 = p/q \in \mathbb{Q}$, los términos en la forma normal pueden tener una dependencia angular dada por $\phi = p\phi_1 - q\phi_2$, entonces la forma normal es

$$H^*(I_1, I_2, p\phi_1 - q\phi_2) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(I_1, I_2, p\phi_1 - q\phi_2). \quad (1.19)$$

1.2. Estabilidad de sistemas hamiltonianos

Esta sección contiene conceptos y resultados sobre la teoría de la estabilidad en sistemas hamiltonianos, principalmente para el caso dos grados de libertad.

1.2.1. Sistemas hamiltonianos lineales

Un sistema hamiltoniano lineal está definido de la siguiente manera

$$\dot{x} = Ax = JSx = J\nabla H_2(x), \quad (1.20)$$

con $H_2(x) = \frac{1}{2}x^T Sx$, donde S es una matriz real simétrica de orden $2n \times 2n$, $A = JS$ es una matriz hamiltoniana y J es la matriz simpléctica canónica de orden $2n \times 2n$.

Definición 2. *El sistema de ecuaciones hamiltonianas (1.20) es estable si todas sus soluciones son acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $\|e^{At}\|$ es uniformemente acotada, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana usual. Equivalentemente (1.20) es estable si A tiene valores propios imaginarios puros y es diagonalizable en los complejos.*

A partir de aquí, la condición de diagonalización la llamaremos *condición de diagonalización imaginaria pura* (CDIP).

Si la matriz hamiltoniana A satisface la CDIP, entonces existe un cambio simpléctico real de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ para el cual, el hamiltoniano H_0 se expresa como

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \cdots + \frac{\omega_n}{2}(x_n^2 + y_n^2), \quad (1.21)$$

donde $\pm\omega_1, \pm\omega_2, \dots, \pm\omega_n$ son las frecuencias o valores propios de A . En variables acción-ángulo

$$I_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2), \quad \phi_i = \arctan\left(\frac{x_i}{y_i}\right), \quad \text{con } i = 1, \dots, n, \quad (1.22)$$

obtenemos

$$H_2 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \cdots + \omega_n I_n. \quad (1.23)$$

En el caso de que la matriz S sea definida positiva, o equivalentemente, si todas las frecuencias en (1.23) tienen el mismo signo, entonces el teorema de Dirichlet [24] nos garantiza que el sistema (1.20) es estable, además de que permanece estable bajo perturbaciones pequeñas. Esto nos motiva a las siguientes definiciones.

Definición 3. *El sistema hamiltoniano (1.20) es paramétricamente estable o fuertemente estable, si bajo todas las perturbaciones suficientemente pequeñas el sistema permanece estable, es decir, (1.20) es paramétricamente estable si existe $\epsilon > 0$ tal que $\dot{z} = A'z$ es estable, donde A' es una matriz hamiltoniana lineal obtenida de aplicar una perturbación pequeña lineal al sistema (1.20), entonces debe cumplirse que $\|A' - A\| < \epsilon$.*

Ahora consideramos los valores propios de A , $\pm\beta_1i, \pm\beta_2i, \dots, \pm\beta_si$. Sea \mathbb{V}_j , con $j = 1, \dots, s$, el subespacio real lineal máximo, donde A tiene los valores propios $\pm\beta_ji$. Luego \mathbb{V}_j es un subespacio simpléctico invariante bajo la acción de A (A -invariante) y $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_s$. Sea H_{2j} la restricción de H_2 en \mathbb{V}_j .

Definición 4. *Se dice que el sistema (1.20) satisface la condición Krein-Gel'gand-Lidskii, que abreviaremos como CKGL, si:*

1. Todos los valores propios de A son imaginarios puros.
2. A es no singular.
3. La matriz A es diagonalizable en los complejos.
4. La restricción H_{0j} es positiva o negativa definida para cada j .

Teorema 3. *El sistema (1.20) es paramétricamente estable si y solo si satisface las condiciones de KGL.*

La demostración de este teorema se puede consultar en [41], pág. 106.

Ahora agrupamos los valores propios de A en conjuntos de r elementos como sigue:

$$\begin{aligned} & \pm\omega_1 k_{11}i, \pm\omega_1 k_{12}i, \dots, \pm\omega_1 k_{1s_1}i, \\ & \pm\omega_2 k_{21}i, \pm\omega_2 k_{22}i, \dots, \pm\omega_2 k_{2s_2}i, \\ & \vdots \\ & \pm\omega_r k_{r1}i, \pm\omega_r k_{r2}i, \dots, \pm\omega_r k_{rs_r}i, \end{aligned}$$

donde las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ son racionalmente independientes y k_{11}, \dots, k_{rs_r} son números enteros no nulos.

Por ejemplo, los valores propios pueden agruparse en tres conjuntos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \pm 3i, \pm 7i & \text{donde } \omega = 1 \quad k_{11} = 3, k_{12} = 7, \\ \pm \sqrt{2}i & \text{donde } \omega = \sqrt{2} \quad k_{21} = 1, \\ \pm 2\pi i, \pm 3\pi i, \pm 7\pi i & \text{donde } \omega = \pi \quad k_{31} = 2, k_{32} = 3, k_{33} = 7. \end{array}$$

Sea $\mathbb{W}_j = [\eta(\omega_j k_{j1}i) \oplus \eta(-\omega_j k_{j1}i) \oplus \dots \oplus \eta(\omega_j k_{j\sigma}i) \oplus \eta(-\omega_j k_{j\sigma}i)]$. Notemos que para evitar subíndices dobles, hemos cambiado σ por s_j . Además \mathbb{W}_j satisface las

condición de realidad, la cual dice que $w \in \mathbb{W}_j$ si y solo si $\bar{w} \in \mathbb{W}_j$, entonces esto es la complejización de un subespacio simpléctico real \mathbb{V}_j bajo la acción de A y

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_r.$$

Sea A_j la restricción de A al subespacio \mathbb{V}_j y H_{2j} la restricción de H_2 en \mathbb{V}_j . Consideremos que los valores propios de A_j son

$$\pm\omega_j k_{j1}, \pm\omega_j k_{j2}, \dots, \pm\omega_j k_{j\sigma}$$

Definición 5. *Decimos que el sistema hamiltoniano lineal (1.20) satisface la condición de Marsden-Wenstein (CMW), si cada restricción H_{2j} es positiva definida o negativa definida.*

Si el hamiltoniano H_0 lo escribimos en la siguiente forma

$$H_2 = \omega_1(k_{11}I_{11} + \cdots + k_{1s_1}I_{1s_1}) + \cdots + \omega_r(k_{r1}I_{r1} + \cdots + k_{rs_r}I_{rs_r}), \quad (1.24)$$

entonces el sistema hamiltoniano lineal satisface la *CMV* si y solo si todos los números $k_{\alpha\beta}$ pueden ser elegidos como enteros positivos y

$$H_{0j} = \omega_j(k_{j1}I_{j1} + \cdots + k_{js_j}I_{js_j}),$$

es definido positivo o definido negativo cuando ω_j es positiva o negativa, respectivamente. Notemos que la *CMW* es más fuerte que la *CKGL*.

1.2.2. Sistemas hamiltonianos no lineales

Esta sección esta dedicada a la revisión de resultados sobre sistemas hamiltonianos formales, es decir, sistemas hamiltonianos que admiten un desarrollo en series de potencias en la variable x , el cual es truncando a algún orden finito. Para precisar este concepto, consideramos el hamiltoniano analítico $H : D \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, definido en la vecindad del origen de \mathbb{R}^{2n} , entonces el hamiltoniano tiene el desarrollo

$$H = H_2(x) + \sum_{i=3}^{\infty} H_i(x), \quad (1.25)$$

donde H_i son polinomios homogéneos en x de grado i .

Ya que estamos interesados en construir la forma normal de (1.25), vamos a dar la siguiente definición, la cual nos dice cuándo el hamiltoniano (1.25) está en su forma normal.

Definición 6. Un sistema formal H_f está en forma normal si

$$H_f = H_2(x) + \bar{H}(x),$$

donde

$$\bar{H}(e^{At}x) = \bar{H}(x), \quad (1.26)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in D \subset \mathbb{R}^{2n}$, o equivalentemente

$$\{H_2, \bar{H}\} = 0. \quad (1.27)$$

Teorema 4. Si el sistema hamiltoniano lineal (1.20) no satisface la CMW, entonces se puede construir un hamiltoniano $H_e(x) = H_2(x) + H_p(x)$ en forma normal, donde $H_p(x)$ es un polinomio (que es convergente) y entonces el origen es inestable en el sentido de Lyapunov.

Definición 7. Decimos que el sistema hamiltoniano lineal (1.20) es normalmente estable si para cada \bar{H} que satisface (1.27) existe una integral formal expresada como

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathbb{L}(x) + \mathcal{L}^*(x),$$

para el sistema hamiltoniano $H_n(x) = H_2(x) + \bar{H}(x)$, donde \mathbb{L} es una forma cuadrática definida positiva en x y \mathcal{L}^* es una serie de potencias formal en x tal que \mathbb{L}_n es constante en las soluciones de (1.20), lo cual significa que $\{\mathcal{L}_n, H_n\} = 0$.

La demostración de los siguientes teoremas se puede consultar en [25].

Teorema 5. El sistema hamiltoniano lineal (1.20) es formalmente estable si y solo si se satisface CMW.

Definición 8. El sistema analítico (1.25) es formalmente estable si existe una serie formal $\mathcal{L}_f(x)$ que es definida positiva, la cual es una integral formal para (1.25), es decir, $\{H, \mathcal{L}_f\} = 0$.

Teorema 6. Si el sistema hamiltoniano lineal (1.20) satisface la CMW, entonces el sistema hamiltoniano analítico (1.25) es formalmente estable. Luego entonces la estabilidad normal implica estabilidad formal.

Definición 9. El hamiltoniano H es estable en el sentido de Lie si existe un entero $m > 0$ de tal manera que su forma normal dada por

$$\bar{H} = H_2 + \bar{H}_3 + \cdots + \bar{H}_N \quad \text{con} \quad \{\bar{H}_N, H_2\} = 0,$$

es estable en el sentido de Lyapunov para cualquier $N \geq m$, donde N es un entero arbitrario.

Ahora introducimos el *módulo* \mathbb{Z} asociado con las frecuencias ω_j de (1.23), el cual es dado por

$$\mathcal{M}_\omega = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : k \cdot \omega = k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0\}.$$

Ya que el conjunto \mathcal{M}_ω es finitamente generado, es decir, existen $k^2, \dots, k^s \in \mathcal{M}_\omega$ tal que

$$\mathcal{M}_\omega = k^1\mathbb{Z} + \dots + k^s\mathbb{Z},$$

tomamos un conjunto mínimo de generadores, tal que $0 < s < n$ y los k^j son linealmente independientes. El caso $s = 0$ corresponde a la situación donde todas las ω_j son racionalmente independientes. Cuando $s = 1$ decimos que el hamiltoniano H tiene una resonancia simple, mientras que el caso de múltiples resonancias corresponde a $s > 1$.

1.3. Estabilidad para hamiltonianos con dos grados de libertad

Esta sección esta dedicada al caso $n = 2$. Sean ω_1 y ω_2 las frecuencias correspondientes a la parte cuadrática H_2 , las cuales tienen signos opuestos, entonces H_2 es de signo indefinido.

Definición 10. *Decimos que ω_1 y ω_2 satisfacen la condición de resonancia de orden s si existen $m, n \in \mathbb{Z}^+$ primos relativos tales que*

$$m\omega_1 - n\omega_2 = 0, \quad m + n = s.$$

Esta resonancia se denota como resonancia $n : m$.

Ahora vamos a expresar el hamiltoniano en términos de las variables acción-ángulo $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$ y consideramos que está en forma normal hasta orden j , con $j = 2l - 2$ ó $j = 2l$, es decir,

$$H(I, \phi) = H_2(I) + H_4(I) + \dots + H_{2j-2}(I) + H_n(I, m\phi_1 + n\phi_2) + H^*, \quad (1.28)$$

donde

1. H es una función analítica en un entorno del origen en las variables $\sqrt{I_1}$ y $\sqrt{I_2}$.
2. $H_2 = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2$.

3. Para cualquier j con $1 \leq j \leq n$, H_{2j} es un polinomio homogéneo de grado j en I_1 y I_2 , cuyos coeficientes son reales e independientes de ϕ_1 y ϕ_2 .
4. $H_j(I, m\phi_1 + n\phi_2)$ es un polinomio de grado j en las variables $\sqrt{I_1}$ y $\sqrt{I_2}$, con coeficientes que son series de Fourier finitas en el ángulo $m\phi_1 + n\phi_2$.
5. H^* denota los términos polinómicos de orden mayor que j en las variables $\sqrt{I_1}$ y $\sqrt{I_2}$.
6. H es analítica en las variables $\sqrt{I_1}$ y $\sqrt{I_2}$.

Teorema 7 (Teorema de estabilidad de Arnold). *El origen es un punto de equilibrio estable, en el sentido de Lyapunov, si existe algún j ($2 \leq j \leq n$) tal que H_2 no divide a H_{2j} . Es decir, si existe algún j ($2 \leq j \leq n$) tal que*

$$D_{2j} = H_{2j}(\omega_1, \omega_2) \neq 0, \quad 2 \leq j < n.$$

En particular, tenemos que

$$H_4 = \frac{1}{2}(AI_1^2 - 2BI_1I_2 + CI_2^2).$$

El valor numérico de D_{2j} con $2 \leq j < n$, es conocido como *determinante de Arnold*.

Notemos que las hipótesis del teorema 7 incluyen varias suposiciones de forma implícita. En particular, el hamiltoniano H debe iniciar con términos de orden 2, y el origen debe ser un punto de equilibrio del sistema hamiltoniano. Además, debido a que los términos H_2, \dots, H_{2n} únicamente dependen de las acciones I_1 y I_2 , el hamiltoniano H está escrito en la llamada *forma normal de Birkhoff* hasta orden $2n$, ver [41].

Por otro lado, tenemos que el teorema 7 falla cuando $D_{2j} = 0$, para $j = 2, \dots, l-1$, en cuyo caso el término H_n es quien decidirá la estabilidad o inestabilidad del equilibrio. En estas condiciones introducimos la función

$$\Psi(\phi) = H_n(\omega_1, \omega_2, m\phi),$$

con $\phi = \phi_1 + \frac{n}{m}\phi_2$. Luego tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [21].

Teorema 8 (Teorema de Markeev-Sokol'skii-Cabral-Meyer). *Si $\Psi(\phi) \neq 0$, para toda ϕ , entonces el punto de equilibrio es estable. Si Ψ tiene un cero simple, entonces el equilibrio es inestable.*

Este teorema es una generalización del teorema 7, pues no se requiere la condición de resonancia, y como consecuencia H_n puede ser independiente de un ángulo.

A continuación, enlistamos una serie de teoremas que ayudan a determinar la estabilidad en presencia de algunas resonancias.

▪ **Resonancia de orden uno (1:0)**

En el caso de resonancia de orden uno tenemos que $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \neq 0$, y la parte lineal es diagonalizable. La forma normal de H hasta orden tres está dada por

$$H = \frac{\delta_1 \omega_2}{2}(x_1^2 + y_2^2) + \frac{\delta_2}{2}x_2^2 + H_3(x_1, x_2, y_1, y_2) + \cdots + H_N(x_1, x_2, y_1, y_2) + H^*, \quad (1.29)$$

donde

$$H_s = h_{0s00}y_2^2 \sum_{j=1}^s h_{0s-2j}y_2^{s-2j}(x_1^2 + y_1^2)^j, \quad j = 3, 4, \dots$$

Sea M el menor entero positivo tal que $h_{0M00} \neq 0$.

Teorema 9 (Sokol'skii, 1976). *Si M es impar, entonces el origen es inestable en el sentido de Lyapunov. Si M es par, entonces el origen es estable en el sentido de Lyapunov si $\delta_1 h_{0M00} > 0$. Si $\delta_1 h_{0M00} < 0$, entonces el origen es inestable en el sentido de Lyapunov.*

La demostración puede ser consultada en [66].

▪ **Resonancia de orden dos (1:1)**

En este caso la parte lineal del hamiltoniano es diagonalizable por bloques de Jordan, luego existe un cambio de coordenadas simpléctico con el cual podemos escribir a H hasta orden cuarto, es decir,

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \omega(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1^2 + y_2^2)[A(y_1^2 + y_2^2) + B(x_1 y_2 - x_2 y_1) + C(x_1^2 + x_2^2)] + H^*, \quad (1.30)$$

donde A , B y C son constantes. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 10 (Sokol'skii, 1978). *Si $A > 0$, entonces el origen es estable en el sentido de Lyapunov. En el caso de que $A < 0$, entonces el origen es inestable en el sentido de Lyapunov.*

La primera demostración de este teorema fue dada por Sokol'skii [67], posteriormente fue mejorada por Treshchev [69]. Una demostración mas reciente se puede consultar en [37] y [44].

■ **Resonancia de orden tres (2:1)**

Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio en el caso de resonancia 2:1, es decir, las frecuencias satisfagan la relación $\omega_1 = 2\omega_2$, vamos a utilizar los teoremas que a continuación mencionamos. El primer teorema es dado en términos de variables compleja, y el segundo está en términos de variables ángulo-acción.

La forma normal hasta orden tres en variable compleja tiene la forma

$$H = i\omega_1 Q_1 P_1 + i\omega_2 Q_2 P_2 + (x_{1002} + iy_{1002})Q_1 P_2^2 - 2^{-1}\omega_1^{-1}\omega_2^2(y_{1002} + ix_{1002})Q_2^2 P_1 + l_{2020}Q_1^2 P_2^2 + l_{1111}Q_1 P_1 Q_2 P_2 + l_{0202}Q_2^2 P_2^2 + O(|Q|^5),$$

donde $l_{2020}, l_{1111}, l_{0202}$ son números reales y $|Q| = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2}$.

En este caso la estabilidad es determinada aplicando el teorema Markeev demostrado en [40].

Teorema 11 (Markeev, 1969). *Sea $\omega_1 = 2\omega_2$. Si la relación $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$ se satisface para el hamiltoniano del sistema perturbado, entonces el equilibrio es inestable. Si $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$ y $l_{2020} - 2l_{1111} + 4l_{0202} \neq 0$, entonces el equilibrio es estable.*

Ahora, consideremos la forma normal hasta orden tres en variables acción-ángulo, es decir,

$$\begin{aligned} H &= \omega_2(2I_1 - I_2) + I_1^{1/2}I_2[A_{21} \cos \phi + B_{21} \sen \phi] + H^* \\ &= \omega_2(2I_1 - I_2) + \delta I_1^{1/2}I_2 \cos \phi + H^*, \end{aligned} \tag{1.31}$$

donde $\phi = \phi_1 + 2\phi_2$ y $\delta = \sqrt{A^2 + B^2}$. Entonces tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [41].

Teorema 12 (Alfriend-Markeev-Meyer). *Si en presencia de resonancia 2:-1, el hamiltoniano está en la forma normal (1.31) con $\delta \neq 0$, entonces el equilibrio es inestable. Más aún, existe una vecindad \mathcal{O} del punto de equilibrio de tal forma que cualquier solución que inicie en \mathcal{O} , pero no en la variedad central dada por el teorema del centro de Lyapunov, abandona \mathcal{O} ya sea, tanto para tiempos positivos como negativos. En particular, las soluciones periódicas de la familia de periodo corto son inestables.*

■ **Resonancia de orden cuatro (3:1)**

En este caso tenemos $\omega_1 = 3\omega_2$ y la normalización de hamiltoniano a este orden en variables acción-ángulo es

$$\begin{aligned} H &= \omega_2(3I_1 - I_2) + AI_1^2 + BI_1I_2 + CI_2^2 + I_1^{1/2}I_2^{3/2}(A_{13}\sin\phi_1 + B_{31}\cos\phi_2) + \tilde{H} \\ &= \omega_2(3I_1 - I_2) + AI_1^2 + BI_1I_2 + CI_2^2 + I_1^{1/2}I_2^{3/2}\delta\cos\psi + \tilde{H}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde $\psi = \phi_1 + 3\phi_2$, \tilde{H} es una función periódica de periodo 2π en ϕ_1 y ϕ_2 .

Lo siguiente es introducir las siguientes cantidades:

$$D = A + 3B + 9C, \quad \delta = \sqrt{A_{31}^2 + B_{31}^2},$$

en las cuales el determinante de Arnold es $D_4 = \frac{1}{2}D\omega_2^2$. Luego tenemos que $\Psi(\psi) = \omega_2^2[D + \delta\sin(\phi + \theta)]$ con $\theta = \arccos\left(A_{13}/\sqrt{A_{13}^2 + B_{13}^2}\right)$, y el teorema 8 garantiza el siguiente resultado.

Teorema 13 (Meyer). *Si en la presencia de la resonancia 3:-1 el sistema hamiltoniano está en la forma normal (1.32), y si $6\sqrt{3}|\delta| > |D|$, entonces el equilibrio es inestable, mientras que si $6\sqrt{3}|\delta| < |D|$, entonces el equilibrio es estable.*

La demostración de este teorema puede consultarse en [41].

1.4. Teoría de perturbaciones

La teoría de perturbaciones estudia la influencia de pequeñas perturbaciones sobre un sistema hamiltoniano integrable, definido en la vecindad de soluciones de equilibrio elípticas. Para estudiar la teoría de perturbaciones necesitamos introducir algunos conceptos básicos y resultados relacionados a la teoría de promedios para sistemas hamiltonianos, así como la teoría KAM.

1.4.1. Teoría de promedios

Sea (M, Ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, $\mathbb{H}_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano diferenciable, el cual define un campo vectorial hamiltoniano, $Y_0 = (d\mathbb{H}_0)^\#$ con flujo simpléctico ψ_0^t . Sea $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo tal que cada $h \in \mathbb{I}$ es un valor regular de \mathbb{H}_0 , y $\mathcal{N}_0(h) = \mathbb{H}_0^{-1}(h)$ es un haz circular compacto conexo en un espacio

base $\mathcal{B}(h)$ con proyección $\pi : \mathcal{N}_0(h) \rightarrow \mathcal{B}(h)$. Supongamos que todas las soluciones de Y_0 en \mathcal{N}_0 son periódicas. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dichas soluciones periódicas tienen periodos que dependen continuamente del valor del hamiltoniano, es decir, el periodo es una función diferenciable $T = T(h)$.

Sea ε un parámetro pequeño, $\mathbb{H}_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $\mathbb{H}_\varepsilon = \mathbb{H}_0 + \varepsilon\mathbb{H}_1$, $Y_\varepsilon = Y_0 + \varepsilon Y_1 = d\mathbb{H}_\varepsilon^\#$, $\mathcal{N}_\varepsilon(h) = \mathbb{H}_\varepsilon^{-1}(h)$, $\pi : \mathcal{N}_\varepsilon(h) \rightarrow \mathcal{B}(h)$ la proyección, y sea φ_ε^t el flujo definido por Y_ε .

El promedio de \mathbb{H}_1 es definido por

$$\bar{\mathbb{H}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{H}_1(\psi_0^t) dt, \quad (1.33)$$

es una función diferenciable en $\mathcal{B}(h)$. Sea $\bar{\varphi}^t$ el flujo en $\mathcal{B}(h)$ definido por $\bar{Y} = d\bar{\mathbb{H}}^\#$.

El siguiente resultado da las condiciones suficientes para caracterizar la existencia de soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a \mathbb{H}_ε . Para mayores detalles sobre la teoría de promedios, ver [58], [71] y [42].

Teorema 14 (Reeb). *Si $\bar{\mathbb{H}}$ tiene un punto crítico no degenerado en $\pi(p) = \bar{p} \in \mathcal{B}(h)$ con $p \in \mathcal{N}_0(h)$, entonces existen funciones diferenciables $p(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon)$ para ε pequeño con $p(0) = p$, $T(0) = T$, y $p(\varepsilon) \in \mathcal{N}_\varepsilon$, y la solución de Y_ε que pasa por $p(\varepsilon)$ es $T(\varepsilon)$ periódica. Además, si los exponentes característicos del punto crítico \bar{p} (que son los valores propios de la matriz lineal $A = JD^2\bar{\mathbb{H}}(\bar{p})$) son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n-1}$, entonces los multiplicadores característicos de la solución periódica que pasa por $p(\varepsilon)$ son*

$$1, 1, 1 + \varepsilon\lambda_1 T + O(\varepsilon^2), \dots, 1 + \varepsilon\lambda_{2n-2} Y + O(\varepsilon^2).$$

1.4.2. Teoría KAM

Para poder estudiar el comportamiento de la dinámica de un sistema hamiltoniano sujeto a pequeñas perturbaciones, es necesario introducir la teoría KAM [10]. La aplicación de la teoría KAM clásica requiere de las siguientes dos propiedades sobre el sistema hamiltoniano no perturbado, una es que el sistema sea integrable y no degenerado.

Consideremos el sistema hamiltoniano perturbado

$$\mathbb{H}(I, \varphi, \varepsilon) = \mathbb{H}_0(I) + \varepsilon\mathbb{H}_1(I, \varphi, \varepsilon), \quad (1.34)$$

donde ε es un parámetro pequeño. Luego, el espacio fase donde está definido \mathbb{H}_0 es foliado por toros invariantes y existen n integrales primeras en involución. En

otras palabras, un conjunto de nivel de las n integrales primeras de movimiento es difeomorfo a un toro de dimensión n , $T^n = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \pmod{2\pi}\}$, donde φ_i son coordenadas angulares para $i = 1, \dots, n$. Las frecuencias de movimiento están dadas por $\omega_i = d\varphi_i/dt$. Ahora introducimos variables acción-ángulo, las cuales van a definir el espacio fase del sistema. Las coordenadas de acción están relacionadas con las frecuencias pues $\omega_i = \partial H_0 / \partial I_i$, y las trayectorias que describen esos movimientos son densas en los toros. Estos movimientos se conocen como movimientos cuasi-periódicos.

Un sistema es no degenerando si el determinante de la matriz hessiana

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbb{H}_0}{\partial I^2} \right| = \left| \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial I} \right| \neq 0,$$

en un dominio abierto del espacio fase. Esto significa que las frecuencias son funcionalmente independientes.

Definición 11. *Las frecuencias $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ son llamadas resonantes si son racionalmente independientes, es decir*

$$k \cdot \omega \neq 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

y en caso contrario se dicen que son no resonantes.

Notemos que en el caso no resonante cada órbita es densa en el toro de dimensión n , mientras que en el caso resonante el toro de dimensión n se descompone en una familia de toros invariantes de dimensión $(n - m)$. Además, dada una órbita, esta es densa en alguno de estos toros de menor dimensión.

Kolmogorov [1], Arnold [9] y Moser [48] probaron la persistencia de estos toros, cuya frecuencias satisfacen una *condición diofántica*, la cual se escribe como

$$|k \cdot \omega| \geq \frac{\alpha}{|k|^\tau} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \quad \text{and } \alpha, \tau > 0.$$

El siguiente lema nos garantiza la existencia de las frecuencias diofánticas.

Lema 1 (Arnold). *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea $\tau > n - 1$ fijo. Casi todos los vectores $\omega \in \Omega$ satisfacen la condición diofántica.*

El siguiente teorema es conocido como teorema KAM.

Teorema 15 (Kolmogorov, Arnold y Moser). *Consideramos el sistema de ecuaciones asociado al hamiltoniano analítico \mathbb{H}_0 , el cual es no degenerado, entonces casi todos los toros invariantes que existen en el sistema no perturbado ($\varepsilon = 0$) serán ligeramente deformados, y persisten para $\varepsilon \neq 0$, suficientemente pequeño. Más aún, la medida de Lebesgue del complemento del conjunto de toros invariantes tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Existe una variación del teorema KAM para sistema isoenergéticos no degenerados.

Definición 12. *Un sistema de dimensión n es isoenergéticamente no degenerado si*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_0}{\partial I^2} & \frac{\partial \mathbb{H}_0}{\partial I} \\ \frac{\partial \mathbb{H}_0}{\partial I} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Teorema 16 (Kolmogorov). *Si H_0 es no degenerado o isoenergéticamente no degenerado, entonces bajo perturbaciones suficientemente pequeñas, la mayoría de los toros no resonantes invariantes no desaparecen y son ligeramente deformados, de tal forma que en el espacio fase del sistema perturbado también existen toros invariantes. En el caso de no degeneración isoenergética los toros invariantes son una mayoría en cada variedad de nivel de energía.*

Podemos encontrar sistemas donde H_0 no dependa de todas las acciones, estos problemas se conocen como propiamente degenerados. En este caso, se dice que la perturbación *removerá la degeneración* si el hamiltoniano completo puede ser escrito como

$$\mathbb{H}(I, \varphi, \varepsilon) = \mathbb{H}_{00}(I) + \varepsilon \mathbb{H}_{01}(I) + \varepsilon^2 \mathbb{H}_{11}(I, \varphi, \varepsilon), \quad (1.35)$$

donde H_{00} sólo depende de las primeras r variables de acción, y es no degenerado o isoenergéticamente no degenerado con respecto a estas variables y H_{01} es no degenerado con respecto a las restantes $n - r$ variables.

Teorema 17 (Arnold). *Suponemos que el sistema no perturbado es degenerado, pero la perturbación remueve la degeneración. Entonces una gran parte del espacio fase es llenada por toros invariantes que están cerca del toro invariante $I = a$ (a constante) del sistema intermedio. Entre estas frecuencias, r corresponden a las fases rápidas y $n - r$ a las fases lentas. Si el sistema hamiltoniano no perturbado es isoenergéticamente no degenerado con respecto a las r variables de las cuales depende, entonces los toros invariantes descritos forman una mayoría en cada variedad de nivel de energía del sistema perturbado.*

Algunas veces podemos encontrar toros invariantes usando la teoría KAM, y en ocasiones podemos determinar su estabilidad. El siguiente resultado fue obtenido por Meyer, Palacián y Yanguas en [43].

Consideramos el siguiente hamiltoniano con dos grados de libertad:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(I, \theta, y) = \mathbb{H}_0(I) + \varepsilon \mathbb{H}(I, \theta, y) = \mathbb{H}_0(I) + \bar{\mathbb{H}}(I, y) + O(\varepsilon).$$

Teorema 18 (Meyer-Palacián-Yanguas). *Sea $n = 2$ y p como el del teorema 14. Supongamos que existen variables acción-ángulo simplécticas (I_1, θ_1) a \bar{p} en $\mathcal{B}(h)$ tal que*

$$\bar{\mathbb{H}} = \omega_1 I_1 + \varepsilon \mathbb{K}(I, I_1) + O(\varepsilon),$$

donde $\omega_1 \neq 0$ y

$$\frac{\partial \mathcal{K}(I, I_1)}{\partial I_1^2} \neq 0.$$

Entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existen toros KAM invariantes de dimensión dos envolviendo a las soluciones periódicas dadas por el teorema 14. En particular las soluciones periódicas son órbitalmente estables.

Capítulo 2

El problema de n cuerpos

Este capítulo está dedicado al problema de n cuerpos, y algunos resultados relacionados necesarios para el desarrollo de esta tesis.

El problema de n cuerpos consiste en determinar las órbitas de n partículas puntuales que se mueven sujetas a las fuerzas de atracción mutuas, gobernadas por la ley de gravitación de Newton. Con el fin de describir matemáticamente este problema, consideremos un sistema de referencia inercial en \mathbb{R}^3 . Sea $\mathbf{q}_i = (q_{1i}, q_{2i}, q_{3i})$ el vector de posición y $m_i > 0$ la masa de la i -ésima partícula, con $i = 1, \dots, n$. La segunda ley de movimiento de Newton implica que el producto de la masa por el vector de aceleración de la i -ésima partícula es igual a la suma de fuerzas actuando sobre la partícula, es decir,

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2}. \quad (2.1)$$

Aplicando la ley de la gravitación universal de Newton, la suma total de las fuerzas \mathbf{F}_i es

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{\mathcal{G} m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \nabla_i U, \quad (2.2)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana, ∇_i es el operador gradiente de la partícula i y $\mathcal{G} = 6.67408 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{seg}^{-2} \text{kg}^{-1}$ es la constante gravitacional. El término $m_i m_j / \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^2$ es la magnitud de la fuerza ejercida por la partícula j sobre la partícula i , es decir, es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, $(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) / \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|$ es el vector unitario a lo largo del cual está dirigida la fuerza entre las posiciones de la i -ésima

y j -ésima partícula, y U es el potencial gravitacional dado por

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{1 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}. \quad (2.3)$$

Como consecuencia de la invariancia de las ecuaciones de Newton con respecto al cambio de la unidad de tiempo, sin pérdida de generalidad, a partir de ahora supondremos que $\mathcal{G} = 1$.

Notemos que si tomamos $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ podemos reescribir (2.2) de forma más compacta. Sea M la matriz de masas, la cual es diagonal de tamaño $3n \times 3n$, dada por $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$, entonces (2.2) toma la forma

$$M\ddot{\mathbf{q}} - \nabla U = 0, \quad (2.4)$$

con $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_n)$.

Ahora vamos a reescribir el sistema de ecuaciones (2.4) como un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, a través de definir los momentos conjugados $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ donde $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$, de modo que $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ es el momento de la i -ésima partícula. Luego, las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla U(\mathbf{q}). \quad (2.5)$$

El sistema anterior es singular en el subconjunto

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij},$$

donde $\Delta_{ij} = \{(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$, es decir cuando las partículas colisionan. El dominio donde está definido el sistema (2.5) o *espacio fase* es

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6n} \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n}\},$$

y el *espacio de configuración* es

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}.$$

Las ecuaciones del movimiento (2.5) se pueden escribir como el siguiente sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

con función hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}), \quad (2.7)$$

donde T es la energía cinética

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{q}_i\|^2. \quad (2.8)$$

Los vectores \mathbf{q} y \mathbf{p} se conocen como *variables conjugadas*.

2.1. El problema de Kepler

En esta sección llevaremos a cabo una revisión del problema de 2 cuerpos, el cual es el único caso del problema de n cuerpos que es completamente integrable. Este problema se reduce al problema de Kepler, el cual puede ser resuelto por cuadraturas.

Sea $n = 2$ y $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^3$. Las ecuaciones de movimientos son:

$$m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{m_1 m_2 (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^3}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{m_1 m_2 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3}. \quad (2.9)$$

Sumando y restando estas ecuaciones obtenemos

$$m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_2 = -\frac{(m_1 + m_2)(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3}.$$

Sea $\mathbf{C} = m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ y $\mu = (m_1 + m_2)$, entonces las ecuaciones anteriores se reescriben en términos de estos vectores como

$$\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mu \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3}. \quad (2.11)$$

Integrando la primera ecuación obtenemos $\mathbf{C} = \mathbf{L}_0 t + \mathbf{C}_0$, donde $\mathbf{C}_0, \mathbf{L}_0 \in \mathbb{R}^3$ son vectores constantes de integración.

La ecuación (2.11) describe el problema de Kepler y contiene toda la información dinámica del problema de 2 cuerpos.

Ahora vamos a introducir las variables de Jacobi las cuales nos ayudan a reducir la dimensión del problema y encontrar integrales primeras. El conjunto de variables de Jacobi $(\mathbf{g}, \mathbf{u}, \mathbf{G}, \mathbf{v})$ se define como

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= v_1 \mathbf{q}_1 + v_2 \mathbf{q}_2, & \mathbf{G} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, & \mathbf{v} &= -v_2 \mathbf{p}_1 + v_1 \mathbf{p}_2,\end{aligned}$$

donde

$$v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad v = m_1 + m_2, \quad M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Notemos que este es un cambio simpléctico de variables, es decir, se preserva la estructura hamiltoniana. Además, \mathbf{g} corresponde al centro de masas, \mathbf{G} es el momento lineal total, \mathbf{u} es la posición de m_2 relativa a la posición de m_1 , y \mathbf{v} es el momento reescalado.

El hamiltoniano del problema de 2 cuerpos en variables de Jacobi es

$$H = \frac{\|\mathbf{G}\|^2}{2v} + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2M} - \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (2.12)$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{G}} = \frac{\mathbf{G}}{v}, & \dot{\mathbf{G}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{M}, & \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{u}\|^3}.\end{aligned} \quad (2.13)$$

Las dos primeras ecuaciones en (2.13) nos dicen que el centro de masas \mathbf{g} se mueve con velocidad constante, además que el momento lineal total \mathbf{G} es una integral de movimiento. Si tomamos como condiciones iniciales $\mathbf{g} = \mathbf{G} = \mathbf{0}$, el problema se reduce a uno en el cual sólo están involucradas las variables (\mathbf{u}, \mathbf{v}) y es conocido como el problema de Kepler, el cual estudiaremos a continuación.

De las dos últimas ecuaciones en (2.13) obtenemos la segunda ecuación en (2.10)

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mu \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3}, \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Esta ecuación describe un problema de fuerza central o problema de Kepler.

Sea $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, entonces el hamiltoniano se escribe como

$$H = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (2.15)$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3}. \quad (2.16)$$

Sea $\mathbf{l} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ el momento angular. Si derivamos este con respecto del tiempo obtenemos

$$\dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \left(-\frac{\mu \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

lo cual quiere decir que \mathbf{l} es constante a lo largo de las soluciones, y las tres componentes del vector \mathbf{l} son integrales de movimiento.

Ahora analizamos las siguientes dos situaciones:

- $\mathbf{l} = \mathbf{0}$

Cuando el momento angular es cero tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) = \frac{(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Esta ecuación se satisface sólo cuando $\mathbf{l} = \mathbf{0}$, de tal forma que el movimiento es colineal. Este problema puede ser reducido a un grado de libertad, y por lo tanto es integrable.

- $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$

En este caso los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} están contenidos en un plano ortogonal al vector de momento angular, el cual es donde se lleva a cabo el movimiento. Este es conocido como plano invariante, entonces el problema es reducido a dos grados de libertad y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Este problema es soluble por cuadraturas, quedando en término de funciones elementales como lo mostraremos a continuación.

Si introducimos coordenadas polares en el plano invariante obtenemos que $\mathbf{u} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$. Entonces

$$\mathbf{l} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} = (0, 0, r^2 \dot{\theta}) = (0, 0, c) \neq \mathbf{0},$$

A partir de esta última relación se obtiene la segunda ley de Kepler, la cual dice que el vector de posición de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales con velocidad $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$. Luego la partícula recorre el área a una razón constante de $c/2$.

Para resolver el problema de Kepler multiplicamos la primera ecuación de (2.18) por μ , y obtenemos

$$-\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) = \mathbf{l} \times \frac{-\mu \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} = \mathbf{l} \times \dot{\mathbf{u}}. \quad (2.19)$$

Integramos esta ecuación y obtenemos

$$-\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) = \mathbf{u} \times \mathbf{l}, \quad (2.20)$$

donde \mathbf{e} es un vector de integración constante. Ahora realizamos el producto punto del vector \mathbf{l} con la expresión de arriba y obtenemos $\mathbf{e} \cdot \mathbf{l} = 0$, pues $\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = 0$. Luego si $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{e} estará contenido en el plano invariante. Por otro lado, si $\mathbf{l} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{e} = -\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$, de tal forma que \mathbf{e} está contenido sobre una línea en la cual se lleva a cabo el movimiento, y \mathbf{e} tiene longitud igual a 1.

El siguiente paso es analizar el caso $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$. Iniciemos por realizar el producto punto de \mathbf{u} con la expresión (2.20) obteniendo

$$\mu(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{l} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l}, \quad (2.21)$$

entonces llegamos a que

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} + \|\mathbf{u}\| = \frac{c^2}{\mu}. \quad (2.22)$$

En esta ecuación podemos distinguir dos casos.

■ $\mathbf{e} = \mathbf{0}$

En este caso la partícula describe una trayectoria en forma de circunferencia, y el movimiento se realiza con velocidad angular constante. Para verificar esto, usamos (2.22) y tenemos

$$\|\mathbf{u}\| = c^2/\mu,$$

lo cual es una cantidad constante. Ahora, si introducimos coordenadas polares sobre el plano invariante, entonces tenemos que

$$\dot{\theta} = \frac{\mu^2}{c^3},$$

de donde podemos concluir que la velocidad angular es constante.

- $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$

En tales circunstancias, definimos $\epsilon = \|\mathbf{e}\|$. Introducimos coordenadas polares (r, θ) , donde el ángulo será medido desde el eje positivo u_1 . Sea g al ángulo que forman el eje positivo u_1 y el vector \mathbf{e} , y la diferencia de ambos ángulos es $f = g - \theta$ (el cual es conocido como *anomalía verdadera*). Entonces (2.22) se reduce a

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + \epsilon \cos f}. \quad (2.23)$$

Notemos que esta es la ecuación de las curvas cónicas en coordenadas polares.

Para ilustrar de manera geométrica el problema de Kepler, consideremos la figura 2.1. Sea d la línea recta localizada a una distancia $c^2/\mu\epsilon$ del origen, la cual es perpendicular al vector \mathbf{e} . Luego la ecuación (2.23) puede ser reescrita como

$$r = \epsilon \left(\frac{c^2}{\mu\epsilon} - r \cos f \right). \quad (2.24)$$

Esta relación nos dice que la distancia de la partícula al origen es ϵ veces su distancia a la línea d . Esto es la primera ley de Kepler, la cual dice que la partícula se moverá en una curva cónica de excentricidad ϵ , donde uno de los focos es el origen. Recordamos que (2.23) para $0 < \epsilon < 1$ representa una elipse, $\epsilon = 1$ una parábola y para $\epsilon > 1$ una hipérbola.

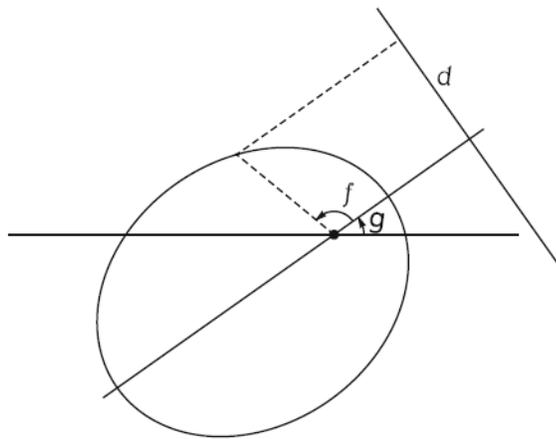


Figura 2.1: El problema de Kepler.

2.2. Integrales primeras

En esta sección revisaremos brevemente la existencia de integrales primeras para el problema de n cuerpos.

Definición 13. Una integral primera para el sistema de ecuaciones (2.2) es una función $\mathcal{I} : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , donde $U \subset \mathcal{M}$ es un abierto, de tal forma que es constante a lo largo de las curvas soluciones de (2.2) en el espacio fase \mathcal{M} , ver [1]. Es decir, si $c \in \mathbb{R}$ es fijo, entonces el conjunto de nivel

$$\{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{M} : \mathcal{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\},$$

es invariante con respecto al tiempo t .

