



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA**

**ONDAS CINEMATICAS EN UN REACTOR BWR**

Tesis que presenta el

M. en C. Gilberto Espinosa Paredes

Para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

Asesor

Dr. Alberto Soria López

Diciembre-1998

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA**

**DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA**

**UNIDAD IZTAPALAPA**

Av. Michoacán y la Purísima, Col. Vicentina, 09340 México, D.F., Tel.: 724-4600, Telefax: (5) 612-0885

## AGRADECIMIENTOS

Este estudio de investigación del proyecto doctoral se realizó con fondos proporcionados por el Instituto de Investigaciones Eléctricas a través del proyecto 10097 dentro del programa Centrales Nucleoeléctricas.

## CONTENIDO

---

Lista de Figuras	iv
Lista de Tablas	vii
Nomenclatura	viii
<b>0. INTRODUCCION</b>	0-1
0.1 Metodología.....	0-2
0.2 Contenido sintético de cada capítulo.....	0-5
	1-1
<b>1. TRABAJOS PREVIOS</b>	1-1
1.1 El método del promedio para la descripción de sistemas multifásicos dispersos.....	1-2
1.2 El problema de cerradura.....	1-6
1.3 Aportaciones del presente trabajo.....	1-10
<b>2. DERIVACIÓN TEÓRICA DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIO VOLUMÉTRICO</b>	2-1
2.1 Sistema en estudio y volumen promedio.....	2-1
2.2 Ecuaciones de conservación locales instantáneas.....	2-6
2.3 Método del promedio en volumen.....	2-10
2.4 Ecuación de masa promedio en volumen instantánea.....	2-13
2.6 Ecuación de cantidad de movimiento promedio en volumen instantánea.....	2-14
2.6 Condiciones de salto promedio instantánea.....	2-18
2.7 Conclusiones y discusión.....	2-19
<b>3. RELACIONES DE CERRADURA DEL MODELO DE DOS FLUIDOS UTILIZANDO UN ENFOQUE DE FLUJO POTENCIAL</b>	3-1
3.1 Introducción.....	3-2
3.2 Estructura de la celda.....	3-5
3.3 Promedio interfacial de los esfuerzos viscosos.....	3-7
3.4 Planteamiento para calcular la integral de las desviaciones espaciales de la presión.....	3-9
3.5 Modelo de celda excéntrica.....	3-13
3.5.1 Desviaciones espaciales del potencial de velocidad.....	3-19
3.5.2 Desviaciones espaciales del vector velocidad.....	3-23
3.5.3 Diferencia de los promedios de la presión .....	3-27
3.6 Casos límite de la celda excéntrica.....	3-29
3.6.1 Desviaciones espaciales del potencial de velocidad.....	3-29
3.6.2 Desviaciones espaciales del vector velocidad.....	3-30
3.6.3 Diferencia de los promedios de la presión .....	3-31

3.7 Comparación con modelos previos y discusión.....	3-31
3.7.1 Relación de cerradura masa agregada.....	3-35
3.7.2 Relación de cerradura energía cinética inducida.....	3-42
3.7.3 Relación de cerradura esfuerzos de Reynolds.....	3-42
3.7.4 Relación de cerradura diferencia de los promedios de la presión.....	3-48
3.8 Promedio interfacial de las desviaciones de la presión.....	3-50
3.9 Conclusiones.....	3-51
<b>4. SISTEMA COMPLETO DE ECUACIONES</b>	4-1
4.1 Ecuaciones promediadas de dos fluidos.....	4-1
4.2 Presión promedio intrínseco de la fase gaseosa.....	4-3
4.3 Fuerzas interfaciales por unidad de volumen.....	4-4
4.4 Ecuaciones de cantidad de movimiento.....	4-4
4.5 Modelo promedio unidimensional.....	4-6
4.6 Conclusiones.....	4-10
<b>5. ANALISIS DINÁMICO Y VELOCIDADES CARACTERÍSTICAS</b>	5-1
5.1 Introducción.....	5-2
5.2 Resumen del conjunto completo de EDP 's unidimensional.....	5-5
5.3 Valores característicos y estabilidad del sistema de EDP 's.....	5-6
5.3.1 Sistema con celda excéntrica y con dependencia espacial y temporal de $C_{VM}$ .....	5-8
5.3.2 Sistema con celda concéntrica y con dependencia espacial y temporal $C_M$ .....	5-17
5.3.3 Sistema con celda concéntrica y con $C_{VM}$ constante.....	5-22
5.4 Otros casos de estudio.....	5-24
5.5 Comparación con modelos previos.....	5-25
5.6 Propagación de onda de vacíos.....	5-29
5.7 Conclusiones.....	5-35
<b>6. DESCRIPCION DINAMICA DE LA ECUACION DE ONDA DE VACIOS</b>	6-1
6.1 Introducción.....	6-2
6.2 Ecuaciones en el estado base y entre variables perturbaciones.....	6-3
6.3 Ecuación de onda.....	6-7
6.4 Velocidades de propagación, tiempo de relajación y coeficiente de difusión.....	6-15
6.5 Estabilidad lineal para flujo burbujeante.....	6-19
6.6 Resultados.....	6-20
6.7 Conclusiones.....	6-28

<b>7. ONDA DE VACIOS POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS</b>	7-1
7.1 Introducción.....	7-2
7.2 Discretización de las ecuaciones promedio instantáneas.....	7-3
7.3 Procedimiento de solución.....	7-8
7.4 Resultados numéricos y discusión.....	7-11
7.4.1 Rapidez de propagación de la onda de vacíos.....	7-11
7.4.2 Validación del código numérico.....	7-13
7.4.3 Comportamiento de los efectos interfaciales y de bulto.....	7-16
7.5 Conclusiones.....	7-19

## REFERENCIAS

## APENDICES

<b>A. TERMINO FUENTE DE LA CONDICION DE SALTO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO</b>	A-1
<b>B. ECUACIONES MACROSCÓPICAS CON EFECTOS DE COMPRESIBILIDAD Y TRANSPORTE INTERFACIAL</b>	B-1
B.1 Ecuaciones locales instantáneas.....	B-1
B.2 Condiciones de salto.....	B-2
B.3 Teoremas promedio para un sistema de $M$ fases.....	B-3
B.4 Ecuación de masa promedio instantánea.....	B-5
B.5 Ecuación de cantidad de movimiento promedio instantánea.....	B-8
B.6 Ecuación de energía total promedio instantánea.....	B-13
B.7 Simplificación de las ecuaciones de conservación macroscópicas.....	B-17
B.8 Condiciones de salto promedio instantáneas.....	B-18
<b>C. CÁLCULO DE <math>\bar{E}_1</math>, <math>\bar{E}_2</math> y <math>\bar{E}_3</math></b>	C-1
<b>D. CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRALES MÚLTIPLES</b>	D-1
<b>E. DATOS EXPERIMENTALES</b>	E-1
<b>F. ANALISIS DE LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS Y DIFERENCIA DE LOS PROMEDIOS DE LA PRESION</b>	F-1
F.1 Velocidades características sin efectos de $T_{zz}^{Re}$ .....	F-1
F.2 Velocidades características sin efectos de $T_{zz}^{Re}$ y de $\langle \Delta p_{tg} \rangle$ .....	F-5
<b>G. COEFICIENTES DE LA ECUACION DE ONDA DE FRACCION DE VACIOS</b>	G-1
<b>H. DEMOSTRACION DEL CRITERIO DE ESTABILIDAD</b>	H-1



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 0.1** Metodología para estudiar fenómenos de propagación. Línea continua descripción dinámica y línea punteada descripción cinemática.
- Figura 2.1.** Sistema en estudio y volumen promedio hipotético con dos fases presentes.
- Figura 2.2.** Región del sistema  $L$  y volumen promedio  $V$ . Donde  $r_0$  es la longitud característica del volumen promedio,  $l_g$  y  $l_l$  longitudes características de la fase gas y fase líquida respectivamente,  $n_{gl}$  es el vector normal unitario de la fase gas a la fase líquida,  $n_{lg}$  es un vector normal unitario similar de la fase líquida a la fase gas.
- Figura 3.1.** Longitudes características.  $\delta$  espesor de la capa límite,  $l_\phi$  longitud característica de las desviaciones del potencial de velocidad,  $l_g$  longitud característica de la fase gas,  $l_l$  longitud característica de la fase líquida y  $r_0$  es la longitud característica del volumen promedio.
- Figura 3.2.** Celda unitaria excéntrica.
- Figura 3.3.** Celda unitaria excéntrica, lejos del centroide de la esfera exterior.  $h^* = k^* = l^* = 0.557$ ,  $b^* = 1$  y  $\gamma = b^*$ .
- Figura 3.4.** Celda unitaria excéntrica, cerca del centroide de la esfera exterior.  $h^* = k^* = l^* = 0.1$ ,  $b^* = 1$  y  $\gamma^* = 0.17$ .
- Figura 3.5.**  $f_d = 0$ , comportamiento de  $\langle \phi \rangle^* = \langle \phi \rangle / v_r b$  ( $= Z$ ) con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b$  ( $= X$ ) y  $a^* = a/b$  ( $= Y$ ).
- Figura 3.6.**  $f_d = 1$ , comportamiento de  $\langle \phi \rangle^* = \langle \phi \rangle / v_r b$  ( $= Z$ ) con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b$  ( $= X$ ) y  $a^* = a/b$  ( $= Y$ ).
- Figura 3.7.** Comportamiento de los efectos de masa virtual contra la fracción de vacíos. Modelo de primer orden [Ec. (3.102)]; Modelo de Maxwell (1981), Ec. (3.108); Maxwell condiciones diluidas Ec. (3.109); Modelo de Jeffrey (1973), Ec. (3.111); Modelo de van Wijngaarden (1976), Ec. (3.176) y Modelo empírico de Chernyy y Srebnyuk (1979), Ec. (3.114).
- Figura 3.8.** Comportamiento de la relación de cerradura energía cinética inducida ( $= Z$ ) con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b$  ( $= X$ ) y  $a^* = a/b$  ( $= Y$ ).
- Figura 3.9.** Comportamiento del coeficiente de Reynolds  $k$  ( $= Z$ ) con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b$  ( $= X$ ) y  $a^* = a/b$  ( $= Y$ ).

- Figura 3.10.** Comparación de modelos del coeficiente de los esfuerzos de Reynolds. Este trabajo con celda unitaria excéntrica Ec. (3.120) con  $(\diamond) \gamma = 0.06928$  y  $(\circ) \gamma = 0.45033$ ;  $(\square)$  Modelo de Pauchon y Banerjee (1988) [Ec. (3.129)].
- Figura 5.1.** Velocidad de la onda de vacíos contra la fracción de vacíos para diferentes valores de la velocidad superficial de líquido,  $\langle v_{zl} \rangle$ . Comparación con datos experimentales de Mercadier (1981):  $(\bullet) \langle v_{zl} \rangle = 0.0\text{m/s}$ ,  $(\blacksquare) \langle v_{zl} \rangle = 0.1\text{m/s}$ ,  $(\circ) \langle v_{zl} \rangle = 0.2\text{m/s}$ ,  $(\Delta) \langle v_{zl} \rangle = 0.29\text{m/s}$ ,  $(\diamond) \langle v_{zl} \rangle = 0.39\text{m/s}$ ,  $(\square) \langle v_{zl} \rangle = 0.49\text{m/s}$ .
- Figura 5.2.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$ ; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas.  $(\square) R_b = 0.7\text{mm}$ ,  $(\diamond) R_b = 1.0\text{mm}$ ,  $(\Delta) R_b = 1.5\text{mm}$ ,  $(\bullet) R_b = 2.2\text{mm}$ ,  $(\circ) R_b = 2.5\text{mm}$ .
- Figura 5.3.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$  y  $C_{VM}$  constante; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas.  $(\square) R_b = 3.0\text{mm}$ ,  $(\diamond) R_b = 2.0\text{mm}$ ,  $(\Delta) R_b = 1.0\text{mm}$ ,  $(\circ) R_b = 0.8\text{mm}$ .
- Figura 5.4.** Comparación de modelos de ondas de vacíos.  $(\square)$  Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas,  $(\diamond)$  Pauchon y Banerjee (1986),  $(\bullet)$  Lahey (1991),  $(\blacksquare)$  este trabajo con efectos de tensión superficial usando la Ec. (5.42),  $(\Delta)$  Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas,  $(+)$  este trabajo con efectos de tensión superficial y  $R_b = 3\text{mm}$  con  $C_{VM}$  constante.
- Figura 5.5.** Velocidad de onda de vacíos: a.  $\langle v_{zl} \rangle = 0 \text{ m/s}$ , b.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.1 \text{ m/s}$ , c.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.2 \text{ m/s}$ , d.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.29 \text{ m/s}$ , e.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.39 \text{ m/s}$ , f.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.49 \text{ m/s}$ .
- Figura 5.6.** Velocidad de onda de vacíos: a.  $\langle v_{zl} \rangle = 0 \text{ m/s}$ , b.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.073\text{m/s}$ , c.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.169 \text{ m/s}$ , d.  $\langle v_{zl} \rangle = 0.318\text{m/s}$ .
- Figura 6.1.** Modelo de celda concéntrica con dependencia espacial y temporal de  $C_{VM}$ .  $(\blacksquare) A_+^*$  [Ec.(6.56)],  $(\bullet) U_o^*$  [Ec.(6.58)],  $\lambda_{\pm}^*$  [Ec.(6.57)] para:  $(\square) R_b = 0.7\text{mm}$ ,  $(\diamond) R_b = 1.0\text{mm}$ ,  $(\Delta) R_b = 1.5\text{mm}$ ,  $(\bullet)$ ,  $(\circ) R_b = 2.5\text{mm}$ .
- Figura 6.2.** Modelo de celda concéntrica con  $C_{VM}$  constante.  $(\blacksquare) A_+^*$  [Ec.(6.56)],  $(\bullet) U_o^*$  [Ec.(6.58)],  $\lambda_{\pm}^*$  [Ec.(6.57)]:  $(\diamond) R_b = 1.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.885$ ),  $(\Delta) R_b = 2.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.80$ ),  $(\circ) R_b = 3.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.736$ ),  $(\square) R_b = 5.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.65$ ).
- Figura 7.1.** Velocidad de la onda de vacíos como una función de  $\varepsilon_g$  para diferentes velocidades superficiales de líquido, obtenidos de Mercadier (1981):  $(\bullet) \langle v_{zl} \rangle = 0.0\text{m/s}$ ,  $(\blacksquare) \langle v_{zl} \rangle = 0.1\text{m/s}$ ,  $(\circ) \langle v_{zl} \rangle = 0.2\text{m/s}$ ,  $(\Delta) \langle v_{zl} \rangle = 0.29\text{m/s}$ ,  $(\diamond) \langle v_{zl} \rangle = 0.39\text{m/s}$ ,  $(\square) \langle v_{zl} \rangle = 0.49\text{m/s}$ .

- Figure 7.2.** Velocidad de la onda de vacíos como una función de  $\varepsilon_g$  para diferentes velocidades superficiales de líquido, obtenidos de Bernier (1982). ( $\circ$ )  $\langle v_{zl} \rangle = 0.0\text{m/s}$ , ( $\Delta$ )  $\langle v_{zl} \rangle = 0.073\text{m/s}$ , ( $\diamond$ )  $\langle v_{zl} \rangle = 0.169\text{m/s}$ , ( $\square$ )  $\langle v_{zl} \rangle = 0.318\text{m/s}$
- Figura 7.3.** Efectos de cantidad de movimiento interfacial y de bulto en condiciones transitorias. ( $\diamond$ ) Todos los efectos interfaciales y de bulto, ( $\square$ ) sin efectos de tensión interfacial, ( $\Delta$ ) sin efectos de esfuerzos de Reynolds y ( $\circ$ ) sin efectos de presión interfacial.
- Figura F.1.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$ , usando la Ec. (5.42); ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.5\text{mm}$ , ( $\diamond$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$ , ( $\Delta$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$ , ( $\circ$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$ .
- Figura F.2.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$  y  $C_{VM}$  constante; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.512$ ), ( $\diamond$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.36$ ), ( $\Delta$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.091$ ).
- Figura F.3.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$  y  $C_{VM}$  constante; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.5\text{mm}$ , ( $\diamond$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$ , ( $\Delta$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$ , ( $\circ$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$ , ( $\bullet$ )  $R_b = 3.0\text{mm}$ .
- Figura F.4.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$ ; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.916$ ), ( $\diamond$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.885$ ), ( $\Delta$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.80$ ), ( $\circ$ )  $R_b = 3.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.736$ ), ( $\bullet$ )  $R_b = 5.0\text{mm}$  ( $\varepsilon_g \leq 0.65$ ).



## LISTA DE TABLAS

---

- Tabla 1.1.** Clasificación de promedios.
- Tabla 3.1.** Relaciones de cerradura.
- Tabla 5.1.** Parámetros interfaciales y definiciones empleadas en el conjunto completo de EDP's.
- Tabla 5.2.** Comparación entre modelos.
- Tabla 6.1.** Grupo de variables adimensionales.
- Tabla 6.2.** Grupos de variables adimensionales y dimensionales de la Ec. (6.48).
- Tabla 6.3.** Análisis dimensional.
- Tabla 6.4.** Inestabilidades del modelo de celda excéntrica cuando  $C_{VM}$ , es función del espacio y del tiempo.
- Tabla 6.5.** Inestabilidades del modelo de celda excéntrica cuando  $C_{VM}$ , es constante.
- Tabla 6.6.** Tiempos de relajación.
- Tabla 6.7.** Valores del parámetro  $c_2^*$  en función de la excéntrica
- Tabla 6.8.** Coeficientes de difusividad en función de la excéntrica para diferentes  $\varepsilon_g$ .
- Tabla D.1.** Cálculo de  $\langle \phi \rangle' / bU$ , usando la regla compuesta de Simpson para resolver la integral múltiple.
- Tabla D.2.** Cálculo de las Ecs. (D.19) y (D.20).
- Tabla E.1.** Datos experimentales de velocidades de propagación, Soria (1991a).
- Tabla E.2.** Datos experimentales de velocidades de propagación, diferentes frecuencias, Saiz-Jabardo y Bouré (1989).
- Tabla E.3.** Modos de propagación, baja frecuencia  $C_1$ , alta frecuencia  $C_2$ , Saiz-Jabardo y Bouré (1989).
- Tabla E.4.** Datos experimentales de velocidades de propagación ( $Jg = 0.1$  m-s), Pauchon y Banerjee (1986).
- Tabla E.5.** Datos experimentales de velocidades de propagación, para diferentes velocidades superficiales de líquido, Bernier (1982).

**Tabla E.6.** Datos experimentales de velocidades de propagación, para diferentes velocidades superficiales de líquido, Mercadier (1981).

