Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

TESIS
EL COMPLEMENTO DE SCHUR

PARA OBTENER EL GRADO EN

MAESTRIA EN CIENCIAS

(MATEMATICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

PRESENTA

PEDRO DAMIAN OROZCO RUIZ

MATRÍCULA: 2192802638

damnovato123@gmail.com

DIRECTORES:

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

DR. HORACIO LEYVA CASTELLANOS

SEPTIEMBRE 2022

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a varias personas las cuales son las siguientes:

PEDRO DAMIAN OROZCO MONROY, MARÍA GUADALUPE RUIZ GONZALES
(Mis padres)
Gracias por todo el apoyo y su tiempo tan valioso que me dieron, aquí está el fruto de tanto esfuerzo y dedicación.

A
LIZBETH, UZZIEL, DANNA ITZEL (Mis hermanos)
EDUARDO OLIVARES SOTELO (Mi padawan)
Cada vez que vean este trabajo espero que los inspire a hacer mejores personas, que vean que las metas o sueños se pueden lograr y sin importar lo que pase deben seguir adelante.

Y
WENDY SARA VELASQUEZ ORTEGA, PEDRO DAMIAN OROZCO VELASQUEZ
(Mi esposa e hijo)
Ustedes son mi inspiración y mis ganas por vivir a ustedes les dedico este trabajo, nuestro trabajo, son lo mejor que me han pasado en la vida; espero que algún día cuando esté más grande pedrito (cochi) lea esta dedicatoria y me diga: que es esto papa; y yo le contesté: no sé, vamos a verlo. Son mi motor, a ustedes dos les dedico este primer trabajo de muchos "LOS AMO".

Agradecimientos

- Agradezco a CONACYT por darme el apoyo financiero estos años que me ayudaron a estar más en la investigación y poderme dedicar de tiempo completo.
- Agradezco a la UAM por darme todo el apoyo en estos años que llevo aquí estudiando y como siempre lo diré "DESDE QUE ENTRE A LA UAM ME HA DADO TODO LO QUE TENGO".
- Agradezco a mis padres, ellos fueron los primeros que me apoyaron en este camino para formarme como matemático desde que termine la licenciatura quería agradecerles "GRACIAS MAMA Y GRACIAS PAPA"por todo lo que hicieron por mí.
- Agradezco a mis asesores el Dr. Baltazar Aguirre Hernández y al Dr. Horacio Leyva Castellanos por ser mis guías en este camino, por nunca dejarme solo; en especial a mi asesor Baltazar Aguirre Hernández por brindarme esa oportunidad para iniciar en la maestria, su amistad y por ser muy buen profesor "LO VALORO MUCHO PROFE SIGA ASÍ".
- Agradezco aquellos que siempre estuvieron apoyándome ya sea dándome un consejo o algún apoyo para estar aqui, algunos de ellos son: el buen MARIO, el ADRIANSIN, el buen LALO, el BENJI (échale ganas), mi suegra ZENAIDA y a todos aquellos que me brindaron su amistad "MUCHAS GRACIAS".
- Agradezco al Dr. Gabriel Núñez Antonio por ser un excelente profesor, siempre se preocupó por los alumnos cuando estuvo en coordinación y por enseñarme todo lo que sé dé estadística "(EL MEJOR ESTADÍSTICO BAYESIANO)".
- Y por último, pero no menos importante quiero agradecer a mi esposa WENDY SARA VELASQUEZ ORTEGA, ya que sin ella no estaría esta tesis aquí, ella me ha alentado, ha estado en las buenas en las malas y en las peores, eres la mejor; me ha hecho mejor persona "MUCHAS GRACIAS AMOMOXO".

Introducción

El complemento de Schur surge naturalmente del proceso de invertir matrices de bloques de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

y al caracterizar estas matrices resultan ser simétricas definidas positivas o semidefinidas positivas. Estas caracterizaciones aparecen en varios problemas de optimización. En el caso más general, también se necesitan pseudo-inversas.

En esta tesis se presentan los complementos de Schur y se describen varias formas en las que se utilizan; para darnos una idea veamos lo siguiente.

Supongamos que $\det A \neq 0, \det D \neq 0$; se define el complemento de Schur de la matriz de bloque D de la matriz M como la matriz de dimensión $p \times p$:

$$M/D \equiv A - BD^{-1}C$$

y el complemento de Schur de la matriz de bloque A de la matriz M se define como la matriz de dimensión $q \times q$:

$$M/A \equiv D - CA^{-1}B.$$

Si la matriz A no es invertible o la matriz D no es invertible, entonces se pueden utilizar inversas generalizadas; y de esta manera se obtiene lo que es conocido como el complemento de Schur generalizado.

La frase "complemento de Schur" se ha utlizado en honor a Issai Schur pues este concepto fue importante en su demostración del Lema de Schur; la primera persona en utilizar el nombre de "complemento de Schur" fue Emilie Haynsworth.

El complemento de Schur es de especial importancia en el análisis de matrices, análisis numérico, estadística y en la teoría de la estabilidad de ecuaciones diferenciales y control.

En esta tesis explicamos propiedades importantes del complemento de Schur para matrices simétricas, que nos serán útiles para resolver problemas de optimización, lo cual es importante en control lineal.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo veremos un repaso de algunos conceptos que nos ayudarán a entender, un poco mejor, la idea del tema que se esta desarrollando; se espera que la persona, estudiante o académico tenga una idea de algebra lineal, la cual le ayudará a entender un poco más sobre este tema. Recordaremos también conceptos de álgebra lineal; específicamente matrices, necesarias para comprender el tema.

Primero empezaremos dando definiciones básicas, las cuales más adelante utilizaremos para mostrar algunas propiedades del complemento de Schur.

1.1. Propiedades importantes de matrices

Definición 1 *Sean* $I_m = \{1, 2, ..., m\}$, $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ *dos conjuntos finitos de índices. Llamaremos matriz de tamaño* $m\times\ n$ *sobre* K *a toda función de la forma:*

$$A : I_m \times I_n \to K$$

Normalmente identificamos la matriz como el conjunto imagen y su representación es de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ahora daremos 2 definiciones importantes de las matrices

Definición 2 *Consideremos una transformación lineal representada por una matriz A de dimensión $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, que está operando con vectores columna v en $\mathbb{R}^n$. El núcleo de esta transformación lineal es el conjunto de soluciones de la ecuación $Av = 0$ donde al 0 se entiende como el vector con entradas 0 en $\mathbb{R}^n$; la cual es la siguiente*

$$Ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^n | \ \ Av = 0\}$$

Definición 3 *El rango de una matriz es el número máximo de columnas (o filas) que son linealmente independientes. El rango por filas y el rango por columnas siempre son iguales, este número es denotado simplemente rango(A).*

con esto podemos dar unas observaciones que son muy importantes y que además ocuparemos más adelante.

Ahora veremos algunos tipos de matrices, para estar familiarizados ya que algunos conceptos los ocuparemos más adelante:

a) La matriz $0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es una matriz que tiene m filas y n columnas con elementos iguales a 0. A veces se denota a la matriz 0 como $0_{m \times n}$, la cual es la matriz cero de dimensión $m \times n$.

b)Decimos que una matriz de tamaño $n \times n$, $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonal si $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Utilizaremos la siguiente notación:

$$diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, para denotar la matriz diagonal $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $d_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, ..., n$.

Observación: La matriz diagonal que cumple $d_{ii} = 1$ para $i = 1, ..., n$, es conocida como matriz identidad (o matriz unidad) de orden n, y se denota por I_n; es decir:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

ahora utilizando la notación de la delta de Kronecker tenemos que la matriz se puede ver como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

de aquí se deduce que $I_n = (\delta_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

c) Decimos que una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$, y diremos que A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$.

d) Llamamos submatriz o matriz de bloque de una matriz A a cualquier matriz obtenida suprimiendo algunas filas o columnas de A.

Observación: Considerar A una matriz de dimensión $m \times n$ se tiene lo siguiente:

Si $m \neq n$, decimos que A es una matriz rectangular.

Si $m = n$, decimos que A es una matriz cuadrada.

Solo daremos algunas definiciones más de los tipos de matrices que ocuparemos más adelante para ir desarrollando a gran escala la idea del complemento de schur.

Definición 4 *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ llamaremos a una matriz transpuesta de A, a la matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que resulta de cambiar filas por columnas y columnas por filas de la matriz A. La matriz transpuesta de A existe y se denota por $A^\top$.*

Definición 5 *Decimos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible (o no singular) si existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Si B existe, es única y se le denomina matriz inversa de A y la denotaremos por A^{-1}.*

Definición 6 *Se dice que una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ es:*

1) Simétrica si $A = A^\top$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

2) Antisimétrica si $A = -A^\top$, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

Definición 7 *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. La matriz $A^* = (\overline{a}_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ se denomina traspuesta conjugada (o matriz adjunta); siendo $\overline{a}_{ij}$ el conjugado del número complejo a_{ij}, para $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.*

Observación: Se puede ver claramente que $(A^*)^* = A$ y cuando $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que $A^* = A^\top$.

Nótese que si

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n;$$

entonces $v^* = (\overline{v_1}, ..., \overline{v_n})$.

Definición 8 *Se dice que una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ es:*

1) Hermitiana si $A = A^*$, es decir, $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$, para $i, j = 1, 2, ..., n$.

2) Unitaria si $A^* = A^{-1}$, es decir, $AA^* = A^*A = I_n$.

3) Normal si $AA^* = A^*A$.

1.2. Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada es una matriz ortogonal si su matriz inversa es igual a su matriz traspuesta. El conjunto de matrices ortogonales constituyen una representación lineal del grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$.

Observación: Para definir la representación lineal un grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ tenemos que si A, B son matrices ortogonales, deben cumplir que $A^\top = A^{-1}$, $B^\top = B^{-1}$, y también que:

$$(AB^{-1})^\top = BA^\top = (AB^{-1})^{-1}$$

Si analizamos las propiedades geométricas de las matrices ortogonales en el caso real se puede ver que estas matrices representan trasformaciones que pueden ser rotaciones, reflexiones o inversiones. En el caso general las matrices ortogonales representan trasformaciones isométricas entre espacios vectoriales.

Definición 9 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Decimos que A es ortogonal si cumple:*

$$AA^\top = I$$

donde $A^\top$ representa a la matriz traspuesta de A, además que I representa a la matriz identidad.

Podemos dar una caracterización de tal manera que al hacer un análisis más profundo podamos encontrar propiedades interesantes de este tipo de matrices.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal. Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ los n vectores fila de la matriz A. Los elementos de la matriz $AA^\top$ pueden ser expresados por medio de estos vectores de la siguiente manera:

$$AA^\top = v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por lo que los vectores fila de la matriz ortogonal forman un conjunto de n vectores orto-normales. Dado que la expresión:

$$AA^\top = I$$

Con esto se tiene que los vectores columna de la matriz A forman un conjunto ortonormal de vectores. Con esto tenemos lo siguiente:

Definición 10 *Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es ortogonal sí, y solo si sus vectores filas o vectores columna son cada uno un conjunto ortonormal de vectores.*

Con esto se ha hecho una caracterización de las matrices ortogonales. Dada cualquier matriz, solo basta verificar la propiedad entre sus vectores fila y columna para determinar si dicha matriz es o no una matriz ortogonal.

