AXIOMATIZACIÓN DE CIERTAS CLASES DE MÓDULOS

T E S I S

que presenta:

Juan Carlos Aguilar Franco

Para la obtención del grado

de Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Asesor : Dr. Luis Miguel Villegas Silva

Julio del 2002

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa

Agradecimientos

[1] Si no puedes tener la razón y la fuerza,
escoge siempre la razón y deja que el enemigo tenga siempre la fuerza.
En muchos combates puede la fuerza obtener victoria,
pero en la lucha toda sólo la razón vence.
El poderoso nunca podrá sacar razón de su fuerza,
pero nosotros siempre podremos obtener fuerza de la razón.

A mis padres.
A mis abuelitos Juan Aguilar, Felipa, Juan Franco y Maura.
A todas mis tías y tíos.
A mis hermanos: Manuel, Oscar y Aarón.
A todos mis amigos y compañeros.

Al Dr. Luis Miguel Villegas Silva, por su paciencia, apoyo y dedicación para llevar a cabo con éxito este proyecto y por la formación que me ha inculcado.

A los profesores: Dr. Carlos Signoret, Dr. Adalberto García y Dr. Julio Solís, por aceptar ser mis sinodales.

A los profesores: Dra. María Jose Arroyo, Dr. Ernesto Pérez, Dr. Richard Wilson, Dr. Mikhail Tkachenco, Mario Pineda y a todas las secretarias,[Lulú, Ana, Silvia, Bety, Marilén].

Dedico también este trabajo a mis compañeros, con los que he compartido clases, excursiones, campamentos, convivios, etc.

Finalmente al departamento de matemáticas por todas la facilidades que se me otorgaron durante todos mis estudios.

[1]Subcomandante insurgente Marcos.

A ti que apareciste en mi vida por alguna u otra razón, siempre te recordare.

A ti que te convertiste en mi mejor amigo(a), gracias por tu amistad.

A ti que me apoyaste en mis ratos de depresión, (que son muchos), gracias.

A ti con quien he compartido momentos inolvidables.

A ti que siempre me haz ayudado a tener los pies en la tierra.

A ti Daisy por tu amor, apoyo y compañia.

Por todo lo que me han brindado, Gracias.

Juan Carlos.

[2] Es mejor despedirse al llegar.
Así no duele tanto cuando uno se va.

---

[2] Idem.

Índice General

Introducción

Una de las preguntas clásicas en la teoría de modelos aplicada al álgebra es ¿cuándo una clase de modelos es axiomatizable (o finitamente axiomatizable)? es decir, ¿podemos caracterizar, por ejemplo una clase de módulos como aquellos módulos que satisfacen un conjunto de axiomas expresados en un lenguaje de primer orden?

En esta tesis se pretende efectuar esta investigación en ciertas clases de módulos: planos, proyectivos e inyectivos, pero principalmente recopilar los resultados fundamentales que nos permiten establecer que ciertas clases de estructuras son axiomatizables y ejemplificar su uso para algunas clases de módulos. Se espera que esto facilite la tarea de axiomatizar estas clases de módulos poco estudiadas hasta ahora.

Nuestra herramienta básica será el uso de productos directos, ultraproductos y/o equivalencia elemental.

También recurrimos al Teorema de Baur-Monk sobre reducción de cuantificadores en la teoría de módulos, y al Teorema de Keisler-Shelah que relaciona los conceptos de equivalencia elemental e isomorfismo.

Encontramos condiciones necesarias y suficientes para que ciertas clases de módulos sean finitamente axiomatizables, por ejemplo que el anillo que actúa sobre el grupo sea artiniano o netheriano,etc. En ocasiones, estas condiciones se expresan mediante propiedades de los funtores Tor y Ext.

Una figura importante de la tesis es el capítulo dedicado al Teorema de Keisler-Shelah, donde se presenta una demostración sin utilizar la hipótesis generalizada del continuo, debida a Shelah.

Para poder trabajar con las clases de módulos mencionadas presentamos las definiciones y propiedades básicas de las mismas y diversas caracterizaciones. Al final aparece una amplia bibliografía que involucra diversas fuentes fundamentales para nuestra investigación.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se dan las definiciones de los módulos, junto con algunas propiedades que son de gran utilidad en el desarrollo del trabajo. También se proporcionan definiciones y resultados de teoría de modelos, algunos de gran importancia como el Teorema de compacidad y el Teorema de Łos.

En el Capítulo 2 se demuestra el teorema de Keisler-Shelah sin suponer la hipótesis generalizada del continuo.

En el siguiente capítulo se muestra la equivalencia elemental entre la suma y el producto de módulos y el importante Teorema de Baur-Monk para lo que requerimos un tratamiento preliminar de ultrafiltros.

En el Capítulo 4 se muestran equivalencias entre diferentes clases de módulos, así como relaciones entre ser axiomatizable y el anillo sobre el que está definido el módulo.

En el Capítulo 5, se hace un análisis similar al Capítulo 4, pero ahora para las clases finitamente axiomatizables. En este capítulo se define la dimensión de Krull y la dimensión dual de Krull, que miden qué tanto se aparta un módulo de ser artiniano o noetheriano, respectivamente.

En esta tesis se considera a R como un anillo asociativo fijo con identidad; de lo contrario se dirá explícitamente. Por un módulo se entenderá un módulo izquierdo.

Trabajaremos en un lenguaje de primer orden, en donde las únicas constantes lógicas son el símbolo de igualdad $=$, una constante llamada cero 0, y los siguientes símbolos de función : una función binaria f y para cada $r \in R$ una 1-función g_r. Se escribe $x + y$ en lugar de $f(x, y)$ y $r \cdot x$ en lugar de $g_r(x)$; de acuerdo a la definición anterior el lenguaje representa a la estructura de los R-módulos izquierdos por lo cual lo llamaremos el lenguaje de los R-módulos (izquierdos) y se denotará por L(R).

En esta tesis presentamos resultados que se encuentran dispersos en la literatura, a los cuales se les da orden y una estructura para una mejor comprensión. Además en esta tesis es fundamental la teoría de modelos. Como se apreciará, esta herramienta nos permite obtener una comprensión muy profunda de los conceptos involucrados. En el mismo sentido podemos referirnos a los ultraproductos que se destacan como un aparato imprescindible para el algebrista.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En esta tesis se considera a R como un anillo asociativo fijo con identidad; de lo contrario se dirá explícitamente. Por un módulo se entenderá un módulo izquierdo.

Trabajaremos en un lenguaje de primer orden, en donde las únicas constantes lógicas son el símbolo de igualdad $=$, una constante llamada cero 0, y los siguientes símbolos de función : una función binaria f y para cada $r \in R$ una 1-función g_r. Se escribe $x + y$ en lugar de $f(x, y)$ y $r \cdot x$ en lugar de $g_r(x)$; de acuerdo a la definición anterior el lenguaje representa a la estructura de los R-módulos izquierdos por lo cual lo llamaremos el lenguaje de los R-módulos (izquierdos) y se denotará por L(R).

A continuación se mencionarán algunas definiciones y resultados básicos sobre la teoría de modelos.

1. Definiciones preliminares

Definición 1. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son fórmulas, entonces denotamos

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \text{ y } \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$$

Definición 2. Sea Φ un conjunto de L(R)-fórmulas, entonces denotamos

$$Mod_{L(R)(\Phi)} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ es una L-estructura y } \mathfrak{A} \models \Phi\}.$$

Definición 3. Sea S un conjunto no vacío. Un filtro sobre S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S que cumple las siguientes condiciones :

(1).- $S \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(2).- Si $X, Y \in \mathcal{F}$ entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
(3).- Si $X \in \mathcal{F}$ y $X \subseteq Y \subseteq$ S entonces $Y \in \mathcal{F}$.

Definición 4. Sea G un conjunto no vacío. Decimos que G tiene la propiedad de la intersección finita (pif) si para todo subconjunto finito H de G, $\bigcap H \neq \emptyset$.

Lema 5. Sea $G \neq \emptyset$ una colección de subconjuntos de S tal que G tiene la pif. Entonces hay un filtro $\mathcal{F}$ sobre S tal que $G \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la colección de subconjuntos X de S con la propiedad de que hay un subconjunto finito de G, digamos $\{X_1, \ldots, X_n\}$, tal que $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq X$. Obviamente $S \in \mathcal{F}$; además, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ pues G tiene la pif. Para la segunda condición tomemos X, Y tales que para algunos conjuntos $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in G$ se tiene $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq X$ y $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \subseteq Y$; entonces $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \subseteq X \cap Y$, y por lo tanto $X \cap Y \in \mathcal{F}$. La tercera condición en la definición de filtro es clara. Así que $\mathcal{F}$ es un filtro.

□

Definición 6. Un filtro $\mathcal{U}$ sobre S es un ultrafiltro si para cada $X \subseteq S$, $X \in \mathcal{U}$ o $S - X \in \mathcal{U}$, que es equivalente a decir que $\mathcal{U}$ es un filtro $\subseteq$-maximal.

Teorema 7. (Tarski). Sea S un conjunto no vacío. Todo filtro sobre S puede extenderse a un ultrafiltro.

Demostración. Sean $\mathcal{F}_0$ un filtro sobre S y $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los filtros $\mathcal{F}$ sobre S tales que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$. Considere el orden parcial $\subseteq$ en $\mathcal{P}$. Claramente $\mathcal{P}$ no es vacío y si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{P}$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro sobre S, de manera que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$ que pertenece a $\mathcal{P}$. El Lema de Zorn asegura que existe un elemento maximal $\mathcal{U}$ en $\mathcal{P}$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro por la definición anterior. □

Definición 8. Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de conjuntos; definimos el producto directo de $\{A_i \mid i \in I\}$, denotado $\prod_{i\in I} A_i$, como el siguiente conjunto de funciones: $\prod_{i\in I} A_i = \{a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid a(i) \in A_i\}$.

Ahora ya estamos en condiciones de definir el producto directo de una familia de L(R)-estructuras.

Definición 9. Sea $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos. Definimos el producto directo $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ como el siguiente R-módulo $\mathfrak{B}$:

(1).- El universo de $\mathfrak{B}$ es $universo(\mathfrak{B}) = \prod_{i\in I} universo(\mathfrak{A}_i)$.

(2).- Para la constante $0, 0^{\mathfrak{B}} : I \to \bigcup_{i\in I} universo(\mathfrak{A}_i)$ y cumple con $0^{\mathfrak{B}}(i) = 0^{\mathfrak{A}_i}$.

(3).- Para cada símbolo de función binario y cada pareja $(a_0, a_1) \in (universo(\mathfrak{B}))^2$,

$$f^{\mathfrak{B}}(a_0, a_1) = b \text{ si y sólo si } b(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(a_0(i), a_1(i)).$$

(4).- Para cada símbolo de función unario g_r, $r \in R$ y para todo $a \in universo(\mathfrak{B})$, ${g_r}^{\mathfrak{B}}(a) = b$ si y sólo si $b(i) = g_r^{\mathfrak{A}_i}(a(i))$.

Nuestra intención ahora es definir el ultraproducto de una familia de L(R)-estructuras.

Definición 10. Sean $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de L(R)-estructuras, $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$, $\varphi(\vec{a})$ una L(R)-fórmula con $\vec{a}$ una n-ada de elementos de $universo(\mathfrak{B})$. Definimos el valor booleano de $\varphi(\vec{a})$, denotado $\| \varphi(\vec{a}) \|$, como:

$$\| \varphi(\vec{a}) \| = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(\vec{a}(i))\}.$$

Tenemos las siguientes propiedades del valor booleano.

Proposición 11. Sean $\varphi(\vec{x})$ y $\psi(\vec{x})$ dos L(R)-fórmulas y $\vec{a}$ una n-ada de elementos de $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$. Entonces

(1).- $\|\neg\varphi(\vec{a})\| = I \setminus \|\varphi(\vec{a})\|$.
(2).- $\|\varphi(\vec{a}) \wedge \psi(\vec{a})\| = \|\varphi(\vec{a})\| \cap \|\psi(\vec{a})\|$.
(3).- $\|\varphi(\vec{a}) \vee \psi(\vec{a})\| = \|\varphi(\vec{a})\| \cup \|\psi(\vec{a})\|$.
(4).- Para toda $(n-1)$-ada de elementos de $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ y toda $b \in \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$, se cumple $\|\varphi(b,\vec{a})\| \subseteq \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$.
(5).- Existe $b \in \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ tal que $\|\varphi(b,\vec{a})\| = \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$.

Demostración. Las afirmaciones (1) a (4) son consecuencia directa de la definición. Vamos a demostrar (5), para lo cual basta mostrar que hay un $b \in \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ tal que $\|\varphi(b,\vec{a})\| \supseteq \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$.

Para cada $i \in \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$ existe c_i tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi(c_i, \vec{a}(i))$. Mediante el axioma de elección tomamos un elemento $b \in \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ tal que si $i \in \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$, se cumple $b(i) = c_i$; y si $j \in I \setminus \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$, $b(j)$ es cualquier elemento de $\mathfrak{A}_j$.

Sea $i \in \|\exists x\varphi(x,\vec{a})\|$, es decir, $\mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi(x,\vec{a}(i))$. Por la elección de $b(i)$ tenemos $\mathfrak{A}_i \models \varphi(b(i),\vec{a}(i))$. Por lo tanto, $i \in \|\varphi(b,\vec{a})\|$.

□

La construcción de un ultraproducto se hace mediante una relación de equivalencia que se define a continuación.

Definición 12. Sean I un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro sobre I. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $universo(\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i)$ como $a \sim b$ si y sólo si $\| a = b \| \in \mathcal{F}$

La clase de equivalencia de a, módulo un filtro $\mathcal{F}$ se denota como $a/\mathcal{F}$.

Mediante la relación de equivalencia definida y el producto directo de R-módulos, se introduce una nueva estructura.

Definición 13. Sean $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de R-módulos, $\mathcal{F}$ un filtro y $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$. Definimos el producto reducido $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ como la siguiente estructura $\mathfrak{U}$:

(1).- $universo(\mathfrak{U}) = \{a/\mathcal{F} \mid a \in universo(\mathfrak{B})\}$.
(2).- Para el símbolo de constante 0, $0^{\mathfrak{U}} = 0^{\mathfrak{B}}/\mathcal{F}$.
(3).- Para cada símbolo de función binario f y cada pareja $(a_0, a_1) \in universo(\mathfrak{U})^2$,
$$f^{\mathfrak{U}}(a_0/\mathcal{F}, a_1/\mathcal{F}) = f^{\mathfrak{B}}(a_0, a_1)/\mathcal{F}.$$
(4).- Para cada símbolo de función unario g_r y para todo $a \in universo(\mathfrak{U})$, ${g_r}^{\mathfrak{U}}(a/\mathcal{F}) = {g_r}^{\mathfrak{B}}(a)/\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro entonces la estructura $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ es el ultraproducto de $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ módulo $\mathcal{U}$.

Si tenemos $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ para toda $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ es la potencia reducida de $\mathfrak{A}$ o la ultrapotencia si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

Un ejemplo más en donde existe una estructura y en donde podemos definir una relación es en los hiperreales, y se hace de la siguiente manera:

Definición 14. Sean N el conjunto de los números naturales y η un ultrafiltro libre de N. Considera a R^n con la siguiente relación de equivalencia:

$(x_n) \sim (y_n)$ si $x_n = y_n \;\; \forall n \in A \in \eta$ con esta relación y R^n se tiene lo siguiente:

$$R^n / \sim = \text{hiperreales.}$$

Definición 15. Una clase de L(R)-estructuras $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a ultraproductos si todo ultraproducto, $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U}$, de una familia de L(R)-estructuras $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Definición 16. Sean Φ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula
$\Phi \models \varphi$ significa que para toda L(R)-estructura $\mathfrak{A}$,

$$\text{si } \mathfrak{A} \models \Phi \text{ entonces } \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Si $\Phi \models \varphi$, decimos que Φ implica lógicamente a φ o también que φ es consecuencia lógica de Φ.

Mediante $\Phi^{\models}$ se denota al conjunto de todas las consecuencias lógicas de Φ, es decir,
$\Phi^{\models} = \{\varphi \mid \varphi$ es L(R)-fórmula y $\Phi \models \varphi\}$, la cerradura deductiva de Φ (en L(R)).
Un conjunto Φ de enunciados es deductivamente cerrado si $\Phi^{\models} = \Phi$.

Definición 17. Una L(R)-teoría T es un conjunto de L(R)-enunciados consistente y deductivamente cerrado. La cardinalidad se define como la cardinalidad de L(R) y lo denotamos $|T|$.

Definición 18. Sea $\mathcal{C}$ una clase de L(R)-estructuras, la L(R)-teoría de $\mathcal{C}$ o la teoría de $\mathcal{C}$ es el conjunto Teo($\mathcal{C}$) de todos los L(R)-enunciados que son ciertos en todas las estructuras de $\mathcal{C}$, es decir:

$$\text{Teo}(\mathcal{C}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es L(R)-fórmula y para toda L(R)-estructura } \mathcal{A} \in \mathfrak{A}, \mathcal{A} \models \varphi\}$$

2. Resultados básicos en teoría de modelos

En esta sección presentamos algunos resultados fundamentales de la teoría de modelos que utilizamos con frecuencia.

Teorema 19 (Łos). Sean $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in \text{I}\}$ una familia de L(R)-estructuras, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I y $\vec{a}$ una n-ada de elementos del $universo(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U})$. Entonces

$$\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi(\vec{a}/\mathcal{U}) \text{ si y sólo si } ||\varphi(\vec{a})|| \in \mathcal{U}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{U} = \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$. La prueba es por inducción sobre la construcción de las fórmulas. Sea $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$.

(1) φ es una fórmula atómica.
- $\varphi \equiv t_1 = t_2$, con t_1 y t_2 términos.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} \models (t_1 = t_2)[\vec{a}/\mathcal{U}] &\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{U}}[\vec{a}/\mathcal{U}] = t_2^{\mathfrak{U}}[\vec{a}/\mathcal{U}] \\
&\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[\vec{a}]/\mathcal{U} = t_2^{\mathfrak{B}}[\vec{a}]/\mathcal{U} \quad \text{(por el Lema 11)} \\
&\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}(\vec{a}) \sim t_2^{\mathfrak{B}}(\vec{a}) \\
&\Leftrightarrow ||t_1(\vec{a}) = t_2(\vec{a})|| \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$. Es análogo al caso anterior.

(2) Paso inductivo.
- $\varphi \equiv \neg\psi$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} \models \varphi[\vec{a}/\mathcal{U}] &\Leftrightarrow \mathfrak{U} \not\models \psi[\vec{a}/\mathcal{U}] \\
&\Leftrightarrow ||\psi(\vec{a})|| \notin \mathcal{U} && \text{(por hipótesis de inducción)} \\
&\Leftrightarrow I \setminus ||\psi(\vec{a})|| \in \mathcal{U} && \text{(pues } \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro)} \\
&\Leftrightarrow ||\neg\psi(\vec{a})|| \in \mathcal{U} && \text{(por la Proposición 11)} \\
&\Leftrightarrow ||\varphi(\vec{a})|| \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} \models \varphi[\vec{a}/\mathcal{U}] &\Leftrightarrow \mathfrak{U} \models \psi[\vec{a}/\mathcal{U}] \text{ y } \mathfrak{U} \models \chi[\vec{a}/\mathcal{U}] \\
&\Leftrightarrow ||\psi(\vec{a})|| \in \mathcal{U} \text{ y } ||\chi(\vec{a})|| \in \mathcal{U} && \text{(por hipótesis de inducción)} \\
&\Leftrightarrow ||\psi(\vec{a})|| \cap ||\chi(\vec{a})|| \in \mathcal{U} && \text{(pues } \mathcal{U} \text{ es filtro)} \\
&\Leftrightarrow ||(\psi \wedge \chi)(\vec{a})|| \in \mathcal{U} && \text{(por la Proposición 11)} \\
&\Leftrightarrow ||\varphi(\vec{a})|| \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

- $\varphi \equiv \exists x \psi(x, \vec{y})$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} \models \varphi[\vec{a}/\mathcal{U}] &\Leftrightarrow \mathfrak{U} \models \psi(b/\mathcal{U}, \vec{a}/\mathcal{U}) && \text{para alguna } b \in universo(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i) \\
&\Leftrightarrow \|\psi(b, \vec{a})\| \in \mathcal{U} && \text{para alguna } b \in universo(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i) \\
&\Leftrightarrow \|\exists x \psi(x, \vec{a})\| \in \mathcal{U} && \text{(por la Proposición 11)} \\
&\Leftrightarrow \|\varphi(\vec{a})\| \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 20 (Compacidad). Sea M un conjunto de L(R)-enunciados. Entonces M tiene un modelo si y sólo si todo subconjunto finito de M tiene un modelo.

