

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

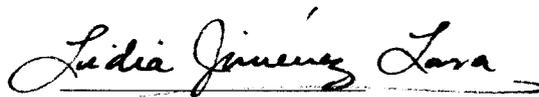
MAESTRÍA EN FÍSICA

**ÓRBITAS PERIÓDICAS Y BIFURCACIONES EN EL
PROBLEMA DE SITNIKOV**

Autor: Adolfo Horacio Escalona Buendía

Octubre 1998

Asesor:

A handwritten signature in black ink that reads "Lidia Jiménez Lara". The signature is written in a cursive style with a long horizontal flourish extending to the right.

—Dra. Lidia Jiménez Lara

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. Lidia Jiménez.
Por su guía y su paciencia infinita.

Al Dr. Eduardo Piña.
Por sus sugerencias que fueron de gran ayuda.

A mis padres: Pépe e Irma.
Por su apoyo incondicional.

AHEB, septiembre de 1998

Órbitas Periódicas y Bifurcaciones en el Problema de Sitnikov

Adolfo H. Escalona Buendía

septiembre 1998

Índice General

1	MAPEOS DE POINCARÉ	3
1.1	Sistemas integrables	3
1.2	Superficies de Sección	5
2	LÍNEAS DE SIMETRÍA	9
2.1	Sistemas reversibles	9
2.2	Definición	11
2.3	Puntos Periódicos	13
3	ESTABILIDAD	20
4	PROBLEMA DE SITNIKOV. INTRODUCCIÓN	25
4.1	Problema de Kepler	25
4.2	Ecuación de Kepler	30
4.3	Problema de Sitnikov. Definición	33
4.3.1	Antecedentes	35
4.3.2	Análisis del potencial	37
4.4	Caso integrable	40
5	PROBLEMA DE SITNIKOV. CASO GENERAL	45
5.1	Ecuaciones de Movimiento	45
5.2	Simetrías y planos invariantes	46
5.3	Líneas de simetría:	47
6	RESULTADOS	53
6.1	Caso integrable	53
6.1.1	Líneas Γ_2	58
6.1.2	Órbitas periódicas	64

6.1.3	Número máximo de órbitas periódicas	75
6.2	Excentricidades pequeñas	78
6.3	Bifurcaciones	83
6.3.1	Diagramas de bifurcaciones	88
6.4	Origen	96
6.5	Conclusiones	102

Capítulo 1

MAPEOS DE POINCARÉ

1.1 Sistemas integrables

Considérese un hamiltoniano con N grados de libertad

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N; t) \quad (1.1)$$

y sus respectivas ecuaciones de movimiento

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.2)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

La teoría de Hamilton-Jacobi establece que si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ constantes de movimiento independientes, es posible encontrar una transformación canónica a un nuevo sistema de coordenadas y momentos los cuales sean todos constantes. A continuación se describe el método para obtener dicha transformación, siguiendo el desarrollo presentado por Goldstein [1]: Sea un nuevo hamiltoniano idénticamente igual a cero

$$K = K(Q_1, Q_2, \dots, Q_N, P_1, P_2, \dots, P_N; t) = 0 \quad (1.4)$$

de modo que las ecuaciones de movimiento quedan escritas

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad (1.5)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad (1.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Con solución inmediata: $Q_i = \text{constante}$, $P_i = \text{constante}$. En particular, se puede especificar que los momentos sean precisamente las constantes de movimiento.

$$P_i = \alpha_i \quad (1.7)$$

$$Q_i = \beta_i \quad (1.8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

La transformación a este nuevo sistema de coordenadas es generada por una función

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_N, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N; t)$$

tal que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}; t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.9)$$

y las ecuaciones de transformación se escriben

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (1.10)$$

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (1.11)$$

Construida de esta manera, S genera una transformación canónica que de hecho es la solución del problema.

Si la función S es separable de manera que

$$S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N; t)$$

el problema se reduce a cuadraturas. Esta última condición no es necesaria, pero para fines prácticos el método es aplicable cuando la separación es posible.

1.2 Superficies de Sección

En general no se tienen todas las N constantes de movimiento. De hecho, la mayoría de los sistemas no pueden ser resueltos en forma exacta. La teoría de perturbaciones permite obtener soluciones aproximadas para sistemas que difieren ligeramente de sistemas integrables (ver Goldstein [1]); sin embargo, además de los problemas de convergencia de estas soluciones, su rango de validez está limitado a perturbaciones muy pequeñas. De manera que para casos más generales se requiere un análisis numérico.

Una técnica, propuesta originalmente por Poincaré, que permite un análisis cualitativo del comportamiento del sistema, consiste en utilizar una Superficie de Sección del espacio fase. La técnica es general, pero es particularmente útil para sistemas de dos grados de libertad. En esta sección se describe esta técnica como es presentada por M. Tabor [2].

Sea un sistema hamiltoniano conservativo de dos grados de libertad

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = E$$

el espacio fase es 4-dimensional y las órbitas del sistema están restringidas a las superficies de energía constante 3-dimensionales. Sea (\vec{r}_0, \vec{p}_0) un punto sobre alguna superficie $H = E_0$; si el sistema presenta movimiento acotado, se puede seleccionar una superficie, $y = y_0$ por tomar un ejemplo, sobre la cual todas las órbitas pasen repetidamente, de manera que se pueda trazar un mapa de los valores (x, p_x) en las intersecciones sucesivas. Sobre esta superficie de sección, en cada punto está representado completamente el estado del sistema, ya que $y = y_0$ y

$$p_y = \pm \sqrt{2m(E_0 - V(x, y_0)) - p_x^2}$$

tomandose usualmente el signo positivo como condición inicial.

Seleccionando una superficie de sección Σ , se define un mapeo de Poincaré como la transformación $M : \Sigma \rightarrow \Sigma$ que resulta de integrar las ecuaciones de movimiento, partiendo de puntos sobre esta superficie, hasta regresar a la misma.

La técnica de la superficie de sección puede utilizarse también para sistemas de un grado de libertad dependientes del tiempo, donde el espacio fase es 3-dimensional (q, p, t) , cuando la dependencia es periódica. Sea T el periodo del potencial, el mapa se obtiene tomando cortes estroboscópicos del plano (q, p) a tiempos nT , $n = 0, 1, 2, \dots$

Si el sistema es integrable existe una constante de movimiento, la cual queda determinada al momento de fijar condiciones iniciales y restringe las soluciones a

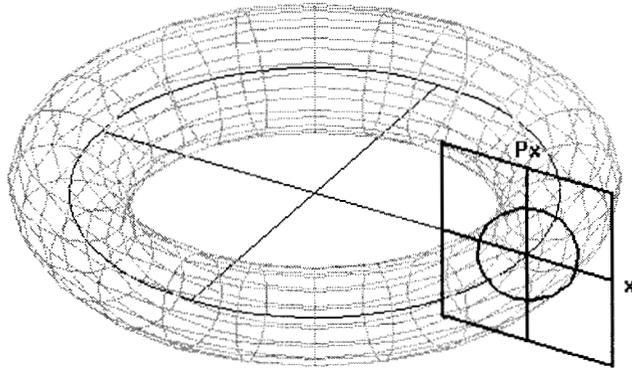


Figura 1.1: Superficie de sección de un sistema conservativo

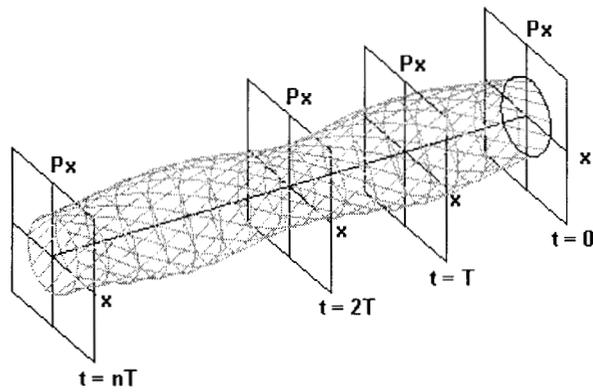


Figura 1.2: Superficie de sección de un sistema periódico en t

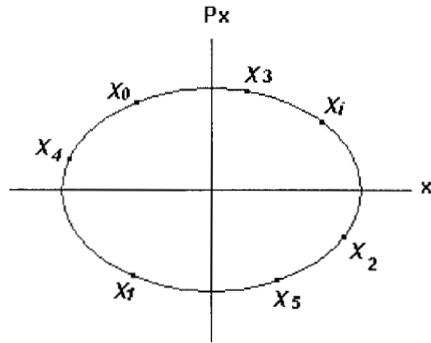


Figura 1.3: Órbita regular

moverse sobre una superficie bidimensional. Estas superficies definen una foliación del espacio fase e intersectan las superficies de sección en curvas suaves, las cuales son invariantes bajo el mapeo de Poincaré.

Al perturbarse el sistema se destruyen muchas de estas superficies, desapareciendo así la foliación del espacio fase, de manera que las trayectorias tienen libertad para explorar regiones más amplias. Sin embargo, el Teorema KAM establece que para perturbaciones suficientemente pequeñas, subsisten la mayoría de las superficies invariantes, llamadas superficies KAM. En el caso en consideración, estas superficies dividen el espacio fase en regiones aisladas, pero para sistemas con más grados de libertad se presenta la llamada "difusión de Arnold".

Sea Σ una superficie de sección, (x, p_x) por ejemplo, y sean $\vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n \in \Sigma$ las intersecciones sucesivas para alguna órbita con movimiento acotado, $\vec{X}_{i+1} = M\vec{X}_i$. Se pueden identificar los siguientes tipos de comportamiento:

Órbitas regulares. En el caso de que exista una constante de movimiento, aunque sea localmente, los puntos \vec{X}_i estarán distribuidos sobre una curva suave y cerrada. Si la órbita es periódica, sólo habrá un conjunto discreto de intersecciones; en caso contrario, las iteraciones sucesivas eventualmente llenarán la curva.

Órbitas caóticas. De no existir la constante de movimiento, los puntos \vec{X}_i estarán distribuidos de manera aparentemente aleatoria, abarcando un área determinada. Una órbita de este tipo con condiciones iniciales

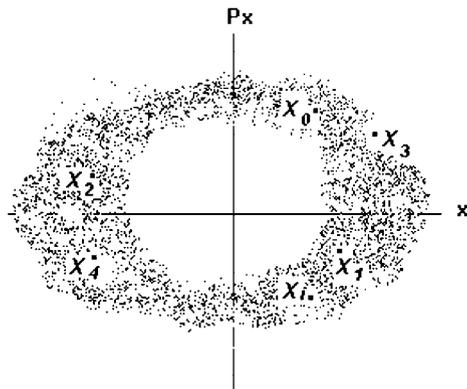


Figura 1.4: Órbita caótica

entre dos superficies KAM, permanecerá confinada en la región comprendida entre estas superficies, las iteraciones sucesivas eventualmente llenarán esta area.

Capítulo 2

LÍNEAS DE SIMETRÍA

En este capítulo se presenta el desarrollo de la técnica de las líneas de Simetría, de manera similar a como es presentado por E. Piña Garza y L. Jiménez Lara [3]. Los conceptos aquí presentados, junto con la notación, serán la herramienta principal en el análisis del problema a estudiar.

2.1 Sistemas reversibles

Sea un sistema en el que las ecuaciones de movimiento son invariantes ante la sustitución

$$\begin{aligned}t &\rightarrow -t \\ \vec{v} &\rightarrow -\vec{v}\end{aligned}$$

que es una reflexión en velocidades y en el tiempo. Tales sistemas son llamados reversibles. Sistemas en los que el hamiltoniano es cuadrático en las velocidades cumplen con esta propiedad.

Sea \vec{r}_0, \vec{v}_0 una condición inicial y \vec{r}_1, \vec{v}_1 el resultado de integrar las ecuaciones de movimiento al tiempo t . Si denotamos por T al operador de evolución temporal que realiza la transformación

$$T(\vec{r}_0, \vec{v}_0) \equiv (\vec{r}_1, \vec{v}_1)$$

la reversibilidad del sistema se escribe

$$T(\vec{r}_1, -\vec{v}_1) = (\vec{r}_0, -\vec{v}_0) \tag{2.1}$$

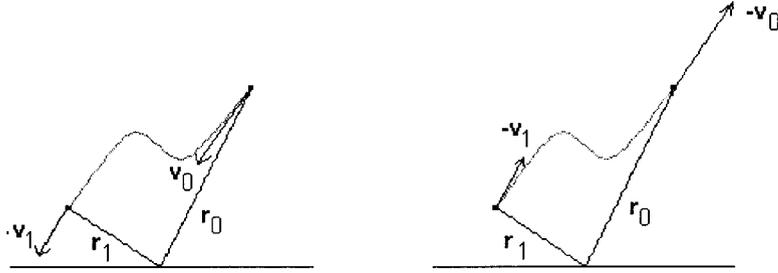


Figura 2.1: Un sistema reversible

Definiendo I_0 como la reflexión en las velocidades

$$I_0(\vec{r}, \vec{v}) \equiv (\vec{r}, -\vec{v})$$

de (2.1) puede escribirse:

$$TI_0(\vec{r}_1, \vec{v}_1) = (\vec{r}_0, -\vec{v}_0) \quad (2.2)$$

$$I_0TI_0(\vec{r}_1, \vec{v}_1) = I_0(\vec{r}_0, -\vec{v}_0) \quad (2.3)$$

$$I_0TI_0(\vec{r}_1, \vec{v}_1) = (\vec{r}_0, \vec{v}_0) \quad (2.4)$$

Pero $(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = T^{-1}(\vec{r}_1, \vec{v}_1)$; es decir que, para sistemas reversibles, se puede escribir:

$$T^{-1} = I_0TI_0 \quad (2.5)$$

Es inmediato verificar que I_0^2 es la identidad. Se define $I_1 \equiv TI_0$, entonces:

$$I_1^2 = (TI_0)(TI_0) = T(I_0TI_0) = TT^{-1} = 1$$

Las transformaciones que cumplen con la propiedad que su cuadrado sea la identidad se les llama involuciones. De manera que para sistemas reversibles, el operador de evolución temporal puede escribirse como el producto de dos involuciones

$$T = I_1 I_0 \quad (2.6)$$

Todo lo anterior es válido si el sistema es invariante ante la sustitución:

$$t \rightarrow -t$$

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$$

Hay muchos otros casos en que el mapeo de Poincaré puede factorizarse como producto de involuciones que no necesariamente son la inversión en el tiempo y las velocidades. El concepto de reversibilidad puede generalizarse a tales sistemas; en todo caso, implica la invariancia ante transformaciones de tipo reflexión sobre alguna coordenada del espacio fase y el tiempo.

2.2 Definición

Sea una superficie de sección Σ invariante bajo alguna involución I_0 :

$$\Sigma = I_0 \Sigma$$

Y Sea $M : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un mapeo de Poincaré. Por (2.5) la invariancia de las ecuaciones de movimiento ante la reflexión en los momentos y en el tiempo se expresa como

$$M^{-1} = I_0 M I_0$$

Definiendo $I_1 \equiv M I_0$, el mapeo de Poincaré puede expresarse como producto de dos involuciones

$$M = I_1 I_0$$

Definiendo $I_j \equiv M^j I_0$, es inmediato verificar que también ésta es una involución

$$I_j I_j = 1$$

De esta manera, se obtiene un grupo de transformaciones $\{M^k, I_j, 1\}$ del plano en el plano tal que, para $j, k \in \mathbb{Z}$:

$$M^k I_j = I_{k+j} \quad (2.7)$$

$$I_j I_k = M^{j-k} \quad (2.8)$$

$$I_j M^k = I_{j-k} \quad (2.9)$$

Se define la línea de simetría Γ_i como el conjunto de puntos en la superficie de sección invariantes bajo I_i .

$$\Gamma_i \equiv \{\vec{x} \in \Sigma \mid \vec{x} = I_i \vec{x}\}$$

Estas líneas de simetría están relacionadas entre si mediante las transformaciones M^j e I_j :

Sea $\vec{x} \in \Gamma_i$, por (2.7) y (2.9)

$$M^j \vec{x} = M^j I_i \vec{x} = I_{j+i} \vec{x} = I_{j+i} M^{-j} M^j \vec{x} \quad (2.10)$$

$$M^j \vec{x} = I_{2j+i} M^j \vec{x} \quad (2.11)$$

es decir:

$$M^j \Gamma_i \subseteq \Gamma_{2j+i} \quad (2.12)$$

Sea ahora $\vec{x} \in \Gamma_{2j+i}$, por (2.7) y (2.9):

$$\vec{x} = I_{2j+i} \vec{x} = M^j I_{j+i} \vec{x} \quad (2.13)$$

$$= M^j I_i M^{-j} \vec{x} \quad (2.14)$$

$$M^{-j} \vec{x} = I_i M^{-j} \vec{x} \quad (2.15)$$

es decir:

$$M^{-j} \Gamma_{2j+i} \subseteq \Gamma_i \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{2j+i} \subseteq M^j \Gamma_i \quad (2.17)$$

Esta ecuación junto con (2.12) implican

$$M^j \Gamma_i = \Gamma_{2j+i} \quad (2.18)$$

Por lo tanto, a partir de Γ_0 y Γ_1 se pueden obtener todas la líneas Γ_j con j positivo.

Por otro lado, sea $\vec{x} \in \Gamma_i$, por (2.7) y (2.8)

$$I_j \vec{x} = I_j I_i \vec{x} = M^{j-i} \vec{x} = M^{j-i} I_j I_j \vec{x} \quad (2.19)$$

$$I_j \vec{x} = I_{2j-i} I_j \vec{x} \quad (2.20)$$

por lo tanto:

$$I_j \Gamma_i \subseteq \Gamma_{2j-i} \quad (2.21)$$

Y sea $\vec{x} \in \Gamma_{2j-i}$, por (2.9) y (2.8):

$$\vec{x} = I_{2j-i}\vec{x} = I_j M^{i-j} \vec{x} \quad (2.22)$$

$$= I_j I_i I_j \vec{x} \quad (2.23)$$

$$I_j \vec{x} = I_i I_j \vec{x} \quad (2.24)$$

entonces:

$$I_j \Gamma_{2j-i} \subseteq \Gamma_i \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{2j-i} \subseteq I_j \Gamma_i \quad (2.26)$$

Esta ecuación junto con (2.21) implican:

$$I_j \Gamma_i = \Gamma_{2j-i} \quad (2.27)$$

En particular esta ecuación permite, con I_0 , obtener todas las líneas Γ_i con i negativo.

2.3 Puntos Periódicos

Sea un punto sobre una superficie de sección tal que

$$\vec{x} = M^n \vec{x}$$

entonces \vec{x} es un punto periódico. Evidentemente, la relación se cumple también para M^{2n}, M^{3n}, \dots ; de manera que el periodo de \vec{x} se define como el entero positivo menor para el que la relación se cumple.

Sea un punto en la intersección de dos líneas de simetría

$$\vec{x} \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$$

esto significa

$$\vec{x} = I_i \vec{x} \quad (2.28)$$

$$\vec{x} = I_j \vec{x} \quad (2.29)$$

Por (2.8):

$$\vec{x} = M^{j-i} \vec{x} \quad (2.30)$$

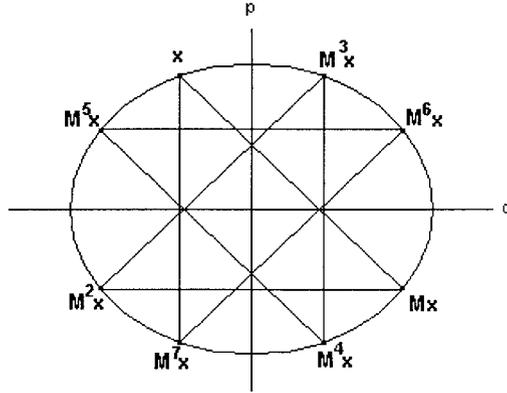


Figura 2.2: Un ciclo de periodo 8

De donde se concluye que \vec{x} es un punto periódico, y su periodo es algún divisor de $|j - i|$.

Un punto \vec{x} de periodo $P > 1$ no está aislado: las iteraciones sucesivas $M^j \vec{x}$ generan un ciclo de P puntos del mismo periodo: $\vec{x}, M\vec{x}, M^2\vec{x}, \dots, M^{P-1}\vec{x}$. Por (2.7) y (2.9):

$$M^P I_1 \vec{x} = M^P I_1 M^P \vec{x} = M^P I_{1-P} \vec{x} = I_1 \vec{x}$$

de manera que $I_1 \vec{x}$ es también un punto de periodo P .

En esta sección, todas las operaciones con subíndices y exponentes son módulo P .

Suponiendo que $\vec{x} \in \Gamma_s$, para algún s tal que $0 \leq s < P$, por (2.9), para cualquier entero t :

$$\vec{x} = I_s \vec{x} = I_t M^{t-s} \vec{x} \quad (2.31)$$

$$I_t \vec{x} = M^{t-s} \vec{x} \quad (2.32)$$

Si $(P - s + t)$ es par, por (2.7) y (2.9) podemos escribir

$$I_t \vec{x} = M^{(t+P-s)/2} I_{(t-P+s)/2} \vec{x} \quad (2.33)$$

$$= M^{(t+P-s)/2} I_t M^{(t+P-s)/2} \vec{x} \quad (2.34)$$

Sustituyendo en (2.32), como $\vec{x} = M^P \vec{x}$, se obtiene

$$M^{(t+P-s)/2} I_t M^{(t+P-s)/2} \vec{x} = M^{t+P-s} \vec{x} \quad (2.35)$$

y aplicando $M^{-(t+P-s)/2}$:

$$I_t M^{(t+P-s)/2} \vec{x} = M^{(t+P-s)/2} \vec{x} \quad (2.36)$$

De manera que $M^{(t+P-s)/2} \vec{x} \in \Gamma_t$, siempre que $(t + P - s)$ sea par. Se puede reescribir (2.36) obteniendo

$$M^{(t+P-s)/2} \vec{x} = I_1 M^{1-t} M^{(t+P-s)/2} \vec{x} \quad (2.37)$$

$$= I_1 M M^{(P-s-t)/2} \vec{x} \quad (2.38)$$

En particular, para $t = P - s + 2$ se cumple $M^{P-s+1} \vec{x} = I_1 \vec{x}$. De manera que en un ciclo de periodo P , puede afirmarse que existe N , $0 < N < P$, tal que

$$I_1 \vec{x} = M^N \vec{x} \quad (2.39)$$

Esto es, $I_1 \vec{x}$ está en el mismo ciclo.

Utilizando (2.7) y (2.9) se puede generalizar para $0 \leq i < P$:

$$I_1 M^i \vec{x} = I_{1-i} \vec{x} \quad (2.40)$$

$$= M^{-i} I_1 \vec{x} \quad (2.41)$$

$$= M^{-i} M^N \vec{x} \quad (2.42)$$

$$I_1 M^i \vec{x} = M^{N-i} \vec{x} \quad (2.43)$$

Definiendo

$$X_i \equiv M^i \vec{x} \quad (2.44)$$

Se puede reescribir (2.43) como:

$$I_1 X_i = X_{N-i} \quad (2.45)$$

Se presentan ahora dos casos:

1. P impar.

El ciclo tiene un punto en Γ_0 y uno en Γ_1 . Para demostrar esto es necesario analizar dos subcasos:

- N par. De (2.45), es inmediato verificar

$$I_1 X_{N/2} = X_{N/2} \quad (2.46)$$

lo cual implica que

$$X_{N/2} \in \Gamma_1$$

De la misma forma, de (2.45) se puede escribir:

$$I_1 X_{(P+N-1)/2} = X_{N-(P+N-1)/2} \quad (2.47)$$

$$= X_{(P+N+1)/2} \quad (2.48)$$

$$I_1 X_{(P+N-1)/2} = X_{(P+N-1)/2+1} \quad (2.49)$$

Donde se ha utilizado aritmética módulo P . Sea $j = (P+N-1)/2$, aplicando (2.8) y (2.9)

$$I_1 X_j = X_{j+1} \quad (2.50)$$

$$MI_0 X_j = MX_j \quad (2.51)$$

$$I_0 X_j = X_j \quad (2.52)$$

De donde se comprueba

$$X_{(P+N-1)/2} \in \Gamma_0$$

Las relaciones (2.44) y (2.45) pueden representarse como arcos de una gráfica dirigida donde es fácil visualizar estos resultados (ver figuras 3 y 4).