1.2.1. Propiedades importantes de las matrices ortogonales

A continuación veremos algunas propiedades que tienen las matrices ortogonales.

1) De la definición se deduce que si una matriz es ortogonal, la matriz es no singular o invertible y su transpuesta coincide con su inversa.

2) El determinante de una matriz ortogonal A es 1 o -1. Con esto tenemos que:

$$\det(AA^\top) = \det(A) \cdot \det(A^\top) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 = \det(I) = 1$$

por lo cual se deduce que:

$$\det(A) = \pm 1$$

3) El conjunto formado por todas las matrices ortogonales y tomando como operación el producto de matrices, tienen estructura de grupo el cual es llamado grupo ortogonal y es denotado como $O(n, \mathbb{R})$. Verifiquemos que el producto es una operación cerrada, es decir si A, B son matrices ortogonales y $C = AB$, debemos ver que C también es matriz ortogonal, utilizando propiedades de matrices se ve que:

$$\begin{aligned} C \cdot C^\top &= (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^\top = (A \cdot B) \cdot (B^\top \cdot A^\top) \\ &= A \cdot (B \cdot B^\top) \cdot A^\top = A \cdot I \cdot A^\top = A \cdot A^\top = I \end{aligned}$$

es decir, $C = AB$ también es una matriz ortogonal.

1.3. Matrices por bloques

El estudio de matrices de tamaño grande ocasiona grandes dificultades, incluso aunque nos auxiliamos de las computadoras, debido a esto, es interesante la posibilidad de trasladar el problema de estudiar matrices grandes a un problema donde manipulamos matrices más pequeñas. De aquí surge la idea de que a la matriz original la visualicemos como una matriz dividida por bloques, al mismo tiempo, esta idea se puede aprovechar para hacer énfasis en la importancia de algunas de las entradas que ocupan y/o columnas adyacentes. En resolución de sistema de ecuaciones, así como de áreas aplicadas; comunicaciones o electrónica, por mencionar algunas, es donde se aprecia la idea de descomponer una matriz en varias matrices más pequeñas, de forma que nos permite escribir una matriz de manera compacta.

Definición 11 *Diremos que una matriz A esta descompuesta o particionada propiamente en bloques si se puede organizar como una matriz de bloques o submatrices de* *la forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & ... & A_{pr} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, las matrices de bloque se pueden obtener imaginando rectas horizontales y rectas verticales entre los elementos de la matriz A. Las matrices obtenidas son bloques y se denotan como A_{ij}.

Se observa que el número de filas en el bloque A_{ij} depende solo de j, siendo el mismo para todas las i; y de modo similar para las columnas.

Definición 12 *Se define a la suma de dos matrices descompuestas en bloques como la matriz por bloques, que tienen en la posición (i, j) la suma de los bloques que ocupan esa posición, es decir:*

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Observe que para la suma de matrices por bloques se puede realizar solo si las dos matrices A, B son del mismo tamaño y deben de tener el mismo número de bloques fila y columna; además de que los bloques que ocupan la misma posición deben de ser del mismo tamaño.

La multiplicación de matrices por bloques se realiza igual como si fuera por elementos; como se muestra a continuación.

Definición 13 *Se define el producto de dos matrices A y B descompuestas en bloques como la matriz por bloques C que tiene en la posición (i, j) el bloque:*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

El producto por bloques tiene sentido si el número de bloques columna de la matriz A es igual al número de bloques fila de la matriz B y los bloques involucrados tienen el tamaño exacto para que puedan multiplicarse por elementos.

El concepto de matrices por bloques permite ver a una matriz A de tamaño $p \times q$ como una familia de q columnas que a su vez son vectores de p componentes, o bien, ver a la matriz como una familia de p filas, siendo cada fila un vector de q componentes, lo cual se ve como:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \end{bmatrix}$$

de manera que:

$$(AB)_{ij} = a_i b_j$$

es decir, cada elemento del producto es el producto escalar de la fila i-ésima por la columna j-ésima.

1.3.1. Inversa de una matriz por bloques (caso de 2×2)

En términos generales, es difícil calcular la inversa de una matriz por bloques con operaciones por bloques, pero hay una excepción en el caso de una matriz de 2×2 bloques , que la matriz sea triangular por bloques y que los bloques en la diagonal sean cuadrados.

Consideramos A y C matrices cuadradas y B una matriz con el mismo número de columnas que C y con el mismo número de filas que A. Entonces tenemos la matriz por bloques $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$; de tal forma que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

1.4. Matriz de Hurwitz

Una matriz cuadrada A es llamada matriz de estabilidad (o, a veces, matriz de Hurwitz) si cada valor propio de A tiene una parte real estrictamente negativa, es decir,

$$Re[\lambda_i] < 0$$

para cada valor propio λ_i. A también es llamada una matriz de estabilidad, porque la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax$$

es asintóticamente estable, es decir que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

1.5. Matriz Metzler

En matemáticas, una matriz se llama Metzler cuasi-positiva (o cuasi positiva) o esencialmente no negativa, si todos sus elementos son no negativos, excepto los de la diagonal principal, que no están restringidos. Es decir; una matriz de Metzler es cualquier matriz A que satisface:

$$A = (a_{ij}); \quad a_{ij} \geq 0, \ i \neq j$$

Cabe mencionar que es una definición muy importante dado que las matrices de Metzler aparecen en el análisis de estabilidad de ecuaciones diferenciales retardadas en el tiempo y sistemas dinámicos lineales positivos.

1.6. Valores singulares

EL origen de los valores singulares lo podemos encontrar en los trabajos de geometría del siglo XIX cuando se intentaba reducir una forma cuadrática a forma diagonal utilizando cambios de base ortogonales. Al parecer el geómetra italiano Eugene Beltrami fue quien realizó la primera aportación; al promover entre sus estudiantes el gusto por las formas bilineales.

1.7. Descomposición en valores singulares (SVD)

A continuación daremos la definición formal de valor singular:

Definición 14 *Un valor singular de una matriz real A es la raíz cuadrada positiva de un valor propio de la matriz simétrica $AA^\top$ o $A^\top A$.*

Antes de llegar a lo que es la descomposición en valores singulares (SVD), empezaremos viendo algunas de las propiedades de $AA^\top$ y de $A^\top A$ con $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Proposición 15 *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$; se cumple lo siguiente:*
a) $Ker(A) = Ker(A^\top A)$ y $Ker(A^\top) = Ker(AA^\top)$; y además $rango(A) = rango(A^\top A) = rango(AA^\top)$.
b) $AA^\top$ y $A^\top A$ son simétricas y semidefinidas positivas. En particular, $AA^\top$ es definida positiva $\Leftrightarrow rango(A) = n$, y $A^\top A$ es definida positiva $\Leftrightarrow rango(A) = m$

Demostración. a) En primer lugar recordamos que:

$$Ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^n | \ Av = 0\}$$

después, se puede notar que $Ker(A) \subseteq Ker(A^\top A)$. Recíprocamente, si $v \in Ker(A^\top A)$ se tiene que $(A^\top A)v = 0$, de modo que:

$$0 = v^\top 0 = v^\top (A^\top A)v = (v^\top A^\top)(Av) = (Av)^\top (Av),$$

de donde se sigue que $Av = 0$, como queremos demostrar.

Sin pérdida de generalidad se demuestra de manera análoga que $Ker(A^\top) = Ker(AA^\top)$.

Ahora por el teorema de la dimensión, tenemos que:

$$\begin{aligned} rango(A) &= n - \dim(Ker(A)) = n - \dim(Ker(A^\top A)) = rango(A^\top A); \\ rango(A^\top) &= m - \dim(Ker(A^\top)) = m - \dim(Ker(AA^\top)) = rango(AA^\top); \end{aligned}$$

donde $\dim(Ker(A))$ es la dimensión del núcleo de la matriz A.

Ahora usando el hecho que $rango(A) = rango(A^\top)$; con esto tenemos que $rango(A^\top A) = rango(AA^\top)$.

b) Claramente se puede observar que $AA^\top$ y $A^\top A$ son simétricas, pues $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$ y $(AA^\top)^\top = (A^\top)^\top A^\top = AA^\top$. Al ser ambas matrices simétricas podemos garantizar que todos sus valores propios son reales, de tal forma que para demostrar que son semidefinidas positivas basta ver que todos sus valores propios son no negativos. Sea, pues, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de $A^\top A$ y $v \in \mathbb{R}^n$ un vector propio de $A^\top A$ asociado a λ; entonces:

$$0 \leq ||Av||^2 = (Av)^\top (Av) = v^\top (A^\top A)v = v^\top (\lambda v) = \lambda (v^\top v)$$

con esto se puede ver claramente que $\lambda \geq 0$. La demostración de que los valores propios de $AA^\top$ son no negativos es totalmente análoga, basta por sustituir A por $A^\top$.

Finalmente , $A^\top A \in M_n(\mathbb{R})$ es definida positiva sí y solo si todos los valores propios son positivos, esto es equivalente a que sea invertible, y por lo tanto tenga rango n, que coincide con el rango de A; esto se ve en el inciso a). De forma similar se demuestra para $AA^\top$ que sea definida positiva si el rango de A es m. ■

Ya que las matrices $AA^\top$ y $A^\top A$ son semidefinidas positivas, simétricas y su rango es igual al rango de A se cumple que ambas pueden ser diagonalizadas por medio de una matriz de paso ortogonal que tiene r valores propios y además son estrictamente positivos (no necesariamente distintos) y los demás son cero. Con esto tenemos la siguiente proposición:

Proposición 16 *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se cumple que:*

a) $AA^\top$ y $A^\top A$ tienen los mismos valores propios distintos de cero.

b) Si v es un vector propio de $A^\top A$ asociado a $\lambda_i = \sigma_i^2 \neq 0$, entonces Av es un vector propio de $AA^\top$ asociado a $\lambda_i = \sigma_i^2$.

c) Si u es un vector propio de $AA^\top$ asociado a $\lambda_i = \sigma_i^2 \neq 0$, entonces Au es un vector propio de $A^\top A$ asociado a $\lambda_i = \sigma_i^2$.

d) La multiplicidad de los valores propios no nulos (distintos de cero) de $A^\top A$ coinciden con la de los de $AA^\top$.