**Tabla E.7.** Números de Reynolds de los datos experimentales reportados por diferentes autores.

## NOMENCLATURA

---

$a$	radio de la burbuja esférica contenida en una esfera de líquido de radio $b$ , m
$a_{VM}$	$= d_g \langle v_g \rangle^s / dt - d_l \langle v_l \rangle^l / dt$ aceleración de masa agregada, $m/s^2$
$a^{\alpha\beta}$	tensor métrico en coordenadas de superficie ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )
$A_{lg}$	$= A_{gl}$ área interfacial (área de la superficie dividida entre la fase $l$ y fase $g$ ) contenida en la región macroscópica, $m^2$
$A_{ke}$	área de entradas y salidas de la fase $k$ asociadas con la región macroscópica, $m^2$
$b$	radio de la esfera de líquido que contiene en el centroide a la burbuja esférica de radio $a$ , m
$B$	tensor de segundo orden definido por la Ec. (3.98), $m^{-6}$
$c_1$	coeficiente de la relación de cerradura masa agregada (celda unitaria excéntrica), $m^{-2}$
$c_2$	coeficiente de la relación de cerradura masa agregada (celda unitaria excéntrica), m
$c_3$	$= 1/2$ coeficiente de la relación de cerradura masa agregada (celda unitaria concéntrica), adim.
$c_4$	coeficiente de la relación de cerradura de los esfuerzos de Reynolds (celda unitaria excéntrica), $m^{-6}$
$c_5$	coeficiente de la relación de cerradura de los esfuerzos de Reynolds (celda unitaria excéntrica), $m^{-3}$
$c_6$	coeficiente de la relación de cerradura de los esfuerzos de Reynolds (celda unitaria excéntrica), adim.
$c_7$	coeficiente de la relación de cerradura de los esfuerzos de Reynolds (celda unitaria excéntrica), adim.
$C_{VM}$	masa agregada, adim
$d_1, d_2, d_3, d_4$	funciones vectoriales denidas por las Ecs. (3.94)-(3.97), $m^{-2}, m^{-5}, m^{-3}, m^{-5}$
$dA$	elemento infinitesimal de área, $m^2$
$dV$	elemento infinitesimal de volumen, $m^3$
$D_e$	Coficiente de difusividad referido al tiempo de relajación, $m^2/s$

$e_x, e_y, e_z$	vectores normales unitarios en coordenadas cartesianas
$e_r, e_\theta$	vectores normales unitarios en coordenadas esféricas
$f_1, f_2, f_3$	funciones escalares definidas por la Ecs. (3.91)-(3.93), m, m <sup>-2</sup> , adim.
$F_D$	vector de fuerzas de arrastre interfacial, N/m <sup>3</sup>
$g_k$	vector de aceleración de la gravedad que actúa en la fase $k$ , m/s <sup>2</sup>
$g^{jk}$	tensor métrico en coordenadas espaciales ( $j, k = 1, 2, 3$ )
$H_g$	curvatura media interfacial local instantánea, medida desde la fase gaseosa, m <sup>-1</sup>
$\langle H_g \rangle_{l_g}$	curvatura media promedio interfacial, m <sup>-1</sup>
$I$	tensor unitario
$k_{zz}$	coeficiente de la relación de cerradura esfuerzos de Reynolds [Ec. (3.120)], adim.
$k$	coeficiente tensorial de segundo orden de la relación de cerradura esfuerzos de Reynolds asociada con la celda unitaria excéntrica, adim.
$k_c$	coeficiente tensorial de segundo orden de la relación de cerradura esfuerzos de Reynolds asociada con la celda unitaria concéntrica, adim.
$k_{zzc}$	= 1/5 coeficiente de la relación de cerradura esfuerzos de Reynolds asociada con la celda unitaria concéntrica, adim.
$l_g$	longitud característica de la fase gas, m
$l_l$	longitud característica de la fase líquida, m
$l_{vk}$	longitud característica de las desviaciones espaciales de velocidad, m
$L$	longitud característica del sistema en estudio, m
$L_\tau$	longitud característica asociada con los cambios en $\langle \tau_k \rangle$ , m
$L_\epsilon$	longitud característica asociada con los cambios en $\epsilon_k$ , m
$L_{vk}$	longitud característica de la velocidad promedio en volumen, m
$m$	fuerza normal debido a la tensión de superficie, N/m <sup>2</sup>
$M_{km}$	$\neq M_{mk}$ fuerzas interfaciales por unidad de volumen, N/m <sup>3</sup>
$n_{lg}$	= - $n_{gl}$ vector normal unitario dirigido de la fase $l$ a la fase $g$
$n_{km}$	= - $n_{mk}$ vector normal unitario dirigido de la fase $k$ a la fase $m$ ; $k = l$ para $m = g$ y $k = g$ para $m = l$
$n_{lg}^j$	vector normal unitario $j = 1, 2, 3$ (mismo significado que $n_{lg}$ )
$p_k$	presión local instantánea de la fase $k$ , N/m <sup>2</sup>
$p_{km}$	presión interfacial ( $p_{km} \neq p_{mk}$ ), N/m <sup>2</sup>

$\langle p_k \rangle$	presión promedio fase instantánea de la fase $k$ , $N/m^2$
$\langle p_k \rangle^k$	presión promedio intrínseco instantánea de la fase $k$ , $N/m^2$
$\langle p_k \rangle_{ig}$	$= \langle p_k \rangle_{gl} = 1/A_{ig} \int_{A_{ig}} p_k dA$ presión promedio interfacial de la fase $k$ , $N/m^2$
$r$	vector de posición de una partícula respecto al sistema de referencia inercial, m
$r$	coordenada esférica, m
$r_0$	longitud característica del volumen promedio, m
$R_b$	radio de burbuja, m
$t$	tiempo, s
$t_\alpha^k$	tensor híbrido, $\alpha = 1,2; k = 1,2,3$
$T$	tiempo de relajación, s
$T_k$	tensor de esfuerzos viscosos local instantáneo, $N/m^2$
$T_{kn}$	tensor de esfuerzos interfaciales ( $\tau_{kn} \neq \tau_{mk}$ ), $N/m^2$
$T_k^{Re}$	esfuerzos de Reynolds de la fase $k$ , $N/m^2$
$\langle T_k \rangle$	tensor de esfuerzos viscosos promedio fase instantáneo de la fase $k$ , $N/m^2$
$v_k$	vector velocidad local instantáneo de la fase $k$ , m/s
$v_r$	$= \langle v_g \rangle^g - \langle v_l \rangle^l$ velocidad relativa, m/s
$\langle v_k \rangle$	vector velocidad promedio fase instantáneo (velocidad superficial) de la fase $k$ , m/s
$\langle v_k \rangle^k$	vector velocidad promedio intrínseco instantáneo de la fase $k$ , m/s
$V$	$V_g(t) + V_l(t)$ volumen promedio, $m^3$
$V_k(t)$	volumen de la fase $k$ asociado a la región $R_k(t)$ [ $R_k(t) \subset \mathbb{R}^3$ ], $m^3$
$V_e$	volumen de la burbuja esférica, $m^3$
$w_{ig}$	vector de velocidad interfacial, m/s
$x$	vector de posición localizado en el centroide del volumen promedio con respecto al sistema de referencia inercial, m
$z$	coordenada rectangular, m

## Símbolos griegos

$\gamma$	$= \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ distancia centro a centro de la burbuja esférica con respecto al sistema de referencia concéntrico, $h, k, l$ son las coordendas, m
$\delta$	espesor de la capa frontera alrededor de la superficie de la burbuja, m
$\langle \Delta p_{km} \rangle$	$= \langle p_k \rangle_{km} - \langle p_k \rangle^k$ diferencia de presión interfacial, N/m <sup>2</sup>
$\varepsilon_k(t)$	fracción volumen de la fase $k$ [ $V_k(t)/V$ ]
$\theta$	coordenada esférica
$\mu_k$	viscosidad de la fase $k$ , Kg/m-s
$\xi$	$= 1/4$ coeficiente de la relación de cerradura
$E_1$	variable auxiliar definida por la Ec. (3.25), m/s <sup>2</sup>
$E_2$	variable auxiliar definida por la Ec. (3.26), m/s <sup>2</sup>
$\rho_k$	densidad de la fase $k$ , Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{ef}$	densidad efectiva, Kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	tensión superficial, N/m
$\sigma^*$	conductividad térmica efectiva, adim
$\phi$	potencial de velocidad, m <sup>2</sup> /s
$\langle \phi_l \rangle^l$	potencial de velocidad promedio intrínseco instantáneo, m <sup>2</sup> /s
$\psi$	variable genérica, representa un escalar vector o tensor
$\psi_k$	valor de $\psi$ en la fase $k$
$\langle \psi_k \rangle$	promedio fase de la variable genérica $\psi$ evaluada en la fase $k$
$\langle \psi_k \rangle^k$	promedio fase intrínseco de la variable genérica $\psi$ evaluada en la fase $k$
$\varphi$	coordenada esférica

## Subíndices

$c$	concéntrico
$k$	$k = l$ para la fase líquida y $k = g$ para la fase gas
$km$	( $k=l$ para $m=g$ y cuando $k=g$ ; para $m=l$ )

## 0. INTRODUCCIÓN

El problema planteado en este trabajo de tesis doctoral es la predicción de los fenómenos de propagación de ondas de vacíos en flujo en dos fases burbujeante aire-agua y la predicción de la transición de la estructura de flujo en dos fases.

Los fenómenos de flujo en dos fases en condiciones de estado transitorio y estado estacionario son controlados por los mecanismos de propagación de ondas de vacíos. Algunos ejemplos de fenómenos de flujo en dos fases son: (a) inundación (en inglés conocido como flooding) en reactores nucleares del tipo agua en ebullición o BWR (proceso donde se inyecta agua a contracorriente en la parte superior del núcleo del reactor, en condiciones de enfriamiento en emergencia del núcleo del reactor), (b) inestabilidades conocidas como onda de densidad (fenómeno que produce una inestabilidad divergente de la potencia en reactores nucleares) y (c) transiciones de patrones de flujo presentes en diversas aplicaciones industriales. Además de los reactores nucleares, cabe mencionar flujos en pozos geotérmicos y generadores de vapor, entre otros.

El alcance del presente estudio comprende flujo en dos fases en régimen burbujeante. Por ejemplo, en reactores nucleares del tipo BWR, aproximadamente un tercio del núcleo del reactor opera en régimen de flujo en dos fases burbujeante y en otras aplicaciones industriales el primer patrón de flujo en dos fases es burbujeante, después se puede presentar flujo tapón, anular, entre otros.

## 0.1 Metodología

La metodología para abordar el problema planteado se presenta en forma esquemática en la Figura 0.1. Para obtener la descripción dinámica de la ecuación de onda (línea continua de la Figura 0.1), el primer paso es establecer las ecuaciones de gobierno locales instantáneas (ELI's), las cuales consisten de un conjunto de ecuaciones de transporte de masa y cantidad de movimiento para cada una de las fases y la condición de salto de cantidad de movimiento interfacial, la cual incorpora los efectos de las fuerzas interfaciales. El siguiente paso es aplicar a las ELI's el método del promedio volumétrico para obtener información suficiente para estimar el comportamiento global del sistema en términos de variables promedio.

El siguiente paso es determinar las relaciones de cerradura, las cuales se formularon como un problema asociado con las desviaciones espaciales alrededor de los valores promedio de las variables locales instantáneas. Para ello se aplica la teoría de flujo potencial en un celda excéntrica. Los resultados del modelo de celda excéntrica tienen un impacto importante en la propagación de las ondas de fracción de vacíos. El siguiente paso es acoplar las ecuaciones promedio con las relaciones de cerradura para lograr un conjunto cerrado de ecuaciones.

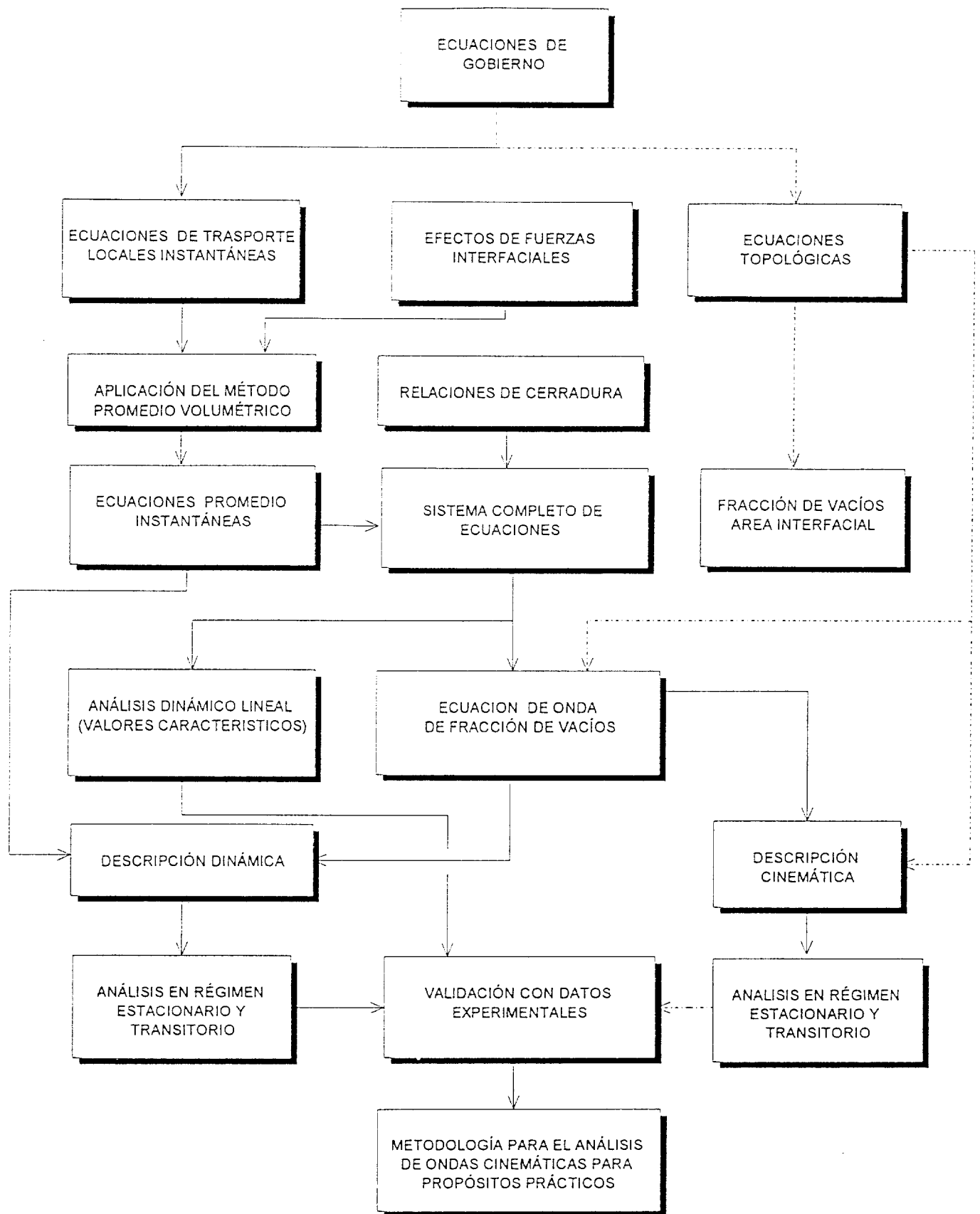
Enseguida se realiza un análisis de estabilidad lineal del conjunto cerrado de ecuaciones que consiste en determinar los valores característicos del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDP's). Los valores característicos de las EDP's permiten estudiar la estabilidad fuerte del modelo, predecir las velocidades de propagación de las ondas de fracción de vacío y las transiciones relacionadas con fenómenos físicos. Las velocidades características se comparan con datos experimentales para realizar un análisis detallado del problema.

Para identificar la onda cinemática y calcular su velocidad de propagación, los tiempos de relajación y el coeficiente de difusividad, es necesario obtener la ecuación de onda de la fracción de vacíos. Esta ecuación con derivadas parciales de tercer orden es la ecuación jerárquica que gobierna los fenómenos de propagación de la onda de fracción de vacíos.

Posteriormente, se hace un análisis en régimen estacionario y otro en estado transitorio. El primero se aborda en forma analítica y numérica mientras que el análisis transitorio se aborda aplicando técnicas numéricas.

La línea punteada en el diagrama de la Figura 0.1 es la metodología para obtener la ecuación de onda de fracción de vacíos a través de una descripción cinemática. Esta metodología no fue aplicada en este trabajo, sólo se propone y es de interés mencionarla porque es otra alternativa para abordar el problema y con observaciones experimentales, se puede aplicar para validar la descripción dinámica.

Como parte de la aplicación, se desarrolló un código numérico que simula una columna de burbujeo y calcula la velocidad de propagación perturbando el sistema simulado. También se obtienen las distribuciones de de la fracción de vacíos, las velocidades y presiones de las fases.



**Figura 0.1.** Metodología para estudiar fenómenos de propagación. Línea continua descripción dinámica y línea punteada descripción cinemática.

## 0.2 Contenido sintético de cada capítulo

En el Capítulo 1 se presenta el estado del arte del método del promedio volumétrico para la descripción de sistemas multifásicos dispersos, tipos de promedio y su uso. También se presentan algunas propuestas para la solución del problema de cerradura como función del grado de complejidad del modelo promedio, es decir, con el modelo de mezcla homogéneo, con el modelo de flujos separados y con el modelo de flujos relativos. También se presenta una sección relacionada con la aportación del presente trabajo como función de los trabajos previos.

En el Capítulo 2 se presenta la derivación teórica de las ecuaciones promedio. En este trabajo se derivó un modelo de dos fluidos promedio en volumen instantáneo para estudiar los fenómenos de flujo burbuja aire-agua con efectos interfaciales.

En el Capítulo 3 se presenta la derivación teórica de las relaciones de cerradura para obtener un conjunto completo de ecuaciones del modelo. Para obtener las relaciones de cerradura en función de las variables dependientes se aplicó en forma sistemática la teoría de flujo potencial. El modelo planteado para derivar dichas cerraduras se basó en una celda excéntrica y se estudio el caso límite recuperando las cerraduras del modelo de celda concéntrica. La derivación se puede considerar general puesto que además del caso límite mencionado, se obtienen expresiones para flujo alrededor de una burbuja esférica y burbuja esférica en movimiento. En ambos casos se encontró que los efectos de masa agregada presentan una dependencia del espacio y del tiempo, los cuales son analizados. Los resultados obtenidos se compararon con los reportados en la literatura. Para obtener los coeficientes de las relaciones de cerradura se usaron técnicas numéricas para su solución.

En el Capítulo 4 se presenta el acoplamiento de las ecuaciones promedio de cantidad de movimiento del modelo de flujos separados (Capítulo 2) con las relaciones de cerradura (Capítulo 3). Con este acoplamiento y una relación independiente de la presión promedio intrínseca de la fase gaseosa se obtiene un conjunto cerrado de EDP's.

El conjunto cerrado de ecuaciones del modelo de dos fluidos encontrado, además de su funcionalidad con las variables dependientes, es función de los parámetros interfaciales de cantidad de movimiento de las relaciones de cerradura. Estos parámetros son constantes con el modelo de celda concéntrica, y con el modelo de celda excéntrica son función de la fracción de vacíos y el gradiente de la fracción de vacíos para la relación de cerradura masa agregada.

En el Capítulo 5 se presenta el análisis de estabilidad dinámico del sistema de las EDP, usando el método de los valores característicos. Este método además de permitir estudiar la estabilidad "fuerte" del modelo matemático, predice las velocidades de propagación de las ondas de fracción de vacíos y el rango de aplicabilidad o validez del modelo. Los resultados encontrados por este método se comparan con datos experimentales.

Se analizan una serie de casos para establecer la importancia de los efectos interfaciales: (1) efectos de masa agregada dependiente en el tiempo y espacio y (2) efectos de masa agregada constante. Un parámetro importante encontrado en este estudio es el diámetro de burbuja, el cual modifica el dominio de comportamiento hiperbólico de las ondas de propagación. Los efectos no lineales encontrados se deben al término de masa agregada del modelo de celda excéntrica, mientras que el modelo de celda concéntrico genera un conjunto de EDP's cuasi-lineal.

En el Capítulo 6 se presenta la derivación teórica de la ecuación de onda de vacíos, cuya estructura matemática corresponde a una EDP lineal de tercer orden en función de la fracción de vacíos. Los coeficientes que multiplican a los operadores diferenciales son función de los efectos interfaciales, los cuales gobiernan los fenómenos de propagación. Aplicando técnicas de estabilidad lineal, se encontraron cuatro velocidades de propagación para flujo burbujeante: una onda cinemática, dos velocidades características y una onda debido al término de tercer orden. también en este capítulo se calculan los tiempos de relajación y el coeficiente de difusividad.

En el Capítulo 7 se presenta la solución numérica del sistema de EDP's empleando el método de diferencias finitas implícitas, para describir los procesos de flujo en dos fases en una columna de burbujeo. El objetivo es desarrollar una herramienta de análisis versátil que incorpore los efectos interfaciales de cantidad de movimiento y permita predecir los perfiles de las velocidades de las fases gas y líquida, la distribución de presión y distribución de fracción de vacíos en la dirección axial y régimen transitorio. El análisis numérico que se realiza en este capítulo cubre dos aspectos fundamentales: (1) conocer el impacto de los efectos interfaciales sobre el comportamiento de las fases en condiciones transitorias, y (2) predecir la velocidad de la onda de fracción de vacíos, simulando el proceso real de una columna de burbujeo.