El siguiente teorema demostrado por Liouville (ver [10]), nos da las condiciones necesarias para verificar si el sistema 2.6 es completamente integrable a travez de sus integrales primeras.

Teorema 19 (Teorema de Liouville). Si el sistema hamiltoniano (2.6) definido en un entorno del espacio fase \mathbb{R}^{2n} tiene n integrales en involución F_1, \dots, F_n , es decir que satisfacen que

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n$$

donde $\{\cdot, \cdot\}$ es el paréntesis de Poisson. Entonces el hamiltoniano es integrable por cuadraturas.

Una generalización de este teorema fue realizada por Arnold (ver [10]), en la cual considera al espacio fase \mathcal{M} como una variedad simpléctica de dimension $2n$ equipada con una 2-forma cerrada no degenerada.

Teorema 20 (Teorema de Arnold-Liouville). Si el sistema (2.6) tiene n integrales primeras F_i con $i, j = 1, \dots, n$ en involución definidas en una variedad simpléctica de dimension $2n$

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n,$$

y consideramos un conjunto de nivel de las n primeras integrales

$$M_c = \{x : F_i(x) = c_i, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Asumimos que las n integrales primeras F_i son independientes en M_c , es decir, las diferenciales dF_1, \dots, dF_n son linealmente independientes en cada punto de M_c . Entonces

1. M_c es una variedad diferenciable, invariante bajo el flujo fase, donde el hamiltoniano es una de estas integrales primeras $H = F_1$.
2. Si la variedad M_c es conexa y compacta, entonces es difeomorfa a un toro de dimensión n ,

$$T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \bmod 2\pi\}.$$

3. El flujo fase del hamiltoniano H determina movimientos que son cuasiperiodicos en M_c , es decir, en coordenadas angulares ϕ .

El problema de n cuerpos es un sistema de $6n$ ecuaciones de primer orden, entonces para tener una descripción completa de las soluciones se requieren conocer $6n - 1$ integrales primeras independientes del tiempo más una integral dependiente del tiempo. Como vimos en la sección anterior, el problema para $n = 2$ es un sistema integrable, pero para $n \geq 3$ no existen las integrales primeras suficientes para poder resolver el problema. Sin embargo, existen diez integrales primeras para el sistema, las cuales permiten reducir la dimensión del espacio de fases a $6n - 10$.

Una integral primera es la energía del sistema, lo cual podemos ver del hamiltoniano (2.7), es decir,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0.$$

Luego el hamiltoniano es independiente del tiempo.

Ahora consideramos el momento lineal total del sistema dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \quad (2.25)$$

Si derivamos con respecto del tiempo y usamos las ecuaciones de movimiento, obtenemos

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = \mathbf{0},$$

donde cada término en la suma se anula por parejas, para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Esto implica que el momento angular lineal total es otra constante de movimiento, para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces hay otras tres integrales primeras.

Ahora consideramos el centro de masa del sistema dado por

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i.$$

Ya que $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$, usamos de la relación (2.25) y tenemos

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i,$$

de tal forma que al integrar respecto del tiempo obtenemos

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}_0 t + \mathbf{C}_0,$$

donde $\mathbf{L}_0, \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^3$ son constantes de integración. En general \mathbf{L}_0 y \mathbf{C}_0 son funciones de las condiciones iniciales, y entonces integrales de movimiento. Así tenemos otras seis constantes de movimiento, es decir, tres componentes de \mathbf{L}_0 y las otras tres son las componentes de \mathbf{C}_0 .

Otra constante de movimiento es el momento angular total definido como

$$\mathbf{l} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n.$$

Si derivamos respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{q}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j \mathbf{q}_i \times (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = \mathbf{0}.$$

El primer sumando se anula, pues $\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_i = \mathbf{0}$, mientras que en el segundo sumando usamos la relación $\mathbf{q}_i \times (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) = \mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j$ y observamos que cada término en la suma aparece dos veces con signo opuesto. Entonces las tres componentes de momento angular son constantes de movimiento. Como consecuencia tenemos diez integrales primeras en el problema de n cuerpos en \mathbb{R}^3 .

En el problema espacial de 2 cuerpos el espacio fase es $\mathbb{R}^{12} \setminus \Delta$ y para el problema plano el espacio fase es $\mathbb{R}^8 \setminus \Delta$, donde Δ es el conjunto de colisiones. Entonces, en ambos casos las integrales reducen el movimiento a una variedad de dimensión dos, lo cual implica que el problema es completamente integrable.

Por otro lado, en el problema plano de 3 cuerpos el espacio fase es $\mathbb{R}^{12} \setminus \Delta$, y las integrales primeras reducen el problema a una variedad de dimensión seis. En otras palabras, el problema plano de 3 cuerpos no puede ser integrado por cuadraturas, y se dice que el problema no es globalmente integrable, ver [41].

2.3. Soluciones de equilibrio y configuraciones centrales

En el problema de n cuerpos, con $n \geq 3$ existen soluciones particulares, las llamadas soluciones de equilibrio y configuraciones centrales. Antes de proceder a la descripción de dichas soluciones, notemos que en caso de existir puntos de equilibrio del sistema (2.2) ó en (2.4) se debe satisfacer que

$$\nabla U(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Sin embargo, la función potencial U es homogénea de grado -1 , entonces el teorema de Euler para funciones homogéneas implica que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \cdot \nabla_i U = -U. \quad (2.27)$$

Esto es una contradicción, pues U es la suma de términos positivos, y si se cumple (2.27) entonces el lado izquierdo de la ecuación sería cero, por lo que $U(\mathbf{q}) = 0$ lo cual es falso. En conclusión, el problema de n cuerpos no tiene puntos de equilibrio.

Las soluciones mas simples en el problema plano de n cuerpos son las llamadas soluciones *homográficas* en las cuales la configuración permanece fija, módulo rotaciones y homotecias. *Los equilibrios relativos* son soluciones homográficas con la propiedad de que el sistema rota alrededor de su centro de masa $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ como un cuerpo rígido con velocidad angular $\omega \neq 0$.

En un sistema de coordenadas rotatorio las soluciones en equilibrio relativo se convierten en soluciones de equilibrio del problema de n cuerpos. Estas soluciones existen si y solo si las posiciones iniciales $\mathbf{q}_i(0)$ satisfacen las ecuaciones algebraicas

$$\lambda(\mathbf{q}_j - \mathbf{c}) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.28)$$

para alguna constante λ .

Una configuración $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ del problema plano de n cuerpos que satisface (2.28) es llamada *configuración central*. Luego, un equilibrio relativo es una configuración central que rota rígidamente alrededor del centro de masas. El estudio de las configuraciones centrales son esenciales para entender la dinámica global del problema de n cuerpos, pues estas controlan el comportamiento de las soluciones cercanas a las colisiones e influyen en la topología de las variedades integrales de n cuerpos, lo cual fue demostrado por Smale en [63, 64]. Una exposición amplia sobre este tópicó se puede consultar en el capítulo 2 de [47].

El número de configuraciones centrales del problema de n cuerpos es un problema abierto, pues no existe una clasificación completa conocida para $n > 3$, pues la finitud de las configuraciones centrales es un problema algebraico muy difícil de resolver. Más aún, este es uno de los problemas matemáticos propuesto por Smale para ser resueltos en el siglo XXI en [65].

En el problema de 3 cuerpos existen exactamente cinco clases de equivalencia de configuraciones centrales, módulo rotaciones y homotecias: 2 donde los 3 cuerpos están localizados en los vértices de un triángulo equilátero (soluciones de Lagrange), y las otras tres configuraciones son colineales (soluciones de Euler). En ambos casos las masa son arbitrarias.

A continuación mencionamos algunos resultados conocidos sobre las configuraciones centrales para $n \geq 4$.

En 1910, Moulton demostró que hay $n!/2$ configuraciones centrales para el problema colineal de n cuerpos, ver [50].

Smale [64] y Winter [70] conjeturaron que el número de configuraciones centrales en el problema de n cuerpos es finito. Hasta ahora solo se conocen resultados parciales sobre el número de clases de configuraciones centrales módulo rotaciones y homotecias.

En el problema espacial de 4 cuerpos, Lehmann-Filhés [35] demostró que la única configuración central es el tetraedro regular. En 2006, Hampton y Moeckel [31] demostraron que en el problema plano de 4 cuerpos el número de configuraciones centrales es finito, y que hay por lo menos 32 y a lo más 8472 de de clases de equivalencia, incluidas las 12 colineales. Además, demostraron que para casi todas las elecciones de las masas, existe un número finito de clases de equivalencia de configuraciones centrales en el problema plano de cinco cuerpos. La finitud de configuraciones centrales para continua siendo $n > 5$ es un problema abierto.

En [38], Llibre describió todas las configuraciones centrales para el problema plano de 4 cuerpos con un eje de simetría, para el caso de masas iguales. Posteriormente, Albouny [2] demostró que en el problema de 4 cuerpos con masas iguales, las configuraciones centrales no colineales tienen un eje de simetría que contiene a 2 cuerpos.

En 1985, Perko [56] demostró que para $n \geq 4$, el eneágono regular con n masas en sus vértices, rotando con respecto a su centro de masa con una velocidad angular constante, describe una solución periódica del problema de n cuerpos si y solo si todas las masas son iguales. Luego, tenemos que cuerpos de masas iguales en los vértices de un polígono regular forman una configuración central. Un resultado inmediato que se obtiene del teorema de Perko es que un polígono

regular con $n - 1$ masas iguales en sus vértices y una masa arbitraria en el centro de masa, forman una configuración central.

Capítulo 3

Problema restringido plano equilátero de cuatro cuerpos

El problema restringido plano equilátero de cuatro cuerpos (PRECC) describe el movimiento de un cuerpo de masa infinitesimal m_0 , moviéndose bajo la atracción gravitacional newtoniana que ejercen tres cuerpos (llamados *primarios*), con masas positivas m_1 , m_2 y m_3 , localizadas en todo tiempo en los vértices de un triángulo equilátero (configuración Lagrange), describiendo cada uno una órbita circular alrededor de su común centro de masa con velocidad angular constante ω . Luego, m_0 no afecta el movimiento de los tres primarios y en un sistema de coordenadas rotatorio la configuración de triángulo equilátero permanece sin cambios. Ver la figura 3.1.

3.1. Ecuaciones de movimiento

Para estudiar el movimiento de m_0 usaremos dos sistemas de referencia, el *sideral* (fijo) y *sinódico* (rotatorio), donde el sistema sinódico gira con una velocidad angular constante ω con respecto al sideral. Iniciemos por introducir las respectivas coordenadas:

- (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (X_3, Y_3) son los vectores de posición de los primarios en el sistema de referencia sideral.
- (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son los vectores de posición de los primarios en el sistema de referencia sinódico.

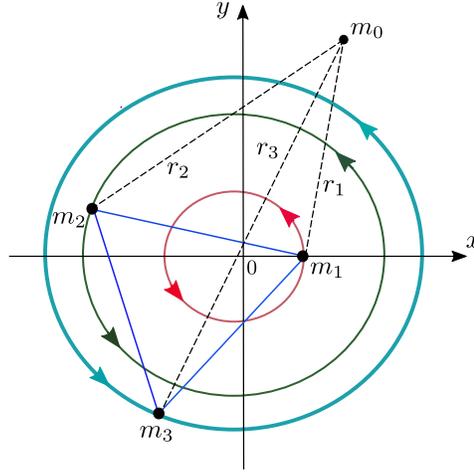


Figura 3.1: El problema restringido plano equilateral de cuatro cuerpos en un sistema de referencia sinódico.

- (X, Y) es el vector de posición de m_0 en el sistema de referencia sidereal.
- (x, y) es el vector de posición de m_0 en variables adimensionales en el sistema de referencia sinódico.

Las ecuaciones del movimiento para m_0 en el sistema sidereal son:

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 X}{d\tau^2} &= - \left(\frac{m_1 m_0 (X - X_1)}{r_1^3} + \frac{m_2 m_0 (X - X_2)}{r_2^3} + \frac{m_3 m_0 (X - X_3)}{r_3^3} \right), \\ m_0 \frac{d^2 Y}{d\tau^2} &= - \left(\frac{m_1 m_0 (Y - Y_1)}{r_1^3} + \frac{m_2 m_0 (Y - Y_2)}{r_2^3} + \frac{m_3 m_0 (Y - Y_3)}{r_3^3} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde r_1 , r_2 y r_3 son las distancias relativas de m_1 , m_2 y m_3 a m_0 , respectivamente,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2, & r_2^2 &= (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2, \\ r_3^2 &= (X - X_3)^2 + (Y - Y_3)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ahora, dividimos (3.1) entre m_0 , y obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\tau^2} &= - \left(\frac{m_1 (X - X_1)}{r_1^3} + \frac{m_2 (X - X_2)}{r_2^3} + \frac{m_3 (X - X_3)}{r_3^3} \right), \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2} &= - \left(\frac{m_1 (Y - Y_1)}{r_1^3} + \frac{m_2 (Y - Y_2)}{r_2^3} + \frac{m_3 (Y - Y_3)}{r_3^3} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

El siguiente paso es expresar la ecuaciones de movimiento (3.3) en coordenadas sinódicas o rotatorias. Sin pérdida de generalidad, a partir de ahora fijaremos la velocidad angular $\omega = 1$. Luego la transformación de las coordenadas de los primarios en el sistema rotatorio es la siguiente:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i \cos t - y_i \sin t, \\ Y_i &= x_i \sin t + y_i \cos t, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, son las coordenadas cartesianas de los primarios en el sistema rotatorio. Similarmente,

$$\begin{aligned} X &= x \cos t - y \sin t, \\ Y &= x \sin t + y \cos t, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde (x, y) son las coordenadas cartesianas en el sistema rotatorio de m_0 . Esta transformación en forma matricial se escribe como

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

es la matriz de rotación.

Por otro lado, la transformación de coordenadas puede ser expresada de forma mas completa en notación compleja. Sea

$$Z = ze^{it}, \quad (3.7)$$

donde $z = x + iy$ y $Z = X + iY$. Luego, las distancias dadas mutuas (3.2) toman la forma

$$r_1 = |Z - Z_1|, \quad r_2 = |Z - Z_2| \quad y \quad r_3 = |Z - Z_3|. \quad (3.8)$$

Usando las ecuaciones (3.3) tenemos

$$Z_j = z_j e^{it}, \quad (3.9)$$

donde $z_j = x_j + iy_j$, con $j = 1, 2, 3$.

Ahora sustituimos (3.7) y (3.9) en (3.8) para expresar las distancias en el sistema rotatorio

$$\begin{aligned} r_1 &= |z - z_1| = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2}, \\ r_2 &= |z - z_2| = [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2]^{1/2}, \\ r_3 &= |z - z_3| = [(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

El lado izquierdo de (3.3) en notación compleja queda expresado como

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + 2i \frac{dz}{dt} - z \right) e^{it}. \quad (3.11)$$

Luego la forma compleja de las ecuaciones del movimiento (3.3) es

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2i \frac{dz}{dt} - z = - \left(\frac{m_1(z - z_1)}{|z - z_1|^3} + \frac{m_2(z - z_2)}{|z - z_2|^3} + \frac{m_3(z - z_3)}{|z - z_3|^3} \right). \quad (3.12)$$

Al tomar la parte real e imaginaria de (3.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x &= - \left(\frac{m_1(x - x_1)}{r_1^3} + \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3} + \frac{m_3(x - x_3)}{r_3^3} \right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y &= - \left(\frac{m_1(y - y_1)}{r_1^3} + \frac{m_2(y - y_2)}{r_2^3} + \frac{m_3(y - y_3)}{r_3^3} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Notemos que estas ecuaciones dependen de los valores de las tres masas.

En esta tesis estudiaremos el PRECC donde las masas de los primarios son positivas y diferentes entre sí, es decir, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Con el fin de reducir el número de parámetros de masas de 3 a 2, normalizamos la unidad de masa total de los primarios a 1, es decir,

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1.$$

El siguiente paso es escribir las ecuaciones de movimiento (3.12) tomando en cuenta que los primarios están en configuración central de triángulo equilátero de Lagrange, solución del problema de tres cuerpos, y por lo tanto es invariante bajo rotaciones, translaciones y reescalamientos. Luego, podemos hacer las siguientes consideraciones: los primarios se muevan en órbitas circulares con velocidad angular constante $\omega = 1$, las distancias mutuas las normalizamos a 1, es decir, la longitud de los lados del triángulo equilátero será 1, el centro de masas de los primarios lo fijamos en el origen de coordenadas del sistema rotatorio, y orientamos la configuración de triángulo equilátero de tal forma que m_1 quede fijo en el eje x positivo. Estas condiciones se traducen en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= 1, & (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 &= 1, \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 &= 1, & m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, & y_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Este sistema tiene solución única para cada valor de las masas de los primarios (ver [50]), el cual corresponde a las coordenadas de los primarios localizadas en

los vértices del triángulo equilátero, el cual permanece fijo en el sistema rotatorio. La solución da las siguientes coordenadas de los primarios

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{|K|\sqrt{m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2}}{K}, & y_1 &= 0, \\
x_2 &= -\frac{|K|[(m_2 - m_3)m_3 + m_1(2m_2 + m_3)]}{2K\sqrt{m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2}}, & y_2 &= \frac{\sqrt{3}m_3}{2\sqrt{m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2}}, \\
x_3 &= -\frac{|K|}{2\sqrt{m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2}}, & y_3 &= -\frac{\sqrt{3}m_2}{2\sqrt{m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $K = m_2(m_3 - m_2) + m_1(m_2 + 2m_3)$.

Por otro lado, las ecuaciones (3.14) pueden ser escritas de forma simplificada como

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde el punto denota la derivada con respecto a t , y

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}.$$

Luego las ecuaciones de movimiento (3.16) las reescribimos como

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Si multiplicamos (3.17) por \dot{x} y \dot{y} , respectivamente, obtenemos

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}.$$

Ahora esta expresión la integramos para obtener

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C_J, \tag{3.18}$$

donde C_J es una constante de integración, la cual es similar a la *constante de Jacobi* del problema restringido circular de tres cuerpos.

En lo que sigue, vamos a introducir la forma hamiltoniana del problema. Iniciemos por describir el hamiltoniano del problema restringido plano de cuatro

cuerpos en un sistema de coordenadas sideral, luego usaremos una función generadora dependiente del tiempo, la cual nos permitirá definir una transformación canónica para obtener al hamiltoniano en el sistema sinódico. Por último, obtendremos el hamiltoniano considerando que los primarios están en configuración de Lagrange, y como consecuencia el hamiltoniano en coordenadas rotatorias será independiente del tiempo, y por lo tanto una integral primera.

3.2. Formulación hamiltoniana

En esta sección las variables x y y las renombramos como q_1 y q_2 , respectivamente. En estas variables la función Lagrangiana del problema es

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + U(q_1, q_2, t), \quad (3.19)$$

donde U es la función potencial

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}, \quad (3.20)$$

el punto denota la derivada con respecto al tiempo adimensional t y las distancias r_i con $i = 1, 2, 3$ están dadas por (3.2).

Usando (3.19) calculamos los momentos canónicos conjugados,

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 \quad y \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2. \quad (3.21)$$

Notamos que los momentos canónicos conjugados son simplemente la componentes de la velocidad relativa al sistema de coordenadas sideral o fijo.

El Hamiltoniano es determinado por

$$H = q_1 p_1 + q_2 p_2 - L. \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.19) y (3.21) en esta expresión obtenemos

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(q_1, q_2). \quad (3.23)$$

El sistema hamiltoniano asociado es dado por

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial \phi}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\partial \phi}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ahora, vamos aplicar una transformación canónica bilineal con coeficientes que dependen del tiempo, los cuales representan una rotación uniforme dada por

$$W(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = -a_{ij}p_iQ_j, \quad (3.25)$$

donde aplicamos la convención de suma sobre los índices repetidos, y

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

representa una rotación uniforme con velocidad angular igual a uno.

La teoría de transformaciones canónicas implica que las ecuaciones de transformación para este tipo de función generadora son

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (3.27)$$

y

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial W_3}{\partial t}. \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.27) obtenemos

$$q_i = a_{ij}Q_j, \quad P_i = a_{ji}p_j. \quad (3.29)$$

Notemos que las ecuaciones (3.29) se pueden escribir en forma matricial como

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{Q} \quad y \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}^*\mathbf{p}, \quad (3.30)$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y \mathbf{A}^* es la matriz adjunta de \mathbf{A} . Ya que \mathbf{A} es una matriz ortonormal se cumple que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$. Luego podemos escribir las ecuaciones (3.30) como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^*\mathbf{q} \quad y \quad \mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{P}. \quad (3.31)$$

El siguiente paso es calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial(-a_{ij}p_iQ_j)}{\partial t} = -p_iQ_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \\ &= -\mathbf{p}^T \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \mathbf{Q} \\ &= -\mathbf{p}^T \mathbf{A}^* \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde hemos considerado que $\mathbf{P}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^*$.

Por otro lado, es fácil verificar que

$$\mathbf{A}^* \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J, \quad (3.33)$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial W}{\partial t} = Q_2 P_1 - Q_1 P_2. \quad (3.34)$$

Por lo tanto

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \phi(q_1, q_2, t) + Q_2 P_1 - Q_1 P_2. \quad (3.35)$$

La siguiente etapa es introducir las nuevas variables en los dos primeros términos del hamiltoniano. Para llevar acabo esto necesitamos consideramos que $\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{P}$ y que $\mathbf{p}^2 = p_2^2 + p_1^2$, es decir,

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^2. \quad (3.36)$$

Esta última relación quiere decir que la longitud del vector momento es invariante bajo la transformación de coordenadas al sistema sinódico. Similarmente tenemos que $\mathbf{q}^2 = \mathbf{Q}^2$. Las posiciones de los primarios en términos de la matriz \mathbf{A} son

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{A}\mathbf{r}_i, \quad (3.37)$$

donde $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i)$, con $i = 1, 2, 3$, son los vectores de posición de los primarios en el sistema sinódico dados por (3.4) y $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$, con $i = 1, 2, 3$, son los vectores de posición de los primarios en el sistema rotatorio dados por (3.15) en el cual permanecen fijos.

El cuadrado de las distancias r_1 y r_2 se transforma en

$$r_i^2 = (q_1 - X_i)^2 + (q_2 - Y_i)^2 = \langle (\mathbf{q} - \mathbf{R}_i), (\mathbf{q} - \mathbf{R}_i) \rangle = \langle \mathbf{A}(\mathbf{Q} - \mathbf{r}_i), \mathbf{A}(\mathbf{Q} - \mathbf{r}_i) \rangle. \quad (3.38)$$

Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior usual en \mathbb{R}^2 . Ahora usando el hecho de que las rotaciones preservan longitudes, tenemos que (3.38) es

$$r_i^2 = \langle \mathbf{A}(\mathbf{Q} - \mathbf{r}_i), \mathbf{A}(\mathbf{Q} - \mathbf{r}_i) \rangle = \langle (\mathbf{Q} - \mathbf{r}_i), (\mathbf{Q} - \mathbf{r}_i) \rangle = (Q_1 - x_i)^2 + (Q_2 - y_i)^2, \quad (3.39)$$

Por último, la función $\phi(q_1, q_2, t)$ se transforma en $F(Q_1, Q_2)$, la cual es independiente del tiempo, y de forma explícita tenemos

$$\begin{aligned} \phi(q_1, q_2, t) = & \frac{m_1}{((q_1 - X_1)^2 + (q_2 - Y_1)^2)^{1/2}} + \frac{m_2}{((q_1 - X_2)^2 + (q_2 - Y_2)^2)^{1/2}} \\ & + \frac{m_3}{((q_1 - X_3)^2 + (q_2 - Y_3)^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

y

$$F(Q_1, Q_2) = \frac{m_1}{((Q_1 - x_1)^2 + (Q_2 - y_1)^2)^{1/2}} + \frac{m_2}{((Q_1 - x_2)^2 + (Q_2 - y_2)^2)^{1/2}} + \frac{m_2}{((Q_1 - x_3)^2 + (Q_2 - y_3)^2)^{1/2}}. \quad (3.41)$$

Finalmente, el hamiltoniano en la nuevas variables toma la forma siguiente:

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + Q_2 P_1 - Q_1 P_2 - F(Q_1, Q_2). \quad (3.42)$$

Con el fin de seguir en la notación de la sección 3.1, las variables (Q_1, Q_2) las reescribiremos como (x, y) , las cuales corresponden al sistema rotatorio. Sean p_x y p_y los momentos canónicos conjugados correspondientes al sistema rotatorio, entonces el Hamiltoniano toma la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_3}{r_3} \quad (3.43)$$

y el sistema Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y, & \dot{y} &= p_y - x, \\ \dot{p}_x &= p_y + \frac{\partial U}{\partial x}, & \dot{p}_y &= p_x + \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde $U(x, y) = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}$. A partir de estas ecuaciones diferenciales podemos recuperar el sistema (3.17).

El sistema hamiltoniano (3.44) tiene como integral primera el hamiltoniano el cual esta relacionado con la constante de Jacobi de la siguiente forma:

$$C_J = -2\mathcal{H}. \quad (3.45)$$

Para cada valor de C_J definimos las llamadas *regiones de Hill* en el plano de configuración (x, y) donde está permitido el movimiento de m_0 ,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Omega(x, y) \geq -h\}.$$

En otras palabras, usando (3.18) obtenemos que las regiones de Hill están dadas por la desigualdad

$$\Omega(x, y) \geq \frac{C_J}{2}. \quad (3.46)$$

La frontera de estas regiones es $\Omega(x, y) = \frac{C_J}{2}$ y se conocida como *curvas de velocidad cero*.

Capítulo 4

Puntos de equilibrio y su estabilidad lineal

Este capítulo está dedicado a estudiar el número y localización de los puntos de equilibrio en el PRECC en función de los parámetros de masas. Además, determinaremos su estabilidad lineal.

4.1. Localización y determinación del número de puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio (x_0, y_0) del sistema (3.17) los obtenemos de la intersección de las curvas de velocidad en el plano de configuración, es decir, son los ceros simultáneos de las derivadas de la función potencial Ω dada en (3.20),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x}(x, y, m_1, m_2) &= x - \frac{m_1(x - x_1)}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{m_2(x - x_2)}{[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2]^{3/2}} \\ &\quad - \frac{m_3(x - x_3)}{[(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2]^{3/2}} = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y}(x, y, m_1, m_2) &= y - \frac{m_1 y}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{m_2(y - y_2)}{[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2]^{3/2}} \\ &\quad - \frac{m_3(y - y_3)}{[(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2]^{3/2}} = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Es claro que las coordenadas y el número de puntos de equilibrio dependerá del valor de las masas m_1 , m_2 y m_3 , donde $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Ya que las expresiones

en las ecuaciones (4.1) son difíciles de resolver analíticamente, con la ayuda del programa *Mathematica* las resolveremos numéricamente.

Con el fin de ejemplificar nuestro objetivo, seleccionamos dos conjuntos de los parámetros de masas (m_1, m_2) con $m_3 = 1 - m_2 - m_3$, para los cuales calcularemos numéricamente las respectivas curvas de velocidad cero, y por lo tanto los puntos de equilibrio. Primero elegimos los valores $m_1 = 0.02$ y $m_2 = 0.01$, donde existen ocho puntos de equilibrio, mientras que para $m_1 = 0.4$ y $m_2 = 0.35$ hay 10 puntos de equilibrio, ver la figura 4.1. Las etiquetas de los puntos L_i , con $i = 1, 2, \dots, 10$ son las mismas que usaron Baltagianis y Papapdakis en [11].

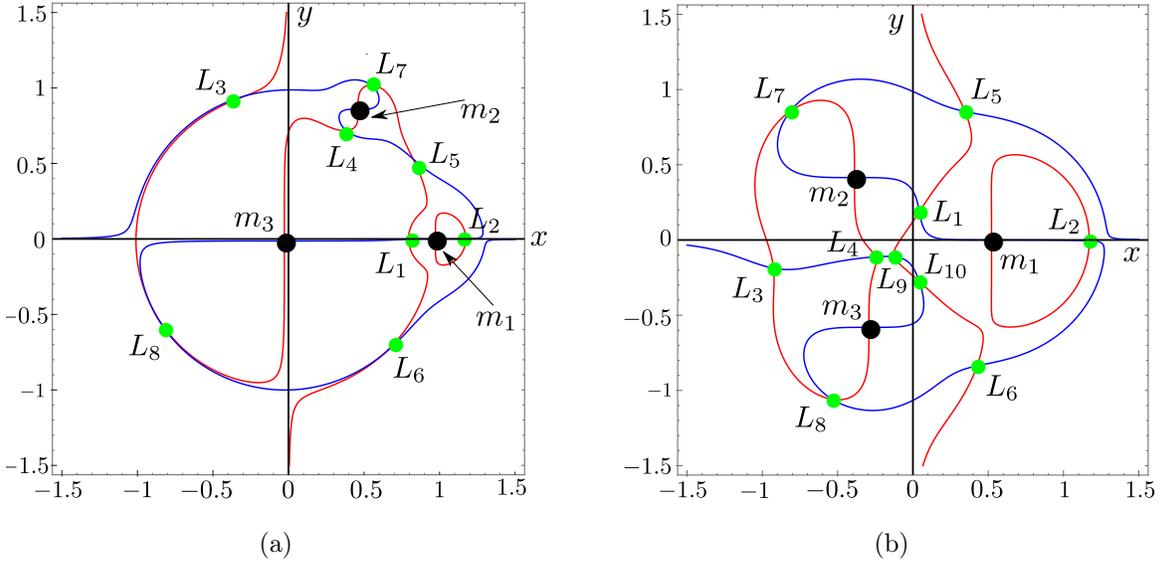


Figura 4.1: Curvas del nivel cero $f_1(x, y) = 0$ (rojo) y $f_2(x, y) = 0$ (azul) para valores de masas: (a) $m_1 = 0.02$ y $m_2 = 0.01$, (b) $m_1 = 0.4$ y $m_2 = 0.35$. Los puntos de color verde colocados en las intersecciones de las curvas corresponden a los puntos de equilibrio, mientras que los puntos negros corresponden a la posición de los primarios.

En lo que sigue vamos a llevar a cabo el estudio de la localización de los puntos de equilibrio en el espacio de masas normalizadas, el cual es un simplejo de dimensión 2 definido como

$$\Sigma = \{(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid m_1 + m_2 + m_3 = 1, 0 \leq m_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3\},$$

ver la figura 4.2. Este corresponde a un triángulo equilátero, cuyos lados son de longitud $\sqrt{2}$ y es llamado *triángulo de masas*. Luego, las coordenadas baricéntricas de un punto dentro del triángulo son las masas m_1, m_2, m_3 . Los lados corresponden

a los valores de masas de un problema de $(2+2)$ cuerpos, mientras que los vértices son las masas de un problema de $(1+3)$ cuerpos.

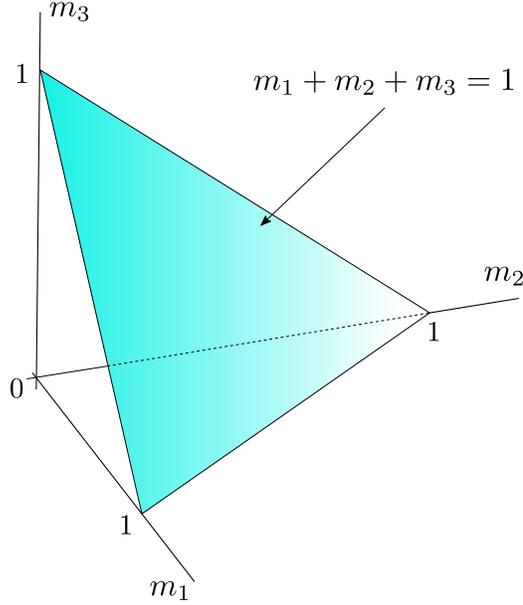


Figura 4.2: Simplejo de parámetros Σ en el espacio de masas (m_1, m_2, m_3) normalizado con $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. El simplejo tiene vértices en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Existen muchos trabajos analíticos y numéricos acerca de la cantidad de número de equilibrios en el problema general de 4 cuerpos con masas distintas. Pedersen [54] y Simó [61] realizaron un estudio numérico completo de los puntos de equilibrio en el PRECC. Ellos determinaron que existen 8, 9 y 10 puntos de equilibrio y encontraron una curva cerrada y simple \mathcal{B} en Σ , la cual encierra al punto central del simplejo, donde las masas son iguales y donde el número de equilibrios es 9. Este hecho fue confirmado por Arenstorf [7] y Gannaway [27]. Por otro lado, Barros y Leandro [34], dieron una demostración, asistida por computadora, de que el conjunto de bifurcación en el espacio de masas es una curva cerrada y simple. Actualmente se sabe que el PRECC tiene 8, 9 ó 10 puntos de equilibrio en los valores de las masas en Σ localizadas en el interior, sobre y exterior de la curva \mathcal{B} .

En [74], Zotos dió evidencia numérica de la existencia y número de puntos de equilibrio, así como de sus bifurcaciones, para el caso de masas diferentes y todos los posibles valores de (m_1, m_2) . Ya que $m_3 = 1 - m_1 - m_2$, es suficiente estudiar el mapeo de masas para el PRECC en el simplejo definido por $m_1 + m_2 < 1$ con

$0 < m_1, m_2 < 1$ en el plano (m_1, m_2) . Sus resultados numéricos están ilustrados en la figura 4.3. Los resultados en [74] mostraron que en la región roja en la figura

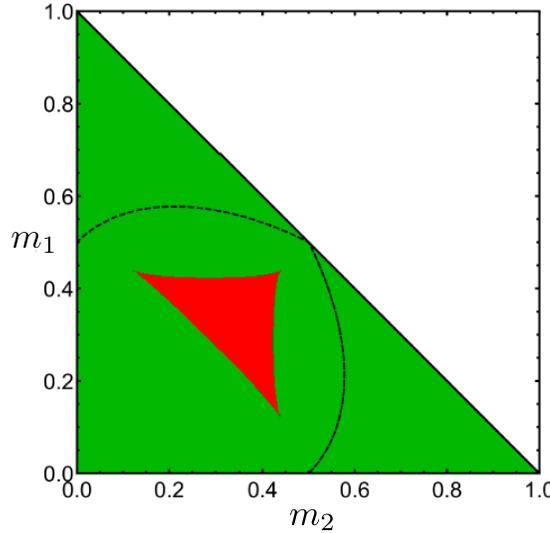


Figura 4.3: Proyección de Σ sobre el plano de masas (m_1, m_2) . En la región verde hay 8 puntos de equilibrio, mientras que en la roja hay 10. Las líneas discontinuas negras indican las posiciones relativas de los primarios.

4.3 hay 10 puntos de equilibrio, mientras que en la región verde sólo 8, lo cual coincide con lo reportado en los trabajos previos. La curva paramétrica singular encontrada por Zotos es representada como la frontera de la región central de roja, la cual tiene una forma casi triangular y divide al simplejo en dos componentes.

Por otro lado, Baltagianis y Papadakis [12] determinaron el número y la localización de los puntos de equilibrio usando métodos numéricos para tres posibles valores de masas de los primarios: (i) masas iguales, (ii) dos masas distintas, (iii) tres masas distintas. Para realizar este estudio se restringieron a la proyección de Σ en el plano (m_1, m_2) . En el caso particular de masas distintas tomaron varios valores de la masa m_1 , y obtuvieron el respectivo intervalo de masas m_2 , de tal forma que solo localizaron valores de masas donde el PRECC tiene 8 ó 10 puntos de equilibrio. Particularmente, consideraron $m_1 \in (0, 0.14] \cup [0.44, 1)$ para todo valor de la masa m_2 y $m_3 = 1 - m_2 - m_1$, mientras que cuando $m_1 \in [0.15, 0.43]$ el problema tiene 8 ó 10 equilibrios. Los resultados obtenidos están resumidos en la tabla 4.1.

m_1	Ocho puntos de equilibrio	Diez puntos de equilibrio	Estabilidad de los equilibrios
0.01	$m_2 \in (0, 0.51)$	—	L_3 estable para $m_2 \in (0, 0.029]$ L_6 estable para $m_2 \in (0, 0.022]$
0.1	$m_2 \in (0, 0.57)$	—	Inestables
0.14	$m_2 \in (0, 0.571)$	—	Inestables
0.15	$m_2 \in (0, 0.418] \cup [0.432, 0.573)$	$m_2 \in [0.419, 0.431]$	Inestables
0.2	$m_2 \in (0, 0.373] \cup [0.427, 0.58)$	$m_2 \in [0.374, 0.426]$	Inestables
0.3	$m_2 \in (0, 0.276] \cup [0.424, 0.57)$	$m_2 \in [0.277, 0.423]$	Inestables
0.4	$m_2 \in (0, 0.171] \cup [0.429, 0.55)$	$m_2 \in [0.172, 0.428]$	Inestables
0.43	$m_2 \in (0, 0.134] \cup [0.436, 0.532)$	$m_2 \in [0.135, 0.435]$	Inestables
0.44	$m_2 \in (0, 0.528)$	—	Inestables
0.5	$m_2 \in (0, 0.5)$	—	Inestables
0.6	$m_2 \in (0, 0.4)$	—	Inestables
0.7	$m_2 \in (0, 0.3)$	—	Inestables
0.8	$m_2 \in (0, 0.2)$	—	Inestables
0.9	$m_2 \in (0, 0.1)$	—	Inestables
0.99	$m_2 \in (0, 0.01)$	—	L_5 estable para $m_2 \in (0, 0.01)$ L_6 estable para $m_2 \in (0, 0.01)$

Tabla 4.1: Puntos de equilibrio y su estabilidad lineal. Tabla tomada de [12].

Notemos que Baltagianis y Papadakis [12] consideraron un caso muy particular del PRECC. Ellos fijaron varios valores de m_1 y calcularon los valores m_2 donde existen puntos de equilibrio, y estudiaron su estabilidad lineal.

Las figuras 4.4(a) y 4.4(b) muestran la evolución de la posición de los puntos de equilibrio en el plano de configuración para dos casos de especial interés tomados de la tabla 4.1, con m_1 fija en el respectivo intervalo de masas m_2 . Las flechas indican las direcciones de la evolución de los puntos de equilibrio cuando el valor de m_2 crece y m_3 disminuye.

Notemos que en el caso en el cual la masa del primario m_1 es muy pequeña, los puntos de equilibrio se distribuyen en todo el plano de configuración (x, y) , ver figura 4.4(a). Por otro lado, cuando m_1 es muy grande, la mayoría de equilibrios se acumulan en el lado izquierdo del eje vertical, ver figura 4.4(b). Además, debemos observar que el PRECC con todas las masas diferentes, no hay puntos de equilibrio colineales. Sin embargo, para el caso cuando tres masas son iguales existen 10 puntos de equilibrio, de los cuales 4 son colineales [5], mientras que en el caso de dos masas iguales existen 8, 9 ó 10 puntos de equilibrio, donde 3 ó 4 de ellos son colineales [3]. En la tabla 4.1 mostramos la información acerca de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio, lo cual estudiaremos en detalle en la siguiente sección.

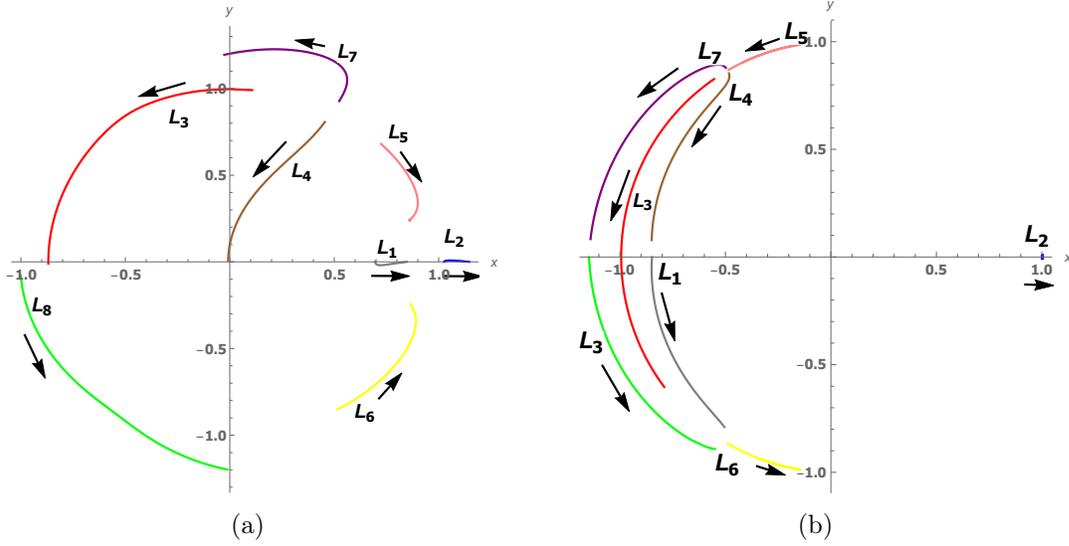


Figura 4.4: La evolución de los puntos de equilibrio como función del parámetro de masa m_2 para el valor fijo de: (a) $m_1 = 0.01$ y (b) $m_1 = 0.99$.

Las regiones de Hill son las regiones en el plano de configuración (x, y) donde el movimiento está permitido, las cuales están definidas como

$$\Omega(x, y) \geq \frac{C_J}{2}.$$

La frontera de las regiones de Hill está definida por $\Omega(x, y) = \frac{C_J}{2}$, la cual es la curva de velocidad cero (ver, por ejemplo, Szebehely [68] para el problema restringido de tres cuerpos, o Baltagiannis y Papadakis [12] para más detalles en el PRECC).

Ahora vamos a considerar las regiones de Hill del PRECC para tres conjuntos de valores de las masas de los primarios, es decir, $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$, $m_1 = 0.99$ y $m_2 = 0.0077$, $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$, con $m_3 = 1 - m_2 - m_3$. Además, vamos a mostrar cómo evoluciona la constante de Jacobi en función de las masas de los primarios, concretamente para los casos donde $m_1 = 0.01$ y 0.99 , entonces en este escenario se mostrará la evolución de la constante de Jacobi en función de la masa m_2 .

En las figuras 4.6-4.8 mostramos las regiones de Hill (no sombreadas), para los valores de las masas $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$, $m_1 = 0.99$ y $m_2 = 0.0077$, respectivamente. Podemos observar que para valores suficientemente grandes de C_J , la región de Hill tiene cuatro componentes ajenas, tres de las cuales envuelven a cada uno de los primarios. A medida que la constante de Jacobi disminuye, las componentes se fusionan y se abren canales que van conectando las regiones de

movimiento no permitido (regiones en blanco). Para tener una descripción adecuada de las regiones de Hill es importante considerar el orden en que van naciendo los puntos de equilibrio, lo cual ocurre cuando los valores de C_J disminuyen. En la figura 4.5 mostramos la gráfica de la variación de la constante de Jacobi para $m_1 = 0.01$ y 0.99 , y para cada punto de equilibrio L_i , $i = 1, \dots, 8$. Por otro lado, en las figuras 4.6-4.8 mostramos las regiones de Hill para valores aproximados de la constante de Jacobi donde nacen los puntos de equilibrio. Notemos que los canales que conectan las diferentes regiones donde el movimiento está permitido aparecen alrededor de los puntos de los respectivos puntos de equilibrio.