Demostración. Sea λ un valor propio no nulo de $A^\top A$ y v un vector propio de $A^\top A$ asociado a λ. Entonces tenemos que:

$$(AA^\top)Av = A(A^\top A)v = A(\lambda v) = \lambda(Av)$$

luego, λ es un valor propio de $AA^\top$ y Av es un vector propio de $AA^\top$ asociado a λ. Nótese que $Av \neq 0$, en otro caso $\lambda v = A^\top Av = 0$, es decir, $\lambda = 0$, lo que no es posible por hipótesis.

Sea ahora λ un valor propio no nulo de $A^\top A$. Si u y v son 2 vectores propios linealmente independientes de $A^\top A$ asociados a λ, entonces Au y Av también son linealmente independientes; se puede ver esto dado que si $\alpha Au + \beta Av = 0$ tendríamos que:

$$0 = A^\top(\alpha Au + \beta Av) = \alpha(A^\top A)u + \beta(A^\top A)v = \lambda(\alpha u + \beta v)$$

De aquí tenemos que $0 = \alpha u + \beta v$; y por lo tanto se deduce que $\alpha = \beta = 0$.

Finalmente, como $A^\top A$ y $AA^\top$ son diagonalizables, se tiene que la multiplicidad de λ coincide con la dimensión del subespacio propio correspondiente. Luego, por lo anterior se puede concluir que los valores propios no nulos de $A^\top A$ y $AA^\top$ tienen la misma multiplicidad. ■

Nótese que los valores propios no nulos de $A^\top A$ (y los de $AA^\top$) son positivos, puesto que $A^\top A$ es definida positiva. De aquí los podemos denotar como $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2$, siendo $r = rango(A) = rango(A^\top A) = rango(AA^\top)$

Ahora veremos un teorema que nos ayudará a entender resultados que se ocuparán más adelante.

Teorema 17 *(Forma reducida ortogonal) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si A tiene rango $r > 0$, existen $P \in M_m(\mathbb{R})$ y $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonales, tales que $P^\top AQ = D$, donde la matriz $D \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz de la forma:*

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

y Δ es una matriz diagonal con entradas positivas en su diagonal. Las entradas diagonales de Δ^2 son los valores propios positivos de $A^\top A$ (que coinciden con los de $AA^\top$).

Observación: De ahora en adelante, 0 denotará a cualquier matriz nula y solo cuando sea necesario evitar confusión entonces especificaremos su orden. Esto es con la idea de simplificar la notación.

Demostración. Sea $\Delta^2 \in M_r(\mathbb{R})$ la matriz diagonal que cumple que los elementos de la diagonal son los r-valores propios positivos de $A^\top A$ y sea Δ la matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son las raíces cuadradas positivas de los respectivos elementos en la diagonal de Δ^2. Como $A^\top A$ es una matriz simétrica de orden n, podemos encontrar una matriz ortogonal $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que:

$$Q^\top A^\top AQ = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partiendo Q como $Q = (Q_1|Q_2)$, donde Q_1 es la matriz $n \times r$, la proposición anterior nos muestra que :

$$Q_1^\top A^\top AQ_1 = \Delta^2$$

y

$$(AQ_2)^\top(AQ_2) = Q_2^\top A^\top AQ_2 = 0_{(n-r)\times(n-r)};$$

de donde se sigue que

$$AQ_2 = 0_{n\times(n-r)}.$$

Ahora sea $P_1 = AQ_1\Delta^{-1} \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$. En primer lugar observamos que las columnas de P_1 son ortogonales, dado que:

$$P_1^\top P_1 = (AQ_1\Delta^{-1})^\top(AQ_1\Delta^{-1})] = (\Delta^{-1})^\top Q_1^\top A^\top AQ_1\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta^2\Delta^{-1} = I_r$$

Al igual que en el paso anterior partimos a P como $P = (P_1|P_2)$; además $P = (P_1|P_2)$ es una matriz ortogonal de orden m, donde P_2 es cualquier matriz de orden $m\times(m-r)$ que haga ortogonal a P . Por consiguiente, se tiene que $P_2^\top P_1 = P_2^\top AQ_1\Delta^{-1} = 0_{(m-r)\times r}$ o, equivalentemente:

$$P_2^\top AQ_1 = 0_{(m-r)\times r}$$

con esto podemos concluir que:

$$\begin{aligned} P^\top AQ &= \begin{pmatrix} P_1^\top AQ_1 & P_1^\top AQ_2 \\ P_2^\top AQ_1 & P_2^\top AQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}Q_1^\top A^\top AQ_1 & \Delta^{-1}Q_1^\top A^\top AQ_2 \\ P_2^\top AQ_1 & P_2^\top AQ_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta^{-1}\Delta^2 & \Delta^{-1}Q_1^\top A^\top 0_{n\times(n-r)} \\ 0 & P_2^\top 0_{n\times(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Ahora veremos la definición de la SVD:

Definición 18 *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las raíces cuadradas positivas de las valores propios de $A^\top A$ (y de $AA^\top$), se llaman valores singulares de A. la descomposición $A = PDQ^\top$ dada en el teorema anterior se llama descomposición en valores singulares o SVD de A.*

Observación: Los valores singulares se denotan como $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$; de tal manera que $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq ... \leq \sigma_r$.

De acuerdo con la notación del resultado anterior, los valores singulares de A son los elementos de la diagonal de Δ. De la demostración anterior es inmediato que los vectores columna de Q constituyen una base orto-normal de vectores propios de $A^\top A$ y de aqui que:

$$A^\top A = QD^\top DQ^\top$$

También es importante destacar que las columnas de P forman una base orto-normal de vectores propios de $AA^\top$; ya que:

$$AA^\top = PDQ^\top QDP^\top.$$

Si volvemos a considerar particiones P y Q como $P = (P_1|P_2)$ y $Q = (Q_1|Q_2)$, con $P_1 \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ y $Q_1 \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$, entonces la descomposición en valores singulares de A se puede reescribir como lo siguiente:

Corolario 19 *Sea $A \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$. Si A tiene rango $r > 0$, entonces existen $P_1 \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$ y $Q_1 \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ tales que $P_1^\top P_1 = Q_1^\top Q_1 = I_r$; y además:*

$$A = P_1 \Delta Q_1^\top$$

donde $\Delta \in M_r(\mathbb{R})$ es diagonal con entradas positivas en su diagonal.

La expresión $A = P_1 \Delta Q_1^\top$ se llama descomposición en valores singulares corta o SVD corta de A.

Se sigue de $AA^\top = PDQ^\top QDP^\top$ y de $A^\top A = QD^\top DQ^\top$ que P_1 y Q_1 son matrices semiortogonales, es decir, matrices cuyas columnas son mutuamente ortogonales y de norma 1; con esto se obtiene que:

$$P_1^\top AA^\top P_1 = Q_1^\top AA^\top Q_1 = \Delta^2$$

Sin embargo, en la descomposición $A = P_1 \Delta Q_1^\top$, la elección de la matriz semiortogonal P_1 depende de la elección de la matriz Q_1. Se tiene en cuenta que en la demostración del teorema anterior se elige una matriz semiortogonal Q_1 la cual se ve mostrado en el corolario anterior, P_1 viene dada por $P_1 = AQ_1\Delta^{-1}$.

Hay mucha información interesante sobre la estructura de A que se obtiene de la descomposición en valores singulares, por ejemplo, el rango de A es igual al número de valores singulares, y tambien los vectores columna de P_1 y Q_1 forman bases ortogonales de $im(A)$ e $im(A^\top)$, respectivamente. Similarmente, los vectores columna de P_2 constituyen una base de $Ker(A^\top)$ y los vectores columna de Q_2 forman una base de $Ker(A)$.

Observación: La descomposición en valores singulares de un vector es muy fácil de construir; dado que si $v \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^m$, su descomposición en valores singulares es de la forma:

$$v = p_1 \delta q_1,$$

con $\delta = \sqrt{v^\top v}$, $p_1 = \delta^{-1} v$ y $q_1 = 1$.

Ahora cuando la matriz A es simétrica, los valores singulares de A están directamente relacionados con sus valores propios; con esto tenemos que si A es simétrica, entonces $AA^\top = A^2$, y los valores propios de A^2 son los cuadrados de los valores propios de A. Por consiguiente, los valores singulares de A serían los valores absolutos de los valores propios de A. Si P es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de vectores propios de A, entonces la matriz Q del teorema anterior será idéntica a P excepto para aquellas columnas asociadas a valores propios negativos de A; que serían -1-veces la correspondiente columna de P. Si A es indefinidamente positiva, entonces la descomposición de valores singulares de A es precisamente la descomposición $A = PDP^\top$.

Observación: Esta bonita relación entre valores propios y los valores singulares no ocurre en general.

Veamos ahora algunas de las aplicaciones inmediatas de las descomposición en valores singulares.

Corolario 20 *Sean A y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si $A^\top A = B^\top B$, entonces existe una matriz ortogonal $U \in M_m(\mathbb{R})$ tal que $B = UA$.*

Demostración. Si la descomposición en valores singulares de A es $A = P_1 \Delta Q_1^\top$, entonces la descomposición en valores singulares de B es $B = P_1' \Delta Q_1^\top$ con $P_1' = BQ_1\Delta^{-1}$. Luego, $B = (P_1' P_1^\top)A$; donde $U = P_1' P_1^\top \in M_m(\mathbb{R})$. ■

Corolario 21 *Sean X y $Y \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y además B y $C \in M_m(\mathbb{R})$ simétricas definidas positivas. Si $X^\top B^{-1} X = Y^\top C^{-1} Y$, entonces existe una matriz invertible $A \in M_m(\mathbb{R})$ tal que $Y = AX$ y $C = ABA^\top$.*

Demostración. Por ser B y C simétricas y definidas positivas, existen $B^{1/2}$ y $C^{1/2}$ simétricas tales que $B = B^{1/2}B^{1/2}$ y $C = C^{1/2}C^{1/2}$, y también existen $B^{-1/2}$ y $C^{-1/2}$ simétricas tales que $B^{-1} = B^{-1/2}B^{-1/2}$ y $C^{-1} = C^{-1/2}C^{-1/2}$.

Ahora sean $X_1 = B^{-1/2}X$ y $X_2 = C^{-1/2}Y$. Como

$$X_1^\top X_1 = X^\top B^{-1/2}B^{-1/2}X = X^\top B^{-1}X = Y^\top C^{-1}Y = Y^\top C^{-1/2}C^{-1/2}Y = X_2^\top X_2$$

por el corolario anterior; obtenemos que existe una matriz U ortogonal tal que $X_2 = UX_1$, es decir, $C^{-1/2}Y = UB^{-1/2}X$, luego tenemos que, $Y = C^{1/2}UB^{-1/2}X$. De modo que basta tomar $A = C^{1/2}UB^{-1/2}$ para concluir que $Y = AX$ y además que:

$$ABA^\top = C^{1/2}UB^{-1/2}BB^{-1/2}U^\top C^{1/2} = C$$

■

1.7.1. Interpretación geométrica de la descomposición en valores singulares

En este tema se trata de dar una idea más geométrica la cual ayude a entender mejor la descomposición de valores singulares; dado que es muy relevante para que se tenga una mayor idea de las SVD, por el cual vamos a ver la visión geométrica de todo lo ya redactado anteriormente para tratar de cerrar el tema.