En cada uno de los capítulos del presente trabajo se presenta una sección de conclusiones.



## 1. TRABAJOS PREVIOS

El diseño de sistemas de ingeniería y la capacidad para predecir su comportamiento dependen de la disponibilidad de datos experimentales y de modelos conceptuales, los cuales pueden ser usados para describir un proceso físico. La mecánica del medio continuo establece que los modelos conceptuales para flujo en una fase de un gas o de un líquido, son formulados en términos de ecuaciones de campo que describen las leyes de conservación de masa, energía y cantidad de movimiento. Estas ecuaciones son complementadas por relaciones de cerradura y ecuaciones de estado, entre otras (reacciones químicas). También los medios multifásicos estructurados son formulados en términos de ecuaciones de campo, sin embargo dichas ecuaciones son más complicadas para un medio homogéneo para flujo en una fase.

En flujos multifásicos la presencia de las superficies interfaciales introduce grandes dificultades en la formulación matemática y física del problema. Desde un punto de vista matemático, un flujo multifásico puede ser considerado como un campo, el cual es subdividido en regiones de una fase con fronteras de separación en movimiento. Desde un punto de vista físico las dificultades para derivar el campo y las relaciones de cerradura para sistemas de flujos multifásicos se deben a la presencia de la interfaz y al hecho de que tanto las características estables y dinámicas dependen de la estructura del flujo. Por ejemplo, las características de sistemas de flujo en dos fases disperso depende de la dinámica colectiva de las partículas sólidas, mientras que en burbujas o gotas, depende de la interacción de unas con otras y con los alrededores de la fase continua. Por otro lado, que en el caso de flujos separados (flujo anular) estas características dependen de la estructura y dinámica de la interfaz.

Las principales dificultades en la formulación local instantánea son: (1) existencia de la interfaz deformable, con movimiento no conocido, y (2) existencia de las fluctuaciones de las variables debido a la turbulencia y al movimiento de las interfaces.

El flujo en dos fases disperso en sistemas de ingeniería prácticos presentan geometrías y movimientos interfaciales complicados, por lo que no es posible resolver el movimiento local instantáneo de las partículas (burbujas o gotas) fluidas. El detalle local del movimiento del fluido y sus propiedades son raramente necesarias para un problema de ingeniería, siendo los aspectos promedio del flujo mucho más importantes.

Para derivar las ecuaciones de campo y las relaciones de cerradura para un medio multifásico es necesario describir las características locales del flujo, para el cual las propiedades macroscópicas serán obtenidas por medio de un procedimiento promedio.

### **1.1 El método del promedio para la descripción de sistemas multifásicos dispersos**

Dependiendo de los conceptos básicos de la física usados para formular los problemas termomecánicos, los procedimientos promedio se pueden clasificar en tres principales grupos: el promedio Euleriano, el promedio Lagrangiano y el promedio estadístico de Boltzmann. Estos pueden ser divididos en subgrupos basados en la variable con la cual se define el operador promedio. La clasificación anterior y las definiciones de varios promedios se resumen en la Tabla 1.1. En esta tabla,  $x$  y  $X$  son las coordenadas espacial y material respectivamente, mientras que  $\xi$  es la velocidad de fase, es decir, la velocidad individual de las partículas.

El promedio Euleriano se usa con frecuencia para describir los procesos de ingeniería porque es el más cercano a las observaciones humanas y de la instrumentación. Si el interés es el comportamiento de una partícula individual, el promedio Lagrangeano es importante y útil para el análisis. El promedio temporal Lagrangiano se usa para seguir una cierta partícula y observarla en algún intervalo de tiempo para obtener la velocidad promedio de la partícula, mientras que el promedio temporal Euleriano se refiere a la velocidad promedio de todas las partículas que pasan en un punto.

El promedio estadístico de Boltzmann con el concepto del número de densidad de partículas es importante cuando el mecanismo colectivo involucra un gran número de partículas. Cuando el número de partículas y sus interacciones entre ellas aumenta, el comportamiento de una partícula es complicado y por lo tanto no es práctico resolver cada partícula. El promedio estadístico de Boltzmann aplicado a un gran número de moléculas y con una trayectoria libre media apropiada pueden conducir a ecuaciones de campo, las cuales semejan fielmente aquellas de la mecánica del medio continuo. Esto se puede realizar escribiendo primero la ecuación de balance para la función densidad de partículas, la cual es conocida como la ecuación de Boltzmann. Después es necesario suponer una forma del término de interacción de partículas así como de la característica estocástica de la función densidad de la partícula.

La aplicación del promedio se usa principalmente para definir propiedades y correlacionarlas con datos experimentales y para obtener campos y relaciones de cerraduras para predecir procesos.

Tabla 1.1. Clasificación de Promedios

Promedio Euleriano. Función: ; $F = F(t, \mathbf{x})$	
$\frac{1}{t} \int_t F(t, \mathbf{x}) dt$	; Promedio temporal
$\frac{1}{V} \int_V F(t, \mathbf{x}) dV$	; Promedio en volumen
$\frac{1}{A} \int_A F(t, \mathbf{x}) dA$	; Promedio en área
$\frac{1}{C} \int_C F(t, \mathbf{x}) dC$	; Promedio lineal
Promedio Lagrangiano. Función: $F = F(t, \mathbf{X}); \mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$	
$\frac{1}{t} \int_t F(t, \mathbf{X}) dt$	; Promedio temporal
Promedio estadístico de Boltzmann. Función densidad molecular: $f = f(\mathbf{x}, \xi, t)$	
$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{\int \psi(\xi) f d\xi}{\int f d\xi}$	

El punto de partida para derivar las ecuaciones promedio en espacio y/o tiempo son las ecuaciones de conservación locales instantáneas que describen los procesos de transferencia de masa, energía y cantidad de movimiento en cada una de las fases e interfases (Ishii, 1975; Yadigaroglu y Lahey, 1976; Banerjee y Chan, 1980; Lahey y Drew, 1989).

Ishii (1975) obtiene la descripción local de las ecuaciones de conservación promediando en tiempo; Suthmiller (1977) usa esta descripción para estudiar los efectos de la presión interfacial. Delhaye (1981) formaliza el método de promedio en área para la obtención de las

ecuaciones de conservación instantáneas, mientras que el desarrollo de las ecuaciones de conservación promedio en volumen y tiempo se presentan en el trabajo de Lahey y Drew (1989). En el trabajo de Soria y De Lasa (1990) se establecen las ecuaciones de transporte promedio volumétrico instantáneas en forma genérica para sistemas multifásicos; para  $n$  fases,  $m$  interfases y  $p$  líneas de contacto. En los trabajos de Gray y Lee (1977) y Hassanizadeh y Gray (1979) también se establecen las ecuaciones de transporte promedio en volumen instantáneas en forma genérica para sistemas multifásicos.

Otro grupo de investigadores relacionado con flujos multifásicos, que estudian principalmente problemas en sistemas de medios porosos (Whitaker, 1969; Carbonell y Whitaker, 1984; Whitaker, 1986a,b y 1994; Crapiste, *et al.*, 1989; Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995, entre otros), establecen las ecuaciones de transporte promedio en volumen instantáneas aplicando el formalismo basado principalmente en: (a) los teoremas de integrales (Whitaker, 1967; Slattery, 1967), (b) en el trabajo de Gray (1975) sobre las desviaciones espaciales y (c) comprobaciones del teorema del promedio espacial (Howes y Whitaker, 1984). Estos autores consideran como parte fundamental, la validez de sus desarrollos a través de la restricción impuesta de las escalas de longitud características del sistema en estudio, las cuales se pueden aplicar para fundamentar las simplificaciones de las ecuaciones promedio. Banerjee y Chan (1980) también desarrollan las ecuaciones promedio en volumen instantáneas e introducen una descomposición espacial para la presión y esfuerzos viscosos, la cual permite obtener por ejemplo la presión promedio interfacial. Esta descomposición espacial es distinta a la propuesta por Gray (1975).

Lahey (1991) estudia los fenómenos de propagación de ondas de vacíos aplicando un

modelo promedio de dos fluidos para un sistema de flujo burbuja de aire-agua. Este autor parte de las ecuaciones promedio en volumen y tiempo desarrolladas por Lahey y Drew (1989). Los términos interfaciales son una caracterización esencial de los balances de cantidad de movimiento para este tipo de flujos. Se conoce que los efectos de tensión superficial tienen una influencia sustancial en el comportamiento del sistema disperso y se consideran como un término fuente en la ecuación de cantidad de movimiento interfacial (Delhaye, 1981; Soria y De Lasa, 1991).

## 1.2 El problema de cerradura

Existen algunos trabajos publicados que han abordado el problema de cerradura aplicando diferentes aproximaciones. A continuación se describen algunos de esos trabajos.

El número de relaciones de cerradura necesarias en particular en un modelo de flujo en dos fases, depende del número de ecuaciones que describen el flujo. En sus inicios para estudiar sistemas de ingeniería en dos fases se usaron modelos de tres ecuaciones en régimen permanente, conocidos como modelos de flujo homogéneo, los cuales requieren como relación de cerradura la caída de presión por fricción en dos fases. Resolviendo este problema con correlaciones obtenidas con datos experimentales. Las desventajas de este planteamiento es que no puede considerar efectos interfaciales y no tiene la capacidad de predecir velocidades diferentes de la fase gas y líquida.

Posteriormente Zuber y Findlay (1965) proponen una relación conocida como flujo relativos, la cual se basa en datos experimentales y considera con buena aproximación la distribución no uniforme de la fase gaseosa y el deslizamiento entre fases. La ventaja de esta propuesta es su aplicación para diferentes patrones de flujo en dos fases, tanto en ductos

verticales como horizontales. El modelo de tres ecuaciones y la relación de flujos relativos resuelve el problema de deslizamiento de las fases, debido a que la relación de flujos relativos aglutina toda la información referente a los efectos interfaciales. Para aplicaciones en reactores nucleares se han planteado propuestas de modelos de 5 ecuaciones (dos de masa, dos de energía y una ecuación de cantidad de movimiento de mezcla) con la relación de flujos relativos (Espinosa y Máximo, 1992). En códigos avanzados de ingeniería nuclear como TRAC (Borkowski y Wade, 1992), el planteamiento consiste en un modelo promedio volumétrico de seis ecuaciones con efectos de transporte interfacial y usan la relación de flujos relativos para establecer las transiciones de un patrón de flujo a otro. La relación de flujos relativos se aplica ampliamente en el diseño de sistemas bifásicos y en este sentido, Chexal, *et al.* (1997) proponen una correlación avanzada, la cual fue obtenida con una gran cantidad de datos experimentales.

Otra de las aproximaciones aplicadas para resolver el problema de cerradura es la teoría de flujo potencial (Zuber, 1963; Voinov, 1973; van Wijngaarden, 1976; Stuhmiller, 1977; Nigmatulin, 1979; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1986; Wallis, 1989; Pauchon y Banerjee, 1988; Biesheuvel y Spoeltra, 1989; Lahey, 1991; Wallis, 1992; Pauchon y Smereka, 1992). Para estudiar los efectos de fuerzas del líquido en flujo burbuja con efectos de interacción hidrodinámica entre burbujas, algunos autores (Wijngaarden, 1976; Biesheuvel y Spoeltra, 1989 y Kok, 1988) usan la aproximación de Jeffrey (1973). Los resultados obtenidos por estos autores son similares y la diferencia en el valor numérico se debe principalmente a la distribución de probabilidades de burbujas (posición o velocidad) que usan cada uno de ellos. El problema de Jeffrey (1973) consistió en describir un campo de temperaturas en presencia de dos esferas con conductividades diferentes, basándose a su vez en el trabajo de Maxwell (1891).

Geurst (1985 y 1986) aplicó el principio variacional y determinó los efectos de masa virtual en flujo burbuja. Un trabajo más reciente que aplica el mismo principio es el de Pauchon y Smereka (1992); adicionalmente presentan la aproximación de flujo potencial para flujo no uniforme y comparan las dos aproximaciones, encontrando resultados idénticos en el límite diluido, es decir, bajas fracciones de vacío.

El método del promedio volumétrico en la actualidad ha cobrado gran importancia para calcular las cerraduras en medios multifásicos y existen diferentes trabajos que aplican dicho método desde hace más de una década (Zanotti y Carbonell, 1984; Whitaker, 1985) y también otros trabajos más recientes (Ochoa-Tapia, *et al.*, 1993; Whitaker, 1994 y Ochoa-Tapia, *et al.*, 1994). Por ejemplo, Glatzmair y Ramírez (1988) usan esta aproximación para determinar las propiedades térmicas de un medio poroso.

El problema de cerradura en estos estudios se basa en establecer las ecuaciones de gobierno de las desviaciones espaciales en términos de las variables promedio; el método, en forma detallada, se presenta en el trabajo de Crapiste, *et al.* (1989). Para resolver el problema de cerradura construyen un problema de valores a la frontera para las desviaciones espaciales (Whitaker, 1986a,b; Ochoa-Tapia, *et al.*, 1993 y 1994). Las experiencias de estos autores han permitido depurar el método del promedio volumétrico en forma sistemática y una contribución importante de este grupo de autores es precisamente la solución del problema de cerradura. Este método ha sido ampliamente aplicado a problemas de medios porosos principalmente, y no existe evidencia en aplicaciones para sistemas de flujo burbuja.

La hipótesis de flujo potencial en combinación con el método del promedio volumétrico

es directa y las soluciones del potencial hidrodinámico son conocidas desde finales del siglo pasado (Lamb, 1932 publicado originalmente en 1879 y Milne-Thomson, 1967). A Zuber (1964) se le puede considerar como precursor de aplicar la teoría de flujo potencial para aproximar los efectos de interacción entre burbujas con un modelo constituido por una esfera (fase dispersa) inmersa en una esfera de líquido (fase continua), similar a la celda unitaria de Chang (Ochoa-Tapia *et al.*, 1994). Posteriormente aparecen publicaciones aplicando la misma aproximación, como el trabajo de Stuhmiller (1977), en el cual obtienen los efectos de fuerza que ejerce el fluido sobre una esfera. La importancia de este trabajo también radica en establecer la relación de cerradura de la diferencia de los promedios de la presión interfacial. El punto de partida de Stuhmiller (1977) para determinar las relaciones de cerradura es el modelo local promedio en tiempo desarrollado por Ishii (1975).

De la literatura consultada en este campo se puede observar que la aplicación de flujo potencial para determinar las fuerzas que actúan sobre una esfera en un flujo ideal, se han basado en flujo uniforme (Zuber, 1964; van Wijngaarden, 1976; Stuhmiller, 1977; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984 y Arnold, *et al.*, 1989) y flujo no uniforme (Voinoi, 1973; Pauchon y Smereka, 1992). En flujo no uniforme el potencial de velocidad se considera el gradiente de velocidad.

Algunos trabajos se basan en la teoría de flujo potencial y distribución aleatoria de partículas (van Wijngaarden, 1976; Kok, 1988 y Biesheuvel y Spoeltra, 1989). También es de interés mencionar el trabajo de Smereka y Milton (1991) quienes proponen expresiones para las cerraduras, aplicando para la solución la relación existente entre flujo burbuja y conducción en compuestos. Smereka y Milton (1991) extienden el resultado de Zuber (1964) considerando

burbujas elípticas, y un trabajo más reciente de Ochoa-Tapia *et al.* (1994) presenta una extensión de la celda unitaria de Chang para aproximar un sistema no isotrópico considerando la celda unitaria en forma elipsoidal.

Biesheuvel y Spoeltra (1989) obtienen una expresión exacta para los efectos de masa virtual, válida para cualquier valor de la fracción de vacíos. Estos autores consideran un arreglo espacialmente periódico de burbujas y observan que el problema es totalmente análogo al problema para determinar la conductividad térmica efectiva de un material compuesto, el cual consiste en un arreglo periódico de esferas no conductoras en una matriz homogénea. El método adoptado por ellos se presenta en los trabajos de Sangani y Acrivos (1982 y 1983).

Lahey (1991) para estudiar fenómenos de propagación en flujo burbujeante y el problema de cerradura abordado por este autor lo resuelve aplicando la hipótesis de flujo potencial alrededor de una burbuja esférica (Drew, 1992).

### **1.3 Aportaciones del presente trabajo**

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de dos fluidos basado en el método del promedio volumétrico para estudiar el flujo burbujeante de aire-agua con efectos interfaciales. Para obtener el modelo se usa el formalismo de Whitaker (1986a), aplicando para la presión local instantánea las desviaciones espaciales de Banerjee y Chan (1980) y para el resto de las variables locales instantáneas, las desviaciones espaciales tipo Gray (1975).

Se conoce que los efectos de tensión superficial tienen una influencia sustancial en el comportamiento del sistema disperso y se consideran como un término fuente en la ecuación de

cantidad de movimiento interfacial (Delhaye, 1981; Soria y De Lasa, 1991). En este trabajo los efectos de tensión superficial se consideran explícitamente y de acuerdo con trabajos previos (Pauchon y Banerjee, 1986 y 1988; Ruggles *et al.*, 1988; Park *et al.*, 1990; Lahey, 1991), no han sido considerados para el análisis de la propagación de fracción de vacíos en flujo burbuja.

Es importante apuntar que el método del promedio volumétrico usado por Whitaker, (1969); Zanotti y Carbonell, (1984a,b); Whitaker, (1986a,b) y (1994); Crapiste, *et al.*, (1986); Ochoa-Tapia y Whitaker, (1995), entre otros, no ha sido aplicado en sistemas de flujo burbujeante. En el presente trabajo se seleccionó esta aproximación debido a la sistematización y depuración lograda por estos autores después de muchos años de experiencia.

El sistema en estudio de flujo en dos fases burbujeante que se presenta a lo largo de todo este trabajo es el punto de partida para aplicaciones industriales. En este tipo de aplicaciones las fases son tratadas como compresibles y además de los fenómenos de transporte de cantidad de movimiento interfacial, adquieren gran importancia la transferencia de masa y energía interfacial, debido a los fenómenos de evaporación o condensación y a la transferencia de calor en la interfaz entre la pared del ducto y flujo en dos fases. En el Apéndice B de este trabajo se presenta la derivación teórica de las ecuaciones promedio con estas características.

Uno de los principales problemas de las técnicas de promediar es la obtención de un conjunto abierto de ecuaciones promediadas. En el caso del promedio volumétrico el problema es el mayor número de incógnitas (variables y términos de cerradura) que de ecuaciones. Resolver este problema en forma teórica no es tarea sencilla y se deben proponer ecuaciones independientes para obtener un conjunto cerrado de ecuaciones. El modelo de dos fluidos bajo

contiene cuatro términos de cerradura para cada una de las fases. Para obtener las cerraduras en función de las variables dependientes se considera un modelo de celda excéntrica. Los resultados obtenidos con la celda unitaria excéntrica son los primeros de su tipo por lo que no fue posible establecer comparaciones, aunque puede considerarse como una generalización del modelo de celda unitaria concéntrica ya muy desarrollado en la literatura (Zuber, 1964; Voinov, 1973; van Wijngaarden, 1976; Stuhmiller, 1977; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1988; Pauchon y Smereka, 1992).

Los efectos de excéntrica generan un conjunto de EDP's promedio de segundo orden no-lineales, las cuales fueron aproximadas en forma lineal para aplicar el método de los valores característicos. Los efectos no lineales se deben al término de masa agregada obtenido con el modelo de celda unitaria excéntrica. Para el caso concéntrico, el gradiente de la fracción de vacíos es nulo, cuya consideración genera un conjunto de EDP's promedio cuasi-lineal.

Se encontró que los efectos de excéntrica generan una ecuación de onda de tercer orden, en función de la fracción de vacíos en las variables dependientes del sistema de las ecuaciones de masa y cantidad de movimiento. Los coeficientes que multiplican a los operadores diferenciales son función de los efectos interfaciales, los cuales gobiernan los fenómenos de propagación. La derivación dinámica de la ecuación de onda se obtiene al aplicar un método de perturbaciones.