Finalmente, en la figura 4.8 mostramos las regiones de Hill para los valores de las masas $m_1 = 0.01$ y 0.022 , en este caso no se obtuvo la variación de la constante de Jacobi en función de las masas, pero ocurren fenómenos similares a los casos anteriores. Para valores suficientemente grandes de C_J la región de Hill tiene cuatro componentes ajenas, tres de los cuales envuelven a cada uno de los primarios. A medida que la constante de Jacobi disminuye, las componentes se fusionan y se abren canales que van conectando las regiones de movimiento permitido. La regiones mostradas fueron obtenidas para el valor aproximado de C_J correspondientes a los respectivos puntos de equilibrio.

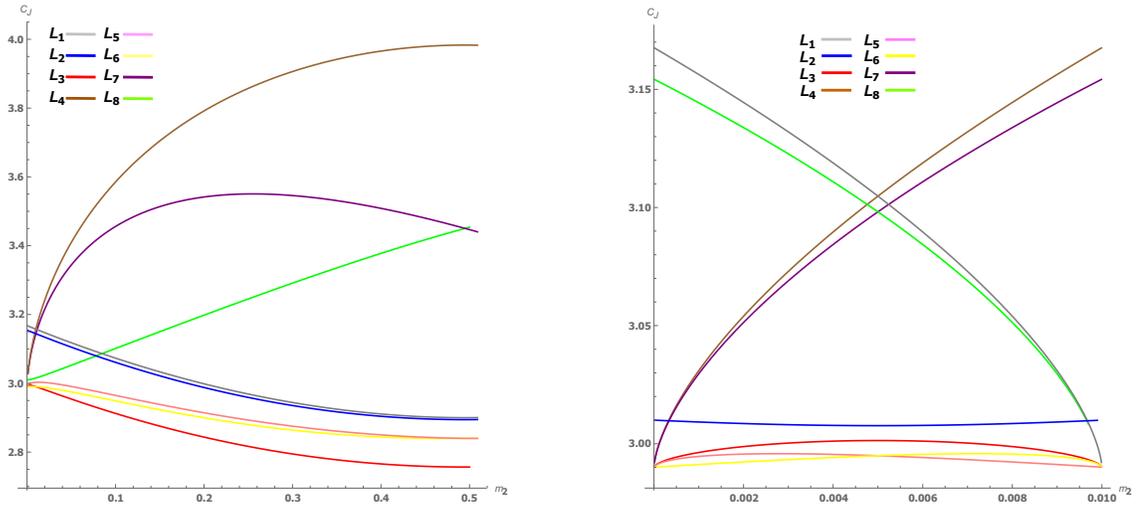


Figura 4.5: Evolución de la constante de Jacobi C_J para cada punto de equilibrio en función de m_2 para $m_1 = 0.01$ (izquierda) y $m_1 = 0.99$ (derecha).

4.2. Estabilidad lineal de los puntos de equilibrio

Para iniciar esta sección debemos notar que la condición de normalización de las masas $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ implica que el PRECC depende únicamente de dos parámetros. En particular, si consideramos $m_3 = 1 - m_2 - m_1$ con $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, tenemos que m_1 y m_2 son los dos parámetros libres. Gaschea [28] y Routh [59] demostraron que la configuración de triángulo equilátero (configuración de Lagrange) es estable cuando las masas satisfacen la llamada desigualdad de Routh,

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} > 27. \quad (4.2)$$

Considerando que hemos normalizado la masa total a 1, esta desigualdad se transforma en

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 < \frac{1}{27}.$$

Notemos que esta desigualdad se cumple sólo cuando una de las masas es mucho más grande que las otras dos. En la figura 4.9 describimos las regiones de estabilidad en el plano (m_1, m_2) , donde las desigualdades $m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 < 1/27$ (con $m_3 = 1 - m_1 - m_2$) y $m_1 + m_2 < 1$ se cumplen simultáneamente. Las regiones de estabilidad son las tres áreas sombreadas en color gris y las regiones de inestabilidad son las de color blanco, las líneas puntuadas representan la condición $m_1 + m_2 = 1$, las curvas rojas son las soluciones a la ecuación $m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = 1/27$, las cuales son llamadas *curvas críticas de Routh*. Por conveniencia etiquetamos las áreas sombreadas (áreas de estabilidad) como sigue: I es la esquina inferior izquierda, II es la esquina inferior derecha y III es la esquina superior derecha. Una vez que las coordenadas del punto de equilibrio (x_0, y_0) han sido determinadas, la estabilidad lineal puede ser estudiada.

Sea $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ el sistema lineal de (3.17) en el equilibrio (x_0, y_0) , donde A es la matriz con coeficientes constantes dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{11} & A_{12} & 0 & 2 \\ A_{21} & A_{22} & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

y $\mathbf{x} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})^T$ es un vector en \mathbb{R}^4 , donde

$$A_{11} = 1 + \frac{m_1 [2(x_0 - x_1)^2 + y_0^2]}{[(x_0 - x_1)^2 + y_0^2]^{5/2}} + \frac{m_2 [2(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2]}{[(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2]^{5/2}} + \frac{m_3 [2(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_2)^2]}{[(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2]^{5/2}},$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{3m_1(x_0 - x_1)y_0}{[(x_0 - x_1)^2 + y_0^2]^{5/2}} + \frac{3m_2(x_0 - x_2)(y_0 - y_2)}{[(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2]^{5/2}} + \frac{3m_3(x_0 - x_3)^2}{[(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2]^{5/2}},$$

$$A_{22} = 1 - \frac{m_1 [(x_0 - x_1)^2 + 2y_0^2]}{[(x_0 - x_1)^2 + y_0^2]^{5/2}} - \frac{m_2 [(x_0 - x_2)^2 + 2(y_0 - y_2)^2]}{[(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2]^{5/2}} - \frac{m_3 [2(x_0 - x_3)^2 + 2(y_0 - y_3)^2]}{[(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2]^{5/2}},$$

Observemos que los coeficientes A_{ij} dependen de x_0 , y_0 y de las masas m_1 y m_2 . La ecuación característica asociada a la matriz (5.3) es dada por

$$\lambda^4 + (4 - A_{11} - A_{22})\lambda^2 + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0. \quad (4.4)$$

Sea $\Lambda = \lambda^2$, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\Lambda^2 + (4 - A_{11} - A_{22})\Lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0, \quad (4.5)$$

y sus raíces son

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-4 + A_{11} + A_{22} \pm \sqrt{(4 - A_{11} - A_{22})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \right), \quad (4.6)$$

con $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Notemos que los coeficientes A_{ij} se obtienen al evaluar las segundas parciales de la función potencial Ω en el punto de equilibrio (x_0, y_0) .

El teorema de Lyapunov sobre la estabilidad de las soluciones de equilibrio para sistemas hamiltonianos autónomos con dos grados de libertad (ver [41]), implica que los equilibrios son linealmente estables si (4.4) tiene cuatro raíces imaginarias puras. Luego, para que esto ocurra los coeficientes de la ecuación característica (4.4) deben satisfacer simultáneamente las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} (4 - A_{11} - A_{22})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) &\geq 0, \\ 4 - A_{11} - A_{22} &> 0, \\ A_{11}A_{22} - A_{12}^2 &> 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde las frecuencias ω_1 , ω_2 están dada por

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-4 + A_{11} + A_{22} \pm \sqrt{(4 - A_{11} - A_{22})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}}.$$

A continuación llevaremos a cabo un estudio numérico para mostrar que la estabilidad lineal ocurre solo para valores de masas cerca de las regiones I, II y III en el plano (m_1, m_2) , donde la configuración de los tres primarios permanece

estable. Eso significa que los puntos de equilibrio son estables cuando la masa de un primario es mucho más grande que la masa de los otros dos cuerpos primarios.

En la sección anterior vimos que en un entorno de la región donde la configuración de Lagrange es estable, existen 8 puntos de equilibrio. Este hecho ya había sido mostrado numéricamente por Pedersen [54], Arenstorf [7], Simó [61], Baltagianis y Papadakis [12]. Ya que el sistema (4.1) es no lineal y no es fácil su manipulación algebraica, procederemos a calcular numéricamente los puntos de equilibrio para diferentes valores de las masas m_1 y m_2 con $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. Para localizar las soluciones de (4.1) como una función de las masas cerca de la región de estabilidad del triángulo de los primarios, definimos una malla de puntos cuyos nodos corresponden a las aproximaciones iniciales de los puntos de equilibrio. Estos son los datos iniciales para aplicar el método de Newton-Raphson con el comando *FindRoot* del programa *Mathematica*. Las soluciones encontradas y sus respectivos valores de las masas las utilizamos para evaluar la ecuación característica (4.5), y de esta forma determinar la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio encontrados.

Con el fin de ejemplificar lo dicho anteriormente, vamos a considerar los casos particulares con $m_1 = 0.01, 0.99$ tomando diferentes valores de m_2 y considerando que $m_3 = 1 - m_1 - m_2$, y tomando en cuenta masas diferentes. Estos casos son importante porque son los valores considerados en [12]. El resultado de nuestro estudio es dado en las tablas 4.2 y 4.3, donde resumimos los resultados numéricos obtenidos sobre la estabilidad de todos los puntos de equilibrio, complementando lo expuesto en [12], donde n_r denota el número de valores propios reales, n_i el número de valores propios complejos imaginarios puros y n_c el número de valores propios complejos.

L_1	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_r = n_i = 2$	L_5	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_c = 4$
L_2	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_r = n_i = 2$	L_6	$m_2 \in (0, 0.22]$	$n_i = 4$
				$m_2 \in (0.22, 0.51)$	$n_c = 4$
L_3	$m_2 \in (0, 0.029]$	$n_i = 4$	L_7	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_r = n_i = 2$
	$m_2 \in [0.029, 0.51)$	$n_c = 4$			
L_4	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_r = n_i = 2$	L_8	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_r = n_i = 2$

Tabla 4.2: Puntos de equilibrio y número de valores propios reales (n_r), complejos (n_c) e imaginarios puros (n_i) con $m_1 = 0.01$ como función de m_2 .

Nos gustaría señalar que los autores en [12] reportaron que L_3 es inestable para todos los valores de masas de m_2 . Sin embargo, un análisis en detalle de los cálculos muestra que L_3 es linealmente estable para $m_2 \in (0, 0.000023]$ cuando $m_1 = 0.99$, lo cual era algo de esperarse pues estos valores de masas están contenidos en la

L_1	$m_2 \in (0, 0.01)$	$n_r = n_i = 2$	L_5	$m_2 \in (0, 0.01)$	$n_i = 4$
L_2	$m_2 \in (0, 0.01)$	$n_r = n_i = 2$	L_6	$m_2 \in (0, 0.01)$	$n_i = 4$
L_3	$m_2 \in (0, 0.0000238]$	$n_i = 4$	L_7	$m_2 \in (0, 0.01)$	$n_r = n_i = 2$
	$m_2 \in [0.0000238, 0.01)$	$n_c = 4$			
L_4	$m_2 \in (0, 0.01)$	$n_r = n_i = 2$	L_8	$m_2 \in (0, 0.51)$	$n_r = n_i = 2$

Tabla 4.3: Puntos de equilibrio y número de valores propios reales (n_r), complejos (n_c) e imaginarios puros (n_i) con $m_1 = 0.99$ como función de m_2 .

región II.

Los equilibrios mostrados en las tablas 4.2 y 4.3 son: L_3 cuando $m_1 = 0.01$ y $m_2 \in (0, 0.0029]$, L_6 cuando $m_1 = 0.01$ y $m_2 \in (0, 0.0022]$, L_3 cuando $m_1 = 0.99$ y $m_2 \in (0, 0.000023]$ y $L_{5,6}$ cuando $m_1 = 0.99$ y $m_2 \in (0, 0.01]$. Recordamos que la tercer masa es obtenida mediante la relación $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. Entonces para estos intervalos de masas los equilibrios son linealmente estables, es decir, tienen valores propios de la forma $\pm i\omega_1$ y $\pm i\omega_2$. Adoptaremos la convención de que $0 < \omega_1 < \omega_2$. El comportamiento de ω_1 y ω_2 versus m_2 es ilustrado en las figuras 4.10 y 4.11

El análisis numérico de las condiciones (4.7) en cada equilibrio encontrado nos muestra que L_1 , L_2 , L_4 , L_7 y L_8 son inestables, mientras que L_3 , L_5 y L_6 son los únicos equilibrios linealmente estables en el dominio considerado. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Simó [61], Budzko y Prokompeya [15], Baltagiannis y Papadakis [12] y Zotos [74]. Estos autores usaron diferentes etiquetas para identificar a los equilibrios, ver la tabla 4.4.

Baltagiannis & Papadakis	Simó	Budzko & Prokopenya	Zotos
L_3	L_4	S_1	L_2
L_5	L_5	S_4	L_3
L_6	L_6	S_7	L_4

Tabla 4.4: Etiquetas para los puntos de equilibrio estables usados por varios autores. Nosotros hemos adoptado la notación usada por Baltagiannis y Papadakis en [12].

El siguiente paso es identificar numéricamente las curvas de resonancia entre las frecuencias asociadas a los valores propios de los puntos de equilibrio linealmente estables. En particular estamos interesados en el tipo y orden de resonancia para cada uno de los equilibrios que son linealmente estable, sin tomar en cuenta la estabilidad del triángulo de Lagrange formado por los primarios. Las corres-

pendientes curvas están representadas en las figuras 4.12, 4.13 y 4.14.

La región II no la mostramos, pues tomamos ventaja del hecho de que esta puede obtenerse de la región III mediante una reflexión con respecto a la línea $m_1 = m_2$

Notemos que las líneas $m_2 = 0$ (eje m_3), $m_3 = 0$ (eje m_2) y las líneas $m_1 + m_2 = 1$ en el plano (m_1, m_2) corresponden a los valores de las masas de dos copias del problema circular restringido de tres cuerpos, respectivamente. Además, existen puntos de intersección de las curvas de resonancia 1:1 con la curva $m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 = 1/27$ y ambos ejes y la línea recta $m_1 + m_2 = 1$. Estos puntos son $R_{L_3} = (\mu_R, 0)$ en la figura 4.12(a), $R_{L_5} = (\mu_R, 1 - \mu_R)$ en la figura 4.13(b), $R_{L_6} = (0, \mu_R)$ en la figura 4.14(a), $\mathcal{R}_{L_6} = (\mu_R, 0)$ en la figura 4.14(b), donde $\mu_R = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{69}/9) \approx 0.038520896504551$ corresponde al valor crítico de Routh en el problema restringido de tres cuerpos.

Considerando las curvas de resonancia podemos establecer las regiones donde los equilibrios son linealmente estables, las cuales están limitadas por la curva de resonancia 1:1. En un trabajo similar al nuestro, Budzo y Pronkompeya [15] encontraron soluciones de equilibrio e investigan la estabilidad lineal en el PRECC. Ellos construyeron las curvas en donde las condiciones de las resonancias de tercer y cuarto orden se satisfacen, y establecieron que las fronteras de la estabilidad lineal están determinadas por la condición $\omega_1 = \omega_2$, sin embargo, Budzo y Pronkompeya solo estudiaron el problema en la región I.

Por otro lado, notamos que los equilibrios L_3 y L_6 en la región I, así como L_5 y L_6 en las regiones II y III son linealmente estables para algunos de los valores de las masas donde la condición de Routh no se satisface, es decir, valores de las masas donde la configuración de Lagrange de los primarios es inestable. Este hecho fue observado por Pedersen [55] cuando estudio la estabilidad del problema de (3+1) cuerpos, sin restringirse a la región de estabilidad de la configuración de los primarios. Un resultado similar fue obtenido por Zotos [74]. Los valores de bifurcación calculados por nosotros son los siguientes: para L_3 es $B_{L_3} = (0.02012014, 0.018114)$, para L_5 es $A_{L_5} = (0.02016, 0.9619)$, para L_6 son $B_{L_6} = (0.018114, 0.02012014)$ y $A_{L_6} = (0.01802, 0.9619)$. Estos están indicados en las figuras 4.12(a), 4.13(b), 4.14(a) y 4.14(b), respectivamente.

En las figuras 4.15 y 4.16 mostramos todas las curvas de resonancia para los puntos L_3 , L_5 y L_6 , en su respectiva región. Esto nos permite determinar cuántos y cuáles equilibrios linealmente estables existen dentro y fuera de las regiones I y II.

A partir de estas curvas de resonancia 1:1, en las regiones I y II, es fácil estable-

cer una comparación entre nuestros resultados numéricos y aquellos obtenidos por Zotos [74]. En las figuras 4.20(a) y 4.21(a) mostramos los dominios de estabilidad en la región I y II, respectivamente. Notemos que la topología de las regiones es la misma que encontró Zotos [74], pero él no identificó la frontera de los dominios, y solo reportó el número de equilibrios en cada subregión, pero sin mencionar a qué equilibrio correspondía cada subregión. Nosotros en este trabajo de investigación hemos logrado obtener información adicional que nos permite identificar cuántos y dónde están localizados los puntos de equilibrio linealmente estables en las diferentes subregiones.

En la figura 4.17 presentamos todas las curvas de resonancia 1:1 de la región I. Notamos que hay dos puntos de intersección de las curvas de resonancia 1:1 con la línea $m_1 = m_2$ (dos primarios con masas iguales). La primera intersección es el punto $A(0.002716, 0.002716)$, el cual es el punto en resonancia 1:1 para L_5 . En este punto Burgos-García y Delgado [16] (L_2 en su notación) establecieron la existencia de la *catástrofe blue-sky*, y la otra intersección es $B(0.01883, 0.01883)$ que corresponde a la resonancia para L_3 y L_6 cuya estabilidad no ha sido estudiado hasta ahora. Por otro lado, el punto de intersección de la curva de resonancia 2:1 con la línea $m_1 = m_2$ como se muestra en la figura 4.15, cuya estabilidad no lineal fue estudiada por Álvarez-Ramírez et al. [4]. Similarmente otros puntos han sido localizados en la región III. De manera precisa, obtuvimos los puntos donde se interceptan las curvas de resonancia 1:1 y la línea $m_1 = 1 - 2m_2$, lo que significa que $m_2 = m_3$. Estos son $C(0.002736, 0.994528)$ para L_3 y $D(0.01883, 0.96234)$ para L_5 y L_6 , ver la figura 4.18.

Una de las aportaciones del estudio llevado a cabo en este trabajo es haber mostrado por primera vez las intersecciones de las curvas de resonancia.

Es importante mencionar el trabajo de Simó [61], en el cual llevo a cabo un profundo estudio numérico acerca de la cantidad de puntos de equilibrio relativos en el problema restringido y plano de cuatro cuerpos. Es de particular interés referimos principalmente a la figura 4.19, donde se muestra el dominio de estabilidad lineal de los equilibrios relativos en la porción del triángulo de masas correspondiente a $1/6$, es decir, la mitad de la región I de nuestra figura 4.9. Para proceder a establecer una comparación de nuestros resultados con los de él, debemos notar que las coordenadas (m_2, m_3) de los puntos marcados en su gráfico son

$$A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad B\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad C(0, 0), \quad S(0.0027096, 0.0027096), \\ Y(0, 0.038521), \quad T(0, 0.011947), \quad U(0.018858, 0.018858), \\ X(0.019034, 0.019064), \quad V(0.018114, 0.020014).$$

Su estudio está desarrollado en la región donde la configuración de los tres pri-

marios es estable, más precisamente en $CYVX$ (ver la figura 4.19). Simó mostró que la región de estabilidad es partida en tres subregiones dadas por $R_4 = CST$, $R_6 = CUT$, $R_5 = CUVY$, tal que $R_4 \subset R_6 \subset R_5$. En nuestros cálculos hemos identificado las coordenadas de los puntos marcados por Simó en la frontera de la región $CYVX$, y esto lo reportamos en la tabla 4.2, y la identificación la señalamos en la figura 4.19. Es importante notar que las fronteras de las regiones de la

punto en la frotera de $CYVX$	corresponde a
$U(0.018858, 0.018858)$	punto en las curvas de resonancia 1:1 de L_3 and L_6 con la línea $m_1 = m_2$: punto B en la figura 4.17
$V(0.018114, 0.020014)$	punto de intersección entre la curva de resonancia 1:1 de L_3 y la curva crítica de Routh: punto B_{L_3} en la figura 4.12 (a)
$T(0, 0.011947)$	punto de intersección entre la resonancia 1:1 de L_5 ya sea $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$: Figura 4.13 (a)
$S(0.0027096, 0.0027096)$	punto en la curva de resonancia 1:1 de L_5 con la línea $m_1 = m_2$: punto A en la figura 4.17
$X(0.019034, 0.019064)$	punto de intersección entre la línea $m_1 = m_2$ y la curva crítica de routh: Figura 4.14
$Y(0, 0.038521)$	punto de intersección entre la curva crítica de Routh y la curva de resonancia 1:1 de L_6 ya sea con $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$: points R_{L_6} and \mathcal{R}_{L_6} in Figure 4.14

Tabla 4.5: Relación entre los valores obtenidos por Simó y su correspondencia con los calculados por nosotros.

estabilidad lineal determinadas por Simó son solamente la curvas de resonancia 1:1, más precisamente, ST para L_5 , TU para L_6 y el arco YVU para L_3 . Mas aun, las regiones $R_4 \subset R_6 \subset R_5$ son aquellas mostradas en la figuras 4.20 y 4.21. Para más detalles ver la figura 4.19 donde las etiquetas son mostradas.

Muchos de los resultados clásicos que se han obtenido por diversos autores en relación a este problema no han sido mencionados en artículos recientes. Nosotros hemos hecho una presentación donde damos una estructura uniforme para relacionar resultados acerca de las configuraciones centrales, puntos de equilibrio, y equilibrios relativos que surgen en el problema.

El estudio numérico usado en el problema muestra que las curvas de resonancia son de gran importancia para determinar los dominios de estabilidad lineal. Algunas curvas de resonancia en la región I fueron calculadas por Budzko y Prokopenya, y en este trabajo hemos ampliado los resultados calculando otras curvas y tomando en consideración las tres regiones donde la configuración de Lagrange es estable. Esto nos permitió determinar las regiones en el espacio de las masas

donde los puntos de equilibrio son linealmente estables, y encontrar las regiones para donde están contenidos estos equilibrios.

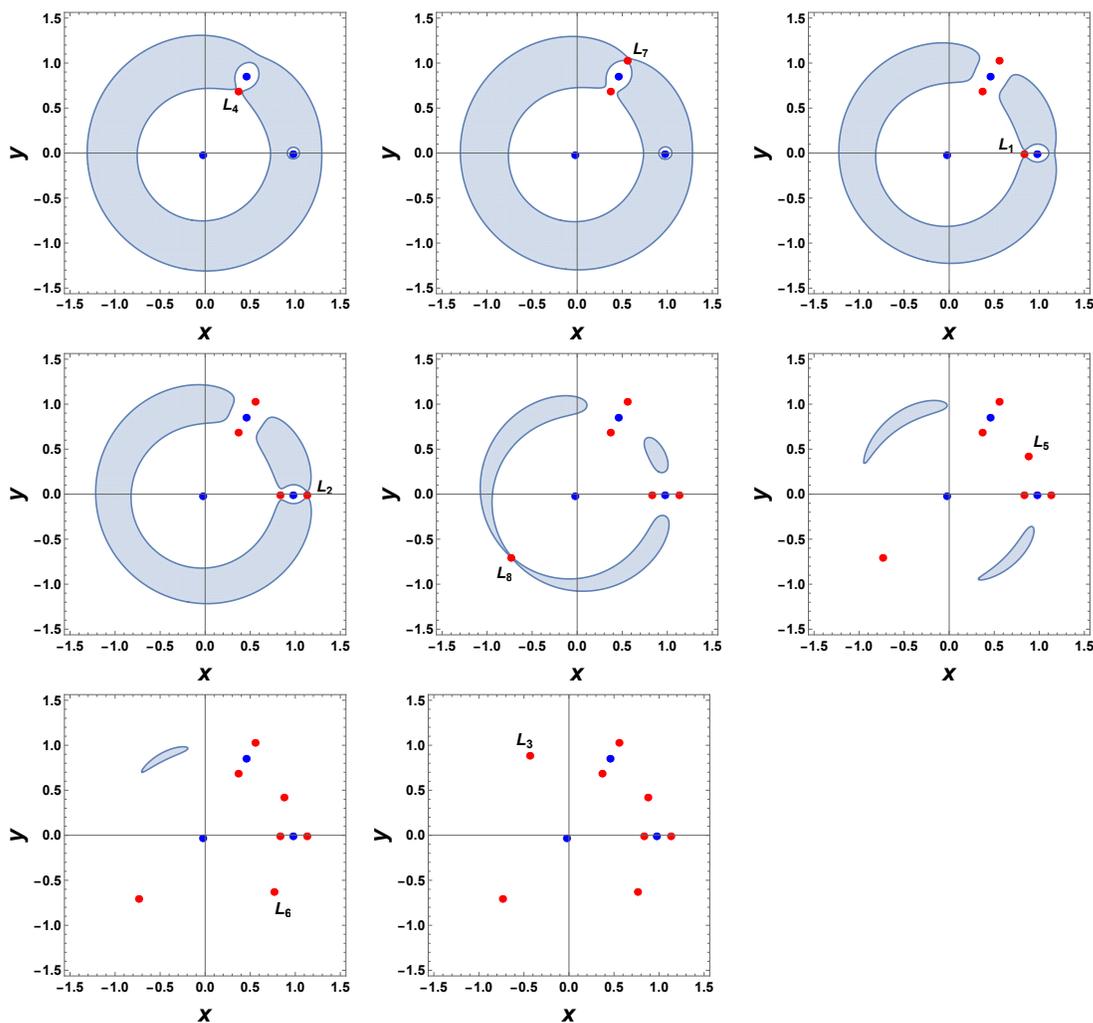


Figura 4.6: Región de Hill para $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$ con $C_J = 3.2548$, $C_J = 3.2275$, $C_J = 3.145$, $C_J = 3.135$, $C_J = 3.0265$, $C_J = 3.01$, $C_J = 3$ y $C_J = 2.985$, respectivamente. Los puntos azules son los primarios, y los puntos rojos corresponden a los puntos de equilibrio. La región sombreada es donde el movimiento de m_0 no está permitido.

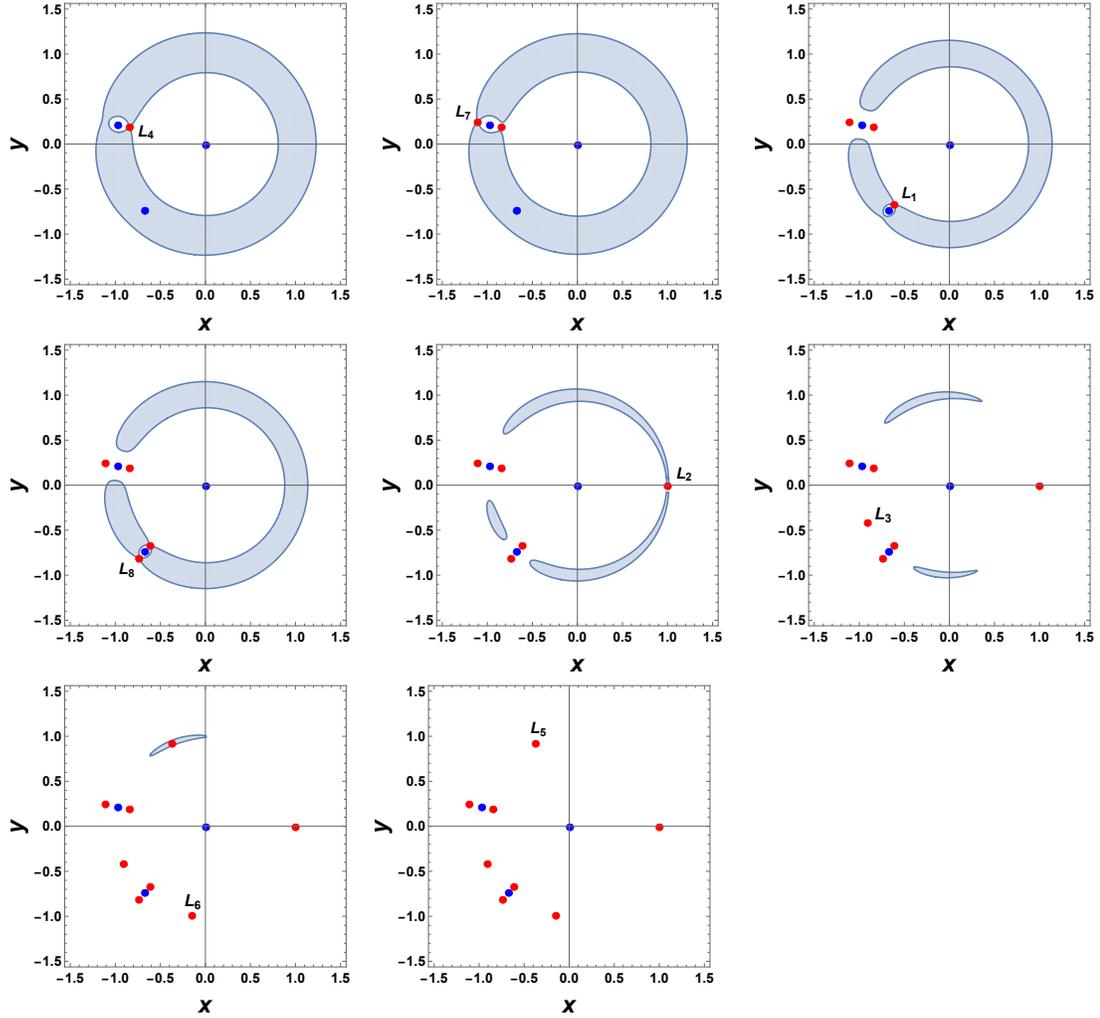


Figura 4.7: Región de Hill para $m_1 = 0.99$ y $m_2 = 0.0077$ con $C_J = 3.142$, $C_J = 3.131$, $C_J = 3.060$, $C_J = 3.058$, $C_J = 3.01$, $C_J = 3.005$, $C_J = 2.999$ y $C_J = 2.995$, respectivamente. Los puntos azules son los primarios, y los puntos rojos corresponden a los puntos de equilibrio. La región sombreada es donde el movimiento de m_0 no está permitido.

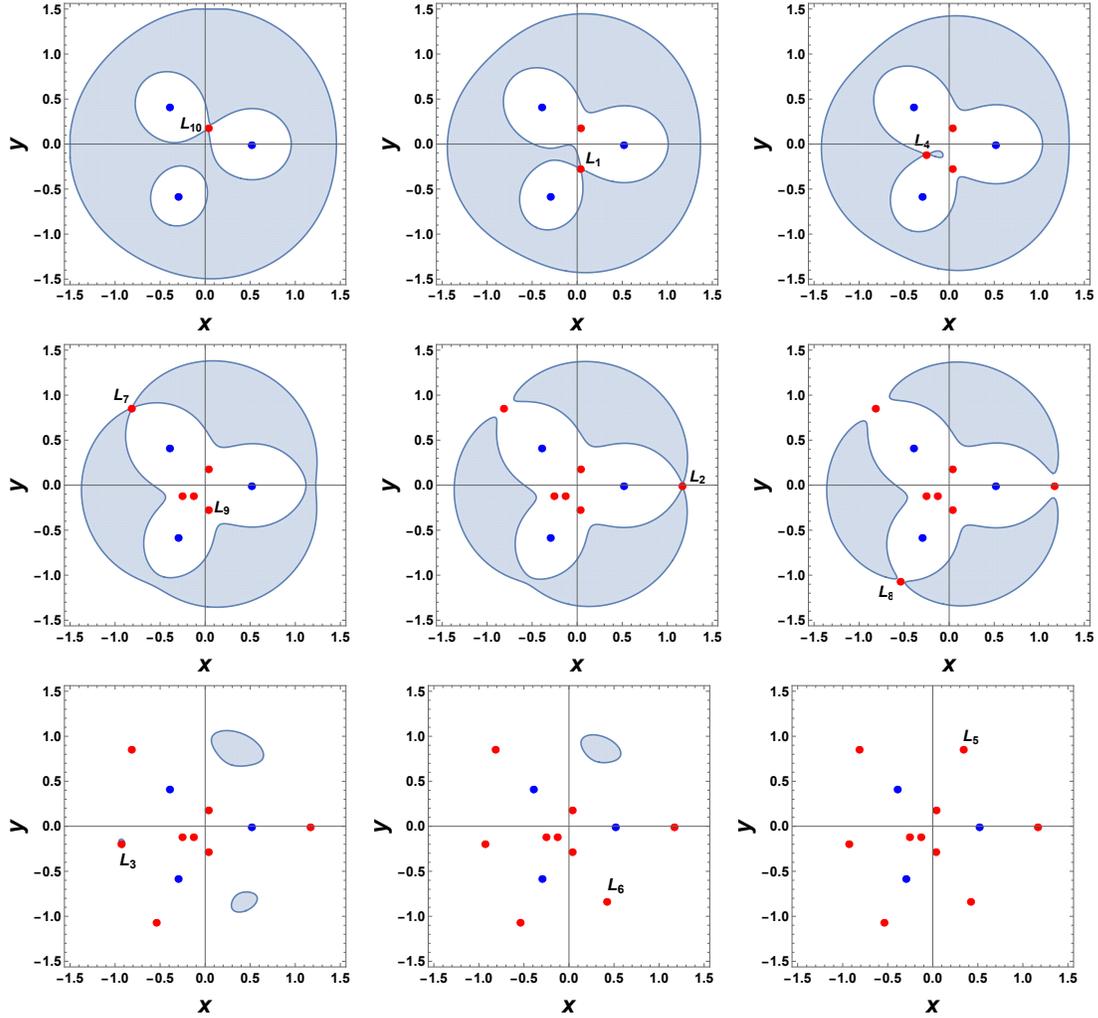


Figura 4.8: Región de Hill para $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.022$ con $C_J = 3.2548$, $C_J = 3.2275$, $C_J = 3.145$, $C_J = 3.135$, $C_J = 3.0265$, $C_J = 3.01$, $C_J = 3$ y $C_J = 2.985$, respectivamente. Los puntos azules son los primarios, y los puntos rojos corresponden a los puntos de equilibrio. La región sombreada es donde el movimiento de m_0 no está permitido.

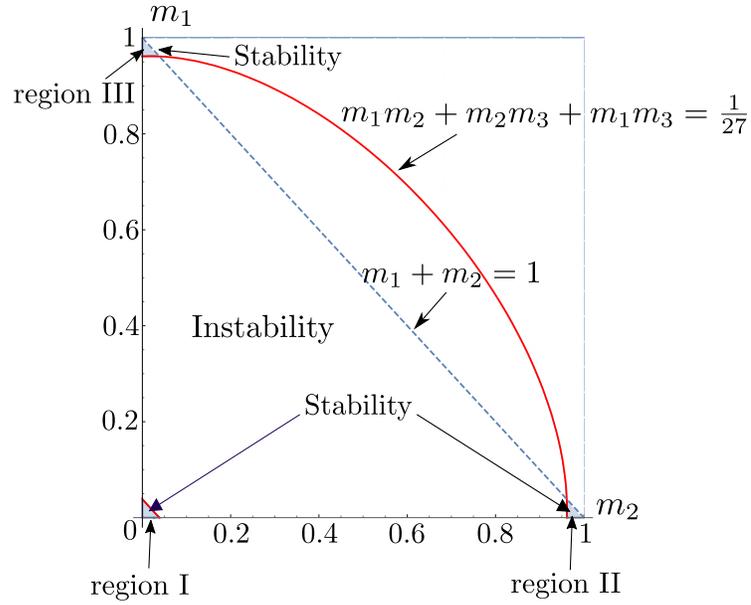


Figura 4.9: Regiones de estabilidad de la configuración de Lagrange (sombreado) e inestabilidad (región en blanco que esta por debajo de la línea $m_1 + m_2 = 1$). El valor de la tercer masa es $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. Las curvas en rojo corresponden al valor crítico de Routh.

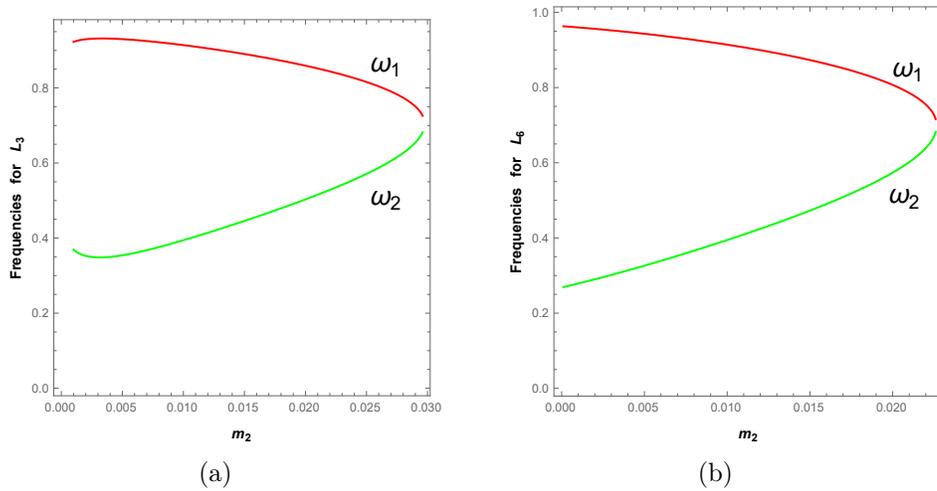
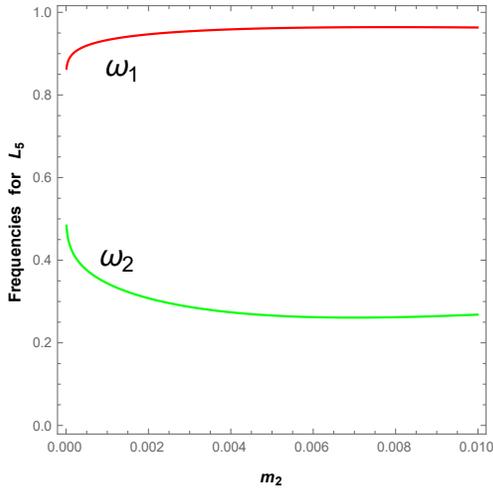
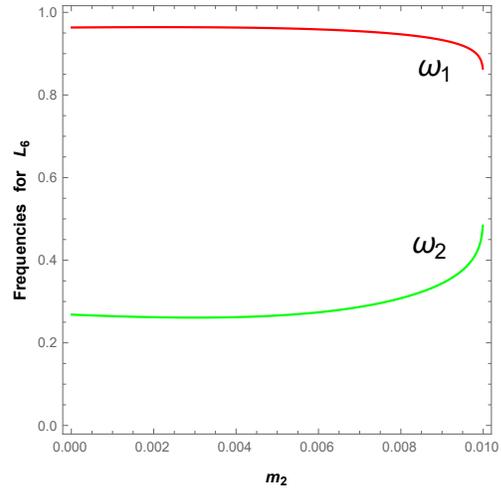


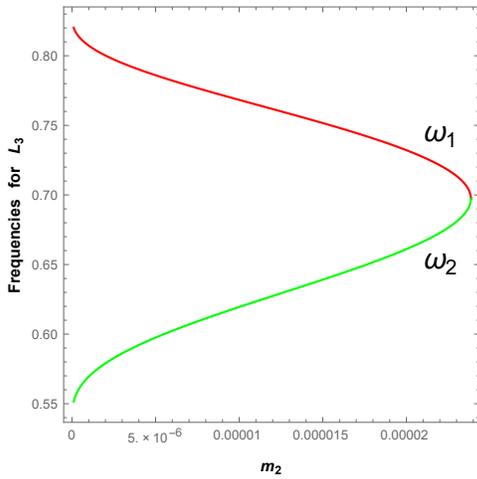
Figura 4.10: Gráficas de las frecuencias ω_1 y ω_2 para $m_1 = 0.01$ como función de m_2 para los puntos de equilibrio: (a) L_3 and (b) L_6 .



(a)



(b)



(c)

Figura 4.11: Gráficas de las frecuencias ω_1 y ω_2 para $m_1 = 0.99$ como función de m_2 para los puntos de equilibrio: (a) L_5 , (b) L_6 , (c) L_3 .

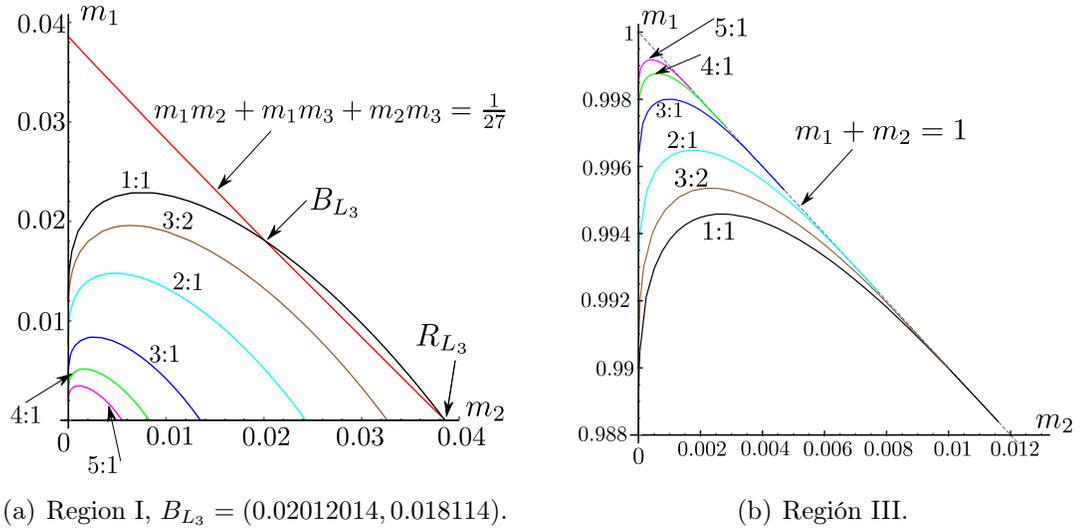


Figura 4.12: Curvas de resonancia para el punto L_3 en las regiones I y III.