- N impar. De manera semejante se comprueba

$$X_{(P+N)/2} \in \Gamma_1 \quad (2.53)$$

$$X_{(N-1)/2} \in \Gamma_0 \quad (2.54)$$

2. P par.

El ciclo tiene dos puntos en Γ_0 o dos en Γ_1 . Nuevamente, es necesario analizar por separado los siguientes subcasos:

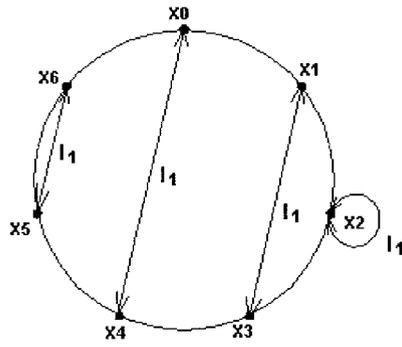


Figura 2.3: Ciclo de periodo 7, $N = 4$

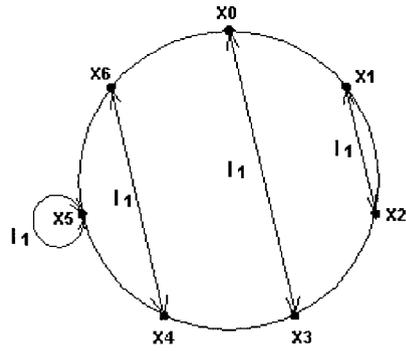


Figura 2.4: Ciclo de periodo 7, $N = 3$

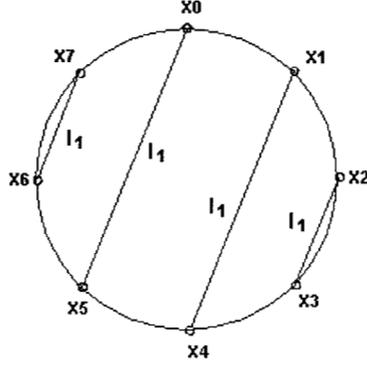


Figura 2.5: Ciclo de periodo 8. $N = 5$

- N impar. De (2.45) es inmediato verificar

$$I_1 X_{(N-1)/2} = X_{N-(N-1)/2} \quad (2.55)$$

$$= X_{(N+1)/2} \quad (2.56)$$

$$I_1 X_{(N-1)/2} = X_{(N-1)/2+1} \quad (2.57)$$

De manera semejante

$$I_1 X_{(P+N-1)/2} = X_{(P+N-1)/2+1} \quad (2.58)$$

Ambos resultados tienen la forma $I_1 X_j = X_{j+1}$, que se reduce a (2.52), por lo tanto:

$$X_{(P+N-1)/2} \in \Gamma_0 \quad (2.59)$$

$$X_{(N-1)/2} \in \Gamma_0 \quad (2.60)$$

En las figuras 5 y 6 es fácil visualizar estos resultados

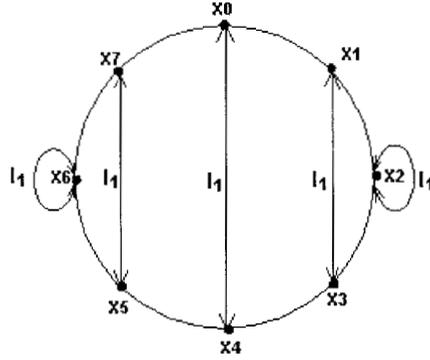


Figura 2.6: Ciclo de periodo 8, $N = 4$

- N par. Análogamente, se verifica:

$$X_{N/2} \in \Gamma_1 \quad (2.61)$$

$$X_{(P+N)/2} \in \Gamma_1 \quad (2.62)$$

De manera que, independientemente del valor de P , para localizar puntos periódicos, sólo es necesario localizar las intersecciones de estas líneas de simetría con las restantes.

Capítulo 3

ESTABILIDAD

El mapeo de Poincaré, con la guía de las líneas de simetría, permite localizar los puntos periódicos y hacer un análisis cualitativo del sistema. Sin embargo, es necesario contar con un método cuantitativo que permita describir la dinámica de estas órbitas.

Sea un sistema hamiltoniano de un grado de libertad y dependiente del tiempo, la generalización a más grados de libertad es inmediata. Escribiendo las ecuaciones de movimiento como

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}; t)$$

Donde

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Sea $\vec{x}_0(t)$ una solución periódica y $\vec{x}(t)$ una órbita cercana, la cual puede escribirse

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \delta\vec{x}$$

De manera que, desarrollando en serie de Taylor

$$\dot{\vec{x}}_0 + \delta\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}_0) + \left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(q, p)} \right|_{\vec{x}_0} \cdot \delta\vec{x} + \dots \quad (3.1)$$

Cortando el desarrollo a primer orden obtenemos una ecuación diferencial lineal

$$\delta\dot{\vec{x}} = \left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(q, p)} \right|_{\vec{x}_0} \cdot \delta\vec{x}$$

que se puede reescribir

$$\delta \dot{\vec{x}} = JW(t) \cdot \delta \vec{x} \quad (3.2)$$

donde J es la matriz simpléctica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $W(t)$, por ecuaciones de Hamilton, está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$$

Sean $\delta \vec{x}_1, \delta \vec{x}_2$ soluciones de (3.2), y sea $Z(t)$ la matriz formada por estas soluciones

$$Z = \begin{pmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 \\ \delta p_1 & \delta p_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.2) se reescribe

$$\dot{Z}(t) = JW(t)Z(t) \quad (3.4)$$

Sea ahora:

$$\Upsilon(t) \equiv Z(t)Z^{-1}(0) \quad (3.5)$$

donde es evidente que $\Upsilon(0) = 1$.

Entonces podemos escribir

$$\dot{\Upsilon}(t) = \dot{Z}(t)Z^{-1}(0) \quad (3.6)$$

$$= JW(t)Z(t)Z^{-1}(0) \quad (3.7)$$

$$\dot{\Upsilon}(t) = JW(t)\Upsilon(t) \quad (3.8)$$

Sea τ el periodo de \vec{x}_0 ; $W(t)$ es periódica puesto que se evalúa a lo largo de $\vec{x}_0(t)$, de manera que

$$\dot{\Upsilon}(t + \tau) = JW(t + \tau)\Upsilon(t + \tau) \quad (3.9)$$

$$\dot{\Upsilon}(t + \tau) = JW(t)\Upsilon(t + \tau) \quad (3.10)$$

$\Upsilon(t + \tau)$ y $\Upsilon(t)$ satisfacen la misma ecuación diferencial (3.8) por lo que debe existir una transformación lineal entre ambas.

$$\Upsilon(t + \tau) = A\Upsilon(t) \quad (3.11)$$

Donde es inmediato ver que para $t = 0$:

$$\Upsilon(\tau) = A\Upsilon(0) = A \quad (3.12)$$

de manera que integrando (3.8) de $t = 0$ a $t = \tau$ se puede determinar la matriz de transformación A .

Suponiendo ahora que \vec{x}_0 se encuentra sobre una superficie de sección, sea P el periodo de \vec{x}_0 en el plano de Poincaré.

$$\vec{x}_0 = M^P \vec{x}_0$$

De (3.5), (3.12) se reescribe:

$$Z(\tau)Z^{-1}(0) = A \quad (3.13)$$

$$Z(\tau) = AZ(0) \quad (3.14)$$

Donde es inmediato identificar A como la matriz que realiza la transformación:

$$\delta\vec{x}(t + \tau) = M^P \delta\vec{x}(t)$$

Esto es, A es la linealización del mapeo M^P en torno a \vec{x}_0 sobre el plano de Poincaré (E. Piña [4]).

La estabilidad de la solución periódica $\vec{x}_0(t)$ está determinada por los autovalores de A , ecuación (3.12), dados por las raíces del polinomio cracterístico

$$\lambda^2 - \lambda \text{Traza}(A) + \text{Det}(A) = 0 \quad (3.15)$$

La transformación A preserva el area, de manera que

$$\text{Det}(A) = 1 = \lambda_1 \lambda_2 \quad (3.16)$$

Se presentan dos casos:

Autovalores complejos. $\lambda_2 = \lambda_1^*$ Corresponde a una solución estable, al punto \vec{x}_0 en el plano de Poincaré se le denomina punto elíptico.

Autovalores reales. $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ Corresponde a una solución inestable, al punto \vec{x}_0 en el plano de Poincaré se le denomina punto hiperbólico.

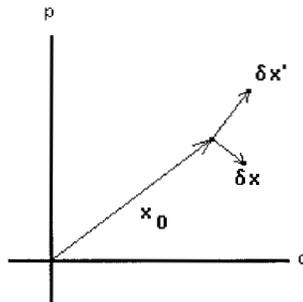


Figura 3.1: Mapeo en torno a un punto periódico

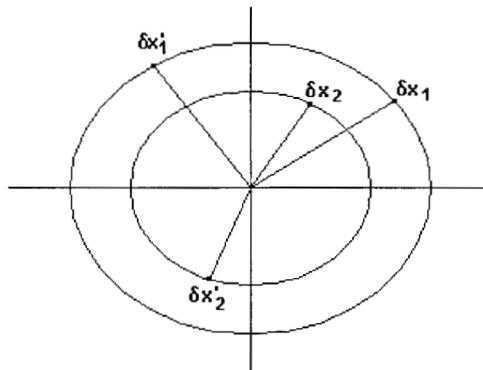


Figura 3.2: Punto elíptico

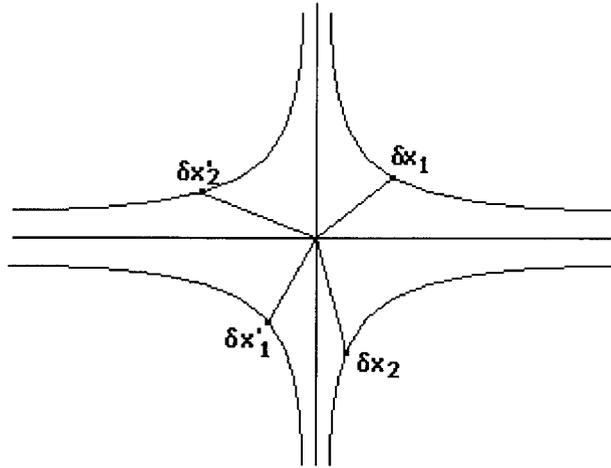


Figura 3.3: Punto hiperbólico

Sean $\delta \vec{x}_1, \delta \vec{x}_2$ los autovectores de la matriz A diagonalizada

$$\delta \vec{x}_i(t + \tau) = \lambda_i \delta \vec{x}_i(t) \quad (3.17)$$

Los autovalores λ_i , los factores característicos del sistema, están relacionados con los exponentes de Liapunov (ver L. Cesari [5]). Sean:

$$\lambda_i = e^{r_i \tau} \quad (3.18)$$

$$\delta \vec{x}_i(t) = \vec{\xi}_i(t) e^{r_i t} \quad (3.19)$$

La ecuación (3.17) implica

$$\vec{\xi}_i(t + \tau) = \vec{\xi}_i(t) \quad (3.20)$$

De manera que la estabilidad de las soluciones dependerá exclusivamente de los exponentes característicos del sistema r_i .

Capítulo 4

PROBLEMA DE SITNIKOV. INTRODUCCIÓN

4.1 Problema de Kepler

En esta sección y en la siguiente se presentan las definiciones y la notación que serán necesarias en la parametrización del problema a estudiar, siguiendo el desarrollo presentado por J. Marion [6]:

Sea un sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 , localizadas en \vec{r}_1 y \vec{r}_2 respectivamente, las cuales interactúan exclusivamente a través de su mutua atracción gravitacional. El lagrangiano de este sistema puede escribirse como

$$L = \frac{m_1}{2} |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\vec{r}}_2|^2 + G \frac{m_1 m_2}{r}$$

donde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Seleccionando el origen en el centro de masa de las dos partículas se obtiene la relación

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \tag{4.1}$$

de donde se puede escribir

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \tag{4.2}$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \tag{4.3}$$

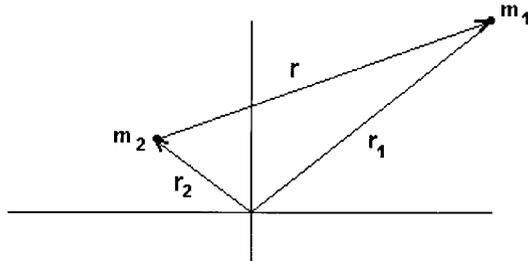


Figura 4.1: Problema de Kepler

De manera que el lagrangiano se reescribe

$$L = \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + \frac{k}{r} \quad (4.4)$$

donde

$$k = Gm_1m_2$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

El problema queda reducido al de una s3la part3cula de masa μ , la masa reducida del sistema, inmersa en un potencial central $-k/r$. Reescribiendo el lagrangiano en coordenadas polares:

$$L(r, \theta) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \quad (4.5)$$

es inmediato observar que 3ste no depende expl3citamente de θ de manera que, por ecuaciones de Lagrange, existe una constante de movimiento

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \equiv l \quad (4.6)$$

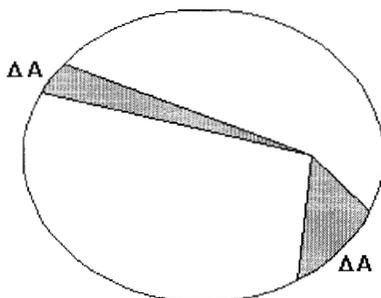


Figura 4.2: Segunda Ley de Kepler

la cual tiene una interpretación geométrica inmediata: el área barrida por el vector $\vec{r}(t)$ por unidad de tiempo, lo que puede escribirse:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{l}{2\mu} \quad (4.7)$$

Este factor se conoce en los textos de astronomía como Velocidad Areolar.

Este resultado, identificado como la Segunda Ley de Kepler, no es exclusivo del movimiento planetario, sino un resultado general para campos de fuerza central.

El sistema es autónomo y no hay fuerzas disipativas, por tanto existe otra constante de movimiento que es la energía total

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \quad (4.8)$$

$$= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (4.9)$$

Estas dos constantes caracterizan al sistema. De esta última expresión se obtiene la ecuación de movimiento

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E + \frac{k}{r}) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (4.10)$$

a partir de la cual se puede obtener la ecuación para la trayectoria: reescribiendo

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{l}{\mu r^2}$$

se obtiene

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2})}} \quad (4.11)$$

La integral se simplifica con el cambio de variable $u = l/r$

$$\theta(u) = - \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu k}{l}u - u^2}}$$

La integración es inmediata:

$$\theta(u) = \arccos \frac{u - (\mu k/l)}{\sqrt{2\mu E(1 + \frac{\mu k^2}{2El^2})}}$$

Que, regresando a la variable r , se escribe:

$$\theta(r) = \arccos \frac{l/r - (\mu k/l)}{\sqrt{2\mu E(1 + \frac{\mu k^2}{2El^2})}} \quad (4.12)$$

Donde implícitamente se ha definido el origen de θ de manera que la constante de integración sea cero. A este ángulo se le conoce como Anomalía Real.

Reagrupando términos en la última ecuación

$$\cos(\theta) = \frac{(l^2/\mu k r) - 1}{\sqrt{\frac{2El^2}{\mu k^2} + 1}}$$

Se definen el lado recto y la excentricidad respectivamente:

$$\alpha \equiv \frac{l^2}{\mu k} \quad (4.13)$$

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \quad (4.14)$$

De manera que la trayectoria queda descrita por

$$r = \frac{\alpha}{1 + e \cos \theta} \quad (4.15)$$

Cuando $0 < e < 1$, lo cual implica $E < 0$, ésta es la ecuación polar de una elipse, como lo establece la Primera Ley de Kepler.

En esta ecuación

$$r(0) = \frac{\alpha}{1 + e}$$

$$r(\pi) = \frac{\alpha}{1 - e}$$

son respectivamente el pericentro y apocentro de la órbita; sea a el semieje mayor, se puede escribir

$$2a = \frac{\alpha}{1 + e} + \frac{\alpha}{1 - e} \quad (4.16)$$

$$a = \frac{\alpha}{1 - e^2} \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.13) y (4.14) se obtiene

$$a = \frac{k}{2|E|} \quad (4.18)$$

Sea b el semieje menor, por propiedades de la elipse

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (4.19)$$

$$b = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad (4.20)$$

De manera que la trayectoria queda descrita completamente con los parámetros α y e .

De (4.7) se puede obtener el periodo

$$\int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA \quad (4.21)$$

$$\tau = \frac{2\mu}{l} A \quad (4.22)$$

$$\tau = \frac{2\mu}{l} \pi ab \quad (4.23)$$

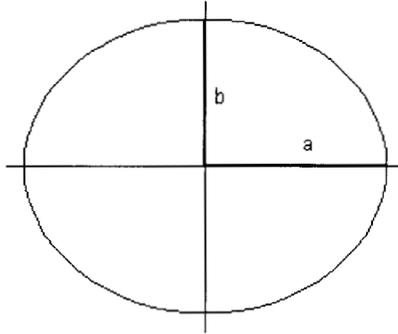


Figura 4.3: Semiejes de una elipse

de (4.13), (4.17) y (4.19) se puede escribir

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\left(\frac{\alpha}{1-e^2}\right)^{3/2} \quad (4.24)$$

$$\tau^2 = 4\pi^2\frac{\mu}{k}a^3 \quad (4.25)$$

Este resultado se identifica como la Tercera Ley de Kepler

4.2 Ecuación de Kepler

La ecuación (4.15) describe la forma de la trayectoria, sin embargo es necesario escribir θ como función del tiempo. La solución que se presenta fué propuesta por Kepler:

De la ecuación canónica de una elipse con centro en $-ea$:

$$\frac{(x+ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se define el ángulo ψ de manera que:

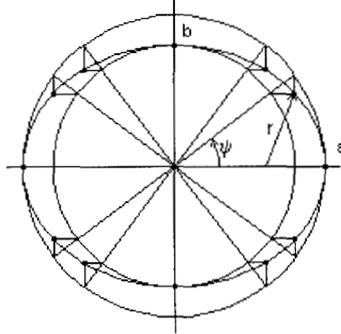


Figura 4.4: Anomalía excéntrica

$$\cos \psi \equiv \frac{x + ea}{a} \quad (4.26)$$

$$\sin \psi \equiv \frac{y}{b} \quad (4.27)$$

Esto es, dado un punto $P = (r, \theta)$, ψ es el ángulo comprendido entre el semieje mayor y la recta que va del centro de la elipse, a la proyección de P en la circunferencia circunscrita de radio a ; o bien, a la proyección de P en la circunferencia inscrita de radio b . Este ángulo se le conoce como Anomalía Excéntrica.

De las ecuaciones anteriores, utilizando (4.19), se puede escribir r en términos de ψ

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (4.28)$$

$$= a^2(1 - e \cos \psi)^2 \quad (4.29)$$

$$r = a(1 - e \cos \psi) \quad (4.30)$$

De (4.15) y (4.17)

$$r(1 + e \cos \theta) = a(1 - e^2) \quad (4.31)$$

$$er \cos \theta = a(1 - e^2) - r \quad (4.32)$$

Sumando er en ambos lados se obtiene:

$$er(\cos \theta + 1) = (1 - e)(a(1 + e) - r) \quad (4.33)$$

Mientras que restando er se obtiene:

$$er(\cos \theta - 1) = (1 + e)(a(1 - e) - r) \quad (4.34)$$

Dividiendo ésta última entre (4.33)

$$\frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} = \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) \frac{a(1 - e) - r}{a(1 + e) - r} \quad (4.35)$$

sustituyendo (4.30) y cambiando de signo se obtiene

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 + e}{1 - e} \frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi} \quad (4.36)$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2 \frac{\psi}{2} \quad (4.37)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{\psi}{2} \quad (4.38)$$

Esta ecuación relaciona unívocamente θ con ψ . Diferenciando se obtiene

$$d\theta = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\psi/2)} d\psi \quad (4.39)$$

La misma sustitución de (4.30) en (4.33) da como resultado

$$r = a(1 - e) \frac{1 + \cos \psi}{1 + \cos \theta} \quad (4.40)$$

$$= a(1 - e) \frac{\cos^2(\psi/2)}{\cos^2(\theta/2)} \quad (4.41)$$

De esta ecuación y de (4.30) y (4.39), el elemento de area puede escribirse

$$\frac{r^2}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}(1 - e \cos \psi)(1 - e)\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}d\psi \quad (4.42)$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}(1 - e \cos \psi)d\psi \quad (4.43)$$

Por lo tanto, el area barrida por \vec{r} al tiempo t puede escribirse como

$$\pi ab \frac{t}{\tau} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2} \int_0^\psi (1 - \cos \psi)d\psi \quad (4.44)$$

$$2\pi \frac{t}{\tau} = \psi - e \sin \psi \quad (4.45)$$

donde se ha utilizado (4.19) para simplificar. Esta relación se conoce como la Ecuación de Kepler.

4.3 Problema de Sitnikov. Definición

Este es un caso particular del Problema de 3 Cuerpos en el que dos cuerpos, llamados primarios, tienen masas idénticas y describen órbitas elípticas; mientras que un tercer cuerpo, de masa despreciable, se mueve sobre una línea perpendicular al plano descrito por los otros dos y pasando por su centro de masa. (Ver [10], [11], [12], [13], [15])

Fijando el origen del sistema de referencia en el centro de masa de los dos primarios, sea q la distancia del tercer cuerpo al plano descrito por los otros dos y sea m la masa de éstos . El lagrangiano toma la siguiente forma:

$$L(q, \dot{q}; t) = \frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{2Gm}{\sqrt{q^2 + r^2(t)/4}} \quad (4.46)$$

donde se ha eliminado la masa del tercer cuerpo que aparece como un factor en ambos términos, y $r(t) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ está dada por (4.30) y (4.45). El hamiltoniano del sistema tiene la siguiente forma:

$$H(q, p; t) = \frac{p^2}{2} - \frac{2Gm}{\sqrt{q^2 + r^2(t)/4}} \quad (4.47)$$

donde $p = \dot{q}$.

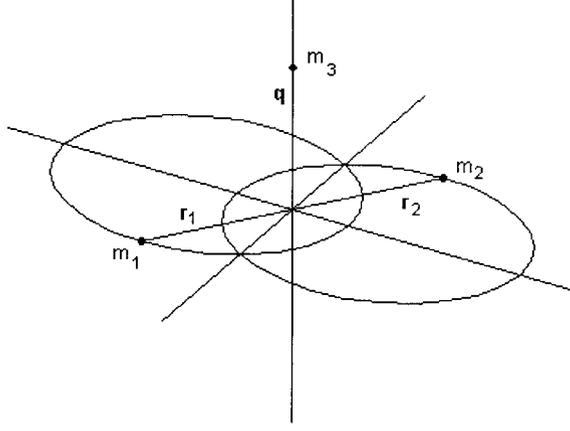


Figura 4.5: Problema de Sitnikov

Dividiendo y multiplicando por α en el segundo término

$$H(q, p; t) = \frac{p^2}{2} - \frac{2Gm}{\alpha \sqrt{(q/\alpha)^2 + (r(t)/2\alpha)^2}}$$

transformando a variables adimensionales

$$\begin{aligned} q' &= \frac{q}{\alpha} \\ p' &= p \sqrt{\frac{\alpha}{2Gm}} \\ r'(t) &= r(t)/\alpha \end{aligned}$$

el hamiltoniano se reescribe como:

$$H(q', p'; t) = \frac{2Gm}{\alpha} \left(\frac{p'^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{q'^2 + r'^2(t)/4}} \right)$$

Por (4.24) y (4.45)

$$t = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2Gm}} \frac{\psi - e \sin \psi}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (4.48)$$

Sea $t' = \sqrt{2Gm/\alpha^3}t$ una variable temporal adimensional. Definiendo $h = H\alpha/2Gm$ y sustituyendo (4.30) se obtiene un hamiltoniano adimensional

$$h(q, p; t) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{q^2 + \left(\frac{1-e \cos \psi(t)}{2(1-e^2)}\right)^2}} \quad (4.49)$$

y (4.45) se reescribe:

$$t = \frac{\psi - e \sin \psi}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (4.50)$$

donde se han eliminado las primas para simplificar la notación.

De esta manera, el problema queda descrito en términos de la excentricidad, existiendo dos casos límite: $e = 0$ que es el caso en que los primarios describen trayectorias circulares; $e = 1$ que es el caso en que los primarios describen trayectorias parabólicas; este caso no puede ser tratado con esta parametrización, ya que la anomalía excéntrica no puede definirse para una trayectoria parabólica. La forma de adimensionalizar el sistema implica $\alpha \neq 0$, con lo cual queda excluido el caso de colisión entre los primarios.

4.3.1 Antecedentes

McMillan [6] presenta una solución analítica para el caso integrable, $e = 0$, expresada mediante una integral la cual puede reducirse a integrales elípticas. Finalmente obtiene la solución como un desarrollo en series con coeficientes periódicos.

K. Wodnar [8] presenta una revisión del artículo original de Sitnikov [9], en el que establece las propiedades y las condiciones necesarias para una solución de la forma descrita por Sitnikov: El tercer cuerpo escapa al infinito después de haber pasado por el origen un número infinito de veces. La construcción se lleva a cabo mediante estimaciones de la fuerza atractiva, ya que las soluciones buscadas son caóticas y no acotadas, lo cual no permite hacer un desarrollo en series.

J. Hagel [10] presenta un estudio analítico mediante la expansión de la fuerza atractiva en serie de potencias, restringida para al caso $|q(t)/r(t)| < 1$ y $\dot{q}(0) = 0$. Para excentricidades pequeñas, aproxima la serie a un polinomio bidimensional en $e^m q^n$, donde $n + m \leq 4$, encontrando dos casos límite: Para $e = 0$ y $|q(t)| \ll r(t)$ el sistema puede aproximarse a un oscilador armónico simple: Para excentricidades pequeñas y $|q(t)| \ll r(t)$ obtiene una ecuación de Hill, a la que aplica la Teoría de Floquet. Comparando con integración numérica directa, encuentra que las soluciones aproximadas son buenas para $e < 0.4$ y $q_{MAX} < 0.2$.

J. Hagel y T. Trenkler [11] utilizan la anomalía real como variable independiente, $T = q/r$ como variable dependiente y hacen un desarrollo del potencial en polinomios de Chevyshev. Para oscilaciones muy pequeñas, $T \ll 1$, linearizan el problema obteniendo una ecuación de Hill. Para $T < 0.8$, discretizando el hamiltoniano como una serie de pulsos, deltas de Dirac, desarrollan un mapeo simpléctico para intervalos $\Delta\tau = 2\pi/N$ el cual es una integración numérica de orden $(\Delta\tau)^2$.