Con la ecuación de onda de tercer orden se encontraron cuatro velocidades de propagación para flujo burbujeante. Tres de ellas han sido reportadas por Bouré (1982), Pauchon y Banerjee (1988) y Lahey (1991) para el mismo fenómeno estudiado, es decir, flujo

burbujeante. Los trabajos de Pauchon y Banerjee (1988) y Lahey (1991) se basan en una descripción dinámica, mientras que el trabajo de Bouré (1982) se basa en una descripción cinématica. El cuarto modo de propagación encontrado en el presente trabajo esta relacionado con efectos de difusión de la onda. Un trabajo que reporta una ecuación de onda de tercer orden es el Biesheuvel y Gorissen (1990), los cuales aplican técnicas estocásticas para obtener las ecuaciones promedio y como resultado de introducir efectos de difusividad debido al movimiento aleatorio de burbujas en presencia de un gradiente de presión, obtienen dicha ecuación.

Las pruebas numéricas realizadas en una columna de burbujeo simulada permitieron estudiar los efectos transitorios de los efectos interfaciales (Espinosa y Soria, 1998). Los resultados obtenidos muestran que los efectos de tensión superficial producen aceleración de la onda de vacíos, mientras que los esfuerzos de Reynolds y diferencia de los promedios de la presión producen desaceleración de la onda de vacíos.

## 2. DERIVACIÓN TEÓRICA DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIO VOLUMÉTRICO

El objetivo de este capítulo es presentar la derivación teórica de las ecuaciones de transporte promedio para los procesos de flujo en dos fases empleando el método del promedio volumétrico. El resultado obtenido es un conjunto de ecuaciones promedio para cada una de las fases e interfases conocido como modelo de dos fluidos. Estas ecuaciones describen los procesos físicos de flujo en dos fases en términos de variables promedio. La descripción del planteamiento matemático es en tres dimensiones y régimen transitorio.

### 2.1 Sistema en estudio y volumen promedio

El sistema en estudio es un flujo en dos fases y dos componentes aire-agua viajando a través de un ducto vertical en régimen de flujo burbuja, como se puede observar en la Figura 2.1. El sistema está constituido por una fase continua de líquido (agua) y una fase dispersa de gas (aire) y ambas fases fluyen dentro del ducto vertical. La longitud característica del ducto es mucho mayor que el tamaño individual de las burbujas. La fase dispersa se considera como un conjunto de burbujas esféricas de radio constante. Las ecuaciones de Navier-Stokes se aplican a cada una de las fases fluidas gas y líquido considerando flujo Newtoniano, ambas fases están en movimiento y el dominio de aplicación de dichas ecuaciones es desconocido (distribución, número y posición de las burbujas no se conocen). Es preferible considerar ambas fases como una mezcla efectiva, pero es necesario imponer suposiciones para desarrollar la descripción de la mezcla en dos fases. Una de las técnicas disponibles para obtener el modelo de dos fluidos es el método del promedio volumétrico y se considera *ad hoc* para propósitos prácticos.

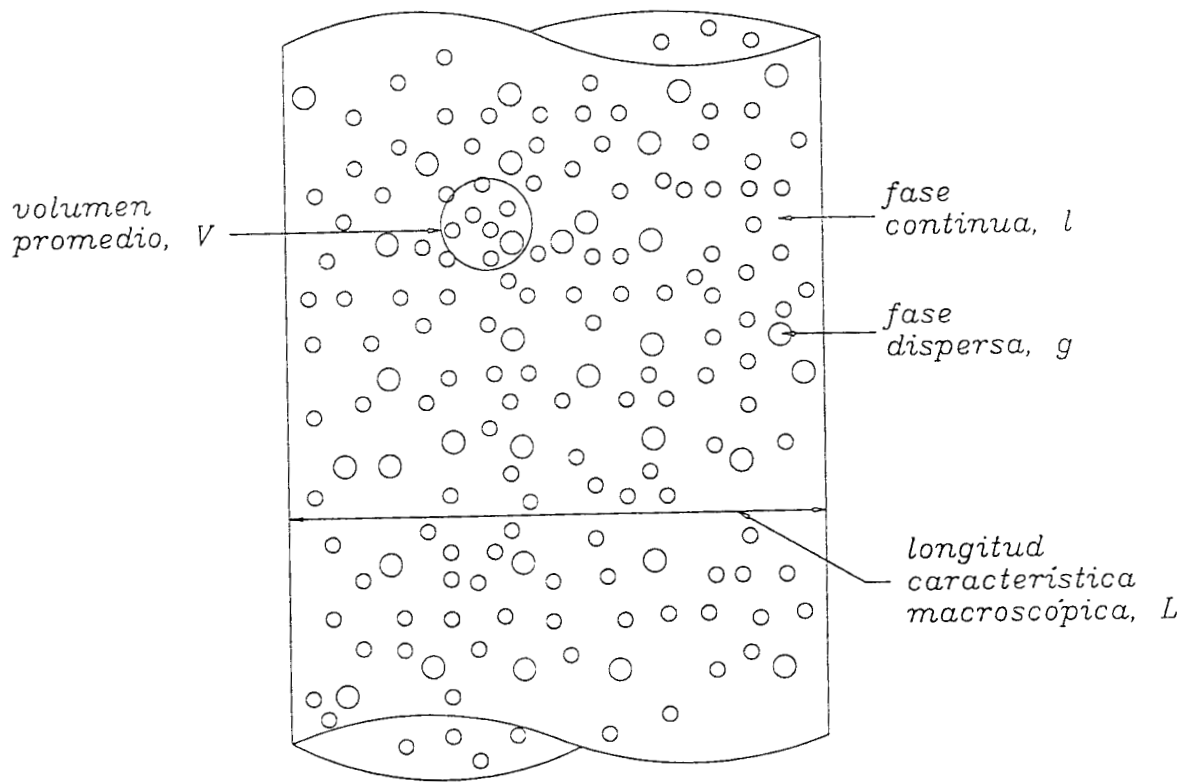


Figura 2.1. Sistema en estudio y volumen promedio hipotético con dos fases presentes.

Las dos fases son consideradas localmente incompresibles y sin transferencia de masa interfacial, y en relación con los efectos de transferencia de cantidad de movimiento interfacial, se considera que las interacciones entre las burbujas es débil y la tensión superficial es constante.

Las ecuaciones de balance locales instantáneas (ELI) que describen los procesos de transferencia de masa y cantidad de movimiento no pueden ser resueltas para un sistema con un número desconocido de burbujas moviéndose en el líquido. Sin embargo, una descripción promedio proporciona suficiente información para estimar el comportamiento global del sistema.

El volumen promedio seleccionado para este estudio es constante y mucho mayor que el tamaño individual de las burbujas y que la separación entre burbujas adyacentes, como se observa en la Figura 2.2, donde  $l_g$  y  $l_l$  son las longitudes características de la fase gas y la fase líquida, respectivamente,  $r_o$  es la longitud característica del volumen promedio  $V$  hipotético y  $L$  es la longitud característica del sistema. Los vectores normales unitarios de cada una de las fases son  $n_{lg}$  y  $n_{gl}$ . En términos matemáticos la restricción de escala de longitud impuesta para estudiar flujo burbujeante se expresa con la siguiente desigualdad:

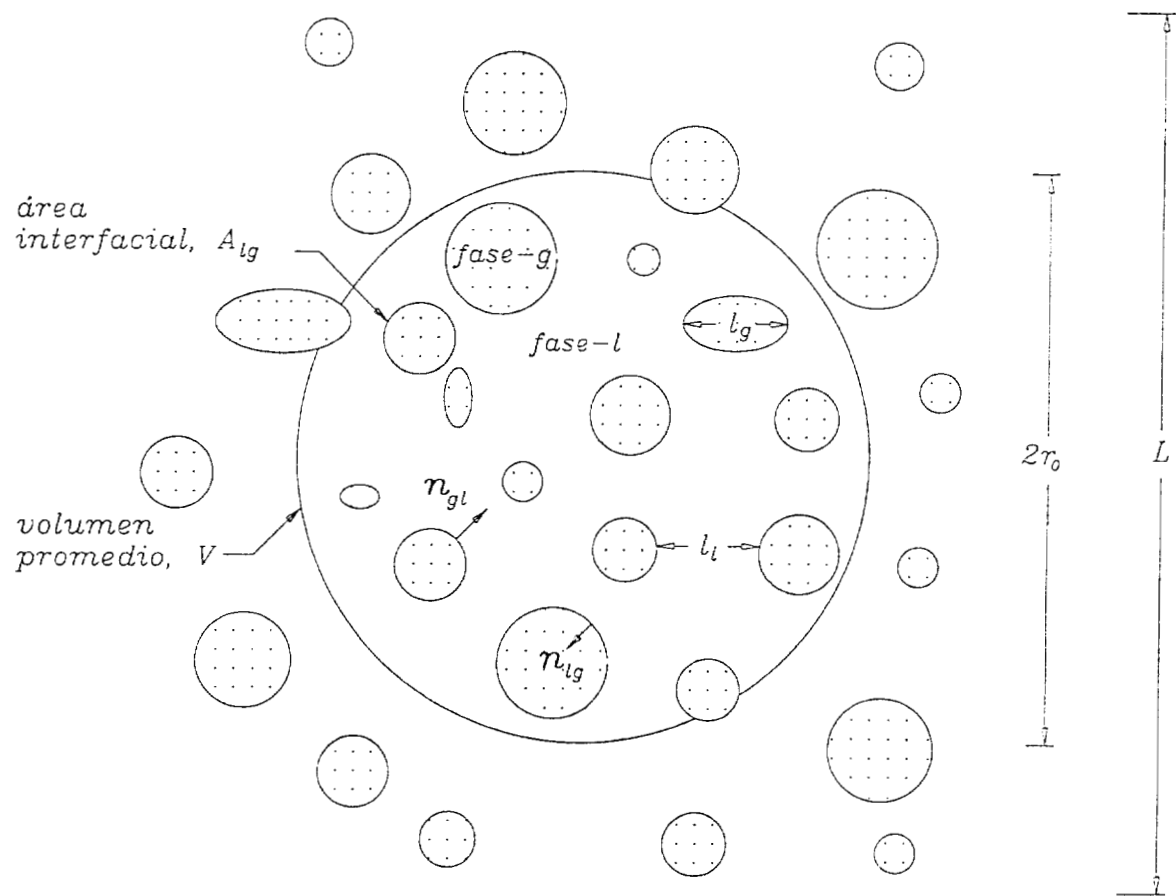
$$l_g, l_l \ll r_o \ll L \quad (2.1)$$

Como se mencionó anteriormente el patrón de flujo en estudio es del tipo burbuja y el volumen promedio se selecciona lejos de las paredes sólidas del ducto y de la entrada de flujo en dos fases, para asegurar que el sistema es homogéneo y continuo. Con esta restricción los efectos viscosos lejos de las paredes del ducto son despreciables (Espinosa y Soria, 1998). Por otro lado, considerar que el volumen promedio se localiza lejos de las paredes del ducto

garantiza que se cumpla la restricción de escala de longitud impuesta para este estudio. Debido a que en las paredes del ducto los efectos de distribución de burbujas son mucho mayores, además de las interacciones entre las burbujas con el líquido y el sólido, por lo tanto, bajo estas condiciones no se cumple con la restricción dada por la Ec. (2.1). Un ejemplo de la literatura que se puede citar en donde dicha restricción no se cumple es en el problema de transferencia de cantidad de movimiento en la interregión entre un medio poroso y fluido homogéneo (Ochoa y Whitaker, 1995).

De acuerdo con Carbonell y Whitaker (1984), el radio del volumen promedio  $r_0$  debe ser mucho mayor en comparación con las longitudes características de las fases  $l_g$  y  $l_l$ , para obtener valores de las cantidades promedio suficientemente suaves. Si las cantidades promedio experimentan variaciones significativas sobre la longitud característica del sistema en estudio  $L$ , entonces  $L$  debe ser mucho mayor en comparación con  $r_0$  para que el promedio de las desviaciones espaciales de dicha cantidad (alrededor de la cantidad promedio) sean cero.

Es importante apuntar que el método de volumen promedio no se aplica o limita a sistemas que cumplan la restricción de escala de longitud dada por la Ec. (2.1), es decir, no es una restricción inherente del método. En realidad la desigualdad de escalas de longitud es una restricción conveniente que se satisface para muchos sistemas de interés práctico.



**Figura 2.2.** Región del sistema  $L$  y volumen promedio  $V$ . Donde  $r_0$  es la longitud característica del volumen promedio,  $l_g$  y  $l_l$  son las longitudes características de la fase gas y fase líquida respectivamente,  $n_{gl}$  es el vector normal unitario de la fase gas a la fase líquida, en tanto  $n_{lg}$  es un vector normal unitario similar de la fase líquida a la fase gas.

## 2.2 Ecuaciones de conservación locales instantáneas

En esta sección se presenta el planteamiento de la descripción local instantánea que representan los fenómenos físicos de los procesos de un flujo en dos fases, para régimen de flujo tipo burbuja. La descripción local instantánea esta constituida por un conjunto de ecuaciones de balance de masa y cantidad de movimiento. Debido a la presencia de la interfaz que dividen o separan las fases gas-líquido, también es necesario especificar un conjunto de ecuaciones de balance locales instantáneas de masa y cantidad de movimiento que describan los procesos físicos en la región interfacial. Estas ecuaciones son conocidas como condiciones de salto. Para obtener una solución particular es necesario especificar las condiciones de frontera y las condiciones iniciales. Las ecuaciones locales instantáneas son el punto de partida para desarrollar el modelo promedio volumétrico para flujo en dos fases, aplicando el método de promedio en volumen.

Las hipótesis y suposiciones de los procesos de transferencia de masa y cantidad de movimiento que se aplican para obtener la descripción local instantánea son:

- flujo incompresible,
- flujo isotérmico,
- transferencia de masa interfacial nula, y
- tensión superficial constante.

Como ya se mencionó anteriormente, la región del sistema bajo estudio se localiza lejos de las paredes del ducto (Figura 2.1), de tal forma que los efectos de pared son despreciables. Las ecuaciones locales instantáneas que describen los procesos físicos de transferencia de masa y cantidad de movimiento, en tres dimensiones y régimen transitorio para cada una de las fases

así como las condiciones de salto interfacial, están dadas por el siguiente conjunto:

- Ecuación de continuidad local instantánea para la fase  $k$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad (2.2)$$

donde  $k = l$  para la fase líquida y  $k = g$  para la fase gas.

- Ecuación de cantidad de movimiento local instantánea para la fase  $k$ :

$$\rho_k \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \rho_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (p_k \mathbf{I}) - \nabla \cdot \mathbf{T}_k - \rho_k \mathbf{g} = 0 \quad (2.3)$$

en las cuales  $\rho_k$ ,  $\mathbf{v}_k$ ,  $p_k$ ,  $\mathbf{T}_k$  son las variables locales instantáneas en la fase  $k$  y representan la densidad, el vector velocidad, la presión y el tensor de esfuerzos viscosos respectivamente;  $\mathbf{I}$  representa el tensor unitario y  $\mathbf{g}$  es el vector de aceleración de la gravedad. Como se puede observar en la ecuación anterior, se ignoran variaciones de  $\rho_k$  dentro del volumen promedio.

- Tensor de esfuerzos viscosos para flujo Newtoniano y localmente incompresible:

$$\mathbf{T}_k = \mu_k \left( \nabla \mathbf{v}_k + \nabla \mathbf{v}_k^T \right) \quad (2.4)$$

donde  $\mu_k$  es la viscosidad de la fase  $k$  y el superíndice  $T$  denota transpuesta.

- Condición de impenetrabilidad interfacial (condición de salto interfacial de masa):

$$(\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{lg}) \cdot \mathbf{n}_{km} = 0, \quad \text{en} \quad A_{km} \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{w}_{km}$  ( $=\mathbf{w}_{mk}$ ) es la velocidad de la interfase  $k$ - $m$ ,  $A_{km}$  ( $=A_{mk}$ ) es la región interfacial,

supuesta bidimensional contenida en el volumen promedio (Figura 2.2),  $\mathbf{n}_{km}$  es el vector normal unitario en la interfaz, y tiene la propiedad:  $\mathbf{n}_{km} = -\mathbf{n}_{mk}$  (cuando  $k=l$ ,  $m=g$  y cuando  $k=g$ ,  $m=l$ ). La Ec. (2.5) establece que no existe transferencia de masa interfacial, debido a que se impone que la velocidad de la fase  $k$  en la dirección normal en la interfaz es igual a la velocidad interfacial en la misma dirección. Esta condición permite que no exista la posibilidad de transferirse masa de una fase a la otra (por un proceso de condensación o de evaporación) a través de la región interfacial.

- Condición de salto interfacial de cantidad de movimiento:

$$\left( p_{lg} \mathbf{I} - \mathbf{T}_{lg} \right) \cdot \mathbf{n}_{lg} + \left( p_{gl} \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_{gl} \right) \cdot \mathbf{n}_{gl} = \mathbf{m} , \quad \text{en} \quad A_{lg} \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{m}$  es la fuerza debida a la tensión superficial, la cual está dada por:

$$\mathbf{m} = \left( t_{\alpha}^k a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,\beta} = 2H_g \sigma \mathbf{n}_{gl} + t_{\alpha}^i a^{\alpha\beta} \sigma_{,\beta} \quad (2.7a)$$

Esta ecuación se obtiene en el Apéndice A y como caso particular, cuando  $\sigma$  es constante se reduce a:

$$\mathbf{m} = \left( t_{\alpha}^k a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,\beta} = 2H_g \sigma \mathbf{n}_{gl} \quad (2.7b)$$

En estas ecuaciones  $t_{\alpha}^k$  es el tensor híbrido,  $a^{\alpha\beta}$  es el tensor métrico en la superficie,  $\sigma$  es la tensión superficial,  $H_g$  representa la curvatura media interfacial medida desde la fase gaseosa,  $( )_{,\beta}$  denota derivada covariante en coordenadas de superficie y los índices con letras griegas significan coordenadas de superficie ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ). La Ec. (2.7a) en coordenadas espaciales está dada por (Apéndice A):

$$m = \left[ (g^{kj} - n^k n^j) \sigma \right]_{,j} - n^i n_j (g^{ij} - n^i n^j) \sigma_{,i} \quad (2.8)$$

donde  $g^{kj}$  representa el tensor métrico espacial,  $n^j$  es el vector normal con notación indicial y tiene el mismo significado que  $n_{lg}$ ,  $[ ]_{,j}$  denota derivada covariante en coordenadas espaciales y los índices con letras latinas significan coordenadas espaciales ( $j, k = 1, 2, 3$ ).

Una solución particular requiere de las condiciones de frontera e iniciales:

$$B.C.1 \quad v_k = f(x, t), \quad \text{en} \quad A_{ke} \quad (2.9)$$

$$B.C.2 \quad p_k = p_k(x), \quad \text{en} \quad x = x_o \quad (2.10)$$

$$C.I.1 \quad v_k = g(x), \quad \text{en} \quad t = 0 \quad (2.11)$$

donde  $x$  es el vector de posición,  $t$  el tiempo y  $A_{ke}$  representa las entradas y salidas de la fase  $k$  asociadas con la región macroscópica.

El sistema de flujo burbuja que se presenta a lo largo de todo este trabajo es el punto de partida para aplicaciones industriales (reactores nucleares, calderas, pozos geotérmicos, entre otros). En este tipo de aplicaciones las fases son tratadas como compresibles y además de los fenómenos de transporte de cantidad de movimiento interfacial, la transferencia de masa y energía interfacial (fases-fases y fases-pared) adquieren gran importancia, debido a los fenómenos de evaporación o condensación y a la transferencia de calor en la interfaz entre la pared del ducto y flujo en dos fases. En el Apéndice B se presenta la derivación teórica de las ecuaciones macroscópicas con estas características.

### 2.3. Método del promedio en volumen

El conjunto de ecuaciones locales instantáneas definidas en la sección anterior no pueden ser resueltas para un sistema con un número desconocido de burbujas moviéndose en el líquido. En este estudio las ecuaciones se desarrollan para un volumen  $V$  con una frontera  $A$ , la cual es un subdominio del volumen material  $V$ . Cada punto de  $V$  es el centroide de un volumen promedio. Estos volúmenes son definidos suponiendo que el tamaño, forma y orientación son idénticos en todas las posiciones y tiempos. Una cantidad promedio se obtiene integrando una cantidad local sobre un volumen promedio. Los procesos promedio se usan para obtener un campo de cantidades promedio para cada fase. En este campo, un volumen promedio representa y caracteriza un punto físico sobre un elemento infinitesimal de volumen  $dV$  del campo promedio (Hassanizadeh y Gray, 1979).