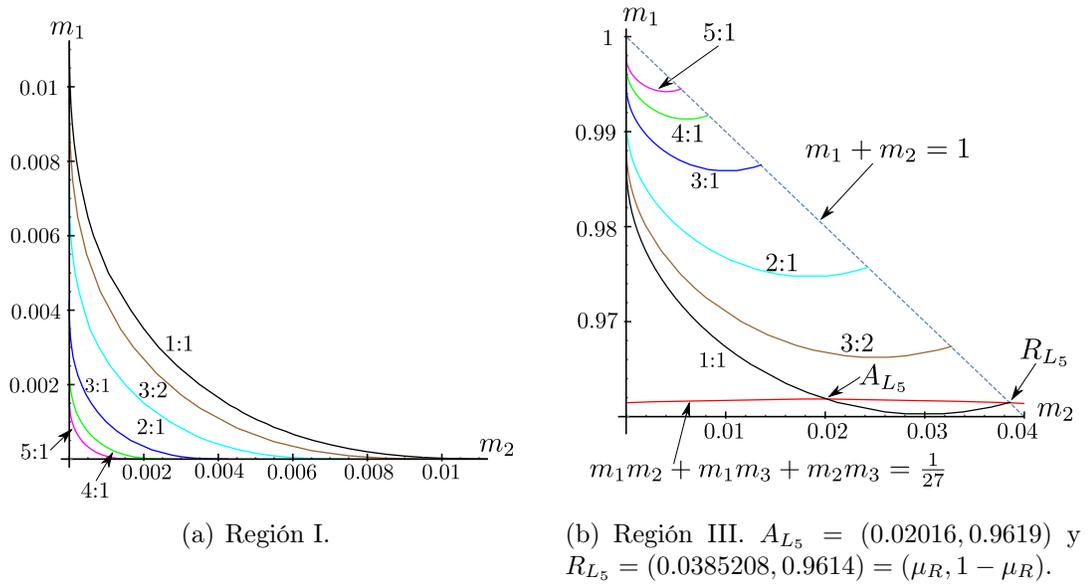
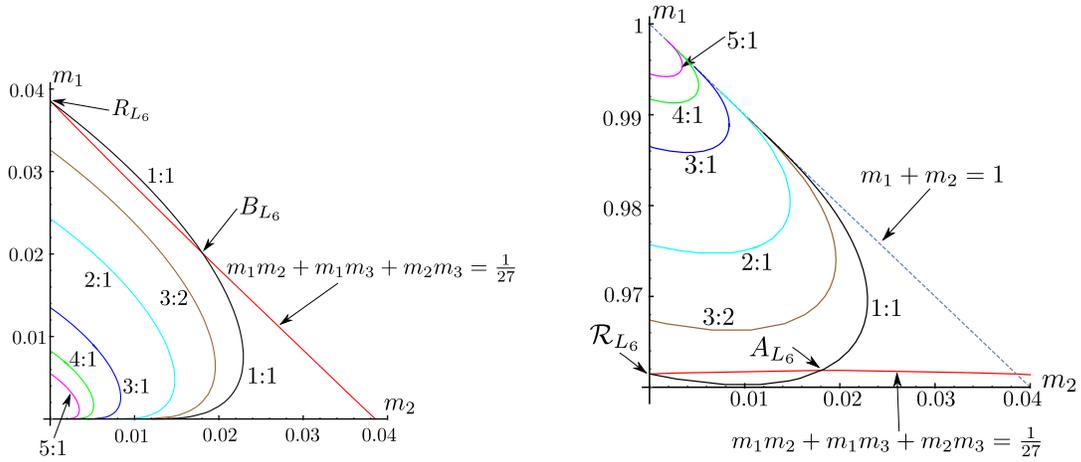


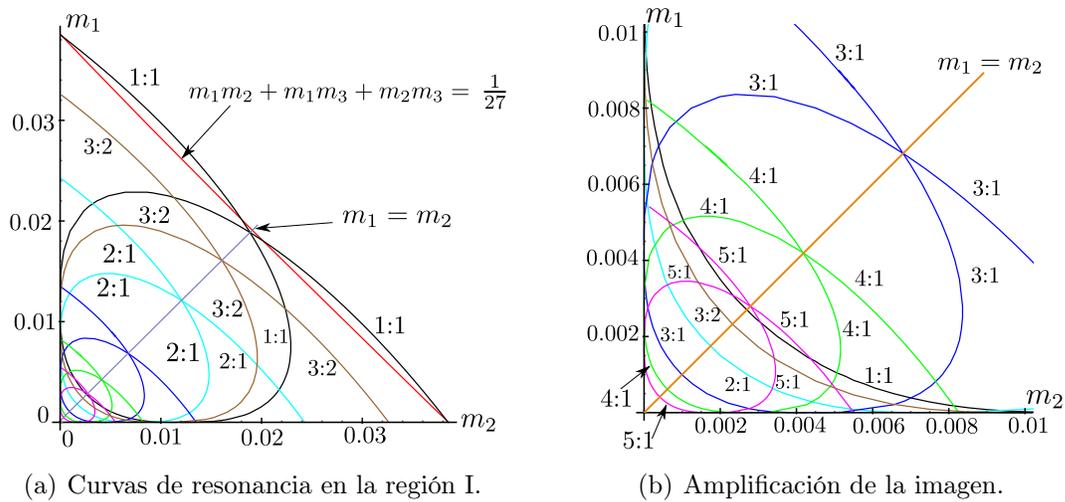
Figura 4.13: Curvas de resonancia para el punto L_5 en las regiones I y III.



(a) Región I. $B_{L_6} = (0.018114, 0.02012014)$ y $R_{L_6} = (0, 0.385208) = (0, \mu_R)$.

(b) Region III. $A_{L_6} = (0.01802, 0.9619)$ y $R_{L_6} = (0.9614, 0.0385208) = (1 - \mu_R, \mu_R)$.

Figura 4.14: Curvas de resonancia para el punto L_6 en las regiones I y III.



(a) Curvas de resonancia en la región I.

(b) Amplificación de la imagen.

Figura 4.15: Todas las curvas de resonancia en la región I para los puntos de equilibrio L_3 , L_5 y L_6 .

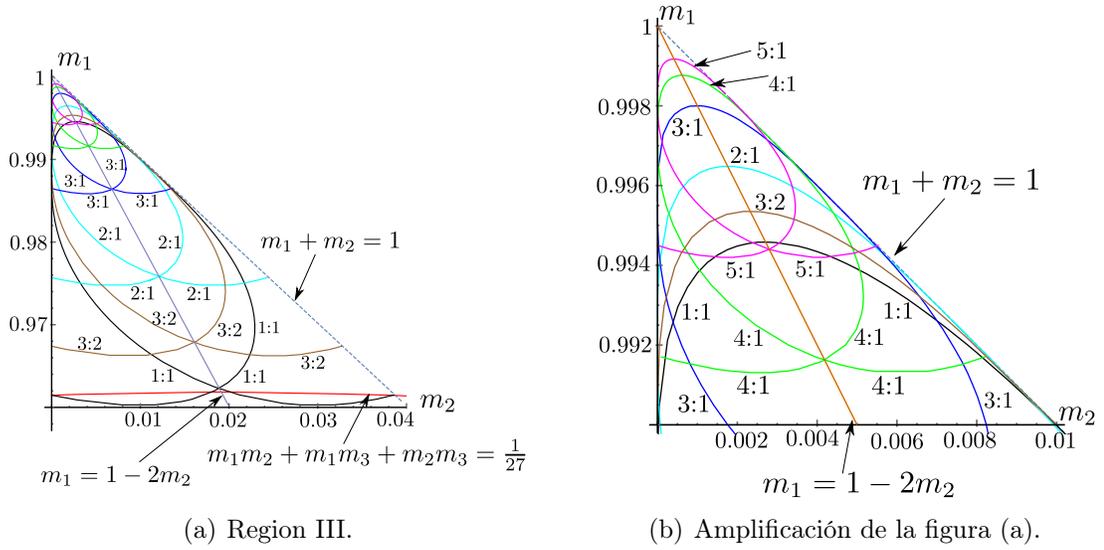


Figura 4.16: Todas las curvas de resonancia para los puntos de equilibrio L_3 , L_5 y L_6 en la región III. La línea recta $m_1 = 1 - 2m_2$ corresponde a $m_2 = m_3$.

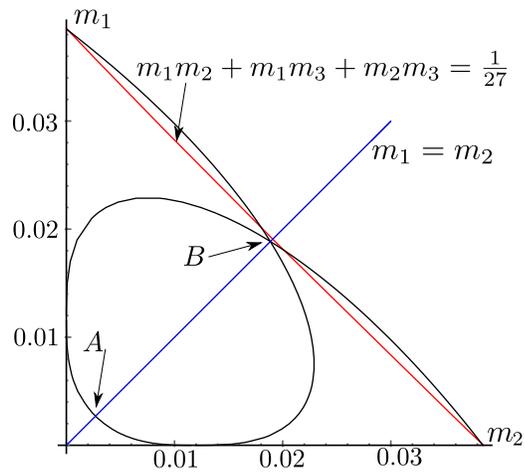


Figura 4.17: Curvas de resonancia 1:1 en la región II, donde dos cuerpos primarios tienen masas iguales: $A(0.002736, 0.002716)$ para L_5 y $B(0.01883, 0.01883)$ para L_3 y L_6 .

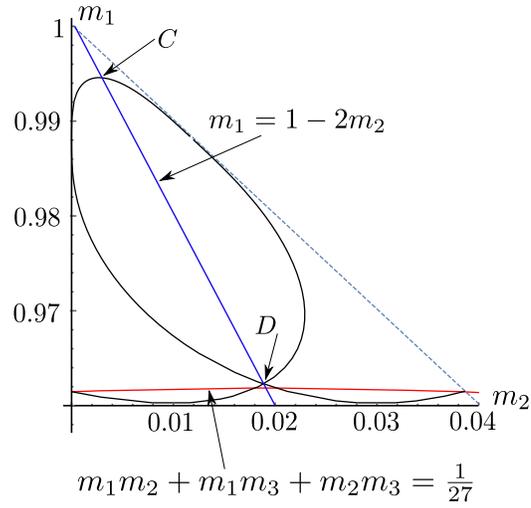
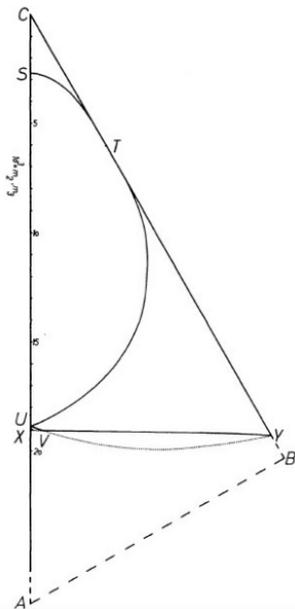
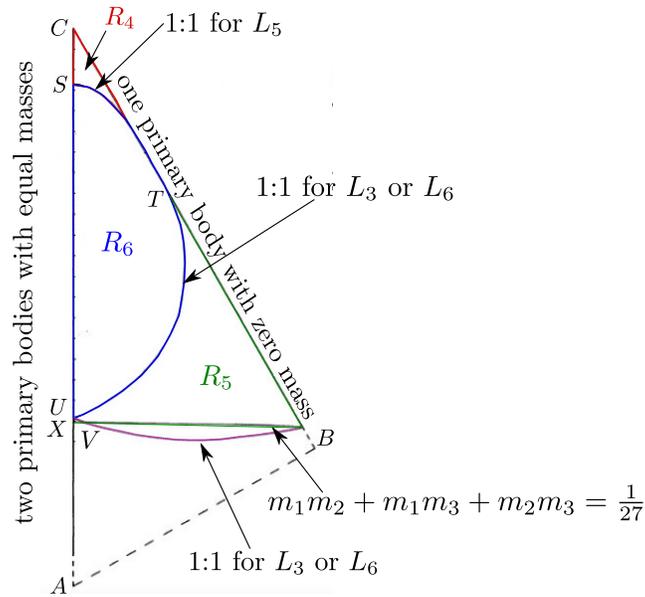


Figura 4.18: Resonancia 1:1 con dos cuerpos primarios con igual masa en la región III: $C(0.002736, 0.994528)$ para L_3 y $D(0.01883, 0.96234)$ para L_5 y L_6 .



(a) Figura 7(a) en [61].



(b) Figura 7(a) con etiquetas en las curvas y puntos obtenidos por Simó en [61].

Figura 4.19: La región $CYVX$ es el área de estabilidad lineal de los primarios en el espacio de masas, donde $R_4 = CST$, $R_6 = CUT$ y $R_5 = CUVY$ son las regiones de estabilidad de los puntos de equilibrio L_5 , L_3 and L_6 .

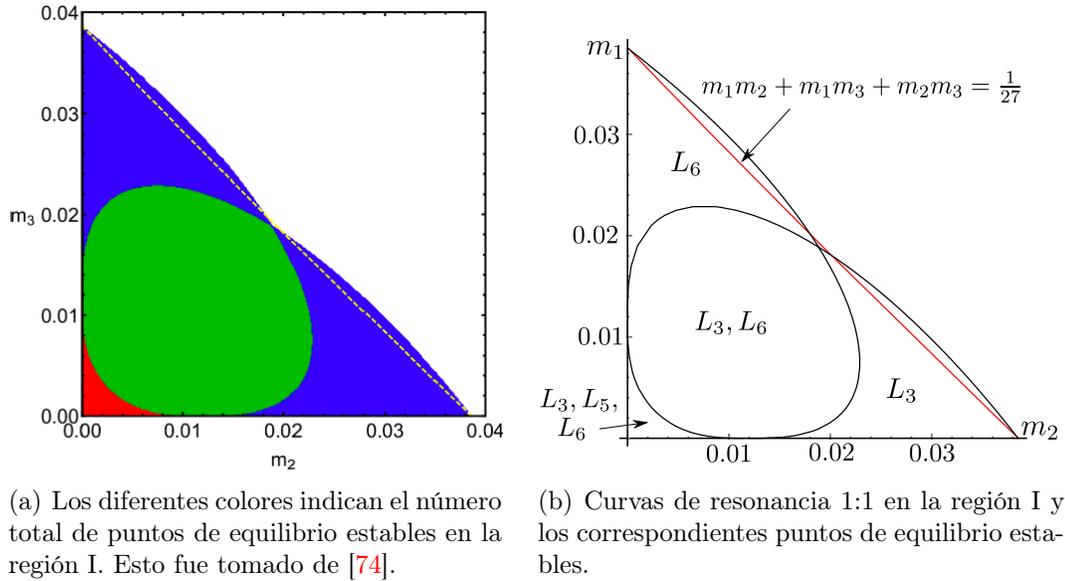


Figura 4.20: (a) Los diferentes colores indican el número total de puntos de equilibrio estables en la región I. Esto es tomado de [74]. (b) Curvas de resonancia 1:1 en la región I y los dominios de estabilidad para L_3 , L_5 y L_6 .

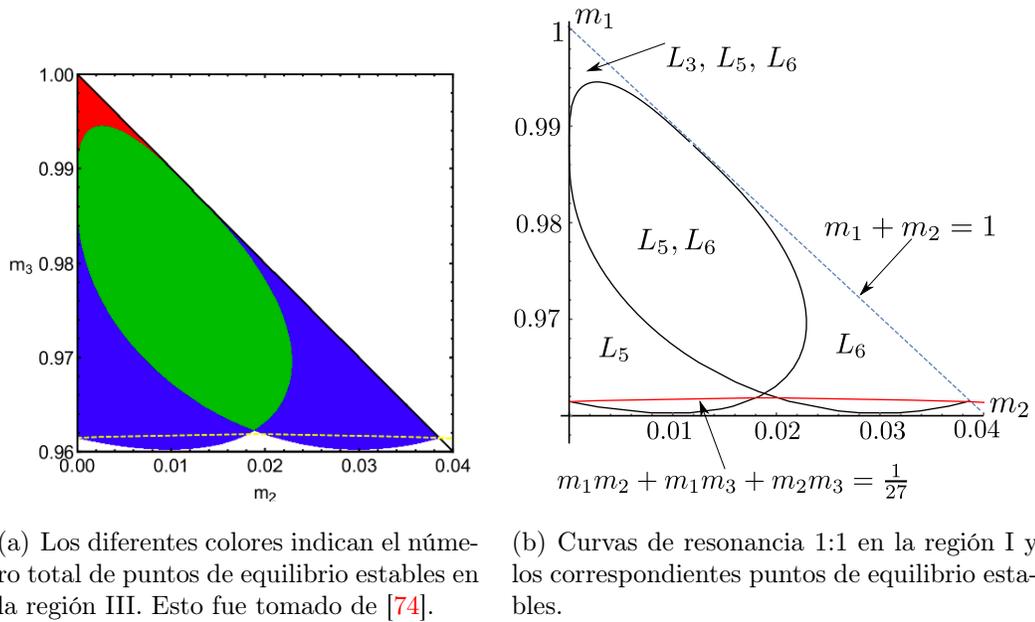


Figura 4.21: (a) Los diferentes colores indican el número total de puntos de equilibrio estables en la región III. Esto es tomado de [74].

Capítulo 5

Estabilidad no lineal de los puntos de equilibrio

Este capítulo está dedicado al estudio de la estabilidad no lineal, en el sentido de Lyapunov, de los puntos de equilibrio elípticos, los cuales son linealmente estables.

5.1. Normalización del hamiltoniano

Para llevar a cabo el estudio, trasladamos el origen de coordenadas al punto de equilibrio $L_k = (x_0, y_0)$, mediante el cambio de variables simpléctico

$$\begin{aligned}x &= x_0 + q_1, & y &= y_0 + q_2, \\p_x &= p_{x_0} + p_1, & p_y &= p_{y_0} + p_2.\end{aligned}$$

El siguiente paso es expandir el hamiltoniano resultante en serie de Taylor en la vecindad del origen, hasta orden m . Notemos que el origen de coordenadas es ahora el punto de equilibrio. Luego el primer término de la serie debe desaparecer, mientras que el término constante se omite, pues no contribuye al sistema hamiltoniano. Entonces los primeros términos del hamiltoniano son cuadráticos, es decir

$$H = H_2 + \cdots + H_m = \sum_{j=2}^m H_j, \quad (5.1)$$

donde cada H_j es un polinomio homogéneo de grado j en las variables (q_1, q_2, p_1, p_2) . A lo largo de esta sección discutiremos la estabilidad no lineal en los casos no resonantes y resonantes.

Ya que el hamiltoniano es de dos grados de libertad, la estabilidad en el sentido de Lyapunov de los equilibrios deberá de ser determinada a través de los términos no lineales, para lo cual usaremos el teorema 7 (de Arnold), pero sólo para el caso no resonante. Es claro que existen valores de los parámetros donde aparecen resonancias, por lo que el teorema 7 falla en la determinación de la estabilidad. Dependiendo del tipo de resonancia que se encuentre, aplicaremos otros teoremas ya mencionados en la sección 1.3, los cuales ayudan a determinar la estabilidad en presencia de resonancias.

Ahora vamos a calcular la forma normal para el hamiltoniano formal (5.1), en la vecindad de los puntos de equilibrio. Para iniciar es necesario calcular la forma normal de la parte cuadrática, la cual en cada equilibrio está dada por la siguiente expresión

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 + a_{20} q_1^2 + a_{11} q_1 q_2 + a_{02} q_2^2, \quad (5.2)$$

y la matriz hamiltoniana asociada es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ H_{211} & H_{212} & 0 & 1 \\ H_{221} & H_{222} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

donde, $H_{2_{ij}}$ con $i, j = 1, 2$, son las segundas parciales de H_2 respecto de las variables de posición q_1 y q_2 . Los valores propios de la matriz son de la forma $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, los cuales obtenemos numéricamente, con la ayuda del software *Mathematica*, considerando valores de las masas en la regiones de estabilidad lineal descritas en el capítulo anterior. Posteriormente, calculamos numéricamente los vectores propios correspondientes a los valores propios $+i\omega_1$ y $+i\omega_2$, y los denotamos por α_1 y α_2 , respectivamente. Con estos vectores construimos la matriz de transformación de coordenadas T , que transforma las coordenadas cartesianas (q_1, q_2, p_1, p_2) a un conjunto de coordenadas complejas $(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Mas precisamente,

$$T = (\bar{\alpha}_1/r_1, \alpha_2/r_2, \alpha_1/r_1, \bar{\alpha}_2/r_2),$$

donde r_1 y r_2 son constantes necesarias para que T sea simpléctica con multiplicador simpléctico $\frac{1}{2}i$, de modo que $T^T J T = \frac{1}{2}iJ$.

Notemos que las nuevas y viejas coordenadas están relacionadas por

$$\bar{H}_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = -2iH_2(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Luego, aplicando la transformación T a H_2 obtenemos

$$\bar{H}_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2. \quad (5.4)$$

Es decir, en las nuevas variables el hamiltoniano (5.1) se transforma en el hamiltoniano complejo

$$H(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \rho_1 + \rho_2 = 3}^m h_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \bar{z}_1^{\rho_1} \bar{z}_2^{\rho_2}. \quad (5.5)$$

Notemos que la parte cuadrática de (5.5) es de signo no definido, y por lo tanto la estabilidad o inestabilidad no son posibles de determinar con el teorema de Dirichlet [24]. Luego debemos aplicar el teorema 7, pero suponiendo que las frecuencias ω_1 y ω_2 no son resonantes. Para este fin, procedemos a llevar el hamiltoniano a su forma normal de Birkhoff aplicando el método de Lie-Deprit [41].

El hamiltoniano formal (5.1) debe ser expresado como la suma de polinomios homogéneos en el conjunto de las nuevas variables $(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Luego, procederemos a desarrollar a (5.1) en serie de potencias de un pequeño parámetro positivo ε , es decir,

$$H = H(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = H_0^0 + \varepsilon H_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{2!} H_2^0 + \dots$$

En particular el término $H_0^0 = H_0$ es dado por (5.4). Observemos que ε es una variable ficticia que es usada para construir la transformación de coordenadas cercanas a la identidad.

La función generatriz

$$W = W_1 + \varepsilon W_2 + \frac{\varepsilon^2}{2!} W_3 + \dots,$$

y transformación de Lie nos permiten introducir nuevas funciones vía la relación de recurrencia (1.5) para $i \geq 0$ y $j \geq 1$, donde $\{\cdot, \cdot\}$ es el paréntesis de Poisson usual. Recordamos que el proceso recursivo de estas funciones se entiende de manera sencilla con el triángulo de Lie (1.6).

Ahora vamos a calcular la forma normal de Birkhoff hasta orden cuatro. Usando la fórmula (1.7) calculamos los términos de orden tres ($i = j = 1$) y obtenemos H_0^1 . Posteriormente, procedemos a obtener los términos de cuarto orden ($i = j = 2$) mediante la fórmula (1.8).

Notemos que en cada paso, los términos de la generatriz W_{k+1} se deben elegir de tal que la forma de H_0^k sea lo más simple posible. El hamiltoniano reducido es dado entonces por

$$\tilde{H} = \tilde{H}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = H_0^0 + \varepsilon H_0^1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} H_0^2 + \dots$$

con $\varepsilon = 1$. Observemos que un término típico en \tilde{H} tiene la forma $\mathcal{A}z_1^{\nu_1}\bar{z}_1^{\nu_2}z_2^{\rho_1}\bar{z}_2^{\rho_2}$. Si los exponentes satisfacen la condición

$$|\nu_1 - \rho_1| + |\nu_2 - \rho_2| \neq 0,$$

entonces el término puede ser eliminado de H_0^j eligiendo un término de la misma forma en W_j , cuyo coeficiente \mathcal{C} es determinado por

$$\mathcal{C} = \frac{-i\mathcal{A}}{(\nu_1 - \rho_1)\omega_1 - (\nu_2 - \rho_2)\omega_2}.$$

En caso contrario, si $|\nu_1 - \rho_1| + |\nu_2 - \rho_2| = 0$, entonces el término en \tilde{H} pertenece a H_0^j .

Los cálculos de las transformaciones de Lie los llevamos a cabo usando *Mathematica*, lo cual nos permite automatizar el proceso de normalización. Usando el procedimiento de la normalización de Birkhoff todos los términos de tercer orden pueden ser completamente eliminados, de tal forma que $H_0^1 = 0$ y H_0^2 es simplificado. Entonces, la forma normal del hamiltoniano en coordenadas complejas es

$$H(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + ih_{2200} z_1^2 \bar{z}_1^2 + ih_{1111} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + ih_{0022} z_2^2 \bar{z}_2^2. \quad (5.6)$$

Es importante notar que la transformación de Lie y el hamiltoniano cuando se normalizan hasta a cierto orden N , la generatriz también es truncada a este orden. Esto significa que la precisión del conjunto completo de expresiones es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$, y por lo tanto la estimación de la transformación es del mismo orden. Luego no es posible dar una fórmula explícita del error de la aproximación. Entonces las series introducidas mediante el algoritmo para construir la forma normal son asintóticamente divergentes, con la excepción de algunos casos particulares. Sin embargo, la forma normal de Birkhoff es muy útil, pues hay un paso de normalización óptimo que minimiza al residuo. El mecanismo de divergencia es principalmente debido a la acumulación de lo que se conoce como *pequeños divisores* involucrados en el problema. El lector puede consultar [30], donde algunas estimaciones basadas en la teoría de Nekoroshev han sido dadas para diferentes problemas perturbados.

Con el fin de conseguir el hamiltoniano normalizado en coordenadas reales, introducimos el cambio de coordenadas complejas simplécticas definido como

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + ip_1), & z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 + ip_2), \\ \bar{z}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - ip_1), & \bar{z}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - ip_2), \end{aligned} \quad (5.7)$$

con multiplicador $-\frac{1}{2}i$. Por lo tanto, la forma normal del hamiltoniano en coordenadas reales, es dado por

$$\begin{aligned} \tilde{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = & \frac{\omega_1}{2} (q_1^2 + p_1^2) - \frac{\omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + h_{2200} (q_1^2 + p_1^2)^2 \\ & + h_{1111} (q_1^2 + p_1^2) (q_2^2 + p_2^2) + h_{0022} (q_2^2 + p_2^2)^2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde los coeficientes h_{2200} , h_{1111} y h_{0022} son evaluados numéricamente para cada conjunto de valores de m_1 , m_2 , ω_1 y ω_2 .

Ahora, vamos a usar las variables acción-ángulo definidas por $2I_1 = q_1^2 + p_1^2$ y $2I_2 = q_2^2 + p_2^2$. Entonces, el hamiltoniano (5.8) queda como

$$\tilde{H}(I_1, I_1, \phi_1, \phi_2) = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \frac{1}{2}(h_{2200} I_1^2 + h_{1111} I_1 I_2 + h_{0022} I_2^2). \quad (5.9)$$

5.2. Estabilidad de los equilibrios

Consideramos los equilibrios L_i en el caso cuando todos los valores propios son imaginarios puros y distintos. Aplicando el teorema de Arnold, vamos a verificar si estos puntos son estables, con la excepción de los casos cuando ocurre resonancia. Para esto, necesitamos verificar que el discriminante $D_4 = h_{2200}\omega_1^2 + h_{1111}\omega_1\omega_2 + h_{0022}\omega_2^2$ no se anule. Ya que las ecuaciones (4.1) que determinan los puntos de equilibrio son intratables analíticamente, D_4 lo obtendremos numéricamente. Iniciamos con los casos particulares $m_1 = 0.01, 0.99$, y posteriormente introducimos el caso general, el cual es biparámetro.

En los casos particulares tomamos una malla de puntos igualmente espaciados en el intervalo de la masa m_2 , entonces calculamos para cada valor de los nodos de esta malla las coordenadas del punto de equilibrio, el sistema de vectores propios y normalizaremos el hamiltoniano para obtener (5.9) y finalmente evaluamos D_4 .

5.2.1. Caso $m_1 = 0.01$

En las figuras 5.1 y 5.2 mostramos las gráficas de D_4 como función de m_2 para los siguientes puntos de equilibrio: L_3 con $m_2 \in (0, 0.029]$ y L_6 con $m_2 \in (0, 0.22]$. Observemos que en ambas gráficas $D_4 \neq 0$, excepto en los valores $m_2 = 0.00906365$ y 0.0085405 , respectivamente, donde $D_4 = 0$. En estos casos será necesario llevar a cabo una normalización a orden mayor y evaluar el discriminante D_6 para poder determinar la estabilidad.

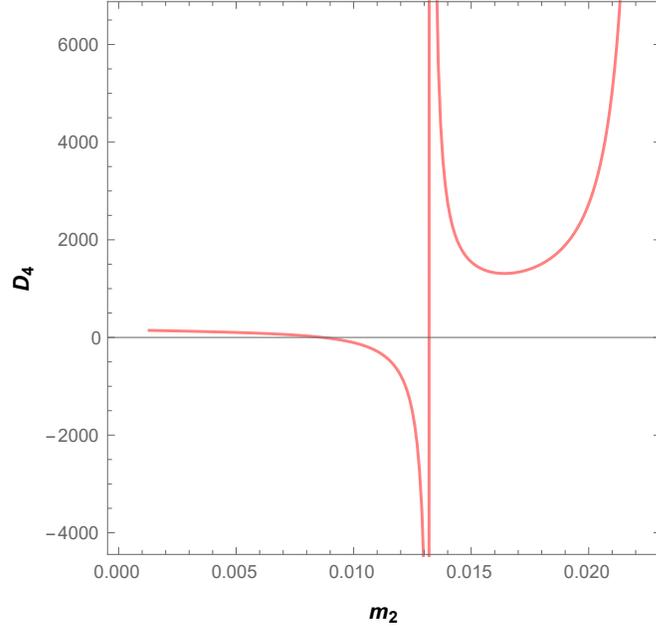


Figura 5.1: Gráfica de D_4 en función de m_2 con $m_1 = 0.01$ para L_3 . El valor de m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad corresponde a la resonancia 2:−1, también existe un valor de m_2 donde $D_4 = 0$.

Además, existe una asíntota vertical, cuya discontinuidad corresponde a la resonancia 2:−1. Esta resonancia ocurre en $m_2 = 0.0149559$ para L_3 donde las frecuencias son $\omega_1 = 0.89052143$ y $\omega_2 = 0.44525704$, mientras que para L_6 el valor de $m_2 = 0.0132911$ con frecuencias $\omega_1 = 0.88888846$ y $\omega_2 = 0.44444469$. Por lo tanto, aplicando el teorema 7, concluimos que L_3 para $m_2 \in (0, 0.029]$ y L_6 con $m_2 \in (0, 0.22]$ son estables en el sentido de Lyapunov, excepto en los valores donde ocurre la resonancia y donde se anula el determinante D_4 .

5.2.2. Caso $m_1 = 0.99$

Las figuras 5.3, 5.4 y 5.5 muestran a D_4 como función de la masa m_2 para L_3 , L_5 y L_6 , respectivamente. Podemos observar en las figuras 5.3 y 5.4 que hay una asíntota vertical donde el D_4 tiene una discontinuidad, además de que el D_4 se anula en $m_2 = 0.0004188359$ y 0.00958116419 , respectivamente para L_5 y L_6 . Entonces en estos casos particulares será necesario llevar a cabo la normalización a orden mayor y evaluar el discriminante de Arnold en estos valores, para poder decidir la estabilidad. Con el fin de obtener una mejor aproximación de los valores de m_2 donde ocurre la discontinuidad, hacemos un refinamiento de los cálculos

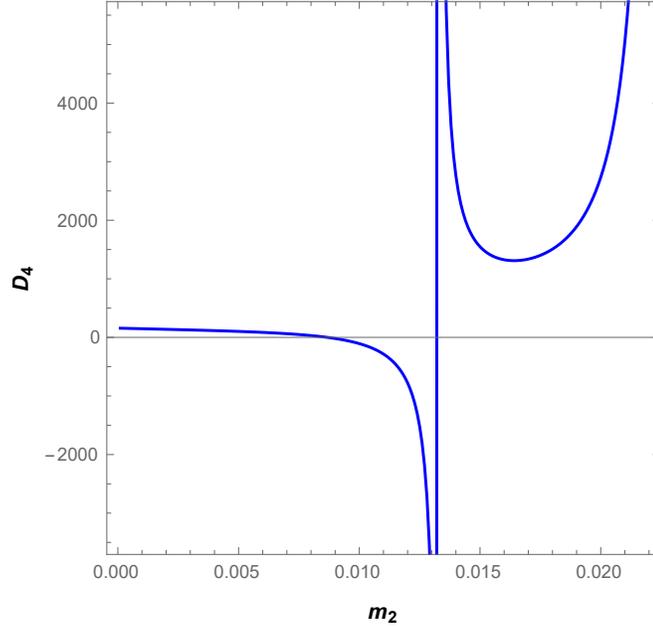


Figura 5.2: Gráfica de D_4 en función de m_2 con $m_1 = 0.01$ para L_6 . El valor de m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad (asíntota vertical) corresponde a la resonancia 2:−1 resonancia, también existe un valor de m_2 para donde $D_4 = 0$.

numéricos y obtenemos que $m_2 = 0.00006983, 0.00993018$. Para estos valores de las masas la parte cuadrática del hamiltoniano, dada en (5.4), tiene frecuencias fundamentales $\omega_1 = 0.88671589, \omega_2 = 0.44335854$ and $\omega_1 = 0.88672157, \omega_2 = 0.4433482148$. Además, notamos que en ambos casos la condición de racionalidad $2\omega_2 = \omega_1$ se satisface, correspondiendo a la resonancia 2:−1, y su estabilidad debe determinarse con la forma normal a orden tres. Entonces, de acuerdo al teorema 7 el punto de equilibrio L_6 es estable en el sentido de Lyapunov cuando $m_2 \in (0, 0.01)$, L_5 es estable para $m_2 \in (0, 0.01)$, excepto en el valor de las resonancias y donde $D_4 = 0$, y cuya estabilidad determinaremos más adelante.

Finalmente, en la figura 5.5, observamos que D_4 para L_3 tiene un comportamiento un poco distinto ya que siempre es negativo, para todos los valores de m_2 donde L_3 es linealmente estable, y aparentemente no aparecen resonancias, lo que implica que L_3 es estable; sin embargo, en el extremo derecho final del intervalo de m_2 , se manifiesta la existencia de una resonancia 1:−1. Esto se puede ver inmediatamente de la figura 4.11, donde $\omega_1 = \omega_2$ corresponde a la frontera de la región de estabilidad lineal.

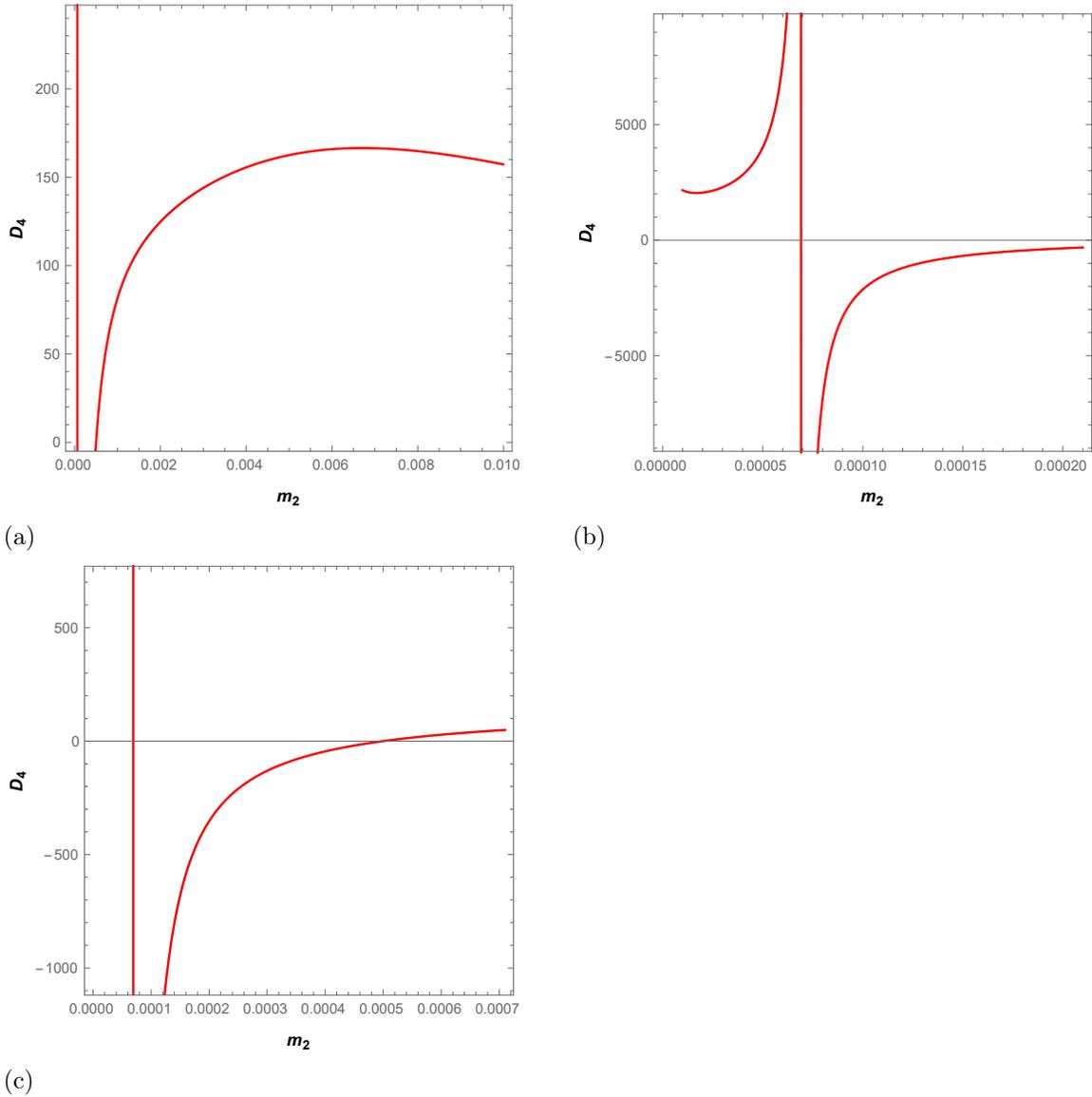


Figura 5.3: Gráficas de D_4 en función de m_2 para L_5 con $m_1 = 0.99$ y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. (a) $D_4 \neq 0$ para todo valor de m_2 donde L_5 es linealmente estable. La discontinuidad corresponde a la resonancia $2:-1$. (b) Amplificación de la región cercana a la resonancia $2:-1$. (c) Amplificación de la región donde $D_4 = 0$.

5.2.3. Determinación de la estabilidad cuando $D_4 = 0$

En esta sección investigaremos la estabilidad no lineal de los equilibrios cuando $D_4 = 0$. En las secciones anteriores vimos que hay valores de las masas donde el

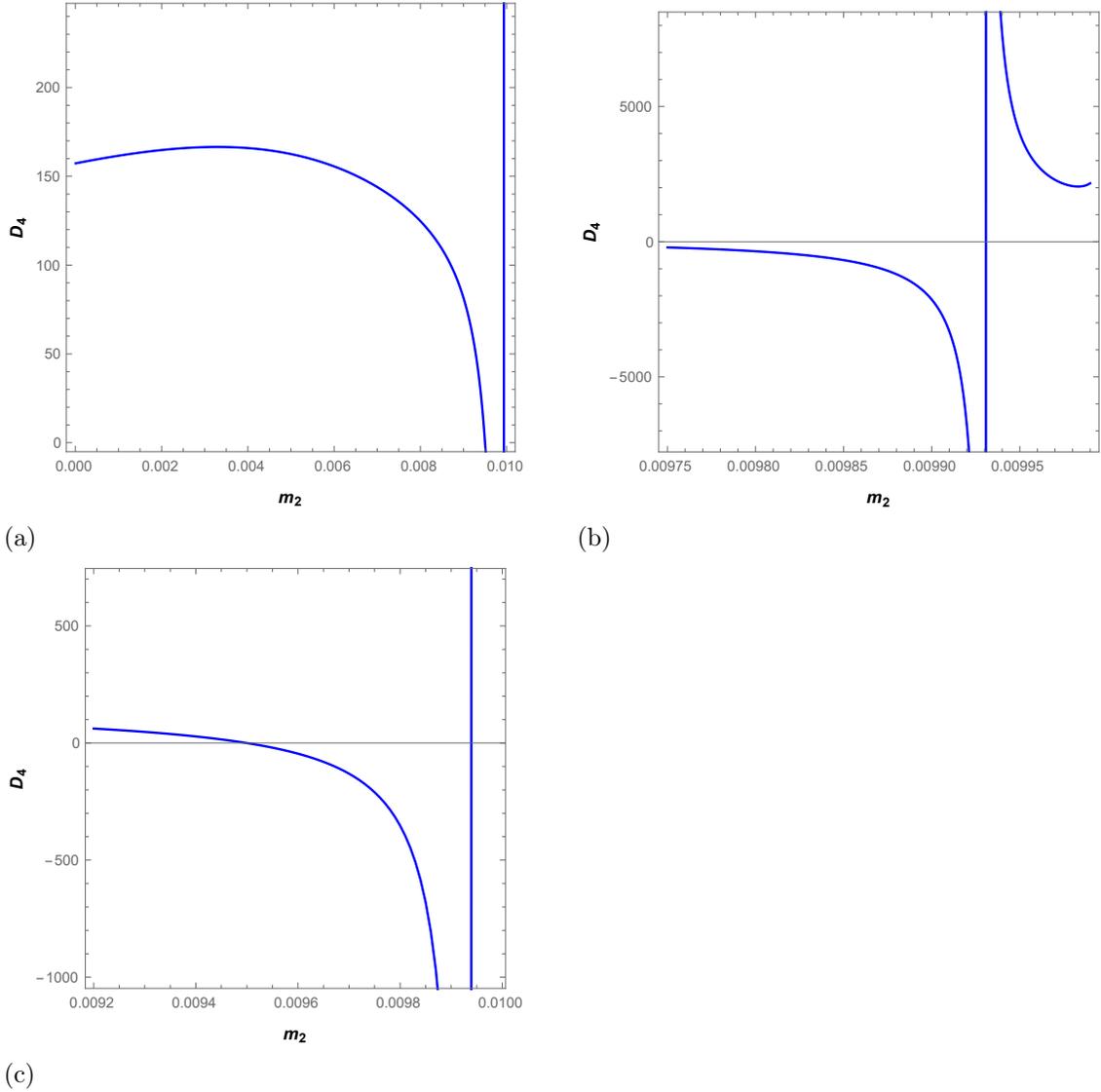


Figura 5.4: Gráficas de D_4 en función de m_2 para L_6 con $m_1 = 0.99$ y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$. (a) La figura muestra a $D_4 \neq 0$ en el rango de valores donde m_2 es linealmente estable. La discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1. (b) Amplificación de la región cercana a la resonancia 2:-1. (c) Amplificación de la región donde el determinante D_4 se anula.

determinante D_4 se anula. En particular, para $m_1 = 0.01$, $D_4 = 0$ para L_3 y L_6 cuando $m_2 = 0.01495599$ y $m_2 = 0.01329116$, respectivamente; mientras que en el caso $m_1 = 0.99$, $D_4 = 0$ para L_5 y L_6 cuando $m_2 = 0.00006983$ y $m_2 = 0.00993018$, respectivamente. Para abordar esta situación es necesario normalizar

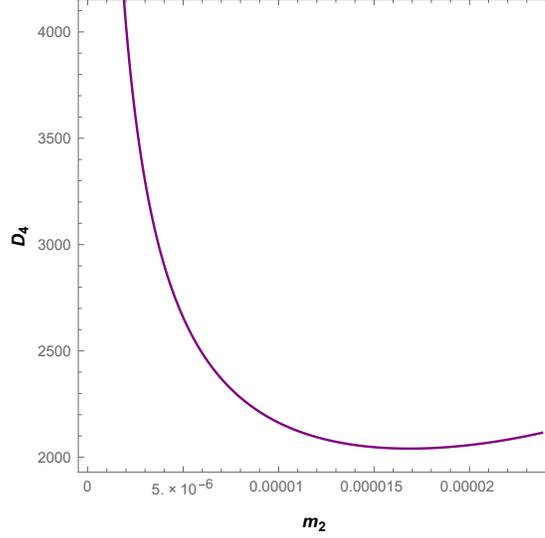


Figura 5.5: Gráfica de D_4 en función de m_2 , para L_3 con $m_1 = 0.99$.

el hamiltoniano (5.1) a sexto orden (o mayor).