R. Dvorak [12] utiliza estas mismas variables para una integración numérica de las ecuaciones de movimiento. Presenta un análisis cualitativo para condiciones iniciales $T < 1.0$, $T' = 0.0$ en el rango de excentricidades $0.33 \leq e \leq 0.66$. Identifica superficies invariantes cercanas al origen aún para valores altos de excentricidad, así como islas en torno a órbitas periódicas estables.

J. Martínez Alfaro y C. Chiralt [13] utilizan la anomalía excéntrica como variable independiente y desarrollan una linearización del sistema en torno al origen, utilizando la teoría de Floquet. Realizando un análisis de estabilidad lineal, muestran la existencia de superficies invariantes en la vecindad del origen para excentricidades en el rango $0 < e < 1$, excepto para una serie de valores críticos de e , en los que el origen se convierte en un punto parabólico.

J. Moser [14] presenta el problema de Sitnikov como caso ilustrativo de un sistema hamiltoniano no integrable, con base en un análisis cualitativo sobre la superficie de sección $q = 0$. Para caso integrable muestra que el mapeo de Poincaré es un mapeo "twist" en el que la torsión aumenta monótonamente hasta hacerse infinita para $p(0) = 2$, valor que delimita la región de movimiento acotado. Para excentricidades pequeñas muestra la existencia de superficies invariantes en torno al origen, de manera que este problema se convierte en un ejemplo clásico para el teorema KAM. Analizando la frontera de la región con movimiento acotado, muestra la existencia de órbitas periódicas para todos los periodos; muestra también la existencia de un punto homoclínico degenerado correspondiente a una órbita "periódica" inestable en el infinito, lo cual implica la existencia de un número infinito de puntos homoclínicos y heteroclínicos y por lo tanto la no-existencia de integrales de movimiento.

J. Llibre y C. Simó [15] presentan una revisión del trabajo de Moser. Muestran para el caso integrable que el tiempo, en unidades angulares, entre dos cruces sucesivos en el plano $q = 0$ en el límite cuando $q_0 = 0$ es $\pi/\sqrt{2}$. Para excentricidades pequeñas presentan una clasificación de las órbitas de acuerdo a su evolución final y al número de veces que cruzan el plano $q = 0$ antes de escapar al infinito; incluyendo las soluciones descritas por Sitnikov y las descritas por Moser como puntos homoclínicos degenerados.

J. M. Cors [16] estudia el Problema Parabólico de Sitnikov, el cual es precisamente el caso $e = 1$ en condiciones de no colisión.

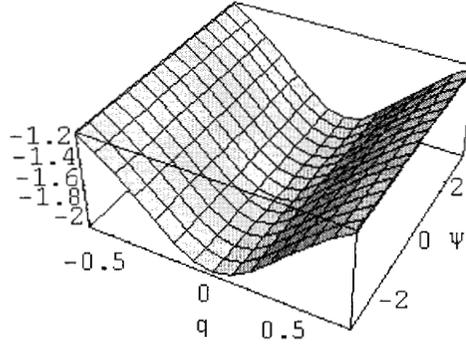


Figura 4.6: $e = 0$

4.3.2 Análisis del potencial

De (4.30) el potencial puede escribirse en términos de ψ , para simplificar los cálculos

$$U(q, \psi) = -\frac{1}{\sqrt{q^2 + (1 - e \cos \psi)^2 / (2(1 - e^2))^2}} \quad (4.51)$$

y sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{q}{(q^2 + (1 - e \cos \psi)^2 / (2(1 - e^2))^2)^{3/2}} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{e(1 - e \cos \psi) \sin \psi}{4(1 - e^2)^2 (q^2 + (1 - e \cos \psi)^2 / (2(1 - e^2))^2)^{3/2}} \quad (4.53)$$

de donde es inmediato verificar que los puntos críticos se presentan en $q = 0$, $\psi = 0, \pm\pi$

La forma del potencial está determinada por el parámetro e . Para $e = 0$ el potencial es independiente de ψ , presentando un mínimo en $q = 0$.

Para $e > 0$, $q = 0, \psi = 0$ es un mínimo absoluto, mientras que $\psi = \pm\pi$ es un punto silla.

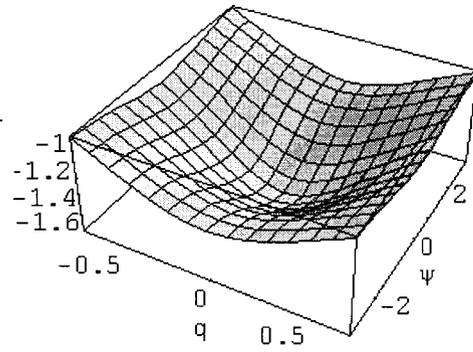


Figura 4.7: $e = 0.125$

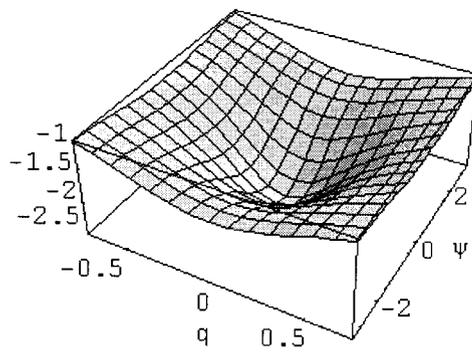


Figura 4.8: $e = 0.25$

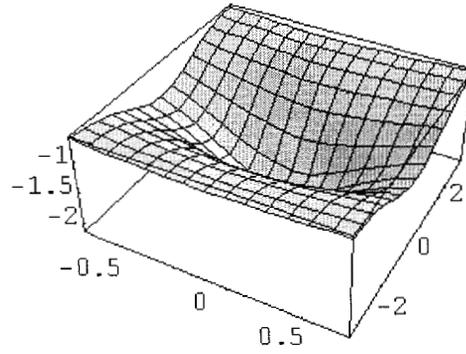


Figura 4.9: $e = 0.5$

Para todos los valores de ψ , $q = 0$ es un "mínimo". En las figuras puede observarse que, conforme aumenta e , el "pozo de potencial" se vuelve más estrecho.

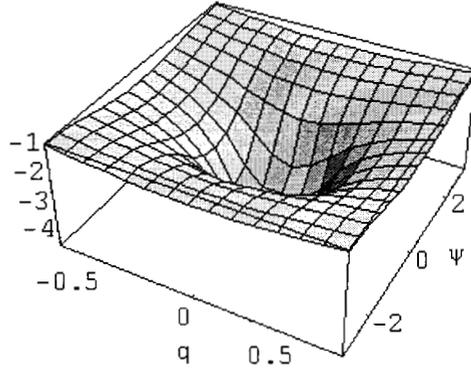


Figura 4.10: $e = 0.75$

4.4 Caso integrable

Si los primarios describen trayectorias circulares, por (4.30), h es una constante de movimiento:

$$h = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{q^2 + \frac{1}{4}}} \quad (4.54)$$

La región de movimiento acotado queda delimitada por:

$$q_M = \pm \sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{4}} \quad (4.55)$$

y el valor de h restringido a

$$-2 \leq h < 0 \quad (4.56)$$

Despejando de (4.49) se obtiene la ecuación

$$p^2 = \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\sqrt{q^2 + 1/4}} + 2h \quad (4.57)$$

de donde la solución queda descrita por la integral

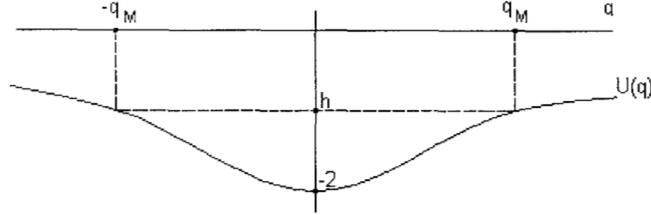


Figura 4.11: Potencial para el caso integrable

$$t = \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{q^2+1/4}} - 2|h|}} \quad (4.58)$$

que es la integral que se obtendría por el método de Hamilton-Jacobi.

En el resto de esta sección se utilizará la notación de MacMillan [7] para el desarrollo de la solución analítica. Se definen

$$z \equiv 2q$$

$$c = -h/2$$

donde, por (4.55) y (4.56), $0 \leq z^2 \leq 1/c^2 - 1$ y $0 < c \leq 1$, de manera que (4.58) se reescribe:

$$2\sqrt{2}t = \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{z^2+1}} - 2c}} \quad (4.59)$$

El cambio de variable

$$u^2 \equiv \frac{1}{1+z^2} \quad (4.60)$$

donde $c \leq u \leq 1$, transforma (4.59) en

$$-2\sqrt{2}t = \int \frac{du}{u^2 \sqrt{2(1-u^2)(u-c)}} \quad (4.61)$$

Un segundo cambio de variable

$$v^2 \equiv \frac{1-u}{1-c} \quad (4.62)$$

donde $0 \leq v \leq 1$, da como resultado:

$$2\sqrt{2}t = \int \frac{dv}{(1-2k^2v^2)^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad (4.63)$$

donde $k^2 = (1-c)/2$, de manera que $0 \leq k^2 < 1/2$.

En este punto termina el desarrollo presentado por McMillan; sin embargo, (4.63) aun no tiene la forma de una integral elíptica, para llegar a este punto es necesario descomponer esta integral. Sean:

$$A(v) \equiv (1-v^2)(1-k^2v^2)$$

$$B(v) \equiv (1-2k^2v^2)$$

El integrando se escribe como

$$\frac{1}{B^2(v)\sqrt{A(v)}}$$

Sea ahora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{B(v)\sqrt{A(v)}} \right) &= \frac{1}{B(v)\sqrt{A(v)}} \\ &+ \frac{4k^2v^2}{B^2(v)\sqrt{A(v)}} \\ &- \frac{v^2(2k^2v^2 - 1 - k^2)}{B(v)A(v)\sqrt{A(v)}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Desarrollando el último término por fracciones parciales y simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv} \left(\frac{v}{B(v)\sqrt{A(v)}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{A(v)}} \left(\frac{1}{1-2k^2} \frac{1}{1-v^2} - \frac{1}{1-k^2v^2} \right) \\
&+ \left(\frac{3-8k^2}{1-2k^2} \right) \frac{1}{B(v)\sqrt{A(v)}} \\
&- \frac{2}{B^2(v)\sqrt{A(v)}}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Reagrupando términos e integrando

$$\begin{aligned}
2 \int \frac{dv}{B^2(v)\sqrt{A(v)}} &= \frac{3-8k^2}{1-2k^2} \int \frac{dv}{B(v)\sqrt{A(v)}} \\
&+ \int \frac{dv}{(1-k^2v^2)\sqrt{A(v)}} \\
&- \frac{1}{1-2k^2} \int \frac{dv}{(1-v^2)\sqrt{A(v)}} \\
&- \frac{v}{B(v)\sqrt{A(v)}}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

La integral de (4.63) queda reescrita finalmente:

$$\begin{aligned}
2 \int \frac{dv}{(1-2k^2v^2)^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} &= \frac{3-8k^2}{1-2k^2} \int \frac{dv}{(1-2k^2v^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \\
&+ \int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)^3}} \\
&- \frac{1}{1-2k^2} \int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)^3(1-k^2v^2)}} \\
&- \frac{v}{(1-2k^2v^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Se definen:

$$I \equiv \int \frac{dv}{(1-2k^2v^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \quad (4.68)$$

$$II \equiv \frac{1}{k^3} \int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1/k^2-v^2)^3}} \quad (4.69)$$

$$III \equiv \frac{1}{k} \int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)^3(1/k^2-v^2)}} \quad (4.70)$$

I es una integral elíptica de tercera especie en la forma normal de Legendre. II y III pueden reducirse a integrales elípticas de primera y segunda especie:

$$F(\xi, k) \equiv \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (4.71)$$

$$E(\xi, k) \equiv \int_0^\xi \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \quad (4.72)$$

donde $k^2 < 1$ y $\xi \leq 1$.

De acuerdo con Gradsteyn [17]:

$$II = \frac{1}{1-k^2} \left(E(v, k) - vk^2 \sqrt{\frac{1-v^2}{1-k^2v^2}} \right) \quad (4.73)$$

$$III = F(v, k) - \frac{1}{1-k^2} \left(E(v, k) - v \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}} \right) \quad (4.74)$$

donde, por la forma de I y II por su definición, k queda restringido a $0 < k^2 < 1/2$.

Capítulo 5

PROBLEMA DE SITNIKOV. CASO GENERAL

5.1 Ecuaciones de Movimiento

Del hamiltoniano descrito en el capítulo anterior (4.49), las ecuaciones de movimiento quedan escritas:

$$\frac{dq}{dt} = p \quad (5.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{q}{(q^2 + r^2(t)/4)^{3/2}} \quad (5.2)$$

Donde la distancia de los primarios al origen está determinada por (4.30) y por la ecuación de Kepler (4.50):

$$r(t) = \frac{1 - e \cos \psi(t)}{1 - e^2} \quad (5.3)$$

$$t = \frac{\psi - e \sin \psi}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (5.4)$$

Escritas de esta manera presentan el inconveniente de que la última es una ecuación trascendente y no puede resolverse más que con un desarrollo en serie. Derivando

$$\frac{dt}{d\psi} = \frac{1 - e \cos \psi}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

y aplicando regla de la cadena, las ecuaciones de movimiento se reescriben con ψ como variable independiente:

$$\frac{dq}{d\psi} = \frac{p}{(1-e^2)^{3/2}}(1-e\cos\psi) \quad (5.5)$$

$$\frac{dp}{d\psi} = -\frac{q}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{1-e\cos\psi}{\left(q^2 + \left(\frac{1-e\cos\psi}{2(1-e^2)}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (5.6)$$

La dependencia con respecto a ψ a través del coseno hace evidentes muchas de las propiedades de simetría del sistema. Es esta forma de las ecuaciones con la que se va a trabajar.

5.2 Simetrías y planos invariantes

No es difícil ver que el problema presenta tres simetrías:

$$S_1 \begin{pmatrix} q \\ p \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ p \\ -\psi \end{pmatrix}$$

$$S_2 \begin{pmatrix} q \\ p \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -p \\ -\psi \end{pmatrix}$$

$$S_3 \begin{pmatrix} q \\ p \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ -p \\ \psi \end{pmatrix}$$

donde S_2 corresponde a la reflexión de la velocidad y la reflexión temporal.

Estas transformaciones dejan invariantes las ecuaciones de movimiento, aunque sólo dos son independientes, ya que puede escribirse por ejemplo:

$$S_3 = S_2 S_1$$

La transformación S_1 deja invariante a la línea $\psi = 0$, $q = 0$. La transformación S_2 a su vez deja invariante a la línea $\psi = 0$, $p = 0$. Ambas líneas se encuentran sobre el plano $\Sigma = \{(p, q, \psi) | \psi = 0\}$ al que se utilizará para hacer un mapeo de Poincaré.

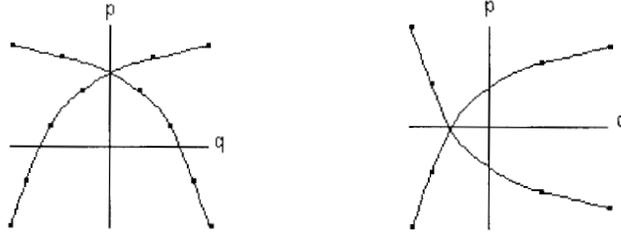


Figura 5.1: Involuciones horizontal y vertical

Cualquiera de estas transformaciones puede utilizarse para definir una involución. Vistas en el plano Σ , S_1 es una reflexión sobre el eje p y S_2 una reflexión sobre el eje q , de manera que se utilizará la siguiente notación:

- $I_0^v \equiv S_1$.
- $I_0^h \equiv S_2$.

Donde el superíndice significa vertical y horizontal respectivamente. El plano $\Sigma^* = \{(q, p, \psi) | \psi = \pi\}$ puede también ser utilizado como superficie de sección, ya que se cumplen las mismas simetrías. De manera análoga, sobre este plano se definen:

- $I_0^{v*} \equiv S_1$.
- $I_0^{h*} \equiv S_2$.

5.3 Líneas de simetría:

Esta invariancia del sistema con respecto a las reflexiones, permite la factorización del mapeo como producto de involuciones y el análisis por medio del estudio de sus líneas de simetría.

Se definen dos familias de líneas de simetría generadas a partir de las siguientes:

- Γ_0^h conjunto de puntos invariantes bajo I_0^h .
- Γ_1^h conjunto de puntos invariantes bajo I_1^h .
- Γ_0^v conjunto de puntos invariantes bajo I_0^v .
- Γ_1^v conjunto de puntos invariantes bajo I_1^v .

En este caso, no se conoce la forma explícita de las involuciones I_1^h, I_1^v , por lo que es necesario encontrar una forma de obtener las líneas Γ_1^h, Γ_1^v .

Sea T el operador de evolución temporal y sea \vec{x} alguna condición inicial:

$$T\vec{x} = \vec{x}' \quad (5.7)$$

$$S_2T\vec{x} = S_2\vec{x}' \quad (5.8)$$

por ser T reversible, $T^{-1} = S_2TS_2$ de manera que:

$$T^{-1}S_2 = S_2T \quad (5.9)$$

de donde se puede escribir

$$T^{-1}S_2\vec{x} = S_2\vec{x}' \quad (5.10)$$

$$S_2\vec{x} = TS_2\vec{x}' \quad (5.11)$$

esto es: Si \vec{x} evoluciona a \vec{x}' , entonces $S_2\vec{x}'$ evoluciona a $S_2\vec{x}$. Las mismas relaciones pueden obtenerse para S_1 . Estas expresiones son válidas para toda t , en particular para los mapeos de Poincaré.

Sean:

- El operador de evolución temporal $L : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*$.
- El operador de evolución temporal $K : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma$.

De manera que el mapeo de Poincaré puede escribirse como

$$M = KL$$

Sea un punto $\vec{x} \in \Gamma_0^h$. Aplicando L para hacerlo evolucionar hasta $\vec{x}' \in \Sigma^*$:

$$L\vec{x} = \vec{x}' \quad (5.12)$$

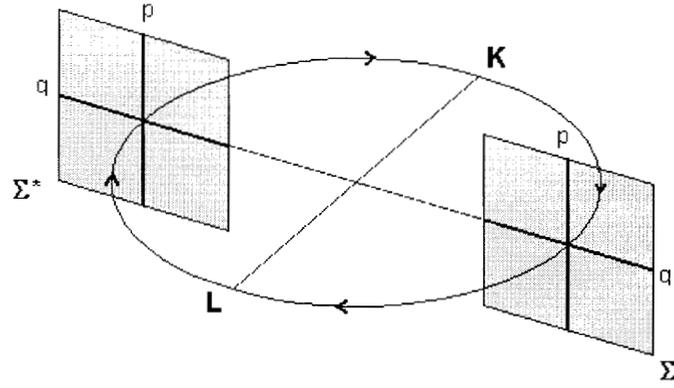


Figura 5.2: Factorización del Mapeo de Poincaré

Esto es:

$$L \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q' \\ p' \\ \pi \end{pmatrix}$$

Por (5.11) se puede escribir

$$I_0^h \vec{x} = KI_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.13)$$

esto es, si \vec{x} evoluciona a \vec{x}' , $I_0^{h*} \vec{x}'$ evoluciona a $I_0^h \vec{x}$, donde I_0^h y I_0^{h*} son la involución S_2 aplicada en los planos Σ y Σ^* respectivamente y K es el operador que hace evolucionar $I_0^{h*} \vec{x}'$ hacia $I_0^h \vec{x}$:

$$KI_0^{h*} \begin{pmatrix} q' \\ p' \\ \pi \end{pmatrix} = I_0^h \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero $\vec{x} \in \Gamma_0^h$, por lo que se puede escribir

$$\vec{x} = KI_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.14)$$

$$L\vec{x} = LKI_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.15)$$

$$L\vec{x} = M^* I_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.16)$$

donde $M^* = LK$ es el mapeo de Poincaré sobre el plano Σ^* . Por definición $M^*I_0^{h*} = I_1^{h*}$ y retomando (5.12) se concluye

$$\vec{x}' = I_1^{h*} \vec{x}'$$

o sea que $\vec{x}' \in \Gamma_1^{h*}$. Por lo tanto

$$L\Gamma_0^h \subseteq \Gamma_1^{h*} \quad (5.17)$$

Sea ahora $\vec{x}' \in \Gamma_1^{h*}$, existe un punto $\vec{x} \in \Sigma$ tal que

$$\vec{x}' = L\vec{x} \quad (5.18)$$

Por (5.11) se puede escribir:

$$I_0^h \vec{x} = KI_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.19)$$

esto es, si \vec{x} evoluciona a \vec{x}' , $I_0^{h*} \vec{x}'$ evoluciona a $I_0^h \vec{x}$. Aplicando el operador L se obtiene:

$$LI_0^h \vec{x} = LKI_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.20)$$

$$LI_0^h \vec{x} = M^*I_0^{h*} \vec{x}' \quad (5.21)$$

$$LI_0^h \vec{x} = I_1^{h*} \vec{x}' \quad (5.22)$$

$$LI_0^h \vec{x} = \vec{x}' \quad (5.23)$$

Pero $\vec{x}' = L\vec{x}$ de manera que

$$\vec{x} \in \Gamma_0^h.$$

Por lo tanto

$$\Gamma_1^{h*} \subseteq L\Gamma_0^h \quad (5.24)$$

De donde se concluye finalmente

$$\Gamma_1^{h*} = L\Gamma_0^h \quad (5.25)$$

De manera completamente análoga se demuestran:

$$L\Gamma_0^v = \Gamma_1^{v*} \quad (5.26)$$

$$K\Gamma_0^{h*} = \Gamma_1^h \quad (5.27)$$

$$K\Gamma_0^{v*} = \Gamma_1^v \quad (5.28)$$

Así que para obtener las líneas Γ_1 es suficiente con mapear las líneas Γ_0^* desde el plano Σ^* al plano Σ . Esto es de gran utilidad ya que, en los planos Σ y Σ^* , a partir de los ejes q y p se pueden obtener todas las líneas de simetría.

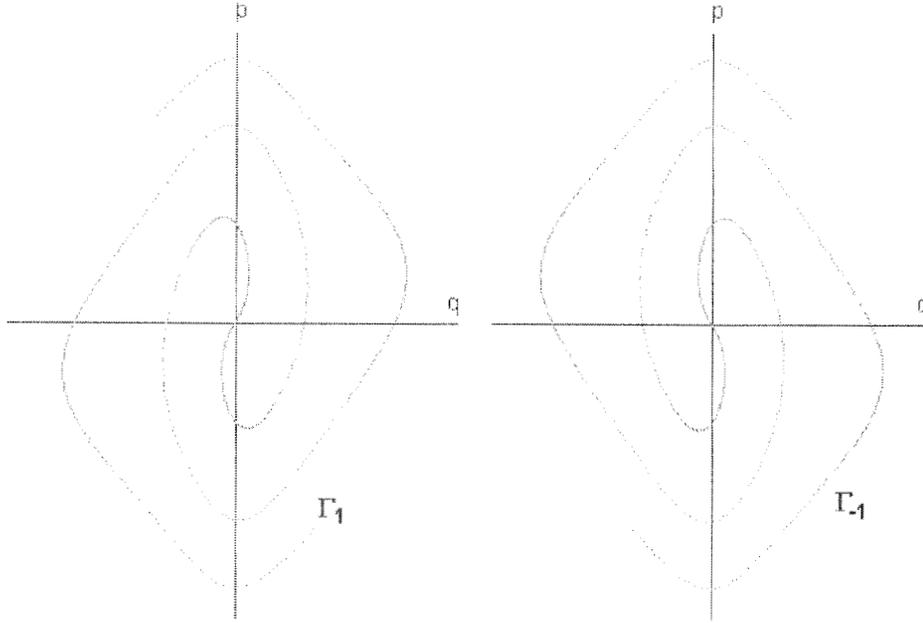


Figura 5.3: Líneas Γ_1^h y Γ_{-1}^h

Como una forma de verificar que las líneas así obtenidas son realmente las Γ_1 , se obtuvieron las Γ_{-1} mapeando las líneas Γ_0^* hasta Σ , integrando en sentido inverso; confirmandose que cumplen con la relación esperada

$$\Gamma_{-1} = I_0 \Gamma_1$$

Estos resultados pueden generalizarse: Partiendo de la relación obtenida en el capítulo 2, $\Gamma_{2j+i} = M^j \Gamma_i$, puede escribirse:

$$\Gamma_{2j+1} = M^j K \Gamma_0^* \quad (5.29)$$

$$= (KL)^j K \Gamma_0^* \quad (5.30)$$

$$= KM^j \Gamma_0^* \quad (5.31)$$

$$\Gamma_{2j+1} = K \Gamma_{2j}^* \quad (5.32)$$

En particular, considerese una órbita de periodo par que no tenga puntos sobre Γ_0 en el plano Σ , únicamente sobre Γ_1 ; por (5.32) ésta línea proviene de la Γ_0^* , de

manera que esta órbita periódica puede localizarse en el plano Σ^* sobre alguno de los ejes.