Hassanizadeh y Gray (1979) presentan en forma simple el efecto del tamaño del volumen promedio sobre las cantidades promedio, considerando un tiempo fijo en el cual una cantidad promedio en la fase  $k$  se calcula en cualquier punto en una región promedio que varía de un tamaño muy pequeño a un tamaño muy grande. Cuando la región promedio es muy pequeña (mucho menor que  $l_k$ ), la cantidad promedio de la fase  $k$  es finita o cero. Al incrementar la región (menor o del orden de  $l_k$ ), la cantidad promedio calculada presenta un régimen de comportamiento fluctuante. Estas fluctuaciones tienden a disminuir conforme el tamaño de la región se incrementa y eventualmente dentro de algún intervalo de tamaños de la región promedio (mucho mayor que  $l_k$  y mucho menor que  $L$ ), la cantidad promedio calculada es independiente del tamaño de la región promedio. Con grandes incrementos de la región promedio, del orden de la longitud característica del medio  $L$ , se presentan inhomogeneidades del medio debido a efectos de estabilidad de las cantidades promedio. Entonces, la longitud

característica de la región promedio  $r_o$ , se define de tal forma que el promedio de las cantidades locales calculadas, sean insensibles a cambios pequeños sobre esta longitud, permitiendo obtener cantidades promedio significativas.

### *Operadores promedio y cantidades promedio*

Gray (1983) desarrolla expresiones para el método del volumen promedio dependientes en espacio y tiempo, mientras que en este estudio se restringe a un volumen promedio constante. Además, en este estudio se considera que las ecuaciones promedio obtenidas son independientes de la geometría del volumen promedio, siempre y cuando el volumen promedio sea independiente del tiempo, de la localización en el sistema de flujo en dos fases y que cumpla con la restricción impuesta de escalas de longitud dada por la Ec. (2.1). Para el caso en estudio, el volumen promedio se compone de las fases gas y líquida, donde el volumen promedio es constante y el volumen de cada una de las fases depende del tiempo:

$$V = V_g(t) + V_l(t) \quad (2.12)$$

Las cantidades promedio se asocian con cantidades locales a través de un operador promedio, el cual para una variable genérica  $\psi$  en la fase  $k$  se define por:

$$\langle \psi_k \rangle = \frac{1}{V} \int_{R_k(t)} \psi_k dV \quad (2.13)$$

donde  $\psi_k$  es el valor de  $\psi$  en la fase  $k$  y puede ser un escalar, vector o tensor. La expresión anterior se le conoce como *promedio de fase* y al promedio formado por la integración sobre la región ocupada por la fase  $k$  y dividida por el volumen de la misma región, define el *promedio fase intrínseco*:

$$\langle \psi_k \rangle^k = \frac{1}{V_k(t)} \int_{R_k(t)} \psi_k dV \quad (2.14)$$

En las Ecs. (2.13) y (2.14),  $R_k(t) \subset \mathbb{R}^3$  representa la región ocupada por la fase  $k$  y  $V_k(t)$  representa el volumen de la fase  $k$  asociado a la región  $R_k(t)$ . Los operadores promedio de fase y promedio de fase intrínseco están relacionados a través de la siguiente expresión:

$$\langle \psi_k \rangle = \varepsilon_k \langle \psi_k \rangle^k \quad (2.15)$$

donde  $\varepsilon_k(t)$  es la fracción volumen definido explícitamente por  $V_k(t)/V$ .

Otra cantidad promedio aplicada en este trabajo es el promedio en área:

$$\langle \psi_k \rangle_{km} = \frac{1}{A} \int_{A_{km}(t)} \psi_{km} dA \quad (2.16)$$

### *Teoremas de integrales promedios*

Para obtener la descripción promedio, dos teoremas de integrales (Slattery, 1967; Whitaker, 1967) son cruciales. Estos teoremas son una herramienta matemática que permiten intercambiar las variables entre derivadas promedio por derivadas de variables promedio. El primer teorema es la ecuación de transporte general, la cual relaciona la derivada promedio de una cantidad  $\psi_k$  con respecto al tiempo:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \psi_k w_{km} \cdot n_{km} dA \quad (2.17)$$

El segundo teorema es conocido como teorema promedio espacial. Para cualquier cantidad  $\psi_k$  asociada con la fase  $k$ , este teorema está dado por:

$$\langle \nabla \psi_k \rangle = \nabla \langle \psi_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \psi_k \mathbf{n}_{km} dA \quad (2.18)$$

Sí  $\psi_k$  es igual a 1, los teoremas anteriores resultan en:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{w}_{lg} dA \quad (2.19)$$

$$\nabla \varepsilon_k = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} dA \quad (2.20)$$

#### 2.4 Ecuación de masa promedio en volumen instantánea

Aplicando el operador promedio [Ec. (2.13)] en la ecuación de masa local instantánea dada por la Ec. (2.2), se tiene que:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_k \rangle = 0 \quad (2.21)$$

Sí la forma vectorial del teorema del promedio espacial, dada por la Ec. (2.17), se usa en la Ec. (2.21) y el resultado obtenido se combina con la Ec. (2.19), se encuentra que:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{km}) dA = 0 \quad (2.22)$$

Los términos de esta ecuación están relacionados con la compresibilidad macroscópica, los efectos convectivos y la transferencia de masa interfacial, respectivamente. La condición de impenetrabilidad interfacial definida por la Ec. (2.5), permite simplificar la expresión anterior:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_k \rangle = 0 \quad (2.23)$$

La velocidad superficial (velocidad promedio de fase) y la velocidad promedio intrínseca se

relacionan a través de la Ec. (2.15):

$$\langle v_k \rangle = \varepsilon_k \langle v_k \rangle^k \quad (2.24)$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (2.23) y expandiendo términos se obtiene:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle v_k \rangle^k + \langle v_k \rangle^k \cdot \nabla \varepsilon_k = 0 \quad (2.25)$$

## 2.5 Ecuación de cantidad de movimiento promedio en volumen instantánea

Aplicando el operador promedio en la ecuación de cantidad de movimiento local instantánea [Ec. (2.3)]:

$$\left\langle \rho_k \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \rho_k \nabla \cdot (v_k v_k) \rangle + \langle \nabla p_k \rangle - \langle \nabla \cdot T_k \rangle - \langle \rho_k g \rangle = 0 \quad (2.26)$$

Aplicando los teoremas de promedio espacial y tiempo, definidos por las Ecs. (2.17) y (2.18), a los términos de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\left\langle \rho_k \frac{\partial v_k}{\partial t} \right\rangle = \rho_k \frac{\partial \langle v_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k v_k w_{km} \cdot n_{km} dA \quad (2.27)$$

$$\langle \rho_k \nabla \cdot (v_k v_k) \rangle = \rho_k \nabla \cdot \langle v_k v_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k v_k v_k \cdot n_{km} dA \quad (2.28)$$

$$\langle \nabla p_k \rangle = \nabla \langle p_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_{km} n_{km} dA \quad (2.29)$$

$$\langle \nabla \cdot T_k \rangle = \nabla \cdot \langle T_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} : T_{km} dA \quad (2.30)$$

$$\langle \rho_k g \rangle = \varepsilon_k \rho_k g \quad (2.31)$$

En diversas aplicaciones como este estudio, la densidad es un parámetro que no cambia

significativamente en volúmenes grandes de flujo, en consecuencia se permite ignorar variaciones de  $\rho_k$  dentro del volumen promedio. La Ec. (2.30) puede ser simplificada, observando que los esfuerzos viscosos interfaciales son mucho mayores que los esfuerzos viscosos de las fases, y de acuerdo con la siguiente estimación de orden de magnitud de los términos viscosos:

$$\nabla \cdot \langle T_k \rangle = O \left[ \frac{\langle T_k \rangle}{L_T} \right] \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_{km} dA = O \left[ \frac{\left[ \frac{l_g}{\delta} \right] \langle T_k \rangle}{L_\varepsilon} \right] \quad (2.33)$$

donde  $L_T$  es la longitud característica asociada con los cambios en  $\langle T_k \rangle$  y  $L_\varepsilon$  es la longitud característica asociada con los cambios en  $\varepsilon_k$ . El orden de magnitud del tensor de esfuerzos viscosos dentro de una capa límite de espesor  $\delta$  en el líquido, muy cerca de la superficie de la burbuja es:

$$T_{km} = O \left[ \left[ \frac{l_g}{\delta} \right] \langle T_k \rangle \right] \quad (2.34)$$

y el orden de magnitud para la integral se obtiene de la Ec. (2.20):

$$\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} dA = O \left[ \frac{1}{L_\varepsilon} \right] \quad (2.35)$$

Es importante precisar que en las Ecs. (2.33)-(2.35), el término  $(l_g/\delta)$  es mucho mayor que 1. Sí  $L_T = O(L_\varepsilon)$ , se puede observar que el orden de magnitud del término  $\nabla \cdot \langle T_k \rangle$  en la Ec. (2.32) es mucho mayor que la integral sobre el área interfacial en la Ec. (2.33):

$$\nabla \cdot \langle T_k \rangle \ll \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_{km} dA \quad (2.36)$$

y en consecuencia, la Ec. (2.30) se simplifica dando

$$\langle \nabla \cdot T_k \rangle \approx \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_{km} dA \quad (2.37)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.27)- (2.30), (2.31) y (2.37) y (2.23) en la Ec. (2.26), se encuentra que:

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle v_k \rangle^k) + \rho_k \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle v_k v_k \rangle^k) + \nabla (\varepsilon_k \langle p_k \rangle^k) \\ - \varepsilon_k \rho_k g_k = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_{km} n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_{km} dA \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para obtener el resultado anterior se aplicó la relación entre el promedio de fase y promedio de fase intrínseco, dado por la Ec. (2.15) y la condición de transferencia de masa interfacial nula, dada por la Ec. (2.5). Los términos de la ecuación anterior involucran integrales de variables locales instantáneas y productos entre estas. Entonces, el segundo término del lado izquierdo de la Ec. (2.38), se descompone aplicando la siguiente definición de las desviaciones espaciales (Gray, 1975; Hassanizadeh y Gray, 1979).

$$v_k = \langle v_k \rangle^k + \tilde{v}_k \quad (2.39)$$

donde  $\tilde{v}_k$  representa las desviaciones espaciales del vector velocidad alrededor del vector velocidad promedio  $\langle v_k \rangle^k$  del vector velocidad local instantáneo. Entonces:

$$\langle v_k v_k \rangle = \varepsilon_k \langle v_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \tilde{v}_k \tilde{v}_k \rangle^k \quad (2.40)$$

donde se consideran las siguientes propiedades del volumen promedio:

$$\langle \langle v_k \rangle^k \rangle^k = \langle v_k \rangle^k \quad (2.41)$$

$$\langle \langle v_k \rangle^k \tilde{v}_k \rangle^k = \langle \tilde{v}_k \langle v_k \rangle^k \rangle^k = 0 \quad (2.42)$$

de acuerdo al requerimiento que  $l_{vk} \ll L_{vk}$  y donde  $l_{vk}$  es la longitud característica de las desviaciones espaciales de la velocidad, y  $L_{vk}$  es la longitud característica de la velocidad promedio en volumen. La sustitución de la Ec. (2.40) en el término convectivo de la Ec. (2.38) da lugar a un término convectivo promedio junto con un término dispersivo:

$$\rho_k \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle v_k v_k \rangle^k) = \rho_k \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle v_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) - \nabla \cdot (\varepsilon_k T_k^{Re}) \quad (2.43)$$

donde (Drew y Lahey, 1979; Pauchon y Banerjee, 1988; Drew, 1992):

$$T_k^{Re} = - \rho_k \langle \tilde{v}_k \tilde{v}_k \rangle^k \quad (2.44)$$

El término dispersivo definido por la ecuación anterior, son atribuidos a la presencia de las fases y no se refieren a los esfuerzos de Reynolds clásicos en flujo turbulento, las cuales representan la correlación de las fluctuaciones (temporales) de la velocidad.

Para la presión local instantánea, se aplica la descomposición espacial de Banerjee y Chan (1980), la cual se define con la siguiente suma de términos:

$$p_k = \langle p_k \rangle^k + \langle \Delta p_{km} \rangle + \tilde{p}_{km} \quad (2.45)$$

donde la diferencia de los promedios de la presión está definida por:

$$\langle \Delta p_{km} \rangle = \langle p_k \rangle_{km} - \langle p_k \rangle^k \quad (2.46)$$

donde el primer término es el promedio en área de la presión y el segundo término es el promedio intrínseco de la presión. Las desviaciones espaciales de la presión interfacial son:

$$\tilde{p}_{km} = p_k - \langle p_k \rangle_{km} \quad (2.47)$$

Esta descomposición tiene la ventaja de distinguir la contribución de los efectos de cantidad de movimiento interfacial involucrados. Sustituyendo las Ecs. (2.43) y (2.46) en la Ec. (2.38):

$$\begin{aligned} & \rho_k \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle v_k \rangle^k) + \rho_k \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle v_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \varepsilon_k \nabla \langle p_k \rangle^k - \langle \Delta p_{km} \rangle \nabla \varepsilon_k \\ & - \nabla \cdot (\varepsilon_k \tau_k^{Re}) - \varepsilon_k \rho_k \mathbf{g} = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{n}_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{kg}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{T}_{km} dA \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde

$$\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{n}_{km} dA = - \left( \langle p_k \rangle^k + \langle \Delta p_{km} \rangle \right) \nabla \varepsilon_k + \frac{1}{V} \int_{A_{kg}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{n}_{km} dA \quad (2.49)$$

El significado de cada uno de los términos de la Ec. (2.48) es el siguiente: el primer término del miembro derecho es la aceleración temporal o acumulación; el segundo término son los efectos convectivos; el tercer término son los efectos de presión; el cuarto término es la diferencia de los promedios de la presión; el quinto término es dispersivo; el sexto término son las fuerzas de gravedad; la primera integral es otro término dispersivo y la segunda integral son los esfuerzos viscosos interfaciales asociados con las fuerzas de arrastre.

## 2.6 Condiciones de salto promedio instantánea

Las condiciones de salto locales instantáneas [Ecs. (2.5) y (2.6)] se promedian con respecto a la región interfacial. La condición de salto de masa es nula de acuerdo a la condición de impenetrabilidad dada por la Ec. (2.5), y la condición de salto de cantidad de movimiento interfacial [Ec. (2.6)] toma la siguiente forma después de efectura el promedio:

$$\begin{aligned}
(\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg}) \nabla \varepsilon_g &= \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (-\bar{p}_{lg} \mathbf{n}_{lg} + \mathbf{n}_{lg} \cdot \mathbf{T}_{lg}) dA \\
&+ \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (-\bar{p}_{gl} \mathbf{n}_{gl} + \mathbf{n}_{gl} \cdot \mathbf{T}_{gl}) dA \\
- 2 \langle H_g \rangle_{lg} \sigma \nabla \varepsilon_g &+ \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} 2 \tilde{H}_g \sigma \mathbf{n}_{gi} dA \quad \text{en} \quad A_{lg}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Esta ecuación describe la transferencia de cantidad de movimiento interfacial y acopla las ecuaciones de cantidad de movimiento promedio volumétrico instantánea de la fase gas y la fase líquida a través de las interacciones interfaciales.

## 2.7 Conclusiones y discusión

Se presentó la derivación teórica de las ecuaciones promedio de masa y cantidad de movimiento, definidas por las Ecs. (2.25) y (2.48) respectivamente, para describir los procesos de flujo burbujeante isotérmico en términos de variables promedio empleando un planteamiento matemático en tres dimensiones y régimen transitorio.

El método del volumen promedio, además de describir un campo de cantidades promedio para cada una de las fases, relaciona los efectos de las fases con los efectos interfaciales, y esto se lleva a cabo con la condición de salto de cantidad de movimiento, Ec. (2.50). Con respecto a este punto, Soria y de Lasa (1991) definen los procesos de fenómenos de transporte para sistemas multifásicos para  $k$  fases,  $km$  interfases y  $kmn$  líneas de contacto. Concluyen que el flujo en las regiones ocupadas por las fases fluye hacia las regiones interfaciales, el flujo de las regiones interfaciales fluye hacia la región ocupada por las líneas de contacto y éstas hacia el punto común (4 fases en contacto). Estos autores denominaron a este proceso flujos cascada.

Es importante mencionar que el método del volumen promedio representa un mapeo de los campos locales a campos promedio (se puede interpretar como un mapeo de muchos a 1); en este proceso la estructura del flujo burbujeante se pierde dando lugar a una mezcla de flujo en dos fases homogénea, en donde las variables promedio son bien comportadas.

Existen procesos en donde los efectos viscosos adquieren gran importancia, tal es el caso de medios porosos. Para un fluido Newtoniano e incompresible, se pueden sustituir los esfuerzos viscosos definidos por la Ec. (2.4) en la Ec. (2.30), obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \cdot \mathbf{T}_k \rangle &= \mu_k \nabla^2 \langle \mathbf{v}_k \rangle + \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \mathbf{v}_k dA \right] \\
 &\quad - \mu_k \nabla \left[ \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} \right] + \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \mathbf{v}_k dA \right]^T \\
 &\quad + \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \nabla \mathbf{v}_k dA \right] + \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \nabla \mathbf{v}_k^T dA \right]
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Como se puede observar, esta expresión tiene 6 términos viscosos, de los cuales el segundo y el cuarto términos del miembro derecho se pueden despreciar por un análisis de orden de magnitud (Whitaker, 1986a). El primer término del miembro derecho es conocido como corrección de Brinkmann y el término relacionado con la derivada cruzada en espacio tiempo, esta asociado con la compresibilidad promedio.



### 3. RELACIONES DE CERRADURA DEL MODELO DE DOS FLUIDOS UTILIZANDO UN ENFOQUE DE FLUJO POTENCIAL

El objetivo de este capítulo es presentar la derivación teórica de las relaciones de cerradura para obtener un conjunto completo de ecuaciones promedio del modelo de dos fluidos en régimen de flujo burbuja, cuya derivación se desarrolló en el Capítulo 2. Uno de los principales problemas de las técnicas de promediar es la obtención de un conjunto abierto de ecuaciones promediadas. En el caso del promedio volumétrico el problema es el mayor número de incógnitas (variables y desviaciones que llevan a los términos de cerradura) que de ecuaciones. Resolver este problema en forma teórica no es tarea sencilla y se deben proponer o derivar ecuaciones independientes para obtener un conjunto cerrado de ecuaciones.

El modelo de dos fluidos, bajo las hipótesis mencionadas en el Capítulo 2, contiene cuatro términos de cerradura para cada una de las fases, como se aprecia en las Ecs. (2.48) y (2.50): (1) integral sobre el área interfacial de las desviaciones espaciales de la presión, (2) diferencia de los promedios de la presión, (3) promedio intrínseco de la diáda de las desviaciones espaciales de velocidad y (4) integral sobre el área interfacial de los esfuerzos viscosos interfaciales. Para la cuarta cerradura existen expresiones reportadas en la literatura considerando un factor de fricción interfacial, y las demás cerraduras se formularon como un problema asociado con las desviaciones espaciales alrededor de los valores promedio de las variables locales instantáneas. Para obtener las cerraduras en función de las variables dependientes se aplicó en forma sistemática la teoría de flujo potencial. Se consideraron dos aproximaciones para desarrollar las cerraduras: (1) celda unitaria concéntrica y (2) celda

unitaria excéntrica. En cada una de estas aproximaciones se analizan dos casos: (1) flujo alrededor de una esfera y (2) burbuja esférica en movimiento. Los resultados obtenidos en el caso de la celda unitaria concéntrica se compararon con los reportados en la literatura.

Los resultados obtenidos con la celda unitaria excéntrica son los primeros de su tipo por lo que no fue posible establecer comparaciones, aunque puede considerarse como una generalización del modelo de celda unitaria concéntrica ya muy desarrollado en la literatura (Zuber, 1964; Voinov, 1973; van Wijngaarden, 1976; Stuhmiller, 1977; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1988; Pauchon y Smereka, 1992).