Demostración. $\Rightarrow$) Como M tiene un modelo $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es modelo de cualquier subconjunto de M, en particular, $\mathcal{A}$ es modelo de cualquier subconjunto finito de M.

$\Leftarrow$) Supongamos que todo subconjunto finito $N \subseteq M$ tiene un modelo, digamos $\mathfrak{A}_N$. Sea $I = \{N \subset M \mid N \text{ es finito}\}$. Vamos a construir un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que para toda $\varphi \in M$ se cumpla $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi$; de esta manera el ultraproducto será modelo de todo M. Utilizando el teorema de Łos, basta construir un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que:

$$\|\varphi\| = \{N \in I \mid \mathfrak{A}_N \models \varphi\} \text{ pertenezca a } \mathcal{U}.$$

Observe que $\{N \mid \varphi \in N\} \subseteq \|\varphi\|$ puesto que si $\varphi \in N$, entonces $\mathfrak{A}_N \models \varphi$. Así que basta construir un ultrafiltro que contenga los conjuntos $\bar{\varphi} = \{N \mid \varphi \in N\}$, y para esto último, por el Lema 5 y el Teorema 7, basta demostrar que esta coleccion tiene la pif. Pero esto es inmediato, puesto que si $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in M$ entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \in \bar{\varphi}_1 \cap \ldots \cap \bar{\varphi}_m$. □

Definición 21. Una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos es elemental o finitamente axiomatizable si existe φ tal que $\mathcal{C} = Mod_{L(R)}(\varphi)$. Una clase $\mathcal{C}$ de L-estructuras es Δ-elemental o axiomatizable si existe un conjunto de enunciados Φ tal que $\mathcal{C} = Mod_{L(R)}(\Phi)$.

Definición 22. Las L(R)-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, son elementalmente equivalentes, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen los mismos L(R)-enunciados.

Definición 23. Una clase $\mathcal{C}$ de L(R)-estructuras es elementalmente cerrada si cualquier L(R)-estructura elementalmente equivalente a otra L(R)-estructura en $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$. En símbolos: $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ implican $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$.

La siguiente proposición presenta los resultados más importantes para probar si una clase de estructuras es axiomatizable (finitamente axiomatizable) o no.

Proposición 24. Sea $\mathcal{C}$ una clase arbitraria de L(R)-estructuras. Entonces:

(i) $\mathcal{C}$ es axiomatizable si y sólo si $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultraproductos y es elementalmente cerrada.

(ii) $\mathcal{C}$ es finitamente axiomatizable si y sólo si tanto $\mathcal{C}$ como el complemento de $\mathcal{C}$ (es decir, la colección de estructuras que no pertenecen a $\mathcal{C}$) son cerradas respecto a la formación de ultraproductos y son elementalmente cerradas.

(iii) Una clase $\mathcal{C}$ es finitamente axiomatizable si y sólo si $\mathcal{C}$ es axiomatizable y la colección de estructuras que no están en $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultraproductos.

Demostración. (i) $\Rightarrow$) Puesto que $\mathcal{C}$ es axiomatizable existe un conjunto Φ de enunciados tal que $\mathcal{C} = Mod(\Phi)$. Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$; debemos probar que $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$. Como $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$, se deduce que $\mathfrak{A} \models \Phi$ y además, puesto que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes, $\mathfrak{B} \models \Phi$, de aquí que $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$.

Ahora se demostrará que $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a ultraproductos. Por el teorema de Łos, si $\mathfrak{U}_i \models \varphi$ es cierto para toda $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} \mathfrak{U}_i/\mathcal{U} \models \varphi$. Por lo tanto, $\prod_{i\in I} \mathfrak{U}_i/\mathcal{U}$ está en $\mathcal{C}$ y toda clase axiomatizable es cerrada respecto a ultraproductos.

$\Leftarrow$) Sea T el conjunto de todos los L(R)-enunciados que son válidos en $\mathfrak{U}$ para toda $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$; por definición T es deductivamente cerrado y, ya que todo $\varphi \in T$ tiene modelo, se concluye que T es consistente. Por lo tanto, T es una L(R)-teoría y cualquier $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$ es modelo de T, es decir $\mathcal{C} \subseteq$ Mod (T).

Para la contención Mod(T) $\subseteq \mathcal{C}$, sean $\mathfrak{B} \in$ Mod(T), Σ el conjunto de todos los enunciados ciertos en $\mathfrak{B}$ e $I =$ Fin(Σ), el conjunto de subconjuntos finitos de Σ. Para cada $i = \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\} \in I$, existe $\mathfrak{U}_i \in \mathcal{C}$ que es modelo de i, pues en caso contrario el enunciado $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ pertenecería a T y sería falso en $\mathfrak{B}$. Para cada $i \in I$ escogemos un modelo de i, digamos $\mathfrak{U}_i \in \mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en I. Análogamente a la prueba del Teorema 20, podemos construir un ultraproducto $\prod_{i\in I} \mathfrak{U}_i/\mathcal{U}$ que es modelo de Σ. Dado que $\mathcal{C}$ es cerrado respecto a ultraproductos, $\prod_{i\in I} \mathfrak{U}_i/\mathcal{U} \in \mathcal{C}$. Por la construcción de Σ, todo modelo de Σ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$, así que $\prod_{i\in I} \mathfrak{U}_i/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{B}$ y como $\mathcal{C}$ es cerrado bajo equivalencia elemental, implica que $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, de lo cual se concluye que $\mathcal{C}$ = Mod(T), por lo tanto $\mathcal{C}$, es axiomatizable.

(ii) $\Rightarrow$) Como $\mathcal{C}$ es finitamente axiomatizable, $\mathcal{C}$ es axiomatizable. Por (i), $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultraproductos y elementalmente cerrada.

Ahora se demostrará que el complemento de $\mathcal{C}$ es cerrado respecto a la formación de ultraproductos. Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$. Si $\{\mathfrak{B}_i\}_{i\in I}$ pertenece al complemento de $\mathcal{C}$, $\mathfrak{B}_i \models \neg\varphi$ para toda $i \in I$ y $\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i/\mathcal{U} \models \neg\varphi$ por el teorema de Łos; en consecuencia, la ultrapotencia está en el complemento de $\mathcal{C}$.

Para demostrar que el complemento de $\mathcal{C}$ es elementalmente cerrado, tomemos $\mathfrak{C}$ una estructura en el complemento de $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{C}$ entonces $\mathfrak{C} \not\models \varphi$ y por ser $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ elementalmente equivalentes, se obtiene que $\mathfrak{D} \not\models \varphi$, lo que implica que $\mathfrak{D}$ está en el complemento de $\mathcal{C}$.

$\Leftarrow$) $\mathcal{C}$ y su complemento, $\mathcal{C}^*$, son cerrados respecto a la formación de ultraproductos y elementalmente cerrados; se mostrará que $\mathcal{C}$ es finitamente axiomatizable. Por (i) se concluye que tanto $\mathcal{C}$ como $\mathcal{C}^*$ son axiomatizables; por lo tanto, existen Φ y Ψ, conjuntos de enunciados tales que $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ y $\mathcal{C}^* = \mathrm{Mod}(\Psi)$.

Si $\mathcal{C}$ no fuera finitamente axiomatizable, para cada subconjunto finito Φ' de Φ existiría una estructura $\mathfrak{A}$ con $\mathfrak{A} \models \Phi'$ pero $\mathfrak{A} \not\models \Phi$ de aquí $\mathfrak{A} \notin \mathcal{C}$, en consecuencia, $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}^*$, es decir, $\mathfrak{A} \models \Psi$. Por lo anterior se cumple que cualquier subconjunto finito de $\Phi \cup \Psi$ tiene modelo y por el teorema de compacidad $\Phi \cup \Psi$ tiene un modelo, llamémoslo $\mathfrak{B}$. Se observa que $\mathfrak{B} \models \Phi$ y $\mathfrak{B} \models \Psi$, esto quiere decir que $\mathfrak{B} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^*$, una contradicción. En resumen, $\mathcal{C}$ debe ser finitamente axiomatizable.

(iii) $\Rightarrow$) Como $\mathcal{C}$ es finitamente axiomatizable, es axiomatizable y por (ii) se concluye que el complemento de $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultraproductos.

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{C}$ es axiomatizable, por (i) $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultraproductos y elementalmente cerrada; además, por hipótesis se tiene que el complemento de $\mathcal{C}$ también lo es, entonces por (ii) se obtiene que $\mathcal{C}$ es finitamente axiomatizable.

□

3. Definiciones y resultados en módulos.

En esta sección se definen los módulos sobre los cuales vamos a trabajar, después se enuncian algunas propiedades que serán de gran utilidad en lo sucesivo.

Definición 25. Un módulo E es inyectivo si para cualquier homomorfismo de módulos $\mu : A \to E$ y cualquier monomorfismo $\alpha : A \to B$ existe un homomorfismo $\bar{\mu} : B \to E$, tal que $\bar{\mu}\alpha = \mu$ es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[ul, "\bar{\mu}"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 26. (i) Si $\{E_i \mid i \in I\}$ es una familia de módulos, $\prod_{i \in I} E_i$ es inyectivo si y sólo si E_i es inyectivo para todo $i \in I$.

(ii) Todo sumando directo D de un R-módulo inyectivo E, es inyectivo.

(iii) Cualquier R-módulo es un submódulo de un módulo inyectivo.

(iv) Un R-módulo M es inyectivo si y sólo si M es un sumando directo de todo módulo del cual es un submódulo.

Demostración. (i) $\Rightarrow$) Sean $\prod_{i \in I} E_i$ inyectivo, $\alpha : A \to B$ monomorfismo y $\varphi : A \to E_i$, un homomorfismo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[dddl, "\kappa = \pi_i \gamma"] \\ E_i \arrow[d, "\eta_i"'] & \\ \prod E_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\ E_i & \end{tikzcd}$$

Con π_i la proyección $\prod E_i \to E_i$ y η_i la inclusión. Para $\eta_i \varphi$, por ser $\prod_{i \in I} E_i$ inyectivo, existe $\gamma : B \to \prod E_i$ con $\eta_i \varphi = \gamma \alpha$.

Se define κ como $\kappa = \pi_i \gamma$ donde $\varphi = \kappa \alpha$, por lo que se cumple

$$\varphi = 1_{E_i} \varphi = (\pi_i \eta_i)\varphi = \pi_i(\eta_i \varphi) = \pi_i(\gamma\alpha) = (\pi_i \gamma)\alpha = \kappa\alpha.$$

$\Leftarrow$) Sean $\alpha : A \to B$ monomorfismo y $\varphi : A \to \prod E_i$ un homomorfismo.

Para $\pi_i\varphi$, para cada $i \in I$, existe κ_i con $\pi_i\varphi = \kappa_i\alpha$, así que definimos $\kappa : B \to \prod E_i$ un homomorfismo, con $\kappa_i = \pi_i\kappa$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, "\kappa"'] \arrow[ddl, "\kappa_i"] \\
\prod E_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
E_i &
\end{tikzcd}$$

De

$$\pi_i\varphi = \kappa_i\alpha \text{ y } \kappa_i = \pi_i\kappa$$

deducimos que

$$\pi_i\varphi = \pi_i\kappa\alpha,$$

por lo que

$$\varphi = \kappa\alpha.$$

(ii) Sea $E = D \oplus F$, con E inyectivo, considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[r, shift left, "\lambda"] & E \arrow[l, shift left, "p"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

donde λ y p son la inclusión y proyección, respectivamente. Como E es inyectivo, existe un homomorfismo $g : B \to E$ con $g\alpha = \lambda f$. Se define $h : B \to E$ como $h = pg$. Entonces

$$h\alpha = pg\alpha = p\lambda f = f$$

porque $p\lambda = 1_D$, por lo que D es inyectivo.

(iii) Para cualquier R-módulo M, $M \subseteq D$ donde D es algún grupo abeliano divisible.
El homomorfismo $l : M \to Hom_Z(R, D)$ definido por $m \mapsto l_m : R \to D$, donde $l_m(a) = ma \in M \subseteq D$ es un R-monomorfismo:
$l_{m+n} = l_m + l_n \qquad m, n \in M;\ a, r \in R;$
$\{l_m * r\}(a) = l_m(ra) = m(ra) = \{l_{mr}\}(a);$
$l_{mr} = l_m * r; \quad l_m(1) = m1 = m.$
Esto es $M \cong \{l_m \mid m \in M\} \subset Hom_Z(R, D)$ es un R-submódulo.

(iv) $\Rightarrow$) Dado $M \subseteq N$ con M un R-módulo inyectivo, la función identidad $1_M : M \to M$ se extiende a un homomorfismo $\rho : N \to M$ tal que $\rho j = 1_M$, donde $j : M \to N$ es el homomorfismo inclusión. Se concluye que $N = M \oplus T$ para algún submódulo T de N.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_M"'] & N \arrow[dl, "\rho"] \\ M & \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$) Por (iii), existe un R-módulo inyectivo E tal que $M \subset E$. Por hipótesis $E = M \oplus T$ para algún submódulo T de E. Como todo sumando directo de un R-módulo inyectivo es inyectivo, M es inyectivo.

□

Teorema 27. Todo módulo inyectivo E es divisible.

Demostración. Sean $m \in E$ y $r_0 \in R$ no divisor de cero, se define $f : Rr_0 \to E$ por $f(rr_0) = rm$; f está bien definida porque r_0 no es divisor de cero. Como E es inyectivo, existe un homomorfismo $g : R \to E$ que extiende a f. En particular

$$m = f(r_0) = g(r_0) = r_0 g(1),$$

esto es m es divisible por r_0. □

Definición 28. Un R-módulo A es libre si es isomorfo a una suma de copias de R. Si $Ra_i \cong R$ y $A = \bigoplus_{i \in I} Ra_i$, entonces el conjunto $\{a_i \mid i \in I\}$ es llamado una base de A.

Dada la base $\{a_i \mid i \in I\}$, cada $a \in A$ tiene expresión única como

$$a = \sum r_i a_i,$$

donde $r_i \in R$ y casi todo $r_i = 0$ es decir para un número finito.

Definición 29. Un R-módulo P es proyectivo si para cualquier homomorfismo entre R-módulos $\mu : P \to C$ y para cualquier epimorfismo $\beta : B \to C$, existe un homomorfismo $\bar{\mu} : P \to B$ tal que $\beta\bar{\mu} = \mu$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\bar{\mu}"'] \arrow[d, "\mu"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposición 30. (i) Si $\beta : B \to P$ es un epimorfismo, con P proyectivo entonces $B = ker(\beta) \oplus P'$ donde $P' \cong P$

(ii) Si $\{P_i \mid i \in I\}$ es una familia de R-módulos, entonces $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es proyectivo si y sólo si P_i es proyectivo para todo $i \in I$.

Demostración. (i) Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dado que P es proyectivo, existe un homomorfismo $\gamma : P \to B$ con $\beta\gamma = 1_P$, entonces γ es un monomorfismo, y P es un sumando de B, es decir, $B = ker(\beta) \oplus P'$.

(ii) $\Rightarrow$) Considere el siguiente diagrama donde π_i es proyección y η_i es inclusión

$$
\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[d, "\eta_i"] \arrow[dddl, "\lambda = \gamma\eta_i"'] \\
 & \bigoplus P_i \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[ddl, "\gamma"] \\
 & P_i \arrow[d, "\psi"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Por ser $\bigoplus P_i$ proyectivo, existe γ tal que $\psi\pi_i = \beta\gamma$.
Se define $\lambda = \gamma\eta_i$, por lo que se cumple

$$\psi = \psi 1_{P_i} = \psi\pi_i\eta_i = (\psi\pi_i)\eta_i = (\beta\gamma)\eta_i = \beta(\gamma\eta_i) = \beta\lambda.$$

$\Leftarrow$) Considere el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[d, "\eta_i"] \arrow[ddl, "\lambda_i"'] \\
 & \bigoplus P_i \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, "\lambda"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis, existe λ_i tal que $\psi\eta_i = \beta\lambda_i$.
Sea λ tal que $\lambda_i = \lambda\eta_i$; se cumple $\psi = \beta\lambda$, ya que de $\psi\eta_i = \beta\lambda_i$ y $\lambda_i = \lambda\eta_i$ se sigue que $\psi\eta_i = \beta\lambda\eta_i$, de donde se concluye $\psi = \beta\lambda$.

□

Teorema 31. Todo R-módulo libre F es proyectivo.

Demostración. Sean $X \subseteq F$ una base de F, $\mu : F \to B$ un homomorfismo, y $\alpha : A \to B$ un epimorfismo.

Se debe encontrar $\bar{\mu}$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, "\bar{\mu}"'] \arrow[d, "\mu"] & \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para cada $x \in X$, por ser α epimorfismo, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = \mu(x)$, es decir, $\mu(x) \in B$, donde B es la imagen de A respecto a α, utilizando el axioma de elección, se define $\bar{\mu}(x) = a$.

Cada $f \in F$ tiene la forma

$$f = x_1 r_1 + \ldots + x_n r_n$$

para n elementos diferentes $x_i \in X$, y $0 \neq r_i \in R$. Los elementos $a_i \in A$ se seleccionan de tal forma que $\bar{\mu}(x_i) = a_i$.

Se define

$$\bar{\mu} f = (\bar{\mu}(x_1))r_1 + \ldots + (\bar{\mu}(x_n))r_n = a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n.$$

En consecuencia, se cumple $\bar{\mu}\alpha = \mu$.

$\bar{\mu}$ es homomorfismo: sean

$$f = x_1 r_1 + \ldots + x_n r_n$$

y

$$g = y_1 s_1 + \ldots + y_n s_n$$

con

$$\bar{\mu}(f) = a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n$$

y

$$\bar{\mu}(g) = b_1 s_1 + \ldots + b_n s_n$$

entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(f+g) &= \bar{\mu}(x_1r_1 + y_1s_1 + \ldots + x_nr_n + y_ns_n) \\
&= \bar{\mu}(x_1r_1 \ldots + x_nr_n + y_1s_1 + \ldots + y_ns_n) \\
&= \bar{\mu}(x_1)r_1 \ldots + \bar{\mu}(x_n)r_n + \bar{\mu}(y_1)s_1 + \ldots + \bar{\mu}(y_n)s_n) \\
&= a_1r_1 + \ldots + a_nr_n + b_1s_1 + \ldots + b_ns_n \\
&= \bar{\mu}(f) + \bar{\mu}(g).
\end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración.

□

Observación 32. Todos los módulos libres son proyectivos, pero no todos los proyectivos son libres.

Ejemplo 33. Sea $R = Z/6Z$ entonces $R = Z/2Z \oplus Z/3Z$, se obtiene que $Z/2Z$ es proyectivo pero $Z/2Z$ no es libre.

4. Producto tensorial

Definición 34. Sea R un anillo asociativo con 1.

Si A es un R-módulo derecho, B un R-módulo izquierdo, y G un grupo abeliano aditivo, entonces una función R-biaditiva es una función

$$f : A \times B \to G$$

tal que para cualesquiera $a, a' \in A,\ b, b' \in B,$ y $r \in R,$

(i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b);$

(ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b');$

(iii) $f(ar, b) = f(a, rb).$

Definición 35. El producto tensorial de A y B, es un grupo abeliano, $A \otimes_R B$ y una función R-biaditiva h, con la siguiente "propiedad universal":

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, "f'"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Para cualquier grupo abeliano G y toda función R-biaditiva $f : A \times B \to G$, existe un único homomorfismo f' que hace conmutar el diagrama.

Teorema 36. Cualesquiera dos productos tensoriales de A y B son isomorfos.