La forma normal requerida, en ausencia de resonancias, en variable compleja se obtiene aplicando algoritmo de Lie-Deprit a orden seis, es decir,

$$H(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + ih_{2200} z_1^2 \bar{z}_1^2 + ih_{1111} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + ih_{0022} z_2^2 \bar{z}_2^2 + ih_{3300} z_1^3 \bar{z}_1^3 + h_{2211} z_1^2 \bar{z}_1^2 z_2 \bar{z}_2 + h_{1122} z_1 \bar{z}_1 z_2^2 \bar{z}_2^2 + h_{0033} z_2^3 \bar{z}_2^3. \quad (5.10)$$

Ahora introducimos el cambio de coordenadas simpléctico dado por (5.7), lo que nos permite transformar al hamiltoniano (5.10) a variable real, y posteriormente introducimos variables ángulo-acción y llegamos la siguiente forma normal

$$\tilde{H}(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \frac{1}{2}(h_{2200} I_1^2 + h_{1111} I_1 I_2 + h_{0022} I_2^2) + \frac{1}{2}(h_{3300} I_1^3 + h_{2211} I_1^2 I_2 + h_{1122} I_1 I_2^2 + h_{0033} I_2^3). \quad (5.11)$$

Lo siguiente es calcular el determinante formado con la parte normalizada del hamiltoniano a sexto orden, es decir,

$$D_6 = h_{3300} \omega_2^3 + h_{2211} \omega_2^2 \omega_1 + h_{1122} \omega_2 \omega_1^2 + h_{0033} \omega_1^3.$$

El siguiente paso es verificar que este determinante no se anule en los valores de las masas donde $D_4 = 0$, de tal forma que podamos aplicar el teorema 7 para

determinar la estabilidad de los equilibrios para esos valores particulares de las masas.

Una vez más, usamos *Mathematica* para obtener el valor numérico de D_6 para cada uno de los equilibrios en los respectivos valores de masas donde $D_4 = 0$. En la tabla 5.1 mostramos los respectivos valores de las masas donde $D_6 \neq 0$. Luego, aplicando el teorema 7 a los resultados numéricos obtenidos, concluimos que L_3 , L_5 y L_6 son estables en el sentido de Lyapunov, para estos valores de masas dados en la tabla.

Puntos de equilibrio	m_1	m_2	D_6	Estabilidad
L_3	0.01	0.00906365	5.22069856×10^8	estable
L_6	0.01	0.0085405	5.30253254×10^8	estable
L_5	0.99	0.0004188359	$6.9969452169799 \times 10^8$	estable
L_6	0.99	0.00958116419	$6.9969452169814 \times 10^8$	estable

Tabla 5.1: Estabilidad de los puntos equilibrio L_3 , L_5 y L_6 donde $D_4 = 0$.

5.2.4. Determinación de la estabilidad en presencia de la resonancia 2:−1

En esta sección vamos a analizar la estabilidad de los equilibrios cuando la resonancia 2 : −1 aparece a tercer orden. En este escenario el teorema 7 falla y el problema de la estabilidad puede ser resuelto aplicando el teorema de Markeev [40] (teorema 1.3), el cual nos da un criterio de estabilidad para sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad, en presencia de resonancia 2:−1.

Para poder determinar la estabilidad llevamos a cabo la expansión en series de Taylor del hamiltoniano (5.1) a tercer orden. Entonces, al igual que en la sección anterior, usamos los vectores propios complejos para construir una transformación lineal simpléctica que transforme a la parte cuadrática del hamiltoniano en su forma normal compleja. Primero introducimos un nuevo conjunto de variables reales (q_1, q_2, p_1, p_2) que nos permite expresar a la parte cuadrática en su forma real, es decir,

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \rho_1 + \rho_2 = 3} h_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2}. \quad (5.12)$$

Ahora introducimos las siguientes variables canónicas complejas

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{i}{\omega_1}P_1, & p_1 &= \frac{1}{2}i\omega_1Q_1 + P_1, \\ q_2 &= -\frac{i}{2}Q_2 + \frac{i}{\omega_2}P_2, & p_2 &= -\frac{1}{2}\omega_2Q_2 + iP_2, \end{aligned}$$

que nos ayudan a transformar al hamiltoniano (5.12) en

$$H' = i\omega_1Q_1P_1 + i\omega_2Q_2P_2 + \sum_{\nu_1+\nu_2+\rho_1+\rho_2=3} h'_{\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2} Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} P_1^{\rho_1} P_2^{\rho_2}, \quad (5.13)$$

donde

$$h'_{\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2} = x_{\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2} + iy_{\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2},$$

y $x_{\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2}$, $y_{\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2}$ dependen de los coeficientes del hamiltoniano (5.12). Las fórmulas que dan los coeficientes pueden revisarse en [40].

Ahora estamos en posibilidad de normalizar el hamiltoniano (5.13), para lo cual usamos el método de Lie-Deprit hasta orden tres, incluyendo a los términos que contengan la resonancia 2:-1. Finalmente el hamiltoniano normalizado es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= i\omega_1Q_1P_1 + i\omega_2Q_2P_2 + h_{1002}Q_1P_2^2 + h_{0120}P_1Q_2^2 + O(|Q|^4) \\ &= i\omega_1Q_1P_1 + i\omega_2Q_2P_2 + (x_{1002} + iy_{1002})Q_1P_2^2 \\ &\quad - 2^{-1}\omega_1^{-1}\omega_2^2(y_{1002} + ix_{1002})Q_2^2P_1 + O(|Q|^4), \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $|Q| = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2}$. Usando *Mathematica* realizamos el proceso de normalización hasta orden tres, obteniendo numéricamente los coeficientes. Los hamiltonianos normalizados para cada equilibrio son los siguientes:

- L_3 con $m_1 = 0.01$, $m_2 = 0.014956\dots$ and $m_3 = 0.975044\dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{L_3, m_1=0.01} &= 0.8905204709456191iQ_1P_1 + 0.44525905087505iQ_2P_2 \\ &\quad + (2.5062392225681362 + 0.6509758558904928i)Q_1P_2^2 \\ &\quad - (0.07246303014847115 + 0.27898068215726074i)P_1Q_2^2 + O(|Q|^4), \end{aligned}$$

- L_6 con $m_1 = 0.01$, $m_2 = 0.01329116\dots$, $m_3 = 0.976709\dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{L_6, m_1=0.01} &= 0.888888541900757iQ_1P_1 - 0.44444454932014565iQ_2P_2 \\ &\quad - (2.807346977540462 - 0.8504303646622373i)Q_1P_2^2 \\ &\quad - (0.09449234422118138 - 0.3119277109248143i)P_1Q_2^2 + O(|Q|^4), \end{aligned}$$

- L_5 con $m_1 = 0.99$, $m_2 = 0.00006983 \dots$, $m_3 = 0.00993017 \dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{L_5, m_1=0.99} &= 0.8867168977012834iQ_1P_1 + 0.44335666203172575iQ_2P_2 \\ &\quad - (11.65612951577969 - 0.1511018944889324i)Q_1P_2^2 \\ &\quad - (0.016747940394162164 - 1.291950461754197i)P_1Q_2^2 + O(|Q|^4), \end{aligned}$$

- L_6 con $m_1 = 0.99$, $m_2 = 0.00993018 \dots$, $m_3 = 0.0000682 \dots$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{L_6, m_1=0.99} &= 0.8867156906194429iQ_1P_1 + 0.44335892624753276iQ_2P_2 \\ &\quad - (11.656549027526992 + 0.15117796713652432i)Q_1P_2^2 \\ &\quad + (0.016756566149078944 + 1.2920119151578513i)P_1Q_2^2 + O(|Q|^4). \end{aligned}$$

Observemos que en todos los casos, la suma de los cuadrados de los coeficientes de $Q_1P_2^2$ son diferentes de cero, luego aplicando el teorema 1.3, concluimos que cada uno de estos equilibrio son inestables en presencia de la resonancia 2:−1.

En la tabla 5.2 damos los valores de las masas m_2 donde L_3 , L_5 y L_6 son inestables cuando existe resonancia 2:−1 para $m_1 = 0.01$ y 0.99 , con $m_3 = 1 - m_1 - m_2$.

Punto de equilibrio	m_1	m_2
L_3	0.01	$m_2 = 0.01495599 \dots$
L_6	0.01	$m_2 = 0.01329116 \dots$
L_5	0.99	$m_2 = 0.00006983 \dots$
L_6	0.99	$m_2 = 0.00993018 \dots$

Tabla 5.2: Valores de las masas donde los puntos L_3 , L_5 y L_6 son inestables en presencia de la resonancia 2:−1, con $m_3 = 1 - m_1 - m_2$

5.3. Estabilidad en el caso general

En esta sección vamos a considerar el caso biparámetro, es decir, cuándo la masas m_1 y m_2 están variando. La forma normal de la parte cuadrática la calcularemos para aquellos valores de las masas que se localizan dentro de las regiones de estabilidad lineal, cuya frontera es la curva de resonancia 1:−1, ver la figura 4.2. Estas regiones están casi confinadas dentro de la región de estabilidad de la configuración de los primarios, y cuyos valores de masas la matriz hamiltoniana de H_2 tiene valores propios imaginarios puros.

El cálculo numérico de la forma normal de la parte cuadrática dependiendo de los dos parámetros de masas preserva la forma de (5.4). Recordemos que los únicos equilibrios que son linealmente estables son L_3 , L_5 y L_6 . Para el cálculo numérico de la forma normal hemos tomado una malla de puntos en las regiones I y III (regiones de estabilidad), los cuales están igualmente espaciados en los respectivos intervalos de las masas m_1 y m_2 . La región II no la consideramos, pues los respectivos resultados los conseguimos de los obtenidos en la región III aplicando la simetría de la recta $m_2 = m_1$.

Por otro lado, tenemos que la parte cuadrática es de signo no definido en toda la región de estabilidad lineal, y no es posible determinar la estabilidad o inestabilidad a través de los teoremas clásicos de estabilidad lineal, por ejemplo el teorema de Dirichlet [24]. Luego, tenemos que aplicar nuevamente el teorema 7, pero suponiendo que las frecuencias ω_1 y ω_2 son no resonantes.

La normalización a orden cuatro en términos de los parámetros m_1 y m_2 preserva la forma (5.8), y la hemos calculado en toda región estabilidad lineal, para cada equilibrio que es linealmente estable. Procediendo de manera análoga como lo hicimos para obtener la forma normal de la parte cuadrática en la sección anterior, tomamos una malla de puntos en las regiones de estabilidad. La forma normal que usaremos para aplicar el teorema 7 es

$$\tilde{H}(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \frac{1}{2}(h_{2200}I_1^2 + h_{1111}I_1I_2 + h_{0022}I_2^2).$$

Lo primero que hacemos es verificar que $D_4 = h_{2200}\omega_1^2 + h_{1111}\omega_1\omega_2 + h_{0022}\omega_2^2 \neq 0$, para todo m_1 y m_2 en el región de estabilidad lineal, y los casos donde $D_4 = 0$ o hay resonancia los estudiaremos por separado. Notemos que en el caso general D_4 será una superficie en \mathbb{R}^3 .

5.3.1. Estabilidad de L_3 , L_5 y L_6 en la región I

En la figuras 5.6, 5.8 y 5.10 mostramos las superficies de D_4 como función de las masas m_1 y m_2 para L_3 , L_5 y L_6 , respectivamente, en la región I. Estas superficies no son compactas y suaves, excepto para algunos valores de masas que corresponden la curva de resonancia 2:−1, y sus fronteras son las curvas de resonancia 1:−1. A partir de estas superficies, podemos observar que el determinante $D_4 \neq 0$ para los tres equilibrios. Sin embargo, calculamos numéricamente las curvas de nivel de las superficies (figuras 5.7, 5.9 y 5.11) y vemos que existe la curva $D_4 = 0$, así como la curva de resonancia 2:−1 donde esta la singularidad mencionada aquí arriba (nota: la curva distorcionada que aparece en las curvas

de nivel corresponde precisamente a la resonancia 2:-1, esta curva tiene esa apariencia debido a que el software *Mathematica* no puede continuar la singularidad en el D_4), ver las figuras 5.18, 5.19 y 5.20.

Notemos que para los casos $m_1 = 0.01$ y $m_2 = 0.01495599, 0.00006983$ las curvas $D_4 = 0$ corresponden a las obtenidas en la sección 5.2.4.

Aplicando el teorema 7 a los resultados numéricos obtenidos, concluimos que los equilibrios L_3, L_5 y L_6 son estables en el sentido de Lyapunov en la región I, excepto en los valores donde ocurre la resonancia 2:-1 y en los valores donde se anula el determinante D_4 .

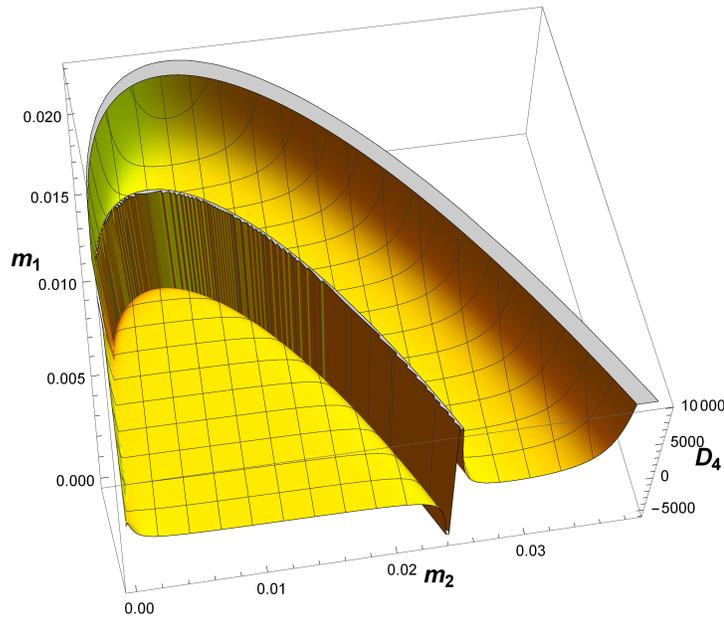


Figura 5.6: Gráfica de D_4 en función de m_1, m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_3 en la región I. El valor m_1 y m_2 donde la gráfica de D_4 tiene una discontinuidad que corresponde a la resonancia 2:-1.

5.3.2. Estabilidad de L_3, L_5 y L_6 en la región III

En esta sección consideramos el cálculo numérico de las superficies de D_4 como función de las masas m_1 y m_2 para L_3, L_5 y L_6 , respectivamente, en la región III.

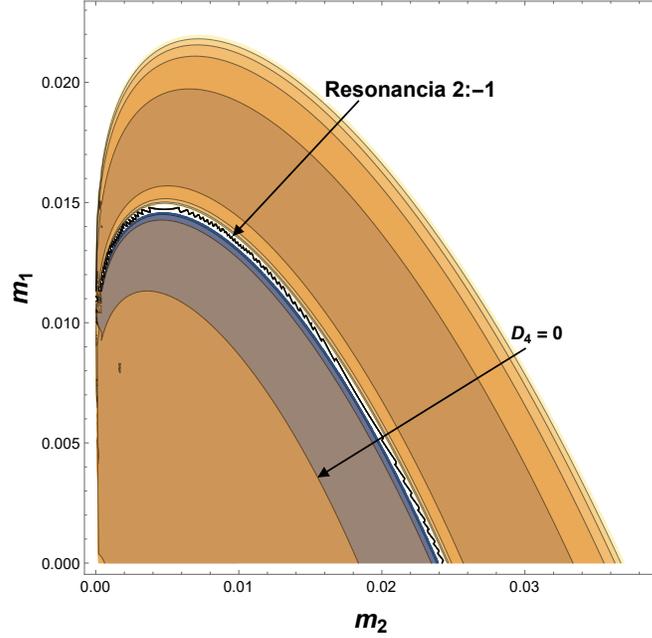


Figura 5.7: Curvas de nivel de D_4 para L_3 en la región I. En particular resaltamos la curva donde $D_4 = 0$.

En las figuras 5.12, 5.14 y 5.16 mostramos las respectivas gráficas. Al igual que en los casos anteriores las superficies D_4 tienen como frontera las curvas de resonancia 1:–1 y son suaves, excepto en la curva de singularidades asociadas a la resonancia 2:–1. Al calcular las curvas de nivel de las superficies (figuras 5.13, 5.15 y 5.17) mostramos que hay valores de las masa donde $D_4 = 0$, ver las figuras 5.18b, 5.19b y 5.20b. En particular, estas curvas contienen los puntos cuyas coordenadas son $m_1 = 0.99$ y $m_2 = 0.00006983$, 0.00993018 donde hay resonancia 2:–1 para L_5 y L_6 , los cuales fueron reportados en [72] y [73].

Aplicando el teorema 7 concluimos que los equilibrios L_3 , L_5 y L_6 son estables en el sentido de Lyapunov en la región III, excepto en los valores de masas donde ocurre la resonancia 2:–1, así como en los valores de las masas donde $D_4 = 0$.

5.3.3. Determinación de la estabilidad cuando $D_4 = 0$

En esta sección vamos a determinar la estabilidad de los equilibrios cuando $D_4 = 0$. En otras palabras, vamos a considerar los valores de m_1 y m_2 que forman

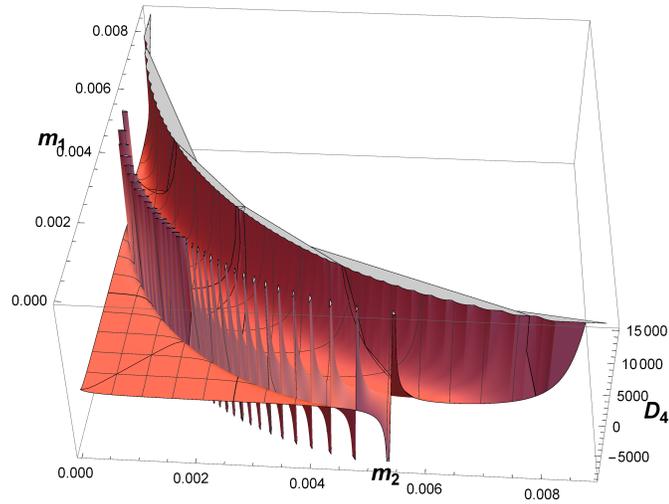


Figura 5.8: Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_5 en la región I. Los valores de m_1 y m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad corresponden a la resonancia 2:−1.

las curvas de resonancia 2:−1 que obtuvimos en las secciones 5.3.1 y 5.3.2.

En la sección 4.2 mostramos las curvas de resonancias en la regiones I y III. Ahora, con la ayuda de *Mathematica* hemos obtenido las curvas donde $D_4 = 0$, para cada equilibrio estable. En las figuras 5.18, 5.19 y 5.20 mostramos todas estas curvas en un mismo plano, junto con las curvas $D_4 = 0$ para L_3 , L_5 y L_6 , respectivamente, en las figuras 5.21a y 5.21b. Notemos que al igual que ocurre con las curvas de resonancia, cuando la curva $D_4 = 0$ esta cercana a los ejes m_1 y m_2 en región I, así como a la recta $m_1 + m_2 = 1$ en región III, los valores de las masas en el límite corresponden aquellos donde $D_4 = 0$ para los respectivos problemas restringidos de tres cuerpos (ver la sección 12.5 del libro [41]).

Por otro lado, en cada una de las figuras 5.18, 5.19 y 5.20 podemos apreciar que las curvas $D_4 = 0$ no tienen intersecciones con las curvas de resonancia. Estos resultados numéricos contradicen los reportado por Budzko y Prokompeya [15], pues ellos en su estudio del PRECC encontraron que la curva $D_4 = 0$ para el equilibrio S_1 (en su notación) interseca en un punto con las curvas de resonancia 3:−1, 4:−1 y 5:−1.

Con el fin de determinar la estabilidad no lineal de los equilibrios para valores de las masas donde donde $D_4 = 0$, normalizamos a sexto orden y procedemos de manera análoga como en la sección 5.2.3. En variables acción-ángulo la forma

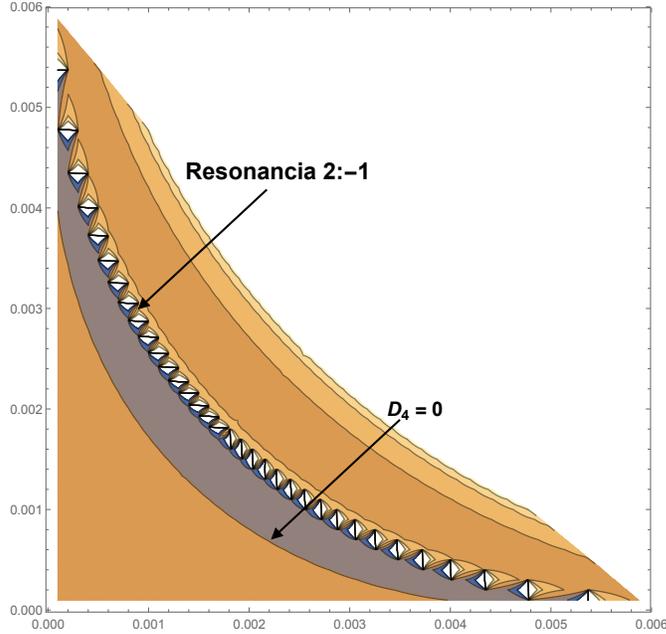


Figura 5.9: Curvas de nivel del determinate D_4 para L_5 en la región I. Notemos la existencia una curva donde $D_4 = 0$.

normal es

$$\begin{aligned} \tilde{H}(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = & \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \frac{1}{2}(h_{2200}I_1^2 + h_{1111}I_1 I_2 + h_{0022}I_2^2) + \\ & + \frac{1}{2}(h_{3300}I_1^3 + h_{2211}I_1^2 I_2 + h_{1122}I_1 I_2^2 + h_{0033}I_2^3). \end{aligned}$$

Ahora debemos verificar que

$$D_6 = h_{3300}\omega_2^3 + h_{2211}\omega_2^2\omega_1 + h_{1122}\omega_2\omega_1^2 + h_{0033}\omega_1^3,$$

no se anule en los valores de las masas sobre la curva $D_4 = 0$, y entonces aplicar el teorema 7 para garantizar la estabilidad de los equilibrios.

Con la ayuda del programa *Mathematica* automatizamos el proceso del cálculo numérico del valor de D_6 para cada equilibrio, en las respectivas curvas donde $D_4 = 0$. En particular D_6 lo evaluamos en cuarenta puntos de la curva $D_4 = 0$. Tomamos los valores de masas y realizando un ajuste de la curva mediante interpolación no lineal de puntos elegidos. Con el fin de hacer el cálculo más rápido, dividimos los intervalos de valores de m_1 y m_2 sobre la curva $D_4 = 0$ en partes iguales. Debemos mencionar que para poder llevar a cabo el cálculo elegimos considerar las curvas como función biyectiva de alguna de las masas, y

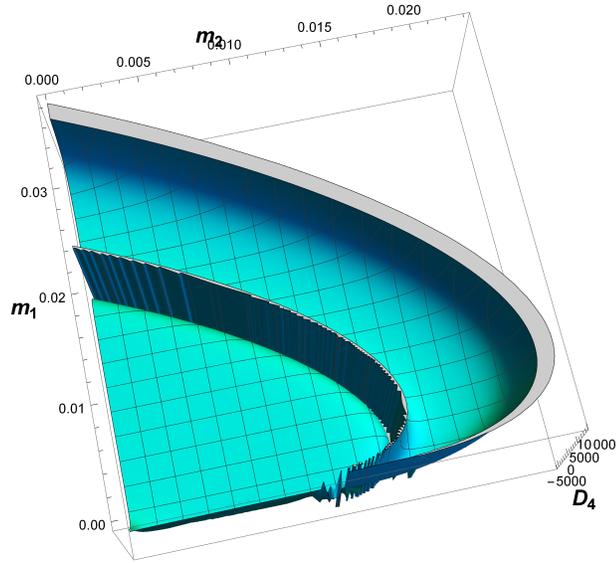


Figura 5.10: Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_6 en la región I. El valor m_1 y m_2 donde el determinante D_4 tiene una discontinuidad que corresponde a la resonancia 2:-1.

de esta forma simplificar el cálculo de la interpolación. En particular, la curva de L_3 en la región II no es una función biyectiva con respecto de la masa m_2 , pero sí con respecto a m_1 .

Los resultados numéricos de nuestro estudio los reportamos en las tablas [A.1](#), [A.2](#), [A.3](#), [A.4](#), [A.5](#), [A.6](#) del apéndice A, y los resumimos en la tabla [5.3](#).

Punto de Equilibrio	Región	Estabilidad
L_3	I	estable
L_5	I	estable
L_6	I	estable
L_3	III	estable
L_5	III	estable
L_6	III	estable

Tabla 5.3: Estabilidad de los equilibrios para valores de las masas donde $D_4 = 0$, pero $D_6 \neq 0$ en ausencia de resonancias.

En la tabla [5.4](#) mostramos los casos donde $D_4 = 0$, pero $D_6 \neq 0$ cuando dos masas iguales ($m_1 = m_2$ en la región I y $m_2 = m_3$ en la región III) para L_3 , L_5 y

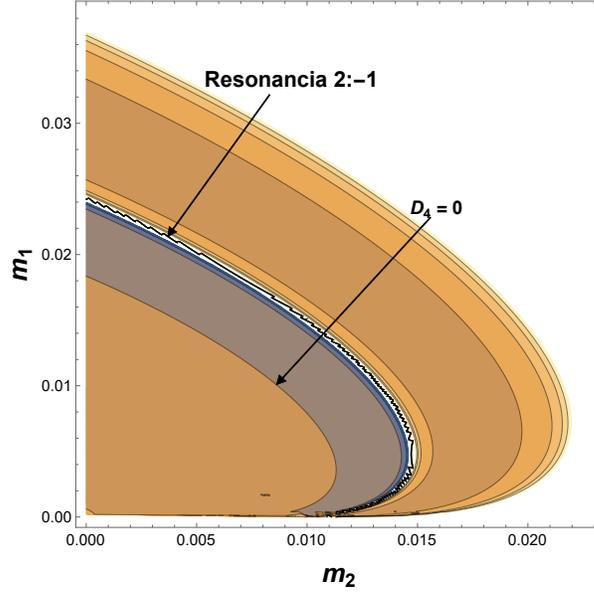


Figura 5.11: Curvas de nivel de D_4 para L_6 en la región II. Notar la existencia de la curva donde $D_4 = 0$.

Región	Masas iguales	Equilibrio	D_6	Estabilidad
I	0.00679	L_3, L_6	113096.704442	estables
I	0.00100005	L_5	110237.97968	estable
II	0.00679	L_3	110237.97968	estable
II	0.00100005	L_5, L_6	113096.704442	estables

Tabla 5.4: Estabilidad de L_3 , L_5 y L_6 para los casos de dos masas iguales, cuando $D_4 = 0$, pero $D_6 \neq 0$.

L_6 . Estos datos concuerdan con los obtenidos por Alvarez-Ramírez et al. [4].

5.3.4. Estabilidad en presencia de resonancia 2:−1

A continuación analizaremos la estabilidad de los equilibrios cuando la resonancia 2:−1 aparece a tercer orden para el caso biparamétrico. El teorema 7 no se puede aplicar en esta situación. Luego el problema de la estabilidad se resuelve aplicando el teorema de Alfried-Markeev-Meyer [21] o el teorema 1.3, los cuales dan las condiciones necesarias para determinar la estabilidad en presencia de la resonancia 2:−1, para sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad, cuando el hamiltoniano está en forma normal en términos de variables ángulo-acción. Vamos

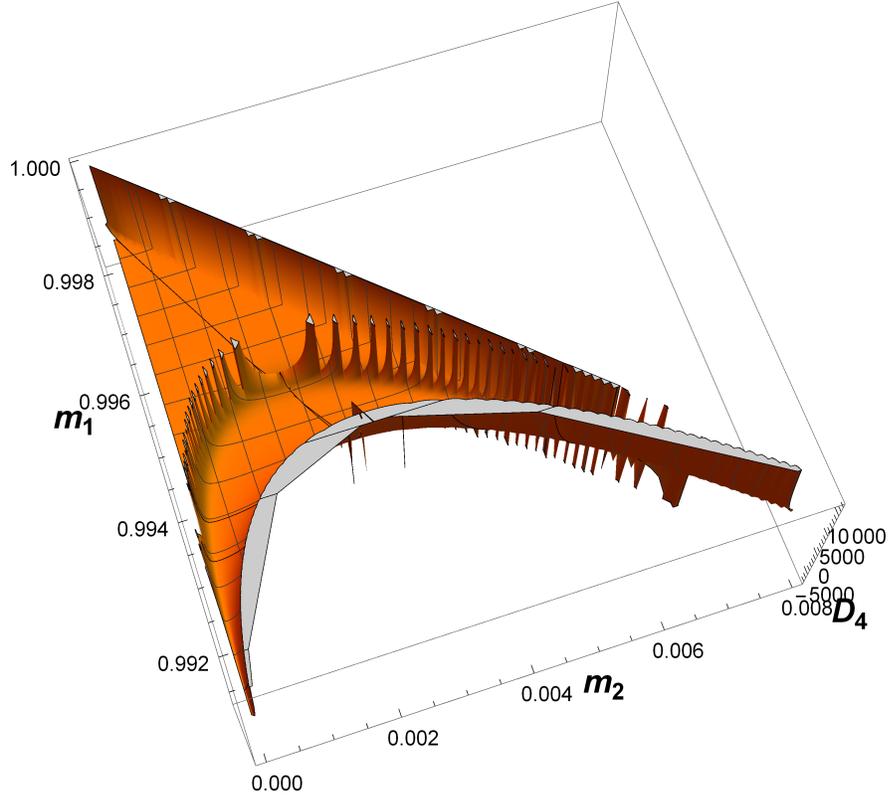


Figura 5.12: Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_3 en la región III. El valor m_1 y m_2 donde el determinante D_4 tiene una discontinuidad corresponde a la resonancia 2:-1.

a proceder de forma similar como en los casos particulares ($m_1 = 0.01, 0.99$), es decir, consideramos la expansión de Taylor del hamiltoniano (5.1) a tercer orden y usamos los vectores propios complejos para construir una transformación lineal simpléctica que lleva a la parte cuadrática a su forma normal compleja, y llegamos a que el hamiltoniano (5.1) a tercer orden en coordenadas complejas es

$$H = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \rho_1 + \rho_2 = 3} l_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} z_1^{\nu_1} \bar{z}_1^{\nu_2} z_2^{\rho_1} \bar{z}_2^{\rho_2}, \quad (5.15)$$

donde

$$l_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} = x_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} + iy_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2}.$$

Lo siguiente es normalizar el hamiltoniano (5.15) usando el método de Lie-Deprit hasta orden tres, considerando los términos que contengan la resonancia

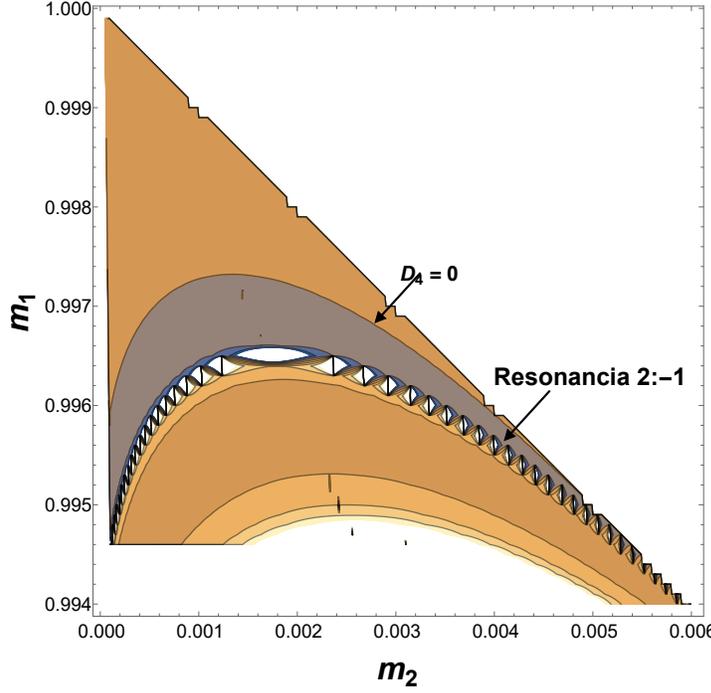


Figura 5.13: Curvas de nivel de D_4 en el plano $m_2 m_1$ para L_3 en la región III. En particular existe una curva donde $D_4 = 0$.

2:-1, es decir, normalizamos en los valores de (m_1, m_2) que forman la curva de resonancia 2:-1. Luego el hamiltoniano normalizado toma la siguiente forma

$$H = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + l_{1020} z_1 z_2^2 + l_{0102} \bar{z}_1 \bar{z}_2^2. \quad (5.16)$$

Ahora introducimos el cambio de coordenadas simpléctico complejo dado por (5.7) para obtener a (5.16) en su forma real y seguidamente introducimos variables acción-ángulo para llegar a la siguiente forma normal

$$H = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + I_1^{1/2} I_2 [A \cos \phi + B \sin \phi] = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \delta I_1^{1/2} I_2 \cos \phi, \quad (5.17)$$

donde $\phi = \phi_1 + 2\phi_2$, $\delta = \sqrt{A^2 + B^2}$ y A, B son constantes que dependen de los coeficientes de la forma normal (5.16).

Para aplicar el teorema 12 es necesario evaluar el coeficiente δ para cada pareja de valores de masas (m_1, m_2) sobre la curva de resonancia 2:-1. El cálculo de δ lo llevamos a cabo de manera numérica con la ayuda de *Mathematica*, pues automatizamos el cálculo de la forma normal (5.17). En particular, obtuvimos la forma normal para 40 puntos de la curva de resonancia, para lo cual procedimos de forma similar que en los cálculos anteriores.

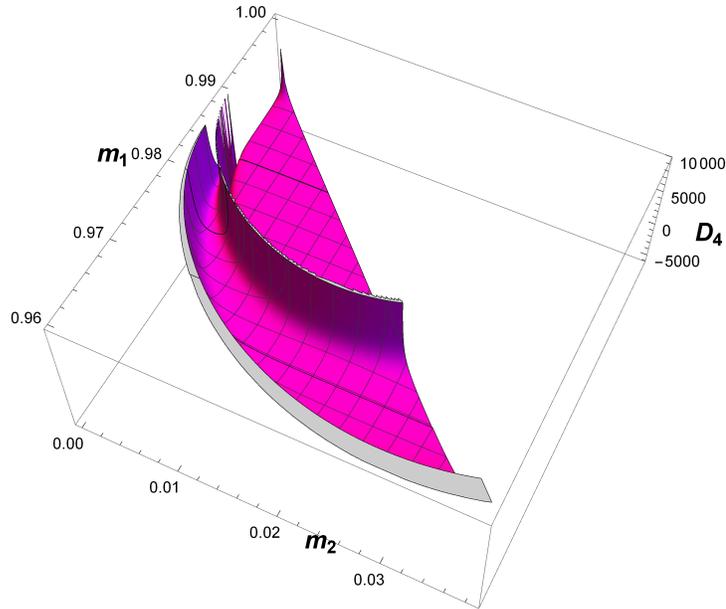


Figura 5.14: Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_5 en la región III. El valor m_1 y m_2 donde el determinante D_4 tiene una discontinuidad corresponde a la resonancia 2:−1.

En las tablas B.1-B.4 del apéndice B mostramos los valores de (m_1, m_2) con su correspondiente valor de δ , para los equilibrios L_3 , L_5 y L_6 en las regiones I y III. El resumen de la estabilidad de los puntos aplicando el teorema 12 es dado en la tabla 5.5.

Punto de Equilibrio	Región	Estabilidad
L_3	I	inestable
L_5	I	inestable
L_6	I	inestable
L_3	III	inestable
L_5	III	inestable
L_6	III	inestable

Tabla 5.5: Estabilidad de los equilibrios para valores de las masas donde hay resonancia 2:−1.

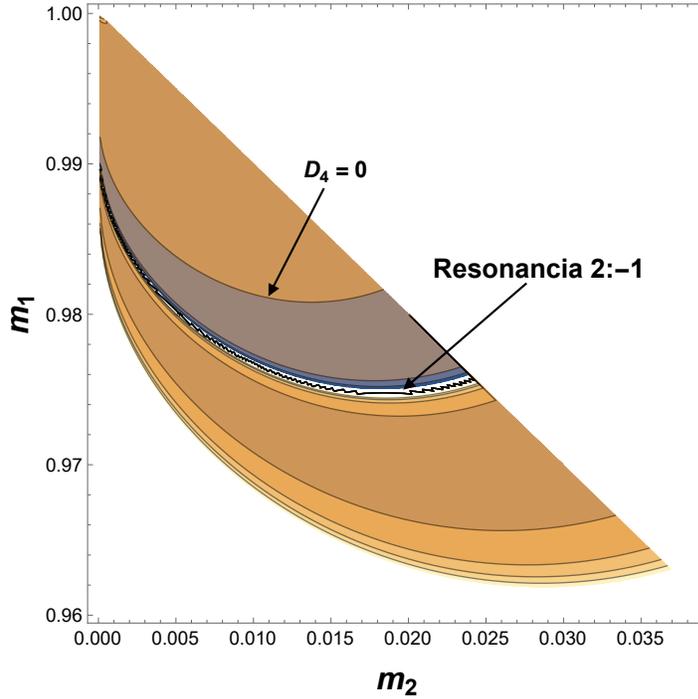


Figura 5.15: Curvas de nivel de D_4 para L_5 en la región III. Notemos que existe una curva donde $D_4 = 0$.

Región	Masas iguales	Equilibrio	δ	Estabilidad
I	0.01208	L_3, L_6	4.19339	inestables
I	0.00100005	L_5	0.725005	inestable
II	0.00679	L_3	0.725005	inestable
II	0.01208	L_5, L_6	4.19339	inestables

Tabla 5.6: Estabilidad de L_3 , L_5 y L_6 para los casos de masas iguales, en presencia de la resonancia 2:-1.

5.3.5. Determinación de la estabilidad en presencia de la resonancia 3:-1 para el caso general

En esta sección estudiaremos la estabilidad de los equilibrios en presencia de la resonancia 3:-1 para el caso biparamétrico. El teorema 7 nos garantiza la estabilidad para los valores de masas sobre la curva de resonancia 3:-1, esto debido a que hemos considerado solamente los términos de orden cuatro en la

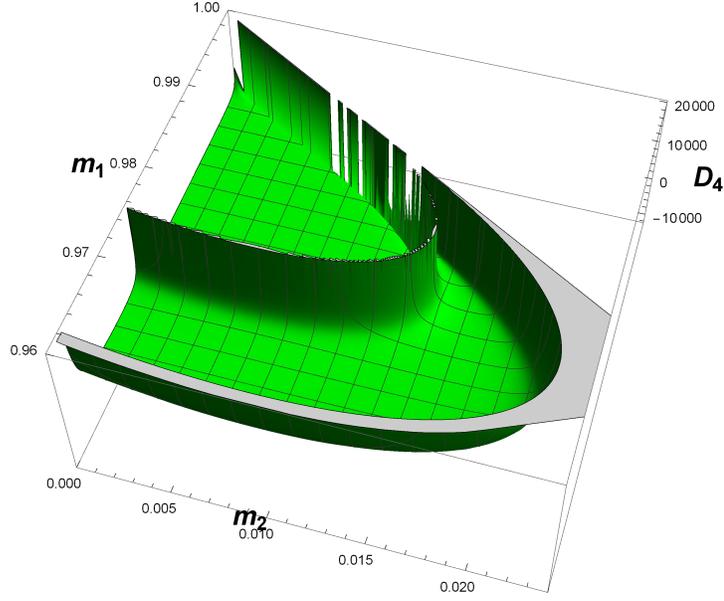


Figura 5.16: Gráfica de D_4 en función de m_1 , m_2 y $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ para L_6 en la región III. El valor m_1 y m_2 donde D_4 tiene una discontinuidad, la cual corresponde a la resonancia 2:-1.

expansión del hamiltoniano.