### 3.1. Introducción

Las ecuaciones promedio de transporte de masa y cantidad de movimiento están dadas por las Ecs. (2.25) y (2.48). Las siguientes hipótesis permiten simplificar las ecuaciones promediadas:

- H.1. La diferencia de los promedios de la presión es aproximadamente cero en la fase dispersa,  $\langle \Delta p_{gl} \rangle \approx 0$ , Ec. (2.46).
- H.2. Los esfuerzos de Reynolds son despreciables ( $\tau_g^{Re} \approx 0$ ) en la fase dispersa.
- H.3. Sistema de burbujas monodisperso.
- H.4. El sistema está formado totalmente y únicamente por las fases gas y líquida (condición de saturación).
- H.5. Todas las burbujas se desplazan a la misma velocidad dentro del volumen promedio.

Ecuación de transporte de masa promediada, fase líquida:

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l) = 0 \quad (3.1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento promediada, fase líquida:

$$\begin{aligned} \rho_l \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l) + \rho_l \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l) + \varepsilon_l \nabla \langle p_l \rangle^l - \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_l \\ - \nabla \cdot (\varepsilon_l \mathbf{T}_l^{Re}) - \varepsilon_l \rho_l \mathbf{g} = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} \mathbf{n}_{lg} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \mathbf{n}_{lg} \cdot \mathbf{T}_{lg} dA \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ecuación de transporte de masa promediada, fase gas:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_g \langle \mathbf{v}_g \rangle^g) = 0 \quad (3.3)$$

Ecuación de cantidad de movimiento promediada, fase gas [de H.1 y H.2 en la Ec. (2.48)]:

$$\begin{aligned} \rho_g \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_g \langle \mathbf{v}_g \rangle^g) + \rho_g \nabla \cdot (\varepsilon_g \langle \mathbf{v}_g \rangle^g \langle \mathbf{v}_g \rangle^g) + \varepsilon_g \nabla \langle p_g \rangle^g \\ - \varepsilon_g \rho_g \mathbf{g} = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{gl} \mathbf{n}_{gl} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \mathbf{n}_{gl} \cdot \mathbf{T}_{gl} dA \end{aligned} \quad (3.4)$$

De la H.3, se simplifica la condición de salto de cantidad de movimiento promedio interfacial, definida por la Ec. (2.50), obteniéndose:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} \mathbf{n}_{lg} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \mathbf{n}_{lg} \cdot \mathbf{T}_{lg} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{gl} \mathbf{n}_{gl} dA \\ + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \mathbf{n}_{gl} \cdot \mathbf{T}_{gl} dA = (\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg} + 2 H_g \sigma) \nabla \varepsilon_g \quad \text{en } A_{lg} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $\langle H_g \rangle_{lg} = H_g$  de acuerdo con H.3, y la H.4 se traduce en:

$$\varepsilon_l + \varepsilon_g = 1 \quad (3.6)$$

El conjunto de las Ecs. (3.1)-(3.6) describen los procesos físicos de flujo burbujeante, las cuales no incluyen los efectos viscosos debido a las paredes del ducto vertical, es decir, son válidas para la región homogénea de la mezcla bifásica en el interior del ducto.

Las variables dependientes de este conjunto de ecuaciones son:

$$\varepsilon_l, \quad \langle v_l \rangle^l, \quad \langle p_l \rangle^l, \quad \varepsilon_g, \quad \langle v_g \rangle^g, \quad \langle p_g \rangle^g \quad (3.7)$$

Los términos de cerradura para la fase líquida son:

$$\langle \Delta p_{lg} \rangle = \langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_l \rangle^l \quad (3.8a)$$

$$T_l^{Re} = -\rho_l \langle \tilde{v}_l \tilde{v}_l \rangle^l \quad (3.8c)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} n_{lg} dA \quad (3.8c)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{lg} \cdot T_{lg} dA \quad (3.8d)$$

y los términos de cerradura para la fase gaseosa son:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{gl} n_{gl} dA \quad (3.9a)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{gl} \cdot T_{gl} dA \quad (3.9b)$$

El objetivo de este capítulo es expresar este grupo de cerraduras como función de las variables dependientes. Para que el resultado sea consistente para todo el conjunto de

términos de cerradura, se aplica sistemáticamente la teoría de flujo potencial y se determina su relación con la diferencia de los promedios de la presión y el promedio de la diada de las desviaciones espaciales de la velocidad. Con estas relaciones se calcula la integral sobre el área interfacial de las desviaciones espaciales de la presión. Los efectos de fricción interfacial se concentran en una capa límite donde los efectos viscosos son importante y fuera de la capa límite se considera que el flujo se comporta como ideal. Con este enfoque se puede aplicar la teoría de flujo potencial en forma consistente.

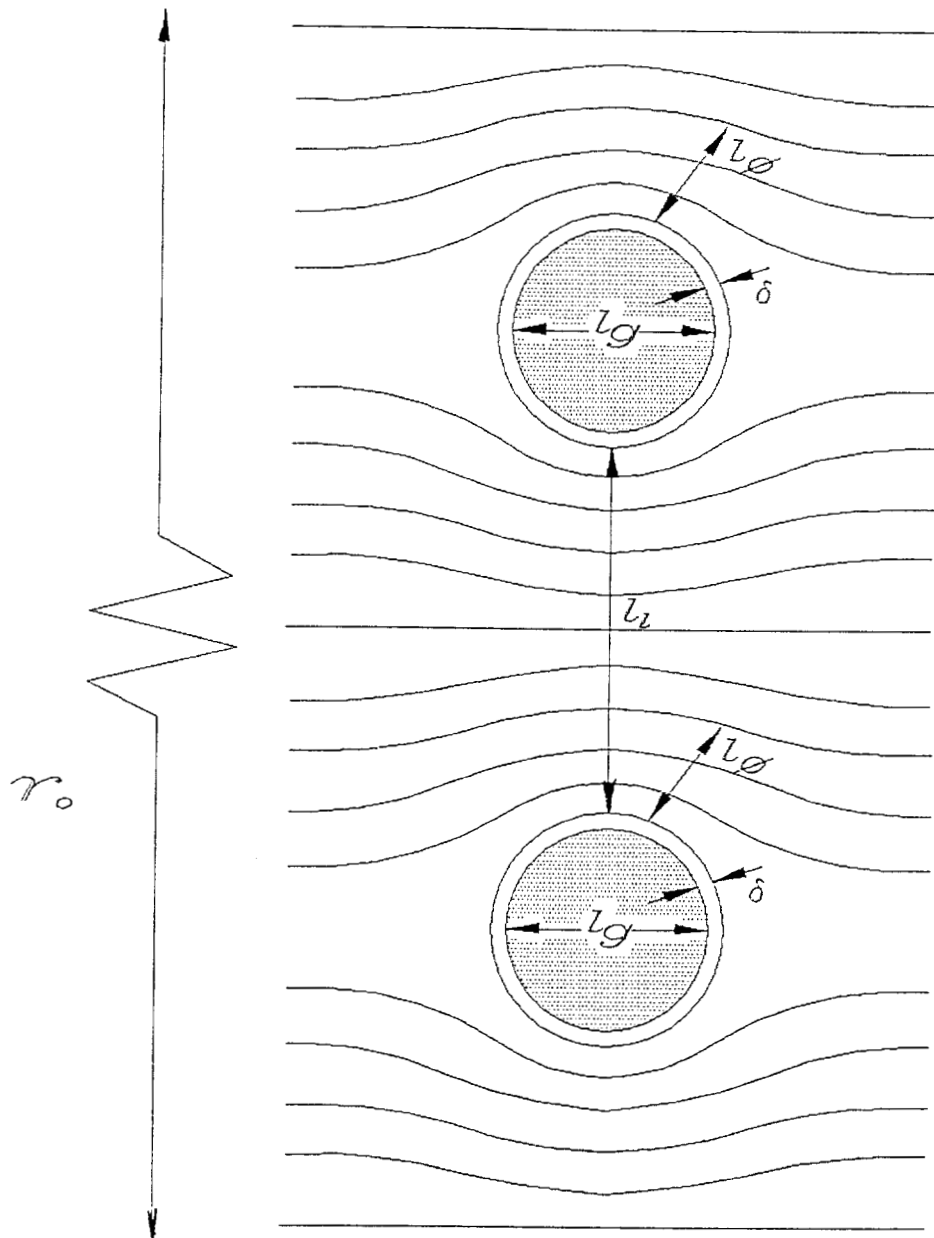
### 3.2. Estructura de la celda

En la Figura 3.1 se presenta un sistema idealizado de dos burbujas representativas de un conjunto de ellas contenidas en el volumen promedio. En esta figura se muestran las longitudes características: de la capa límite  $\delta$ , de las desviaciones espaciales del potencial  $l_\phi$  y de la fase gas  $l_g$  y de la fase líquida  $l_l$ . Para derivar las cerraduras aplicando la teoría de flujo potencial se propone la siguiente restricción de escalas de longitud:

$$\delta \ll l_\phi < l_g, l_l \ll r_o \quad (3.10)$$

donde  $r_o$  es la longitud característica del volumen promedio. Esta restricción impuesta permite hacer importantes simplificaciones para obtener las relaciones de cerradura.

La hipótesis de que las longitudes características de las fases  $l_g$  y  $l_l$ , sean mayores que la longitud característica de las desviaciones espaciales del potencial  $l_\phi$  permite establecer que bajo estas condiciones no existe interacción hidrodinámica entre burbujas adyacentes, y por lo tanto representa una simplificación importante.



**Figura 3.1.** Longitudes características:  $\delta$  espesor de la capa límite,  $l_\phi$  longitud característica de las desviaciones del potencial de velocidad,  $l_g$  longitud característica de la fase gas,  $l_l$  longitud característica de la fase líquida y  $r_0$  es la longitud característica del volumen promedio.

Los órdenes de magnitud de  $\delta$  y  $l_k$  ( $k = l, g$ ) son de  $10^{-5}$ m y  $10^{-2}$ m, respectivamente, donde  $\delta$  es proporcional a la raíz cuadrada del producto de la viscosidad cinemática por el radio de curvatura de la superficie dividido por la velocidad promedio de la fase líquida (Currie, 1974, pg. 272). Los esfuerzos viscosos interfaciales se concentran o sólo actúan dentro de la capa límite que rodea la superficie de la burbuja, y debido a la consideración inicial de flujo incompresible, el flujo fuera de la capa límite puede ser considerado como ideal, y por lo tanto se puede aplicar la teoría de flujo potencial. El efecto inercial es proporcional al volumen, por lo tanto, el efecto inercial de la capa límite es despreciable con respecto a los efectos inerciales fuera de ésta, es decir,  $\rho (\langle v_l \rangle^l)^2 \theta \ll \rho (\langle v_l \rangle^l)^2 l_k$ , puesto que  $\theta < \delta$  (Currie, 1993, pg. 278), donde  $\theta$  es el espesor de momento.

### 3.3 Promedio interfacial de los esfuerzos viscosos

En esta sección se presentan algunas alternativas para calcular las fuerzas de arrastre que actúan sobre una burbuja. Las fuerzas de arrastre están relacionadas con la integral sobre el área interfacial de los esfuerzos viscosos, dada por la Ecs. (3.8d) y la Ec. (3.9b),

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{lg} \cdot T_{lg} dA = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{gl} \cdot T_{gl} dA = \varepsilon_g F_D \quad (3.11)$$

donde  $F_D$  es la fuerza de arrastre interfacial. Para flujo burbuja con tamaño uniforme la fuerza de arrastre interfacial está dada por Ishii y Mishima (1984):

$$F_D = \frac{3}{8} \rho_l \frac{C_D}{R_b} |v_r|^2 \left[ \frac{v_r}{|v_r|} \right] \quad (3.12)$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de arrastre interfacial, el cual depende del régimen de flujo y  $R_b$  es el radio promedio de la burbuja. El coeficiente de arrastre para flujo con burbujas deformables está dado por Harmathy (1960):

$$C_D = \frac{4}{3} R_b \left[ \frac{g (\rho_l - \rho_g)}{\sigma (1 - \varepsilon_g)} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\sigma$  es la tensión superficial. El coeficiente de arrastre para régimen de Stokes está dado por Ishii y Mishima (1984):

$$C_D = \frac{24}{N_{Re}} \quad (3.14)$$

donde  $N_{Re}$  es el número de Reynolds definido por estos mismos autores como:

$$N_{Re} = \frac{2 R_b \rho_l (\langle v_{zg} \rangle^g - \langle v_{zl} \rangle^l)}{\mu_m} \quad (3.15)$$

y donde  $\mu_m$  es la viscosidad de mezcla definida por Ishii y Zuber (1979):

$$\mu_m = \mu_l (1 - \varepsilon_g)^{-2.5} (\mu_g + 0.4 \mu_l) / (\mu_g + \mu_l) \quad (3.16)$$

La fuerza de arrastre interfacial también se puede escribir en términos del factor de fricción interfacial como:

$$F_D = \rho_l \frac{f_i}{D_H} |v_r|^2 \left[ \frac{v_r}{|v_r|} \right] \quad (3.17)$$

donde  $D_H$  es el diámetro hidráulico y el factor de fricción interfacial  $f_i$  está dada por Ishii y Zuber (1979):

$$f_i = 9 \frac{D_H}{R_b} \frac{(1 + 0.1 N_{Re}^{0.75})}{N_{Re}} \quad (3.18)$$

### 3.4 Planteamiento para calcular la integral de las desviaciones espaciales de la presión

Las desviaciones espaciales de la presión interfacial de la fase líquida están dadas por la Ec. (2.47), en donde hay que evaluar la integral de las desviaciones para  $\bar{p}_{lg}$  Ec. (2.48).

Para realizar esto es necesario proponer expresiones para la presión local instantánea y para la presión promedio. Una relación independiente que permite expresar dichas presiones es la ecuación de Bernoulli (Currie, 1974):

$$\frac{p_l}{\rho_l} - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = f(t) \quad (3.19)$$

donde  $\phi$  es el potencial de velocidad y  $f(t)$  es una función que depende del tiempo. Para un fluido ideal e irrotacional, la velocidad local del fluido y el potencial de velocidad se relacionan a través de:

$$v_l = - \nabla \phi \quad (3.20)$$

El promedio intrínseco de la Ecuación de Bernoulli, es el siguiente:

$$\frac{\langle p_l \rangle^l}{\rho_l} + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l + \frac{1}{2} \langle \nabla \phi \cdot \nabla \phi \rangle^l = f(t) \quad (3.21)$$

Restando la Ec. (3.21) en la Ec. (3.19):

$$\frac{p_l - \langle p_l \rangle^l}{\rho_l} = - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l \right] + \frac{1}{2} \left( |\nabla \phi|^2 - \langle |\nabla \phi|^2 \rangle^l \right) \quad (3.22)$$

donde

$$|\nabla \phi|^2 = \nabla \phi \cdot \nabla \phi \quad (3.23)$$

Integrando sobre el área interfacial la Ec. (3.22) se obtiene que:

$$\frac{1}{\rho_l V} \int_{A_{lg}(t)} (p_l - \langle p_l \rangle^l) \mathbf{n}_{lg} dA = \Xi_1 + \Xi_2 \quad (3.24)$$

donde  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$ , están dados por (Apéndice C):

$$\begin{aligned} \Xi_1 = & - \langle \nabla \phi \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} - \varepsilon_l \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \tilde{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \right] \\ & - \varepsilon_l \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \tilde{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \nabla \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \Xi_2 = & \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \nabla \phi \nabla \phi \rangle^l \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (\nabla \phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \\ & - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \phi \nabla \phi \rangle^l \right) + \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} (\phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para simplificar los términos  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$  se usa la condición de impenetrabilidad interfacial, Ec.

(2.5). Entonces, sustituyendo la Ec. (3.20) en la Ec. (2.5) para  $k = l$  se obtiene:

$$- \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_{lg} = \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} , \quad \text{en} \quad A_{lg} \quad (3.27)$$

Lo anterior permite escribir dos relaciones más, válidas también en la región interfacial, considerando el límite desde el interior de la fase líquida,

$$\nabla \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_{lg} = - \nabla \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} , \quad \text{en} \quad A_{lg} \quad (3.28a)$$

$$\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_{lg} = - \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} , \quad \text{en} \quad A_{lg} \quad (3.28b)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la Ec. (3.24) (Apéndice C), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_l V} \int_{A_{lg}(t)} (p_l - \langle p_l \rangle^l) \mathbf{n}_{lg} dA &= \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \mathbf{v}_l \rangle^l) - \varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \\
&+ \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \tilde{\phi} \tilde{\mathbf{v}}_l \rangle^l) \right] - \varepsilon_l \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \tilde{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \right] \\
&- \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \tilde{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Como

$$\nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \mathbf{v}_l \rangle^l) = \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \langle \mathbf{v}_l \rangle^l) + \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \tilde{\mathbf{v}}_l \tilde{\mathbf{v}}_l \rangle^l) \tag{3.30}$$

entonces la Ec. (3.29) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_l V} \int_{A_{lg}(t)} (p_l - \langle p_l \rangle^l) \mathbf{n}_{lg} dA &= \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \tilde{\mathbf{v}}_l \tilde{\mathbf{v}}_l \rangle^l) + \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \tilde{\phi} \tilde{\mathbf{v}}_l \rangle^l) \right] \\
- \varepsilon_l \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \right] &\left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \tilde{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \right] - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \tilde{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

que es el primer término del lado derecho de la Ec. (2.58). Para desarrollar el último término de esta ecuación se sustituye la condición de impenetrabilidad, Ec. (2.5) para  $k = g$ :

$$\mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} = \left( \langle \mathbf{v}_g \rangle^g + \tilde{\mathbf{v}}_g \right) \cdot \mathbf{n}_{lg}, \quad \text{en} \quad A_{lg} \tag{3.32}$$

Como todas las burbujas se desplazan a la misma velocidad, hipótesis H.5, entonces el término de dispersión es nulo y la Ec. (3.32) se simplifica:

$$\mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} = \langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \mathbf{n}_{lg}, \quad \text{en} \quad A_{lg} \tag{3.33}$$

Aplicando esta condición en el último término de la Ec. (3.31), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} \mathbf{n}_{lg} dA = \nabla \cdot (\varepsilon_l \mathbf{T}_l^{Re}) + \rho_l \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \varepsilon_l^{-1} \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \tilde{\phi} \tilde{\mathbf{v}}_l \rangle^l) \right] \\ - \rho_l \varepsilon_l \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_l \rangle^l + \langle \mathbf{v}_g \rangle^g) \cdot \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \right] + \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_l \end{aligned} \quad (3.34)$$

En el miembro derecho de esta ecuación,  $\mathbf{T}_l^{Re}$  son los esfuerzos de Reynolds definidos por la Ec. (3.8b), el segundo término representa las fuerzas por unidad de volumen debidas a las desviaciones espaciales del potencial de velocidad; el tercer término está relacionado con los efectos de masa virtual y el cuarto término es el efecto de las fuerzas debido a la diferencia de los promedios de presión para la fase líquida, Ec. (3.8a).

De acuerdo con el resultado anterior, para determinar completamente el problema de cerradura es necesario encontrar una relación funcional de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad, de las desviaciones espaciales del vector velocidad y de la diferencia de los promedios de la presión para la fase líquida. Para encontrar estas relaciones funcionales se establecen modelos geométricos para una celda unitaria. Con este modelo se puede aproximar la estructura del flujo en dos fases, la cual ha quedado aglutinada dentro de integrales en el proceso de promediar. El modelo de celda unitaria que se analiza a continuación es el de:

- Celda unitaria excéntrica con burbuja esférica en movimiento.

Posteriormente se considerarán casos límite y se obtendrán como casos particulares los de:

- Celda unitaria excéntrica con burbuja esférica en reposo y en movimiento.
- Celda unitaria concéntrica con la burbuja esférica en reposo.

### 3.5 Modelo de celda unitaria excéntrica

En esta sección se presenta el análisis de una celda unitaria excéntrica para determinar las cerraduras que aparecen en la Ec. (3.34). En la Figura 3.2 se presenta dicha celda cuya característica es el desplazamiento que presenta la burbuja esférica con respecto al centroide de la esfera exterior.