En principio sólo en los cruces de líneas de una misma simetría se encuentran puntos periódicos. Sin embargo, se presentan cruces de las líneas de la simetría vertical con sus negativas correspondientes en el eje horizontal, la línea Γ_0^h , de manera que existen puntos \vec{x} tales que

$$\vec{x} \in \Gamma_i^v \cap \Gamma_{-i}^v \cap \Gamma_0^h \quad (5.33)$$

Por la definición de líneas de simetría:

$$M^i I_0^v \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow I_0^v \vec{x} = M^{-i} \vec{x} \quad (5.34)$$

$$M^{-i} I_0^v \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow I_0^v \vec{x} = M^i \vec{x} \quad (5.35)$$

De manera que

$$M^{-i} \vec{x} = M^i \vec{x} \quad (5.36)$$

$$\vec{x} = M^{2j} \vec{x} \quad (5.37)$$

Pero $\vec{x} = I_0^h \vec{x}$, sustituyendo

$$\vec{x} = M^{2i} I_0^h \vec{x} \quad (5.38)$$

$$\vec{x} = I_{2i}^h \vec{x} \quad (5.39)$$

O sea que $\vec{x} \in \Gamma_{2i}^h$, por lo tanto:

$$\vec{x} \in \Gamma_{2i}^h \cap \Gamma_0^h \quad (5.40)$$

es un punto periódico y su periodo es algún divisor de $2i$. De manera análoga $\vec{x} \in \Gamma_i^h \cap \Gamma_{-i}^h \cap \Gamma_0^v$ implica que

$$\vec{x} \in \Gamma_{2i}^v \cap \Gamma_0^v \quad (5.41)$$

Capítulo 6

RESULTADOS

6.1 Caso integrable

En la figura 1 se muestra el mapeo de Poincaré para $e = 0$, puede observarse el comportamiento esperado: órbitas regulares alrededor del origen, donde cada órbita corresponde a un valor de energía constante.

En las figuras 2 y 3 se presentan las líneas de simetría, $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, las líneas con índice negativo son reflexiones de las líneas con índice positivo; las líneas intersectan a los ejes transversalmente, mostrando la existencia de puntos de periodo 1, 2, 3, 4 y 6, todas se intersectan en el origen el cual es un punto fijo del sistema. Son evidentes las dos simetrías que el sistema presenta, horizontal y vertical, de manera que lo que sucede en un cuadrante se repite en los otros tres.

En la figura 4 se muestran en el plano Σ las líneas Γ_0 y las Γ_1 , en éstas puede verse claramente la "torción" producida por el mapeo $L : \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ al aplicarlo sobre los ejes coordenados. Como se mostró en los capítulos anteriores, a partir estas dos líneas se generarán todas las siguientes.

Cada una de las Γ_1 presenta en total cinco intersecciones con la línea Γ_0 correspondiente: el origen, por el que cruzan todas las líneas, dos puntos de periodo 1 y otros dos que son sus reflexiones.

Figura 1. Mapeo de Poincaré

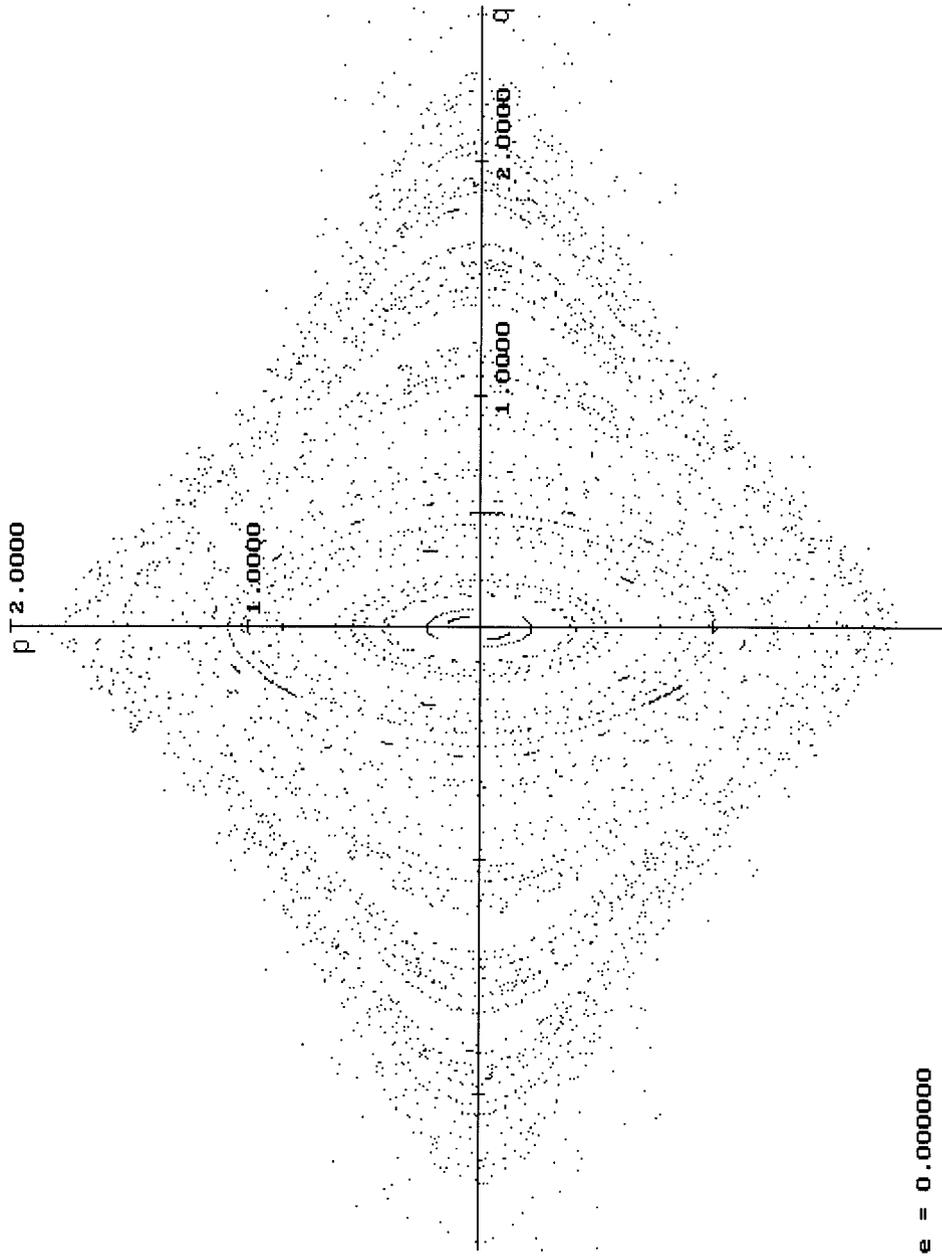
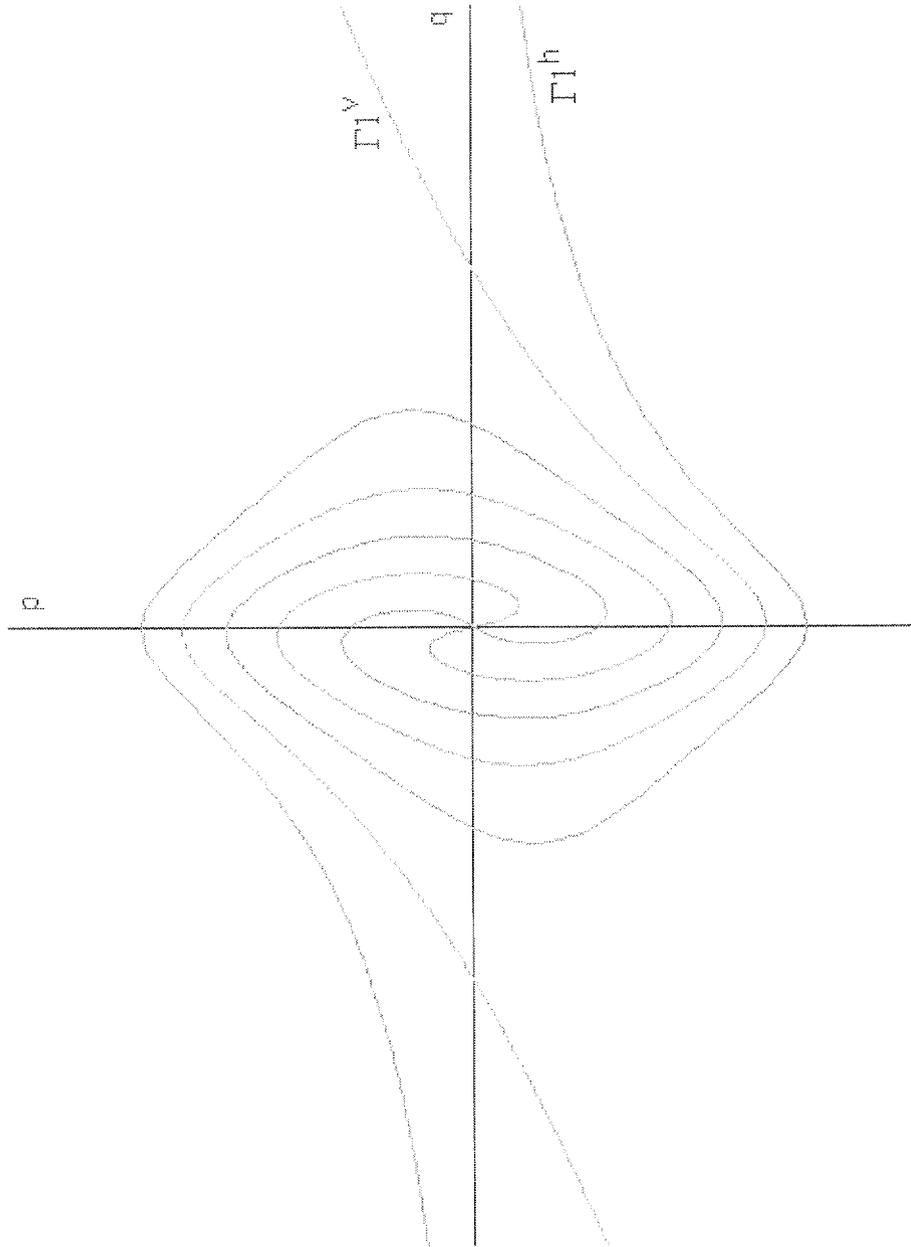


Figura 4. Líneas Γ_1



6.1.1 Líneas Γ_2

En la figura 5 se muestran las líneas Γ_2 , éstas ilustran el efecto del mapeo de Poincaré M sobre los ejes coordenados. Recorriéndolas desde los extremos que aparecen del lado derecho hasta su intersección en el origen, cada una de las Γ_2 cruza alguno de los ejes, las Γ_0 , en once puntos. El área comprendida entre las líneas Γ_2^h y Γ_2^v corresponde al mapeo de uno de los cuadrantes.

La siguiente tabla muestra cada una de las órbitas periódicas localizadas sobre cada una de las líneas Γ_2 tal como están numeradas en la figura 5:

No.	$\bar{x}' \in \Gamma_2^h$	$\bar{x}' \in \Gamma_2^v$	Periodo
1	(0.0000, -1.8319)	(3.0647, 0.0000)	4
2	(-1.8486, 0.0000)	(0.0000, -1.7192)	2
3	(0.0000, 1.6132)	(-1.3409, 0.0000)	4
4	(1.0437, 0.0000)	(0.0000, 1.5073)	1
5	(0.0000, -1.3976)	(0.8396, 0.0000)	4
6	(-0.6849, 0.0000)	(0.0000, -1.2813)	2
7	(0.0000, 1.1547)	(-0.5591, 0.0000)	4
8	(0.4499, 0.0000)	(0.0000, 1.0131)	1
9	(0.0000, -0.8479)	(0.3487, 0.0000)	4
10	(-2.2457, 0.0000)	(0.0000, -0.6403)	2
11	(0.0000, 0.3137)	(-0.1130, 0.0000)	4

Tabla 1.

Todos estos puntos se obtienen por medio del mapeo de puntos sobre la parte positiva de los ejes.

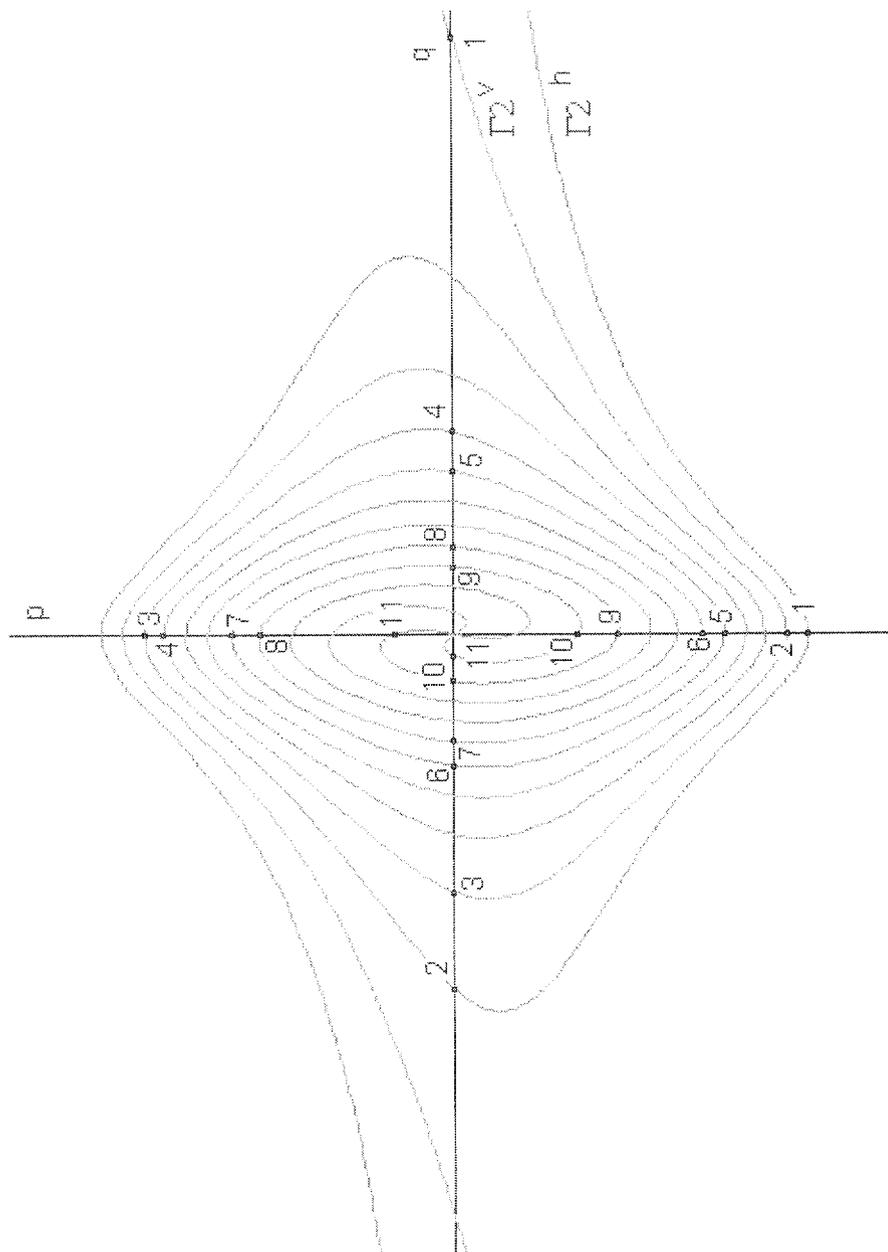
$$M \begin{pmatrix} q_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_i \\ p'_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_i \\ p'_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, 11$$

Los puntos provenientes de la parte negativa son reflexiones de los primeros, por lo que no aportan más información.

Figura 5. Líneas Γ_2



Analizando la línea Γ_2^h (el análisis para Γ_2^v es completamente análogo), la primer intersección se presenta sobre el eje vertical en $\vec{x}'_1 = (0.0, -1.8319)$; este es un punto de periodo 4, $\vec{x}'_1 \in \Gamma_2^h \cap \Gamma_{-2}^h$, el cual proviene del punto $\vec{x}_1 = (3.4954, 0.0)$, $\vec{x}_1 \in \Gamma_4^h \cap \Gamma_0^h$, y ha sido "rotado" $1/4$ de vuelta por efecto del mapeo M .

$$M \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

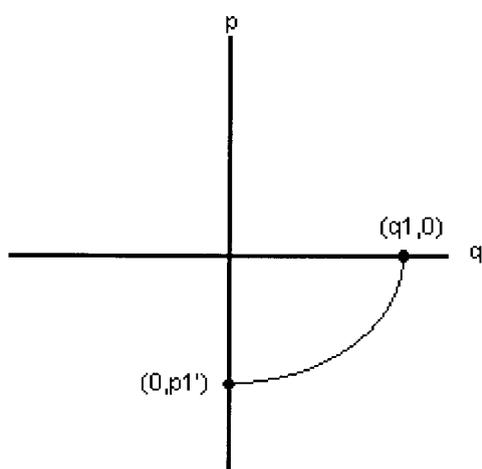


Figura 6.

La segunda intersección ocurre sobre el eje horizontal en $\vec{x}'_2 = (-1.8486, 0.0)$ y corresponde a un punto de periodo 2, $\vec{x}'_2 \in \Gamma_2^h \cap \Gamma_0^h$; éste proviene del mapeo de $\vec{x}_2 = (1.8486, 0.0)$. Un punto es reflexión del otro, de manera que este último ha sido rotado media vuelta por el mapeo M .

$$M \begin{pmatrix} q_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

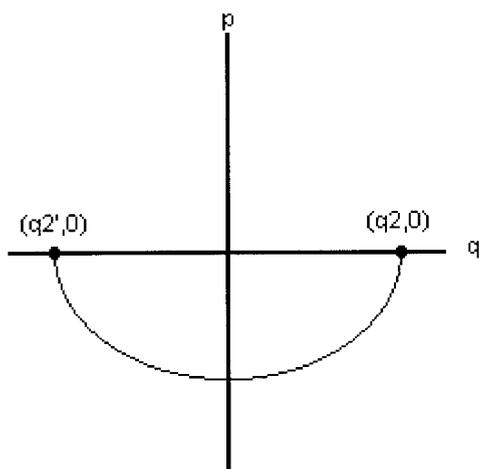


Figura 7.

La tercer intersección $\vec{x}'_3 = (0.0, 1.6132)$ es un punto de periodo 4, $\vec{x}'_3 \in \Gamma_2^h \cap \Gamma_{-2}^h$; el cual proviene de $\vec{x}_3 = (1.3409, 0.0)$, $\vec{x}_3 \in \Gamma_4^h \cap \Gamma_0^h$, un punto que ha sido rotado $3/4$ de vuelta por el mapeo M .

$$M \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p'_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

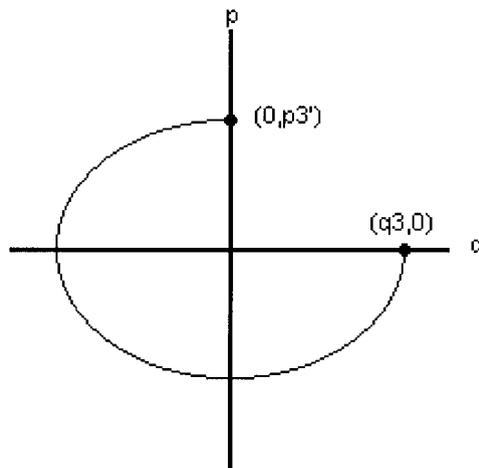


Figura 8.

La cuarta intersección corresponde a un punto de periodo 1 en el eje horizontal, $\vec{x}'_4 \in \Gamma_2^h \cap \Gamma_0^h$, el cual es rotado una vuelta por efecto del mapeo M hasta caer sobre él mismo; esto es, $\vec{x}_4 = \vec{x}'_4 = (1.4037, 0.0)$ (ver figura 9).

$$M \begin{pmatrix} q_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

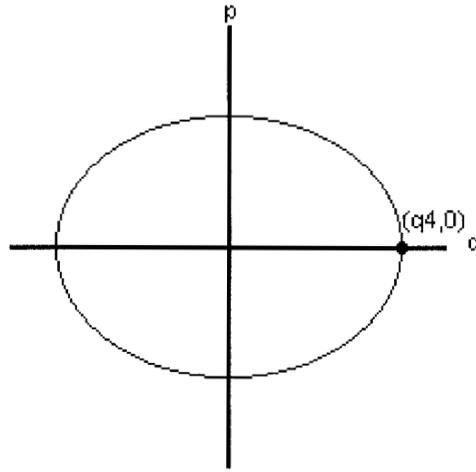


Figura 9.

Continuando así sucesivamente, las siguientes intersecciones corresponden a puntos que han sido rotados por efecto del mapeo M : $5/4$, $3/2$, $7/4$, 2 , $9/4$, $5/2$ y $11/4$ de vuelta respectivamente. Puede observarse que en la vecindad del origen, existen puntos de la línea Γ_2^h provenientes de puntos sobre Γ_0^h que han sido rotados más de $11/4$ de vuelta pero sin llegar a tres vueltas.

Las siguientes líneas se generan como mapeos de las Γ_0 y Γ_1 , cada mapeo corresponde a una torción de menos de tres vueltas; este hecho permitirá establecer un cota al número de órbitas de un periodo dado.

6.1.2 Órbitas periódicas

Hay dos periodos que deben distinguirse:

- P . El periodo en el mapeo de Poincaré, el cual es un número entero positivo.
- T . El periodo de tiempo, medido en unidades del ángulo ψ , que toma el tercer cuerpo en regresar a la posición y velocidad iniciales, el cual es un múltiplo racional de 2π .

En esta sección se describen las órbitas hasta $P = 4$, clasificadas de acuerdo a la simetría en la que son detectadas. En las figuras se muestra q como función de ψ , módulo 2π .

$P = 1$. En la figura 10 puede observarse que las órbitas localizadas sobre Γ_0^h en el plano Σ , cruzan el plano Σ^* con $p = 0$, de manera que en este plano también se localizan en el eje horizontal. Análogamente, en la figura 16 puede observarse que las órbitas localizadas sobre Γ_0^v en un plano, se localizan en el mismo eje en el otro.

Para la órbita número 4 en la tabla 1, $T = 2\pi$; para la número 8 en la tabla 1, más cercana al origen, $T = \pi$.

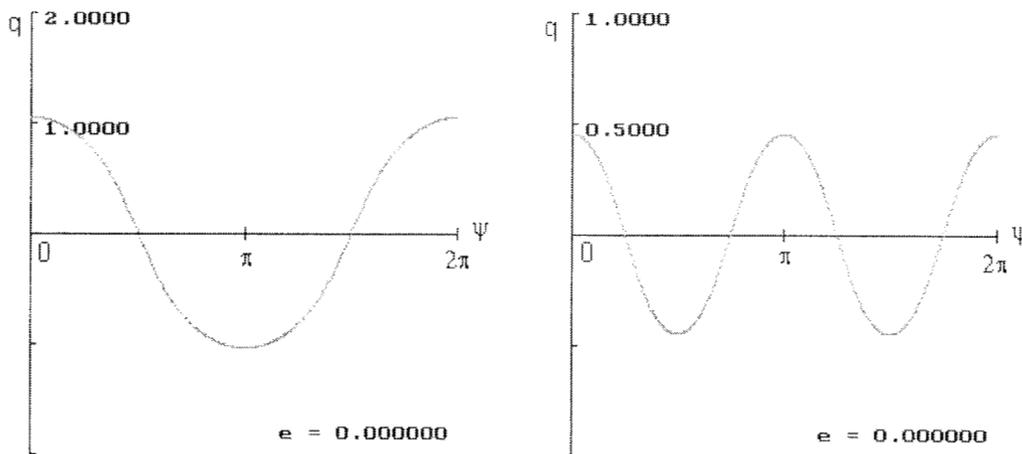


Figura 10. Órbitas $P = 1; T = 2\pi, \pi$ respectivamente (Horizontal)

$P = 2$. La situación es distinta, las órbitas que en el plano Σ se localizan sobre Γ_0^v , cruzan el plano Σ^* en $q = 0$, de manera que en este plano se localizan sobre Γ_0^{h*} y viceversa. (figuras 11 y 12)

Comenzando con la más externa de estas órbitas y continuando hacia el origen, números 2, 6 y 10 en la tabla 1, sus periodos T son $4\pi, 4\pi/3, 4\pi/5$ respectivamente.

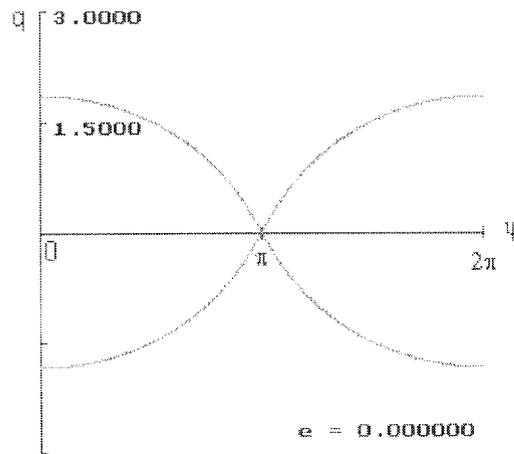
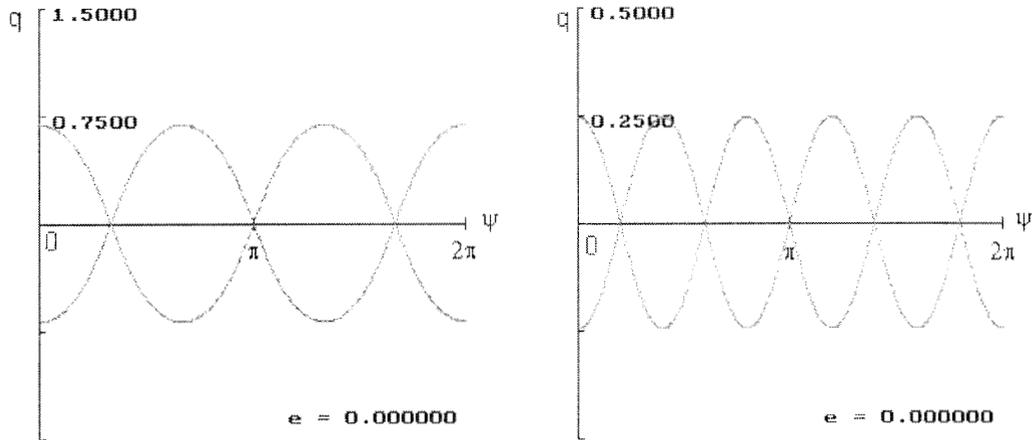


Figura 11. Órbita $P = 2, T = 4\pi$ (Horizontal)

Figura 12. Órbitas $P = 2; T = 4\pi/3, 4\pi/5$ respectivamente
(Horizontal)



$P = 3$. La figura 13 muestra las líneas Γ_3 , horizontal y vertical, cada una cruza la línea Γ_0 correspondiente en 8 puntos, en las reflexiones de éstos, y en el origen. Dos de estas intersecciones son en realidad periodos $P = 1$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_0$, de manera que existen 6 órbitas de periodo 3 las cuales están indicadas en la numeración.