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las demás bases usuales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, es A. Consideremos las descomposiciones $\mathbb{R}^n = Ker(T)^\perp \oplus Ker(T)$ y $\mathbb{R}^m = im(T) \oplus im(T)^\perp$.

Observemos que $\phi = T_{Ker(T)^\perp}$ es inyectiva. Además tenemos que:

$$\dim(Ker(T)^\perp) = n - \dim(Ker(T)) = rango(A) = \dim(im(T))$$

por lo tanto, ϕ establece un isomorfismo de $Ker(T)^\perp$ con $im(T)$.

En un caso particular supongamos que $A = P_1\Delta Q_1^\top$ es una descomposición de valores singulares de A, entonces la matriz de ϕ respecto de la base ortonormal de $Ker(T)^\perp$, que forman las columnas de Q_1 y la base ortonormal de la $im(T)$ que forman las columnas de P_1, es Δ.

Para darse una idea geométrica de la descomposición en valores singulares, considere la esfera S de radio 1 en $\mathbb{R}^n$. la trasformación lineal T mapea esta esfera a un elipsoide de $\mathbb{R}^m$ y las longitudes de los semiejes del elipsoide son exactamente los valores singulares.

1.8. Pseudoinversas

Ahora necesitaremos matrices pseudoinversas, así que revisemos esta noción rápidamente, así como la noción de SVD que proporciona una manera conveniente de calcular pseudoinversas. Solo consideramos el caso de matrices cuadradas; ya que es todo lo que se necesita.

Recuerde que cada matriz cuadrada M de dimensión $n \times n$ tiene una *descomposición de valor singular* , para abreviar SVD; con esto podemos escribir a M de la siguiente forma:

$$M = U\Sigma V^{\top},$$

donde U y V son matrices ortogonales y Σ es una matriz diagonal de la forma:

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0),$$

donde $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ y r es el rango de M. Los σ_i se llaman valores singulares de M y son las raíces cuadradas positivas de los valores propios distintos de cero de $MM^{\top}$ y $M^{\top}M$. Además, las columnas de V son valores propios de $M^{\top}M$ y las columnas de U son vectores propios de $MM^{\top}$. Observe que U y V no son únicos.

Si $M = U\Sigma V^{\top}$ es alguna SVD de M, definimos la *pseudoinversa,* M^{+}, de M como:

$$M^{+} = V\Sigma^{+}U^{\top},$$

donde

$$\Sigma^{+} = diag(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0).$$

Claramente, cuando M tiene rango $r = n$, es decir, cuando M es invertible se cumple que $M^{+} = M^{-1}$; entonces M^{+} es una Ïnversa generalizada"de M. Aunque la definición de M^{+} parece depender de U y de V, en realidad, M^{+} se define de manera única en términos de M (se obtienen la misma M^{+} para todas las posibles descomposiciones SVD de M). Es fácil de verificar que:

$$MM^{+}M = M$$

$$M^{+}MM^{+} = M^{+}$$

y tanto MM^{+} como $M^{+}M$ son matrices simétricas, de hecho,

$$MM^{+} = U\Sigma V^{\top}V\Sigma^{+}U^{\top} = U\Sigma\Sigma^{+}U^{\top} = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} U^{\top}$$

y además

$$M^{+}M = V\Sigma^{+}U^{\top}U\Sigma V^{\top} = V\Sigma^{+}\Sigma V^{\top} = V \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} V^{\top}$$

bajo estas deducciones tenemos que:

$$\left(MM^{+}\right)^2 = MM^{+}$$

$$\left(M^{+}M\right)^{2}=M^{+}M$$

con esto, tanto MM^{+} como $M^{+}M$ son proyecciones ortogonales (ya que ambas son simétricas). Con esto se afirma que que MM^{+} es la proyección ortogonal en el rango de M y $M^{+}M$ es la proyección ortogonal sobre $Ker(M)^{\top}$, el complemento ortogonal del $Ker(M)$.

Claramente se puede ver que el rango$(MM^{+}) \subseteq$ rango(M) y para cualquier $y = Mx \in$ rango(M), como $MM^{+}M = M$; tenemos:

$$MM^{+}y = MM^{+}Mx = Mx = y,$$

con esto tenemos que la imagen de MM^{+} es de hecho el rango de M. También es claro que $Ker(M) \subseteq Ker(M^{+}M)$ y como $MM^{+}M = M$, tenemos también que $Ker(M^{+}M) \subseteq Ker(M)$; esto implica que:

$$Ker(M) = Ker(M^{+}M).$$

Ahora si $M^{+}M$ es hermitiana, el rango$(M^{+}M) = Ker(M^{+}M)^{\top} = Ker(M) \subseteq Ker(M^{+}M) = Ker(M)^{\top}$.

También se puede ver que el rango $(M) =$ rango (MM^{+}); que consiste en todos los vectores $y \in \mathbb{R}^{n}$ tal que:

$$U^{\top}y = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $z \in \mathbb{R}^{r}$.

De hecho si $y = Mx$, entonces:

$$U^{\top}y = U^{\top}Mx = U^{\top}U\Sigma V^{\top}x = \Sigma V^{\top}x = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} V^{\top}x = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde Σ_r es de dimensión $r \times r$ y es una matriz diagonal (diag $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$). Por el contrario, si $U^{\top}y = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $y = U\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{aligned} MM^{+}y &= U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} U^{\top}y \\ &= U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} U^{\top}U\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= U\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = y \end{aligned}$$

lo cual muestra que y pertenece al rango(M).

De manera similar, afirmamos que el rango$(M^{+}M) = Ker(M)^{\top}$para todo vector $y \in \mathbb{R}^n$; tal que:

$$V^{\top}y = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $z \in \mathbb{R}^r$.

Si $y = M^{+}Mu$, entonces

$$y = M^{+}Mu = V\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}V^{\top}u = V\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix},$$

para algunos $z \in \mathbb{R}^r$. Por el contrario, si $V^{\top}y = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$, implica que $y = V\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$; entonces:

$$\begin{aligned} M^{+}MV\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} &= V\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}V^{\top}V\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= V\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= V\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = y \end{aligned}$$

lo cual muestra que $y \in$ rango $(M^{+}M)$.

Si M es una matriz simétrica, entonces, en general, no hay SVD de $M = U\Sigma V^{\top}$ con $U = V$. Sin embargo , si $M \succeq 0$, entonces los valores propios de M no son negativos y; por lo tanto, los valores propios distintos de 0 de M son iguales a los valores singulares de M y los SVD de M son de la forma

$$M = U\Sigma U^{\top}.$$

Análogamente los resultados se mantienen para matrices complejas pero en este caso, U y V son matrices unitarias y MM^{+} y $M^{+}M$ son proyecciones ortogonales hermitianas.

Si M es una matriz normal, lo que significa que, $MM^{\top} = M^{\top}M$, existe una relación cercana entre el SVD de M y las diagonalizaciones de bloque de M. Como consecuencia, la pseudoinversa de la matriz normal M, se puede obtener directamente de una diagonalización de bloque de M.

Si M es una matriz normal (real), entonces se puede diagonalizar en bloque con respecto a una matriz ortogonal U, como

$$M = U\Lambda U^{\top},$$

donde Λ es la matriz diagonal de bloque (real)

$$\Lambda = diag(B_1, \ldots, B_n),$$

que consiste en bloques de 2×2 de la forma:

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & -\mu_j \\ \mu_j & \lambda_j \end{pmatrix}$$

con $\mu_j \neq 0$, o de bloques unidimensionales, $B_k = (\lambda_k)$. Suponga que $B_1, \ldots, B_p$ son bloques (matrices de bloques) de 2×2 y que $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n$ son las entradas escalares. Sabemos que los números $\lambda_j \pm i\mu_j$, y λ_{2p+k} son los valores propios de la matriz A. Sea $\rho_{2j-1} = \rho_{2j} = \sqrt{\lambda_j^2 + \mu_j^2}$ para $j = 1, \ldots, p$; $\rho_{2p+1} = \lambda_j$ para $j = 1, \ldots, n-2p$; y suponga que los bloques están ordenados de manera que $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$.

Entonces es fácil ver que:

$$UU^\top = U^\top U = U\Lambda U^\top U\Lambda^\top U^\top = U\Lambda\Lambda^\top U^\top,$$

con

$$\Lambda\Lambda^\top = diag(\rho_1^2, \cdots, \rho_n^2)$$

entonces, los valores singulares , $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$, de A, que son las raíces cuadradas no negativas de los valores propios de $AA^\top$, son tales que:

$$\sigma_j = \rho_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Podemos definir a las matrices diagonales como:

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$$

donde r=rango(A), $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, y

$$\Theta = diag(\sigma_1^{-1}B_1, \cdots \sigma_{2p}^{-1}B_p, 1, \cdots, 1),$$

de modo que Θ es una matriz ortogonal y

$$\Lambda = \Theta\Sigma = (B_1, \ldots, B_p, \lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0).$$

Entonces ahora, podemos escribir

$$A = U\Lambda U^\top = U\Theta\Sigma U^\top$$

y si tomamos que $V = U\Theta$, ya que U es ortogonal y Θ también es ortogonal, V también es ortogonal y $A = V\Sigma U^\top$ es una SVD para A. Con esto obtenemos lo siguiente:

$$A^+ = U\Sigma^+V^\top = U^+\Sigma^+\Theta^\top U^\top.$$

Sin embargo, dado que Θ es una matriz ortogonal, $\Theta^\top = \Theta^{-1}$ con esto en cuenta obtenemos:

$$\Sigma^+\Theta^\top = \Sigma^+\Theta^{-1} = \Lambda^+,$$

que da como resultado lo siguiente:

$$A^+ = U\Lambda^+U^\top.$$

Observe también que si escribimos

$$\Lambda_r = (B_1, \ldots, B_p, \lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_r),$$

entonces Λ_r es invertible y

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la pseudoinversa de una matriz normal se puede calcular directamente desde cualquier diagonalización de bloque de A.

A continuación usaremos pseudoinversas para generalizar los resultados de las matrices simétricas de la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$ donde C (o A) son matrices singulares.

Capítulo 2

El complemento de Schur y los sistemas lineales

En este capítulo comenzamos dando las definiciones básicas y antecedentes del complemento de Schur para entender la idea a la cual se quiere llegar para que después lo podamos aplicar más adelante.

Definición 22 *Dada cualquier matriz de bloques de la forma*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz de dimensión $p \times p$ y D una matriz de dimensión $q \times q$, con $n = p + q$ (entonces B es una matriz de dimensión $p \times q$ y C es una matriz de dimensión $q \times p$) y además tenemos que $A, B, C, D \in M_m(\mathbb{R})$; si D es invertible, entonces la matriz $A - BD^{-1}C$ se llama complemento de Schur de D en M. Si A es invertible, entonces la matriz $D - CA^{-1}B$ se llama complemento de Schur de A en M.