La posición de la burbuja esférica en una celda unitaria excéntrica no se encuentra en el centroide de la esfera exterior, y por lo tanto, el radio con respecto a esta posición (distancia del punto excéntrico hacia algún punto en la superficie de la esfera exterior) no es constante como en el caso de la celda unitaria concéntrica. Entonces para determinar el radio excéntrico se obtiene una expresión en función de la posición de la burbuja esférica (cuyo sistema de referencia excéntrico se encuentra en el centroide de la burbuja esférica), de las coordenadas del sistema excéntrico y del radio de la esfera exterior con respecto al centroide, como a continuación se presenta.

El radio de la esfera externa en una celda unitaria concéntrica está dado por:

$$b^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 \quad (3.35)$$

donde  $x_o$ ,  $y_o$ ,  $z_o$  son las coordenadas cartesianas de la celda unitaria concéntrica. Sea  $x$ ,  $y$ ,  $z$  las coordenadas cartesianas de la celda unitaria excéntrica y  $(h, k, l)$  un punto con respecto al sistema concéntrico, entonces se pueden establecer las relaciones entre el sistema coordenado concéntrico y el sistema coordenado excéntrico:

$$x_o = x + h \quad (3.36)$$

$$y_o = y + k \quad (3.37)$$

$$z_o = z + l \quad (3.38)$$

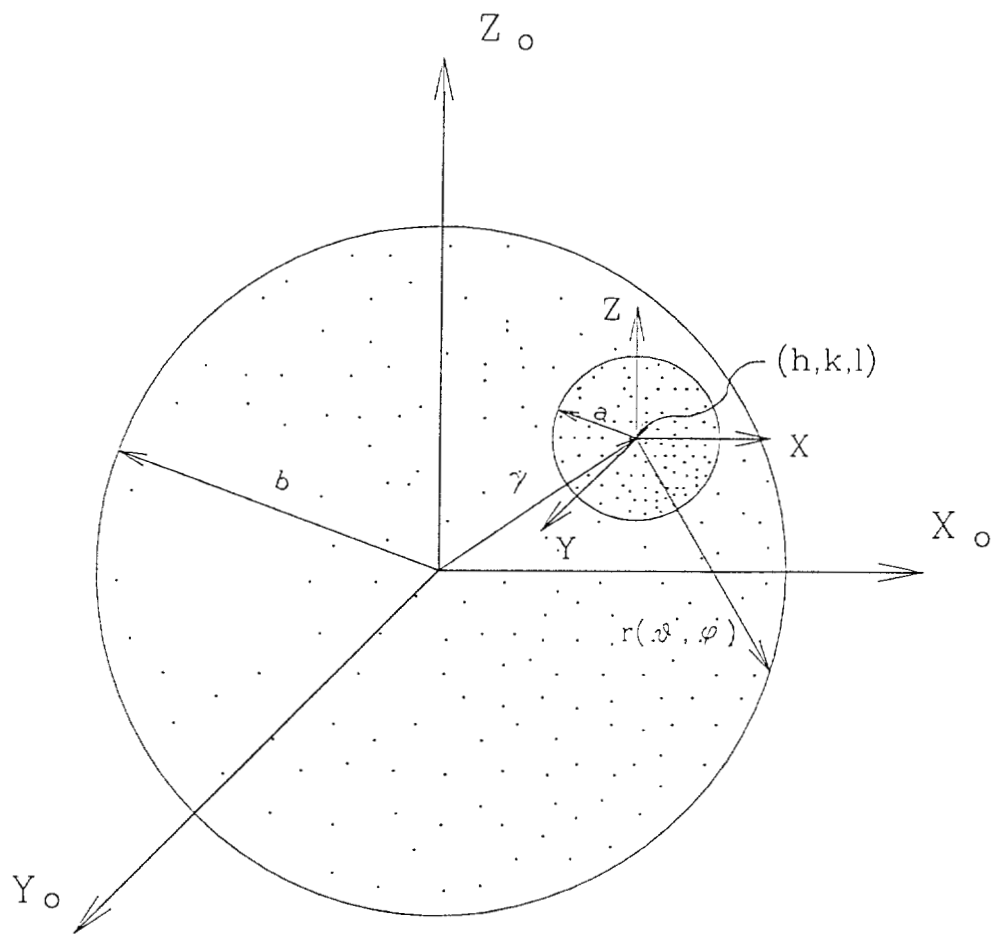


Figura 3.2. Celda unitaria excéntrica

Expresando el sistema coordenado excéntrico  $x, y, z$  en coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad (3.39)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad (3.40)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.41)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.39)-(3.41) en las Ecs. (3.36)-(3.38):

$$x_o = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + h \quad (3.42)$$

$$y_o = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + k \quad (3.43)$$

$$z_o = r \cos \theta + l \quad (3.44)$$

donde  $r$  es el radio del sistema excéntrico. Sustituyendo estas ecuaciones en la Ec. (3.35):

$$r^2 + r [g(\varphi) \operatorname{sen} \theta + l \cos \theta] + \gamma^2 = b^2 \quad (3.45)$$

donde  $\gamma$  es la distancia de la burbuja esférica con respecto al sistema de referencia concéntrico:

$$\gamma^2 = h^2 + k^2 + l^2 \quad (3.46)$$

y

$$g(\varphi) = h \cos \varphi + k \operatorname{sen} \varphi \quad (3.47)$$

Resolviendo la Ec. (3.45) para  $r$ , se obtiene:

$$r(\theta, \varphi) = - [g(\varphi) \operatorname{sen} \theta + l \cos \theta] + \sqrt{[g(\varphi) \operatorname{sen} \theta + l \cos \theta]^2 + (b^2 - \gamma^2)} \quad (3.48)$$

Existe un número infinito de posiciones  $\gamma$  con coordenadas  $(h, k, l)$  en donde la burbuja esférica interna puede ser colocada en cualquier punto interior de la esfera exterior,

por lo tanto la esfera externa se dividió en 8 partes iguales con respecto a su centroide ( $x_o$ ,  $y_o$ ,  $z_o$ ) y se seleccionaron valores positivos de ( $h$ ,  $k$ ,  $l$ ) con respecto a  $x_o$ ,  $y_o$ ,  $z_o$  para obtener un conjunto de estimaciones representativas. En las Figuras 3.3 y 3.4 se presentan las gráficas del radio  $r^*(\theta, \varphi)$  (adimensional) para dos configuraciones excéntricas distintas. El caso que se muestra en la Figura 3.3 consiste en un sistema excéntrico que se encuentra muy cerca de la superficie de la esfera externa, los parámetros adimensionales para lograrlo son:  $h^* = k^* = l^* = 0.557$ ,  $b^* = 1$  y  $\gamma^* = 0.999$  ( $h^* = h/b$ ). En dicha figura se puede observar que  $r^*(\theta, \varphi)$  varía en un rango de 0 a 2. En la Figura 3.4 se representa una celda unitaria también excéntrica en donde la burbuja esférica está localizada muy cerca del centroide. Los parámetros adimensionales seleccionados para este caso son:  $h^* = k^* = l^* = 0.1$ ,  $b^* = 1$  y  $\gamma^* = 0.17$ . En esta figura se puede observar que  $r^*(\theta, \varphi)$  varía en un rango de 0.8 a 1.2. Con estos dos casos se puede observar que cuando la posición  $\gamma^*$  de la burbuja tiende al centroide,  $r^*(\theta, \varphi)$  tiende al radio de la esfera externa,  $b^*$ .

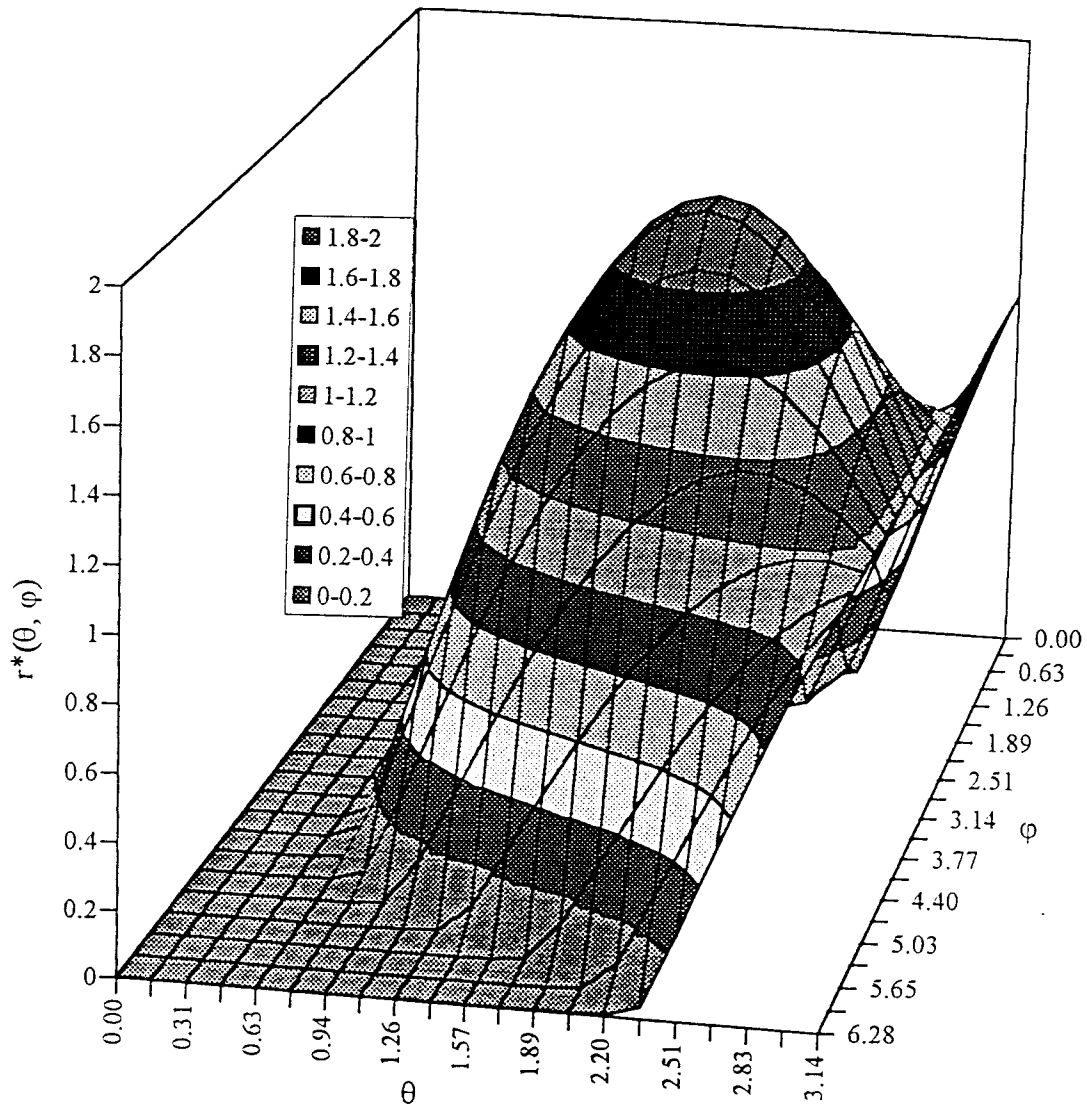


Figura 3.3. Celda unitaria excéntrica, lejos del centroide de la esfera exterior.  $h^* = k^* = l^* = 0.557$ ,  $b^* = 1$  y  $\gamma = b^*$ .

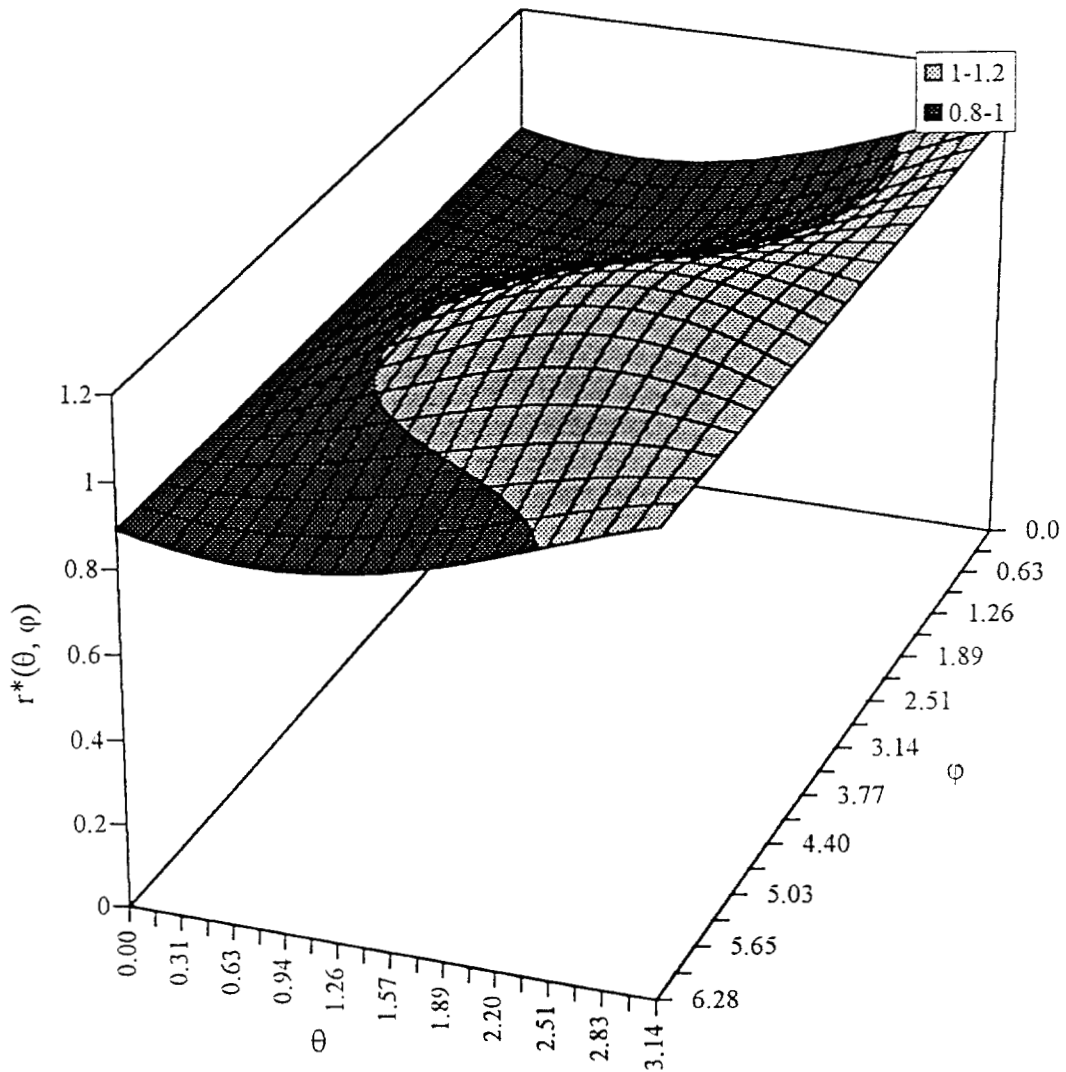


Figura 3.4. Celda unitaria excéntrica cerca del centroide de la esfera exterior.  $h^* = k^* = l^* = 0.1$ ,  $b^* = 1$  y  $\gamma^* = 0.17$ .

### 3.5.1 Desviaciones espaciales del potencial de velocidad

Las desviaciones espaciales del potencial de velocidad están dadas por:

$$\bar{\phi} = \phi - \langle \phi \rangle^l \quad (3.49)$$

donde el promedio de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad son:

$$\langle \phi \rangle^l = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^{r(\theta, \varphi)} \phi(r, \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.50)$$

donde  $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  es el elemento diferencial de volumen  $dV$  y  $V_l = 4/3\pi (b^3 - a^3)$  con  $b > a$ . El potencial de velocidad en forma general se puede escribir como:

$$\phi(r, \theta) = \left[ (1 - f_d) r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right] U \cos \theta \quad (3.51)$$

donde  $r, \theta$  son las coordenadas esféricas,  $a$  es el radio de la esfera y  $f_d$  es una función indicadora definida por:

$$f_d = \begin{cases} 1 & \text{esfera en movimiento} \\ 0 & \text{esfera en reposo} \end{cases} \quad (3.52)$$

En la Ec. (3.51)  $U$  tiene dos interpretaciones: para  $f_d = 1$  representa la velocidad de la esfera y para  $f_d = 0$  representa la velocidad del fluido aproximándose a la esfera en reposo.

Sustituyendo la Ec. (3.51) en la Ec. (3.50) e integrando se obtiene:

$$\langle \phi \rangle^l = \frac{U}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{(1 - f_d)}{4} r^4(\theta, \varphi) + \frac{a^3}{2} r(\theta, \varphi) \right] \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.53)$$

donde  $r(\theta, \varphi)$  está dado por la Ec. (3.48).

La solución de esta integral doble es compleja por lo que fue necesario emplear técnicas numéricas para su solución, para lo cual se seleccionó la regla compuesta de

Simpson (Burden y Faires, Cap. 4, 1985) debido a que presenta un error ( $E$ ) del orden  $E^4$ , mientras que la regla del trapecio presenta un error que es proporcional a  $E^2$ . El esquema de solución numérico se presenta en el Apéndice D. En la Tabla D.1 para  $f_d = 0$  se presentan algunos valores de estimaciones numéricas de  $\langle \phi \rangle^{I*}$  ( $= \langle \phi \rangle^{I*}/bU$ , eje Z) con respecto a  $\gamma^*$  ( $= \gamma/b$ , eje X) para diferentes radios de burbuja  $a^*$  ( $= a/b$ , eje Y) o fracción volumen  $\varepsilon_g$  que ocupa la burbuja esférica en la celda unitaria. En la Figura 3.5 para  $f_d = 0$ , se puede observar que  $\langle \phi \rangle^{I*}$  se incrementa linealmente conforme aumenta  $\gamma^*$  manteniendo  $a^*$  constante, mientras que el comportamiento de  $\langle \phi \rangle^{I*}$  con respecto a  $\varepsilon_g$  manteniendo  $\gamma^*$  constante es prácticamente lineal para pequeños valores de  $\gamma^*$  (muy cerca del centroide) y para valores mayores de  $\gamma^*$  (alejándose del centroide)  $\langle \phi \rangle^{I*}$  crece rápidamente en forma no lineal. Este mismo comportamiento se puede observar en la Figura 3.6 para  $f_d = 1$ .

En la Tabla D.2 del Apéndice D se presentan algunos datos de la integral que aparece en la Ec. (3.53).