Para proceder a determinar la estabilidad, primero vamos a obtener la forma normal en variables ángulo-acción del hamiltoniano. Iniciamos considerando la expansión del hamiltoniano (5.1) a cuarto orden, y utilizaremos los vectores propios complejos para construir una transformación lineal simpléctica que lleve a la parte cuadrática a su forma normal compleja. Con este procedimiento obtenemos que el hamiltoniano (5.1) a cuarto orden toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 H = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \rho_1 + \rho_2 = 3} l_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} z_1^{\nu_1} \bar{z}_1^{\nu_2} z_2^{\rho_1} \bar{z}_2^{\rho_2} + \\
 + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \rho_1 + \rho_2 = 4} l_{\nu_1 \nu_2 \rho_1 \rho_2} z_1^{\nu_1} \bar{z}_1^{\nu_2} z_2^{\rho_1} \bar{z}_2^{\rho_2}. \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

En lo que sigue vamos a usar el método de Lie-Deprit para normalizar el hamiltoniano (5.18). Iniciemos por omitir los términos polinómicos que contengan la resonancia 2:-1, y de esta forma eliminar todos los términos polinómicos de orden tres. Luego consideramos los términos que contienen la resonancia 3:-1, más lo que pertenecen a la forma normal en ausencias de resonancias a orden cuatro. Todo este proceso lo llevamos a cabo para el conjunto de valores (m_1, m_2)

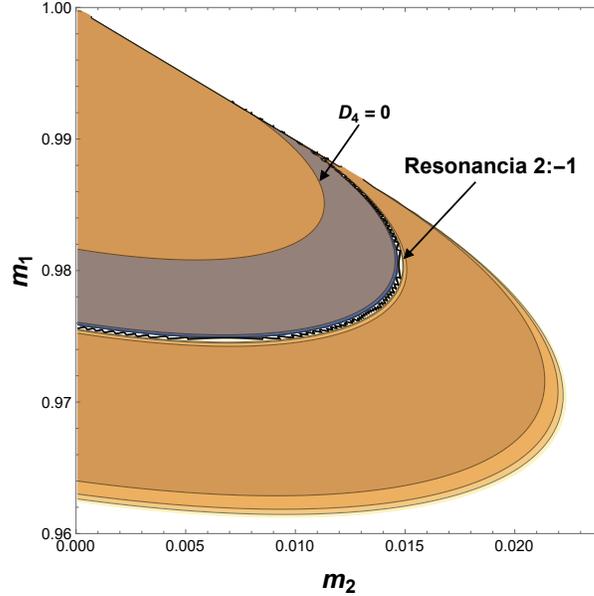


Figura 5.17: Curvas de nivel del determinate D_4 para L_6 en la región III, la curva de nivel donde $D_4 = 0$ y la curva de resonancia 2:-1.

en la curva de resonancia 3:-1. Finalmente llegamos al siguiente hamiltoniano normalizado

$$H = i\omega_1 z_1 \bar{z}_1 - i\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + ih_{2200} z_1^2 \bar{z}_1^2 + ih_{1111} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + ih_{0022} z_2^2 \bar{z}_2^2 + h_{1030} z_1 z_2^3 + h_{0103} \bar{z}_1 \bar{z}_2^3. \quad (5.19)$$

Lo siguiente es introducir el cambio de coordenadas simpléctico complejo dado por (5.7), para obtener a (5.16) en su forma real y procedemos a introducir variables acción-ángulo y obtener la forma normal dada por

$$\begin{aligned} H &= \omega_2(3I_1 - I_2) + AI_1^2 + BI_1 I_2 + CI_2^2 + I_1^{1/2} I_2^{3/2} (A_{13} \sin \phi_1 + B_{31} \cos \phi_2) + \tilde{H} \\ &= \omega_2(3I_1 - I_2) + AI_1^2 + BI_1 I_2 + CI_2^2 + I_1^{1/2} I_2^{3/2} \delta \cos \phi + \tilde{H}. \end{aligned}$$

Ahora estamos en posibilidad de aplicar el teorema 13 y calcular los valores de las constantes δ y D , para verificar las condiciones $6\sqrt{3}|\delta| > |D|$ y $6\sqrt{3}|\delta| < |D|$ y poder decidir la estabilidad. Este proceso lo realizamos para cada pareja de valores de m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:-1. Para efectos prácticos definimos la cantidad $\Delta D = 6\sqrt{3}|\delta| - |D|$, entonces de acuerdo al teorema 13 el equilibrio es estable si $\Delta D < 0$ e inestable si $\Delta D > 0$. En el caso $\Delta D = 0$ el teorema 13 no da información.

El cálculo numérico de ΔD lo llevamos a cabo para 40 puntos sobre las curvas de resonancia con la ayuda de *Mathematica*. Los resultados numéricos para los

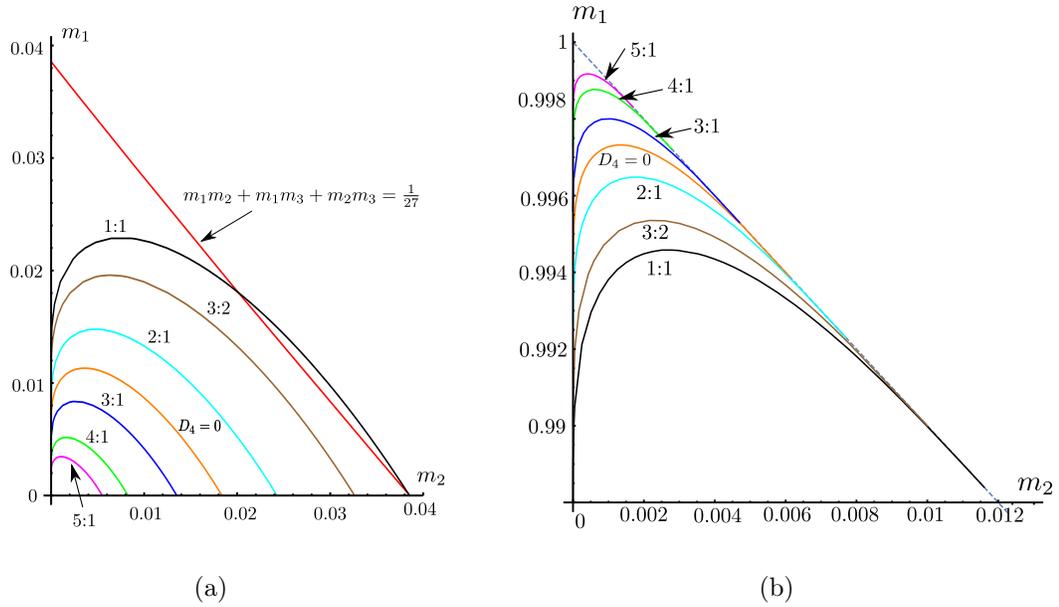


Figura 5.18: Curvas de resonancia, curva $D_4 = 0$ (color naranja) para: (a) L_3 en la región I, (b) L_3 en la región III.

respectivos puntos los mostramos en las tablas C.1-C.6 del apéndice C. Aplicando el teorema 13 determinamos la estabilidad y lo cual resumimos en las tablas 5.7 y 5.8 para resonancia 3:-1,

En la tabla 5.9 mostramos los casos de masas iguales ($m_1 = m_2$ en la región III y $m_2 = m_3$ en la región I) para L_3 , L_5 y L_6 , con su respectivo valor de ΔD .

Notemos que esta es la primera vez que se reporta la inestabilidad de L_3 , L_5 y L_6 en presencia de la resonancia 3:-1.

Notemos que para todos los equilibrios del PRECC existen valores de las masas donde hay un cambio de estabilidad, lo cual ocurre cerca de los casos límite, es decir, cuando el PRECC se aproxima a un problema restringido de 3 cuerpos.

Región	masas iguales	equilibrio	ΔD	Estabilidad
I	0.00679	L_3, L_6	113096.704442	inestables
I	0.00100005	L_5	110237.97968	inestable
II	0.00679	L_3	110237.97968	inestable
II	0.00100005	L_5, L_6	113096.704442	inestables

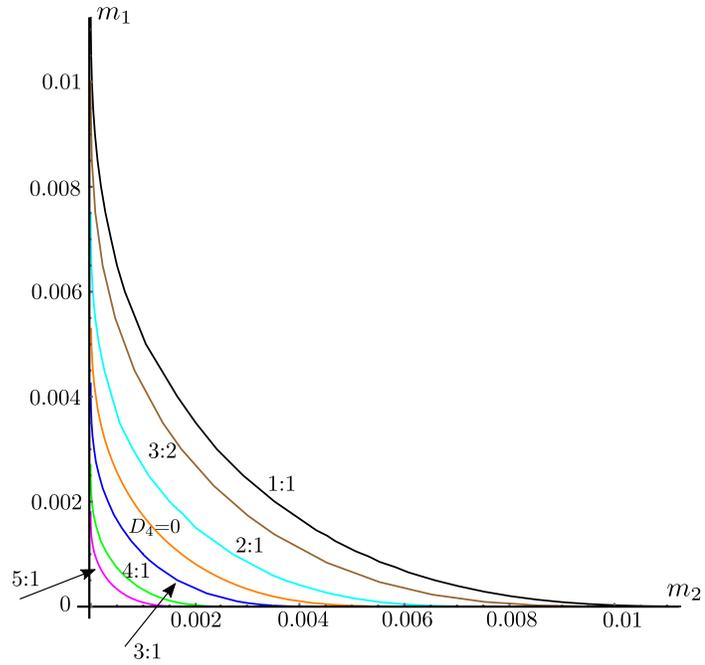
Tabla 5.9: Estabilidad de L_3 , L_5 y L_6 para los casos de masas iguales, en presencia de la resonancia 3:-1.

Punto de Equilibrio	Masas	Estabilidad
L_3	excepto en una pareja de valores	inestable
	$m_1 = 0.004749, m_2 = 1 \times 10^{-6}$	estable
L_5	excepto en algunos valores de masas	inestable
	$m_1 = 0.00425, m_2 = 6.1 \times 10^{-8}$	estable
	$m_1 = 0.00408736, m_2 = 5.767562864206779 \times 10^{-7}$	
	$m_1 = 0.00392472, m_2 = 2.268496390207037 \times 10^{-6}$	
	$m_1 = 0.00376208, m_2 = 5.752696298145571 \times 10^{-6}$	
	$m_1 = 5.752696298145571 \times 10^{-6}, m_2 = 0.00376208$	
	$m_1 = 2.268496390207037 \times 10^{-6}, m_2 = 0.003924728$	
$m_1 = 5.767562864206779 \times 10^{-7}, m_2 = 0.00408736$		
L_6	excepto en una pareja de valores	inestable
	$m_1 = 1 \times 10^{-6}, m_2 = 0.004749$	estable

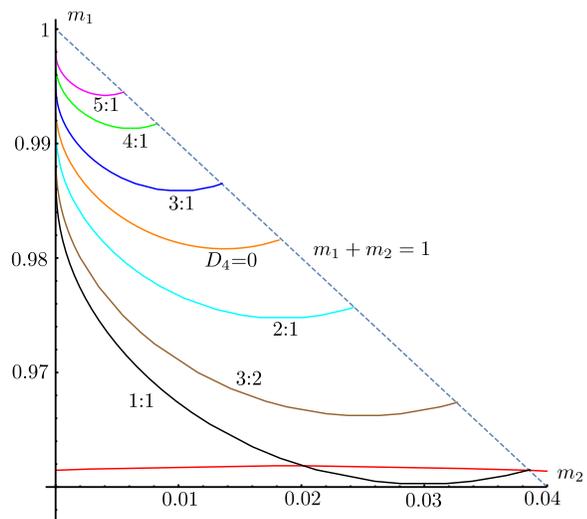
Tabla 5.7: Estabilidad de los equilibrios para valores de las masas donde hay resonancia 3:−1 en la región I.

Punto de Equilibrio	Masas	Estabilidad
L_3	excepto en algunos valores de masas	inestable
	$m_1 = 0.99596, m_2 = \times 10^{-6}$	estable
	$m_1 = 0.996253, m_2 = 0.00374015$	
	$m_1 = 0.996147, m_2 = 0.00385012$	
	$m_1 = 0.996038, m_2 = 0.0039601$	
	$m_1 = 0.995929, m_2 = 0.00407007$	
	$m_1 = 0.99582, m_2 = 0.00418005$	
	$m_1 = 0.99571, m_2 = 0.00429002$	
$m_1 = 0.9956, m_2 = 0.0044$		
L_5	excepto en una pareja de valores	inestable
	$m_1 = 0.9955, m_2 = 1 \times 10^{-7}$	estable
L_6	excepto en una pareja de valores	inestable
	$m_1 = 0.995049, m_2 = 0.00494335$	estable
	$m_1 = 0.9953, m_2 = 0.0046993$	estable

Tabla 5.8: Estabilidad de los equilibrios para valores de las masas donde hay resonancia 3:−1 en la región III.



(a)



(b)

Figura 5.19: Dominio de estabilidad lineal, curvas de resonancia y la curva donde $D_4 = 0$ (color naranja) para: (a) L_5 en la región I, (b) L_5 en la región III.

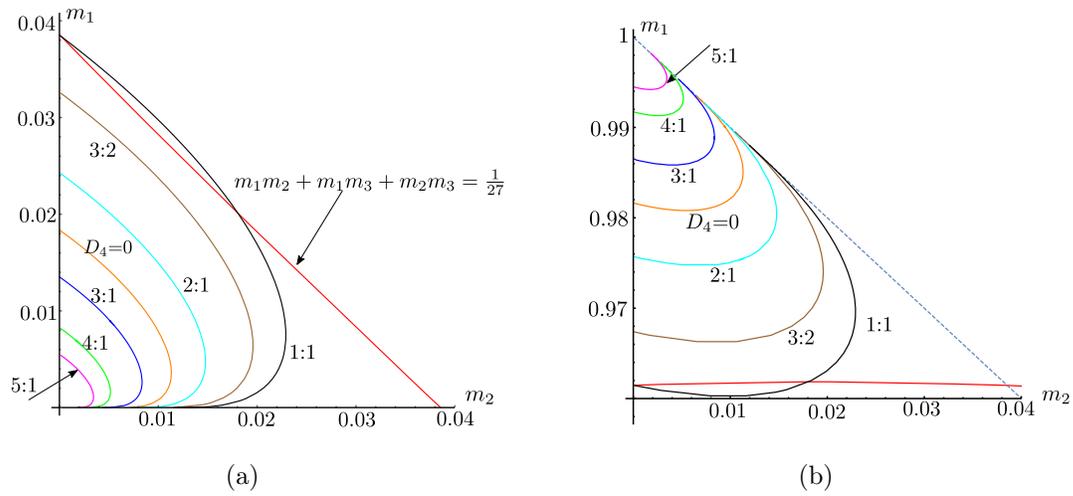


Figura 5.20: Curvas de resonancia y la curva donde $D_4 = 0$ (color naranja) para: (a) L_6 en la región I, (b) L_6 en la región III.

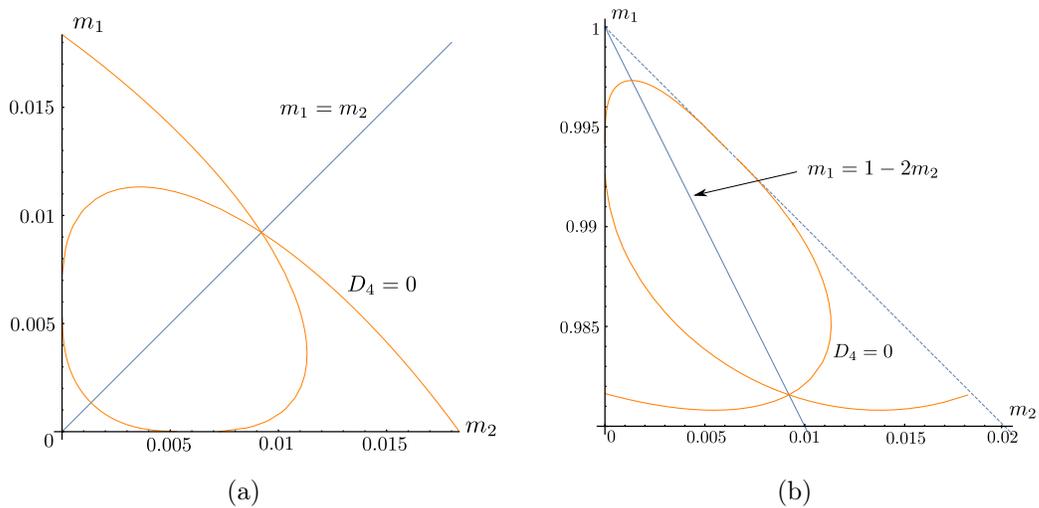


Figura 5.21: Curvas $D_4 = 0$ para: (a) L_3 , L_5 y L_6 en la región I. (b) L_3 , L_5 y L_6 en la región III.

Capítulo 6

Reducción singular en el PRECC

La reducción singular es una técnica para estudiar sistemas hamiltonianos perturbados de n grados de libertad ($n \geq 2$) en presencia de resonancia. Con esta herramienta se puede determinar la existencia de órbitas periódicas, su estabilidad y posibles bifurcaciones. Además se puede aplicar para el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio o de la existencia de toros invariantes. Esta técnica fue introducida inicialmente en [8], pero existen referencias más recientes, por ejemplo, los [6], [36], [62] y el libro [22].

Sea $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano diferenciable de n grados de libertad definido en una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Debido a que H es una integral primera, el conjunto $\mathcal{N} = \mathcal{N}_h = \{z \in \mathcal{M} : H(z) = h\}$ es una variedad diferenciable de dimensión $2n - 1$, cuando $h \in \mathbb{R}$ es un valor regular. El *espacio orbital* $\mathbb{O} = \mathbb{O}_h$ es el espacio cociente obtenido de \mathcal{N} identificando órbitas con puntos. En general los espacios cocientes no son Hausdorff, sin embargo en muchos ejemplos en mecánica el espacio orbital es una variedad de dimensión $2n - 2$. Por ejemplo, Moser [49] mostró que el espacio orbital para el problema espacial de Kepler regularizado con energía negativa es $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Un ingrediente necesario para poder aplicar la técnica de reducción singular es que todas las soluciones deben ser periódicas, es decir, que \mathcal{N} este foliada por órbitas cerradas. Otro ejemplo de un sistema cuyas soluciones son todas periódicas es el caso de n osciladores armónicos con la misma frecuencia. En [49], Moser estudio este problema y demostró que el espacio orbital es el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$.

6.1. Espacio orbital para el flujo de un oscilador bidimensional

Esta sección está dedicada al estudio del espacio orbital para el flujo de dos osciladores armónicos descritos por

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = 0,$$

el cual es asociado al sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \omega_1 y_1 &= \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \dot{x}_2 = \omega_2 y_2 &= \frac{\partial H}{\partial y_2}, \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 x_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}, & \dot{y}_2 = -\omega_2 x_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

con hamiltoniano $H = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2)$, el cual en variables acción-ángulo $(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ toma la forma

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2. \tag{6.1}$$

Ya que este sistema es integrable, tenemos que las acciones I_1 e I_2 son integrales independientes en involución, es decir, $\{I_1, I_2\} = 0$.

Para llevar a cabo el estudio, vamos a considerar en primer lugar el caso cuando las frecuencias satisfacen $\omega_1, \omega_2 > 0$, lo cual corresponde al caso donde el hamiltoniano es definido positivo. Consideramos el conjunto de nivel dado por $H = 1$, cuya representación geométrica es un elipsoide en \mathbb{R}^4 , el cual topológicamente es una esfera \mathbb{S}^3 . En variables acción-ángulo en la esfera \mathbb{S}^3 tenemos que se cumple lo siguiente:

- $I_1, I_2 \geq 0$,
- θ_1, θ_2 son definidos módulo 2π ,
- $I_1 = 0$ y $I_2 = 0$ corresponde al origen.

Fijando $H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 = 1$ podemos eliminar la variable I_2 y hacemos la restricción $0 \leq I_1 \leq 1/\omega_1$. Después de esta reducción introducimos coordenadas I_1, θ_1, θ_2 en \mathbb{S}^3 . Sean I_1 y θ_1 , con $0 \leq I_1 \leq 1/\omega_2$, las coordenadas para el disco unitario en \mathbb{R}^2 que corresponde al disco verde en la figura 6.1(a). Para cada punto del disco abierto, hay un círculo con coordenadas θ_2 , pero $I_2 = 0$ cuando $I_1 = 1/\omega_1$, luego el círculo colapsa a un punto sobre la frontera del disco.

El modelo geométrico para \mathbb{S}^3 está dado por dos conos sólidos con puntos en la frontera de los conos identificados como se muestra en la figura 6.1(a). Para cada punto en el disco con coordenadas (I_1, θ_1) hay un segmento de línea (la trayectoria en la figura 6.1(b)) que atraviesa perpendicularmente al disco. La coordenada angular θ_2 es medida hacia abajo en este segmento: cuando $\theta_2 = 0$ se obtiene el disco, con $\theta_2 = -\pi$ estamos situados en la frontera del cono superior y cuando $\theta_2 = \pi$ estaremos situados en la frontera del cono inferior, cada punto en la frontera del cono superior con coordenadas $I_1, \theta_1, \theta_2 = \pi$ se identifica con el punto en la frontera del cono inferior con coordenadas $I_1, \theta_1, \theta_2 = -\pi$. Entonces este será nuestro modelo para la esfera \mathbb{S}^3 . Existen dos órbitas especialmente particulares

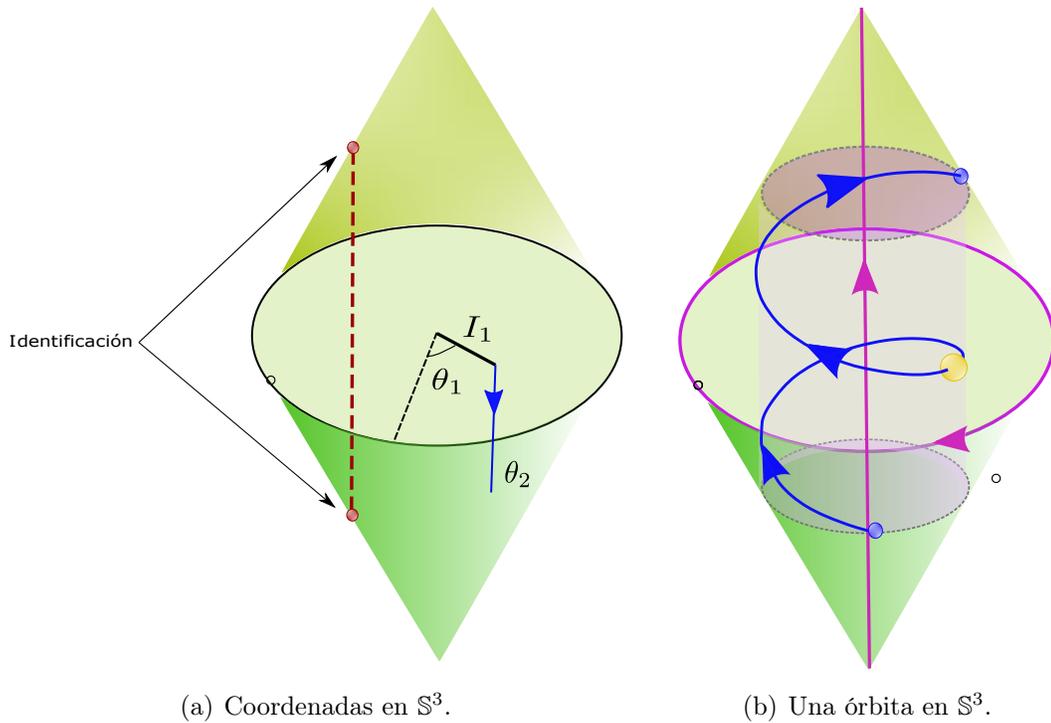


Figura 6.1: Una representación de \mathbb{S}^3 . Estas figuras fueron tomadas de [41].

en este modelo. Una de ellas está localizada en el centro del disco donde $I_1 = 0$, la cual es periódica con periodo $2\pi/\omega_2$, mientras que la otra órbita es aquella que se localiza rodeando al disco $I_1 = 1/\omega_1$ ó $I_2 = 0$ la cual es periódica de periodo $2\pi/\omega_1$. Estas órbitas se pueden visualizar en la figura 6.1(b). El resto de las órbitas quedan confinadas en un toro \mathbb{T}^2 , donde $I_1 = \tilde{I}$, y \tilde{I} es constante tal que $0 < \tilde{I} < 1/\omega_1$, ver la figura 6.1(b).

El toro \mathbb{T}^2 tiene coordenadas θ_1 y θ_2 , y el flujo es descrito por las siguientes

ecuaciones lineales

$$\dot{\theta}_1 = -\omega_1, \quad \dot{\theta}_2 = -\omega_2. \quad (6.2)$$

Existen dos tipos de órbitas generadas por este sistema de ecuaciones:

- Si ω_1/ω_2 es racional, entonces $\omega_1 = r\delta$ y $\omega_2 = s\delta$, donde r y s son primos relativos enteros y δ es un número distinto de cero. En este caso las soluciones de (6.2) con condiciones iniciales α_1 , y α_2 en el tiempo $t = 0$ son

$$\theta_1(t) = \alpha_1 - \omega_1 t, \quad \theta_2(t) = \alpha_2 - \omega_2 t.$$

Si $\tau = 2\pi/\delta$, entonces $\theta_1(\tau) = \alpha_1 - 2\pi r$ y $\theta_2(\tau) = \alpha_2 - 2\pi s$, lo que significa que la solución es periódica con periodo τ en \mathbb{T}^2 , y esto corresponde a una solución periódica de (6.2).

- Si ω_1/ω_2 es irracional, entonces ninguna de las soluciones es periódica. Más aún, las soluciones de (6.2) son líneas densas en el toro, y esto corresponde al hecho de que las soluciones de (6.2) son cuasi periódicas pero no periódicas.

Las dos soluciones periódicas de los modos normales son círculos unidos en \mathbb{S}^3 , es decir, uno de los círculos intercepta a un disco limitado por el otro círculo de forma algebraicamente no trivial. El círculo donde $I_1 = 1/\omega_1$ es la frontera del disco verde en la figura 6.1(b) y el círculo $I_1 = 0$ intercepta a este disco una sola vez. El número de intersecciones es independiente del disco frontera siempre que se cuenten las intersecciones algebricamente.

Ahora consideramos que $\omega_1 = \omega_2$. En este caso toda solución es periódica de tal forma que una órbita es un círculo en \mathbb{S}^3 . Además de los dos modos normales, en cada órbita cuando θ_1 se incrementa por 2π , también lo hará θ_2 . Entonces cada órbita cruza al disco cuando $\theta_2 = 0$ (disco verde) en el punto amarillo como se muestra en la figura 6.1(b). Luego identificamos cada órbita con un único punto donde se intercepta con el disco. Uno de los modos normales toca al disco en el centro, luego podemos identificarlo con el centro. El otro modo normal es la frontera del disco. Cuando identificamos una órbita o círculo con un punto, el disco cerrado cuyo círculo exterior se identifica con un punto se convierte en una 2-esfera.

El siguiente teorema resume lo expuesto aquí arriba.

Teorema 21. *La 3-esfera \mathbb{S}^3 es la unión de círculos. Cualesquiera dos de estos círculos están entrelazados. El espacio cociente obtenido de identificar un círculo con un punto, en el espacio orbital, es una 2-esfera.*

La visualización de la 3-esfera identificando círculos s con puntos de la 2-esfera es conocido como la *fibración de Hopf* para la 3-esfera.

Para ver cómo es el espacio orbital cuando ω_1/ω_2 es irracional, consideramos el caso cuando $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$. Seleccionamos dos secciones transversales para el flujo definido por la ecuación (1.13), es decir, dos discos tales que las soluciones cursen los discos transversalmente y cada órbita cruce al menos una vez uno de los discos. Para ilustrar esta situación nos ayudaremos de la figura 6.2.

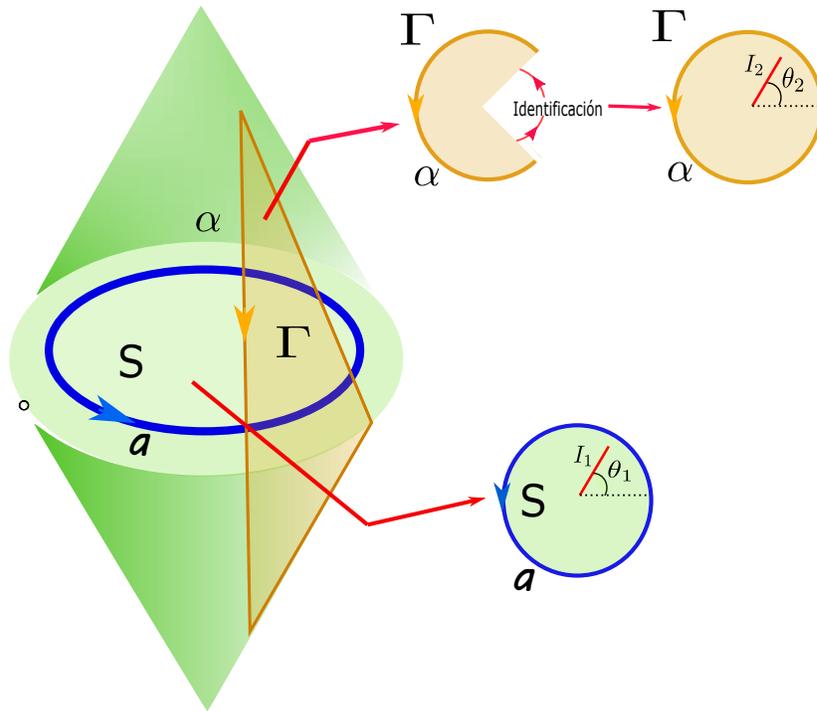


Figura 6.2: Secciones en \mathbb{S}^3 cuando $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$. Esta figura fue tomada de [41].

La primer sección que vamos a considerar es el disco S definido por $\theta_2 = 0$ y $0 \leq I_1 \leq 3/(4q)$ y θ_1 arbitrario. Sea a el círculo orientado (en azul) que es la frontera de S . La sección S es un disco con coordenadas simplécticas (I_1, θ_1) . Las órbitas cruzan S hacia arriba donde $\dot{\theta}_1 = -p$ y θ_2 decrece hacia abajo.

Ahora consideremos la segunda sección, Σ , definida por el disco $\theta_2 = 0$ y $1/(4q) \leq I_1 \leq 1/q$ y θ_1 arbitrario, una porción de este disco corresponde a la región pintada de naranja en la figura 6.2 y este tiene coordenadas simplécticas (I_2, θ_2) las órbitas deben cruzar Σ ya que $\dot{\theta}_1 = -q$. Denotamos por α al círculo orientado (contorno naranja) que es la frontera de S . Aquí podemos ver la razón

porque medimos θ_2 hacia abajo, porque con la convención I_2, θ_2 están correctamente orientados en Σ . Debido al traslape de estas dos secciones cada órbita cruza una o la otra o ambas.

Ahora entenderemos como es que se dan los cruces en cada una de los discos tomando $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$.

- Para la sección S que es definida por $\theta_2 = 0$ y coordenadas (I_1, θ_1) , tenemos que el primer tiempo de retorno es $T = 2\pi/3$ y el mapeo es

$$I_1 \rightarrow I_1, \quad \theta_1 \rightarrow \theta_1 - 4\pi/3.$$

Un punto que no sea el origen deberá pegar tres veces en el disco S , es decir,

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 - 4\pi/2 \rightarrow \theta_1 - 8\pi/3 \rightarrow \theta_1 - 12\pi/3 \equiv \theta_1.$$

Entonces una órbita que no sea $I_1 = 0$ pega en el disco S tres veces con ángulos igualmente espaciados en θ_1 , luego debemos tomar el sector $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi/3$ e identificar las líneas $\theta_1 = 2\pi/3$, como se muestra en el lado izquierdo de la figura 6.2 para conseguir un cono afilado.

- La sección Σ es definida por $\theta_1 = 0$ y tiene coordenadas (I_2, θ_2) . El primer tiempo de retorno es $T = \pi$ y el mapeo es

$$I_2 \rightarrow I_2, \quad \theta_2 \rightarrow \theta_2 - \pi.$$

Un punto que no sea el origen deberá pegar tres veces en el disco S y repetir la siguiente secuencia

$$\theta_2 \rightarrow \theta_2 - \pi \rightarrow \theta_2 - 2\pi \equiv \theta_2.$$

Entonces una órbita que no sea $I_2 = 0$ pega en el disco Σ dos veces con ángulos igualmente espaciados en θ_2 . Luego debemos tomar el sector $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ e identificar las líneas $\theta_2 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, como se muestra en el lado derecho de la figura 6.3, hasta obtener un cono afilado.

Las curvas frontera a, α, a', α' nos ayudan a identificar las dos secciones como se muestra en la figura 6.3. Entonces tenemos un modelo para el espacio orbital cuando la razón de las frecuencias es racional. Esto es claramente una 3-esfera topológica, S^3 , que no es diferenciable ya que tiene un pico.

Existen otras alternativas algebraicas para entender el espacio orbital cuando $\omega_1 = r$ y $\omega_2 = s$, donde r y s son primos relativos positivos. Ya que estamos en un sistema completamente integrable, pues tiene tres integrales independientes:

$$I_1, \quad I_2, \quad r\theta_2 - s\theta_1.$$

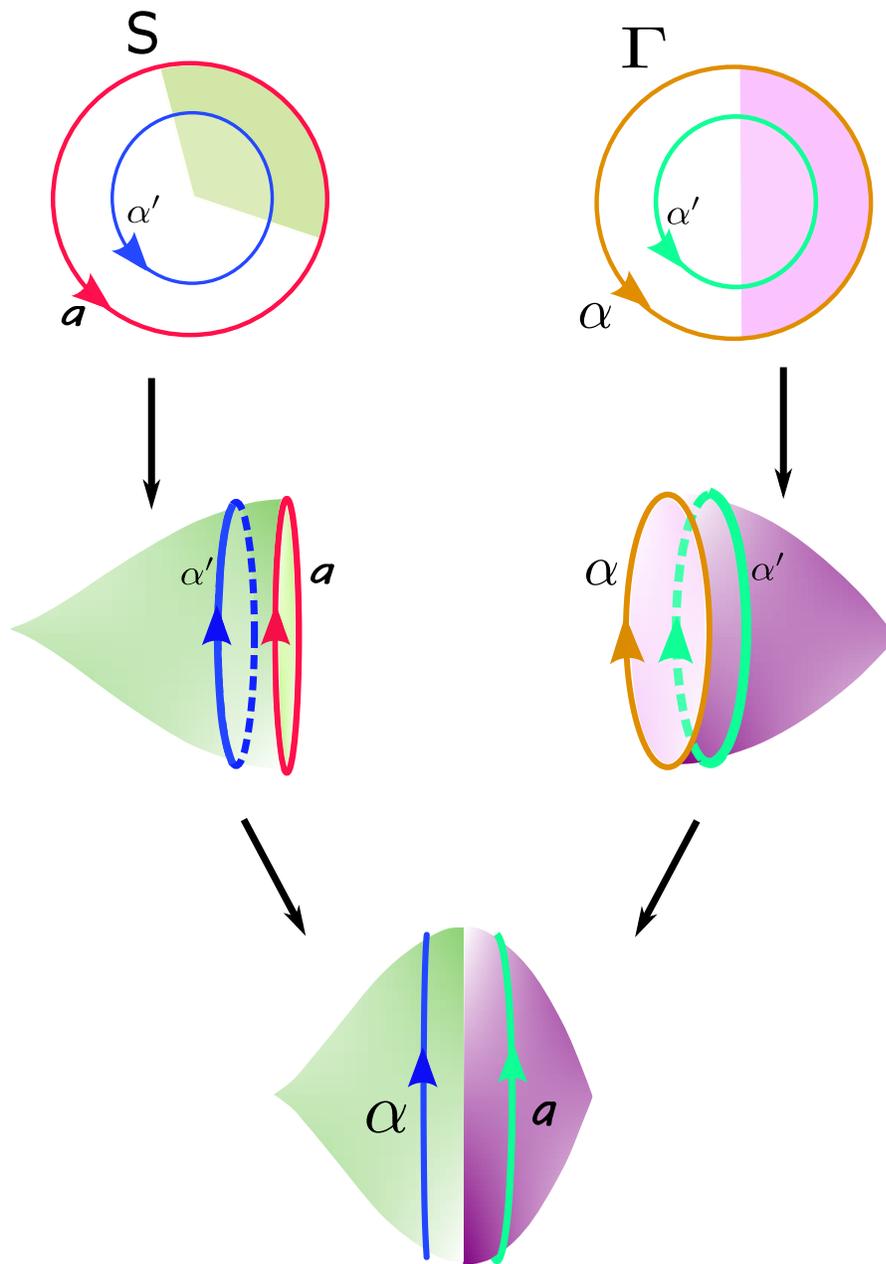


Figura 6.3: Secciones en S^3 cuando $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$. Esta figura fue tomada de [41].

Fijemos estas tres integrales definidas en una curva en \mathbb{R}^4 , es decir, en una órbita. Luego obtenemos un sistema polinómico de integrales, el cual esta dado por

$$\begin{aligned}
a_1 &= I_1 = x_1^2 + y_1^2, \\
a_2 &= I_2 = x_2^2 + y_2^2, \\
a_3 &= I_1^{s/2} I_2^{r/2} \cos(r\theta_2 - s\theta_1) = \Re[(x_1 - iy_1)^s (x_2 + iy_2)^r], \\
a_4 &= I_1^{s/2} I_2^{r/2} \sin(r\theta_2 - s\theta_1) = \Im[(x_1 - iy_1)^s (x_2 + iy_2)^r],
\end{aligned} \tag{6.3}$$

donde \Re y \Im denotan la parte real e imaginaria, respectivamente. Estos polinomios no son independientes, pero están sujetos a la siguiente restricción

$$a_3^2 + a_4^2 = a_1^s a_2^r, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0. \tag{6.4}$$

Una órbita del sistema (6.2) queda determinada de forma única por los cuatro invariantes sujetos a la restricción (6.4), ya que podemos resolver para $\cos(r\theta_2 - s\theta_1)$ y $\sin(r\theta_2 - s\theta_1)$ y así determinar el ángulo $r\theta_2 - s\theta_1$. Entonces el espacio orbital esta determinado por (6.3), (6.4) y

$$H = ra_1 + sq_2 = h. \tag{6.5}$$

A continuación vamos a construir los espacios orbitales para tres resonancias distintas: 1:1, 2:1 y 3:1. Lo primero que hacemos es resolver (6.1) para a_2 , luego el valor obtenido lo sustituimos en la ecuación de restricción para conseguir

$$a_3^2 + a_4^2 = a_1^s \left(\frac{h - ra_1}{s} \right)^r. \tag{6.6}$$

Esta ecuación define una superficie en \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas son (a_1, a_3, a_4) , la cual será la representación del espacio orbital. Debemos notar que (6.6) define una superficie de revolución, ya que si introducimos coordenadas polares (ρ, ψ) en el plano (a_1, a_3) , (6.6) toma la forma

$$\rho^2 = a_1^s \left(\frac{h - ra_1}{s} \right)^r. \tag{6.7}$$

La superficie del espacio orbital es compacta. Por otro lado, fijamos los valores de r y s para obtener los espacios orbitales de las resonancias 1:1, 2:1 y 3:2, los cuales están representados, así como sus respectivas secciones, en el plano (ρ, a_1) en la figura 6.4.

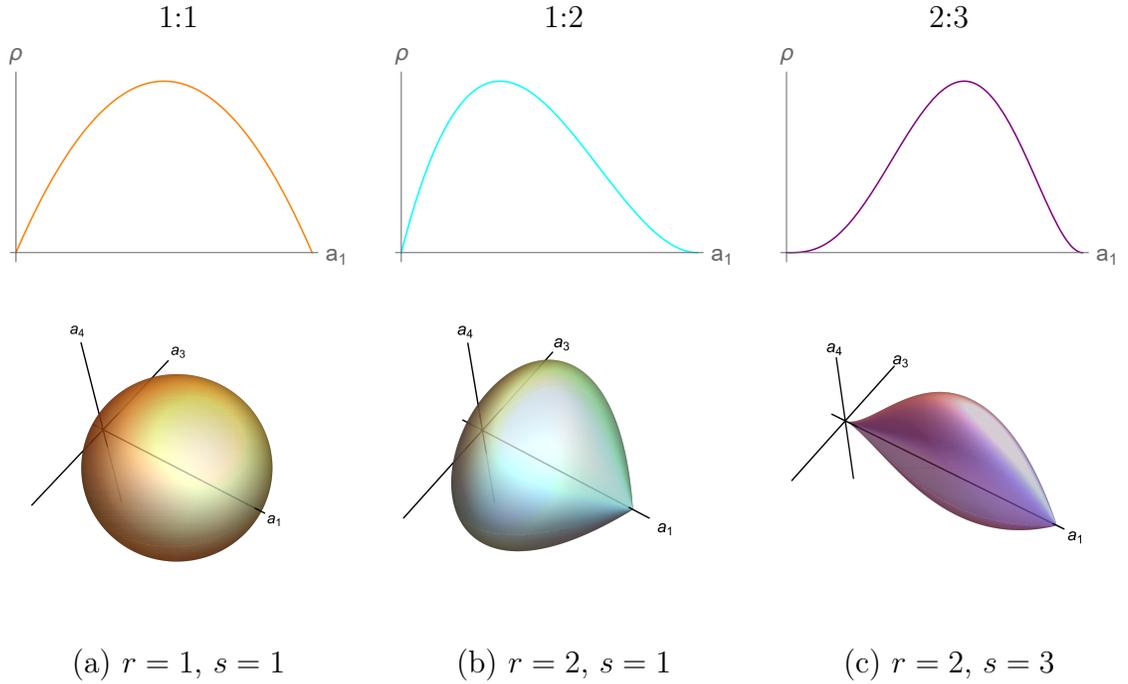


Figura 6.4: Fila superior: ρ versus a_1 . Fila inferior: Espacios orbitales.

Ahora vamos a analizar cada una de las gráficas de la figura 6.4. Para $r = 1$ y $s = 1$, la ecuación (6.7) define una circunferencia centrada en $(\rho, a_1) = (0, h/2)$, y el espacio orbital definido por (6.7) es una esfera centrada en $(a_1, a_2, a_4) = (h/2, 0, 0)$ sin picos. Si $r \neq s$ el lado derecho de la ecuación (6.7) es positivo, para $0 < a_1 < h/2$, y se anula cuando $a_1 = 0, h/2$, y define una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 con para $0 < a_1 < h/2$. Cerca de $a_1 = 0$ tenemos que $\rho \sim ca_1^{s/2}$, donde $c > 0$ es una constante. Luego el espacio orbital es diferenciable únicamente en $a_1 = 0$ si $s = 1$. Para $p > 1$ la superficie en $a_1 = 0$ tiene un pico, el cual parece un cono cuando $s = 2$ y tipo cúspide cuando $s > 2$. El pico se hace más fino para valores de s grandes. Por otro lado, cerca de $a_1 = h/r$ tenemos que $\rho \sim c(h - rqa_1)^{r/2}$, donde $c > 0$ es constante. Entonces la superficie de revolución es diferenciable sólo en $a_1 = h/q$ si $r = 1$. Cuando $r > 1$ la superficie tiene un pico en $a_1 = h/r$ y el pico se hace más fino para r grande. El pico es de tipo cono cuando $r = 2$ y tipo cúspide cuando $r > 2$. Ver las figuras 6.4(b) y 6.4(c).

6.2. Reducción singular para los puntos de equilibrio linealmente estables en el PRECC

En esta sección vamos a introducir la reducción singular en el PRECC para los puntos de equilibrio linealmente estables L_3 , L_5 y L_6 , en las regiones I y III en presencia de las resonancias 1:−2 y 1:−3.

Realizaremos este análisis solo para L_6 , pues un estudio similar nos lleva a concluir la estabilidad de L_3 y L_5 .

Para iniciar vamos a considerar el hamiltoniano desarrollado en una serie formal, la cual debe estar en forma normal hasta orden n , de tal forma que existen cuatro hamiltonianos relacionados. Es decir,

- H que es el del sistema completo.
- \mathbb{H} que es la parte cuadrática del sistema.
- \bar{H} es la parte normalizada de la expansión del hamiltoniano.
- \bar{R} es el sistema reducido promediado.