Demostración. Suponga que existen un segundo grupo X y una función R-biaditiva $k : A \times B \to X$ que resuelve el problema de la propiedad universal. Existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, shift right, "k'"'] \\
& X \arrow[ur, shift right, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

donde k' y h' son homomorfismos tales que

$$k'h = k \quad \text{y} \quad h'k = h.$$

Existe un segundo diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl] \\
& A \otimes_R B &
\end{tikzcd}$$

en este punto se puede escoger entre la identidad o $h'k'$ (para $h'k'h = h'k = h$); $1 = h'k'$. Con un argumento similar se muestra que $k'h' = 1_X$, mostrando que k' es un isomorfismo entre $A \otimes_R B$ y X.

□

Teorema 37. El producto tensorial de un R-módulo derecho A y un R-módulo izquierdo B existe.

Demostración. Sea F un grupo abeliano libre con base $A \times B$, es decir F es el grupo de las combinaciones lineales de todas las parejas (a, b). Se define a S como el subgrupo de F generado por todos los elementos de las siguientes tres formas:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), \qquad (a, b + b') - (a, b) - (a, b'), \qquad (ar, b) - (a, rb).$$

Definimos $A \otimes_R B = F/S$. Si denotamos la clase lateral $(a, b) + S$ por $a \otimes b$, entonces es fácil verificar que $h : A \times B \to A \otimes_R B$ definido por $(a, b) \to a \otimes b$ es R-biaditiva.

Suponga que G es un grupo abeliano, y que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, "f'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

donde f es R-biaditiva. Dado que F es libre con base $A \times B$, existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ con $\varphi((a,b)) = f(a,b)$, Es más, f siendo R-biaditiva implica $S \subset ker(\varphi)$; se sigue que φ induce un homomorfismo $f' : F/S \to G$ con $f' : (a,b)+S \to \varphi((a,b)) = f(a,b)$, esto es $f' : a\otimes b \to f(a,b)$, de donde $f'h = f$. □

Teorema 38. Sean $f : A \to A'$ un R-homomorfismo de R-módulos derechos y $g : B \to B'$ un R-homomorfismo de R-módulos izquierdos. Existe un único homomorfismo $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ con $a \otimes b \to f(a) \otimes g(b)$.

Demostración. La función $A \times B \to A' \otimes_R B'$ definida por $(a,b) \to f(a) \otimes g(b)$ es claramente R-biaditiva; y para probar la unicidad basta utilizar la universalidad. □

Definición 39. El homomorfismo $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ que asocia $a \otimes b$ con $fa \otimes gb$ es denotado

$$f \otimes g$$

Teorema 40. Suponga que $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ son R-homomorfismos de R-módulos derechos y que $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$ son R-homomorfismos de R-módulos izquierdos. Entonces

$$(g' \otimes f')(g \otimes f) = g'g \otimes f'f.$$

Demostración. Se prueba utilizando el Teorema 38. □

Definición 41. Un R-módulo izquierdo B es plano si para cualquier monomorfismo de R-módulos derechos $f : N \to M$, se deduce que

$$f \otimes 1 : N \otimes B \to M \otimes B, \quad n \otimes b \mapsto f(n) \otimes b$$

es un monomorfismo.

Teorema 42. Toda imagen isomorfa de un módulo plano es plano.

Demostración. Sean M un módulo plano izquierdo y $\varphi : M \to N$ un isomorfismo. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R M \arrow[r, "\alpha \otimes 1_M"] \arrow[d, "1_A \otimes \varphi"'] & B \otimes_R M \arrow[d, "1_B \otimes \varphi"] \\
A \otimes_R N \arrow[r, "\alpha \otimes 1_N"'] & B \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

Como $1_A \otimes \varphi$ y $1_B \otimes \varphi$ son isomorfismos, $\alpha \otimes 1_N$ es un monomorfismo si y sólo si $\alpha \otimes 1_M$ es un monomorfismo.

□

Proposición 43. Para R-módulos izquierdos M_i, $i \in I$, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es plano si y sólo si para toda $i \in I$, M_i es plano.

Demostración. Los elementos de $\bigoplus M_i$ se denotan como (m_i) donde solamente un número finito de m_i son diferentes de cero. Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo.

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_R (\bigoplus M_i) \arrow[r, "\alpha \otimes \bigoplus 1_{M_i}"] \arrow[d] & B \otimes_R (\bigoplus M_i) \arrow[d] \\
\bigoplus (A \otimes_R M_i) \arrow[r, "\bigoplus(\alpha \otimes 1_{M_i})"'] & \bigoplus (B \otimes_R M_i)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo; los homomorfismos verticales son los isomorfismos

$$a \otimes (m_i) \mapsto (a \otimes m_i);$$

de lo anterior se sigue que $\alpha \otimes \bigoplus 1_{M_i}$ es un monomorfismo si y sólo si $(\alpha \otimes 1_M)$ es un monomorfismo, si y sólo si $\alpha \otimes 1_{M_i}$ es un monomorfismo para todo $i \in I$, por lo que la propiedad se satisface.

□

CAPÍTULO 2

Teorema de Keisler-Shelah

En este capítulo presentamos una demostración del Teorema de Keisler-Shelah, resultado que es una de las pocas herramientas que establecen una relación fuerte entre equivalencia elemental e isomorfía, pues la equivalencia elemental es más débil que isomorfía. La demostración que presentamos, debida a Shelah, es un conjunto de "trucos" combinatorios para poder generar el ultrafiltro en la dirección no trivial del teorema.

1. Resultados auxiliares

Definición 44. Sean λ y κ cardinales infinitos, μ el menor cardinal α tal que $\lambda^\alpha > \lambda$, F el conjunto de funciones $f{:}\lambda \to \mu$ y G el conjunto de funciones $g : \lambda \to \beta(g)$, donde $\beta(g)$ es un cardinal menor que μ. Sea D un filtro sobre λ, (F, G, D) es κ-consistente si y sólo si lo siguiente se cumple:

(i) D está generado por un subconjunto $E \subseteq D$ de cardinalidad a lo sumo κ. E es cerrado respecto a intersecciones finitas y cualquier elemento de D es un supraconjunto de algún elemento en E.

(ii) Dado un cardinal $\beta < \mu$, existen dos β-sucesiones, una de funciones distintas en F, $\{f_\rho \mid \rho < \beta\}$, y la otra de ordinales, $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$, menores que μ, y dos funciones $f \in F$ y $g \in G$, tales que el conjunto

$$\{\xi < \lambda \mid f_\rho(\xi) = \sigma_\rho \text{ para todo } \rho < \beta \text{ y } f(\xi) = g(\xi)\}$$

y D generan un filtro no trivial es decir, el filtro no contiene a $\emptyset$ sobre λ.

Observación 45. $\mu \leq \lambda$

Demostración. Para probarlo supongamos que no es cierto, es decir $\mu > \lambda$, entonces por un lado se tiene que $\lambda^\mu = 2^\mu > \mu > \lambda$ y por otro se tiene que $\lambda^\lambda = 2^\lambda > \lambda$, pero esto no puede suceder ya que μ es el cardinal mínimo que cumple con la condición. □

Observación 46. μ es un cardinal regular, es decir, $\mathrm{cf}(\mu) = \mu$.

Demostración. Sea $\mu = \sum_{\xi < cf(\mu)} \mu_\xi$ con $0 < \mu_\xi < \mu$ para $\xi < cf(\mu)$, entonces se cumple que $\lambda^\mu = \lambda^{\sum_{\xi<cf(\mu)} \mu_\xi} = \prod_{\xi<cf(\mu)} \lambda^{\mu_\xi}$; ya que μ es el menor con la propiedad de que $\lambda^\mu > \lambda$, se concluye $\lambda^\mu = \lambda$, para $\xi < cf(\mu)$; de aquí se deduce que $\lambda^\mu = \lambda^{cf(\mu)}$, pero como $\lambda < \lambda^\mu < \lambda^{cf(\mu)}$, $\mu < cf(\mu)$ y puesto que $cf(\mu) < \mu$ siempre ocurre, concluimos que $\mu = cf(\mu)$. □

Lema 47. Existe una familia F de 2^λ funciones de λ a μ tal que $(F, 0, \{\lambda\})$ es μ-consistente.

Demostración. Sea:

$$H = \{(A, S, h) \mid A \subset \lambda, |A| < \mu, S \subset Pot(A), |S| < \mu, h : S \to \mu\};$$

por la definición de μ, $|H| = \lambda$, y enumeramos $H = \{(A_\xi, S_\xi, h_\xi) : \xi < \lambda\}$. Para $B \subseteq \lambda$, y $\xi < \lambda$ se define:

$$f_B(\xi) = \begin{cases} h_\xi(B \cap A_\xi), & \text{si } B \cap A_\xi \in S_\xi \\ 0, & \text{si } B \cap A_\xi \notin S_\xi. \end{cases}$$

Finalmente, sea $F = \{f_B \mid B \subset \lambda\}$ si $B \neq C$; sin perder generalidad, existe $b \in B$ con $b \notin C$; por lo tanto, $h_\xi(B \cap A_\xi) \neq h_\xi(C \cap A_\xi)$ lo que implica que $f_B \neq f_C$. Sean $\beta < \mu$, $\{B_\rho \mid \rho < \beta\}$ subconjuntos distintos de λ y $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$ una sucesión de ordinales menores que μ.

Se mostrará que el conjunto

$$\{\xi < \lambda \mid f_{B_\rho}(\xi) = \sigma_\rho \ \ \forall \rho < \beta\}$$

es no vacío.

Sea A un conjunto de cardinalidad menor que μ tal que $B_\rho \cap A \neq B_{\rho'} \cap A$ para todo $\rho, \rho' < \beta$, $\rho \neq \rho'$.

Sean $S = \{B_\rho \cap A \mid \rho < \beta\}$ y $h(A \cap B_\rho) = \sigma_\rho$; entonces $(A, S, h) \in H$ por lo que $(A, S, h) = (A_\xi, S_\xi, h_\xi)$ para algún $\xi < \lambda$ entonces

$$f_{B_\rho}(\xi) = h_\xi(B_\rho \cap A_\xi) = h(B_\rho \cap A) = \sigma_\rho \text{ para toda } \rho < \beta.$$

Por lo tanto, $(F, 0, \{\lambda\})$ es μ-consistente. □

Lema 48. (i) Si (F, G, D) es κ-consistente y $\kappa < \gamma$ entonces (F, G, D) es γ-consistente.

(ii) Suponga que (F_ξ, G_ξ, D_ξ) es κ-consistente para cualquier $\xi < \delta$ y que $F_\xi \supseteq F_\eta$, $G_\xi \subseteq G_\eta$, $D_\xi \subseteq D_\eta$, donde $\xi < \eta$ y $\kappa_\xi < \kappa$; entonces

$$(\bigcap_{\xi<\delta} F_\xi, \bigcup_{\xi<\gamma} G_\xi, \bigcup_{\xi<\gamma} D_\xi)$$

es κ-consistente.

(iii) Si (F, G, D) es κ-consistente y $F' \subset F$, $G' \subset G$ entonces (F', G', D) es κ-consistente.

Demostración. Inmediata de la definición de λ-consistente, (Definición 44). Note que en (ii) $\bigcup_{\xi<\gamma} D_\xi$ es un filtro pues los D_ξ forman una cadena de filtros. □

Lema 49. Sea G un conjunto de funciones de λ a los cardinales menores que μ tal que $\mu + |G| \leq \kappa$. Suponga que $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente, entonces existe un $F' \subset F$ tal que $|F \setminus F'| \leq \kappa$ y (F', G, D) es κ-consistente.

Demostración. Dado que $|G| \leq \kappa$, basta probar, por el Lema 48, que:

(1) para cualquier elemento $g \in G$, existe un subconjunto $F_g \subset F$ tal que $|F_g| \leq \kappa$ y $(F - F_g, \{g\}, D)$ es κ-consistente.

De (1) se sigue que el conjunto $F' = F \setminus \bigcup_{g \in G} F_g$ es el conjunto que requerimos. Por lo tanto, se demostrará (1).

Sea $g \in G$ y suponga que (1) no se cumple para g, entonces

(2) para cualquier subconjunto $\bar{F} \subset F$ de cardinalidad a lo sumo κ, $(F \setminus \bar{F}, \{g\}, D)$ no es κ-consistente.

Por recursión se definen los conjuntos F_ξ, $\bar{F}_\xi$, $\xi < \kappa^+$, tales que (utilizando (2))
$F_0 = F$;
$\bar{F}_\xi$ es un subconjunto de F_ξ de cardinalidad a lo sumo κ tal que $(F_\xi \setminus \bar{F}_\xi, \{g\}, D)$ no es κ-consistente;
$F_{\xi+1} = F_\xi \setminus \bar{F}_\xi$
$F_\eta = \bigcap_{\xi<\eta} F_\xi$ si η es un ordinal limite, $\eta < \kappa^+$.
Ademas, dado que $\mu \leq \kappa$, si analizamos el significado de que $(F_\xi, \{g\}, D)$ no sea κ-consistente, podemos tener la seguridad de que, para cada $\xi < \kappa^+$, existen un cardinal $\beta_\xi < \mu$, una sucesión de ordinales $\{\sigma_\rho^\xi \mid \rho < \beta_\xi\}$, menor que μ y una sucesión de funciones distintas $\{f_\rho^\xi \in \bar{F}_\xi \mid \rho < \beta_\xi\}$ tales que el conjunto:

$$A_\xi = \{\nu < \lambda \mid {f^\xi}_\rho(\nu) = {\sigma^\xi}_\rho \text{ para todo } \rho < \beta_\xi \text{ y } f^\xi(\nu) = g(\nu)\}$$

es inconsistente con D.

Recordemos que D está generado por un conjunto E de cardinalidad a lo sumo κ.
Dado que cada A_ξ es inconsistente con D, se deduce que:

$$\text{Para cada } \xi < \kappa^+, \text{ existe un } X_\xi \in E \text{ tal que } A_\xi \cap X_\xi = \emptyset.$$

Si $|E| \leq \kappa$, existen un conjunto $X \in E$ y κ^+ ordinales ξ tales que $A_\xi \cap X = \emptyset$. Dado que $\mu \leq \kappa$, supongamos, sin perder generalidad, que para todo $\xi < \kappa^+$, $\beta_\xi = \beta < \mu$ y $A_\xi \cap X = \emptyset$.

Sea $\gamma < \mu$ un cardinal tal que $g : \lambda \to \gamma$; se observa que $\gamma < \kappa^+$. Considere las funciones $\{f_\rho^\xi \mid \xi < \gamma\}$, $\rho < \beta$, $\{f^\xi \mid \xi < \gamma\}$; y los ordinales $\{\sigma_\rho^\xi \mid \xi < \gamma\}$. Ahora se ordenan todas las funciones y los ordinales mediante el cardinal $\beta + \gamma < \mu$. Puesto que $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente, el conjunto

$$A = \{\nu < \lambda \mid f_\rho^\xi(\nu) = \sigma_\rho^\xi \text{ para todo } \xi < \gamma,\ \rho < \beta, \text{y} f^\xi(\nu) = \xi\ \forall \xi < \gamma\}$$

es κ-consistente con D. En particular, $A \cap X \neq \emptyset$. Sea $\nu \in A \cap X$; se cumple que $\nu \notin A_\xi$ para todo $\xi < \kappa^+$, en consecuencia, $A_\xi \cap X = \emptyset$ pero para algún $\xi < \gamma$, $g(\nu) = \xi$ cuando $\nu \in A_\xi$. Esto es una contradicción, por lo tanto, (1) se ha demostrado.

□

Lema 50. (i) Suponga que $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente y $A \subset \lambda$. Entonces existe $F' \subset F$, con $|F \setminus F'| < \mu$, tal que $(F', 0, D')$ o $(F', 0, D'')$ es κ-consistente, donde D' es el filtro generado por $D \cup \{A\}$ y D'' es el filtro generado por $D \cup \{\lambda \setminus A\}$.

(ii) Suponga que $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente, $\mu \leq \kappa$ y $A_\xi \subset \lambda$ para $\xi < \lambda$. Entonces existen $F' \subset F$ y un filtro $D' \supset D$ tales que $|F \setminus F'| \leq \kappa$, $(F', 0, D')$ es κ-consistente y para todo $\xi < \kappa$, $A_\xi \in D'$ o $(\lambda \setminus A_\xi) \in D'$.

Demostración. (i) Primero se observa que D' y D'' son generados por un subconjunto de cardinalidad a lo sumo κ, pero esto se cumple ya que como $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente, D es un filtro sobre λ generado por $E \subset D$ con $|E| \leq \kappa$ y al unirlo con $\{A\}$ o $\{\lambda \setminus A\}$ se cumple la condición mencionada. Suponga que $(F, 0, D')$ no es κ-consistente, entonces existen un cardinal $\beta < \mu$ y distintas funciones $\{f_\rho \mid \rho < \beta$ y ordinales $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$ tales que el conjunto $B = \{\xi < \lambda \mid f_\rho(\xi) = \sigma_\rho$ para todo $\rho < \beta\}$ es inconsistente con D', por lo que existe un conjunto $X \in E$ con $B \cap X \cap A = \emptyset$.

Sea $F' = F \setminus \{f_\rho \mid \rho < \beta\}$, ahora se demostrará que $(F', 0, D'')$ es κ-consistente.

Dados $\beta' < \mu$ y las sucesiones $\{f'_\rho \mid \rho < \beta'\}$ y $\{\sigma'_\rho \mid \rho < \beta'\}$, considere el conjunto

$$B' = \{\xi < \lambda \mid f'_\rho(\xi) = \sigma'_\rho \text{ para todo } \rho < \beta\}.$$

Dado que $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente, el conjunto $B \cap B'$ es consistente con D. Sea Y cualquier conjunto en E; se tiene que $B \cap B' \cap Y \cap X \neq \emptyset$, pues $B \cap X \cap A = \emptyset$; por lo que $B' \cap Y \cap (\lambda \setminus A) \neq \emptyset$, esto es, B' es consistente con D''.

(ii) Como se tiene la misma hipótesis de (i), existen $F' \subset F$, y un filtro D' generado por $D \cup \{A\}$ o por $D \cup \{\lambda \setminus A\}$, es decir, $D' \supset D$ y, por lo tanto, $\xi < \kappa$, $A_\xi \in D'$ o $(\lambda \setminus A_\xi) \in D'$.

□

Lema 51. Suponga lo siguiente:

- $\mathfrak{A}$ es un modelo con $|A| < \mu$, y $(F, \emptyset, D)$ es κ-consistente.
- Sean φ_ξ fórmulas, $\xi < \kappa$. El conjunto $\{\varphi_\xi : \xi < \kappa\}$ es cerrado respecto a conjunciones. Escribimos a cada φ_ξ como $\varphi_\xi(x, y)$; para cada $\xi < \kappa$, sea $a^\xi : \lambda \to A$ una función de λ sobre A.
- Para cada $\xi < \kappa$,

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models (\exists x)\varphi_\xi(x, a^\xi(\nu))\} \in D.$$

Entonces existen $a : \lambda \to A$, $F' \subset F$, $D' \supset D$ tales que $|F \setminus F'| \leq \kappa$, $(F', 0, D')$ es κ-consistente y para todo $\xi < \kappa$,

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a(\nu), a^\xi(\nu))\} \in D'.$$

Demostración. Sean $|A| = \alpha$ y $\{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$ una enumeración de A. Definimos las funciones $g_\xi : \lambda \to \alpha$ para $\xi < \kappa$ como sigue:
Para cada $\nu < \lambda$

$$g_\xi(\nu) = \begin{cases} \text{mín}\, \{\eta \mid \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a_\eta, a^\xi(\nu))\}, & \text{si } a_\eta \text{ existe} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $G = \{g_\xi \mid \xi < \kappa\}$. Note que $\mu + |G| \leq \kappa$. Por el Lema 49 existe $\bar{F} \subset F$ tal que $|F \setminus \bar{F}| < \kappa$ y $(\bar{F}, G, D)$ es κ-consistente.

Sea f una función en $\bar{F}$; defina $a : \lambda \to A$ como sigue:

$$a(\nu) = \begin{cases} a_{f(\nu)}, & \text{si } f(\nu) < \alpha \\ a_0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cada $\xi < \kappa$, definimos

$$B_\xi = \{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models \varphi_\xi(a(\nu), a^\xi(\nu))\}.$$

Sea D' el filtro generado por D y $\{B_\xi \mid \xi < \kappa\}$. Note que D' está generado por un subconjunto de cardinalidad a lo sumo κ.