Observación: Al complemento de Schur lo denotaremos como $M/D = A - BD^{-1}C$.

Ejemplo 23 *Sea M definida como:*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

lo cual indica que el complemento de Schur es:

$$\begin{aligned} M/D &= A - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [3]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, D = [3]$$

2.1. Motivación del complemento de Schur

En esta sección comenzaremos explicando como el complemento de Schur aparece de manera natural al resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sea M una matriz de $n \times n$ escrita como una matriz de bloques de 2×2

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz de dimensión $p \times p$ y D una matriz de dimensión $q \times q$, con $n = p + q$ (entonces B es una matriz de dimensión $p \times q$ y C es una matriz de dimensión $q \times p$). Podemos intentar resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

es decir:

$$Ax + By = c \qquad (1)$$
$$Cx + Dy = d \qquad (2)$$

ahora, resolviendo el sistema por eliminación gaussiana, si suponemos que D es invertible, entonces despejando y de (2) tenemos:

$$y = D^{-1}(d - Cx)$$

y después al sustituir y en (1) obtenemos:

$$Ax + B(D^{-1}(d - Cx)) = c$$

es decir:

$$(A - BD^{-1}C)x = c - BD^{-1}d$$

Si la matriz $A - BD^{-1}C$ es invertible, entonces obtenemos que la solución para nuestro sistema es:

$$x = (A - BD^{-1}C)^{-1}(c - BD^{-1}d)$$

Análogamente si A es invertible entonces empezamos eliminando x de la ecuación (1) y obtenemos fórmulas análogas que involucran a la matriz $D - CA^{-1}B$. Las fórmulas anteriores sugieren que las matrices $A - BD^{-1}C$ y $D - CA^{-1}B$ juegan un papel especial.

Las ecuaciones anteriores escritas como:

$$\begin{aligned} x &= (A - BD^{-1}C)^{-1}c - (A - BD^{-1}C)BD^{-1}d \\ y &= -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}c + (D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1})d \end{aligned}$$

de aquí se puede deducir la matriz inversa para M en términos del complemento de Schur de D en M; la cual es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}) \end{pmatrix}$$

factorizando M^{-1} en la forma LU tenemos:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y con esto tenemos que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y con esto resulta que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C) & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

La expresión anterior solo depende de que D sea invertible.

Observación: Si A es invertible, entonces podemos usar el complemento de Schur $D - CA^{-1}B$ de A para obtener la siguiente factorización de M:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Si $D - CA^{-1}B$ es invertible, podemos invertir las tres matrices anteriores y así se obtiene una fórmula para el inverso de M en términos de $(D - CA^{-1}B)$ entonces tenemos:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (-A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Si tanto D como A con sus respectivos complementos de Schur $(A - BD^{-1}C)$ y $(D - CA^{-1}B)$ son invertibles; se pueden comparar las 2 expresiones para M^{-1}, lo cual obtenemos que:

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1},$$

Usando esta fórmula; obtenemos otra expresión para la matriz inversa de M que involucra los complementos de Schur de A y D es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Si establecemos que $D = I$ y si tomamos $B = -B$, obtenemos:

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

A esta fórmula se le conoce como el *lema de inversión de la matriz* M.

Se puede decir que el complemento de Schur aparece de manera natural como resultado de realizar un bloque de eliminación Gaussiana al multiplicar M por la derecha con la matriz "triangular inferior":

$$L = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix}$$

Aquí I_p denota una matriz identidad de orden $p \times p$. Después de la multiplicación por la matriz L aparece el complemento de Schur en el bloque superior de orden $p \times p$. La matriz del producto es:

$$\begin{aligned} ML &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esto es análogo a una factorización LU. Es decir; se ha demostrado que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix}$$

y el inverso de M se puede expresar como D^{-1} y el inverso del complemento de Schur (si existe) como:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Un lema sobre la inversión de matrices ilustra las relaciones entre lo anterior y la deducción equivalente con las posiciones de A y D intercambiadas.

2.2. Propiedades

Propiedad 1: Si M es una matriz simétrica definida positiva, entonces también lo es el complemento de Schur de D en M.

Ejemplo 24 *Sea*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Claramente es una matriz simétrica, para ver si es definida positiva tenemos que; para $X \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que:*

$$XAX^{\top} > 0$$

para cada vector $X = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n - \{0\}$; *por lo tanto para este ejemplo tenemos que:*

$$\begin{aligned}
XAX^{\top} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_3 & x_2 + x_3 & -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_3^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 > 0
\end{aligned}$$

con esto sabemos que M *es una matriz simétrica definida positiva. Ahora, sacando el complementos de Schur de* D *en* M *tenemos:*

$$M/D = A - BD^{-1}C$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, D = [3]$$

con esto tenemos que

$$\begin{aligned} M/D &= A - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [3]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si $X = (x_1, x_2)$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} X(M/D)X^\top &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(5x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 2x_2^2) \\ &= \frac{1}{3}(4x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2) > 0 \end{aligned}$$

por lo tanto como $X(M/D)X^\top > 0$ y M/D es simétrico entonces el complemento de Schur de D en M es una matriz definida positiva y simétrica

Propiedad 2: Si las dimensiones p y q son ambos 1 (es decir, A, B, C y D son escalares), se obtiene la fórmula de la inversa de una matriz de 2 por 2:

Si:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

entonces:

$$M^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

Siempre que $AD - BC$ no sea cero.

Ejemplo 25 *Sean:*

$$A = 1, B = 2, C = 3, D = 4$$

Entonces:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces, por lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 - 2(4)^{-1}(3))^{-1} & -(1)^{-1}(2)(4 - (3)(1)^{-1}(2))^{-1} \\ -(4 - (3)(1)^{-1}(2))^{-1}(3)(1)^{-1} & (4 - (3)(1)^{-1}(2))^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1)(4) - (2)(3)}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{AD - BC}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Propiedad 3: El determinante de M se determina como:

$$\det(M) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$$

que generaliza la fórmula del determinante para matrices de 2×2.

Ejemplo 26 *Sea*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de aquí se obtiene:

$$\det(M) = 3$$

$$\det(D) = 3$$

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\right) = 1$$

Por lo tanto:

$$\det(D)\det(A - BD^{-1}C) = (3)(1) = 3 = \det(M).$$

Ejemplo 27 *Ahora tomando la matriz con las caracteristicas de la propiedad 2 tenemos:*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tenemos que:

$$\det(M) = -2$$

$$\det(D) = 4$$

$$\det(A - BD^{-1}C) = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\det(D)\det(A - BD^{-1}C) = (4)\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 = \det(M)$$

Lo que muestra que la propiedad es válida

Propiedad 4: (Fórmula de adición de rango de Guttman) El rango de M esta dado por:

$$rango(M) = rango(D) + rango(A - BD^{-1}C)$$

Ejemplo 28 *Para el caso de la propiedad 1 donde*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ tiene rango 3 por ser simétrica}$$

$$D = [3] \text{ tiene rango 1}$$

$$M/D = A - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ tiene rango 2 por ser simétrica}$$

por lo tanto se cumple que

$$rango(D) + rango(A - BD^{-1}C) = 2 + 1 = 3 = rango(M)$$

Para el ejemplo de la propiedad 2, es aún más trivial.

Capítulo 3

Propiedades del complemento de Schur y las matrices simétricas definidas positivas y semidefinidas positivas

La idea de este capítulo es mostrar propiedades del complemento de Schur cuando las matrices de estudio con las que trabajamos, son matrices simétricas definidas positivas y semidefinidas positivas.

3.1. Matrices simétricas definidas positivas y los complementos de Schur

Si suponemos que nuestra matriz de bloques M es simétrica, entonces A, D son simétricas y además $C = B^\top$, entonces vemos que M se expresa como:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}B^\top & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^\top ,$$

Esto muestra que M es similar a una matriz diagonal de bloques (denotando claramente que el complemento de Schur $A - BD^{-1}B^T$ es simétrico). Por lo que se tiene el siguiente resultado:

Proposición 29 *Para cualquier matriz simétrica M de la forma:*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix},$$

con C invertible se cumplen las siguientes propiedades:

a) $M \succ 0 \Leftrightarrow C \succ 0$ y $A - BC^{-1}B^\top \succ 0$.

b) Si $C \succ 0$, entonces $M \succeq 0 \Leftrightarrow A - BC^{-1}B^\top \succeq 0$.

Observación: Usaremos $M \succeq 0$ para denotar que la matriz M es definida positiva; y así para todas las matrices.

Demostración. a) Observe que:

$$\begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Y sabemos que para cualquier matriz simétrica T y cualquier matriz invertible N, la matriz T es definida positiva ($T \succ 0$) $\Leftrightarrow$ NTN^{-1} (que obviamente es simétrica) es definida positiva ($NTN^{-1} \succ 0$). Pero una matriz diagonal de bloques es definida positiva si cada bloque diagonal es definido positivo lo cual implica que $C^{-1} \succ 0$ y además que $A - BC^{-1}B^\top \succ 0$.

b) Usando el hecho de que para una matriz simétrica T y una matriz invertible N se cumple $T \succeq 0 \Leftrightarrow NTN^{-1} \succeq 0$; y para que una matriz sea definida positiva tendríamos que los elementos de la diagonal son definidos positivos entonces con esto se muestra que; si $C \succ 0$, entonces $M \succeq 0 \Leftrightarrow A - BC^{-1}B^\top \succeq 0$. ■

Observación: Otra versión de la proposición anterior usa el complemento de Schur de A en lugar del complemento de Schur de C lo cual también es válido.

Proposición 30 *Para cualquier matriz simétrica M de la forma:*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix},$$

con C invertible; entonces cumple las siguientes propiedades:

a) $M \succ 0 \Leftrightarrow A \succ 0$ y $A - B^\top A^{-1}B \succ 0$.

b)Si $A \succ 0$, entonces $M \succeq 0 \Leftrightarrow A - B^\top A^{-1}B \succeq 0$.

Demostración. Similar a la demostración anterior solo usando el complemento de Schur de A en lugar del complemento de Schur de C. ■

Cuando C es singular (o A es singular), todavía es posible saber cuando una matriz simétrica M como la que hemos visto anteriormente es semidefinida positiva, pero esto requiere usar una versión del complemento Schur que involucra la pseudoinversa de C, el cual es $A - BC^{+}B^{\top}$ (o el complemento de Schur $C - B^{\top}A^{+}B$ de A).

Observación: Además recordemos que la pseudoinversa de una matriz A la denotaremos como A^{+}; ya que en el siguiente capítulo la usaremos constantemente.

3.2. Matrices simétricas semidefinidas positivas y los complementos de Schur.

Ahora volvamos a nuestro problema original, tomando en cuenta cuando una matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\top} & C \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva.