Sea

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2} [k(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)] = kI_1 - I_2,$$

donde k es un entero positivo, $r = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ es el vector de posición en variables cartesianas y $I_1, I_2, \theta_1, \theta_2$ son variables acción-ángulo. El sistema hamiltoniano asociado es

$$\dot{I}_1 = 0, \quad \dot{I}_2 = 0, \quad \dot{\phi}_1 = -k, \quad \dot{\phi}_2 = 1. \quad (6.8)$$

Este sistema tiene tres integrales independientes e invariantes: I_1 , I_2 y $\phi_1 + k\phi_2$, las cuales son suficientes para describir una órbita en un espacio de dimensión cuatro.

El conjunto fundamental de polinomios invariantes asociados con la resonancia $k:-1$ es

$$\begin{aligned} a_1 &= I_1 = x_1^2 + y_1^2, \\ a_2 &= I_2 = x_2^2 + y_2^2, \\ a_3 &= I_1^{1/2} I_2^{k/2} \cos(\phi_1 + k\phi_2) = \Re[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)^k], \\ a_4 &= I_1^{1/2} I_2^{k/2} \sin(\phi_1 + k\phi_2) = \Im[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)^k], \end{aligned} \quad (6.9)$$

los cuales están sujetos a la restricción

$$a_3^2 + a_4^2 = a_1 a_2^k, \quad (6.10)$$

la cual se obtiene de la identidad trigonométrica $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ y las restricciones $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$.

Estos invariantes satisfacen un algebra de Lie que está dada por los paréntesis de Poisson, los cuales se pueden consultar en la tabla 6.1. Notemos que los paréntesis de Poisson son polinomios, donde k es un entero positivo.

$\{\cdot, \cdot\}$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	$-2a_4$	$2a_3$
a_2	0	0	$-2ka_4$	$2ka_3$
a_3	$2a_4$	$2ka_4$	0	$a_2^{k-1}(k^2 a_1 + a_2)$
a_4	$-2a_3$	$-2ka_3$	$-a_2^{k-1}(k^2 a_1 + a_2)$	0

Tabla 6.1: Paréntesis (corchetes) de Poisson de los invariantes a_1, a_2, a_3, a_4 .

Una órbita del sistema queda completamente especificada por cuatro invariantes sujetos a la restricción (6.9) y como consecuencia el espacio orbital \mathbb{O} es determinado por la restricción y la integral $\mathbb{H} = ka_1 - a_2 = h$. Resolviendo esta última relación para a_2 y sustituimos en la ecuación de la restricción para obtener

$$a_3^2 + a_4^2 = a_1 (ka_1 - h)^k, \quad (6.11)$$

esta relación es la ecuación del espacio orbital, la cual define una superficie en el espacio (a_1, a_2, a_3) y es la representación del espacio orbital \mathbb{O} . Debemos notar que la superficie es una superficie de revolución, entonces introducimos coordenadas polares (ρ, ϕ) en el plano (a_3, a_4) de tal manera que la ecuación del espacio orbital toma la siguiente forma

$$\rho^2 = a_1 (ka_1 - h)^k.$$

Esta superficie de revolución es no acotada y es suave cuando el lado derecho es positivo. Recordamos que la restricción sobre los invariantes era que $a_1 \geq 0$ y $a_2 \geq 0$ lo cual implica que $a_1 \geq h/2$. En la figura 6.5 mostramos los espacios orbitales para diversas resonancias y para diversos signos de la energía h .

Inspeccionando las figuras podemos ver que:

- Cuando $h < 0$ el lado derecho de la ecuación del espacio orbital se anula solo cuando $a_1 = 0$ y cuando $\rho \sim ca_1^{1/2}$, con c una constante positiva. Entonces la superficie \mathbb{O} es diferenciable en $a_1 = 0$.

- Cuando $h = 0$ el lado derecho de la ecuación del espacio orbital se anula en $a_1 = 0$ y cuando $\rho \sim ca_1^{\frac{k+1}{2}}$ con c una constante positiva. Entonces la superficie es un cono cuando $k = 1$ y una cúspide cuando $k > 1$.
- Cuando $h > 0$ el lado derecho de la ecuación del espacio orbital se anula en $a_1 = 0$ y cuando $\rho \sim c(ka_1 - h)^{\frac{k}{2}}$ con c una constante positiva. Entonces la superficie es diferenciable en $a_1 = h/k$ cuando $k = 1$, es un cono cuando $k = 2$ y una cúspide cuando $k > 2$.

Ahora vamos a considerar el hamiltoniano formal de grado $k + 1$

$$\bar{H} = \mathbb{H} + \dots,$$

dado en forma normal, donde \mathbb{H} corresponde a la parte cuadrática. A partir de la definición de forma normal tenemos que

$$\{\bar{H}, \mathbb{H}\} = 0.$$

Luego \mathbb{H} es una integral primera para el sistema definido por el hamiltoniano formal \bar{H} , por lo que este hamiltoniano puede ser escrito en términos de los invariantes a_1, a_2, a_3 y a_4 . Los términos que contienen ángulos serán de suma importancia, pues son quienes determinan la existencia de muchas de las órbitas periódicas en un escenario no lineal o de perturbaciones.

Ahora vamos a estudiar los efectos de las resonancias de menor orden, es decir, el caso genérico de orden $k + 1$. En este caso el hamiltoniano \bar{H} en forma normal y en presencia de la resonancia $1:-k$ escrito coordenadas ángulo-acción toma la siguiente forma

$$\bar{H} = \mathbb{H} + \sum_{j=2}^l \hat{H}_k^j(I_1, I_2) + GI_1^{1/2} I_2^{k/2} \cos(\phi_1 + k\phi_2).$$

Ahora realizamos un escalamiento simpléctico $z \rightarrow \varepsilon z$ con multiplicador ε^2 , y obtenemos el hamiltoniano

$$\bar{H} = \mathbb{H} + \sum_{j=2}^l \varepsilon^{2j-2} \hat{H}_k^j(I_1, I_2) + \varepsilon^{k-1} GI_1^{1/2} I_2^{k/2} \cos(\phi_1 + k\phi_2), \quad (6.12)$$

con $2l \leq k + 1$ y \hat{H}_k^j es un polinomio en las variables de acción I_1 e I_2 de grado j . Ya que \mathbb{H} es una integral primera podemos fijar el valor de la energía

$$h = \mathbb{H} = kI_1 - I_2 = ka_1 - a_2.$$

Luego resolvemos para $a_2 = ka - h$ e $I_2 = kI_1 - h$, y escribimos al hamiltoniano en términos de los invariantes como

$$\bar{H} = h + \sum_{j=2}^l \varepsilon^{2j-2} \hat{H}_k^j(a_1, h) + \varepsilon^{k-1} Ga_3. \quad (6.13)$$

En lo que sigue vamos a establecernos en el llamado sistema promediado sobre el espacio orbital, para lo cual omitimos todos los términos constantes y dividimos por ε , y obtenemos el sistema reducido promediado

$$\bar{R} = \sum_{j=2}^l \varepsilon^{2j-4} \hat{H}_k^j(a_1, h) + \varepsilon^{k-3} Ga_3. \quad (6.14)$$

Para obtener la ecuaciones del movimiento en el espacio orbital aplicamos las relaciones de los paréntesis de Poisson de la tabla 6.1 y usando

$$\dot{a} = \{a_i, \bar{H}\}, \quad i = 1, 2, 4 \quad (6.15)$$

con lo que podemos obtener el flujo promediado en el espacio orbital. En este contexto un punto crítico $p \in \mathbb{O}$ del flujo generado por (6.15) corresponde a una solución periódica $P = \Pi^{-1}(p) \in \mathcal{N}$ del sistema promediado o en su defecto al origen. Equivalentemente, una órbita del sistema reducido promediado que tiende a un punto crítico p corresponderá a una superficie formada por órbitas en \mathcal{N} tendiendo a la solución periódica P .

Caso $k = 2$: Ahora consideramos el caso particular $k = 2$. Para obtener el sistema promediado reducido en el espacio orbital se deberán omitir todos los términos constantes. Ahora el sistema promediado es

$$\bar{H} = 2a_1 - a_2 + \varepsilon Ga_3 = 2I_1 - I_2 + \varepsilon I_1^{1/2} \cos(\phi_1 + 2\phi_2),$$

y el hamiltoniano reducido promediado es

$$\bar{R} = Ga_3.$$

En este caso debemos suponer que $G \neq 0$. Por otro lado, el PRECC depende de dos parámetros de masas (m_1, m_2) , y las masas, para donde las frecuencias fundamentales del sistema lineal están racionalmente relacionadas forman curvas en el espacio de parámetros (m_1, m_2) (capítulo 3), en este caso la constante G dependerá de los dos parámetros, $G = G(m_1, m_2)$, por lo que es necesario calcular esta constante para cada valor de las masas que forme la curva de resonancia 2:-1. Esta constante es la misma que aparece en las tablas B.1-B.6 las cuales

son obtenidas del calculo de la forma normal para el estudio de la estabilidad en presencia de la resonancia 2: -1 (aquí la nombramos a la constante como δ), para 30 parejas (m_1, m_2) sobre la curva de resonancia en los cuales tenemos que $G \neq 0$ y entonces por continuidad de la curva $G \neq 0$ para todos los valores de masas que formen la curva, por lo que para cada valor de masas en la curva es posible aplicar la teoría de reducción singular. Por otro lado para cada valor de (m_1, m_2) sobre la curva podemos realizar un re escalamiento en el tiempo en las ecuaciones del movimiento para poder obtener $G = 1$ de modo que el hamiltoniano reducido promediado es simplemente

$$\bar{R} = a_3,$$

esto nos dice que para cada par en la curva de resonancia la reducción singular es topológicamente equivalente, entonces solo basta analizar un caso en particular para poder entender la dinámica del problema.

La geometría del problema se obtiene considerando la intersección de dos superficies en \mathbb{R}^3 . La primer superficie es el espacio orbital \mathbb{O} , que está dada por la ecuación de restricción entre los invariantes

$$a_3^2 + a_4^2 = a_1(2a_1 - h)^2, \quad a_1 \geq 0, \quad a_1 \geq \frac{1}{2}h,$$

para varios valores de h y la segunda superficie es el hamiltoniano reducido promediado

$$\bar{R} = a_3 = \bar{H},$$

para varios valores de \bar{h} , entonces cerca del origen en el sistema (a_1, a_3, a_4) el espacio orbital es

- Un paraboloides de revolución cuando $h < 0$, por lo tanto entonces es una superficie diferenciable.
- Una cúspide rotada, cuando $h = 0$.
- Un cono cuando $h > 0$.

El hamiltoniano reducido promediado es un plano que es paralelo al plano coordenado (a_1, a_4) . El flujo sobre el espacio orbital es generado por las ecuaciones de movimiento

$$\dot{a}_1 = \{a_1, \bar{R}\} = -2a_4, \quad \dot{a}_3 = \{a_3, \bar{R}\} = 0, \quad \dot{a}_4 = \{a_4, \bar{R}\} = -a_2(4a_1 + a_2).$$

La figura 6.6 muestra el flujo sobre el espacio orbital para $h < 0$, $h = 0$ y $h > 0$.

Ahora deseamos buscar las soluciones de equilibrio del sistema, para ello podemos ver que $a_4 = 0$ y $a_2(4a_1 + a_2) = 0$, pero a_1 y a_2 no pueden ser zero o tomar un valor negativo simultáneamente, debido a la restricción $a_2 = 2a_1 - h$, entonces las condiciones para un equilibrio son $a_4 = a_2 = 0$. Pero $a_2 = 0$ solo cuando $a_1 = h/2$ y esto solo ocurre cuando $h \geq 0$.

Al analizar la figura 6.6 tenemos lo siguiente:

- Cuando $h = 0$ el origen en el espacio (a_1, a_2, a_3) corresponde al origen en \mathbb{R}^3 . Existe entonces una órbita en \mathbb{O} tendiendo al origen cuando $t \rightarrow +\infty$ y hay una una órbita en \mathbb{O} tendiendo al origen cuando $t \rightarrow -\infty$. Estas órbitas representan una superficie de soluciones que circulan al origen cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Entonces el equilibrio es inestable.
- Cuando $h > 0$ el espacio orbital tiene un equilibrio en $a_1 = h/2$, $a_3 = a_4 = 0$. Esto corresponde a un órbita periódica con periodo $T \sim \pi$ para cada $h \geq 0$. Esta soluciones corresponden a la familia de periodo corto dada por el teorema del centro de Lyapunov. Debemos notar que en este escenario también existe una órbita tendiendo al equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Entonces la familia de órbitas periódicas de corto periodo es inestable.
- Cuando $h < 0$ no hay equilibrios y así todas las soluciones se alejan cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Entonces, no hay otra familia periódica de soluciones en este caso.

Caso k=3 Para obtener el sistema promediado reducido vamos a particularizar la ecuación 6.12 y seguidamente omitiremos los términos constantes. El sistema promediado en presencia de la resonancia $3 : -1$ es

$$\hat{H} = 3I_1 - I_2 + \frac{\varepsilon^2}{2}(AI_1^2 + 2BI_1I_2 + CI_2^2) + \varepsilon^2GI_1^{1/2}I_2^{3/2} \cos(\phi_1 + 3\phi_2),$$

donde A, B, C, G son constantes que dependen de las frecuencias fundamentales $\omega_1(m_1, m_2)$ y $\omega_2(m_1, m_2)$. En términos de los invariantes al hamiltoniano promediado es

$$\hat{H} = 3a_1 - a_2 + \frac{\varepsilon^2}{2}(Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2) + \varepsilon Ga_3,$$

tomamos $\varepsilon \rightarrow 1$ y fijamos la parte cuadrática a un nivel constante h para obtener a \hat{H} en términos de a_1 y a_3

$$\hat{H} = h + \frac{1}{2}(Aa_1^2 + 2Ba_1(3a_1 - h) + C(3a_1 - h)^2) + Ga_3,$$

desarrollamos y agrupamos para obtener

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [(A + 3B + 9C)a_1^2 - (2B + 6C)ha_1] + Ga_3 + h + ch^2.$$

Ahora introducimos las constantes $D = \frac{1}{2}(A + 6B + C)$ y $R = B + 3C$ y omitimos los términos constantes para llegar al sistema promediado reducido.

$$\hat{R} = Da_1^2 - Rha_1 + Ga_3.$$

En la teoría KAM, la constante D es conocida como *coeficiente de torsión*. Notemos que en la forma normal en presencia de la resonancia 3:−1 el coeficiente de torsión y el coeficiente angular G están definidos al mismo orden en ε , es decir, a orden ε^2 . De manera análoga a como analizamos el caso $k = 2$, sabemos que nuestro problema depende de dos parámetros (m_1, m_2) y los valores de masas para donde las frecuencias fundamentales de la parte cuadrática del hamiltoniano están racionalmente relacionadas forman curvas en el plano de las masas, entonces nuevamente la constante G depende de estos dos parámetros y es necesario calcularla para cada par de valores que formen a la curva de resonancia 3:−1, esta constante ya está calculada pues está implícita en la cantidad ΔD , la cual se obtuvo para diversos valores de cada equilibrio en sobre cada curva de resonancia 3:−1, en las tablas C.1-C.6, podemos ver que para cada par elegido de cada curva de resonancia $G \neq 0$ y entonces por continuidad de la curva $G \neq 0$, por lo que para cada valor de las masas es posible aplicar la teoría de reducción singular. Entonces es suficiente elegir algún valor de masas de la curva de la resonancia 3:−1 e introducir el análisis que a continuación exponaremos ya que para cada punto de la curva la reducción singular debe ser topológicamente equivalente ya que se encuentra el mismo tipo de geometría.

El sistema promediado reducido está definido en el espacio órbitas, \mathbb{O} , definido por

$$a_3^2 + a_4^2 = a_1(3a_1 - h)^3, \quad a_1 \geq 0, \quad a_1 \geq \frac{1}{3}h.$$

Nuevamente la geometría del problema está descrita por la intersección de la superficie del espacio orbital para varios valores de h y las superficies de el hamiltoniano promediado reducido $\hat{R} = \bar{h}$, para varios valores de \bar{h} en \mathbb{R}^3 .

Cerca del origen en el espacio (a_1, a_3, a_4) , \mathbb{O} es diferenciable cuando $h < 0$, es una parábola rotada cuando $h = 0$ y es una cúspide rotada cuando $h > 0$. La superficie $\mathbb{R} = \bar{h} = \text{cte}$ es solo la traslación de una parábola en la dirección de a_4 .

Ahora obtendremos el campo vectorial asociado a \bar{R} usando la tabla 6.1.

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \{a_1, \bar{R}\} = G\{a_1, a_3\} = -2Ga_4, \\ \dot{a}_3 &= \{a_3, \bar{R}\} = D\{a_3, a_1^2\} - Rh\{a_3, a_1\} = 2a_1\{a_3, a_1\} - 2Rha_4 = 4a_1Da_4 - 2Rha_4, \\ \dot{a}_4 &= \{a_4, \bar{R}\} = D\{a_4, a_1^2\} - Rh\{a_4, a_1\} + G\{a_4, a_3\} = -4Da_1a_3 + Rha_3 - Ga_2^2(9a_1 + a_2),\end{aligned}$$

y en la última ecuación quitamos la dependencia en a_2 , a través del hamiltoniano de la parte cuadrática fijando un nivel h , luego el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -2Ga_4, \\ \dot{a}_3 &= 2a_4(2a_1 - Rh), \\ \dot{a}_4 &= -2a_3(2Da_1 - Rh) - G(3a_1 - h)^2(12a_1 - h),\end{aligned}\tag{6.16}$$

el cual da el flujo preciso sobre el espacio orbital. Primeramente buscamos soluciones de equilibrio del sistema en el espacio orbital considerando a $G \neq 0$. Es claro que $a_4 = 0$ para así anular las dos primeras ecuaciones y dejar solo en términos de a_1 y a_3 a la ecuación del espacio orbital

$$a_3^2 = a_1(3a_1 - h)^3,$$

ahora de la ecuación para a_4 del sistema se debe tener que

$$2a_3(2Da_1 - Rh) + (3a_1 - h)^2(12a_1 - h) = 0$$

de esta ecuación despejamos a a_3 y sustituimos en la ecuación del espacio orbital para obtener un polinomio en la variable a_1

$$G^2(3a_1 - h)^4(12a_1 - h)^2 = 4a_1(3a_1 - h)^3(2Da_1 - Rh)^2,$$

expandimos y cancelamos términos para llegar a

$$16(D^2 - 27G^2)a_1^3 + 8h(27G^2 - 2DR)a_1^2 + h^2(4R^2 - 27G^2)a_1 + G^2h^3 = 0, \tag{6.17}$$

el cual es un polinomio de grado tres con coeficientes que dependen de los parámetros D , G , R y h . Notemos que el número de parámetros se puede reducir definiendo $\alpha = \frac{D}{G}$, $\beta = \frac{R}{G}$ y dividiendo el polinomio cúbico por G^2 , obteniendo como resultado

$$16(\alpha^2 - 27)a_1^3 + 8h(27 - 2\alpha\beta)a_1^2 + h^2(4\beta^2 - 27)a_1 + h^3 = 0.$$

Ahora vamos a buscar raíces de este polinomio que satisfagan $a_1 \geq \min\{0, h/3\}$, para lo cual usaremos el método de resultante de polinomios (ver, por ejemplo, [52]). La resultante con respecto a la variable a_1 es

$$1024(\alpha^2 - 27)(\alpha - 6\beta)(729 + 108\alpha^2 + 648\beta^2 - 48\beta^4 + 8\alpha\beta(-81 + 4\beta^2))h^6 = 0,$$

la cual nos permite conocer los ceros comunes del polinomio cúbico (6.17) y su derivada.

Notemos que el número de puntos críticos del sistema (6.16) en el espacio orbital cambia cuando una de las raíces del polinomio (6.17) está en el pico $a_1 = h/3$, cuando $h \geq 0$. En otras palabras, cuando a_1 es reemplazada por $h/3$ en (6.17), obteniendo

$$\frac{4}{24}(2\alpha - 3\beta)^2 h^3 = 0.$$

En lo que sigue vamos a distinguir los casos $h < 0$, $h = 0$ y $h > 0$ y analizar los equilibrios y sus bifurcaciones cuando variamos los parámetros α y β .

El caso mas simple es $h = 0$, ya que la (6.17) se simplifica a

$$16a_1^3(\alpha^2 - 27) = 0.$$

En los casos $h \neq 0$ hay dos diagramas de bifurcación, los cuales los mostramos en las figuras 6.7(a) y 6.7(b) para $h < 0$ y $h > 0$, respectivamente. Las curvas de bifurcación en el espacio de parámetros (α, β) son dadas por las siguientes ecuaciones

$$\Gamma_1 : \alpha^2 - 27 = 0 \text{ (líneas rojas);}$$

$$\Gamma_2 : (729 + 108\alpha^2 + 648\beta^2 - 48\beta^4 + 8\alpha\beta(-81 + 4\beta^2)) = 0 \text{ (líneas azules);}$$

$$\Gamma_3 : 2\alpha - 3\beta = 0 \text{ (línea verde).}$$

Notemos que los diagramas de bifurcación son simétricos con respecto al origen. Cuando los parámetros toman valores sobre las curvas azules los puntos críticos tienen una bifurcación del tipo centro-silla, es decir, es una bifurcación de órbitas periódicas. Cuando los parámetros toman valores sobre las líneas rojas el término cúbico desaparece, de tal forma que solo habrá dos ceros, mientras que sobre la curva verde habrá bifurcación del pico.

Ahora estudiamos el caso $h < 0$, el cual es ilustrado en la figura 6.8. En este escenario el espacio orbital es diferenciable y los equilibrios corresponden a órbitas periódicas de periodo 2π . Analizamos lo que sucede con los equilibrios en cada región del plano de bifurcaciones

- En la región I la ecuación (6.17) tres raíces que son positivas y distintas, por lo que tenemos tres equilibrios en el espacio orbital: dos centros (órbitas periódicas estables) y un silla (órbita periódica inestable). De acuerdo a la teoría KAM (ver el capítulo 1) las órbitas que circundan a los centros corresponden a toros KAM de dimension 2.

- En las curvas azules (Γ_2) uno de los centros y el punto silla colisionan degenerando en un único punto crítico que es del tipo cúspide, lo cual corresponde a una órbita periódica degenerada, mientras que uno de los centros permanece circundado por toros KAM de dimensión 2.
- En la región II el punto crítico anterior desaparece y sólo el otro centro sobrevive.
- En la región IV incluyendo las rectas rojas (Γ_1), solo un centro y un punto silla están presentes.
- En las curvas azules (Γ_2), el punto silla y el centro colisionan degenerando en un único punto equilibrio de tipo cúspide.
- En la región III no hay puntos de equilibrio.

En el caso $h > 0$, mostrado en la figura 6.9, hay un pico en $h/3$, el cual siempre es un punto de equilibrio. Ya que estamos interesados en las soluciones de la ecuación (6.17) que sean mayores que $h/3$, debemos considerar lo siguiente:

- En la región I la ecuación (6.17) tiene dos soluciones diferentes de $h/3$, entonces existen tres puntos de equilibrio. El pico es un centro circundado por toros KAM de dimensión 2, cerca de este hay un punto centro-silla, y hay otro centro relativamente distante de estos dos equilibrios, el cual también es circundado por toros KAM.
- Sobre la curva verde (Γ_3) el centro-silla colapsa con el pico, y obtenemos una cúspide, y prevalece un centro.
- En la región II se llega a una situación similar a la región I, nacen 3 equilibrios dos centros y una silla.
- Sobre la curva azul (Γ_2) la silla y uno de los centros colisionan prevaleciendo un centro que corresponde al pico.
- En la región III el equilibrio anterior que nació de la colisión desaparece y solo prevalece el equilibrio correspondiente al pico
- sobre la curva roja (Γ_1) el pico preserva su existencia.
- En la región IV y la curva roja (Γ_1) nace una silla y el pico continua como un centro.

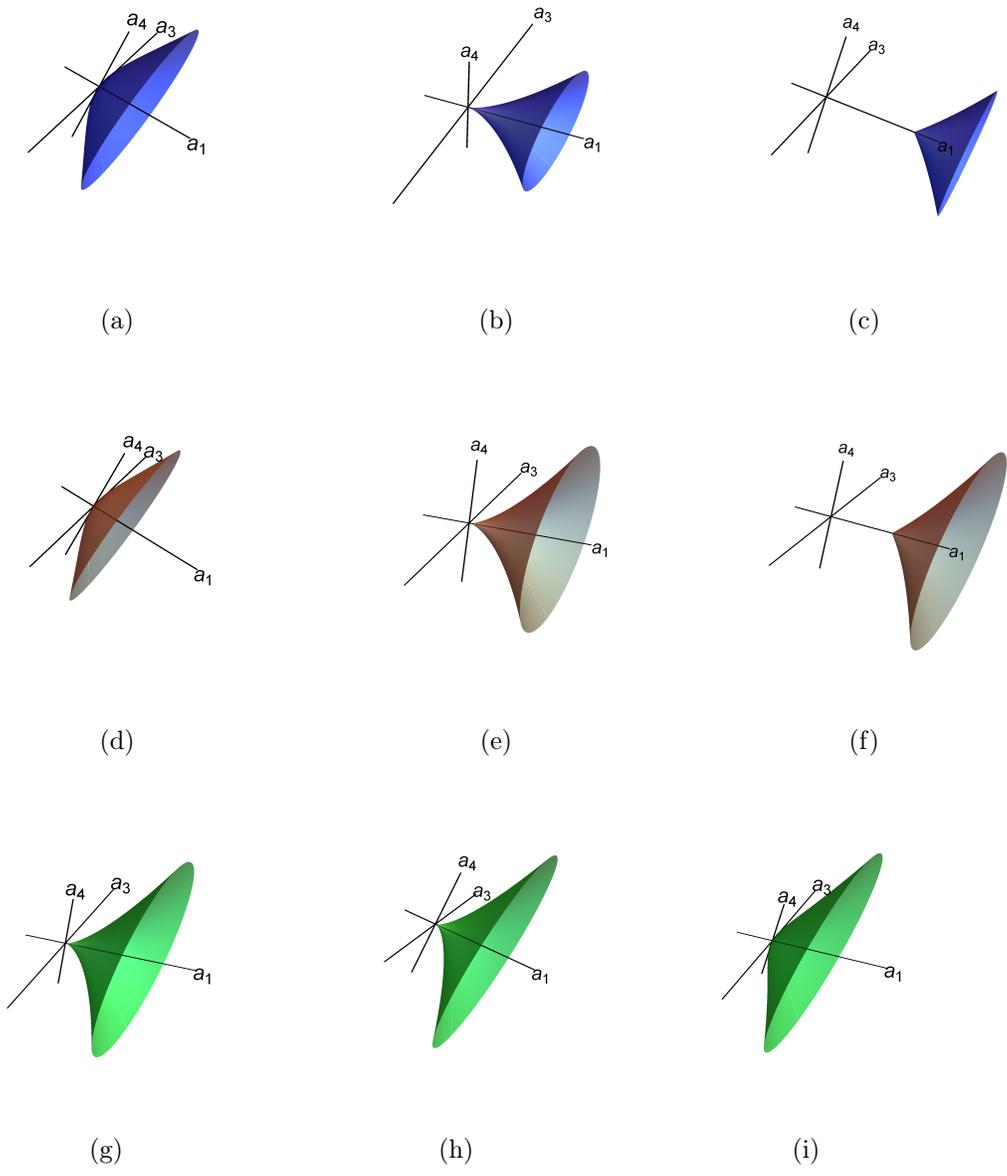
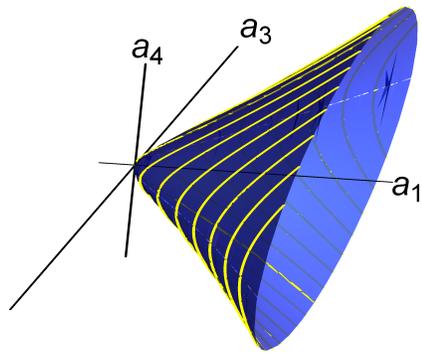
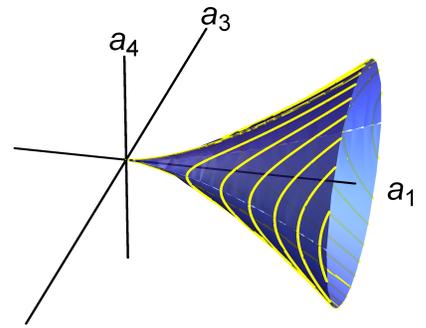


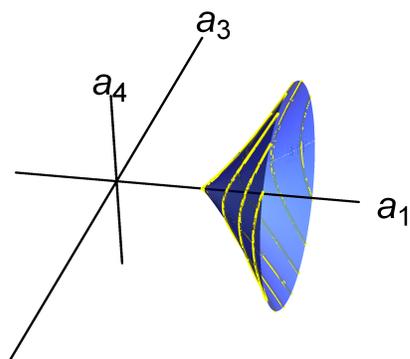
Figura 6.5: Espacios orbitales para tres distintas resonancias: (a)-(c) 2:-1, (d)-(f) 3:-1, (g)-(i) 4:-1, con distintos signos en la energía $h < 0$, $h = 0$, $h > 0$ respectivamente.



(a)

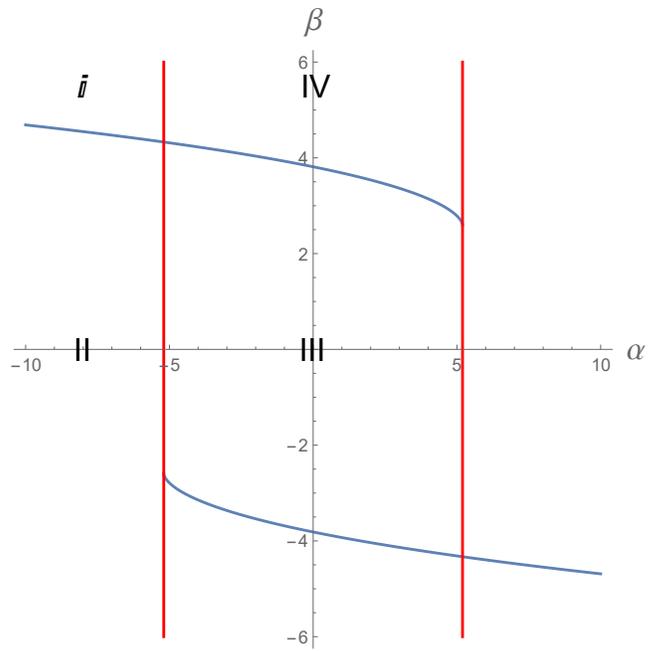


(b)

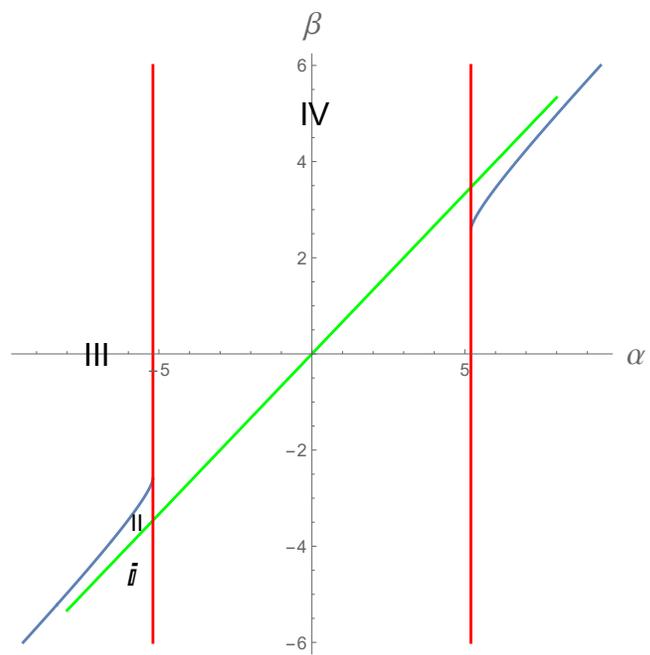


(c)

Figura 6.6: Flujo sobre el espacio orbital para la resonancia 2:−1.



(a)



(b)

Figura 6.7: Diagramas de bifurcación para: (a) $h < 0$, (b) $h > 0$.

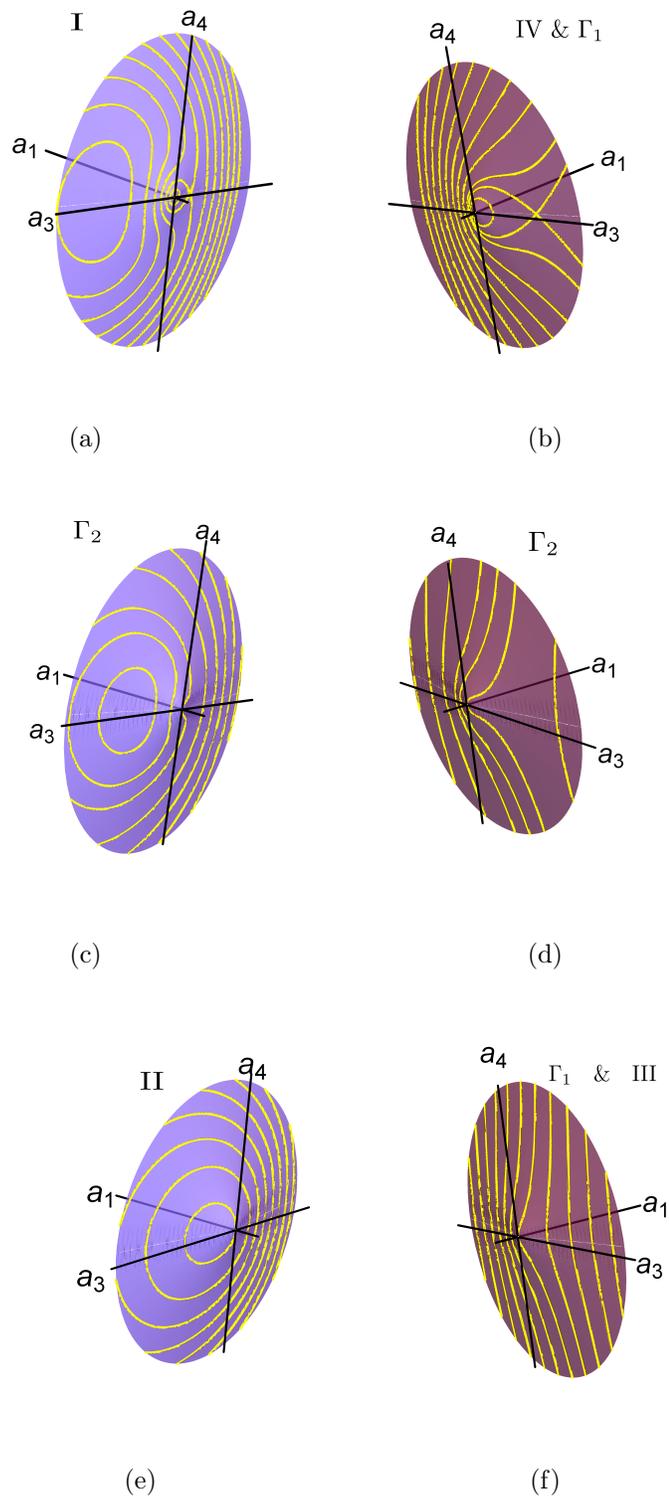


Figura 6.8: Flujo en el espacio orbital para la resonancia 3:−1 cuando $h < 0$.

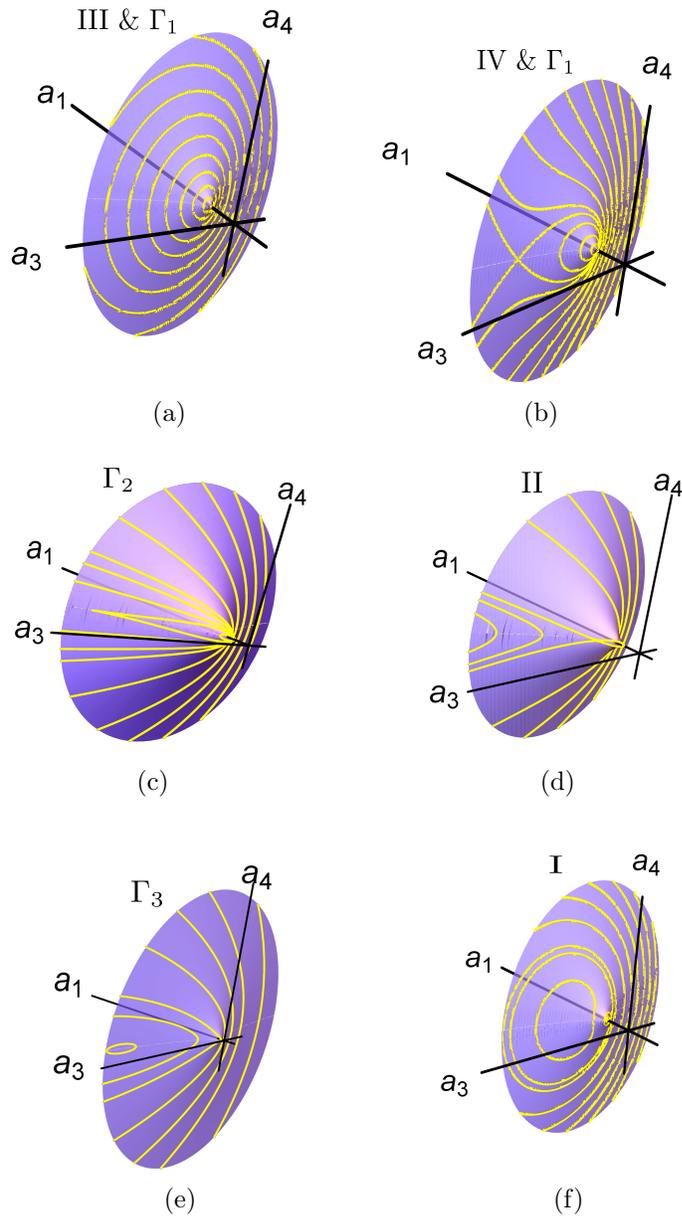


Figura 6.9: Flujo en el espacio orbital para la resonancia 3:-1 cuando $h > 0$.