Sea $F' = \bar{F} \setminus \{f\}$, ahora se mostrará que la conclusión del lema se cumple para F', D' y a, es decir, que $(F', 0, D')$ es κ-consistente. Sean $\beta < \mu$, las sucesiones $\{f_\rho \mid \rho < \beta\}$ y $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$, y

$$B = \{\nu < \beta \mid f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \text{ para cualquier } \rho < \beta\}.$$

Si B fuera inconsistente con D', existirían $X \in D$ y algún B_ξ, $\xi < \kappa$ tal que $B \cap X \cap B_\xi = \emptyset$.
Ahora considere la función $f \in F$ junto con la sucesión $\{f_\rho \mid \rho < \beta\}$ y la función $g_\xi \in G$. Dado que $(\bar{F}, G, D)$ es κ-consistente, el conjunto

$$\bar{B} = \{\nu < \lambda \mid f_\rho(\nu) = \sigma_\rho \forall \rho < \beta \text{ y } f(\nu) = g_\xi(\nu)\}$$

es consistente con D.

Recuerde la definición de g_ξ y de B_ξ; podemos concluir que $\bar{B} \subset B \cap B_\xi$ y dado que $\bar{B} \cap X \neq \emptyset$, se sigue $B \cap B_\xi \cap X \neq \emptyset$, una contradicción que se logra al suponer que B es inconsistente con D'. Por lo tanto, B es consistente con D'. □

2. Teorema de Keisler-Shelah

Un resultado fundamental en la teoría de R-módulos es que la equivalencia elemental y la isomorfía son equivalentes. Una demostración de este resultado se debe a Keisler usando la HGC. Posteriormente Shelah obtuvo el resultado prescindiendo de esta hipótesis. Damos esta última por considerarla más elegante.

Cabe recordar que la equivalencia elemental es más débil que la isomorfía como se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 52. Sea A una estructura numerable,(en realidad puede ser de cualquier cardinalidad infinita), si se toma la ultrapotencia A^κ, donde $\kappa > \aleph_0$, por el Teorema de Łos, esta ultrapotencia es elementalmente equivalente a A, pues satisfacen los mismos enunciados, pero no pueden ser isomorfas, pues para serlo deberían tener la misma cardinalidad, una tiene cardinalidad $\aleph_0$ y la otra ${\aleph_0}^\kappa$ y por la teoría de conjuntos ${\aleph_0}^\kappa > \aleph_0$

Uno de los problemas que se encuentra al tratar de axiomatizar una clase de módulos es que al recurrir a la Proposición 24 se parte de que dos módulos son elementalmente equivalentes, pero no se cuenta con un conjunto de axiomas o fórmulas que se puedan utilizar. En este sentido, es de fundamental importancia el Teorema de Keisler-Shelah pues se traduce la condición original en la isomorfía de los ultraproductos.

Teorema 53 (Keisler - Shelah). Dos R-módulos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ son elementalmente equivalentes si y sólo si existe un conjunto I y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I tal que las ultrapotencias $\mathfrak{M}^I/\mathcal{U}$ y $\mathfrak{N}^I/\mathcal{U}$ son R-módulos isomorfos.

Demostración. $\Leftarrow$) Sea φ un enunciado tal que $\mathfrak{M} \models \varphi$; debemos probar que $\mathfrak{N} \models \varphi$. Como $\mathfrak{M} \models \varphi, \mathfrak{M}^I/\mathcal{U} \models \varphi$. Al ser las ultrapotencias isomorfas, se concluye que $\mathfrak{N}^I/\mathcal{U} \models \varphi$; así que por el Teorema de Łos, $\mathfrak{N} \models \varphi$.

$\Rightarrow$) Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos elementalmente equivalentes. Supongamos que μ y λ son cardinales tales que μ es el menor con $\lambda^\mu > \lambda$ y $|A|$ y $|B|$ menores que μ. Se tiene que $2^{|A|} \leq \lambda^{|A|} = \lambda$; ahora se construirán, por recursión sobre ordinales $\rho < 2^\lambda$, un ultrafiltro D sobre λ y un isomorfismo entre las ultrapotencias $\prod_D \mathfrak{A}$ y $\prod_D \mathfrak{B}$.

Iniciamos con $|F_0| = 2^\lambda$ y $D_0 = \{\lambda\}$. El Lema 47 nos permite concluir que $(F_0, 0, D_0)$ es μ-consistente; por la Observación 45 de la Definición 44, $\mu \leq \lambda$ y utilizando el Lema 48(i) se obtiene que $(F_0, 0, D_0)$ es λ-consistente. Se pueden construir una sucesión decreciente $\{F_\rho \mid \rho < 2^\lambda\}$ y una sucesión creciente $\{D_\rho \mid \rho < 2^\lambda\}$ que satisfagan las siguientes condiciones:

(1)

$$\begin{gathered} |F_0 - F_\rho| \leq \lambda + |\rho|, \text{ para } |F_\rho| = 2^\lambda; \\ (F_\rho, 0, D_\rho) \text{ es } (\lambda + |\rho|)\text{-consistente}; \\ F_\eta = \bigcap_{\rho<\eta} F_\rho, \quad D_\eta = \bigcup_{\rho<\eta} D_\rho \text{ para } \eta \text{ un ordinal límite.} \end{gathered}$$

Cualquier subconjunto de λ está en algún D_ρ ó está en el complemento de algún D_ρ, $\rho < 2^\lambda$, así que $D = \bigcup_{\rho<2^\lambda} D_\rho$ es el ultrafiltro que buscábamos (otra vez, D es un ultrafiltro pues los D_ρ forman una cadena $\subseteq$-creciente).

También necesitamos construir dos sucesiones de elementos $a_\rho : \lambda \to A$ y $b_\rho : \lambda \to B$ tales que $\{a_\rho \mid \rho < 2^\lambda\}$ y $\{b_\rho \mid \rho < 2^\lambda\}$ sean todos los elementos de A^λ

y B^λ, respectivamente, y para cada $\xi < 2^\lambda$ las siguientes condiciones se satisfagan:

(2) para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ y cualquier conjunto de elementos $a_{\rho_1}, \ldots, a_{\rho_n}$ con $\rho_i < \xi$, uno de los siguientes casos ocurre:

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models [a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)]\} \in D_\xi$$

ó

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models \neg[a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)]\} \in D_\xi;$$

(3) para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ y cualquier conjunto de elementos $a_{\rho_1}, \ldots, a_{\rho_n}$ y $b_{\rho_1}, \ldots, b_{\rho_n}$ con $\rho_i < \xi$ se cumple:

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models [a_{\rho_1}(\nu), \ldots, a_{\rho_n}(\nu)]\} \in D_\xi$$

si y sólo si

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{B} \models [b_{\rho_1}(\nu), \ldots, b_{\rho_n}(\nu)]\} \in D_\xi.$$

Mediante los Lemas 50(i) y 48 se concluye que se satisfacen todos los requerimientos de (1). Si las condiciones (2) y (3) se satisfacen para todo $\xi < \eta < 2^\lambda$ para algún ordinal límite η, entonces se cumple automáticamente para η.

Como necesitamos que se satisfagan (1)-(3) cuando $\xi = \sigma + 1$, tomemos a_σ en A^λ, y encontramos b_σ.

Sea a_σ el primer elemento de A^λ que no está en la lista $< a_\rho,\ \rho < \sigma >$, necesitamos encontrar $F_{\sigma+1}$, $D_{\sigma+1}$ y b_σ tales que se cumplan los requerimentos de (1) a (3).

Para cada fórmula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ y cualesquier ordinales $\rho_1, \ldots, \rho_n < \sigma$, considere el conjunto X como:

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_n) = \{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_\sigma(\nu) a_{\rho_1}(\nu) \ldots a_{\rho_n}(\nu)]\}.$$

Existen $\lambda + |\sigma|$ de estos conjuntos X.

Dado que $(F_\sigma, 0, D_\sigma)$ es $(\lambda + |\sigma|)$-consistente, por el Lema 50(ii) encontramos $F' \subset F_\sigma, D' \supset D_\sigma$ tales que $|F_\sigma \backslash F'| \leq \lambda + |\sigma|$, y $(F', 0, D')$ es $(\lambda + |\sigma|)$-consistente.

Cada $X(\varphi, \rho_1, \dots \rho_n)$ está en D' ó su complemento está en D'.

Sea Γ el conjunto de todas las fórmulas $\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n})$ tal que el conjunto correspondiente

$$X(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n) \in D'.$$

Note que si $\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}) \notin \Gamma$, entonces $\neg\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}) \in \Gamma$. Por lo tanto, para cada $\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}) \in \Gamma$, el conjunto Y definido como

$$Y(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n) = \{\nu < \lambda \mid \mathfrak{A} \models (\exists x)\varphi(x, a_{\rho_1} \dots a_{\rho_n})\} \in D'.$$

Observe que existen a lo más $(\lambda + |\sigma|)$ conjuntos Y. El conjunto $Z(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n)$, donde $\varphi(x, a_{\rho_1} \dots a_{\rho_n}) \in \Gamma$, definido como

$$Z(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n) = \{\nu < \lambda \mid \mathfrak{B} \models (\exists x)\varphi(x, b_{\rho_1} \dots b_{\rho_n})\} \in D'.$$

La razón de esto es que si

$$Z(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n) \notin D'$$

entonces

$Z(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n) \notin D_\sigma$, y usando (3),

$$Y(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n) \notin D_\sigma.$$

Por (2),

$$(\lambda \setminus Y(\varphi, \rho_1, \dots, \rho_n)) \in D_\sigma \subset D'.$$

Esto contradice que D' es un filtro no trivial. Aplicando el Lema 51 se obtienen $b_\sigma : \lambda \to B$, $F_{\sigma+1} \subset F'$ y $D_{\sigma+1} \supset D'$ tales que $|F' \setminus F_{\sigma+1}| < \lambda + |\sigma|$, $(F_{\sigma+1}, 0, D_{\sigma+1})$ es $(\lambda + |\sigma|)$-consistente y para cada $\varphi(x, a_{\rho_1} \dots a_{\rho_n}) \in \Gamma$,

$$\{\nu < \lambda \mid \mathfrak{B} \models \varphi((b_\sigma(\nu) b_{\rho_1}(\nu) \dots b_{\rho_n}(\nu))\} \in D'_{\sigma+1}.$$

Ya que tenemos $F_{\sigma+1}$, $D_{\sigma+1}$ y b_σ, lo primero de todo es que por nuestra elección de D', $D_{\sigma+1}$ satisface (2).

Para mostrar (3), note que si $\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}) \in \Gamma$, entonces (3) se satisface para φ y $a_\sigma, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}$. Si $\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}) \notin \Gamma$, entonces $\neg\varphi(x, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n}) \in \Gamma$, por lo que (3) se cumple para $\neg\varphi(a_\sigma, a_{\rho_1}, \dots, a_{\rho_n})$. Con lo que la inducción se completa.

Sea $D = \bigcup_{\rho<2^\lambda} D_\rho$, así que D es un ultrafiltro sobre λ. Por lo tanto, la función $[a_\rho]_D \mapsto [b_\rho]_D$ es el isomorfismo requerido de $\prod_D \mathfrak{A}$ en $\prod_D \mathfrak{B}$.

$\square$

CAPÍTULO 3

Equivalencia elemental

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de módulos desde el punto de vista de la teoría de modelos.

La figura destacada del capítulo es el Teorema de Baur-Monk que permite encontrar, bajo ciertas circunstancias, fórmulas sin cuantificadores universales equivalentes a una L(R)-fórmula dada.

1. Definiciones

Definición 54. Una L(R)-fórmula primitiva positiva $pp-frmula$ es una fórmula de la forma

$$\exists x_1, \ldots, x_m \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k, \qquad (1 \leq i \leq t)$$

donde $m,\ n,\ t\ \in$ N, $a_{ij},\ b_{ik} \in$ R y $y_1, \ldots, y_n$ son variables libres.

Dos L(R)-fórmulas $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ y $\psi(y_1, \ldots, y_n)$, con $y_1, \ldots, y_n$ variables libres, son equivalentes con respecto a un R-módulo M dado, si para cualquier $m_1, \ldots, m_n \in M$ se tiene: $\varphi(m_1, \ldots, m_n)$ es válida en M si y sólo si $\psi(m_1, \ldots, m_n)$ es válida en M.

Definición 55. Sea φ una L(R)-fórmula primitiva positiva con exactamente una variable libre y:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_iy \quad 1 \leq i \leq t.$$

Donde $a_{ij},\ b_i \in$ R.
El conjunto $\varphi(M)$ de M definido por

$$\varphi(M) = \{y \in M \mid M \models \varphi[y]\}$$

es un subgrupo aditivo de M lo cual es fácil de comprobar. El grupo $\varphi(M)$ es llamado subgrupo definible primitivo positivo o subgrupo finitamente definible de M.

Definición 56. Si φ y ψ son dos $pp - frmulas$ con una variable libre, se dice que φ está contenida en ψ ($\varphi \subseteq \psi$) si las ecuaciones lineales que aparecen en la definición de ψ forman un subsistema de las ecuaciones lineales que aparecen en la definición de φ

Definición 57. Una combinación booleana es una combinación finita de $pp-frmulas$ con respecto a los conectivos lógicos $\vee$, $\wedge$, $\neg$

2. Resultados auxiliares

Lema 58. Sea M_i con $i \in I$, una familia de R-módulos y φ una $pp-frmula$ con una variable libre, entonces:

(i) $\varphi(\prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} \varphi(M_i)$.
(ii) $\varphi(\oplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \varphi(M_i)$.
(iii) $\varphi(\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U}) = \prod_{i\in I} \varphi(M_i)/\mathcal{U}$ para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I.

Demostración. (i) $\subseteq$) Si $y \in \varphi(\prod_{i\in I} M_i)$, por definición $y \in \prod_{i\in I} M_i$ y $\varphi[y]$ es válida en M_i para toda $i \in I$, de aquí que $y \in \varphi(M_i)$ para toda $i \in I$. Entonces $y \in \prod_{i\in I} \varphi(y)$.

$\supseteq$) Si $y \in \prod_{i\in I} \varphi(M_i)$, $y \in \varphi(M_i)$ para toda $i \in I$, de donde $\varphi[y]$ es válida en M_i para toda $i \in I$; en consecuencia $\varphi[y]$ es válida en $\prod_{i\in I} M_i$, es decir, $y \in \varphi(\prod_{i\in I} M_i)$.

(ii) $\subseteq$) Supongamos que $y \in \varphi(\bigoplus_{i\in I} M_i)$; entonces $y \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $\varphi[y]$ es válida en $\bigoplus M_i$, lo que implica que $\varphi[y]$ es válida en M_i para toda $i \in I$, es decir, $y \in \varphi(M_i)$ para toda $i \in I$. Por lo tanto, $y \in \bigoplus_{i\in I} M_i$.

$\supseteq$) Si $y \in \bigoplus_{i\in I} \varphi(M_i)$ entonces $y \in \varphi(M_i)$ para toda $i \in I$, es decir, $\varphi[y]$ es válida en M_i para toda $i \in I$. Por consiguiente $\varphi[y]$ es válida en $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

(iii)

$$y \in \varphi(\prod_{i\in I} M_i/\mathcal{U}),$$

si y sólo si

$$\prod M_i/\mathcal{U} \models \varphi[y],$$

si y sólo si

$$\{j \in I \mid M_i \models \varphi[y]\} \in \mathcal{U},$$

si y sólo si

$$\{j \in I \mid y \in \varphi(M_i)\} \in \mathcal{U},$$

si y sólo si

$$\prod \varphi(M_i)/\mathcal{U} \models \varphi[y],$$

si y sólo si

$$y \in \prod \varphi(M_i)/\mathcal{U}.$$

□

En el resto de la sección nuestro objetivo es demostrar el Teorema de Baur-Monk por lo que requerimos ciertos preliminares.

Lema 59 (Principio de Sylvester). Sean $A_0, A_1, \ldots, A_k$, subconjuntos de un conjunto dado, suponga que A_0 es finito. Entonces $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ si y sólo si

$$\sum_{\Delta} (-1)^{|\Delta|} |A_0 \cap \bigcap_{i \in \Delta} A_i| = 0$$

donde Δ recorre todos los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Demostración. Se prueba por inducción empezando por el caso no trivial $k = 2$, donde

$$|A_0 \cap (A_1 \cup A_2)| = |A_0 \cap A_1| + |A_0 \cap A_2| + |A_0 \cap A_1 \cap A_2|.$$

□

Lema 60. Si $\{K_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ es una familia finita de subgrupos, (tal vez repetidos), todos de índice infinito en el grupo abeliano G, entonces

$$\bigcup_{j=1}^{m} (b_j + K_j) \subsetneq G$$

para cualesquiera elementos $b_j \in G$, $1 \leq j \leq m$.

Demostración. Sea r el número de subgrupos distintos entre los K_j, procedemos por inducción sobre r.

Si $r = 1$ se cumple de manera inmediata.

Supongamos que se cumple cuando el número de subgrupos distintos es menor que r. Si $r > 1$, suponga $G = \bigcup_{1 \leq j \leq m}(b_j + K_j)$, $K = K_j$ para $1 \leq j \leq s$, y $K \neq K_j$ para $s < j \leq n$.

Dado que $[G : K] = \infty$, una clase lateral $b + K$ debe estar contenida en $G - \bigcup_{1 \leq j \leq s} (b_j + K)$. De aquí, $b + K \subseteq \bigcup_{s < j \leq m} (b_j + K_j)$ y, por lo tanto, $K \subseteq \bigcup_{s < j \leq m} (b_j - b + K_j)$, y $G = \bigcup_{1 \leq j \leq s} (b_j + K_j) \cup \bigcup_{s \leq j \leq m} (b_j + K_j)$ es la unión finita de clases laterales con respecto a $r - 1$ distintos subgrupos de los K_j, $s < j \leq n$. Por la hipótesis de inducción, se da una contradicción.

□

Lema 61. Sean $H_1, \ldots, H_l, K_1, \ldots, K_m$ subgrupos de un grupo abeliano G, tal que $[G : H_i] < \infty$ para $1 \leq i \leq l$, y $[G : K_j] = \infty$ para $1 \leq j \leq m$. Si existen clases laterales $a_i + H_i$, $1 \leq i \leq l$, y $b_j + K_j$, $1 \leq j \leq m$ tales que

$$G = \bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq m} (b_j + K_j),$$

entonces $G = \bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i)$.

Demostración. Dado que $H_1, H_2, \ldots, H_l$ son de índice finito en G, también lo es $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_l$, y además $\bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i)$ es la union finita de clases laterales de $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_l$.

Es suficiente probar que $H_1 = H_2 = \ldots = H_l$. Si $\bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i) \subsetneqq G$ existe una clase lateral $a + H_1$ contenida en $\bigcup_{1 \leq j \leq m} (b_j + K_j)$, por lo que es la union finita de clases laterales con respecto a los subgrupos de índice infinito en G, lo cual es imposible por el Lema 60.

□

Proposición 62. Sean $H_0, H_1, \ldots, H_n$ subgrupos de un grupo abeliano G. Si para algunos elementos $g_0, g_1, \ldots, g_n \in G$ se cumple

$$g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (g_i + H_i),$$

y $|H_0/(H_0 \cap H_i)|$ es infinito para $i > k$, entonces

$$g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (g_i + H_i).$$

Demostración. La inclusión $g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} (g_i + H_i)$ es equivalente a la inclusión $H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} (g_i - g_0 + (H_i \cap H_0))$.

Para cada i existe un elemento $\bar{g}_i$ para el cual

$$\bar{g}_i + (H_i \cap H_0) = (g_i - g_0 + H_i) \cap H_0 \text{ y } H_0 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (\bar{g}_i + (H_i \cap H_0)).$$

Dado que $[H_0 : (H_i \cap H_0)]$ es infinito para $i > k$, el Lema 60 implica que $H_0 = \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\bar{g}_i + (H_i \cap H_0))$ y $H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} (g_i - g_0 + H_i)$, donde $g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} (g_i + H_i)$.