La figura 14 muestra estas órbitas siguiendo el orden en el que están numeradas en la figura 13. Se presenta un caso similar al periodo 1: las órbitas se localizan ya sea sobre Γ_0^h o sobre Γ_0^v en ambos planos. Hasta este punto se puede obtener la misma información del plano Σ y de Σ^* .

Figura 13. Línea Γ_3^h

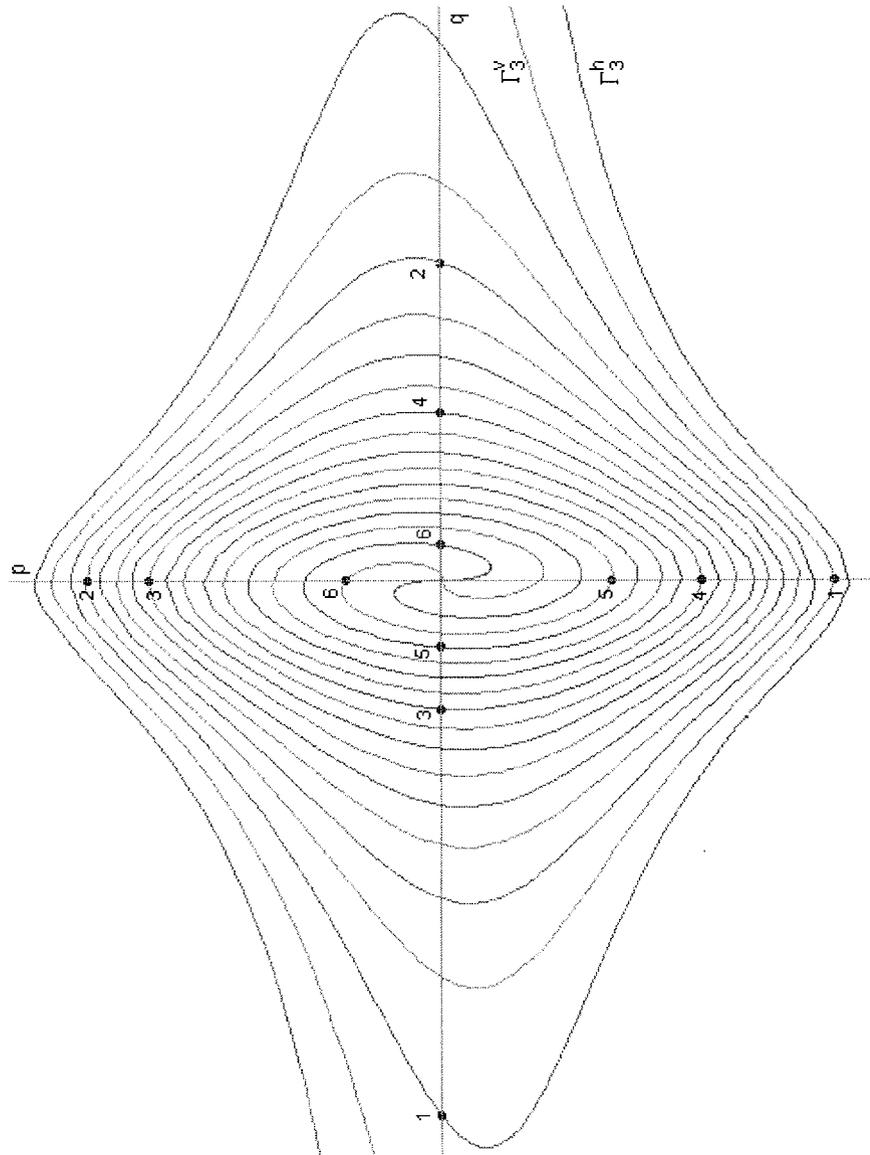
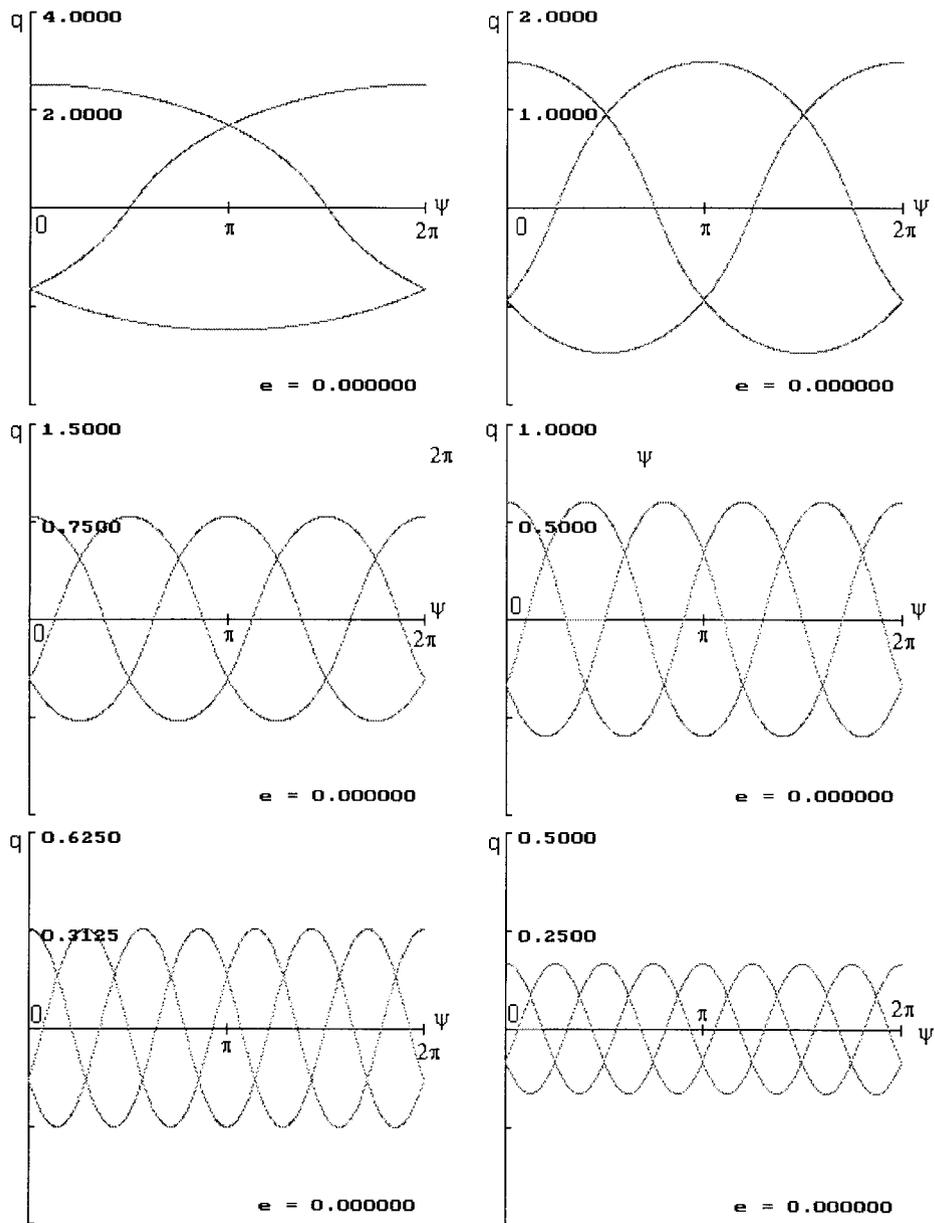


Figura 14. Órbitas $P = 3; T = 6\pi, 3\pi, 3\pi/2, 6\pi/5, 6\pi/7, 3\pi/4$ respectivamente (Horizontal)



$P = 4$. Las órbitas que tienen dos puntos sobre Γ_0^v y dos sobre Γ_0^h en el plano Σ , no cruzan el plano Σ^* sobre las líneas Γ_0^* sino sobre las Γ_1^* , ya que $\Gamma_1^* = K\Gamma_0$. De manera análoga, un ciclo que en Σ^* tienen puntos en las dos Γ_0^* , al ser mapeados a Σ estos puntos ya no están localizados sobre los ejes. Para obtener todas las órbitas de periodo 4 como intersecciones $\Gamma_4 \cap \Gamma_0$, son necesarios ambos planos.

En la figura 15 se muestran estas órbitas, las cuales se detectan tanto en el eje vertical como en el horizontal. Es inmediato verificar que al cruzar el plano Σ^* $q \neq 0$ y $p \neq 0$.

Las órbitas sobre el eje vertical presentan un comportamiento semejante al anteriormente descrito. (figuras 16, 17 y 18)

Figura 15. Órbitas $P = 4; T = 8\pi, 8\pi/3, 8\pi/5, 8\pi/7, 8\pi/9, 8\pi/11$ respectivamente

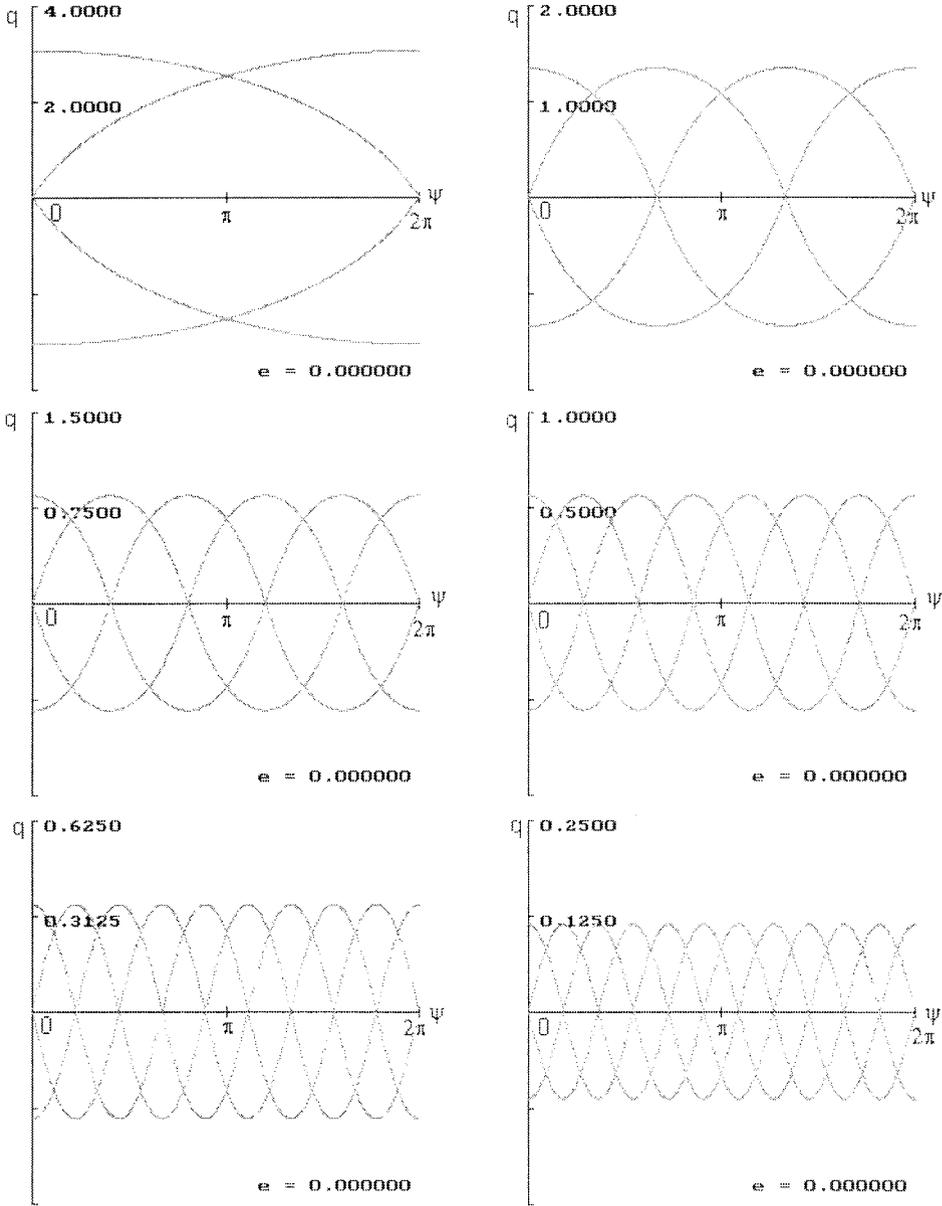


Figura 16. Órbitas $P = 1; T = 2\pi, \pi$ respectivamente (Vertical)

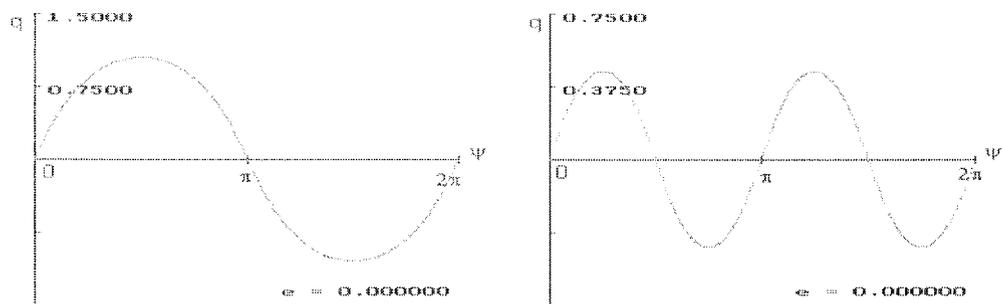


Figura 17. Órbitas $P = 2; T = 4\pi, 4\pi/3, 4\pi/5$ respectivamente (Vertical)

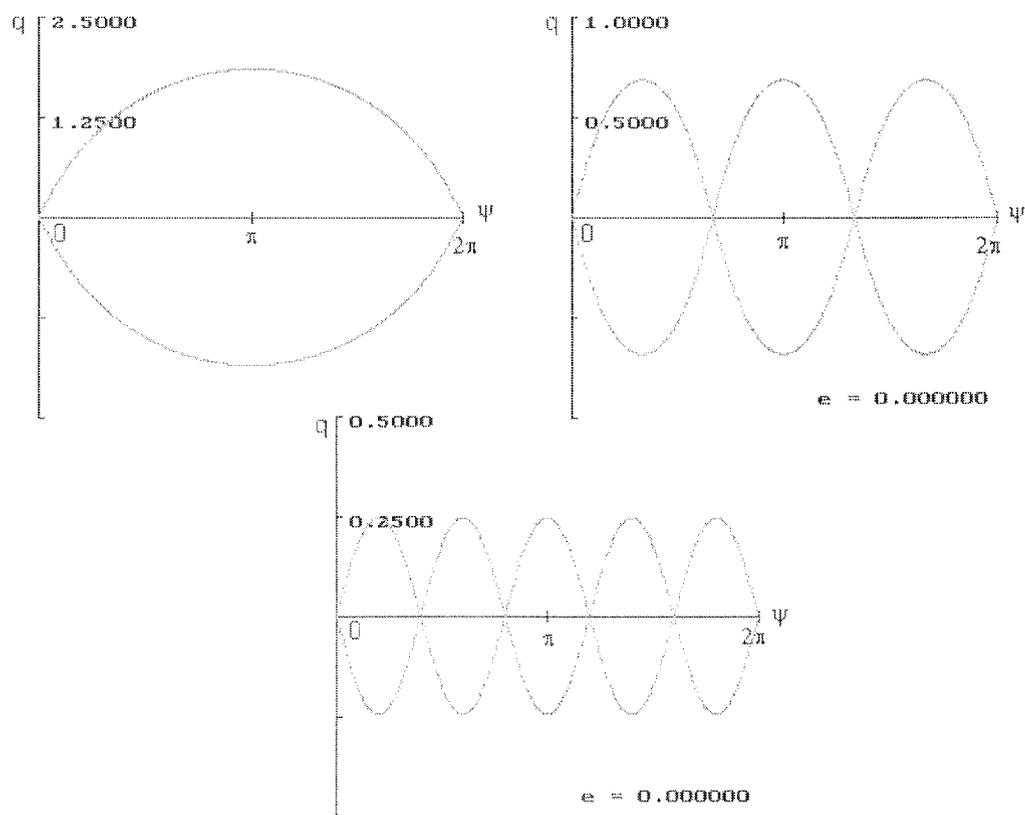
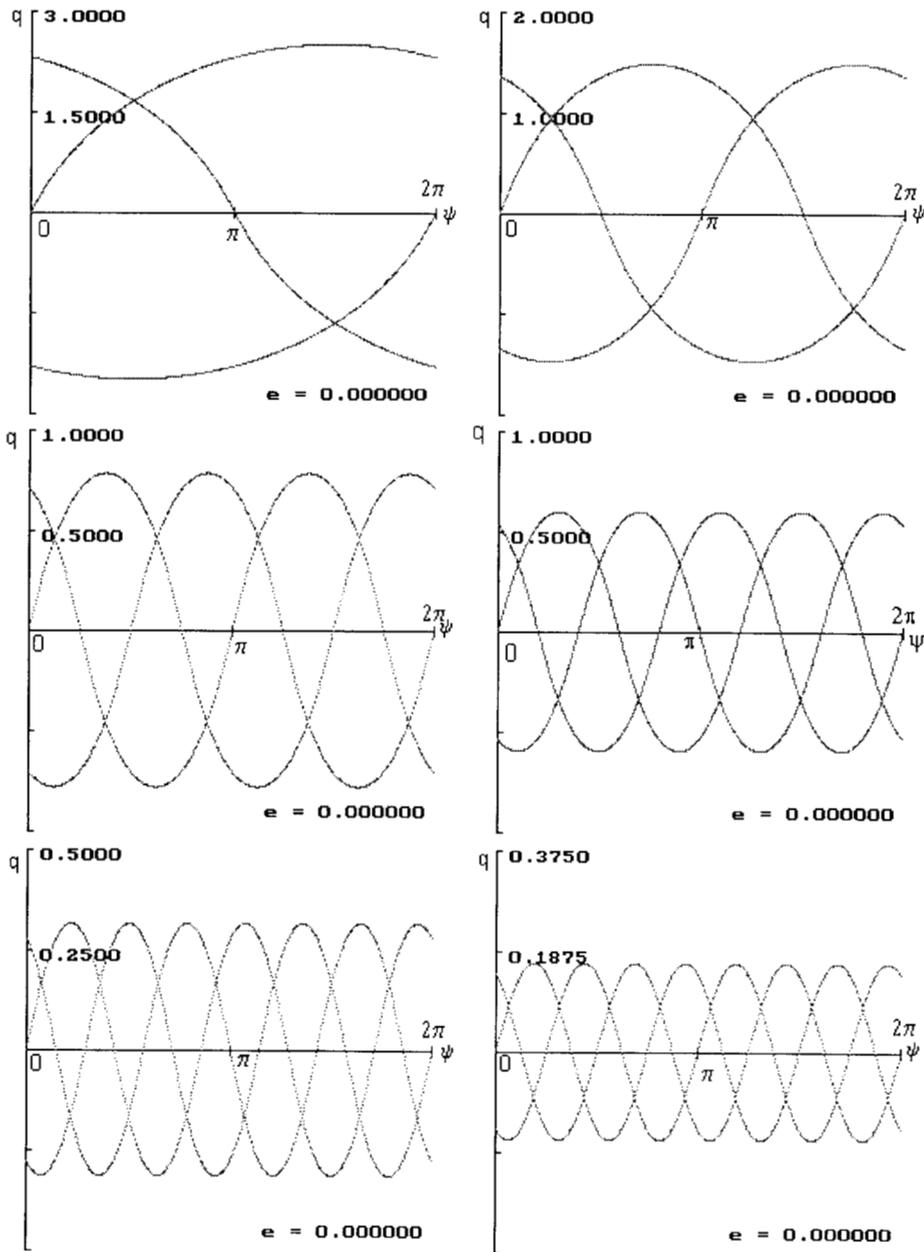


Figura 18. Órbitas de $P = 3; T = 6\pi, 3\pi, 3\pi/2, 6\pi/5, 6\pi/7, 3\pi/4$ respectivamente (Vertical)



Los resultados anteriores pueden generalizarse. Sea un punto periódico sobre el plano Σ

$$\vec{x} = M^P \vec{x}$$

se presentan dos casos:

1. P impar. Como ya se demostró en el capítulo anterior, un ciclo de periodo impar tiene un punto sobre Γ_0 y uno sobre Γ_1 . Suponiendo que la órbita tiene un punto sobre Γ_1^h , sea

$$\vec{x} \in \Gamma_1^h$$

De los resultados del capítulo anterior $L\Gamma_0^* = \Gamma_1$. Por lo tanto, en el plano Σ^* existe un punto $\vec{x}^* \in \Gamma_0^{h*}$ tal que:

$$\vec{x} = L\vec{x}^*$$

de manera que la órbita tiene un punto sobre Γ_0^{h*} . El resultado es completamente análogo para $\vec{x} \in \Gamma_1^v$.

2. P par. El ciclo tiene dos puntos en Γ_0 o dos puntos en Γ_1 . Sea un punto $\vec{x} \in \Gamma_0^h$

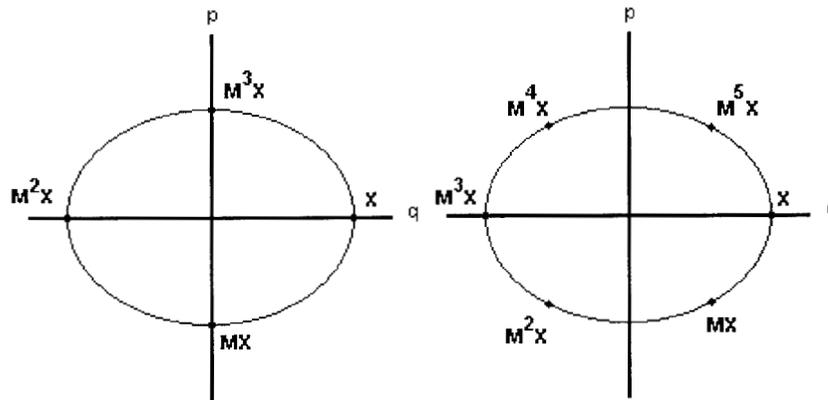


Figura 19.

Sea $P = 2i$. Si la órbita tiene la simetría I_0^v ; esto es, si como en el caso integrable su reflexión con el eje vertical es la misma órbita, se puede escribir (ver figura 19)

$$M^i \vec{x} = I_0^v \vec{x} \quad (6.1)$$

$$M^{2i} \vec{x} = M^i I_0^v \vec{x} \quad (6.2)$$

$$\vec{x} = I_i^v \vec{x} \quad (6.3)$$

Esto es, $\vec{x} \in \Gamma_i^v$. Se presentan dos subcasos:

i **impar**. Sea $i = 2j + 1$, sustituyendo en (6.3)

$$\vec{x} \in \Gamma_{2j+1} \quad (6.4)$$

$$\vec{x} \in M^j \Gamma_1^v \quad (6.5)$$

De manera que existe un punto $\vec{x}' \in \Gamma_1^v$ tal que

$$\vec{x} = M^j \vec{x}'$$

El ciclo tiene un punto sobre Γ_1^v . Pero $\Gamma_1 = L\Gamma_0^*$, así que existe, sobre el plano Σ^* , un punto $\vec{x}^* \in \Gamma_0^{v*}$ tal que

$$\vec{x}' = L\vec{x}^*$$

Por lo tanto, la órbita tiene un punto sobre Γ_0^{v*} . Este es el caso de las órbitas de periodo 2.

i **par**. Sea $i = 2j$, sustituyendo en (6.3)

$$\vec{x} \in \Gamma_{2j}^v \quad (6.6)$$

$$\vec{x} \in M^j \Gamma_0^v \quad (6.7)$$

Existe un punto $\vec{x}' \in \Gamma_0^v$ tal que

$$\vec{x} = M^j \vec{x}'$$

De manera que la órbita tiene puntos sobre Γ_0^v . Este es el caso de las órbitas de periodo 4.

Dado que $\Gamma_1^* = K\Gamma_0$, un ciclo de periodo par con puntos sobre las dos Γ_0 , tendrá puntos sobre las dos Γ_1^* . Análogamente, un ciclo con dos puntos sobre cada una de las dos Γ_1 , proviene del mapeo L aplicado a un ciclo con dos puntos sobre cada una de las dos Γ_0^* .