Por lo tanto, queremos saber cuando la función:

$$f(x,y) = \left(x^{\top}, y^{\top}\right) \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\top} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^{\top}Ax + 2x^{\top}By + y^{\top}Cy$$

tiene un mínimo con respecto a x e y. Si mantenemos y constante, esto implica que $f(x,y)$ tiene un mínimo $\Longleftrightarrow A \succeq 0$ y $(I - AA^{+})By = 0$, con esto tenemos que el valor mínimo es:

$$f(x^{*}, y) = -y^{\top}B^{\top}A^{+}By + y^{\top}Cy = y^{\top}(C - B^{\top}A^{+}B)y.$$

Como queremos que $f(x,y)$ este delimitada uniformemente desde abajo para todas las x, y, debemos tener que $(I - AA^{+})B = 0$. Ahora, $f(x^{*}, y)$ es un mínimo $\Leftrightarrow$ $C - B^{\top}A^{+}B \succeq 0$. Por lo tanto, se establece que $f(x,y)$ tiene un mínimo sobre todo x, y si y solo si:

a) $A \succeq 0$.

b) $(I - AA^{+})B = 0$.

c) $C - B^{\top}A^{+}B \succeq 0$.

Se aplica un razonamiento similar si primero minimizamos con respecto a y y luego con respecto a x, pero esta vez, el complemento de Schur $A - BC^{+}B$ de C esta involucrado. Poniendo todos estos hechos juntos, obtenemos el siguiente resultado importante:

Teorema 31 *Dada cualquier matriz simétrica*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $M \succeq 0$ *(M es semidefinida positiva).*

b) $A \succeq 0$, $(I - AA^+)B = 0$, $C - B^\top A^+ B \succeq 0$.

c) $C \succeq 0$, $(I - CC^+)B^\top = 0$, $A - BC^+ B^\top \succeq 0$.

donde A^+, C^+ son pseudoinversas de las matrices A y C respectivamente.

Si $M \succeq 0$ como en el teorema anterior, entonces es fácil verificar las siguientes factorizaciones (usando el hecho de que $A^+AA^+ = A^+$ y $C^+CC^+ = C^+$) :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BC^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC^+B^\top & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^+B^\top & I \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^\top A^+ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^\top A^+ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^+B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Capítulo 4

Aplicaciones de matrices simétricas finitas semidefinidas positivas utilizando complementos de Schur

Comenzaremos esta parte con la siguiente proposición simple:

Proposición 32 *Si P es una matriz simétrica invertible, entonces la función*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top P x + x^\top b$$

tiene un valor mínimo $\Leftrightarrow P \succeq 0$, en cuyo caso este valor óptimo se obtiene para un único valor de x, es decir, $x^* = -P^{-1}b$, y con:

$$f(-P^{-1}b) = -\frac{1}{2} b^\top P^{-1} b.$$

Demostración. Podemos ver que:

$$\frac{1}{2}\left(x + P^{-1}b\right)^\top P \left(x + P^{-1}b\right) = \frac{1}{2} x^\top P x + x^\top b + \frac{1}{2} b^\top P^{-1} b.$$

Así,

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top P x + x^\top b = \frac{1}{2}\left(x + P^{-1}b\right)^\top P \left(x + P^{-1}b\right) - \frac{1}{2} b^\top P^{-1} b$$

Si P tiene un valor propio negativo, digamos $-\lambda$ (con $\lambda > 0$), si elegimos cualquier vector propio, u, de P asociado con λ, entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$, si dejamos que $x = \alpha u - P^{-1}b$, entonces como $Pu = -\lambda u$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(x + P^{-1}b\right)^\top P\left(x + P^{-1}b\right) - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b \\ &= \frac{1}{2}\alpha u^\top P\alpha u - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^2\lambda \left\|u\right\|^2 - \frac{1}{2}b^\top P^{-1}b \end{aligned}$$

y como α puede hacerse tan grande como queramos y $\lambda > 0$, para este caso $f(x)$ no tiene un mínimo. En consecuencia, para que $f(x)$ tenga un mínimo, debemos tener $P \succeq 0$. En este caso, como $(x + P^{-1}b)^\top P\,(x + P^{-1}b) \geq 0$, esta claro que el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza cuando $x + P^{-1}b = 0$, es decir; $x = -P^{-1}b$. ∎

Ahora consideremos una matriz simétrica arbitraria P.

Proposición 33 *Si P es una matriz simétrica, entonces la función*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Px + x^\top b$$

tiene un mínimo si $P \succeq 0$ y $(I - PP^+)b = 0$, en cuyo caso el valor mínimo es

$$p^* = -\frac{1}{2}b^\top P^+b.$$

Además, si $P = U^\top\Sigma U$ es una SVD de P, entonces el valor óptimo se consigue para todo $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma

$$x = -P^+b + U^\top\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix},$$

para cualquier $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, donde r es el rango de P.

Demostración. El caso en el que P es invertible se trata en la proposición anterior; por lo que ahora suponemos que P es singular. Si P tiene rango $r < n$, entonces podemos diagonalizar P como:

$$P = U^\top\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U,$$

donde U es una matriz ortogonal y donde Σ_r es una matriz diagonal invertible de dimensión $r \times r$. Con esto tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^\top U^\top\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Ux + x^\top U^\top Ub \\ &= \frac{1}{2}(xU)^\top\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Ux + (xU)^\top Ub. \end{aligned}$$

Si escribimos $Ux = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ y $Ub = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, con $y, c \in \mathbb{R}^r$ y $z, d \in \mathbb{R}^{n-r}$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(xU)^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Ux + (xU)^\top Ub \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} y^\top \Sigma_r y + y^\top c + z^\top d. \end{aligned}$$

Para $y = 0$, obtenemos

$$f(x) = z^\top d,$$

entonces si $d \neq 0$, la función $f(x)$ no tiene mínimo. Por lo tanto, si $f(x)$ tiene un mínimo, entonces $d = 0$.
Sin embargo, si $d = 0$ significa que $Ub = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ y sabemos por la sección anterior que b está en el rango de P (ahí, $U = U^\top$) que es equivalente a $(I - PP^+)b = 0$. Si $d = 0$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2} y^\top \Sigma_r y + y^\top c$$

y como Σ_r es invertible, (por la proposición anterior), la función $f(x)$ tiene un mínimo $\iff \Sigma_r \succeq 0$, que es equivalente a $P \succeq 0$.

Por lo tanto, demostramos que si $f(x)$ tiene un mínimo, entonces $(I - PP^+)b = 0$ y $P \succeq 0$. Por otro lado, si $(I - PP^+)b = 0$ y $P \succeq 0$; se acaba de demostrar que $f(x)$ tiene un mínimo.

Cuando se cumplen las condiciones anteriores, el mínimo se alcanza en $y = \Sigma_r^{-1} c$, $z = 0$ y $d = 0$ es decir; para x^* dado por $Ux^* = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Ub = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, de lo cual deducimos que

$$\begin{aligned} x^* &= -U^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = -U^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -U^\top \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Ub = -P^+ b \end{aligned}$$

y el valor mínimo de $f(x)$ es:

$$f(x^*) = -\frac{1}{2} b^\top P^+ b.$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma

$$x = -P^+ b + U^\top \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$$

para cualquier $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, lo anterior muestra que $f(x) = -\frac{1}{2} b^\top P^+ b$. ∎

Ahora volvamos a nuestro problema original, analizando ahora cuando una matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$, es definida positiva. Por lo tanto, queremos saber cuando la función

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^\top Ax + 2x^\top By + y^\top Cy$$

tiene un mínimo con respecto a x y y. Manteniendo y constante, la proposición anterior implica que $f(x,y)$ tiene un mínimo $\iff A \succeq 0$ y $(I - AA^+)By = 0$ y entonces el valor mínimo es:

$$f(x^*, y) = y^\top B^\top A^+ By + y^\top Cy = y^\top (C - B^\top A^+ B)y.$$

Como queremos que $f(x,y)$ este delimitada uniformemente desde abajo para toda x, y, para esto debemos tener que $(I - AA^+)B = 0$, Ahora, $f(x^*, y)$ tiene un mínimo $\Leftrightarrow C - B^\top A^+ B \succeq 0$. Por lo tanto, establecemos que $f(x,y)$ tiene un mínimo sobre todo $x, y \Leftrightarrow$

$$A \succeq 0, \quad (I - AA^+)B = 0, \quad C - B^\top A^+ B \succeq 0.$$

Se aplica un razonamiento similar si primero minimizamos con respecto a y y luego con respecto a x pero esta vez, el complemento de Schur, $A - BC^+ B^\top$, de C esta involucrado; teniendo esto en cuenta y juntando algunos resultados anteriores, podemos enunciar el siguiente teorema como resultado principal.

Teorema 34 *Dada cualquier matriz simétrica* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $M \succeq 0$ *(*M *es semidefinida positiva).*

2) $A \succeq 0, \quad (I - AA^+)B = 0, \quad C - B^\top A^+ B \succeq 0.$

3) $C \succeq 0, \quad (I - CC^+)B^\top = 0, \quad A - BC^+ B^\top \succeq 0.$

Si $M \succeq 0$ como en el teorema anterior, entonces es fácil verificar que tenemos el siguiente factor (usando el hecho de que $A^+AA^+ = A^+$ y $C^+CC^+ = C^+$):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BC^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC^+B^\top & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^+B^\top & I \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^\top A^+ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^\top A^+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^+B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

donde A^+, C^+ son pseudoinversas de las matrices A y C respectivamente.

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo se tratará de dar una idea de cómo aplicar el complemento de Schur dada la importancia de la resolución de problemas en varios campos de estudio. Aquí se verán varias aplicaciones, las cuales ayudan a resolver problemas en sistemas de control de manera mas fácil y, hasta cierto punto, más eficiente, las cuales son las siguientes.

5.1. Primera aplicación

Para A y B matrices de igual dimensión, $A \leq B$ (lo cual significa que $a_{ij} \leq b_{ij}$) se tiene la siguiente aplicación.

5.1.1. Equivalencia entre desigualdades matriciales

En este problema en general tenemos que dado un vector $\rho \in \mathbb{R}^n$ y la matriz M, sea x un vector que satisface la desigualdad

$$Mx \leq \rho$$

aquí la pregunta es: ¿cómo despejar x?.