□

3. Teorema de Baur-Monk

Teorema 63 (Baur-Monk). Para cualquier R-módulo M, toda L(R)-fórmula σ es equivalente a una combinación booleana de $pp - frmulas$. Esta combinación booleana puede escogerse de tal forma que solamente dependa de σ y de los índices [$\psi(M) : \varphi(M)$] donde φ y ψ recorren todas las parejas de $pp - frmulas$ con $\varphi \subseteq \psi$.

Demostración. Iniciamos con algunas observaciones.
Sea $\varphi(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ una $pp-frmula$ con variables libres $x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p$.
Escribimos φ como una conjunción finita de fórmulas

$$\exists z_1, \ldots, z_p \left(r_i x + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j + \sum_{l=1}^{p} c_{il} z_l \right), 1 \leq i \leq s,$$

donde las $r, b,$ y c son elementos de R.

Para cualquier m-ada $(a_1, \ldots, a_m)$ de elementos en el módulo M se define

$$\varphi(M; a_1, \ldots, a_m) = \{x \in M \mid \varphi(x, a_1, \ldots, a_m, z_1, \ldots, z_p) \text{ es válida en } M\}.$$

Claramente $\varphi(M; 0, \ldots, 0)$ es un subgrupo finitamente definible de M y para cualquier m-ada $(a_1, \ldots, a_m)$, el conjunto $\varphi(M; a_1, \ldots, a_m)$ es vacío o es una clase lateral de M con respecto a $\varphi(M; 0, \ldots, 0)$.

Ahora, sea M un R-módulo fijo y considere cualquier formula φ, de la forma

$$(Q_1 v_1)(Q_2 v_2) \ldots (Q_n v_n)\psi$$

donde cada Q_i es un cuantificador universal o existencial y ψ no contiene cuantificadores.

Se probará el enunciado del teorema mediante inducción en el número de cuantificadores.

Una fórmula sin cuantificadores es claramente una combinación booleana de $pp - frmulas$. Para el paso inductivo se tiene que probar:

Sea $\psi(x, y_1, \ldots, y_m)$ una fórmula con $x, y_1, \ldots, y_m$ variables libres, (y algunas variables sin especificar en el alcance de los cuantificadores), y supongamos que $\psi(x, y_1, \ldots, y_m)$ es equivalente a una combinación booleana de pp-fórmulas; entonces $(Q_x)\psi(x, y_1, \ldots, y_m))$ es equivalente a una combinación booleana de pp-fórmulas, donde Q denota $\forall$ o $\exists$.

Por la equivalencia que existe en los cuantificadores con la negación, basta considerar $Q = \forall$.

Una conjunción de pp-fórmulas es de nuevo una pp-fórmula, por lo que es suficiente considerar el caso donde $\psi = \psi(x, y_1, \ldots, y_m)$ tiene la forma

$$\neg\varphi_0 \quad \text{o} \quad \neg\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n,$$

y cada φ_i es una pp-fórmula con $x, y_1, \ldots, y_m$ como variables libres (incluyendo el caso donde φ_0 es una tautología). Dado que $(\forall x)\neg\varphi_0(x, y_1, \ldots, y_m)$ es la negación de una pp-fórmula, se supone que ψ tiene la forma $\varphi_0 \to \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$. Entonces tenemos que mostrar que la fórmula

$$\forall x \left(\varphi_0(x, y_1, \ldots, y_m) \to \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_m) \right)$$

es equivalente a una combinación booleana de pp-fórmulas.

Sea H_i el subgrupo finitamente definible $\varphi_i(M; 0, \ldots, 0)$, $1 \leq i \leq n$, y elijamos una enumeración tal que $[H_0 : (H_0 \cap H_i)]$ es finito para $1 \leq i \leq k$ y $[H_0 : (H_0 \cap H_j)]$ es infinito para $k < j \leq n$.

Para una m-ada $(a_1, \ldots, a_m)$ de elementos en M la fórmula

$$\forall x \left(\varphi_0(x, a_1, \ldots, a_m) \to \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i(x, a_1, \ldots, a_m) \right)$$

se satisface en M solamente cuando la inclusión

$$\varphi_0(M; a_1, \ldots, a_m) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(M; a_1, \ldots, a_m) \qquad (\Diamond)$$

se cumple.

Para cualquier i, $0 \leq i \leq n$, el conjunto $\varphi_i(M; a_1, \ldots, a_m)$ es vacío o es una clase lateral con respecto a H_i, por lo que $(\Diamond)$ expresa la inclusión de una clase lateral en la unión de clases laterales, algunas de las cuales pueden ser vacías. Por la Proposición 62, $(\Diamond)$ es equivalente a

$$\varphi_0(M; a_1, \ldots, a_m) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(M; a_1, \ldots, a_m). \qquad (\Diamond\Diamond)$$

Aplicando el principio de Sylvester (Lema 59) con los conjuntos

$$A_i = \varphi(M; a_1, \ldots, a_m)/H_0 \cap \ldots \cap H_k, \; 1 \leq i \leq k,$$

que son vacíos o clases laterales de $M/H_0 \cap \ldots \cap H_k$ con respecto a $H_i/H_0 \cap \ldots \cap H_k$, la inclusión $(\Diamond\Diamond)$ se puede reescribir como

$$A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i. \qquad (\Diamond\Diamond\Diamond)$$

Para cualquier subconjunto Δ de $\{1, \ldots, k\}$, se escribe $A_\Delta = \bigcap_{i\in\Delta} A_i$. Por el principio de Sylvester, la inclusión $(\Diamond\Diamond\Diamond)$ es equivalente a la fórmula

$$\sum_{\Delta} (-1)^{|\Delta|} |A_0 \cap A_\Delta| = 0. \qquad (\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond)$$

Aquí $A_0 \cap A_\Delta$ es vacía o consiste de N_Δ clases laterales con respecto a $H_0 \cap \ldots \cap H_k$, donde

$$N_\Delta = [(H_0 \cap H_\Delta) : (H_0 \cap \ldots \cap H_k)].$$

Por lo tanto, $(\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond)$ se puede escribir como

$$\sum_{\Delta} (-1)^{|\Delta|} N_\Delta = 0,$$

donde Δ recorre la familia $\mathcal{N}(a_1, \ldots, a_m)$ que consiste en los subconjuntos de $\{1, \ldots, k\}$ en los cuales $A_0 \cap A_\Delta \neq \emptyset$.

En consecuencia, la fórmula

$$\forall x \left(\varphi_0(x, y_1, \ldots, y_m) \to \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_m) \right) \qquad (\blacklozenge)$$

es equivalente a

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{N}(y_1, \ldots, y_n)} (-1)^{|\Delta|} N_\Delta = 0,$$

donde $\mathcal{N}(y_1, \ldots, y_n)$ denota los subconjuntos Δ de $\{1, \ldots, k\}$ para los cuales

$$\tau_\Delta(y_1, \ldots, y_m) : \exists x \left(\varphi_0(x, y_1, \ldots, y_m) \wedge \bigwedge_{i\in\Delta} \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_m) \right)$$

se cumple en M.

Ahora se exhibirá una combinación booleana de pp-fórmulas equivalente (en M) a la fórmula $(\blacklozenge)$.

Considere el conjunto potencia $\mathcal{P}$ de $\{1, \ldots, k\}$ y el sistema (finito) $\mathcal{S}$ de los subconjuntos $\mathcal{N}$ de $\mathcal{P}$ para los cuales

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{N}} (-1)^{|\Delta|} N_\Delta = 0.$$

Se observa que la fórmula $(\blacklozenge)$ es válida en M si y sólo si el conjunto

$$\{\Delta \in \mathcal{P} \mid \tau_\Delta(y_1, \ldots, y_n) \text{ es válida en } M\}$$

está en $\mathcal{S}$.

Para cualquier subconjunto $\mathcal{N}$ de $\mathcal{P}$ le asociamos la conjunción

$$\tau_{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_m) = \bigwedge_{\Delta \in \mathcal{N}} \tau_\Delta(y_1, \ldots, y_m) \wedge \bigwedge_{\Delta \notin \mathcal{N}} \neg \tau_\Delta(y_1, \ldots, y_m)$$

donde Δ recorre todos los subconjuntos de $\{1, \ldots, k\}$. La disyunción

$$\tau(y_1, \ldots, y_m) = \bigvee_{\mathcal{N} \in \mathcal{S}} \tau_{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_m)$$

es una combinación booleana de pp-fórmulas. Se afirma que $\tau(y_1, \ldots, y_m)$ es equivalente (en M) a la fórmula ($\blacklozenge$).

Para cualquier m-ada $(y_1, \ldots, y_m)$ de elementos en M, la fórmula $\tau(y_1, \ldots, y_m)$ se satisface en M si y sólo si $\tau_{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_m)$ se satisface en M, para al menos un $\mathcal{N}$ en $\mathcal{S}$. Esto, sin embargo, es equivalente a la validez de $\tau_\Delta(y_1, \ldots, y_m)$ para los conjuntos $\Delta \subseteq \{1, \ldots, k\}$ que están contenidos en algún $\mathcal{N}$, lo cual es igual a $\mathcal{N}(y_1, \ldots, y_m)$. Esto muestra que τ y la fórmula ($\blacklozenge$) son equivalentes en M. Note que τ solamente depende de los índices $\mathcal{N}_\Delta$. Esto completa la prueba.

$\square$

Teorema 64 (Baur-Monk, Garavaglia). Dos R-módulos M y N son elementalmente equivalentes si y sólo si

$$[\ \psi(M) : \varphi(M)] \equiv [\ \psi(N) : \varphi(N)\ ]$$

se cumple para cualquier pareja de fórmulas primitivas positivas con una variable libre, y $\varphi \subseteq \psi$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea σ un L(R)-enunciado. Por el Teorema 63 existe una combinación booleana de enunciados primitivos positivos equivalentes a σ en M y N. Dado que los enunciados primitivos positivos son siempre verdaderos, σ es válido en M si y sólo si es válido en N.

$\Leftarrow$) Sea φ un L(R)-enunciado tal que $M \models \varphi$; se sigue que $[\psi(M) : \varphi(M)]$ es modelo de φ, pero por ser elementalmente equivalente a $[\psi(N) : \varphi(N)]$ entonces también es modelo de φ y se concluye que $N \models \varphi$.

$\square$

4. Suma y producto

Teorema 65 (Sabbagh). Sea $M_i,\ i \in I$ una familia de R-módulos. Entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i \equiv \prod_{i\in I} M_i$.

Demostración. Por el Teorema de Baur-Monk 63, para cualquier fórmula y para todo M_i, la fórmula es equivalente a una combinación booleana de fórmulas primitivas positivas, y se tiene $[\psi(M_i) : \varphi(M_i)]$, entonces
$[\psi(\oplus M_i) : \varphi(\oplus M_i)]$ al igual que $[\psi(\prod M_i) : \varphi(\prod M_i)]$

por lo que

$$[\psi(\oplus M_i) : \varphi(\oplus M_i)] \equiv [\psi(\prod M_i) : \varphi(\prod M_i)].$$

Por el Teorema 64 (Baur-Monk, Garavaglia), se cumple que

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \equiv \prod_{i\in I} M_i.$$

□

CAPÍTULO 4

Módulos planos, proyectivos e inyectivos

En este capítulo se encuentran condiciones sobre los anillos R para que la clase que forman los R-módulos sea axiomatizable (finitamente axiomatizable).

1. Definiciones

Definición 66. Un R-módulo derecho A es finitamente presentado si existe una sucesión exacta

$$0 \to K \to F \to A \to 0,$$

donde F es un R-módulo libre finitamente generado y K es un R-módulo finitamente generado.

Definición 67. Sea $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots R_i \subseteq R_{i+1} \subseteq \dots$, una cadena ascendente de ideales de un anillo R; se dice que la cadena termina o se estaciona si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_k$ para toda $n \geq k$.

Un anillo R satisface la condición de cadena ascendente (CCA), si se estaciona cualquier cadena ascendente de ideales de R.

Definición 68. Un anillo R satisface la condición de maximalidad si cualquier familia no vacía de ideales de R, tiene un elemento $\subseteq$-máximo.

Proposición 69. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) Cualquier ideal izquierdo de R es finitamente generado.
(ii) R satisface la condición de cadena ascendente.
(iii) R satisface la condición de maximalidad.

Demostración. (iii) $\Rightarrow$ (ii) Suponga que R satisface la condición de maximalidad y considere la siguiente cadena ascendente

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$$

de ideales de R. Entonces entre los K_i existe un elemento máximo; sea K_m tal elemento máximo, entonces $K_n = K_m$ cuando $n \geq m$, y la cadena termina.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponga que existe una colección no vacía Ω de ideales de R sin elemento máximo. Considere el elemento K_1 de Ω. Como K_1 no es el máximo entonces existe K_2 en Ω tal que $K_1 \subset K_2$, como K_2 no es el máximo existe K_3 tal que $K_2 \subset K_3$. Si se continua en esta forma, se genera una cadena infinita estrictamente creciente de ideales de R y no satisface la condición de cadena ascendente, que es una contradicción.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea Ω la colección de todos los ideales de R finitamente generados, que no es vacía porque al menos el ideal cero está en ella; por hipótesis Ω tiene elemento máximo sea K_0, por ser finito generado existen $k_1, \ldots, k_n$ tales que generan a K_0, suponga que $K_0 \neq K$, K un ideal de R, entonces existe $k \in K \setminus K_0$. Pero entonces $k_1, \ldots, k_n, k$ son generadores de $K_0 \cup < k >$, que está en Ω y lo contiene K_0, de aquí $K_0 = K$, y K es finito generado.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Considere la cadena ascendente

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots$$

de ideales de R. Sea $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Entonces K es un ideal de R y es finitamente generado, sean $\{k_1, \ldots, k_r\}$ sus generadores, donde cada k_j está en uno de los K_i. Entonces existe un m tal que $k_1, \ldots, k_r$ están en K_m; en tal caso $K = K_m$ y $K_n = K_m$ cuando $n \geq m$, es decir, la cadena se estaciona.

□

Definición 70. Un anillo R se llama noetheriano izquierdo si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisface :

(i) Cualquier ideal izquierdo de R es finitamente generado.
(ii) R satisface la condición de cadena ascendente.
(iii) R satisface la condición de maximalidad.

Definición 71. Sea $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots R_i \supseteq R_{i+1} \supseteq \ldots$, una cadena descendente de ideales de un anillo R, se dice que la cadena termina o se estaciona si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_n = M_k \; \forall \, n \geq k$.

Un anillo R satisface la condición de cadena descendente (CCD), si cualquier cadena descendente de ideales se estaciona.

Definición 72. Un anillo R satisface la condición de minimalidad si cualquier familia no vacía de ideales de R tiene un elemento $\subseteq$-mínimo.

Proposición 73. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) R satisface la condición de cadena descendente.
(ii) R satisface la condición de minimalidad.

Demostración. La demostración es similar a la de la Proposición 69. □

Definición 74. Un anillo R se llama artiniano izquierdo si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisface :

(i) R satisface la condición de cadena descendente.
(ii) R satisface la condición de minimalidad.

Definición 75. Una sucesión de módulos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta, si $Im(f) = ker(g)$. Si existe un homomorfismo de $0 \rightarrow A$ entonces f es monomorfismo.

Si existe un homomorfismo de $C \rightarrow 0$ entonces g es epimorfismo.

2. Equivalencia en módulos

Dado que los módulos planos y proyectivos sobre cualquier anillo son cerrados respecto a formación de sumas directas y los módulos inyectivos sobre cualquier anillo son cerrados respecto a formación de productos directos, se concluye que si los módulos planos, proyectivos e inyectivos forman una clase elementalmente cerrada, entonces el producto directo de módulos planos, proyectivos y la suma directa de inyectivos, son planos, proyectivos e inyectivos, respectivamente.

El recíproco de los resultados se demostrará en esta sección.

Teorema 76. Si B un R-módulo derecho es plano e I es un ideal izquierdo, entonces el homomorfismo $B \otimes_R I \to BI$ dado por $b \otimes i \mapsto bi$ es un isomorfismo.

Demostración. $BI = \{\Sigma b_j i_j : b_j \in B,\ i_j \in I\}$ es un subgrupo de B. En la composición $B \otimes_R I \to B \otimes_R R \to B$, el segundo término es isomorfo a B, entonces el segundo homomorfismo es isomorfismo, por lo que la composición tiene imagen BI y es monomorfismo, es decir es isomorfismo. □

Lema 77. Sean F un módulo plano y $0 \to K \to F \xrightarrow{\beta} B \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) B es plano.
(ii) $K \cap FI = KI$ para cualquier ideal izquierdo I.
(iii) $K \cap FI = KI$ para cualquier ideal izquierdo I finitamente generado.

Demostración. En condiciones (ii) y (iii), note que $KI \subseteq K \cap FI$. Antes de hacer la demostración de las implicaciones se hará una discusión.

Realizando el producto tensorial de un ideal I con la sucesión dada, se obtiene:

$$K \otimes I \to F \otimes I \xrightarrow{\beta \otimes 1} B \otimes I \to 0.$$

Identificamos $F \otimes I$ con FI mediante el isomorfismo $f \otimes i \mapsto fi$; esto identifica a $Im(K \otimes I \to F \otimes I)$ con KI. Se obtiene el isomorfismo

$$\gamma : FI/KI \xrightarrow{\sim} B \otimes I$$

dado por $fi + KI \mapsto \beta f \otimes i$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} BI &= \{\Sigma(\beta f_j) i_j : f_j \in F,\ i_j \in I\} \quad \text{porque } \beta \text{ es epimorfismo} \\ &= \{\beta(\Sigma f_j i_j)\} = \beta(FI). \end{aligned}$$

Por el primer Teorema de isomorfismo, se obtiene

$$\delta : BI = \beta(FI) \to FI/FI \cap K$$

dado por $bi \mapsto fi + FI \cap K$, donde $\beta f = b$. Juntando los homomorfismos obtenemos la composición σ :

$$FI/KI \xrightarrow{\gamma} B \otimes I \xrightarrow{\theta} FI/FI \cap K,$$

donde $\theta : b \otimes i \mapsto bi$. Explícitamente, $\sigma : fi + Ki \mapsto fi + FI \cap K$. Como $KI \subseteq FI \cap K$, σ es un isomorfismo si y sólo si $KI = FI \cap K$. Es más, dados los isomorfismos γ y δ, σ es isomorfismo si y sólo si θ lo es.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si B es plano, entonces por el Teorema 76, θ es isomorfismo, lo que implica que σ es un isomorfismo y $KI = FI \cap K$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Inmediato.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si $KI = FI \cap K$ para todo ideal finitamente generado I, entonces θ es un isomorfismo, por lo que B es plano.

□

Lema 78. Sea R un anillo y $0 \to K \to F \to A \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos, donde F es libre con base $\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$.
Si $u = x_{\alpha_1} a_1 + \ldots + x_{\alpha_r} a_r$ es un elemento de F, se define I_u como el ideal en R generado por $a_1 \ldots a_r$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) A es plano.
(ii) Si $u \in K$, entonces $u \in KI_u$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si A es plano y $u \in K$, entonces por el Lema 77, $u \in K \cap FI_u = KI_u$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea I un ideal izquierdo de R y $u \in K \cap FI$, entonces $I_u \subseteq I$ y para $u \in KI_u \subseteq KI$. Lo anteror es verdadero para todo $u \in K \cap FI$ y de esto se sigue por el Lema 77, que $K \cap FI = KI$. Por lo tanto, A es plano. □

Lema 79. Sea R un anillo y $0 \to K \to F \to A \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos derechos, donde F es libre, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) A es plano.
(ii) Dado cualquier $u \in K$, existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ tal que $\theta(u) = u$.
(iii) Dado cualquier conjunto de elementos de K,$\{u_1, \ldots, u_n\}$, existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ tal que $\theta(u_i) = u_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $u \in K$. Defina I_u como sigue: si

$$u = x_{\alpha_1} a_1 + \ldots + x_{\alpha_r} a_r,$$

(donde $\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ es una base de F), $I_u = Ra_1 + \ldots + Ra_r$. Además, como A es plano, del Lema 78 se tiene que $u \in KI_u$ y para $u = v_1 a_1 + \ldots + v_r a_r$ con $v_i \in K$, se define el homomorfismo $\theta : F \to K$ para $i = 1, \ldots, r$ como:

$$\theta(x_\alpha) = \begin{cases} v_i & \text{si } \alpha = \alpha_i \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha_i. \end{cases}$$

Por la construcción de θ se cumple que $\theta(u) = u$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dado $u = x_{\alpha_1} a_1 + \ldots + x_{\alpha_r} a_r$ en K, sea $\theta : F \to K$ un morfismo tal que $\theta(u) = u$. Entonces $u = \theta(x_{\alpha_1}) a_1 + \ldots + \theta(x_{\alpha_r}) a_r$ y u está en KI_u. Del Lema 78 se concluye que A es plano.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $u_1, \ldots, u_n \in K$.