6.1.3 Número máximo de órbitas periódicas

Del análisis de estas órbitas, y del comportamiento de las líneas Γ_2 , puede establecerse un límite superior al número de órbitas para un periodo dado. Sea una órbita de periodo P y sea τ el periodo de los primarios ($\tau = 2\pi$)

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \\ \psi_0 + P\tau \end{pmatrix}$$

Se definen, en el plano q, ψ :

- N el número de oscilaciones que la órbita describe en el intervalo $P\tau$.
- $n = N/P$ el Número de Oscilación de la órbita.

N puede determinarse como el número de cruces de la órbita con el plano $q = 0$, con velocidad positiva, en un intervalo $P\tau$, donde N y P son primos relativos. Recorriendo los ejes en dirección al origen, las intersecciones sucesivas de las líneas de simetría 1, 2, 3 y 4 indican que los números de oscilación de órbitas periódicas siguen la secuencia:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}$$

que es la secuencia de Farey. Con base en esta definición, puede observarse que en la vecindad del origen, este número de oscilación tiene una cota superior: $N < 3$.

Para establecer con precisión este límite es necesario conocer el ángulo con el que las líneas Γ_2 cruzan el origen. Como se mostró en un capítulo anterior, para el análisis de estabilidad de una órbita de periodo P es necesario obtener los autovalores de la linealización del mapeo M^P ; considerando el origen como un punto de periodo 1, se obtienen los autovalores:

$$\lambda = 0.473070 \pm i0.881025$$

Por lo que el origen es un punto elíptico, de manera que un punto en la vecindad del origen es rotado por efecto del mapeo M , un ángulo

$$\alpha = \arctan \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}$$

Así calculado, α es el ángulo medido, en sentido positivo, desde el eje horizontal. Del estudio de las líneas Γ_2 , el ángulo que se requiere es faltante para completar, en

sentido negativo, tres vueltas: $\beta = 6\pi - \alpha$ (figura 20). Por lo tanto, la cota superior al número de oscilación se escribe

$$n < 3 - \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \quad (6.8)$$

$$n < 2.828427 \quad (6.9)$$

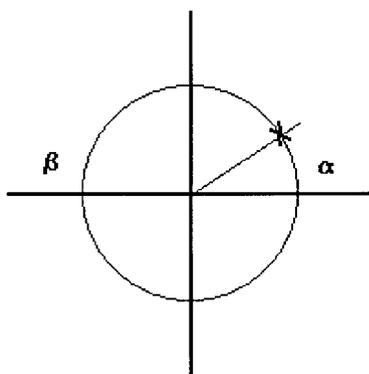


Figura 20.

Este resultado se verifica fácilmente, ya que en el caso integrable las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\frac{dq}{d\psi} = p \quad (6.10)$$

$$\frac{dp}{d\psi} = -\frac{q}{(q^2 + 1/4)^{3/2}} \quad (6.11)$$

para el caso de q muy pequeña el sistema puede aproximarse a un oscilador armónico simple:

$$\frac{dq}{d\psi} = p \quad (6.12)$$

$$\frac{dp}{d\psi} = -8q \quad (6.13)$$

con solución $q(\psi) = A \exp(\pm i\sqrt{8}\psi)$, de manera que en la vecindad del origen, las soluciones tienen un periodo

$$T = 2\pi/\sqrt{8} \quad (6.14)$$

reescribiendo el número de oscilación como el cociente del periodo de los primarios y el periodo del tercer cuerpo, para abarcar órbitas cuasiperiódicas:

$$n = 2\pi/T$$

la cota superior al número de oscilación queda determinada como:

$$n < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (6.15)$$

$$n < 2.828427 \quad (6.16)$$

6.2 Excentricidades pequeñas

Para excentricidad diferente de cero, el hamiltoniano ya no es una constante de movimiento; por consiguiente, las órbitas ya no están restringidas a las superficies de energía constante, y ya no es posible definir una separatriz entre la región de movimiento acotado y las órbitas de escape. Sin embargo, como lo establece el teorema KAM, para excentricidades suficientemente pequeñas, subsisten la mayoría de las superficies invariantes bajo el mapeo M [2].

La figura 21 muestra un mapeo de Poincaré para $e = 0.01$. Aun pueden observarse órbitas regulares cerca del origen, siendo estas las órbitas con números de oscilación más altos. En la periferia, las superficies de energía constante ha sido sustituidas por grupos de islas, tal como lo establece el teorema del punto fijo de Birkoff, rodeadas por un mar de puntos.

Al desaparecer la separatriz entre las órbitas acotadas y las órbitas de escape, órbitas que inicialmente eran acotadas pueden convertirse en órbitas de escape. En la figura 22 se muestra el mapeo de una órbita caótica que escapa al infinito, puede observarse claramente que hay una región a la cual la órbita no entra, indicando la existencia de una superficie KAM. La condición inicial de esta órbita se localiza sobre el eje horizontal entre las órbitas periódicas con números de oscilación $1/4$ y $1/2$.

En la figura 23 se muestra una órbita caótica que está confinada entre superficies KAM; la condición inicial de la órbita se localiza en el eje vertical, entre las órbitas periódicas con número de oscilación $2/3$ y $3/4$.

Figura 21. Mapeo de Poincaré, $e = 0.010$

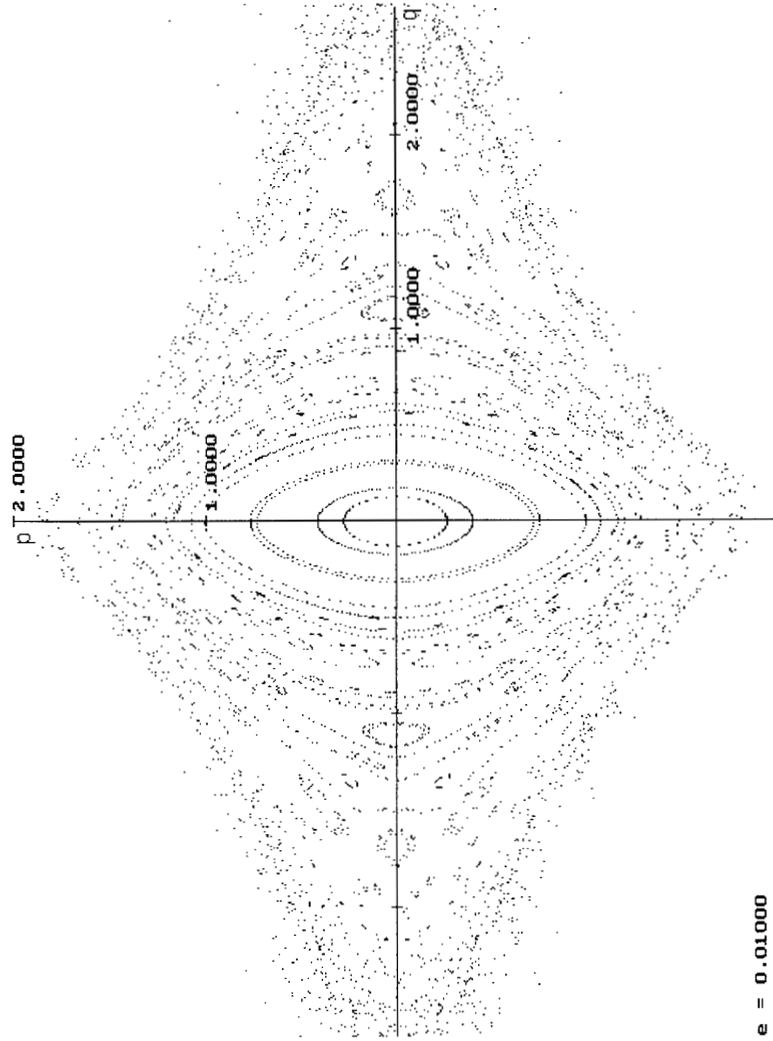


Figura 22. órbita de escape, $e = 0.010$

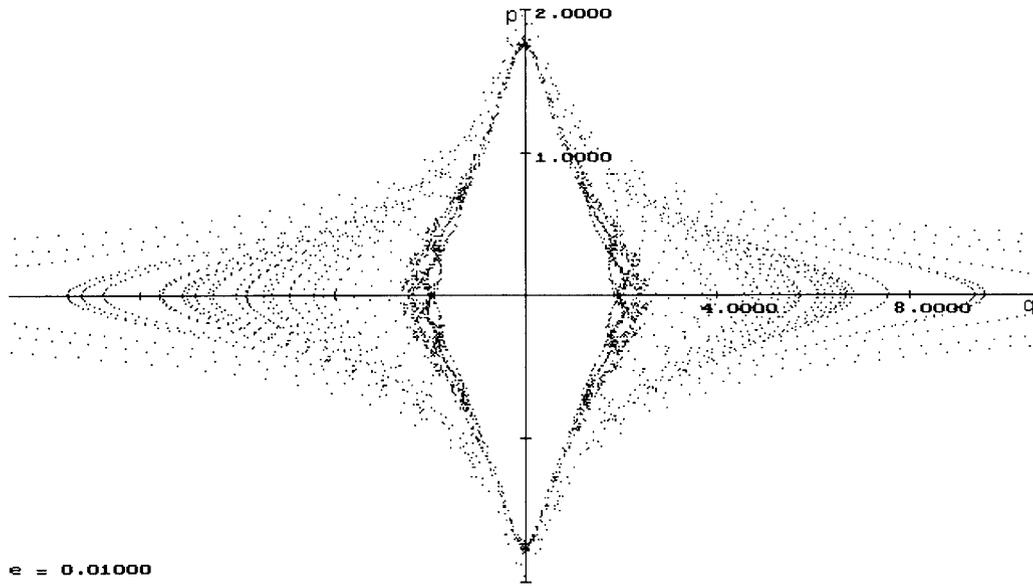
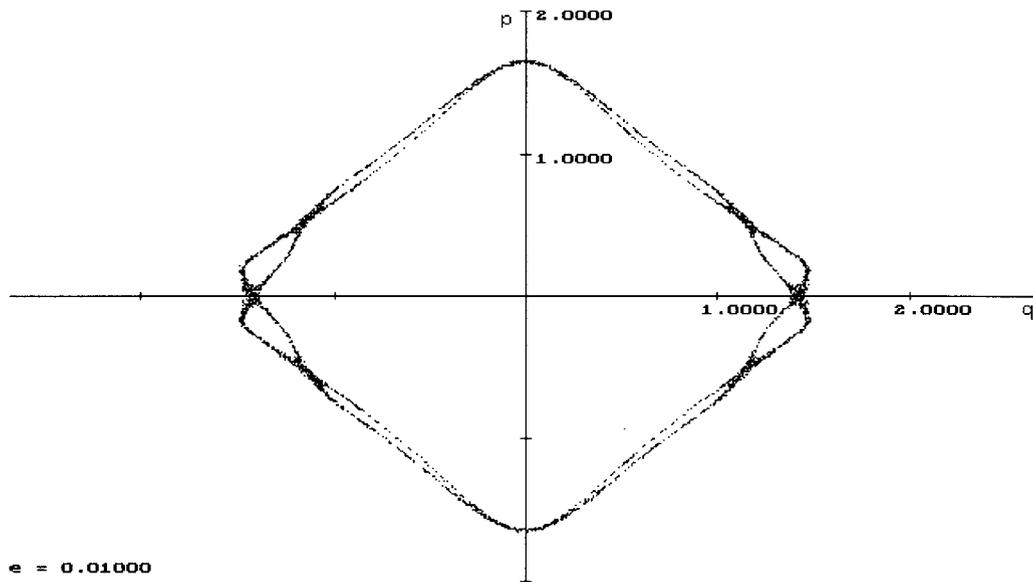


Figura 23. órbita confinada, $e = 0.010$



Para una excentricidad de 0.0625, en el mapeo aun pueden observarse órbitas estables de periodos $P = 2, 4$.

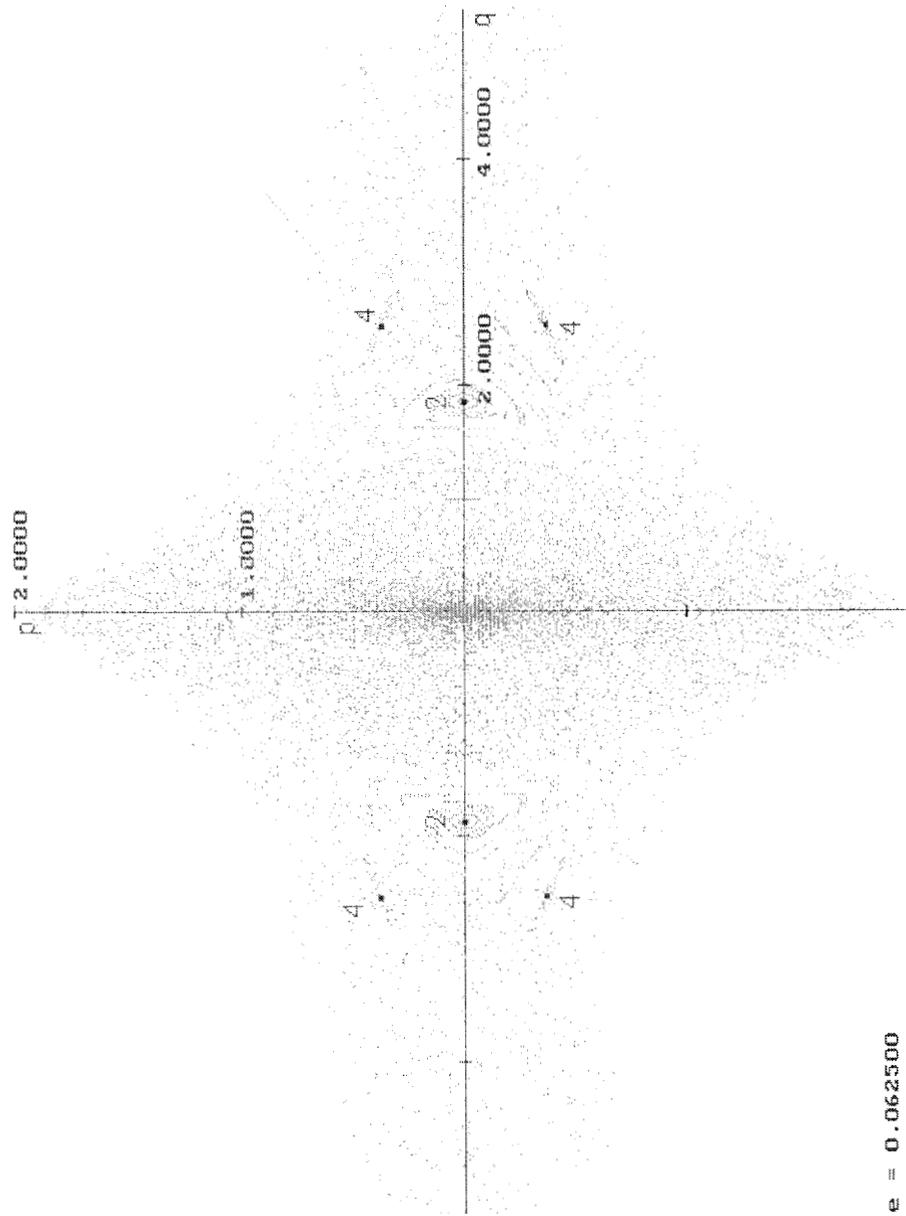


Figura 24. Mapeo de Poincaré, $e = 0.0625$

En la figura se muestran islas en torno a dos puntos de periodo 1 que parecen ser un ciclo de periodo 2, ya que un punto es reflexión del otro.

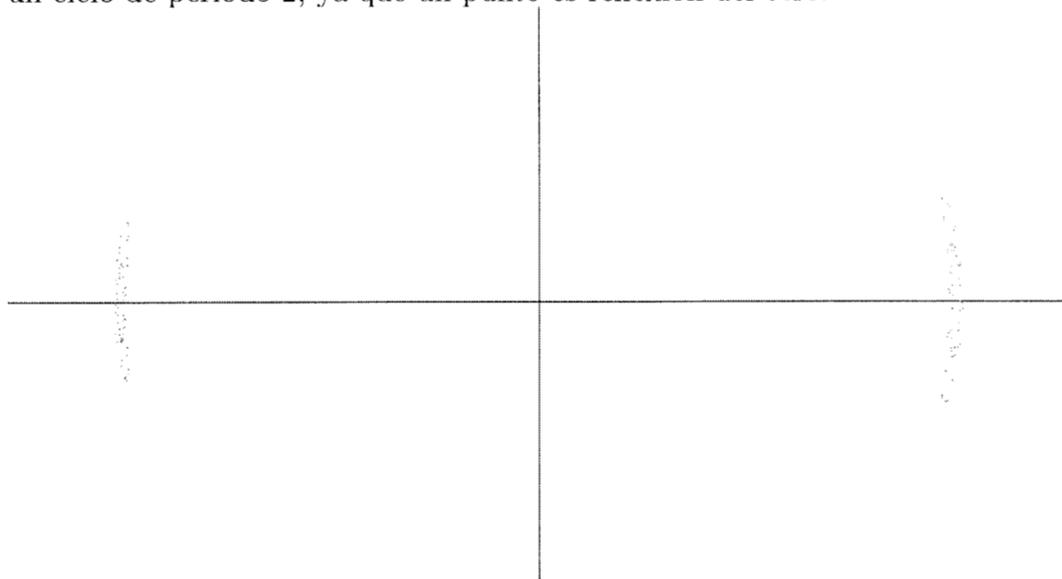


Figura 25.

En la figura se presentan islas en torno a un ciclo de periodo 2.

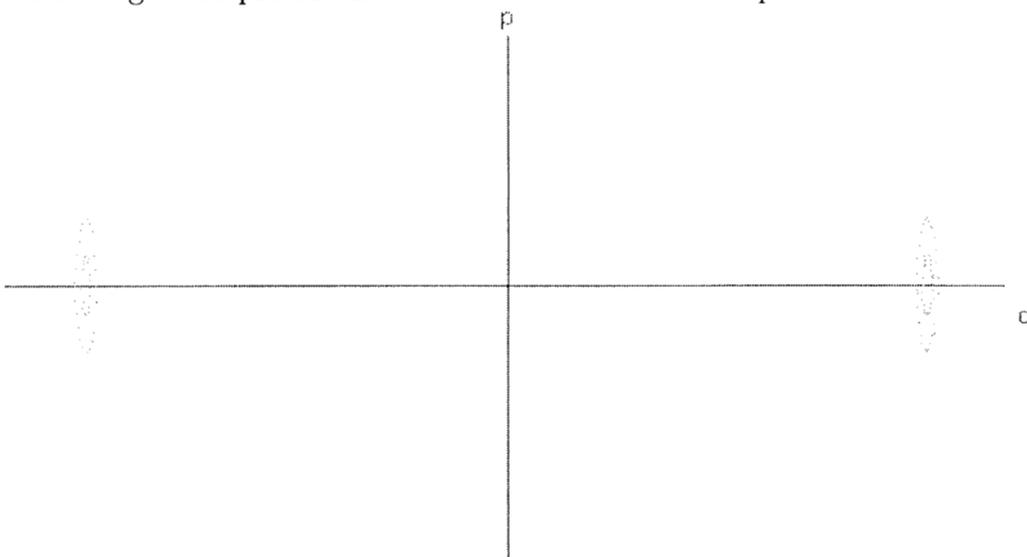


Figura 26.

6.3 Bifurcaciones

En torno a algunas órbitas provenientes del caso integrable, aparecen nuevas órbitas periódicas conforme aumenta la excentricidad de los primarios. En las intersecciones de algunas líneas de simetría con los ejes, la línea se deforma, comenzando como un punto de inflexión, hasta convertirse en una intersección tangencial la cual se convierte posteriormente en una oscilación que describe tres intersecciones transversales con la línea Γ_0 .

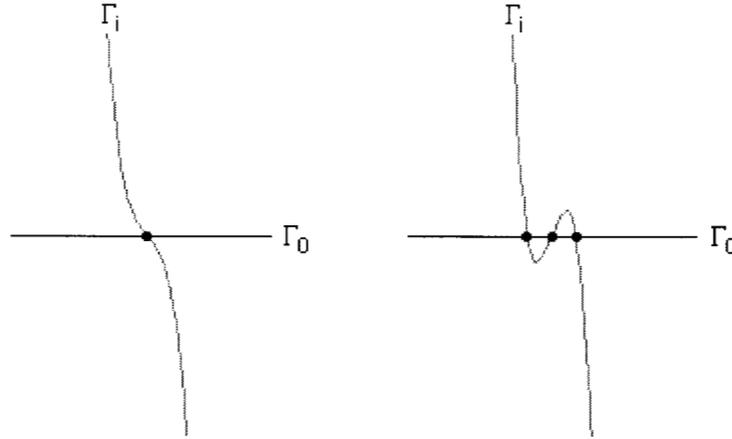
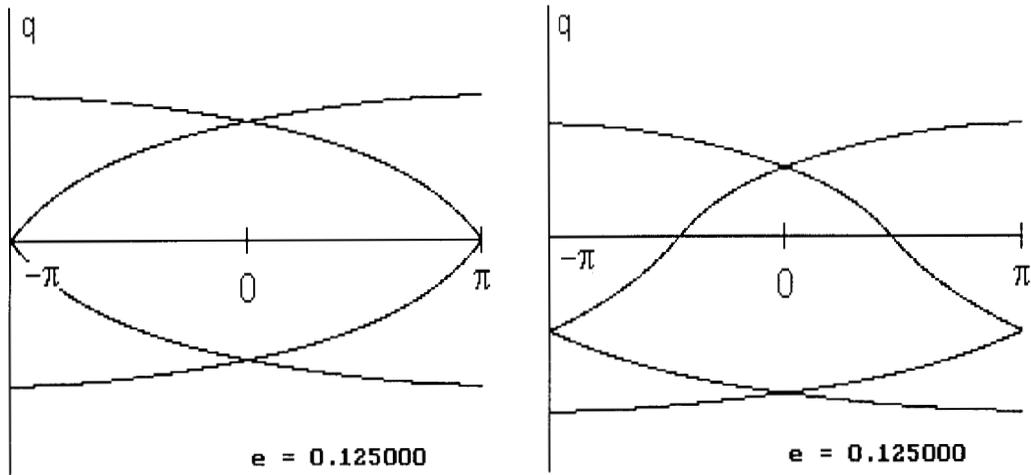


Figura 27. Aparición de nuevas órbitas

El periodo de la nueva órbita depende de la línea en la que se presenta la bifurcación, y no del periodo de la órbita en torno a la cual ocurre; por ejemplo, en un periodo 2 localizado en una intersección $\Gamma_4 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_0$, si la línea que bifurca es Γ_4 aparecerán dos órbitas de periodo 4 en torno a la órbita de periodo 2. De esta manera, pueden presentarse bifurcaciones de periodo 4 en periodo 4, de periodo 2 en 4, 2 en 2, 1 en 4, 1 en 3, etcétera. Se muestran a continuación ejemplos de estas bifurcaciones:

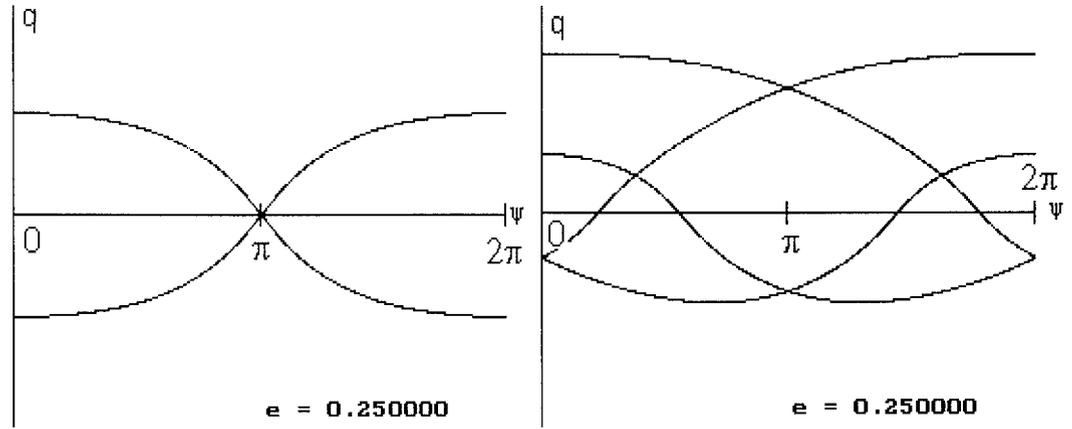
Para $e = 0.125$, en el plano Σ^* sobre Γ_0^{h*} , se encuentra una nueva órbita de periodo 4. Esta órbita no presenta la simetría I_0^{v*} , esto es, su reflexión con el eje vertical no es la misma órbita. La nueva órbita aparece como una bifurcación de la órbita con número de oscilación $1/4$, y tiene este mismo número de oscilación (ver figura 28)

Figura 28. Bifurcación de un periodo 4 en 4



Para $e = 0.25$, sobre Γ_0^h se encuentra una órbita de periodo 4 y su reflexión con el eje vertical como una bifurcación de la órbita de periodo 2 con número de oscilación $1/2$. Son dos órbitas diferentes, con condiciones iniciales simétricas, pero presentan la misma dinámica. En la figura 29 puede verse que la nueva órbita presenta dos máximos con diferente altura, de manera que requiere 4 periodos de los primarios para regresar a la posición y velocidad iniciales. Considerando el número de veces que cruza el origen con velocidad positiva, la órbita describe 2 ciclos en el intervalo $\psi = 0$ a $\psi = 8\pi$, de manera que su número de oscilación es $2/4$, donde se ha retirado la restricción de que N y P sean primos relativos. Para órbitas como esta y las descritas a continuación, es conveniente interpretar el número de oscilación como una *razón* y no como un cociente.