Apéndice A

Tablas de valores de D_6 donde
 $D_4 = 0$

m_1	m_2	D_6
0.00724696	1×10^{-7}	2.77225×10^{11}
0.00940786	0.000458598	4.51043×10^8
0.0101694	0.000917095	4.31477×10^8
0.0106287	0.00137559	4.2367×10^8
0.0109278	0.00183409	4.18081×10^8
0.0111237	0.00229259	4.13866×10^8
0.0112449	0.00275109	4.10653×10^8
0.0113075	0.00320958	4.07976×10^8
0.011322	0.00366808	4.05623×10^8
0.0112959	0.00412658	4.03503×10^8
0.0112343	0.00458508	4.01515×10^8
0.0111413	0.00504357	3.99626×10^8
0.0110199	0.00550207	3.9781×10^8
0.0108725	0.00596057	3.96047×10^8
0.0107012	0.00641907	3.94329×10^8
0.0105076	0.00687756	3.92652×10^8
0.0102927	0.00733606	3.90942×10^8
0.0100579	0.00779456	3.89301×10^8
0.00980395	0.00825305	3.87632×10^8
0.00953161	0.00871155	3.85974×10^8
0.00924153	0.00917005	3.84319×10^8
0.00893423	0.00962855	3.82662×10^8
0.00861013	0.010087	3.81002×10^8
0.00826958	0.0105455	3.79336×10^8
0.00791287	0.011004	3.77661×10^8
0.0075402	0.0114625	3.75975×10^8
0.00715174	0.011921	3.74277×10^8
0.00674761	0.0123795	3.72567×10^8
0.00632785	0.012838	3.70842×10^8
0.00589248	0.0132965	3.69103×10^8
0.00544147	0.013755	3.67351×10^8
0.00497473	0.0142135	3.65578×10^8
0.00449214	0.014672	3.63788×10^8
0.00399353	0.0151305	3.61982×10^8
0.00347867	0.015589	3.60152×10^8
0.00294729	0.0160475	3.58302×10^8
0.00239909	0.016506	3.5643×10^8
0.00183368	0.0169645	3.54536×10^8
0.00125063	0.017423	3.52617×10^8
0.000649427	0.0178815	3.50672×10^8
0.0000295	0.01834	3.48699×10^8

Tabla A.1: Valor de D_6 para valores de masas sobre la curva $D_4 = 0$ para L_3 en la región I.

m_1	m_2	D_6
0.00529332	8.3767375×10^{-6}	8.8695×10^8
0.00509567	0.0000127839	7.03364×10^8
0.00489802	0.000019281	5.91816×10^8
0.00470037	0.000028585	5.22414×10^8
0.00450272	0.0000414228	4.78007×10^8
0.00430506	0.0000584937	4.48636×10^8
0.00410741	0.0000804913	4.28714×10^8
0.00390976	0.000108086	4.14874×10^8
0.00371211	0.000141932	4.05038×10^8
0.00351445	0.000182677	3.97865×10^8
0.0033168	0.000230988	3.92529×10^8
0.00311915	0.000287581	3.88542×10^8
0.0029215	0.000353201	3.85503×10^8
0.00272384	0.000428685	3.83181×10^8
0.00252619	0.000514964	3.81391×10^8
0.00232854	0.000613127	3.80015×10^8
0.00213089	0.000724462	3.78967×10^8
0.00193324	0.000850544	3.78184×10^8
0.00173558	0.000993354	3.7764×10^8
0.00153793	0.00115545	3.77308×10^8
0.00134028	0.00134028	3.77189×10^8
0.00134028	0.00134028	3.77189×10^8
0.00115545	0.00153793	3.77308×10^8
0.000993354	0.00173558	3.7764×10^8
0.000850544	0.00193324	3.78184×10^8
0.000724462	0.00213089	3.78967×10^8
0.000613127	0.00232854	3.80015×10^8
0.000514964	0.00252619	3.81391×10^8
0.000428685	0.00272384	3.83181×10^8
0.000353201	0.0029215	3.85503×10^8
0.000287581	0.00311915	3.88542×10^8
0.000230988	0.0033168	3.92529×10^8
0.000182677	0.00351445	3.97865×10^8
0.000141932	0.00371211	4.05038×10^8
0.000108086	0.00390976	4.14874×10^8
0.0000804913	0.00410741	4.28714×10^8
0.0000584937	0.00430506	4.48636×10^8
0.0000414228	0.00450272	4.78007×10^8
0.000028585	0.00470037	5.22414×10^8
0.000019281	0.00489802	5.91816×10^8
0.0000127839	0.00509567	7.03364×10^8
8.3767375×10^{-6}	0.00529332	8.8695×10^8

Tabla A.2: Valor de D_6 para valores de masas sobre la curva $D_4 = 0$ para L_5 en la región I.

m_1	m_2	D_6
1×10^{-7}	0.00724696	2.77225×10^{11}
0.000458598	0.00940786	4.51043×10^8
0.000917095	0.0101694	4.31477×10^8
0.00137559	0.0106287	4.2367×10^8
0.00183409	0.0109278	4.18081×10^8
0.00229259	0.0111237	4.13866×10^8
0.00275109	0.0112449	4.10653×10^8
0.00320958	0.0113075	4.07976×10^8
0.00366808	0.011322	4.05623×10^8
0.00412658	0.0112959	4.03503×10^8
0.00458508	0.0112343	4.01515×10^8
0.00504357	0.0111413	3.99626×10^8
0.00550207	0.0110199	3.9781×10^8
0.00596057	0.0108725	3.96047×10^8
0.00641907	0.0107012	3.94329×10^8
0.00687756	0.0105076	3.92652×10^8
0.00733606	0.0102927	3.90942×10^8
0.00779456	0.0100579	3.89301×10^8
0.00825305	0.00980395	3.87632×10^8
0.00871155	0.00953161	3.85974×10^8
0.00917005	0.00924153	3.84319×10^8
0.00962855	0.00893423	3.82662×10^8
0.010087	0.00861013	3.81002×10^8
0.0105455	0.00826958	3.79336×10^8
0.011004	0.00791287	3.77661×10^8
0.0114625	0.0075402	3.75975×10^8
0.011921	0.00715174	3.74277×10^8
0.0123795	0.00674761	3.72567×10^8
0.012838	0.00632785	3.70842×10^8
0.0132965	0.00589248	3.69103×10^8
0.013755	0.00544147	3.67351×10^8
0.0142135	0.00497473	3.65578×10^8
0.014672	0.00449214	3.63788×10^8
0.0151305	0.00399353	3.61982×10^8
0.015589	0.00347867	3.60152×10^8
0.0160475	0.00294729	3.58302×10^8
0.016506	0.00239909	3.5643×10^8
0.0169645	0.00183368	3.54536×10^8
0.017423	0.00125063	3.52617×10^8
0.0178815	0.000649427	3.50672×10^8
0.01834	0.0000295	3.48699×10^8

Tabla A.3: Valor de D_6 para valores de masas sobre la curva $D_4 = 0$ para L_6 en la región I.

m_1	m_2	D_6
0.995833	0.0000835	4.26761×10^8
0.99635	0.000196225	3.93773×10^8
0.99664	0.00030895	3.86935×10^8
0.996837	0.000421675	3.83352×10^8
0.996981	0.0005344	3.81026×10^8
0.997087	0.000647125	3.79625×10^8
0.997167	0.00075985	3.78712×10^8
0.997226	0.000872575	3.78072×10^8
0.997269	0.0009853	3.77661×10^8
0.997297	0.00109803	3.77396×10^8
0.997297	0.00109803	3.77396×10^8
0.997313	0.00121075	3.77242×10^8
0.997319	0.00132348	3.77191×10^8
0.997316	0.0014362	3.77221×10^8
0.997305	0.00154893	3.77319×10^8
0.997287	0.00166165	3.77494×10^8
0.997262	0.00177438	3.77735×10^8
0.997231	0.0018871	3.78041×10^8
0.997194	0.00199983	3.78425×10^8
0.997152	0.00211255	3.78885×10^8
0.997105	0.00222528	3.79432×10^8
0.997054	0.002338	3.80075×10^8
0.996998	0.00245072	3.80826×10^8
0.996939	0.00256345	3.81693×10^8
0.996875	0.00267618	3.82711×10^8
0.996808	0.0027889	3.83883×10^8
0.996738	0.00290163	3.85247×10^8
0.996664	0.00301435	3.86836×10^8
0.996588	0.00312707	3.88672×10^8
0.996508	0.0032398	3.90845×10^8
0.996426	0.00335253	3.93367×10^8
0.996341	0.00346525	3.96352×10^8
0.996253	0.00357798	3.9991×10^8
0.996163	0.0036907	4.04118×10^8
0.996071	0.00380343	4.09164×10^8
0.995977	0.00391615	4.15244×10^8
0.99588	0.00402887	4.22618×10^8
0.995782	0.0041416	4.31635×10^8
0.995682	0.00425433	4.42747×10^8
0.99558	0.00436705	4.56539×10^8
0.995477	0.00447978	4.73833×10^8

Tabla A.4: Valor de D_6 para valores de masas sobre la curva $D_4 = 0$ para L_3 en la región III.

m_1	m_2	D_6
0.9919	0.000081068	5.6809×10^8
0.9899	0.000533041	4.46524×10^8
0.988765	0.000985015	4.29286×10^8
0.987886	0.00143699	4.23138×10^8
0.987156	0.00188896	4.17277×10^8
0.986519	0.00234093	4.13538×10^8
0.985954	0.00279291	4.10507×10^8
0.985445	0.00324488	4.07847×10^8
0.984982	0.00369685	4.05501×10^8
0.984557	0.00414883	4.03416×10^8
0.984168	0.0046008	4.01465×10^8
0.983808	0.00505277	3.99596×10^8
0.983476	0.00550475	3.97796×10^8
0.983169	0.00595672	3.96061×10^8
0.982886	0.00640869	3.94365×10^8
0.982624	0.00686067	3.92689×10^8
0.982383	0.00731264	3.91028×10^8
0.982162	0.00776461	3.89389×10^8
0.981959	0.00821659	3.87757×10^8
0.981774	0.00866856	3.86126×10^8
0.981606	0.00912053	3.84496×10^8
0.981455	0.00957251	3.82866×10^8
0.98132	0.0100245	3.81231×10^8
0.981202	0.0104765	3.79588×10^8
0.981099	0.0109284	3.77937×10^8
0.981011	0.0113804	3.76277×10^8
0.98094	0.0118324	3.74606×10^8
0.980883	0.0122843	3.72923×10^8
0.980841	0.0127363	3.71227×10^8
0.980815	0.0131883	3.69517×10^8
0.980804	0.0136403	3.67793×10^8
0.980808	0.0140922	3.66051×10^8
0.980828	0.0145442	3.64288×10^8
0.980863	0.0149962	3.62511×10^8
0.980913	0.0154482	3.60715×10^8
0.98098	0.0159001	3.58899×10^8
0.981063	0.0163521	3.5706×10^8
0.981162	0.0168041	3.55202×10^8
0.981279	0.0172561	3.53315×10^8
0.981413	0.017708	3.51402×10^8

Tabla A.5: Valor de D_6 para valores de masas sobre la curva $D_4 = 0$ para el equilibrio L_5 en la región III.

m_1	m_2	D_6
0.98148	0.0006063	3.50534×10^8
0.981236	0.00166558	3.53979×10^8
0.98104	0.00272485	3.57537×10^8
0.980897	0.00378413	3.61233×10^8
0.980817	0.0048434	3.65086×10^8
0.980811	0.00590268	3.69149×10^8
0.980899	0.00696195	3.73474×10^8
0.981112	0.00802122	3.78186×10^8
0.981506	0.0090805	3.83438×10^8
0.981506	0.0090805	3.83438×10^8
0.981834	0.00964934	3.8661×10^8
0.982162	0.0100774	3.89891×10^8
0.98249	0.0104038	3.92081×10^8
0.982818	0.0106627	3.94653×10^8
0.983146	0.0108619	3.96111×10^8
0.983474	0.0110186	3.97943×10^8
0.983802	0.011137	3.99545×10^8
0.98413	0.0112237	4.01312×10^8
0.984457	0.0112813	4.0292×10^8
0.984785	0.0113135	4.04558×10^8
0.985113	0.0113226	4.06155×10^8
0.985441	0.0113104	4.07764×10^8
0.985769	0.0112788	4.09413×10^8
0.986097	0.0112288	4.11073×10^8
0.986425	0.0111618	4.12834×10^8
0.986753	0.0110785	4.14647×10^8
0.987081	0.0109798	4.166×10^8
0.987409	0.0108662	4.18685×10^8
0.987737	0.0107385	4.20964×10^8
0.988065	0.010597	4.23482×10^8
0.988393	0.0104421	4.26293×10^8
0.988721	0.0102742	4.29515×10^8
0.989049	0.0100936	4.33224×10^8
0.989377	0.00990048	4.37602×10^8
0.989704	0.00969508	4.42847×10^8
0.990032	0.0094776	4.49295×10^8
0.99036	0.00924824	4.57431×10^8
0.990688	0.00900717	4.68049×10^8
0.991016	0.00875462	4.82416×10^8
0.991344	0.00849083	5.02985×10^8
0.991672	0.00821619	5.34958×10^8
0.992	0.00793089	5.88328×10^8

Tabla A.6: Valor de D_6 para valores de masas sobre la curva $D_4 = 0$ para L_6 en la región III.

Apéndice B

Tablas del valor del coeficiente δ del hamiltoniano (5.17)

m_1	m_2	δ
0.0001	0.01021	15.74354
0.0007025	0.0124274	9.10008
0.001305	0.0133544	7.71785
0.0019075	0.0139217	6.98951
0.00251	0.014295	6.51003
0.0031125	0.0145393	6.15776
0.003715	0.0146906	5.88286
0.0043175	0.0147665	5.65697
0.00492	0.0147828	5.46719
0.0055225	0.0147437	5.30045
0.006125	0.0146584	5.15268
0.0067275	0.0145301	5.01838
0.00733	0.0143672	4.89745
0.0079325	0.0141736	4.78806
0.008535	0.0139513	4.68807
0.0091375	0.0137001	4.59472
0.00974	0.0134199	4.50599
0.0103425	0.0131091	4.41954
0.010945	0.0127718	4.33642
0.0115475	0.012419	4.26127
0.01215	0.0120437	4.18946
0.0127525	0.0116418	4.11816
0.013355	0.0112172	4.04883
0.0139575	0.0107721	3.98204
0.01456	0.01031	3.91891
0.0151625	0.00982758	3.85752
0.015765	0.00932279	3.79666
0.0163675	0.00879569	3.73621
0.01697	0.00824778	3.67665
0.0175725	0.00768224	3.61917
0.018175	0.00709889	3.5635
0.0187775	0.00649734	3.50937
0.01938	0.00587427	3.45541
0.0199825	0.00522907	3.4014
0.020585	0.00456144	3.34729
0.0211875	0.00387504	3.29446
0.02179	0.00317084	3.24324
0.0223925	0.00244054	3.1908
0.022995	0.00168634	3.13808
0.0235975	0.000919603	3.08892
0.0242	0.00012	3.03679

Tabla B.1: Valor del coeficiente δ para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva donde de resonancia 2:−1, para el equilibrio L_3 en la región I.

m_1	m_2	δ
0.0075	$5.0000000000001023 \times 10^{-8}$	167.813
0.00721289	$6.090815650499279 \times 10^{-7}$	70.9317
0.00692577	$3.5275601657193984 \times 10^{-6}$	38.7778
0.00663866	$9.648028410287975 \times 10^{-6}$	27.0555
0.00635154	0.0000196755	20.7212
0.00606443	0.0000347585	16.5945
0.00577731	0.0000565963	13.623
0.0054902	0.0000861457	11.3975
0.00520308	0.000124301	9.6642
0.00491597	0.000171899	8.26693
0.00462885	0.000229992	7.10513
0.00434174	0.00030185	6.10782
0.00405462	0.000386022	5.24408
0.00376751	0.000476426	4.48066
0.00348039	0.00058693	3.78114
0.00319328	0.000720334	3.13782
0.00290616	0.000875514	2.54224
0.00261905	0.00104552	1.97134
0.00233193	0.00122781	1.39799
0.00204482	0.00145833	0.90912
0.0017577	0.0017577	0.845279
0.0017577	0.0017577	0.845279
0.00145833	0.00204482	0.90912
0.00122781	0.00233193	1.39799
0.00104552	0.00261905	1.97134
0.000875514	0.00290616	2.54224
0.000720334	0.00319328	3.13782
0.00058693	0.00348039	3.78114
0.000476426	0.00376751	4.48066
0.000386022	0.00405462	5.24408
0.00030185	0.00434174	6.10782
0.000229992	0.00462885	7.10513
0.000171899	0.00491597	8.26693
0.000124301	0.00520308	9.6642
0.0000861457	0.0054902	11.3975
0.0000565963	0.00577731	13.623
0.0000347585	0.00606443	16.5945
0.0000196755	0.00635154	20.7212
$9.648028410287975 \times 10^{-6}$	0.00663866	27.0555
$6.090815650499279 \times 10^{-7}$	0.00692577	38.7778
$6.090815650499279 \times 10^{-7}$	0.00721289	70.9317
$5.0000000000001023 \times 10^{-8}$	0.0075	167.813

Tabla B.2: Valor del coeficiente δ para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva donde de resonancia 2:−1, para el equilibrio L_5 en la región I.

m_1	m_2	δ
0.01	0.00008	16.728
0.0124012	0.0006845	9.17898
0.013332	0.001289	7.73895
0.0139076	0.0018935	6.99946
0.0142959	0.002498	6.52432
0.0145387	0.0031025	6.16506
0.0146924	0.003707	5.88869
0.0147694	0.0043115	5.66154
0.014784	0.004916	5.46912
0.0147456	0.0055205	5.30214
0.0146608	0.006125	5.15427
0.0145347	0.0067295	5.02119
0.0143738	0.007334	4.90159
0.0141797	0.0079385	4.792
0.0139533	0.008543	4.6898
0.0136976	0.0091475	4.59429
0.0134147	0.009752	4.50465
0.0131059	0.0103565	4.41992
0.0127722	0.010961	4.33935
0.0124147	0.0115655	4.26247
0.0120341	0.01217	4.18875
0.0116314	0.0127745	4.1179
0.0112069	0.013379	4.04951
0.0107609	0.0139835	3.98319
0.0102943	0.014588	3.91888
0.009807	0.0151925	3.85628
0.0092994	0.015797	3.79521
0.00877163	0.0164015	3.73552
0.00822374	0.017006	3.67703
0.00765591	0.0176105	3.61966
0.00706807	0.018215	3.56328
0.00646014	0.0188195	3.50777
0.00583192	0.019424	3.453
0.00518335	0.0200285	3.39894
0.00451414	0.020633	3.34548
0.003824	0.0212375	3.29254
0.0031127	0.021842	3.2401
0.00237971	0.0224465	3.18805
0.00162448	0.023051	3.1363
0.000845457	0.0236555	3.08447
0.00001	0.02426	3.02249

Tabla B.3: Valor del coeficiente δ para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva donde de resonancia 2:−1, para el equilibrio L_6 en la región I..

m_1	m_2	δ
0.9929	1×10^{-6}	59.307
0.995003	0.000193475	7.78768
0.995562	0.00038595	5.2385
0.995902	0.000578425	3.87468
0.996123	0.0007709	2.95814
0.996271	0.000963375	2.27158
0.99637	0.00115585	1.72952
0.996435	0.00134833	1.29408
0.996472	0.0015408	0.979177
0.996485	0.00173328	0.842538
0.996478	0.00192575	0.919319
0.996478	0.00192575	0.919319
0.996453	0.00211823	1.1475
0.996415	0.0023107	1.44412
0.996363	0.00250318	1.778
0.996297	0.00269565	2.13858
0.996219	0.00288813	2.51564
0.996134	0.0030806	2.90628
0.996037	0.00327308	3.31752
0.995932	0.00346555	3.74877
0.995822	0.00365803	4.20585
0.995697	0.0038505	4.69151
0.995569	0.00404298	5.21376
0.995439	0.00423545	5.78813
0.995297	0.00442793	6.40597
0.995152	0.0046204	7.0942
0.994999	0.00481288	7.85005
0.994839	0.00500535	8.6813
0.994682	0.00519783	9.71792
0.994517	0.0053903	10.9068
0.994347	0.00558278	12.2553
0.994169	0.00577525	13.6947
0.993991	0.00596773	15.4658
0.993811	0.0061602	17.8916
0.993629	0.00635268	21.1907
0.993443	0.00654515	25.0784
0.993255	0.00673763	30.3757
0.993066	0.0069301	39.1004
0.992877	0.00712257	65.8453

Tabla B.4: Valor del coeficiente δ para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva donde de resonancia 2:–1, para el equilibrio L_3 en la región III.

m_1	m_2	δ
0.9916	0.0000021	51.6196
0.987166	0.000608798	9.46057
0.985537	0.0012155	7.8651
0.984324	0.00182219	7.07179
0.983312	0.00242889	6.57043
0.982445	0.00303559	6.20195
0.981684	0.00364229	5.91051
0.980994	0.00424898	5.6774
0.980364	0.00485568	5.48354
0.97979	0.00546238	5.31496
0.979263	0.00606908	5.16533
0.978779	0.00667577	5.03081
0.978332	0.00728247	4.90928
0.977916	0.00788917	4.79921
0.977533	0.00849587	4.69715
0.977179	0.00910256	4.60143
0.976855	0.00970926	4.51094
0.976558	0.010316	4.42494
0.976284	0.0109227	4.34377
0.976035	0.0115294	4.26638
0.975809	0.0121361	4.19208
0.975606	0.0127427	4.12051
0.975425	0.0133494	4.05171
0.975264	0.0139561	3.98544
0.975124	0.0145628	3.92103
0.975005	0.0151695	3.85825
0.974907	0.0157762	3.79701
0.97483	0.0163829	3.73705
0.974772	0.0169896	3.67836
0.974735	0.0175963	3.62086
0.974717	0.018203	3.5643
0.97472	0.0188097	3.50857
0.974744	0.0194164	3.45356
0.974788	0.0200231	3.39924
0.974853	0.0206298	3.34557
0.974939	0.0212365	3.29256
0.975045	0.0218432	3.24002
0.975174	0.0224499	3.18781
0.975326	0.0230566	3.13582
0.975501	0.0236633	3.08394
0.9757	0.02427	3.03215

Tabla B.5: Valor del coeficiente δ para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva donde de resonancia 2:−1, para el equilibrio L_5 en la región III.

m_1	m_2	δ
0.9748	0.008538	3.71018
0.975273	0.0108189	3.99191
0.975746	0.0119349	4.17008
0.976219	0.0126941	4.32017
0.976692	0.0132798	4.46707
0.977165	0.0137117	4.59992
0.977638	0.0140375	4.72527
0.978111	0.0142935	4.8529
0.978584	0.0144871	4.98152
0.979057	0.0146262	5.11135
0.97953	0.0147186	5.24377
0.980003	0.0147702	5.38033
0.980476	0.0147856	5.52261
0.980949	0.0147675	5.6712
0.981422	0.0147188	5.82774
0.981895	0.0146421	5.99426
0.982368	0.0145387	6.17187
0.982841	0.0144099	6.36243
0.983314	0.0142598	6.57419
0.983786	0.0140847	6.80065
0.984259	0.01387	7.00234
0.984732	0.0136186	7.17055
0.985205	0.0133603	7.38764
0.985678	0.0131189	7.76401
0.986151	0.0128881	8.36816
0.986624	0.0125888	8.82243
0.987097	0.0122651	9.30898
0.98757	0.0119365	10.0195
0.988043	0.0115772	10.7368
0.988516	0.0112035	11.6682
0.988989	0.010809	12.7388
0.989462	0.01041	14.6244
0.989935	0.00998912	17.0847
0.990408	0.00954805	19.9088
0.990881	0.00909586	23.8428
0.991354	0.00862807	24.3998
0.991827	0.00817284	129.204
0.9923	0.0077	185235.

Tabla B.6: Valor del coeficiente δ para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva donde de resonancia 2:–1, para el equilibrio L_6 en la región III.

Apéndice C

Tablas de valores de ΔD obtenida a partir de la forma normal en presencia de la resonancia 3:−1

m_1	m_2	ΔD
0.004749	1×10^{-6}	-497549.84446
0.00690283	0.000337975	105130.26318
0.00749298	0.00067495	112367.9703
0.0078055	0.00101193	112087.18665
0.00806555	0.0013489	116444.02703
0.00821687	0.00168588	117600.18762
0.00830718	0.00202285	117131.49807
0.00835679	0.00235983	116474.61302
0.00837102	0.0026968	115873.6865
0.00835409	0.00303378	115388.27083
0.00830937	0.00337075	115037.99265
0.00824282	0.00370773	114621.90699
0.00815488	0.0040447	114249.05083
0.00804695	0.00438168	113938.7487
0.00792167	0.00471865	113614.09683
0.00777999	0.00505563	113288.0585
0.00762244	0.0053926	112983.39931
0.00745026	0.00572958	112673.7315
0.00726386	0.00606655	112369.46109
0.0070639	0.00640353	112066.94932
0.00685078	0.0067405	111767.94701
0.00662487	0.00707748	111469.07815
0.00638649	0.00741445	111173.1255
0.00613594	0.00775143	110876.72169
0.00587337	0.0080884	110580.57645
0.00559894	0.00842538	110284.59636
0.00531284	0.00876235	109984.1457
0.00501502	0.00909933	109686.99715
0.00470559	0.0094363	109386.07872
0.00438462	0.00977328	109081.45011
0.00405193	0.0101103	108777.81101
0.00370751	0.0104472	108470.11925
0.00335122	0.0107842	108162.06324
0.00298295	0.0111212	107851.02304
0.00260258	0.0114582	107535.37113
0.0022098	0.0117951	107218.54627
0.00180452	0.0121321	106892.28786
0.00138617	0.0124691	106568.78585
0.000954384	0.0128061	106243.4266
0.000506532	0.013143	105982.29598
0.00004	0.01348	105836.11407

Tabla C.1: Valores de ΔD en presencia de la resonancia 3:-1, para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:-1 para L_3 en la región I.

m_1	m_2	ΔD
0.00425	6.1×10^{-8}	-2.82772×10^6
0.00408736	$5.767562864206779 \times 10^{-7}$	-621906.96301
0.00392472	$2.268496390207037 \times 10^{-6}$	-157831.17478
0.00376208	$5.752696298145571 \times 10^{-6}$	-17149.05217
0.00359944	0.0000116675	42897.51511
0.0034368	0.0000204807	72934.48075
0.00327416	0.0000328123	90009.07415
0.00311152	0.0000496105	101125.86762
0.00294888	0.0000714332	108604.12188
0.00278624	0.0000988302	113771.19037
0.0026236	0.000132432	117346.3815
0.00246096	0.00017285	115374.01597
0.00229832	0.000220692	113989.74306
0.00213568	0.000274128	114421.20888
0.00197304	0.000336654	114829.51886
0.0018104	0.000412425	113828.6553
0.00164776	0.000501554	112231.49076
0.00148512	0.000610088	108546.60085
0.00132248	0.000719526	110036.56039
0.00115984	0.000826507	117385.60646
0.0009972	0.0009972	111262.82159
0.000826507	0.00115984	117385.60646
0.000719526	0.00132248	110036.56039
0.000610088	0.00148512	108546.60085
0.000501554	0.00164776	112231.49076
0.000412425	0.0018104	113828.6553
0.000336654	0.00197304	114829.51886
0.000274128	0.00213568	114421.20888
0.000220692	0.00229832	113989.74306
0.00017285	0.00246096	115374.01597
0.000132432	0.0026236	117346.3815
0.0000988302	0.00278624	113771.19037
0.0000714332	0.00294888	108604.12188
0.0000496105	0.00311152	101125.86762
0.0000328123	0.00327416	90009.07415
0.0000204807	0.0034368	72934.48075
0.0000116675	0.00359944	42897.51511
$5.752696298145571 \times 10^{-6}$	0.00376208	-17149.05217
$2.268496390207037 \times 10^{-6}$	0.00392472	-157831.17478
$5.767562864206779 \times 10^{-7}$	0.00408736	-621906.96301
6.1×10^{-8}	0.00425	-2.82772×10^6

Tabla C.2: Valores de ΔD en presencia de la resonancia 3:−1, para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:−1 para L_5 en la región I.

m_1	m_2	ΔD
1×10^{-6}	0.004749	- 497549.84446
0.000337975	0.00690283	105130.26318
0.00067495	0.00749298	112367.9703
0.00101193	0.0078055	112087.18665
0.0013489	0.00806555	116444.02703
0.00168588	0.00821687	117600.18762
0.00202285	0.00830718	117131.49807
0.00235983	0.00835679	116474.61302
0.0026968	0.00837102	115873.6865
0.00303378	0.00835409	115388.27083
0.00337075	0.00830937	115038.99265
0.00370773	0.00824282	114620.90699
0.0040447	0.00815488	114249.05083
0.00438168	0.00804695	113938.7487
0.00471865	0.00792167	113614.09683
0.00505563	0.00777999	113288.0585
0.0053926	0.00762244	112983.39931
0.00572958	0.00745026	112672.7315
0.00606655	0.00726386	112369.46109
0.00640353	0.0070639	112066.94932
0.0067405	0.00685078	111767.94701
0.00707748	0.00662487	111469.07815
0.00741445	0.00638649	111173.1255
0.00775143	0.00613594	110876.72169
0.0080884	0.00587337	110580.57645
0.00842538	0.00559894	110284.59636
0.00876235	0.00531284	109984.1457
0.00909933	0.00501502	109686.99715
0.0094363	0.00470559	109386.07872
0.00977328	0.00438462	109081.45011
0.0101103	0.00405193	108777.81101
0.0104472	0.00370751	108470.11925
0.0107842	0.00335122	108162.06324
0.0111212	0.00298295	107851.02304
0.0114582	0.00260258	107535.37113
0.0117951	0.0022098	107218.54627
0.0121321	0.00180452	106892.28786
0.0124691	0.00138617	106568.78585
0.0128061	0.000954384	106243.4266
0.013143	0.000506532	105982.29598
0.01348	0.00004	105836.11407

Tabla C.3: Valores de ΔD en presencia de la resonancia 3:−1, para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:−1 para L_6 en la región I.

m_1	m_2	ΔD
0.99596	1×10^{-6}	-381945.86143
0.997203	0.000110975	108422.66357
0.997506	0.00022095	117123.54841
0.997676	0.000330925	113590.18875
0.9978	0.0004409	112651.07314
0.997883	0.000550875	111608.84395
0.997938	0.00066085	110558.28935
0.997978	0.000770825	111255.10879
0.998002	0.0008808	112003.29708
0.998004	0.000990775	110890.00094
0.997997	0.00110075	110270.09221
0.997984	0.00121072	110531.84366
0.99796	0.0013207	110497.24602
0.997929	0.00143067	110796.11114
0.997892	0.00154065	111422.33543
0.997849	0.00165062	112228.05755
0.9978	0.0017606	113062.24414
0.997746	0.00187057	113869.88607
0.997686	0.00198055	114799.82036
0.997616	0.00209052	113219.94315
0.997545	0.0022005	112511.13031
0.997473	0.00231047	114257.29904
0.997397	0.00242045	116314.49677
0.997317	0.00253042	117321.9278
0.997232	0.0026404	116225.89195
0.997146	0.00275037	112910.19822
0.997057	0.00286035	107402.69177
0.996966	0.00297032	101485.95978
0.996868	0.0030803	100060.60145
0.996769	0.00319027	96654.43671
0.996673	0.00330025	74618.07731
0.996575	0.00341022	36751.38817
0.99647	0.0035202	9648.85036
0.99636	0.00363017	30956.14399
0.996253	0.00374015	-2278.89771
0.996147	0.00385012	-123695.12512
0.996038	0.0039601	-252818.92136
0.995929	0.00407007	-470952.9558
0.99582	0.00418005	-1.10594×10^6
0.99571	0.00429002	-1.32975×10^7
0.9956	0.0044	-4.40774×10^9

Tabla C.4: Valores de ΔD en presencia de la resonancia 3:-1, para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:-1 para L_3 en la región III.

m_1	m_2	ΔD
0.9955	1×10^{-7}	$- 2.25974 \times 10^6$
0.992737	0.000338848	107036.65208
0.991822	0.000677595	112776.80507
0.991138	0.00101634	115241.69083
0.990574	0.00135509	116646.30607
0.990087	0.00169384	117576.75186
0.989657	0.00203259	116991.0491
0.98927	0.00237133	116402.67966
0.98892	0.00271008	115903.89633
0.9886	0.00304883	115443.96043
0.988306	0.00338758	115024.21082
0.988036	0.00372632	114646.91016
0.987787	0.00406507	114276.94081
0.987557	0.00440382	113934.35296
0.987345	0.00474257	113594.29931
0.98715	0.00508131	113268.60037
0.986971	0.00542006	112961.37224
0.986807	0.00575881	112666.18086
0.986657	0.00609756	112367.76035
0.98652	0.0064363	112044.92993
0.986395	0.00677505	111634.25035
0.986282	0.0071138	111232.41553
0.986183	0.00745255	110883.90285
0.986098	0.00779129	110613.6568
0.986028	0.00813004	110443.37988
0.985975	0.00846879	110509.39052
0.985937	0.00880754	110707.22039
0.985911	0.00914628	110854.47504
0.985891	0.00948503	110759.81612
0.985874	0.00982378	110301.33796
0.985865	0.0101625	109724.06293
0.985866	0.0105013	109083.34537
0.985878	0.01084	108429.83123
0.985903	0.0111788	107820.40949
0.985947	0.0115175	107440.90765
0.986005	0.0118563	107097.71031
0.986076	0.012195	106781.56864
0.986161	0.0125338	106481.71693
0.98626	0.0128725	106186.95402
0.986373	0.0132113	105885.7217
0.9865	0.01355	105565.24567

Tabla C.5: Valores de ΔD en presencia de la resonancia 3:−1, para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:−1 para el equilibrio L_5 en la región III.

m_1	m_2	ΔD
0.98655	5×10^{-6}	108168.21419
0.986389	0.0003396	105656.04967
0.986304	0.0006742	105944.23899
0.986264	0.0010088	107745.26382
0.986236	0.0013434	109765.01716
0.986186	0.001678	110691.87367
0.986082	0.0020126	109208.56189
0.985974	0.0023472	107318.51459
0.985929	0.0026818	07578.96984
0.985892	0.0030164	107856.91231
0.985864	0.003351	108149.18522
0.985846	0.0036856	108445.5415
0.985837	0.0040202	108727.08251
0.985841	0.0043548	109039.98658
0.985857	0.0046894	109354.13192
0.985886	0.005024	109653.10971
0.985931	0.0053586	110003.37945
0.985996	0.0056932	110407.28441
0.986089	0.0060278	111066.35059
0.986195	0.0063624	111318.63301
0.986333	0.006697	111629.96443
0.986516	0.0070316	112129.92014
0.986761	0.0073662	112868.4926
0.987073	0.0077008	113217.04889
0.987583	0.0080354	114602.2158
0.989	0.00837	116037.06459
0.9887	0.00836	115622.32252
0.99041	0.00811595	115834.30658
0.991067	0.00787191	114710.33377
0.991585	0.00762786	113629.75647
0.992011	0.00738381	110221.85854
0.992416	0.00713977	109232.13661
0.992764	0.00689572	104005.44303
0.993106	0.00665167	101433.89105
0.993416	0.00640763	94663.21356
0.993714	0.00616358	87313.64509
0.994001	0.00591953	77517.38871
0.994272	0.00567549	61581.87012
0.994536	0.00543144	38959.0296
0.994792	0.00518739	6879.37219
0.995049	0.00494335	- 69771.59562
0.9953	0.0046993	- 657307.48497

Tabla C.6: Valores de ΔD en presencia de la resonancia 3:−1, para varios valores de las masas m_1 y m_2 sobre la curva de resonancia 3:−1 para L_6 en la región III.

Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Second edition, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.
- [2] A. Albouy. Recherches sur le probleme des n corps. *CR Acad. Sci. Paris*, 320:217–220, 1995.
- [3] M. Alvarez-Ramírez and E. Barrabes. Transport orbits in an equilateral restricted four-body problem. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 121:191–210, 02 2014.
- [4] M. Alvarez-Ramírez, J. E. F. Skea, and T. J. Stuchi. Nonlinear stability analysis in a equilateral restricted four-body problem. *Astrophys Space Sci.*, 358:3, 1 2015.
- [5] M. Alvarez-Ramírez and C. Vidal. Dynamical aspects of an equilateral restricted four-body problem. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 181360:1–23, 2009.
- [6] J.-P. Amiet and S. Weigert. Commensurate harmonic oscillators: Classical symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 43(8):4110–4126, 2002.
- [7] R. F. Arenstorf. Central configurations of four bodies with one inferior mass. *Celestial Mech.*, 28(1-2):9–15, 1982.
- [8] Judith M Arms, Richard H Cushman, and Mark J Gotay. A universal reduction procedure for hamiltonian group actions. In *The geometry of Hamiltonian systems*, pages 33–51. Springer, 1991.
- [9] V. I. Arnold. Proof of a theorem of an kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian. *Collected Works: Representations of Functions, Celestial Mechanics and KAM Theory, 1957-1965*, pages 267–294, 2009.

- [10] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, volume 3. Springer Science, 2007.
- [11] A. Baltagiannis and K. Papadakis. Periodic solutions in the sun–jupiter–trojan asteroid–spacecraft system. *Planetary and Space Science*, 75:148–157, 01 2013.
- [12] A. N. Baltagiannis and K. E. Papadakis. Equilibrium points and their stability in the restricted four-body problem. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 21(8):2179–2193, 2011.
- [13] J. F. Barros and E. S. G. Leandro. The set of degenerate central configurations in the planar restricted four-body problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(2):634–661, 2011.
- [14] Jean F Barros and Eduardo SG Leandro. Bifurcations and enumeration of classes of relative equilibria in the planar restricted four-body problem. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 46(2):1185–1203, 2014.
- [15] D.A. Budzko and A.N. Prokopenya. *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2011.*, volume 6885 of *Lecture Notes in Computer Science*, chapter On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem, pages 88–100. V. P. Gerdt, W. Koepf, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov (eds). Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [16] J. Burgos-García and J. Delgado. On the “blue sky catastrophe termination” in the restricted four-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117:113–136, 09 2012.
- [17] J. Burgos-García and J. Delgado. Periodic orbits in the restricted four-body problem with two citizen dick equal masses. *Astrophys Space Sci.*, 336:357–367, 05 2012.
- [18] Jaime Burgos-Garcia and Abimael Bengochea. Horseshoe orbits in the restricted four-body problem. *Astrophysics and Space Science*, 362(11):212, 2017.
- [19] Jaime Burgos-García, Alessandra Celletti, Catalin Gales, Marian Gidea, and Wai-Ting Lam. Hill four-body problem with oblate bodies: an application to the sun–jupiter–hektor–skamandrios system. *Journal of Nonlinear Science*, 30:2925–2970, 2020.
- [20] Jaime Burgos-García and Marian Gidea. Hill’s approximation in a restricted four-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 122:117–141, 2015.

- [21] H. Cabral, K. Meyer, and M. Field. Stability of equilibria and fixed points of conservative systems. *Nonlinearity*, 12:1351–1362, 09 1999.
- [22] R. H Cushman and L. M Bates. *Global aspects of classical integrable systems*, volume 94. Springer, 1997.
- [23] A. Deprit. Canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, 1:12–30, 03 1969.
- [24] G. L. Dirichlet. Über die stabilität des gleichgewichts. *J. Reine Angew. Math.*, 32:85–88, 1846.
- [25] H. S. Dumas, K. R. Meyer, J. F. Palacián, and P. Yanguas. Asymptotic stability estimates near an equilibrium point. *Journal of Differential Equations*, 263(2):1125–1139, 2017.
- [26] Jordi-Lluís Figueras, Warwick Tucker, and Piotr Zgliczynski. The number of relative equilibria in the pcr4bp. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, pages 1–51, 2022.
- [27] J. R. Gannaway. *Determination of all central configurations in the planar 4-body problem with one inferior mass*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1981. Thesis (Ph.D.)–Vanderbilt University.
- [28] M. Gaschea. Examen d’une classe d’équations différentielles et application à un cas particulier du problème des trois corps. *Compt. Rend.*, 16:393–394, 1843.
- [29] Marian Gidea and Melissa Burgos. Chaotic transfers in three-and four-body systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 328(3-4):360–366, 2003.
- [30] A. Giorgilli, A. Delshams, E. Fontich, L. Galgani, and C. Simó. Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three-body problem. *J. Differential Equations*, 77(1):167–198, 1989.
- [31] M. Hampton and R. Moeckel. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Inventiones Mathematicae*, 163(2):289–312, 2006.
- [32] Shane Kepley and JD Mireles James. Chaotic motions in the restricted four body problem via devaney’s saddle-focus homoclinic tangle theorem. *Journal of Differential Equations*, 266(4):1709–1755, 2019.

- [33] Julianne L Kulevich, Gareth E Roberts, and Christopher J Smith. Finiteness in the planar restricted four-body problem. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 8:357–370, 2009.
- [34] E. S. G. Leandro. On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *J. Differential Equations*, 226(1):323–351, 2006.
- [35] R. Lehmann-Filhés. Ueber zwei fälle des vielkörperproblems. *Astronomische Nachrichten*, 127(9):137–143, 1891.
- [36] Eugene Lerman, Richard Montgomery, and Reyer Sjamaar. Examples of singular reduction. *Symplectic geometry*, 192:127–155, 1993.
- [37] L. M. Lerman and A. P. Markova. On stability at the hamiltonian hopf bifurcation. *Regular and Chaotic Dynamics*, 14(1):148–162, 2009.
- [38] J. Llibre. Posiciones de equilibrio relativo del problema de 4 cuerpos. *Publicacions de la Secció de Matemàtiques*, pages 73–88, 1976.
- [39] A. P. Markeev. On the stability of a nonautonomous hamiltonian system with two degrees of freedom. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 33(3):550–557, jan 1969.
- [40] A. P. Markeev. *Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamic*. Nauka, Moscow (in Russian), 3a. edition, 1978.
- [41] K. R. Meyer and D. C. Offin. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Cham, third edition, 2017.
- [42] K. R. Meyer, J. F Palacián, and P. Yanguas. Geometric averaging of hamiltonian systems: periodic solutions, stability, and kam tori. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 10(3):817–856, 2011.
- [43] K. R. Meyer, J. F. Palacián, and P. Yanguas. Invariant tori in the lunar problem. *Publicacions Matemàtiques*, 58(S1):353–394, 2014.
- [44] K. R. Meyer, J. F. Palacián, and P. Yanguas. Stability of a hamiltonian system in a limiting case. *Regular and Chaotic Dynamics*, 14(1):24–35, 2012.
- [45] Kenneth R Meyer, Jesús F Palacián, and Patricia Yanguas. Singular reduction of resonant hamiltonians. *Nonlinearity*, 31(6):2854, may 2018.

- [46] Jason D Mireles James and Maxime Murray. Chebyshev–taylor parameterization of stable/unstable manifolds for periodic orbits: implementation and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(14):1730050, 2017.
- [47] R. Moeckel. Central configurations. In *Central configurations, periodic orbits, and Hamiltonian systems*, Adv. Courses Math. CRM Barcelona, pages 105–167. Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.
- [48] J. Möser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, pages 1–20, 1962.
- [49] J. Moser. Regularization of kepler’s problem and the averaging method on a manifold. *Communications on pure and applied mathematics*, 23(4):609–636, 1970.
- [50] F. R. Moulton. The straight line solutions of the problem of n bodies. *The Annals of Mathematics*, 12(1):1–17, 1910.
- [51] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. University of Cambridge, 1687.
- [52] P. J. Olver. *Classical invariant theory*, volume 44 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [53] KE Papadakis. Families of asymmetric periodic solutions in the restricted four-body problem. *Astrophysics and Space Science*, 361:1–15, 2016.
- [54] P. Pedersen. Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, 21(6):80, 1944.
- [55] P. Pedersen. Stabilitätsuntersuchungen im restringierten Vierkörperproblem. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, 26(16):37, 1952.
- [56] L. M. Perko and E. L. Walter. Regular polygon solutions of the n -body problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(2):301–309, 1985.
- [57] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume I-III. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [58] G. Reeb. *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, par Georges Reeb*. Palais des académies, 1952.
- [59] E. J. Routh. On laplace’s three particles, with a supplement on the stability of steady motion. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 6:86–97, 1874/75.

- [60] Z. She and X. Cheng. The existence of a smale horseshoe in a planar circular restricted four-body problem. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 118(2):115–127, 2014.
- [61] C. Simó. Relative equilibrium solutions in the four-body problem. *Celestial Mech.*, 18(2):165–184, 1978.
- [62] Reyer Sjamaar and Eugene Lerman. Stratified symplectic spaces and reduction. *Annals of Mathematics*, pages 375–422, 1991.
- [63] S. Smale. Topology and mechanics *i*. *Invent. Math.*, 10:305–331, 1970.
- [64] S. Smale. Topology and mechanics *ii*. the planar n -body problem. *Invent. Math.*, 11:45–64, 1970.
- [65] S. Smale. Mathematical problems for the next century. In *Mathematics: frontiers and perspectives*, pages 271–294. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [66] A.G. Sokol’skii. On stability of an autonomous hamiltonian system with two degrees of freedom under first-order resonance. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 41(1):20–28, 1977.
- [67] A. G. Sokol’skii. Proof of the stability of lagrangian solutions for a critical mass ratio. *Pis’ma Astron. Zh*, 4:148–152, 1978.
- [68] V. Szebehely. *Theory of Orbits*. Academic Press Inc, New York, 1967.
- [69] D.V. Treshchev. Loss of stability in hamiltonian systems that depend on parameters. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 56(4):492–500, 1992.
- [70] Aurel Wintner. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Courier Corporation, 2014.
- [71] P. Yanguas, J. F. Palacián, K. R. Meyer, and H. S. Dumas. Periodic solutions in hamiltonian systems, averaging, and the lunar problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 7(2):311–340, 2008.
- [72] J. A. Zepeda Ramírez, M. Alvarez-Ramírez, and A. García. Nonlinear stability of equilibrium points in the planar equilateral restricted mass-unequal four-body problem. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 31(11):2130031, 2021.

- [73] J. A. Zepeda Ramírez, M. Alvarez-Ramírez, and A. García. A note on the nonlinear stability of equilibrium points in the planar equilateral restricted mass-unequal four-body problem. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 32(2):Paper No. 2250029, 6, 2022.
- [74] E. E. Zotos. Exploring the location and linear stability of the equilibrium points in the equilateral restricted four-body problem. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 30:2050155, 14, 2020.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00060

Matrícula: 2133803131

Un estudio dinámico del problema restringido equilátero de cuatro cuerpos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 27 del mes de septiembre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. EDUARDO PIÑA GARZA
- DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ
- DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ
- DR. RENATO CARLOS CALLEJA CASTILLO
- DRA. MARTHA ALVAREZ RAMIREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: JOSE ALEJANDRO ZEPEDA RAMIREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



JOSE ALEJANDRO ZEPEDA RAMIREZ
ALUMNO

REVISÓ

MITRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. EDUARDO PIÑA GARZA

VOCAL

DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ

VOCAL

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL

DR. RENATO CARLOS CALLEJA CASTILLO

SECRETARIA

DRA. MARTHA ALVAREZ RAMIREZ