Si $n = 1$, entonces la existencia de θ se sigue de (ii), procediendo por inducción sobre n.

Supongamos que $n > 1$ y (iii) es válido para $k < n$. Sea $\theta_n : F \to K$ un homomorfismo tal que $\theta_n(u_n) = u_n$; además, sea $v_i = u_i - \theta_n(u_i)$ para $i = 1, \ldots, n-1$; por hipótesis de inducción existe un homomorfismo $\theta' : F \to K$ tal que $\theta'(v_i) = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Se define el homomorfismo $\theta : F \to K$ como:

$$\theta = 1 - (1 - \theta')(1 - \theta_n).$$

y se cumple $\theta(u_i) = u_i$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - (1 - \theta_n - \theta' + \theta'\theta_n) \\ &= \theta_n + \theta' - \theta'\theta_n \end{aligned}.$$

y de

$$v_i = u_i - \theta_n(u_i)$$

se obtiene que

$$v_i = \theta'(u_i) = \theta'(u_i) - \theta'\theta_n(u_i).$$

Además, de

$$\theta_n(u_i) = u_i - v_i$$

concluimos

$$\begin{aligned} \theta(u_i) &= \theta_n(u_i) + \theta'(u_i) - \theta'\theta_n(u_i) \\ &= \theta_n(u_i) + v_i \\ &= u_i - v_i + v_i \\ &= u_i. \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Como $\theta(u_i) = u_i$ para todo $u_i \in K$ entonces $\theta(u) = u$ para todo $u \in K$. □

Lema 80. Sea R un anillo y A un R-módulo derecho, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) A es plano.

(ii) Si $a_1\lambda_1 + \ldots + a_r\lambda_r = 0$ donde $a_k \in A$ y $\lambda_k \in R$ entonces existen $b_1, \ldots, b_n \in A$ y $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$, $1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r$, tales que $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$ y $\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}\lambda_k = 0$

(iii) Si $\sum_{k=1}^{r} a_k\lambda_{kj} = 0$, donde $a_k \in A$ y $\lambda_{kj} \in R$, $i \leq j \leq s$, existen $b_1, \ldots, b_n \in A$ y $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$, $1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r$, tales que $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$ y $\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}\lambda_{kj} = 0$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (iii). Sean $f : F \to A$ un epimorfismo, donde F es un R-módulo derecho libre y $K = ker(f)$; se escogen $x_1, \ldots, x_n$ en F tales que $f(x_k) = a_k$ y el conjunto de los $u_j = \sum_{k=1}^{r} x_k\lambda_{kj}$, $1 \leq j \leq s$. Entonces

$$f(u_i) = \sum_{k=1}^{r} a_k\lambda_{kj} = 0$$

y como A es plano, por el Lema 79 existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ tal que $\theta(u_i) = u_i$.

Ahora escribimos $x_k - \theta(x_k) = \sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik}$, donde $z_1, \ldots, z_n$ son parte de una base de F; formamos el conjunto de los elementos $b_i = f(z_i)$, de donde

$$a_k = f(x_k) = f(x_k - \theta(x_k))\lambda_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}.$$

En resumen,

$$0 = u_j - \theta(u_j) = \sum_{k=1}^{n} \{x_k - \theta(x_k)\}\lambda_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik})\lambda_{kj} = \sum_{i=1}^{n} z_i(\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}\lambda_{kj}),$$

y como los $z_1, \ldots, z_n$ son parte de la base de F, se cumple que

$$\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj} = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Sea $j = m$ para algún m y sea $\lambda_k = \lambda_{km}$. Con esto se obtiene lo requerido.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $f : F \to A$ un epimorfismo, donde F es un R-módulo libre con base $\{x_\alpha\}$; además, sea $K = ker(f)$ y suponga que $u = x_{\alpha_1}\lambda_1 + \ldots + x_{\alpha_r}\lambda_r$ está en K.

Si $a_k = f(x_{\alpha_k})$ entonces $a_1\lambda_1 + \ldots + a_r\lambda_r = 0$.
Por hipótesis existen $b_1, \ldots, b_n$ en A y $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$, $1 \leq n, k \leq r$, tales que

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik} \text{ y } \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_k = 0,$$

En consecuencia, $z_i \in F$ y $f(z_i) = b_i$. Definimos un homomorfismo $\theta : F \to F$ como

$$\theta(x_{\alpha_k}) = x_{\alpha_k} - \sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik} \text{ para } k \leq r$$

y

$$\theta(x_\alpha) = 0 \text{ para } \alpha \neq \alpha_i \text{ para todo } i = 1, \ldots r.$$

$$f(\theta(x_{\alpha_k})) = a_k - \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik} = 0$$

y

$$\theta(F) \subseteq K.$$

En conclusión, se tiene que:

$$\theta(u) = u - \sum_{k=1}^{r}(\sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik})\lambda_k = u - \sum_{i=1}^{n} z_i(\sum_{k=1}^{r}\mu_{ik}\lambda_k) = u$$

y por el Lema 79 deducimos que A es plano.

□

3. Definiciones sobre ultrafiltros

Definición 81. Sea P un ultrafiltro sobre α. La norma de P es

$$||P|| = \min\{|A| : A \in P\}.$$

Es claro que $1 \leq ||P|| \leq \alpha$ para todo ultrafiltro P sobre α.

Definición 82. Sean κ y α cardinales y P un ultrafiltro sobre α, entonces P es κ-uniforme si $||P|| \geq \kappa$.

Un ultrafiltro α-uniforme sobre α es uniforme.

Definición 83. Sean α y κ cardinales y $\mathcal{F} \subset Pot(\alpha)$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita κ-uniforme si

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- $|\bigcap_{k\leq n} A_k| \geq \kappa$ donde $n < \omega$.
- $A_k \in \mathcal{F}$ para $k \leq n$.

Si $\mathcal{F} \subset Pot(\alpha)$ y $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita α-uniforme, entonces se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita uniforme.

$\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita si y sólo si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita 1-uniforme.

4. Módulos planos

Al considerar un R-módulo izquierdo A y una colección $\{B_\gamma\}$ de R-módulos derechos, para cada λ, el homomorfismo proyección $\prod B_\gamma \to B_\lambda$ induce un homomorfismo $(\prod B_\gamma) \otimes_R A \to B_\lambda \otimes_R A$ y estos homomorfismos inducen al homomorfismo $(\prod B_\gamma) \otimes_R A \to \prod(B_\gamma \otimes_R A)$, el cual vamos a referir como el homomorfismo natural

Un caso especial de esta situación es cuando todos los módulos B_γ son copias de un módulo fijo B, en este caso a $\prod B_\gamma$ lo identificamos con el conjunto B^X de todas las funciones del conjunto de índices X sobre B.

En el caso $B = R_R$, identificamos a $B \otimes_R A$ con A, donde el homomorfismo natural $(R^X) \otimes_R A \to A^X$, con φ, el homomorfismo natural definido como $(\varphi(t \otimes a))_\gamma = t_\gamma a$.

Proposición 84. Para todo R-módulo izquierdo A, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es finitamente generado.
(ii) El homomorfismo natural $(\prod B_\gamma) \otimes_R A \to \prod(B_\gamma \otimes_R A)$ es inyectivo para toda colección $\{B_\gamma\}$ de R-módulos derechos.
(iii) El homomorfismo natural $(R^X) \otimes_R A \to A^X$ es inyectivo para todo conjunto de índices X.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sean $a_1, \ldots, a_n$ generadores de A. Cualquier elemento $cx \in \prod(B_\gamma \otimes_R A)$, escribimos $x_\gamma = b_{1\gamma} \otimes a_1 + \ldots + b_{n\gamma} \otimes a_n$ para cada γ, donde $B_{i\gamma} \in B_\gamma, 1 \leq i \leq n\}$ y son los componentes de un elemento de $b_i \in \prod B_\gamma$, con lo anterior, el elemento $b_1 \otimes a_1 + \ldots b_n \otimes a_n$ en $(\prod B_\gamma) \otimes_R A$ va a x por medio del homomorfismo natural.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Inmediato.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Definimos $t \in A^X$ definiendo $t_a = a$ para todo $a \in X$. Utilizando (iii) existe un elemento $w_1 \otimes a_1 + \ldots + w_n \otimes a_n$ en $(R^X) \otimes_R A$ el cual va a t bajo el homomorfismo natural. Observe que $w_{1a} \otimes a_1 + \ldots + w_{na} \otimes a_n = a$ para toda $a \in A$, concluimos que $a_1, \ldots, a_n$ generan a A.

□

Proposición 85. Para todo R-módulo izquierdo A, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es finitamente presentado.
(ii) El homomorfismo natural $(\prod B_\gamma \otimes_R A \to \prod(B_\gamma \otimes_R A)$ es biyectivo para toda colección $\{B_\gamma\}$ de R-módulos.
(iii) El homomorfismo natural $(R^X) \otimes_R A \to A^X$ es biyectivo para todo conjunto de índices X.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Existe una sucesión exacta

$$0 \to K \to F \to A \to 0$$

de R-módulos izquierdos con F libre finitamente generado y K sólo finitamente generado, construimos un diagrama con renglones exactos como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\prod B_\gamma) \otimes_R K & \longrightarrow & (\prod B_\gamma) \otimes_R F & \longrightarrow & (\prod B_\gamma) \otimes_R A & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
\prod(B_\gamma \otimes_R K) & \longrightarrow & \prod(B_\gamma \otimes_R F) & \longrightarrow & \prod(B_\gamma \otimes_R A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ya que F es un sumando directo de copias de R se concluye que g es una biyección, por la Proposición 84, f es un homomorfismo inyectivo, del diagrama y lo anterior se concluye que h es biyectivo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Inmediato.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por la Proposición 84, A es finitamente generado, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to K \to F \to A \to 0$$

de R-módulos izquierdos, con F un módulo libre finitamente generado. Dado un conjunto X, construimos un diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & (R^X)\otimes_R K & \longrightarrow & (R^X)\otimes_R F & \longrightarrow & (R^X)\otimes_R A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & K^X & \longrightarrow & F^X & \longrightarrow & A^X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se sigue que g es una biyección . Como h es un homomorfismo biyectivo por (iii), se concluye que f es inyectivo. En resumen, la Proposición 84 dice que K es finitamente generado cuando A es finitamente presentado.

□

Definición 86. Un anillo R es coherente izquierdo si todo ideal izquierdo de R finitamente generado es finitamente presentado.

Teorema 87. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) El producto directo de R-módulos derechos planos es plano.
(ii) Para todo conjunto X, R^X es un módulo plano.
(iii) R es coherente derecho.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Inmediato.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea I un ideal izquierdo finitamente generado de R. Dado un conjunto X, se deduce de (ii), que el homomorfismo $(R^X)\otimes_R I \to R^X$ es inyectivo, de lo cual $(R^X)\otimes_R I \to I^X$ es inyectivo. Mediante las Proposiciones 84 y 85, se concluye que I es finitamente presentado.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea $\{B_\gamma\}$ una colección de R-módulos derechos planos, por medio de (iii), todo ideal izquierdo I de R finitamente generado es finitamente presentado, entonces por la Proposición 85, el homomorfismo natural $(\prod B_\gamma)\otimes_R I \to \prod(B_\gamma \otimes_R I)$ es biyectivo. Dado que cada B_γ es plano, todos los homomorfismos $B_\gamma \otimes_R I \to B_\gamma$ son inyectivos; entonces el homomorfismo $(\prod B_\gamma)\otimes_R I \to \prod B_\gamma$ debe ser inyectivo, se sigue que el homomorfismo $(\prod B_\gamma)\otimes_R K \to \prod B_\gamma$ es inyectivo para todo ideal izquierdo K, se concluye que $\prod B_\gamma$ es plano.

□

Teorema 88. Sea $\mathcal{C}$ la clase de módulos planos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{C}$ es axiomatizable.
(ii) $\mathcal{C}$ es elementalmente cerrada.
(iii) Cualquier ultrapotencia de un R-módulo izquierdo R es plana.
(iv) R es coherente derecho.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Por la Proposición 24(i) se cumple la implicación.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sean M un R-módulo, I un conjunto de índices y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, entonces la ultrapotencia es plana, pues $\prod M^I/\mathcal{U} \equiv M$ y por (ii).

(iv) $\Rightarrow$ (i) F denota el conjunto de sucesiones S no vacías finitas de elementos de R. Se define, para todo elemento $S = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_r \rangle$ de F, un enunciado φ_S tal que un módulo A es plano si y sólo si A es modelo del conjunto $\{\varphi_S \mid S \in F\}$.

Sea f_S el homomorfismo de R-módulos derechos de R^r sobre R definido por:

$$f_S(\nu_1, \ldots, \nu_r) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nu_i,$$

por la definición de coherente derecho, $ker(f_S)$ admite, como R-módulo derecho, un subconjunto generador finito; sea $\rho_S = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ tal subconjunto donde cada ρ_i es una r-ada $(\rho_{i1}, \ldots, \rho_{ir})$.

φ_S es el enunciado:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_r \left[\sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_m \bigwedge_{k=1}^{r} \left(a_k = \sum_{i=1}^{m} \rho - iky_i \right) \right].$$

Si A es modelo del conjunto $\{\varphi_S \mid S \in F\}$ entonces por el Lema 80, A es plano.

Recíprocamente, supongamos que A es plano y $S = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_r \rangle$ un elemento de F. Además, $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r = 0$ una relación lineal entre elementos $a_1, \ldots, a_r$ de A. Por el Lema 80 existen $b_1, \ldots b_n \in A$ y $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$, $1 \leq i \leq n$; $1 \leq k \leq r$, tales que $a_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ik} b_i$ y $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mu_{ik} = 0$. Para cada i la r-ada $(\mu_{i1}, \ldots, \mu_{ir})$ está en $ker(f_S)$. Por lo tanto, es una combinación de elementos de ρ_S. Para cada i, $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{im}$ son elementos de R tales que:

$$(\mu_{i1}, \ldots, \mu_{ir}) = \sum_{j=1}^{m} \rho_j \xi_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (\rho_{j1}, \ldots, \rho_{jr}) \xi_{ij}.$$

Se sigue que

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \rho_{jk} \xi_{ij} \right) b_i = \left(\sum_{j=1}^{m} \rho_{jk} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} b_i \right).$$

Entonces

$$\bigwedge_{k=1}^{r} \left(a_k = \sum_{j=1}^{m} \rho_{jk} y_j \right) \text{ con } y_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} b_i$$

y A es un modelo de φ_S.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea f un homomorfismo de módulos derechos de R^r sobre R, donde r es un entero positivo; se observa que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in R$ tales que

$$\forall(\nu_1, \ldots, \nu_r) \in R^r,\ f(\nu_1, \ldots, \nu_r) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nu_i.$$

Supongamos que el $ker(f)$ no es finitamente generado y exhibiremos una ultrapotencia de R que no es plana.

Sean $\{\mu_\beta \mid \beta < \gamma\}$ un subconjunto generador de cardinalidad infinita γ del R-módulo derecho $ker(f)$ tal que μ_β no es combinación lineal de elementos de $\{\mu_\eta \mid \eta < \beta\}$ y D un ultrafiltro uniforme sobre γ.

Consideremos la ultrapotencia R^r/D. Cada μ_β es una r-ada $(\mu_{\beta_1}, \ldots, \mu_{\beta_r})$.

Se denota con a_k al elemento $(\mu_{\beta k})$ de R^γ y con $\bar{a}_k$ su imagen canónica en R^γ/D, $1 \leq k \leq r$.

La relación lineal $\lambda_1 \bar{a}_1 + \ldots + \lambda_r \bar{a}_r = 0$ se satisface.

Ahora supongamos que R^γ/D es plano y usando el Lema 80 derivaremos una contradicción.

Sean $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \in R^\gamma/D$ y $\{\mu'_{ik}\} \subseteq R$, $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r$, tales que

$$\bar{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \mu'_{ik} = 0.$$

Para cada i, el elemento $\mu'_i = \{\mu'_{ik} \mid 1 \leq k \leq r\}$ está en el $Ker(f)$. Entonces existe un ordinal $\sigma < \gamma$ tal que cada μ'_i es una combinación lineal de elementos de $\{\mu_\beta \mid \beta < \sigma\}$.

Para cada i sean $\xi_{i\beta}$ elementos de R, todos ellos cero excepto una cantidad finita tal que

$$(\mu'_{i1}, \ldots, \mu'_{ir}) = \sum_{\beta < \sigma} (\mu_{\beta 1}, \ldots, \mu_{\beta r}) \xi_{i\beta}; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por otra parte, como $\bar{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \mu'_{ik} \bar{b}_i$, existen $T \in D$ y elementos $b_i = (b_{\beta i}) \in R^r$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que para cada k

$$\beta' \in T \Rightarrow \mu_{\beta' k} = \sum_{i=1}^{n} \mu'_{ik} b_{\beta' i}.$$

Se sigue que

$$\beta' \in T \Rightarrow \mu_{\beta' k} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{\beta<\sigma} \mu_{\beta k}\xi_{i\beta}) b_{\beta' i} = \sum_{\beta<\sigma} \mu_{\beta k} (\sum_{i=1}^{n} \xi_{i\beta} b_{\beta' i}),$$

$$\beta' \in T \Rightarrow \mu_{\beta'} = (\mu_{\beta' 1}, \ldots, \mu_{\beta' r}) = \sum_{\beta<\sigma} \mu_{\beta} (\sum_{i=1}^{n} \xi_{i\beta} b_{\beta' i}).$$

Como D es uniforme, T contiene un ordinal $\alpha \geq \sigma$. Un procedimiento igual muestra que μ_α es una combinación lineal de elementos de $\{\mu_\beta \mid \beta < \sigma\}$, lo cual es una contradicción.

□

5. Módulos proyectivos

Definición 89. Un anillo R es perfecto izquierdo si todo R-módulo plano es proyectivo.

Teorema 90. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) Todo producto directo de R-módulos proyectivos es proyectivo.
(ii) R^I es proyectivo para todo conjunto I.
(iii) R es perfecto izquierdo y coherente derecho.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Basta observar que R es un R-módulo proyectivo.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Por la definición 86, R es coherente derecho.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Si A es cualquier producto directo de R-módulos proyectivos izquierdos, entonces A también es un producto de R-módulos planos izquierdos; por ser coherente derecho, A es plano y como R es perfecto izquierdo, A es proyectivo. □

Lema 91. Todo ultraproducto de módulos inyectivos es inyectivo si y sólo si toda ultrapotencia de un módulo inyectivo es inyectiva.

Demostración. Supongamos que todo ultrapotencia de un módulo inyectivo es inyectivo. Sea $P = \prod_{i\in I} P_i/D$ un ultraproducto de una familia $\{P_i : i \in I\}$ de módulos inyectivos. Se mostrará que P es inyectivo.

Q denota el producto directo $\prod_{i\in I} P_i$; por la Proposición 26, Q es inyectivo y por hipótesis, Q^I/D es inyectivo. Probaremos que P es sumando directo de Q^I/D definiendo los homomorfismos $\bar{f} : Q^I/D \to P$, $\bar{g} : P \to Q^I/D$ tales que $\bar{f} \circ \bar{g} =$ identidad en P. Sea f el homomorfismo: $Q^I \to Q = \prod_{i\in I} P_i$ inducido por la familia de homomorfismos $f_i = p_i \circ q_i : Q^I \to P_i$ donde $q_i : Q^I \to Q$, $p_i : Q \to P_i$ son las proyecciones canónicas.