Figura 29. Bifurcación de un periodo 2 en 4



Para $e = 0.5$ se encuentran sobre Γ_0^h , en torno a la órbita de periodo 1 con número de oscilación 1, una órbita de periodo 4, junto con su reflexión, y dos de periodo 3; (ver figuras 30, 31 y 32) las primeras tienen número de oscilación 4/4 y las otras 3/3.

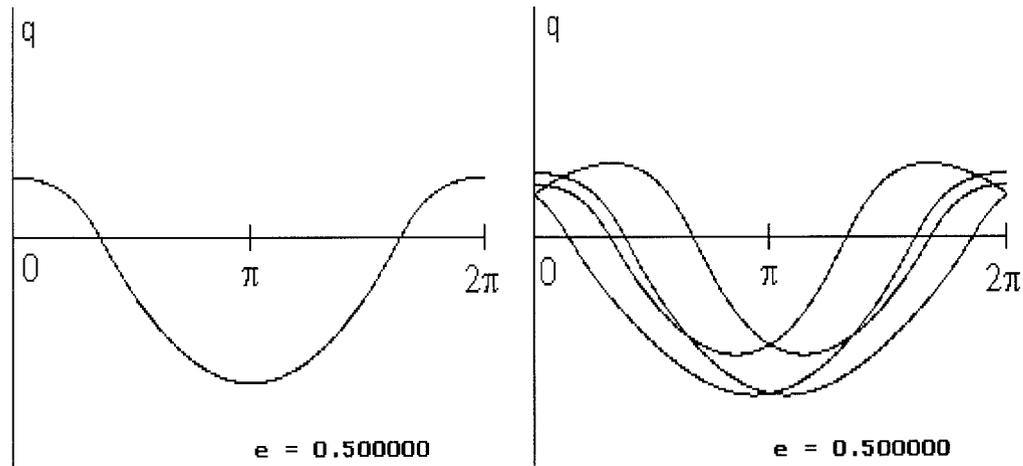


Figura 30. Bifurcación de un periodo 1 en 4

Figura 31. Bifurcación de un periodo 1 en 3

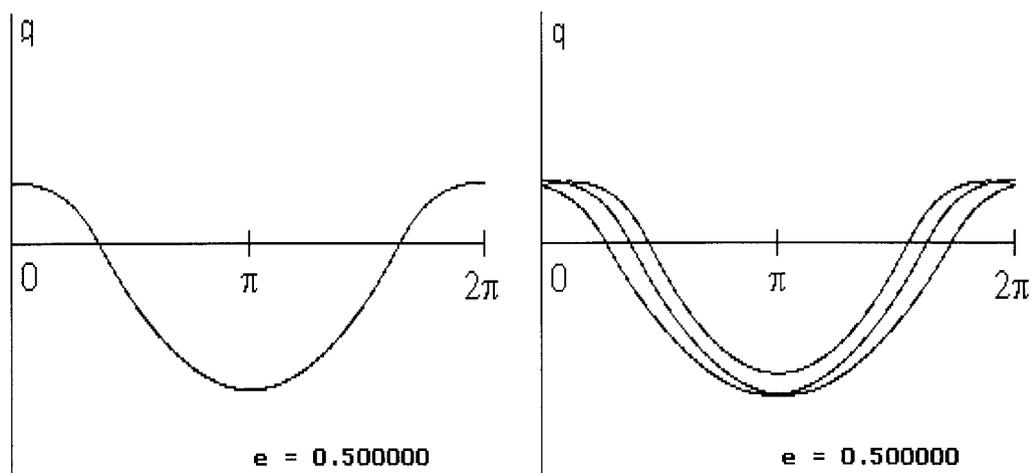
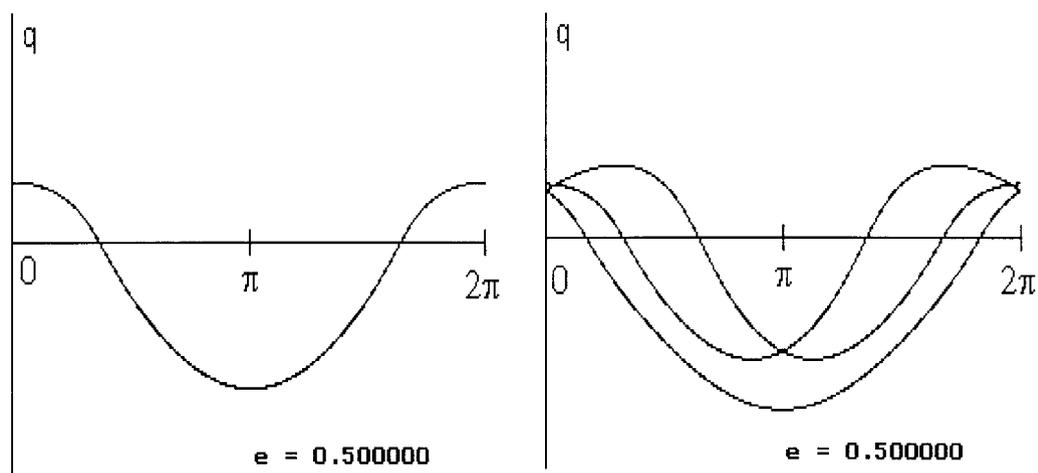


Figura 32. Bifurcación de un periodo 1 en 3



Las bifurcaciones en una línea de simetría suceden primeramente en las órbitas externas, continuando con las siguientes en dirección al origen conforme aumenta la excentricidad. La cresta y el valle descritos por la línea de simetría crecen al aumentar la excentricidad, uno hacia el centro del patrón espiral y otro hacia afuera. Esto da a lugar otro mecanismo que determina la aparición de nuevas órbitas periódicas: Al presentarse dos bifurcaciones consecutivas en la misma línea de simetría, el valle de la bifurcación exterior crece hasta intersectar tangencialmente la línea Γ_0 anidándose en la cresta de la bifurcación interior, mientras el valle de esta bifurcación crece hasta intersectar tangencialmente la línea Γ_0 anidándose en la cresta de la bifurcación exterior; posteriormente estas dos intersecciones se convierten en cuatro intersecciones transversales.

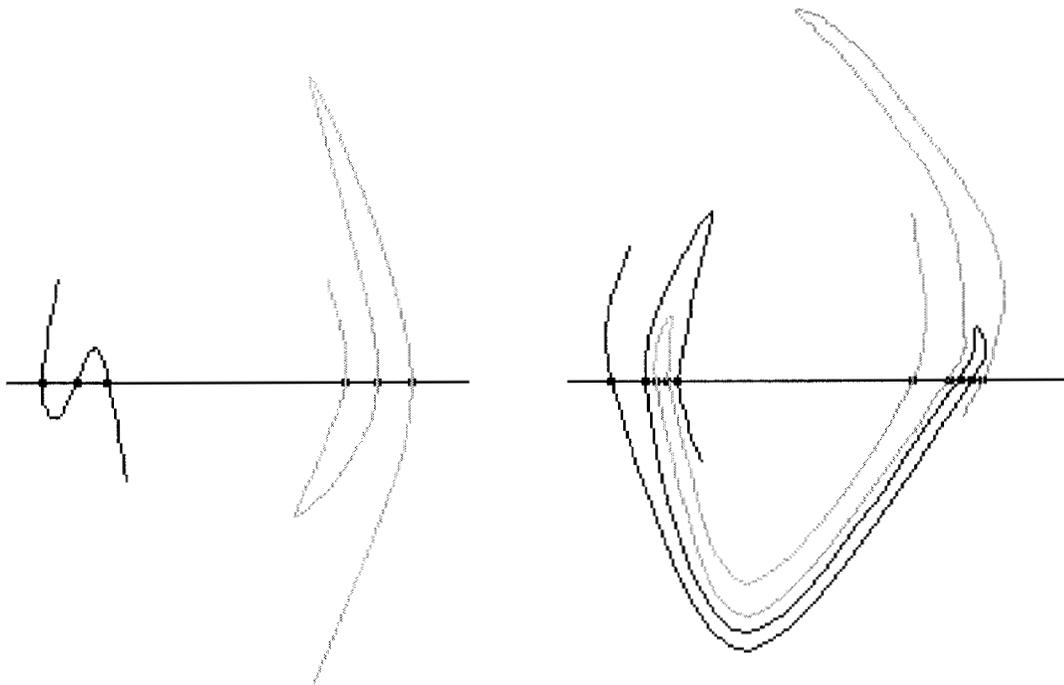


Figura 33. Aparición de nuevas órbitas

En las líneas Γ_4 ambas intersecciones se presentan simultáneamente dando lugar a dos nuevas órbitas de periodo 4, junto con sus reflexiones. Por ejemplo, para $e = 0.625$ sobre Γ_0^h , se encuentran dos órbitas con número de oscilación $3/4$. La cresta de la bifurcación que genera la órbita con número de oscilación $4/4$, interseca el eje horizontal anidándose en el valle de la bifurcación que genera la órbita con número de oscilación $2/4$; mientras que el valle de esta bifurcación se anida en la cresta de la otra.

El resultado puede generalizarse. Las crestas crecen hacia afuera del patrón espiral, de manera que en cada intersección sucesiva el número de oscilación de las órbitas que genera disminuye; mientras que los valles crecen hacia el centro del patrón espiral, de manera que el número de oscilación de las órbitas que genera aumenta. Para las órbitas de periodo 4, la diferencia entre los números de oscilación de una bifurcación dada y la siguiente es de $2/4$, las nuevas órbitas anidadas tienen un número de oscilación intermedio.

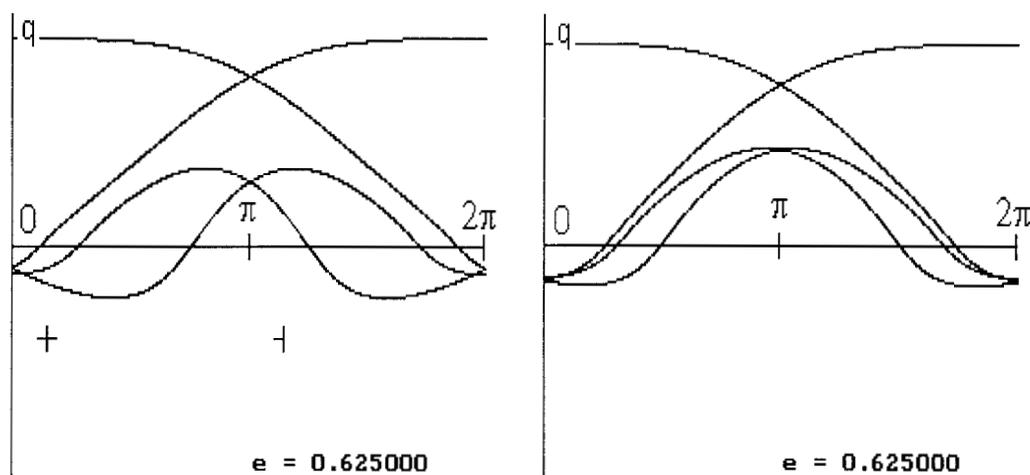


Figura 34. Nuevas órbitas de periodo 4

6.3.1 Diagramas de bifurcaciones

Graficando las intersecciones de las líneas de simetría con las líneas Γ_0 como función de la excentricidad se puede obtener una representación global del comportamiento de las órbitas periódicas del sistema. La bifurcación de una órbita periódica queda

representada en el diagrama como una ' Ψ ', con la órbita original al centro y la nuevas órbitas alejándose de ésta.

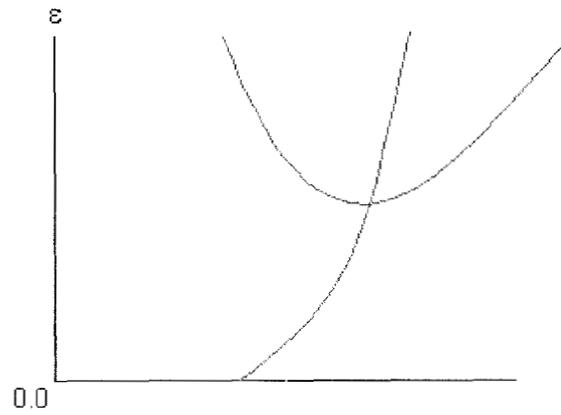


Figura 35

El anidamiento de dos bifurcaciones sucesivas queda representado en el diagrama como dos 'U', una dentro del lado izquierdo de la bifurcación interior y la otra dentro del lado derecho de la exterior (ver figura 36).

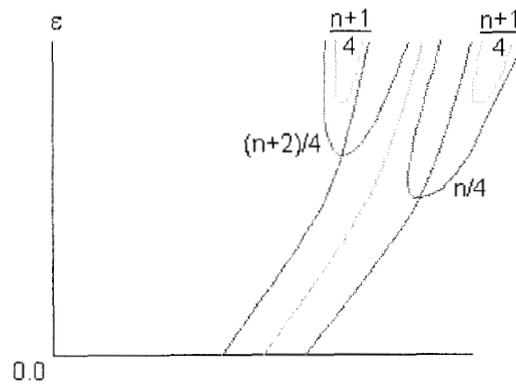


Figura 36

La cresta y el valle de una bifurcación continúan creciendo de manera que se anidan en cada una de las bifurcaciones siguientes, tanto hacia el centro como hacia afuera del patrón espiral; en el diagrama esto queda representado por series de 'U', unas dentro de otras. El número de oscilación de las órbitas que aparecen de esta forma es intermedio entre los número de las órbitas en las que se anidan. En la figura se muestran cualitativamente los anidamientos de las bifurcaciones y los números de oscilación.

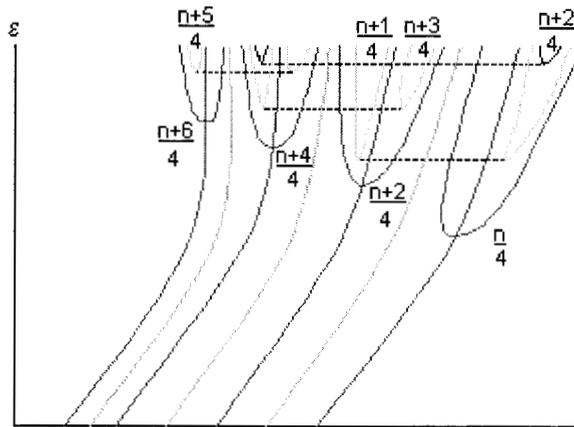


Figura 37

Las figuras 38 y 39 muestran diagramas de bifurcaciones cualitativos para las líneas 1, 2 y 4 horizontales y verticales, para valores de la excentricidad desde cero hasta 0.97. En las gráficas se indica el número de oscilación para las órbitas provenientes del caso integrable, las bifurcaciones de éstas, y las que nacen del origen.

Figura 38. Simetría Horizontal

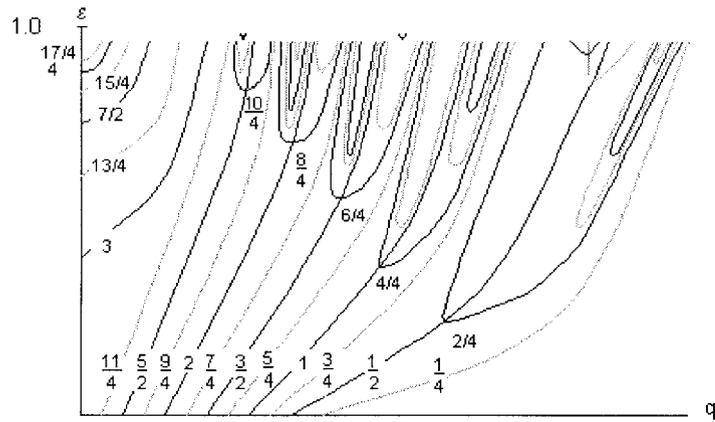
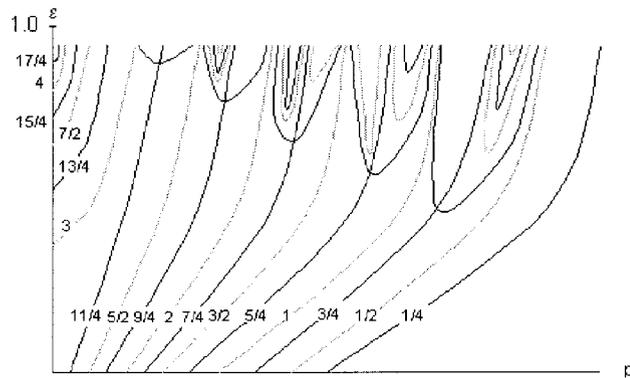


Figura 39. Simetría Vertical



Las figuras 40 y 41 son los diagramas cuantitativos correspondientes:

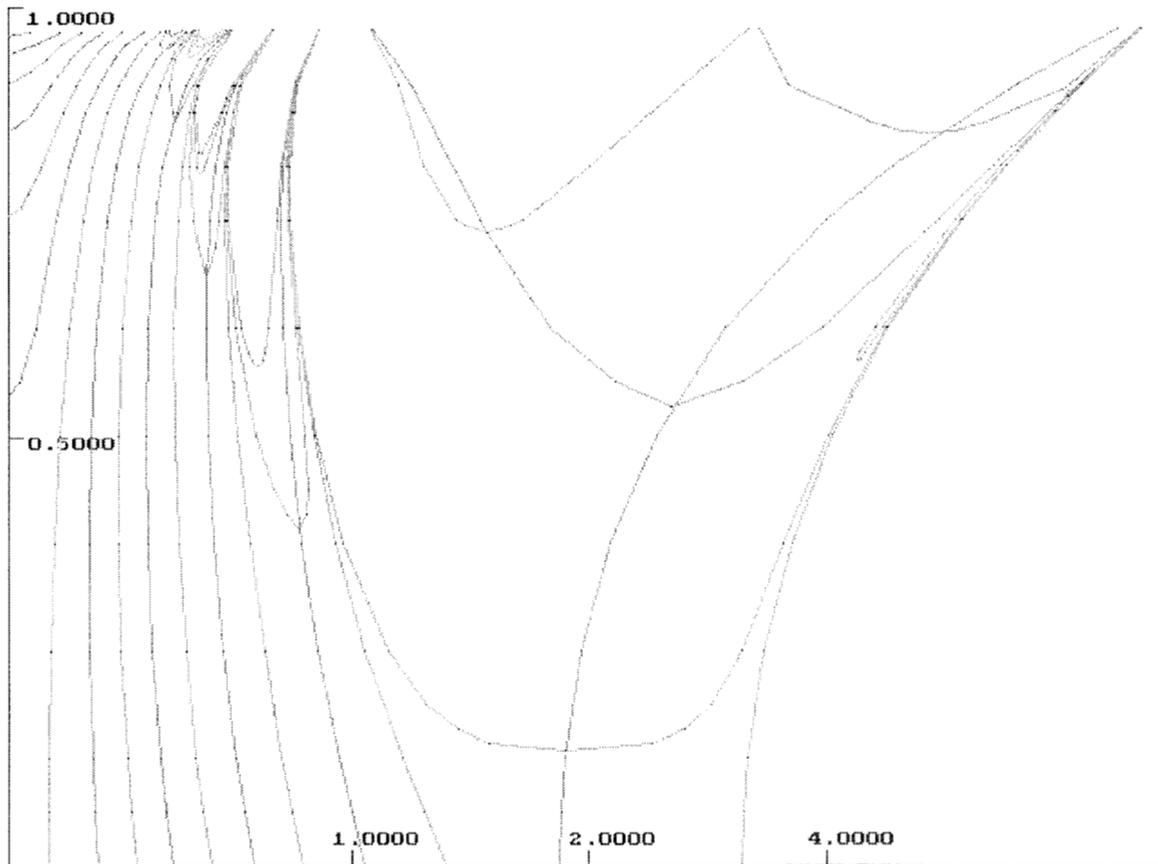
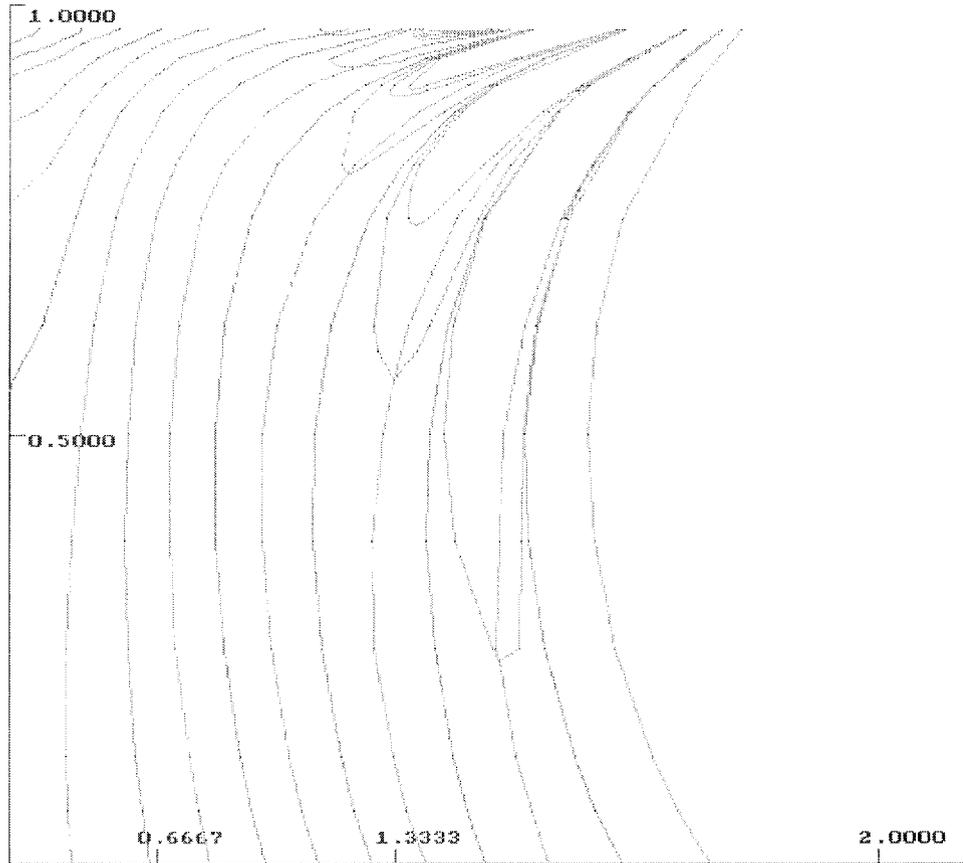


Figura 40. Simetría horizontal

La escala en el eje horizontal está graficada como $\arctan q/q_0$.

Figura 41. Simetría vertical



La escala en la dirección horizontal está graficada como $\frac{1}{\sqrt{p_0-p}} - \frac{1}{\sqrt{p_0(1+e)^2}}$.

En las figuras 42 y 43 se muestran la región cercana al origen de las líneas de simetría Γ_4^h y Γ_4^v , se indican los números de oscilación de algunas de las órbitas periódicas. Las figuras anexas 1 y 2 muestran una región mayor de estas mismas líneas.

Pueden observarse claramente las órbitas con números de oscilación $n = 17/4, 4, 15/4, 7/2, 13/4, 3$ siguiendo el patrón espiral desde el origen hacia afuera. En Γ_4^h junto a la órbita con $n = 11/4$ se encuentra la bifurcación de la órbita con $n = 5/2$ y anidada dentro de ésta, la cresta procedente de la bifurcación de la órbita con $n = 2$; es fácil ver que hay tres órbitas próximas a anidarse.

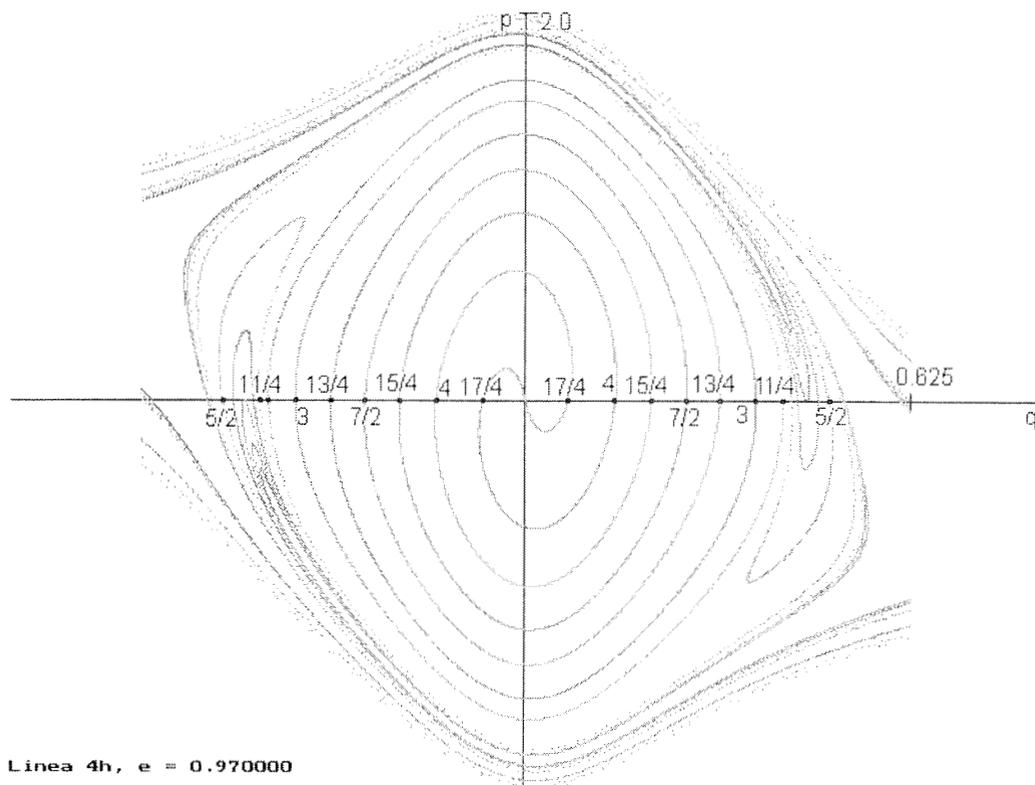


Figura 42. Línea Γ_4^h (detalle)

En Γ_4^v se ve claramente la bifurcación de la órbita con $n = 11/4$ y, en el eje horizontal, la bifurcación de la órbita con $n = 9/4$ y tres órbitas anidadas dentro de ella.