En particular tenemos que dado el vector $\rho \in \mathbb{R}^n$ y la matriz particular M

$$M = -\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

con matrices A y C Metzler y Hurwitz, y la matriz $B \geq 0$. Definimos el conjunto conjunto convexo Ω como:

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^m : Mx \leq \rho\}$$

ya que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -A & -B \\ 0 & -C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} > 0$$

entonces el vector x satisface la desigualdad:

$$x \leq \begin{pmatrix} -A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \rho.$$

con este resultado podemos obtener algunas cotas superiores (o límites) y con esto podemos obtener una aproximación hacia alguna solución de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 35 *Dado el conjunto* $\Omega \in \mathbb{R}^2$ *por*

$$-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tal que

$$-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

entonces el conjunto Ω *es representado por*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.2. Segunda aplicación

Como vimos en los capítulos 3 y 4; el complemento de Schur es muy importante en el estudio de matrices simétricas definidas o semidefinidas positivas o negativas. Por otra parte, las matrices simétricas definidas negativas importantes para definir funciones de Lyapunov y con estas funciones demostrar la estabilidad en sistemas de ecuaciones diferenciales. Es por ello que incluimos esta aplicación ya que el complemento de Schur se vuelve una buena herramienta en este tipo de problemas.

5.2.1. Estabilidad de un sistema no lineal

Para este caso consideremos el siguiente sistema no lineal:

$$\dot{x}(t) = diag(x)Ax$$

definido para $x \in \mathbb{R}_+^n$, con A matriz Metzler y Hurwitz, donde $diag(x)$ representa la matriz diagonal

$$diag(x) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}.$$

donde $\mathbb{R}_+^n$ es el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ con entradas positivas.

Aquí la pregunta sería ¿cómo probar que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable para el sistema $\dot{x}(t) = diag(x)Ax$?

Para esto se ocupa la siguiente proposición:

Proposición 36 *Dado el sistema $\dot{x}(t) = diag(x)Ax$, con matriz A Metzler y Hurwitz, consideremos la matriz diagonal P, con entradas $p_i > 0$ en la diagonal, $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que la matriz $A^\top P + PA$ es definida negativa. Si la matriz PA es simétrica, entonces existe un vector $L^\top > 0$ tal que $\dot{\overline{L^\top x}} < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}_+^n \backslash \{0\}$.*

Demostración. Sea $L^\top = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, entonces la función escalar positiva $L^\top x(t)$ es decreciente:

$$\begin{aligned} L^\top \dot{x} &= L^\top diag(x)Ax \\ &= x^\top diag(L^\top)Ax \\ &= x^\top PAx \end{aligned}$$

donde la matriz PA es definida negativa, ya que $A^\top P + PA = 2PA$. Concluimos que:

$$L^\top \dot{x} < 0 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}_+^n \backslash \{0\}.$$

de forma que el origen $x = 0$ es un equilibrio asintóticamente estable para toda $x \in \mathbb{R}_+^n \backslash \{0\}$. ■

Ejemplo 37 *Consideremos el sistema $\dot{x} = diag(x)Ax$, con matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

tal que A es matriz Metzler y Hurwitz. Consideremos la función escalar no negativa $L^\top x$; la cual está definida para $x \in \mathbb{R}^2_+$;

$$L^\top x = (1,2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2$$

entonces

$$L^\top \dot{x} = x^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} x$$

donde la matriz

$$PA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

es simétrica y Hurwitz.

Observación: La función $V(x) = L^\top x(t)$, con vector $L^\top > 0$, representa una función de Lyapunov para el sistema positivo.

5.3. Tercera aplicación

Dada la matriz Metzler

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz Hurwitz de dimensión $p \times p$, D es una matriz Hurwitz de dimensión $q \times q$, B y C son matrices positivas de dimensiones $p \times q$ y $q \times p$ respectivamente.

¿Qué condiciones implican que M es matriz Hurwitz?

Para esto se considera el siguiente teorema:

Teorema 38 *(de Perron-Frobenius para matrices Metzler): Sea M matriz Metzler de tamaño $n \times n$ (donde $n = p + q$), entonces se tiene la equivalencia*

$$-M^{-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ es Hurwitz.}$$

A continuación describimos las condiciones para tener que M sea matriz Hurwitz.

Ya que D es Metzler y Hurwitz, entonces es invertible, de forma que $-D^{-1} > 0$, por lo tanto (de la página 25 de esta tesis):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

de manera que M es matriz Hurwitz si se satisface la desigualdad matricial

$$\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} < 0.$$

El caso triangular con $C = 0$. Sea M matriz Metzler dada por

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

con A y D matrices Hurwitz y $B > 0$.

Ya que A y D son matrices Metzler y Hurwitz entonces $-A^{-1} > 0$ y $-D^{-1} > 0$, por lo tanto

$$-M^{-1} = -\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1} & A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & -D^{-1} \end{pmatrix} > 0$$

concluimos que la matriz triangular M es Hurwitz.

Ejemplo 39 *Consideremos la matriz Metzler*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -\frac{789}{1000} & 0 \\ 0 & -\frac{367}{200} \end{pmatrix}$$

tal que

$$\begin{aligned} A - BD^{-1}C &= \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{303}{263} & -\frac{727}{1835} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{599\,319\,637}{241\,302\,500} & \frac{57\,267}{131\,500} \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{599\,319\,637}{241\,302\,500} & \frac{57\,267}{131\,500} \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{49\,423\,469\,200}{66\,550\,220\,761} & -\frac{241\,302\,500}{384\,683\,357} & -\frac{2335\,221\,000}{6539\,617\,069} \\ -\frac{10\,955\,133\,500}{66\,550\,220\,761} & -\frac{241\,302\,500}{384\,683\,357} & -\frac{2335\,221\,000}{6539\,617\,069} \\ -\frac{10\,955\,133\,500}{66\,550\,220\,761} & -\frac{241\,302\,500}{384\,683\,357} & -\frac{97\,953\,660\,400}{58\,856\,553\,621} \end{pmatrix} < 0,
\end{aligned}
$$

concluimos que M es matriz Hurwitz.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se dió una idea de como trabajar con el complemento de Schur, dado que en la mayoría de los libros se da una idea muy especializada de como trabajar con él. Lo primero que se trabajó fue el modo de como operar el complemento de Schur utilizando ideas de matrices de bloques junto con operaciones matriciales (inversas, multiplicación, suma de matrices) las cuales nos ayudaron a comprender un resultado para el complemento de Schur.

Después de que se explica como operar con este complemento se intentó llevarlo a otros casos, con otro tipo de matrices, las cuales no tenían inversa directamente (Pseudoinversas); teniendo esto en cuenta se estudió el complemento de Schur con ese tipo de matrices y al igual que en el caso anterior, se presento un resultado, el cual se puede aplicar para resolver sistemas de ecuaciones muy grandes o problemas que tengan que ver con matrices de bloques; esto se ve reflejado en el tiempo de cómputo (dado que es más simple resolverlo de esta manera).

Y en las aplicaciones se vio que el complemento de Schur nos ayuda a resolver problemas que tengan que ver con desigualdades vectoriales y con la resolución de sistemas de ecuaciones, además nos ayuda en el análisis de dichos problemas para ver la estabilidad y las posibles soluciones que puede tener (en caso de que las matrices no tengan inversa). En conclusión, podemos ver que el complemento de Schur es una gran herramienta; puede resolver problemas reales, los cuales esperamos profundizar en futuros trabajos.

Apéndice

Apéndice A

Factorizacion LU

Se puede decir que la factorización LU parte de una matriz dada con anterioridad y resume el procedimiento de eliminación gaussiana, cuando se aplica a la matriz y que conviene en términos de la cantidad total de operaciones de punto flotante; cuando se esta resolviendo una serie de sistemas de ecuaciones con una misma matriz de coeficientes o cuando se calcula la inversa de una matriz. Primero consideremos la factorización LU sin intercambio basada en matrices elementales, la cual se conoce como de Doolittle y en seguida veamos el algoritmo que da la factorización $PA = LU$.

Suponga que la matriz A es de tamaño $m \times n$ y se puede escribir como el producto de dos matrices:

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior $m \times m$ y U es una matriz escalonada $m \times n$. Entonces para resolver el sistema:

$$Ax = b,$$

escribimos

$$Ax = (LU)x = L(Ux).$$

Una posible estrategia de solución consiste en tomar $y = Ux$ y resolver para y:

$$Ly = b.$$

Ya que L es triangular superior entonces el sistema se puede resolver por medio de sustitución hacia abajo. Ya que tenemos los valores de y, el sistema inicial puede resolverse despejando x de $Ux = y$.

$$Ux = y.$$

Ahora, tomando en cuenta que U es escalonada, el sistema se puede resolver por medio de sustitución hacia atrás, en caso de existir solución. Estas ideas nos ayudan a ver la conveniencia de una factorización con estas propiedades, es decir, factorizar la matriz A como el producto de una matriz triangular superior L multiplicada por una matriz escalonada U. A este tipo de factorización se le conoce como factorización LU o descomposición LU.

Ejemplo 40 *Usaremos la factorización LU de A:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = LU$$

para despejar x del sistema:

$$Ax = \begin{bmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{bmatrix} = b$$

Sea $y = (y_1, y_2, y_3)$ un nuevo vector de incógnitas. Primero resolveremos el sistema triangular inferior $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Este sistema escrito en su forma de ecuaciones queda como:

$$\begin{aligned} y_1 &= 11 \\ 5y_1 + y_2 &= 70 \\ -2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 17 \end{aligned}$$

Por eliminación directa tenemos que:
la primera ecuación es:
$y_1 = 11$,
la segunda ecuación es :
$y_2 = 70 - 5y_1 = 70 - 5(11) = 15$,
y la tercera es:
$y_3 = 17 + 2y_1 - 3y_2 = 17 + 2(11) - 3(15) = -6$.

Ahora el sistema $Ux = y$ es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$$

El cual escrito en su forma de ecuaciones queda:

$$\begin{gathered} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_2 + 7x_3 = 15 \\ -2x_3 = -6 \end{gathered}$$

El cual al ser resuelto por sustitución hacia atrás; de la ultima ecuación tenemos:
$x_3 = 3$,
segunda ecuación:
$x_2 = 5 - 7/3x_3 = 5 - 7/3(3) = -2$,
y de la primera:
$x_1 = 11/4 + 1/2x_2 - 1/4x_3 = 11/4 + 1/2(-2) - 1/4(-3) = 1$.

Ejemplo 41 *(Utilización del método): Determinemos una factorización LU de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 5 \\ 4 & 18 & 6 \\ -2 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

El método procede así:

·La matriz L inicialmente es la matriz identidad con el mismo número de renglones de A. Si se utilizó la operación $R_i \to R_i + cR_j$ entonces en la posición (i, j) de L se coloca $-c$.

·La matriz U es la matriz que queda a escalonar A.

·Si hubo necesidad de intercambiar renglones para escalonar, A ***NO*** *admite una factorización LU.*

Digamos que con las operaciones siguientes
1. $R2 \to R2 + 3R1$
2. $R3 \to R3 - 2R1$
3. $R4 \to R4 + 1R1$
4. $R3 \to R3 - 4R2$
5. $R4 \to R4 + 2R2$

la matriz A se escalona y queda:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(3) & 1 & 0 & 0 \\ -(-2) & -(-4) & 1 & 0 \\ -(1) & -(2) & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que para obtener la factorización LU se ejecuta la fase 1 del proceso de eliminación gaussiana. Esto implica que la complejidad del algoritmo de factorización LU es $O(2/3n^3)$. Una vez que se tiene la factorización LU, la sustitución hacia adelante y la sustitución hacia atrás toman n^2 pasos cada uno. De aquí que la factorización LU no aporta una ventaja cuando se va a resolver un solo sistema, la ventaja se aprecia cuando se resuelven varios sistemas con la misma matriz de coeficientes. La factorización LU se calcula en la primera solución y en las siguientes se hace la sustitución hacia adelante y hacia atrás.