Sea g el homomorfismo : $Q \to Q^I$ inducido por la familia de homomorfismos $g_i = j_i \circ p_i : Q \to Q$ donde $j_i : P_i \to Q$ es la inclusión canónica. Entonces $f \circ g =$ identidad en Q, por lo anterior

$$p_i \circ f \circ g = f_i \circ g = p_i \circ q_i \circ g = p_i \circ g_i = p_i \circ j_i \circ p_i = p_i$$

para toda $i \in I$. Se observa que f y g inducen a $\bar{f}$ y $\bar{g}$ en los ultraproductos, que es lo que buscábamos.

□

Observación 92. Con la demostración anterior se ha mostrado la siguiente afirmación más general: todo ultraproducto de una familia de módulos es un sumando directo de una ultrapotencia del producto de esta familia. La misma prueba muestra que tal ultraproducto es también un sumando directo de una ultrapotencia de la suma directa de la familia.

Teorema 93. Sea $\mathcal{C}$ la clase de R-módulos proyectivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{C}$ es axiomatizable.
(ii) $\mathcal{C}$ es elementalmente cerrada.
(iii) R es perfecto izquierdo y coherente derecho.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Por la Proposición 24(i) se cumple la implicación.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Si $\mathcal{C}$ es axiomatizable entonces, como todo producto de módulos proyectivos es proyectivo, se sigue que $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a formación de productos arbitrarios; en vista de lo anterior (Teorema 90), R es perfecto izquierdo y coherente derecho.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si R es perfecto izquierdo y coherente derecho, por definición de perfecto izquierdo y el Teorema 88, $\mathcal{C}$ coincide con la clase de módulos planos, así que $\mathcal{C}$ es axiomatizable.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por hipótesis $\mathcal{C}$ es elementalmente cerrada y como $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultrapotencias, por el Lema 91, $\mathcal{C}$ es cerrada respecto a la formación de ultraproductos y, por la Proposición 24, $\mathcal{C}$ es axiomatizable.

□

6. Módulos inyectivos

Definición 94. Si R es un anillo con 1 y M un módulo izquierdo, entonces un sistema es un conjunto de ecuaciones en una variable x, todas de la forma $\lambda_i x = a_i$ donde $\lambda_i \in R$ y $a_i \in M$

Definición 95. Para elementos $m_1, \ldots, m_t$ en el R-módulo izquierdo M y elementos $a_1, \ldots, a_t$ en R, el sistema de ecuaciones

$$a_1x = m_1, \ldots, a_tx = m_t$$

es consistente si

$$\sum_{i=1}^{t} r_i m_i = 0$$

siempre que

$$\sum_{i=1}^{t} r_i a_i = 0$$

Teorema 96. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Los módulos inyectivos forman una clase axiomatizable.
(ii) Cualquier ultraproducto de módulos inyectivos es inyectivo.
(iii) Para cualquier entero positivo n, R satisface la siguiente propiedad:
El núcleo de cualquier homomorfismo de R^n sobre R es finitamente generado.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) De la proposición 24 se tiene que axiomatizable implica cerrada respecto a formación de ultraproductos, entonces todo ultraproducto de módulos inyectivos es inyectivo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea n un entero positivo y f un homomorfismo de R^n sobre R, se observa que existen $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in R$ tales que

$$\forall(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in R^n \qquad f(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i.$$

Supongamos que $ker(f)$ no es finitamente generado; se debe encontrar un ultraproducto de módulos inyectivos que no sea inyectivo.

Si β denota el menor cardinal tal que existe un subconjunto $\{a_\tau : \tau < \beta\}$ generador de $ker(f)$ de cardinalidad β, β es infinito y si $\langle a_\tau : \tau < \nu\rangle$ es el submódulo del $ker(f)$ generado por $\{a_\tau : \tau < \nu\}$ se tiene que

$$(1) \qquad (\forall \nu < \beta)(\exists \nu' < \beta) a_{\nu'} \notin \langle a_\tau \rangle_{\tau < \mu}.$$

Para cada $\nu < \beta$, el módulo cociente $R^n/\langle a_\tau\rangle_{\tau<\nu}$ se encaja en un módulo inyectivo E_ν, esto porque todo módulo se encaja en un módulo inyectivo. Sea D un ultrafiltro uniforme sobre β.

Afirmación: el ultraproducto $\prod_{\nu<\beta} E_\nu/D$ no es inyectivo.
En efecto, para cada i entre 1 y n sea e_i el elemento de R^n cuya i-ésima componente

es 1 y todas las demás son 0.

Para cada ν menor que β sean $e_{i,\nu}$ la imagen de e_i respecto al homomorfismo canónico de R^n en $R^n/\langle a_\tau \rangle_{\tau<\nu}$ y $\bar{e}_i$ la clase de equivalencia módulo D de $(e_{i,\nu})_{\nu<\beta}$. Entonces basta demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\{\lambda_i x = \bar{e}_i : 1 \leq i \leq n\}$$

es consistente pero no tiene solución en $\prod_{\nu<\beta} E_\nu/D$.

El sistema es consistente: por la Definición 95 y el Teorema 96 es suficiente mostrar que para cada $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in ker(f)$ se cumple $\sum_{i=1}^n \mu_i \bar{e}_i = 0$.

Es más, nos podemos restringir al caso donde $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ es un elemento a_ν del submódulo generado por $\{a_\tau : \tau < \beta\}$. Pero en este caso $\sum_{i=1}^n \mu_i e_{i,\nu'}$ es la imagen de a_ν respecto al homomorfismo canónico de R^n sobre $R^n/\langle a_\tau : \tau < \nu' \rangle$, para cada $\nu' < \beta$. Se sigue que para cada ν' mayor que ν y menor que β, el elemento $\sum_{i=1}^n \mu_i e_{i,\nu'}$ es igual a cero. Dado que $\{\nu' \mid \nu < \nu' < \beta\} \in D$ (porque D es uniforme), se tiene $\sum_{i=1}^n \mu_i \bar{e}_i = 0$.

El sistema no tiene solución en $\prod_{\nu<\beta} E_\nu/D$: supongamos que existe un elemento $(s_\nu)_{\nu<\beta}$ en $\prod_{\nu<\beta} E_\nu$, cuya imagen respecto al homomorfismo canónico de $\prod_{\nu<\beta} E_\nu$ sobre $\prod_{\nu<\beta} E_\nu/D$ es solución del sistema. En este caso existirá un índice $\nu < \beta$ tal que $\lambda_i s_\nu = e_{i,\nu}$ para toda i entre 1 y n.

Se sigue que para cada elemento $a_{\nu'} = (\mu'_1, \ldots, \mu'_n)$ del submódulo generado por $\{a_\tau : \tau < \beta\}$, se cumple que $\sum_{i=1}^n \mu'_i e_{i,\nu} = 0$ ó $a_{\nu'} \in \langle a_{tau} \rangle_{\tau<\nu}$ lo cual contradice (1).

(iii) $\Rightarrow$ (i) F_k denota el conjunto (finito) de sucesiones no vacías ρ, de elementos de R de longitud menor que k.
Definiremos para cualquier elemento $\rho = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de F_k un enunciado φ_ρ de primer orden tal que el módulo M es inyectivo si y sólo si M es modelo del conjunto $\{\varphi_\rho \mid \rho \in F_k\}$.

Sean $\delta = \{\lambda_i x = a_i : 1 \leq i \leq n\}$ un sistema tal que $\rho(\delta) = \rho$ y $J = J_\rho$ es el nucleo del homomorfismo f de R^n sobre R definido por:

$$f(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i.$$

$B = B_\rho = \{b_j : 1 \leq j \leq m\}$ denota a un subconjunto finito generador de J.
Si $b_j = (\mu_{1,j}, \ldots, \mu_{n,j})$ el sistema δ es consistente si y sólo si

$$\bigwedge_{j=i}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} a_i = 0).$$

Si φ_ρ es el enunciado:

$$\forall a_1 \ldots a_n \Big[\bigwedge_{j=i}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} a_i = 0) \to \exists x (\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = a_i) \Big],$$

M es inyectivo si y sólo si M es un modelo del conjunto $\{\varphi_\rho \mid \rho \in F_k\}$.

□

CAPÍTULO 5

Clases finitamente axiomatizables

En este capítulo se consideran anillos para los cuales los R-módulos inyectivos, proyectivos y planos forman una clase finitamente axiomatizable, lo cual es uno de los objetivos del presente trabajo, las condiciones que se piden sobre los anillos son: finitamente presentado, artiniano, netheriano,etc.

Se define la dimensión de Krull para trabajar en ideales de un anillo y se hace mención a las consecuencias y aplicaciones del concepto. En este capítulo se considerará a $\mathfrak{a}$ como un ideal del anillo R.

1. Módulos inyectivos

Definición 97. Un R-módulo M es $\mathfrak{a}$-inyectivo si $Ext^1_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$. Un R-módulo derecho N es $\mathfrak{a}$-plano si $Tor_1^R(N, R/\mathfrak{a}) = 0$

Para el ideal $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^t Ra_i$ se ve que M es $\mathfrak{a}$-inyectivo si y sólo si cualquier sistema consistente de ecuaciones,

$$a_1x = m_1, \ldots, a_tx = m_t, \qquad (*)$$

donde $m_1, \ldots, m_t \in M$ tiene una solución x en M.

Cuando $\mathfrak{a}$ es finitamente presentado, la consistencia de (*) puede expresarse mediante un enunciado de primer orden en L(R).

Proposición 98. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal izquierdo de R finitamente presentado, entonces los R-módulos $\mathfrak{a}$-inyectivos forman una clase finitamente axiomatizable. Es más, si $\mathfrak{a}$ es n-presentado entonces los R-módulos M para los cuales $Ext^n_R(R/\mathfrak{a}, M) = 0$ forman una clase finitamente axiomatizable.

2. Módulos planos

Proposición 99. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal izquierdo de R finitamente presentado, entonces los R-módulos derechos $\mathfrak{a}$-planos forman una clase finitamente axiomatizable. Es más, si $\mathfrak{a}$ es n-presentado los R-módulos derechos N para los cuales $Tor_n^R(N, R/\mathfrak{a}) = 0$ forman una clase finitamente axiomatizable.

Definición 100. Para cualquier R-módulo izquierdo M, el dual

$$M^* = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un R-módulo derecho, donde $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ denota el grupo aditivo de los números racionales módulo los enteros.

De manera similar se define para R-módulos derechos.

Teorema 101. Sea M un R-módulo izquierdo, N un R-módulo derecho y $\mathfrak{a}$ un ideal izquierdo de R. Entonces:

(i) N es $\mathfrak{a}$-plano si y sólo si N^* es $\mathfrak{a}$-inyectivo.
(ii) Cuando $\mathfrak{a}$ es finitamente presentado, entonces M es $\mathfrak{a}$-inyectivo si y sólo si M^* es $\mathfrak{a}$-plano.

Demostración. (i) Se sigue del isomorfismo natural

$$Hom_R(R/\mathfrak{a}, N^*) \cong (N \otimes_R (R/\mathfrak{a}))^*.$$

(ii) La hipótesis de que $\mathfrak{a}$ es finitamente presentado implica que existe un isomorfismo natural

$$M^* \otimes_R R/\mathfrak{a} \cong (Hom_R(R/\mathfrak{a}, M))^*.$$

□

Definición 102. Un R-módulo (izquierdo) M es FP-inyectivo (o absolutamente puro) si $Ext^1_R(F, M) = 0$ para cualquier R-módulo (izquierdo) F finitamente presentado.

Teorema 103. Para cualquier anillo R las siguientes condiciones son equivalentes

(i) Los R-módulos izquierdos FP-inyectivos forman una clase finitamente axiomatizable.
(ii) Los R-módulos derechos planos forman una clase finitamente axiomatizable.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Como (i) implica que R es coherente izquierdo (un anillo es coherente izquierdo si cualquier ultrapotencia de cualquier módulo izquierdo inyectivo es FP-inyectivo), por la Proposición 98, para cualquier ideal izquierdo finitamente generado $\mathfrak{a}$ de R, los R-módulos $\mathfrak{a}$-inyectivos son finitamente axiomatizables. De lo anterior, para todo $\mathfrak{a}$ fijo, la $\mathfrak{a}$-inyectividad es una propiedad de primer orden en el lenguaje L(R). Un R-módulo izquierdo M es FP-inyectivo si y sólo si es $\mathfrak{a}$-inyectivo para todo ideal izquierdo $\mathfrak{a}$ finitamente generado.

Como los módulos FP-inyectivos por hipótesis forman una clase finitamente axiomatizable se deduce que existen ideales izquierdos $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ tales que un R-módulo izquierdo M es FP-inyectivo si éste es $\mathfrak{a}_i$-inyectivo para $1 \leq i \leq n$. Entonces para todo R-módulo derecho N, del Teorema 101, se deduce que:

N es plano si y sólo si N^* es FP-inyectivo, si y sólo si N^* es $\mathfrak{a}_i$-inyectivo para $1 \leq i \leq n$, si y sólo si N es $\mathfrak{a}_i$-plano para $1 \leq i \leq n$.

Por la Proposición 99, los R-módulos derechos planos forman una clase finitamente axiomatizable.

(ii) $\Rightarrow$ (i) La demostración es similar a la anterior.

□

Definición 104. Sea M un R-módulo derecho. La dimensión de Krull de M, se denota por K-dim M, se define por recursión como sigue:

- K-dim $M = -1$ si $M = 0$;
- K-dim $M = \alpha$ si K-dim $M \not< \alpha$ y para toda cadena descendente
$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$$
de submódulos de M, existe un índice r tal que si $n \geq r$, entonces
$$K - dim(M_n/M_{n+1}) < \alpha$$

Si no existe un ordinal α tal que K-dim $M = \alpha$, se dice que M no tiene dimensión de Krull.

La dimensión de un anillo R, K-dim R, se define como la dimensión de Krull del R-módulo derecho R.

Definición 105. La dimensión dual de Krull, denotada por dim-K M, se obtiene considerando cadenas ascendentes en vez de descendentes; K-dim $M = 0$ si y sólo si M es un módulo artiniano; en efecto, ya que por ser un módulo artiniano la cadena descendente se estaciona y el cociente $M_n/M_{n+1} = 0$. tenemos que, dim-K$= 0$ si y sólo si M es un módulo noetheriano, en forma similar a módulo artiniano.

Definición 106. Sea R un anillo noetheriano izquierdo. Un ideal izquierdo P de R es crítico si $P \neq R$ y la dimensión de Krull $K - dim(R/A) < K - dim(R/P)$ para todo ideal izquierdo $A \supsetneqq P$.

Definición 107. Un módulo A es indivisible o inescindible si su descomposición en suma directa $A = A_1 \oplus A_2$, implica que $A_1 = 0$ o $A_2 = 0$.

Definición 108. Un módulo A, diferente de cero, es un módulo simple o irreducible, si sus únicos submódulos son 0 y A. Lo que es equivalente a que A es un módulo derecho (izquierdo) simple si y sólo si $A \cong R/M$ para algún ideal maximal derecho (izquierdo) M de R.

Definición 109. Una extensión esencial de un módulo M es un módulo E que contiene a M tal que cualquier submódulo no cero de E intersecta a M. En símbolos si $S \subset M$ y $S \neq 0$, entonces $S \cap M \neq 0$.

Si $M \subsetneqq E$, se dice que E es una extensión esencial propia de M.

Definición 110. Una extensión esencial E de M es extensión esencial máxima absoluta, si cualquier extensión P de M, con $E \subset P$, no es esencial.

Definición 111. Un módulo N es una extensión inyectiva mínima de un módulo M, si $M \subseteq N$, N es inyectivo y si $M \subseteq K \subset N$, entonces K no es inyectivo.

Lema 112. Sea $M \subset E$, con E diferente de 0 cualesquier R-módulos. Suponga que $T \subseteq E$ es un submódulo maximal con respecto a $M \cap T = 0$. Entonces $(M \oplus T)/T \subseteq E/T$ es una extensión esencial.

Demostración. Suponga que $0 \neq K/T \subset E/T$, $T \subsetneq K$, es cualquier submódulo no cero. Se mostrará que $[(M+T)/T] \cap (K/T) \neq 0$. Suponga que $[(M+T)/T] \cap (K/T) = 0$. Entonces $K \cap (M+T) = T$, de aquí
$K \cap M \subseteq K \cap (M+T) = T$ y $K \cap M \subseteq M$ se concluye que $K \cap M \subseteq T \cap M = 0$. Pero entonces $T \subsetneq K$. $T \neq K$ y $K \cap M = 0$ contradice la maximalidad de T, por lo que se concluye que $(M \oplus T)/T \subseteq E/T$ es esencial. □

Proposición 113. Todo R-módulo no cero M, es inyectivo si y sólo si M no tiene extensiones esenciales propias.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $M \subseteq V$ un R-módulo inyectivo, con V esencial. Entonces $V = M \oplus T$ por la Proposición 26. Se tiene $M \cap T = 0$, $M \subseteq V$ esencial exige que $T = 0$ así que $M = V$.

$\Leftarrow$) Ahora suponga que M no tiene extensiones esenciales propias. Sea $M \subset E$ donde E es cualquier módulo inyectivo que contiene a un submódulo M. Sea T un submódulo de E máximo con respecto a $M \cap T = 0$. Entonces $M \cong (M \oplus T)/T \subset E/T$ es esencial por el Lema 112. Como M no tiene extensiones esenciales propias, $(M \oplus T)/T = E/T$, o $M \oplus T = E$. Esto es, M es un sumando directo del R-módulo inyectivo E y entonces M es inyectivo.

□

Teorema 114. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) E es una extensión esencial máxima absoluta de M.
(ii) E es una extensión esencial de M y E es inyectivo.
(iii) E es una extensión inyectiva mínima de M.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $M \subseteq N$, N una extensión esencial máxima absoluta de M. Por la Proposición 113, N es inyectivo y, por hipótesis, $M \subseteq N$ es una extensión esencial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponga que E es un submódulo inyectivo en $M \subseteq E \subseteq N$. Como E es inyectivo y $E \subseteq N$, se sigue que $N = E \oplus E'$ para algún submódulo $E' \subseteq N$ por la Proposición 26. Dado que $M \subseteq E \oplus E'$ es esencial y $M \cap E' = 0$, $E' = 0$ y $E = N$, se concluye que N es una extensión inyectiva mínima de M.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea $M \subseteq N$ una extensión mínima de módulos tal que N es inyectivo. Usando el Lema de Zorn se elige N' submódulo de N con $M \subseteq N'$, una extensión esencial máxima de M en N, entonces N' es inyectivo, pero como N es mínimo, $N' = N$. Se concluye que $N' = N$ es una extensión esencial máxima absoluta de M.

□

Definición 115. Un módulo E es una envoltura inyectiva de M, si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se satisface

(i) E es una extensión esencial máxima absoluta de M.
(ii) E es una extensión esencial de M y E es inyectivo.
(iii) E es una extensión inyectiva mínima de M.

La envoltura inyectiva de M se denota como $E(M)$.

Definición 116. Dos ideales críticos P y P' son asociados si $E(R/P) \cong E(R/P')$.

Teorema 117. Para todo R-módulo izquierdo finitamente generado sobre un anillo R noetheriano izquierdo existe una cadena

$$M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots \supset M_0 = 0$$

tal que $M_i/M_{i-1} \cong R/P_i$ para ciertos ideales críticos P_i, $1 \leq i \leq n$

Teorema 118. Sea R un anillo noetheriano izquierdo en el cual existen solamente un número finito de clases isomorfas de R-modulos izquierdos inyectivos indivisibles. Entonces los R-módulos izquierdos inyectivos forman una clase finitamente axiomatizable, lo mismo se cumple para R-módulos planos derechos.

pi

Demostración. Por el Teorema 103 es suficiente probar el enunciado respecto a los R-módulos inyectivos.

Dado que existe sólo un número finito de R-módulos inyectivos indivisibles, de la definición de la dimensión de Krull via la localización de subcategorías, se tiene t tal que la dimensión (izquierda) de Krull de R es un número finito n, donde $n \leq t$.

Sea P_i, $1 \leq i \leq t$ ideales izquierdos críticos tal que $E(R/P_i)$, $1 \leq i \leq t$, representan las clases de isomorfismo de los R-módulos inyectivos indivisibles. En vista de la Proposición 98 es suficiente mostrar que un R-módulo izquierdo M es inyectivo si

$$Ext^j_R(R/P_i, M) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq t \quad y \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

esto es, basta mostrar que $Ext^1_R(A, M) = 0$ para todo R-módulo A finitamente generado siempre que M satisfaga las condiciones anteriores.