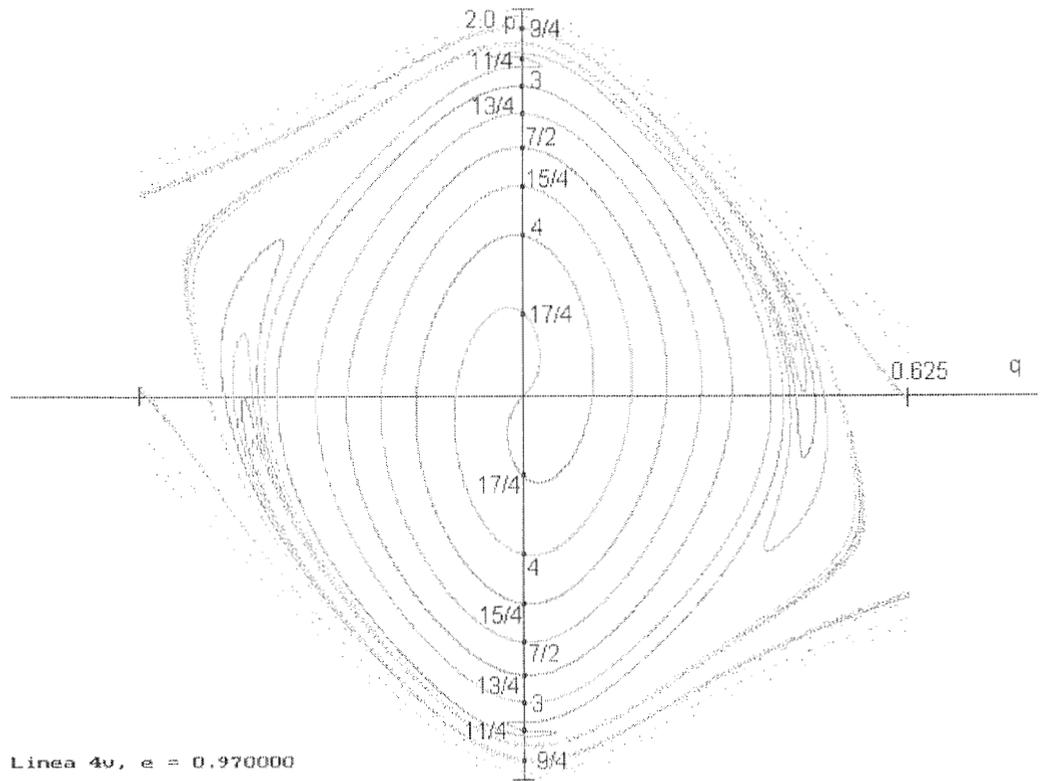


Figura 43. Línea Γ_4^v (detalle)

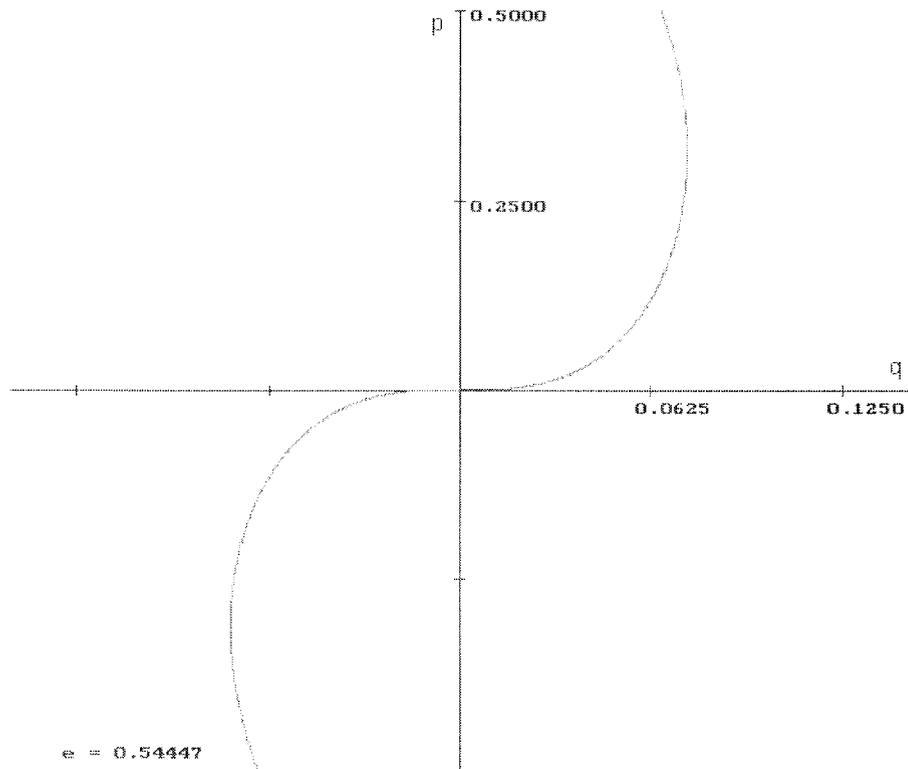
6.4 Origen

El origen es un punto fijo del sistema, sin embargo sus autovalores, considerándolo como un punto de periodo 1, cambian conforme aumenta la excentricidad. En la siguiente tabla se muestra el comportamiento de los autovalores obtenidos para el origen junto con el número de oscilación máximo asociado a él, obtenido a partir de (6.8) y del análisis de las líneas Γ_2 análogo al realizado para el caso integrable.

e	λ	n_{MAX}
0.0000	$0.47307 + i0.88102$	2.82843
0.0625	$0.48342 + i0.87539$	2.83030
0.1250	$0.51432 + i0.85760$	2.83598
0.1875	$0.56522 + i0.82494$	2.84560
0.2500	$0.63476 + i0.77271$	2.85945
0.3125	$0.71998 + i0.69399$	2.87792
0.3750	$0.81495 + i0.57953$	2.90162
0.4375	$0.90844 + i0.41802$	2.93136
0.5000	$0.98029 + i0.19755$	2.96835
0.5445	1.00000	3.0000
0.6250	$0.89982 + i0.43625$	3.07185
0.81250	$-0.69762 + i0.71647$	3.3729
0.93750	$0.91299 + i0.40798$	3.9331
0.9448	1.00000	4.0000
0.96875	$-0.39359 + i0.91928$	4.3144
0.9844	$-0.26565 + i0.96407$	4.7072
0.9906	1.00000	5.0000

Para $e = 0.54447$ el origen se comporta como un punto parabólico, este valor de la excentricidad es el reportado por Martínez Alfaro [13] como el primer valor crítico en el que no existen superficies invariantes en torno al origen. En la figura 44 es fácil ver como la línea Γ_2^h intersecta el origen tangencialmente al eje horizontal.

Figura 44. Línea $\Gamma_2^h, e = 0.54447$



Para valores mayores de la excentricidad, tanto en Γ_0^h como en Γ_0^v , se encuentra una nueva órbita de periodo 1 con número de oscilación 3.

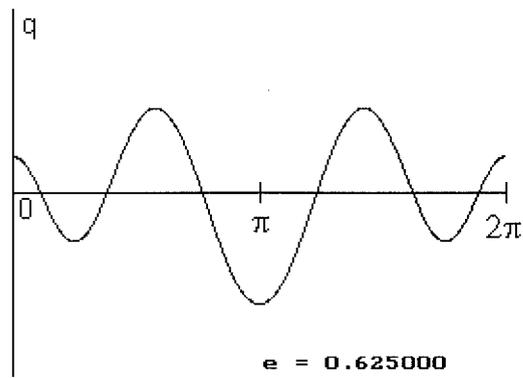


Figura 45. Nueva órbita de periodo 1

En la línea Γ_2^h esta órbita aparece como una nueva intersección con Γ_0^h cercano al origen, correspondiente a una rotación de 3 vueltas.

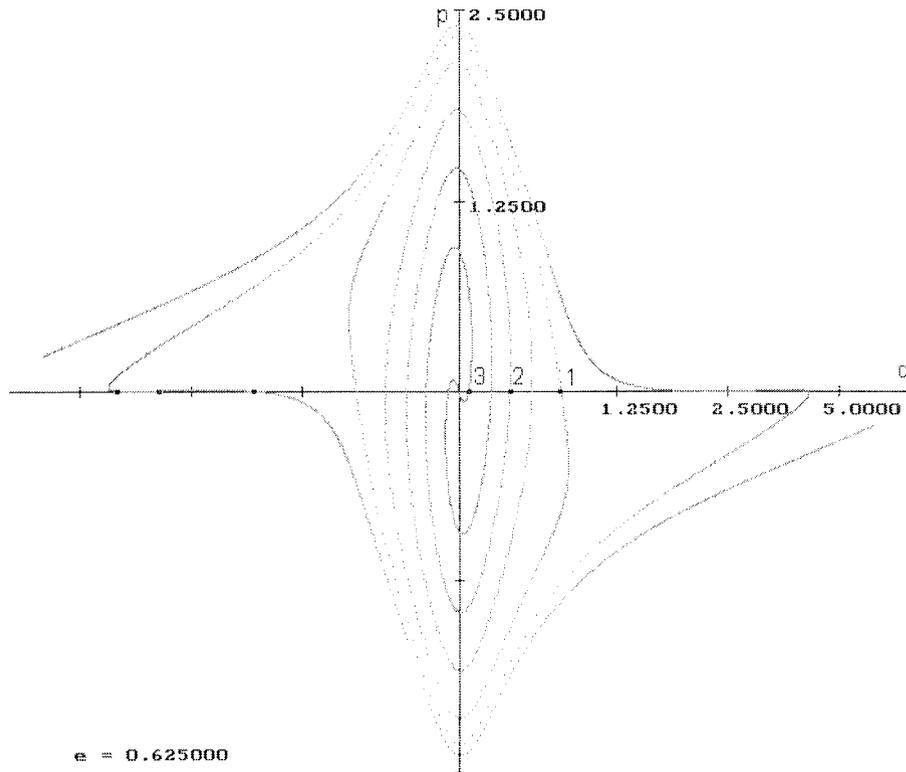


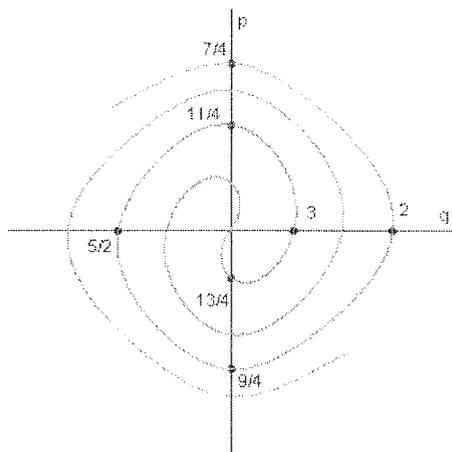
Figura 46. Línea Γ_2^h

En las figuras se puede apreciar como van surgiendo nuevas órbitas periódicas conforme la línea Γ_2^h presenta nuevas intersecciones con Γ_0^h . La órbita de periodo 1 correspondiente a un número de oscilación de 3 se muestra como referencia en todas las figuras.

Para $e = 0.8125$. La figura muestra la línea Γ_2^h en la vecindad del origen, recorriéndola hacia el centro. La primer intersección con la línea Γ_0^h corresponde a la órbita con número de oscilación 3; la siguiente intersección, con la Γ_0^h , es una órbita de periodo 4 con número de oscilación $13/4$.

Un análisis semejante para la línea Γ_3 muestra la aparición de una órbita de periodo 3 con número de oscilación $10/3$.

Figura 47. Línea Γ_2^h en la vecindad del origen, $e = 0.8125$



Para $e = 0.875$, sobre Γ_2^h , se encuentra una órbita de periodo 2 con número de oscilación $7/2$.

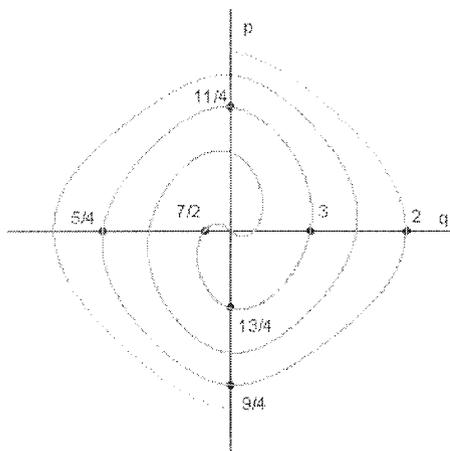
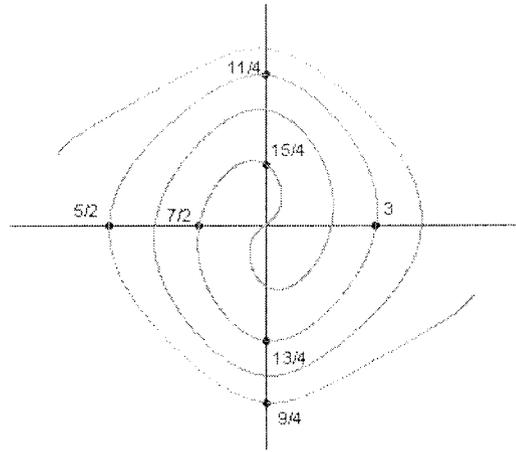


Figura 48. Línea Γ_2^h en la vecindad del origen, $e = 0.875$

Para $e = 0.9375$, sobre Γ_0^v , se presenta una órbita de periodo 4 con número de oscilación $15/4$. La línea Γ_3^h muestra la aparición de la órbita de periodo 3 correspondiente a un número de oscilación de $11/3$.

Figura 49. Línea Γ_2^h en la vecindad del origen, $e = 0.9375$



Para $e = 0.96875$, la línea Γ_2^h muestra la aparición, sobre Γ_2^h , de una órbita de periodo 1 con número de oscilación 4 y, sobre Γ_0^v , una órbita de periodo 4 y número de oscilación 17/4.

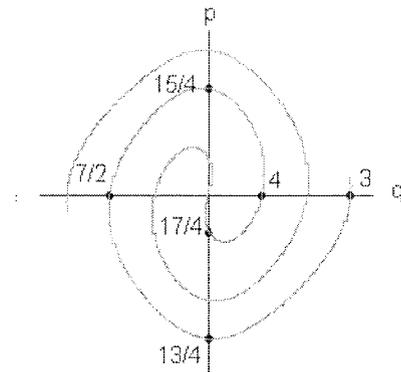


Figura 50. Línea Γ_2^h en la vecindad del origen, $e = 0.96875$

Conforme se incrementa la excentricidad aparecen nuevas órbitas, cuyos números de oscilación continúan la secuencia obtenida para las órbitas del caso integrable, que

es el orden en los números racionales:

$$3, \frac{13}{4}, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{15}{4}, \frac{11}{3}, 4, \frac{17}{4}$$

La aparición de estas órbitas está delimitada por los autovalores del origen, los cuales determinan el ángulo que son rotados los puntos de la vecindad del origen por efecto del mapeo de Poincaré, imponiendo así una restricción al número de oscilación máximo para un periodo dado.

Los valores de excentricidad que dan como resultado $\lambda = \pm 1$ fueron verificados del artículo de Martínez Alfaro [13].

Hasta los valores de excentricidad estudiados, la tendencia mostrada es que la torsión del plano fase producida por efecto de mapeo de Poincaré aumenta monótonamente; de manera que es de esperar que continúen apareciendo órbitas de periodo bajo conforme la excentricidad se aproxima a 1. En la figura es fácil ver este comportamiento.

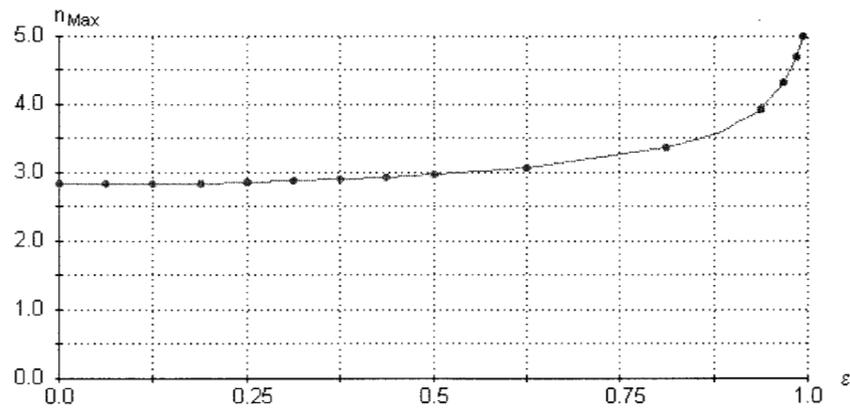


Figura 51.

6.5 Conclusiones

El número de oscilación tal como está definido, permite establecer una clasificación general de las órbitas periódicas: Por una parte, el análisis de estabilidad del origen, permite determinar una cota superior a este número para cualquier periodo dado; nada indica que esta cota superior no continuará incrementándose monótonamente conforme la excentricidad se aproxima a 1.0, de manera que continuarán apareciendo órbitas periódicas en la vecindad del origen. Por otra parte, el estudio de las líneas Γ_4 permite encontrar un patrón que permite anticipar la aparición de órbitas de periodos $P = 1, 2, 4$ y asociarles un número de oscilación; es de esperar que las nuevas órbitas que aparecen en la vecindad del origen bifurquen eventualmente y sigan este patrón, aunque no está excluida la posibilidad de otros patrones para segundas y terceras bifurcaciones.

Los resultados mostrados pueden extenderse a periodos más altos, ya que en general no dependen de los casos particulares estudiados. Un análisis semejante al de las líneas Γ_4 para las líneas Γ_6 permitiría establecer el patrón para las órbitas de periodo $P = 1, 3, 6$. En general, las líneas cuyo índice contenga muchos divisores aportan mucha información del comportamiento global; y aunque tienen también mucha información redundante, resta redundancia permite verificar la consistencia de los resultados conforme se van obteniendo.

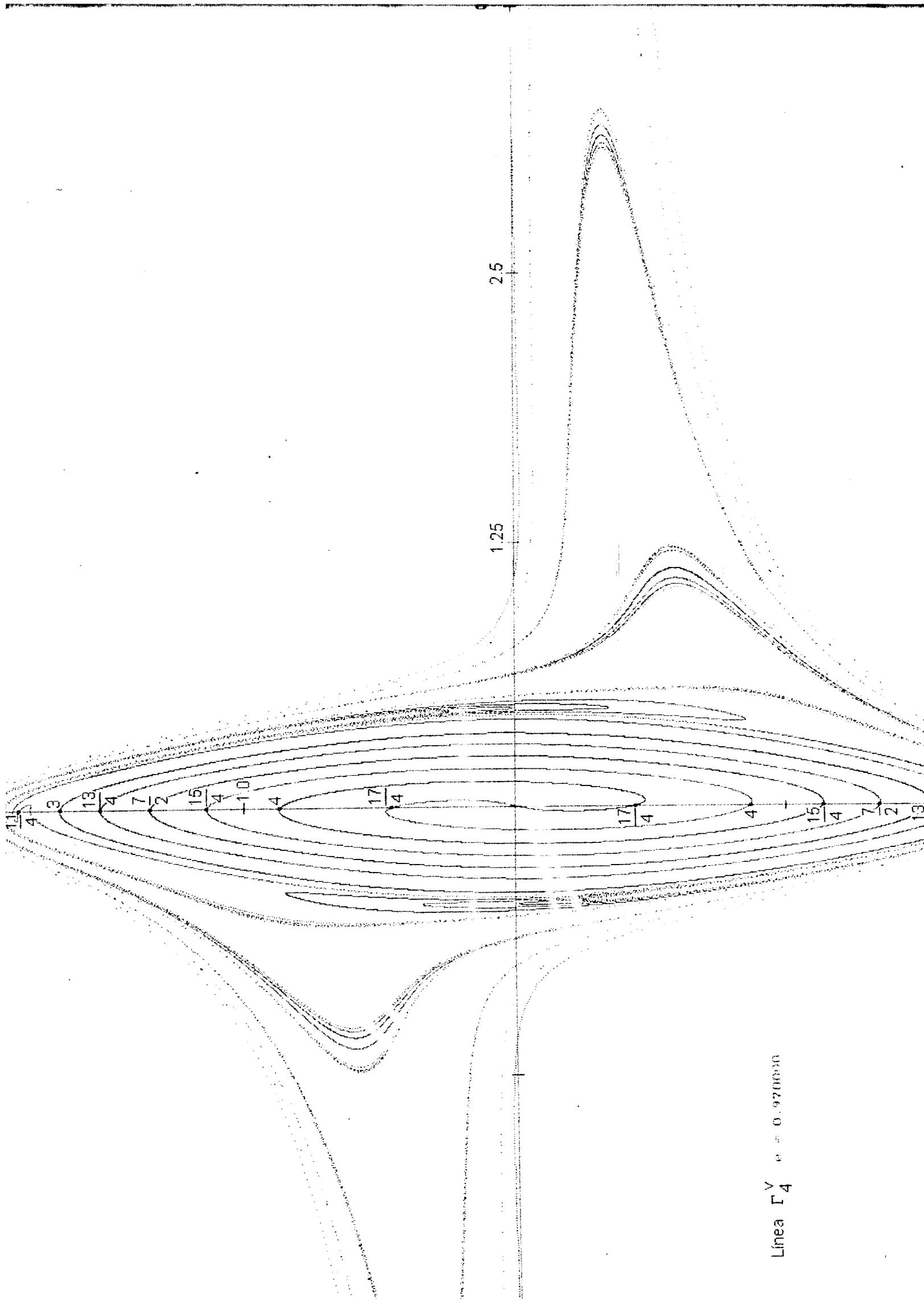
El principal problema en estudiar periodos más altos o valores de excentricidad muy cercanos a 1.0, es la distribución de las órbitas periódicas: se presentan grupos de órbitas tan próximas entre si que requieren de 4 a 6 cifras significativas para distinguirlas, y 10 a 12 cifras observar la periodicidad; estos grupos están separados unos de otros. De manera que para localizar todas las órbitas periódicas sobre una línea de simetría se requiere generar condiciones iniciales "por trazos", esto es, regiones con una gran cantidad de puntos muy próximos entre si y regiones con unos cuantos puntos simplemente para seguir la continuidad de las líneas.

Fuera del caso integrable, la amplitud de las órbitas periódicas parece estar modulada por una envolvente que también es periódica, en particular las órbitas que aparecen por bifurcación con números de oscilación $2/4, 4/4, 3/3$ etcétera. Esto sugiere que un análisis de Fourier pudiera proporcionar una descripción más completa y precisa; en particular para las órbitas que aparecen en el anidamiento de bifurcaciones, ya que su número de oscilación indica que sus propiedades pueden ser el resultado de las propiedades comunes de las órbitas en las que se encuentran.

Bibliografía

- [1] Goldstein, H. *Classical Dynamics*, Addison-Wesley, 2nd edition, 1980.
- [2] Tabor, M. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley and Sons, 1988.
- [3] Piña, E. & Jiménez Lara, L. *On the Symetry Lines of the Standard Mapping*, *Physica D* 26, 1987; pp 369-378.
- [4] Piña, E. *Notas de Mecánica clásica*
- [5] Cesari, L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 3th edition, 1971.
- [6] Marion, J. B & Thornton, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Harcourt Brace, 3th edition, 1988.
- [7] MacMillan, W. D. *An Integrable Case in the Restricted Problem of Three Bodies*, *The Astronomical Journal*, No. 27, 1913; pp 11-13.
- [8] Wodnar, K. *The Original Sitnikov Article - New Insights*, Master Thesis, Univesrity of Vienna, pp 133-161.
- [9] Sitnikov, K. *Existence of Osculating Motions for the Three-body Problem*, *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 133, No. 2, 1960; pp 302-306.
- [10] Hagel, J. *A New Analytical Approach to the Sitnikov Problem*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, No. 53, 1992; pp 267-292.
- [11] Hagel, J. & Trenkler, T. *A Computer Aided Analysis of the Sitnikov Problem*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, No 56, 1993, pp 81-98.

- [12] Dvorak, R. *Numerical Results to the Sitnikov-Problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, No 56, 1993; pp 71-80.
- [13] Martínez Alfaro, J. & Chiralt, C. *Invariational Rotational Curves in Sitnikov's Problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, No. 55, 1993; pp 351-367.
- [14] Moser, J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, 1973.
- [15] Llibre, J. & Simo, C. *Estudio Cualitativo del Problema de Sitnikov*, Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, No. 18 Abril, 1980; pp 49-71.
- [16] Cors, J. M. *Dinámica de Quatre Problemes Restringits de Tres Cossos amb Energia no-negativa* Cap. II Doctoral Tesis, Facultat de Ciències, Univ. Aut. Barcelonà, 1995.
- [17] Gradshteyn, I. S & Ryzhik, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1980.



Linea Γ_4^V $\epsilon = 0.9700000$