Notas generales:

Nota 1

El algoritmo anterior se puede programar de modo que U y L queden en una misma matriz cuadrada. La sugerencia es aprovechar que la diagonal de U que consiste de unos, de aquí que no se va a requerir espacio para almacenarlos.

Nota 2

Si para una matriz cuadrada invertible se tiene una factorización $A = LU$, entonces la matriz inversa cumple:

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}.$$

Apéndice B

Pseudoinversa de Moore-Penrose

La pseudoinversa A^+ de una matriz A es una matriz inversa generalizada. De entre los tipos de matrices pseudoinversas, la más conocida es la matriz inversa de Moore-Penrose, que fue estudiada por E. H. Moore en 1920, por Arne Bjerhammar en 1951 y por Roger Penrose en 1955, de manera independiente. Aunque Fredholm ya había introducido en 1903 el concepto de pseudoinversa del operador integral. Cuando se utiliza el término pseudoinversa en general se esta haciendo referencia a la pseudoinversa de Moore-Penrose.

La pseudoinversa ayuda a enunciar y probar resultados de álgebra lineal, por ejemplo, ayuda a encontrar la solución de norma euclidiana mínima de un sistema lineal con múltiples soluciones o ayuda a cálcular una solución de ajuste óptimo por cuadrados mínimos de un sistema lineal de ecuaciones que no tenga solución.

La fórmula de cálculo de A^+ es (siempre que el rango de la matriz sea máximo, es decir; si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $rango(A) = m$ entonces:

$$A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top$$

donde $A^\top$ es la transpuesta de A.

Ejemplo 42 *Consideremos la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Es evidente que las columnas de A son linealmente independientes. Por tanto, cal-

culamos su pseudoinversa mediante

$$
\begin{aligned}
A^{+} &= (A^\top A)^{-1}A^\top = \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 56 & -44 \\ -44 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -16 & -4 & 8 \\ 13 & 4 & -5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Apéndice C

Lema de Schur

El lema de Schur lleva este nombre en honor a Issai Schur y es un resultado muy utilizado en la teoría de representaciones de grupos y álgebras, precisamente Schur lo utilizó para demostrar las relaciones de ortogonalidad de Schur y así comenzar el desarrollo de la teoría de representaciones de grupos finitos. El Lema dice que si M y N son 2 representaciones irreducibles de dimensión finita de un grupo G y φ es un mapeo lineal de M a N que conmuta con la acción del grupo, entonces φ es invertible o $\varphi = 0$. Existen generalizaciones del Lema de Schur en grupos de Lie y Álgebras de Lie.

C.1. Forma matricial del Lema de Schur

Sean A, B representaciones irreducibles de un grupo G y T sea una matriz cumpliendo $TA(g) = B(g)T$ para todo elemento g del grupo G, entonces T tiene inversa o es la matriz nula.

En el caso de una sola representación el Lema de Schur concluye que si A es una matriz de orden n con elementos complejos y conmuta con cualquier matriz de G entonces la matriz A es una matriz escalar. Un corolario es que toda representación compleja irreducible de un grupo abeliano tiene que ser unidimensional.

C.2. Formalidad del lema de Schur

Lema 43 *(lema de Schur) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, existe $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U^{-1}AU = U^*AU = T$ en donde T es una matriz triangular superior y U^* es la matriz traspuesta de U; los elementos de la diagonal principal de T son los valores* *propios de A.*

Demostración. Usando el método de inducción tenemos:

Paso base: El lema es cierto para $n = 1$ efectivamente, si $A = [a]$ basta elegir $U = [1]$, que es unitaria y ademas

$$U^*AU = [1]^*[a][1] = [1][a][1] = [a] = T.$$

Paso de inducción: Sea el lema cierto para $n-1$. Sea λ_1 un valor propio de A y sea u_1 un vector propio asociado a λ_1 y de módulo 1 $(||u_1|| = 1)$. Ampliando hasta obtener una base de $\mathbb{C}^n$ y luego orto-normalizando por el método de Schmidt obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{C}^n : (u_1, u_2, ..., u_n)$. La matriz $U = [u_1, u_2, ..., u_n]$ es por tanto unitaria y se verifica $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Entonces,

$$\begin{aligned} AU_1 &= A[u_1, u_2, ..., u_n] = [\lambda_1 u_1, Au_2, ..., Au_n] \\ &= [u_1, u_2, ..., u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & ... & ... & ... \\ 0 & \ddots & ... & ... \\ \vdots & ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & ... & ... \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, se verifica

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

con U_1 unitaria y $A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Por hipótesis de inducción, existe $M_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ unitaria tal que

$$M_2^{-1}A_1M_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} \\ 0 & \lambda_3 & \dots & t_{2,n-1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

siendo $\lambda_2 \dots, \lambda_n$ los valores propios de A_1. Definamos

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz U_2 es claramente unitaria. Además,

$$\begin{aligned}
(U_1U_2)^{-1}A(U_1U_2) &= U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2^{-1} \end{bmatrix} U_1^{-1}AU_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ 0 & M_2^{-1}A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1M_2 \\ 0 & M_2^{-1}A_1M_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = T
\end{aligned}$$

La matriz $U = U_1U_2$ es unitaria por ser producto de unitarias y por tanto $U^{-1}AU = U^*AU = T$ con T triangular. Es claro que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A debido a la semejanza entre A y T. El lema es cierto para n. ■

Ejemplo 44 *Se considera la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}$$

Aplicar el lema de Schur para encontrar una matriz U unitaria tal que $U^{-1}AU = U^*AU = T$, con T triangular superior.

Solución:

Siguiendo el esquema de la demostración del lema de Shur. Valores propios de A son:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (1+2i)\lambda - 1 + i = 0$$

haciendo el álgebra tenemos que:

$$\lambda = \{1+i, i\}.$$

El subespacio propio y base asociados a $\lambda = i$:

$$Vi = \left\{ \begin{array}{c} -5x_1 - 15x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{array} \right. \quad B_i = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizando, obtenemos $u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)^\top$. *Un vector ortogonal a* u_1 *es* $(1,3)^\top$, *y normalizando tenemos* $u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)^\top$. *La base* $\{u_1, u_2\}$ *de* $\mathbb{C}^2$ *es ortonormal, por lo tanto*

$$U_1 = [u_1, u_2] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz unitaria. Hallemos $U_1^* A U_1$:

$$\begin{aligned} U_1^* A U_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10i & 170 \\ 0 & 10+10i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 17 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} = T. \end{aligned}$$

La matriz U *pedida es* $U = U_1$.

Bibliografía

[1] Stephen Boyd y Lieven Vandenberghe. Optimizacion convexa. Universidad de CambridgePrensa, primera edición, 2004.

[2] James W. Demmel. Álgebra lineal numérica aplicada. Publicaciones SIAM, primera edición,1997.

[3] Jean H. Gallier. Métodos y aplicaciones geométricas, para informática y ingenieril. TAM, vol. 38. Springer, primera edición, 2000.

[4] H. Golub, Gene y F. Van Loan, Charles. Cálculos matriciales. The Johns HopkinsUniversity Press, tercera edición, 1996.

[5] Roger A. Horn y Charles R. Johnson. Análisis matricial. Prensa de la Universidad de Cambridge, primera edición, 1990.

[6] Roger A. Horn y Charles R. Johnson. Temas en el análisis matricial. Universidad de Cambridge, Prensa, primera edición, 1994.

[7] Gilbert Strang. Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. Saunders HBJ, tercera edición, 1988.

[8] LN Trefethen y D. Bau III. Álgebra lineal numérica. Publicaciones SIAM, primera edición, 1997.

[9] G. Birkhoff, S MacLane, Álgebra Moderna, ed. Vicens-Vives, Madrid 1980.

[10] Burgos, J. de: Álgebra lineal. McGraw-Hill. 1993.

[11] Garcia, J. y Lopez Pellicer, M.: Álgebra lineal y Geometría. Marfil, 1980.

[12] Griffel, D. H.: Linear Álgebra and its applications. Ellis Horwood, 1989.

[13] Gutierrez Gomez, A. y García Castro, F. Álgebra lineal 2. Pirámide.

[14] Hernandez, E.: Álgebra y Geometría. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[15] Merino, L. y Santos, E.: Álgebra lineal con métodos elementales. Ed. Los autores, Universidad de Granada. 1997.

[16] Strang, G, Linear Álgebra and its Applications. 3th ed. Hardcourt Brace Jovanovich, Inc., 1988.

[17] R. Barbolla and P. Sanz, Álgebra lineal y teoría de matrices, Prentice Hall, Madrid, 1998.

[18] A. Basilevsky, Applied matrix algebra in the statistical sciences, North-Holland, New York, 1983.

[19] D. Hernandez, Álgebra lineal, Manuales de la Universidad de Salamanca, Universidad de Salamanca, 1985.

[20] L. Merino and E. Santos, Álgebra lineal con métodos elementales, Thomson Editores Spain, Madrid, 2006.

[21] David S. Dummit, Richard M. Foote. Abstract Algebra. 2nd ed., pg. 337.

[22] Lam, Tsit-Yuen (2001), A First Course in Noncommutative Rings, Berlin, New York: Springer-Verlag.

[23] Gantmacher, Felix R. (1959). Applications of the Theory of Matrices 641 . Nueva York, Estados Unidos: Mov. pp. 1-8.

[24] Berman, Abraham ; Neumann, Michael ; Stern, Ronald (1989). Matrices no negativas en sistemas dinámicos . Matemática pura y aplicada. Nueva York.

[25] Revilla, F.(26 de febrero del 2015), Lema de Schur Fernando Revilla-WordPress http://fernandorevilla.es/blog/2015/02/26/lema-de-schur/

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00226
Matrícula: 2192802638

EL COMPLEMENTO DE SCHUR

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 14 del mes de septiembre del año 2022 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ
DR. HORACIO LEYVA CASTELLANOS
DR. JORGE ANTONIO LOPEZ RENTERIA
DR. JOSE HECTOR MORALES BARCENAS

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: PEDRO DAMIAN OROZCO RUIZ

PEDRO DAMIAN OROZCO RUIZ
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Román Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

VOCAL

DR. HORACIO LEYVA CASTELLANOS

VOCAL

DR. JORGE ANTONIO LOPEZ RENTERIA

SECRETARIO

DR. JOSE HECTOR MORALES BARCENAS