Esto se hace probando por inducción sobre s, $(0 \leq s \leq n)$ los siguientes enunciados:

(T_s) : $Ext^j_R(A, M) = 0$ para cualquier R-módulo A finitamente generado de dimensión de Krull $\leq s$, y j, $1 \leq j \leq n - s + 1$.

El caso $s = 0$ se sigue inmediatamente del teorema 117

Se observa que los ideales de dimensión de Krull igual a 0 son precisamente los ideales izquierdos máximos y dos ideales izquierdos máximos L_1 y L_2 son asociados si y sólo si $R/L_1 \cong R/L_2$.

Supongamos que es cierto para $s - 1$ y demostremos para s.

Supongamos que $(T_0), (T_1), \ldots, (T_{s-1})$ se cumple. Para obtener (T_s), por el Teorema 117, basta mostrar que $Ext^i_R(R/P, M) = 0, 1 \leq i \leq n - s + 1$ para cualquier ideal crítico P con $K - dimR/P = s$.

P es asociado a uno de los ideales críticos P_i, $1 \leq i \leq t$, sea $P' = P_{i_0}$. Como $E(R/P) \cong E(R/P')$ existen ideales L y L' tales que $L \supsetneq P$, $L' \supsetneq P'$ y $L/P \cong L'/P'$; además, como P y P' son críticos se tiene que $K - dim(R/L) \leq s-1$ y $K - dim(R/L') \leq s - 1$, y por hipótesis de inducción se cumple que

$$Ext^j_R(R/L, M) = Ext^j_R(R/L', M) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n - s + 2.$$

Usando los morfismos de conexión para los funtores Ext en las sucesiónes exactas

$$0 \to L/P \to R/P \to R/L \to 0$$

y

$$0 \to L'/P' \to R/P' \to R/L' \to 0$$

se obtiene

$$Ext^j_R(L/P, M) \cong Ext^j_R(R/P, M) \quad 1 \leq j \leq n - s + 1$$

y

$$Ext^j_R(L'/P', M) \cong Ext^j_R(R/P', M) \quad 1 \leq j \leq n - s + 1$$

se tiene

$$Ext^j_R(R/P, M) \cong Ext^j_R(R/P', M) \qquad 1 \leq j \leq n - s + 1,$$

pues $L/P \cong L'/P'$. Si este procedimiento se repite sobre los ideales P_i, $1 \leq i \leq t$, se obtiene que:

$Ext^j_R(R/P, M) = 0$ para $1 \leq j \leq n - s + 1$, con lo cual se termina la demostración.

$\square$

Conclusiones

Mediante los resultados de la tesis se verifica que en la mayoría de los casos demostrar que una cierta clase de módulos es axiomatizable requiere de algún método indirecto, es decir, mostrar cerradura respecto a ultraproductos, cerradura elemental, o derivar el resultado como una solución de otro. Es rara la ocasión en que se puede exhibir los axiomas.

El teorema de Keisler-Shelah es de las pocas herramientas con que contamos para probar que dos estructuras son elementalmente equivalentes, nos proporciona un método indirecto para demostrarlo.

Además, probamos los siguientes resultados principales:

La clase de los R-módulos es axiomatizable si y sólo si R es perfecto izquierdo y coherente derecho.

La clase de los R-módulos inyectivos es axiomatizable si y sólo si el núcleo de un homomorfismo de R^n en R es finitamente generado.

Los R-módulos a-inyectivos son finitamente axiomatizables si R es finitamente presentado.

Los R-módulos izquierdos FP-inyectivos forman una clase finitamente axiomatizable si y sólo si los R-módulos derechos planos son Δ-elementales

Apéndice A

Cálculo de predicados de primer orden

- Lenguaje formal. Un lenguaje consiste de letras, reglas para combinar las letras y formar palabras significativas y finalmente una interpretación a esas palabras significativas. El lenguaje se denota como $\mathcal{L}$.

  Dentro de las letras del lenguaje están las siguientes:
  - Una cantidad numerable de símbolos de variables: $X_1, X_2, \ldots$;
  - símbolos de constantes $c_k,\ k \in K$;
  - símbolos de relación, $R_i,\ i \in K$;
  - símbolo de igualdad: $=$;
  - símbolos de función, $F_j,\ j \in K$;
  - el símbolo de negacion $\neg$, y el símbolo de disyunción $\wedge$;
  - el símbolo existencial $\exists$; y
  - paréntesis ( ) y corchetes [ ].
- Cadena es una sucesión finita de letras del lenguaje.
- Términos son todas aquellas cadenas de la siguiente forma:
  - símbolos de variable: X_i;
  - todos los símbolos de constante c_k; y
  - todas las palabras $F_j(t_1, \ldots, t_n)$ donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos definidos previamente y F_j es un símbolo de función.
- Fórmulas atómicas son todas las palabras de la siguiente forma:
  - $t = t'$ para cada pareja de términos;
  - $R_i(t_1, \ldots, t_n)$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos y R_i es un símbolo de relación.
- Fórmula son todas las fórmula atómicas y todas las palabras de la siguiente forma:
  - $\neg[\varphi]$ es una fórmula si φ lo es;
  - $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es una fórmula si φ_1 y φ_2 son fórmulas; y
  - $(\exists X_i)[\varphi]$ es fórmula, si φ es fórmula.

  Las fórmulas se denotarán con las letras griegas φ y ϕ.

- Variable libre, es aquella variable que en una fórmula está fuera del alcance de algún cuantificador.

- Enunciado es una fórmula sin variables libres.

Estructuras

- Una estructura para el lenguaje $\mathcal{L}$ es un sistema

$$\mathfrak{A} =< A; \bar{R}, \bar{F}, \bar{c} >,$$

donde A es un conjunto no vacío, llamado el dominio de $\mathfrak{A}$, $\bar{R}$ es un conjunto de relaciones en A, $\bar{F}$ es un conjunto de funciones también en A y $\bar{c}$ es un conjunto de elementos de A, llamados constante.

Modelos

- Una teoría en un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, es el conjunto de enunciados T de $\mathcal{L}$.
- Un Modelo es una estructura $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$ donde todo enunciado T de $\mathcal{L}$ se satisface en $\mathfrak{A}$.
- Π es un conjunto de axiomas para la teoría T formada por todos los enunciados del lenguaje $\mathcal{L}$ si Π es una teoría de $\mathcal{L}$ y de Π de deducen todos los enunciados de T.
- Una teoría es axiomatizable si existe un conjunto de axiomas para la teoría; es finitamente axiomatizable si el conjunto de axiomas es finito.
- Un conjunto de enunciados es consistente si no se puede deducir una contradicción o, lo que es equivalente, si ese conjunto de enunciados tiene modelo.

Apéndice B

Cardinales regulares y singulares

Teorema 119. Si a es un conjunto de cardinales entonces

$$sup(a) = \bigcup a$$

es un cardinal.

- Como ejemplos de cardinales sucesores, k^+, tenemos los siguientes $1, 2, 3, \ldots$, también lo son $\aleph_1, \aleph_2$ y $\aleph_3$. De hecho, un cardinal infinito es un cardinal sucesor si y sólo si es de la forma $\aleph_{\alpha+1}$ para algún ordinal α; lo que es lo mismo, un cardinal infinito $\aleph_\gamma$ es un cardinal sucesor si y sólo si el índice γ es un ordinal sucesor.
- Un cardinal límite es aquel cardinal que no es sucesor. Algunos cardinales límites son $0, \aleph_0, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\omega.\omega}$. Cualquier cardinal no numerable $\aleph_\gamma$ es un cardinal límite si y sólo si el índice γ es un ordinal límite o cero.

Definición 120.

- Un conjunto $x \subseteq \kappa$ es cofinal en κ si $sup(x) = \kappa$.
- $cf(\kappa) = min\{|x| : x \subseteq \kappa$ y x es cofinal en $\kappa\}$ es la cofinalidad de κ.
- κ es regular si $cf(\kappa) = \kappa$.
- κ es singular si $cf(\kappa) < \kappa$.

ejemplos:

- $\omega = \aleph_0$ es regular.
- $\aleph_{\alpha+1}$ es regular.

Propiedades:

- Si β es límite y $\beta < \aleph_\beta$, entonces $\aleph_\beta$ es singular.
- Si $\aleph$ es un cardinal infinito, entonces existe un subconjunto $x \subseteq \kappa$ cofinal en κ e isomorfo a $cf(\kappa)$
- Si κ es un cardinal infinito, $cf(\kappa)$ es un cardinal regular.
- Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < |\kappa^{cf(\kappa)}|$.
- Para cualquier cardinal κ,

$$2^\kappa = |Pot(\kappa)|.$$

Teorema 121. Sean κ, λ cardinales, λ infinito, $\kappa < \lambda$. Entonces

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda.$$

Si κ es un cardinal infinito. Entonces

$$(\kappa^+)^\kappa = 2^\kappa.$$

Teoría elemental de conjuntos.

- Lema de Zorn(LZ): En cualquier conjunto parcialmente ordenado, con la propiedad de que cualquier subconjunto suyo linealmente ordenado (una cadena) tiene una cota superior, existe un elemento máximo.
- La Hipótesis del continuo (HC) afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
- Hipótesis generalizada del continuo (HGC): Para todo ordinal α, se cumple $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Apéndice C

Axiomas y resultados de los números hiperreales.

- Un número ϵ se dice que es infinitamente pequeño o infinitesimal si $-a < \epsilon < a$ para cualquier número real positivo a.
- El único número real que es infinitesimal es el cero.
- Los números hiperreales contienen a todos los números reales y también a los infinitesimales que no son cero, el conjunto de los números hiperreales es denotado por R^*, a los números hiperreales también se les conoce como números no estandares.
- Los infinitesimales en R^* son de tres formas: positivos, negativos y el número real cero.
- Los símbolos $\Delta x, \Delta y \ldots$ y las letras griegas ϵ y δ son usadas para infinitesimales.
- si a y b son números hiperreales y su diferencia $a - b$ es infinitesimal, diremos que a es infinitamente cercano a b.

  Ejemplo

  Si Δx es infinitesimal entonces $x_0 + \Delta x$ es infinitamente cercano a x_0.
- Si ϵ es un infinitesimal positivo, entonces
  - $-\epsilon$ es un infinitesimal negativo.
  - $\frac{1}{\epsilon}$ es un número positivo infinito, es mayor que cualquier número real.
  - $\frac{-1}{\epsilon}$ es un número negativo infinito, es decir es un número menor que cualquier número real.
- Los hiperreales que no son números infinitos son llamados números finitos.

Observación 122. Cada número real r, introduce una colección de hiperreales infinitamente cercanos a r, estos números hiperreales son todos finitos.

Los hiperreales infinitamente cercanos a cero son llamados infinitesimales.

Axiomas de los hiperreales

(i) Axioma de cerradura.
   - Todo número real es un número hiperrereal. Si a y b son números hiperreales también lo son $a + b$, ab, y $a - b$.

     Si a es un número hiperreal y $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ es un número hiperreal.

- Las leyes conmutativa, asociativa,identidad, inversos y destributiva son validas también para los números hiperreales.

(ii) Axiomas de orden

Las leyes transitiva, tricotomía, suma y producto se cumplen para todo hiperreal.

Para todo número hiperreal $a > 0$ y todo entero positivo n, existe un número hiperreal $b > 0$ tal que $b^n = a$.

Definición 123. Un número hiperreal b es:

- Infinitesimal positivo si b es positivo pero menor que cualquier número real positivo.
- Infinitesimal negativo si b es negativo pero mayor que todo número real negativo.
- Infinitesimal si b es infinitesimal positivo, infinitesimal negativo o cero.

Observación 124. Por definición, cero es un infinitesimal, es más, no existe otro número real que sea infinitesimal, es decir, si $r \in R$ y es infinitesimal, entonces $r = 0$.

(iii) Axioma del infinitesimal

Existe un número hiperreal infinitesimal positivo.

Definición 125. Un número hiperreal b es:

- Finito si b está entre dos números reales.
- Infinito positivo si b es mayor que cualquier número real.
- Infinito negativo si b es menor que cualquier número real.

Observación 126. Todo número real es finito.
Cualquier infinitesimal es finito.

Teorema 127 (Reglas para los números infinitesimales finitos e infinitos). Suponga que ϵ, δ son infinitesimales, b, c son números hiperreales los cuales son finitos pero no infinitesimales y H, K son números hiperreales infinitos:

(a) Negativos:
- $-\epsilon$ es infinitesimal.
- $-b$ es finito pero no infinitesimal.
- $-H$ es infinito.

(b) Recíprocos
- Si $\epsilon \neq 0$, $\frac{1}{\epsilon}$ es infinito.
- $\frac{1}{b}$ es finito pero no infinitesimal
- $\frac{1}{H}$ es infinitesimal.

(c) Sumas
- $\epsilon + \delta$ es infinitesimal.

- $b+\epsilon$ es finito pero no infinitesimal.
- $b+c$ es finito (posiblemente infinitesimal).
- $H+\epsilon$ y $H+b$ son infinitos.

(d) Productos
- $\delta\cdot\epsilon$ y $b\cdot\epsilon$ son infinitesimales.
- $b\cdot c$ es finito pero no infinitesimal.
- $H\cdot b$ y $H\cdot K$ son infinitos.

(e) Raíces
- Si $\epsilon>0$, $\sqrt[n]{\epsilon}$ es infinitesimal.
- Si $b>0$, $\sqrt[n]{b}$ es finito pero no infinitesimal
- Si $H>0$, $\sqrt[n]{H}$ es finito

(f) Cocientes
- $\frac{\epsilon}{b}, \frac{\epsilon}{H}, \frac{b}{H}$ son infinitesimales.
- $\frac{b}{c}$ es finito pero no infinitesimal.
- $\frac{b}{\epsilon}, \frac{H}{\epsilon}, \frac{H}{b}$ son infinitos, cuando $\epsilon\neq 0$.

(g) Nótese que se pueden dar las siguientes combinaciones:
- $\frac{\epsilon}{\delta}$, el cociente de dos infinitesimales.
- $\frac{H}{K}$, el cociente de dos números infinitos.
- $H\epsilon$, el producto de un número infinito y un infinitesimal.
- $H+K$, la suma de dos números infinitos.

En cada uno de los casos anteriores puede ser infinitesimal, finito pero no infinitesimal, o infinito, dependiendo de como son ϵ, δ, H K, por esta razón son llamados formas indeterminadas.

Teorema 128. • Cualquier número hiperreal entre 2 infinitesimales es infinitesimal.
- Todo número hiperreal entre 2 números hiperreales finitos es finito.
- Cualquier número hiperreal que es mayor que algún número infinito positivo es infinito positivo.
- Cualquier número hiperreal que es menor que algún número infinito negativo es infinito negativo.

Definición 129. Dos números hiperreales b y c son infinitamente cercanos uno con el otro, en símbolos $b\approx c$, si su diferencia $b-c$ es infinitesimal.

Observación 130. Si b y c son reales y b es infinitamente cercano a c, entonces $b=c$.

Teorema 131. Sean a, b y c números hiperreales
- $a\approx a$.
- Si $a\approx b$, entonces $b\approx a$.
- Si $a\approx b$ y $b\approx c$, entonces $a\approx c$.

(iv) Axioma de la parte estándar.

Todo número hiperreal finito es infinitamente cercano a exactamente un número real.

Definición 132. Sea b un número hiperreal finito. La parte estándar de b, denotado por $st(b)$, es el número real al cual b es infinitamente cercano. Los números hiperreales infinitos no tienen parte estándar.

Observación 133. Sea b un número hiperreal finito.
- $st(b)$ es un número real.
- $b = st(b) + \epsilon$ para algún infinitesimal ϵ.
- Si b es real, entonces $b = st(b)$.

Teorema 134. Sean a y b números hiperreales finitos. Entonces:
(a) $st(-a) = -st(a)$.
(b) $st(a+b) = st(a) + st(b)$.
(c) $st(a-b) = st(a) - st(b)$.
(d) $st(ab) = st(a)st(b)$.
(e) Si $st(b) \neq 0$, entonces $st(\frac{a}{b}) = \frac{st(a)}{st(b)}$.
(f) $st(a^n) = (st(a))^n$.
(g) Si $a \geq 0$, entonces $st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$.
(h) Si $a \leq b$, entonces $st(a) \leq st(b)$.

Funciones

La función hiperreal de una variable es un conjunto F de parejas ordenadas de números hiperreales tales que para todo número hiperreal a,
(a) Existe exactamente un número hiperreal b tal que (a, b) está en F, ó
(b) No existe b tal que (a, b) está en F.

En el primer caso se escribe $b = F(a)$ y en el segundo caso se dice que $F(a)$ es indefinido.

(v) Axioma de función.

Para toda función real f, de una o más variables, existe su correspondiente función hiperreal f^* del mismo número de variables llamada la extensión natural de f.

(vi) Axioma de solución.

Si dos sistemas de fórmulas tienen exactamente las mismas soluciones reales, entonces tienen exactamente las mismas soluciones hiperreales.

Consecuencias del axioma de solución.

- Si r es un número real y $f(r)$ está definido, entonces $f^*(r) = f(r)$.
- Si r es un número real y $f(r)$ estaíndefinido, entonces $f^*(r)$ está indefinido.
- Si una función real f está dada por una regla de la forma $f(x) = T(x)$, donde $T(x)$ es un término que involucra a x, entonces la extensión

natural f^* está dada por la misma regla, aplicada a los números hiperreales.

De manera similar los enunciados son válidos para las funciones de dos o más variables.

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag New York, 1973.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press 1973.

[3] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model Theory, Studies in Logic and the foundations of Mathematics, vol 73, Springer-Verlag New York 1990.

[4] S. U. Chase, Direct products of modules, Trans. Amer. Soc. 97, 1960, 457-473.

[5] W. W. Comfort and S. Negrepontis, The Theory of Ultrafilters, Springer-Verlag New York, 1974.

[6] J. Dauns, Modules and Rings, Cambridge University Press, 1994.

[7] P. Eklof and G. Sabbagh, Model-completions and modules, Annals Mathematical Logic, Vol. 2, No. 3, (1971), 251-295.

[8] K.R. Goodearl, Ring Theory, Nonsingular rings and modules, Pure and Applied Mathematics, 1976.

[9] R. Gordon and J. C. Robson, Krull Dimension, American Mathematical Society, 1973.

[10] L. Gruson et C. U. Jensen Algèbre Homologique.- Modules algébriquement compacts et foncteurs dérivés lim^i, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 276 (25 juin 1973), serie A, 1651-1653.

[11] P.J. Hilton and U. Stammbach, A Course in Homological Algebra, Springer-Verlag, Second Edition, 1996.

[12] Fried - Jarden, Field Arithmetic.

[13] C. U. Jensen and H. Lenzing, Model theoretic algebra: with particular emphasis on fields, rings, modules, Gordon and Breach Science Publishers.

[14] C. U. Jensen and P. Vamos, On the Axiomatizability of Certain Classes of Modules, Mathematische Zeitschift, 167:227-237,1979.

[15] I. Kaplansky, Conmutative Rings, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[16] F. Kasch, Modules and Rings, Academic Press, 1982.

[17] Masayoshi Nagata, Local Rings, Interscience Publishers, 1962.

[18] M. Prest, Model Theory and Module, London Mathematical Society, Lecture Note Series 130, Cambridge University Press 1988.

[19] J. J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Academic Press, Inc. 1979.

[20] G. Sabbagh and P. Eklof, Definibility problems for modules and rings, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 36, Number 4, 1971.623-649.

[21] D. W. Sharpe and P.Vamos, Inyective modules, Cambridge University press, 1972.

[22] Carlos José Enríque Signoret Poillon, Dimensión de longitud finita, Tesis de doctorado, UNAM, 1993.

[23] L. M. Villegas Silva, D. Rojas Rebolledo, F. Ezequiel Miranda Perea. Conjuntos y modelos. Curso Avanzado, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2000.

[24] V. Weispfenning, Quantifier elimination for modules, Arch. math. Logik 25, 1985, 1-11.

[25] Martin Ziegler, Model theory of modules, Annals of pure and Applied logig 26, 1984, 149-213.

Índice alfabético