Sustituyendo la Ec. (3.53) en la Ec. (3.49) se obtiene:

$$\bar{\phi} = \phi - \frac{U}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{(1 - f_d)}{4} r^4(\theta, \varphi) + \frac{a^3}{2} r(\theta, \varphi) \right] \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.54)$$

Entonces, la integral sobre el área interfacial de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad que aparece en la Ec. (3.34) está dada por:

$$\rho_l \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} n_{lg} dA = \left[ (1 - f_d) \rho_l \varepsilon_g + \frac{1}{2} \rho_l \varepsilon_g \right] U e_z \quad (3.55)$$

$$- \left[ \frac{\rho_l}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{(1 - f_d)}{4} r^4(\theta, \varphi) + \frac{a^3}{2} r(\theta, \varphi) \right] \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \right] U \nabla \varepsilon_g$$

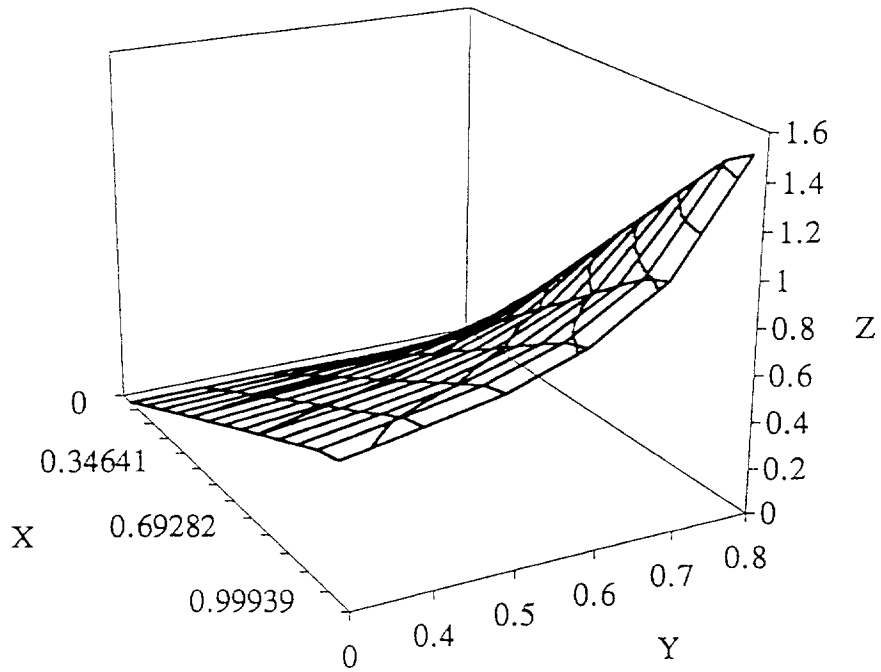
donde

$$\varepsilon_g = \frac{a^3}{b^3} \quad (3.56)$$

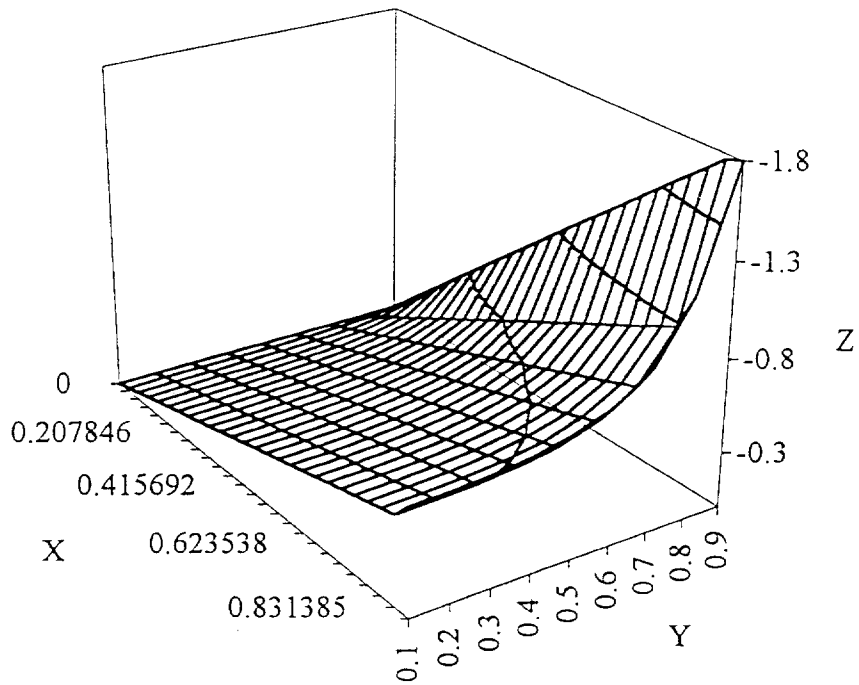
$$n_{lg} = - e_r = e_x \sin \theta \cos \varphi + e_y \sin \theta \sin \varphi + e_z \cos \theta \quad (3.57)$$

Para  $f_d = 0$  el término  $\rho_l \varepsilon_g$  de la Ec. (3.55) representa la masa por unidad de volumen desplazada por la burbuja esférica, es decir, el volumen que ahora ocupa la burbuja esférica y  $1/2 \rho_l \varepsilon_g$  es la masa por unidad de volumen de líquido adherida a la burbuja esférica y se le conoce como masa agregada. La suma de estos dos términos definen la masa virtual.

Para  $f_d = 1$  el primer término representa la masa de líquido por unidad de volumen que es arrastrada por la burbuja esférica en movimiento que corresponde al efecto masa agregada. Estos efectos son típicos de la celda unitaria concéntrica. Los efectos de excentricidad aparecen en los términos de la integral de la Ec. (3.55) y el valor de dicha integral es negativo, entonces, el efecto global es mayor para gradientes positivos de  $\varepsilon_g$  (mayores concentraciones) y ocurre todo lo contrario para gradientes negativos de  $\varepsilon_g$  (menores concentraciones), esto se cumple tanto para  $f_d = 0$  como para  $f_d = 1$ .



**Figura 3.5.**  $f_d = 0$ , comportamiento de  $\langle \phi \rangle^{l*} = \langle \phi \rangle^{l/v_r} b (= Z)$  con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b (= X)$  y  $a^* = a/b (= Y)$ .



**Figura 3.6.**  $f_d = 1$ , comportamiento de  $\langle \phi \rangle^{l*} = \langle \phi \rangle^{l/v_r} b (= Z)$  con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b (= X)$  y  $a^* = a/b (= Y)$ .

Para  $f_d = 1$  se puede hacer que el sistema de referencia se mueve con respecto a otro sistema fijo, entonces, se puede demostrar que  $U$  representa la velocidad relativa:

$$U = \langle v_{zg} \rangle^g - \langle v_{zl} \rangle^l \quad (3.58)$$

### 3.5.2 Desviaciones espaciales del vector velocidad

Las desviaciones espaciales del vector velocidad están definidas por la Ec. (2.48), donde la velocidad local instantánea se puede expresar como:

$$\begin{aligned} v_l &= -\nabla\phi = e_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ &= -\frac{a^3 U}{r^3} (3 e_r \cos\theta - e_z) + (1 - f_d) U e_z \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde  $\phi$  está dado por la Ec. (3.51),  $e_r$  está definido por la Ec. (3.56) y  $e_\theta$  está dado por:

$$e_\theta = e_x \cos\theta \cos\varphi + e_y \cos\theta \sin\varphi - e_z \sin\theta \quad (3.60)$$

El primer y segundo término de la Ec. (3.59) corresponden a las componentes radial y tangencial del vector velocidad, respectivamente. Para  $f_d = 0$  en la Ec. (3.59), la componente radial de velocidad en la superficie de la esfera ( $r = a$ ) es nula, mientras que la componente tangencial de velocidad es nula en  $\theta = 0$  y en  $\theta = 2\pi$  (las zonas de estancamiento). Mientras que para  $f_d = 0$  los componentes de velocidad radial y tangencial existen para toda  $\theta$ .

Para determinar las desviaciones espaciales del vector velocidad es necesario calcular el promedio intrínseco de la velocidad:

$$\langle v_l \rangle^l = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^{r(\theta, \varphi)} v_l r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \quad (3.61)$$

Entonces, integrando:

$$\begin{aligned} \langle v_l \rangle^l = & - \frac{a^3 U}{2 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \ln \left( \frac{r(\theta, \varphi)}{a} \right) (3 e_r \cos \theta - e_z) \right] \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi \\ & + \left[ \frac{U e_z}{3 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3(\theta, \varphi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi - \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_l} U e_z \right] (1 - f_d) \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde

$$(3 e_r \cos \theta + e_z) = 3 (e_x \cos \varphi + e_y \text{sen } \varphi) \text{sen } \theta \cos \theta + e_z (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (3.63)$$

Sustituyendo la Ec. (3.62) en la Ec. (2.39) se obtiene la expresión para las desviaciones espaciales del vector velocidad:

$$\begin{aligned} \bar{v}_l = v_l + & \frac{3 U}{2 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \ln \left( \frac{r(\theta, \varphi)}{a} \right) (3 e_r \cos \theta - e_z) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi \\ & - \left[ \frac{U e_z}{3 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3(\theta, \varphi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_l} U e_z \right] (1 - f_d) \end{aligned} \quad (3.64)$$

El promedio intrínseco del producto de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad por las desviaciones espaciales del vector velocidad se obtiene de las Ecs. (2.39) y (3.49) o de las Ecs. (3.54) y (3.64):

$$\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l = \langle \phi v_l \rangle^l - \langle \phi \rangle^l \langle v_l \rangle^l \quad (3.65)$$

donde  $\langle \phi \rangle^l$  y  $\langle v_l \rangle^l$  están dadas por las Ecs. (3.53) y (3.62) respectivamente. El primer término de la Ec. (3.65) está dado por:

$$\langle \phi v_l \rangle^l = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^{r(\theta, \varphi)} \phi v_l r^2 \, dr \, \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (3.66)$$

donde

$$\phi v_l = - (3 e_r \cos \theta - e_z) \left[ \frac{(1 - f_d)}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^5} \right] \frac{a^3}{2} U^2 \cos \theta \quad (3.67)$$

Integrando se obtiene:

$$\langle \phi v_l \rangle^l = - \frac{a^3 U^2}{2 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ (1 - f_d) r(\theta, \varphi) - \frac{a^3}{4 r^2(\theta, \varphi)} \right] (3 e_r \cos \theta - e_z) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.68)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.53), (3.62) y (3.68) en la Ec. (3.65), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l = & - \frac{a^3 U^2}{2 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ (1 - f_d) r(\theta, \varphi) - \frac{a^3}{4 r^2(\theta, \varphi)} \right] (3 e_r \cos \theta - e_z) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ & + \left[ \frac{U}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{(1 - f_d)}{4} r^4(\theta, \varphi) + \frac{a^3}{2} r(\theta, \varphi) \right] \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \right] \\ & \times \left[ \frac{a^3 U}{2 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \ln \left( \frac{r(\theta, \varphi)}{a} \right) \right] (3 e_r \cos \theta - e_z) \sin \theta d\theta d\varphi \right] \quad (3.69) \end{aligned}$$

La diáda de la desviaciones espaciales de velocidad se obtiene con la Ec. (2.39) o con la Ec. (3.64) y después se aplica el operador  $\langle \rangle^l$ , entonces:

$$\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle^l = \langle v_l v_l \rangle^l - \langle v_l \rangle^l \langle v_l \rangle^l \quad (3.70)$$

El primer término está dada por:

$$\begin{aligned}
\langle v_l v_l \rangle^l &= \frac{1}{5} \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_l} \left[ \frac{3}{4} e_x e_x + \frac{3}{4} e_y e_y + e_z e_z \right] U^2 \\
&\quad - \frac{a^6 U^2}{12 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(3 e_r \cos \theta - e_z)^2}{r^3(\theta, \varphi)} \text{sen} \theta d\theta d\varphi \\
&\quad - \frac{(1-f_d) a^3 U^2 e_z}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \ln \left[ \frac{r(\theta, \varphi)}{a} \right] (3 e_r \cos \theta - e_z) \text{sen} \theta d\theta d\varphi \\
&\quad - \left[ \frac{1}{3 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3(\theta, \varphi) \text{sen} \theta d\theta d\varphi + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_l} \right] (1-f_d)^2 U^2 e_z e_z
\end{aligned} \tag{3.71}$$

donde

$$\begin{aligned}
(3 e_r \cos \theta - e_z)^2 &= 9 \left( \cos^2 \varphi e_x e_x + 2 \text{sen} \varphi \cos \varphi e_x e_y + \text{sen}^2 \varphi e_y e_y \right) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\
&\quad + 6 \left( \cos \varphi e_x e_z + \text{sen} \varphi e_y e_z + \text{sen}^2 \varphi e_y e_y \right) (3 \text{sen} \theta \cos^3 \theta - \text{sen} \theta \cos \theta) \\
&\quad + (1 - 6 \cos^2 \theta + 9 \cos^4 \theta) e_z e_z
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Sustituyendo las Ecs. (3.62) y (3.71) en la Ec. (3.70) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle^l &= \frac{1}{5} \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_l} \left[ \frac{3}{4} e_x e_x + \frac{3}{4} e_y e_y + e_z e_z \right] U^2 \\
&\quad - \frac{a^6 U^2}{12 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(3 e_r \cos \theta - e_z)^2}{r^3(\theta, \varphi)} \text{sen} \theta d\theta d\varphi \\
&\quad - \left[ \frac{a^3 U}{2 V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \ln \left[ \frac{r(\theta, \varphi)}{a} \right] (3 e_r \cos \theta - e_z) \text{sen} \theta d\theta d\varphi \right]^2
\end{aligned} \tag{3.73}$$

donde

$$\varepsilon_l = \frac{(b^3 - a^3)}{b^3} \tag{3.74}$$

Las desviaciones espaciales se pueden entender como velocidades relativas con respecto a la velocidad promedio, entonces son independientes del sistema de referencia, por esta razón no aparece  $f_d$  en la Ec. (3.73). El tercer término de la Ec. (3.73) representa el producto vectorial y no el módulo. Por otro lado, con la Ec. (3.73) se obtienen los esfuerzos de Reynolds, Ec. (3.8b).

### 3.5.3 Diferencia de los promedios de la presión

La diferencia de los promedios de la presión para la fase líquida está definida con la Ec. (3.8a). La presión promedio interfacial se puede escribir de la siguiente forma considerando que las burbujas son esféricas (H.3), cuya área superficial es  $A_{lg} = 4\pi a^2$ .

$$\langle p_l \rangle_{lg} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{lg} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (3.75)$$

Para determinar el integrando de esta ecuación se puede aplicar la ecuación de Bernoulli [Ec. (3.19)], con  $f(t) = \langle p_l \rangle^l$ :

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{\langle p_l \rangle^l}{\rho_l} + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \quad (3.76)$$

El procedimiento consiste en desarrollar los operadores de la ecuación anterior con las funciones del potencial de velocidad [Ec. (3.51)], después se evalúa  $p_l$  en la superficie para determinar la distribución de la presión interfacial local instantánea y el resultado se sustituye en la Ec. (3.75) para evaluar la integral.

Aplicando Ec. (3.51) en la Ec. (3.76) se obtiene que:

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{\langle p_l \rangle^l}{\rho_l} + \left[ (1-f_d)r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right] \frac{\partial U}{\partial t} \cos \theta + \frac{1}{2} \left[ 3 \frac{a^3}{r^3} \cos^2 \theta - \frac{a^3}{r^3} - (1-f_d) \right] U^2 - \frac{1}{8} \frac{a^6}{r^6} (3 \cos^2 \theta + 1) U^2 + \frac{(1-f_d)a^3}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) U^2 - \frac{1}{2} (1-f_d)^2 U^2 \quad (3.77)$$

donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[ (1-f_d)r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right] \frac{\partial U}{\partial t} \cos \theta + \frac{1}{2} \left[ 3 \frac{a^3}{r^3} \cos^2 \theta - \frac{a^3}{r^3} - (1-f_d) \right] U^2 \quad (3.78)$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = \frac{1}{4} \frac{a^6}{r^6} U^2 (3 \cos^2 \theta + 1) - \frac{(1-f_d)a^3}{r^3} U^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + (1-f_d)^2 U^2 \quad (3.79)$$

La Ec. (3.77) describe la presión local instantánea en cualquier punto del fluido y la distribución de la presión local instantánea en la superficie de la esfera o presión interfacial se obtiene haciendo  $r = a$ :

$$\frac{p_{lg}}{\rho_l} = \frac{\langle p_l \rangle^l}{\rho_l} + \left[ (1-f_d) + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial U}{\partial t} a \cos \theta + \frac{1}{2} [3 \cos^2 \theta - 1 - (1-f_d)] U^2 - \frac{1}{8} (3 \cos^2 \theta + 1) U^2 + \frac{1}{2} (1-f_d) (3 \cos^2 \theta - 1) U^2 - \frac{1}{2} (1-f_d)^2 U^2 \quad \text{en } A_{lg} \quad (3.80)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la Ec. (3.75) e integrando se obtiene:

$$\langle p_l \rangle_{lg} = \langle p_l \rangle^l - \left[ \frac{1}{4} + (1-f_d) \right] U^2 \quad \text{en } A_{lg} \quad (3.81)$$

Finalmente sustituyendo en la Ec. (3.8a) se encuentra la diferencia de los promedios de la

presión:

$$\langle \Delta p_{lg} \rangle = \langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_l \rangle^l = - \left[ \frac{1}{4} + (1-f_d) \right] U^2 \quad (3.82)$$

### 3.6 Casos límite del modelo de celda unitaria excéntrica

En la sección anterior se desarrolló el caso general para obtener las relaciones de cerradura usando un modelo de una celda unitaria excéntrica. A continuación se presenta el caso límite, es decir, las relaciones de cerradura de la celda unitaria concéntrica, la cual es una consecuencia directa del caso general.

Este modelo concéntrico consiste en una burbuja esférica inmersa en una esfera de líquido. En este modelo de celda las líneas de corriente son totalmente simétricas debido a que el centro de la burbuja esférica se localiza en el centroide de la esfera exterior.

#### 3.6.1 Desviaciones espaciales del potencial de velocidad

El promedio del potencial de velocidad para el caso concéntrico se obtiene del caso general haciendo  $h = k = l = 0$  en la Ec. (3.46), de lo cual se obtiene  $\gamma = 0 \Rightarrow r = b$  en la Ec. (3.48), siendo independiente de  $\theta$  y  $\varphi$ . Entonces:

$$\langle \phi \rangle^l = 0 \quad (3.83)$$

Lo anterior implica en la Ec. (3.49) que:

$$\bar{\phi} = \phi \quad (3.84)$$

Las desviaciones espaciales del potencial de velocidad se obtienen haciendo  $r(\theta, \varphi) = b$  en la Ec. (3.55):

$$\rho_l \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA = \left[ (1 - f_d) \rho_l \boldsymbol{\varepsilon}_g + \frac{1}{2} \rho_l \boldsymbol{\varepsilon}_g \right] U \mathbf{e}_z \quad (3.85)$$

En la ecuación anterior  $f_d = 1$  también representa el impulso por unidad de volumen de líquido debido al movimiento de la burbuja esférica.

Cuando un cuerpo sólido se mueve a través de un fluido incompresible ( $f_d = 1$ ), éste induce un arrastre del fluido. El volumen arrastrado entre las posiciones iniciales y finales es igual al volumen correspondiente a la masa hidrodinámica. Darwin (1952) define la masa hidrodinámica como la obtenida de la energía cinética del fluido que rodea al cuerpo:

$$2K = \int_{V_l} \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV = \int_{A_{lg}} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_{lg} dA = \frac{1}{2} \rho_l V_e U^2 \quad (3.86)$$

donde  $V_e$  es el volumen de la esfera y  $U$  representa la velocidad relativa.

### 3.6.2 Desviaciones espaciales del vector velocidad

Haciendo  $r(\theta, \varphi) = b$  en la Ec. (3.64) se obtiene:

$$\bar{v}_l = v_l \quad (3.87)$$

El resultado anterior implica que:

$$\langle v_l \rangle^l = (1 - f_d) U e_z \quad (3.88)$$

El promedio intrínseco del producto de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad por las desviaciones espaciales del vector velocidad se obtiene directamente de la Ec. (3.69), también haciendo  $r(\theta, \varphi) = b$ :

$$\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l = 0 \quad (3.89)$$

El promedio diádico de las desviaciones espaciales de velocidad se obtienen haciendo  $r(\theta, \varphi) = b$  en la Ec. (3.73):

$$\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle^l = \frac{1}{5} \varepsilon_g \left[ \frac{3}{4} e_x e_x + \frac{3}{4} e_y e_y + e_z e_z \right] U^2 \quad (3.90)$$

### 3.6.3 Diferencia de los promedios de la presión

La expresión para la diferencia de los promedios de la presión es la misma que la obtenida con la celda unitaria excéntrica con burbuja, la cual está dada por la Ec. (3.81). Esto es debido a que se integra sobre el área interfacial y el integrando, Ec. (3.80), se calcula en la superficie de la burbuja esférica.

### 3.7 Comparación con modelos previos y discusión

En la Tabla 3.1 se presenta un resumen de las relaciones de cerradura desarrolladas en las Secciones 3.5 y 3.6. En esta tabla,  $f$  denota cantidades escalares,  $d$  denota tensores de primer orden o vectores y  $B$  denota tensores de segundo orden. A continuación se presentan las definiciones de la nomenclatura utilizada en dicha tabla:

$$f_1(\varepsilon_g) = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4(\theta, \varphi) \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (3.91)$$

$$f_2(\varepsilon_g) = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi) \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (3.92)$$

$$f_3(\varepsilon_g) = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^3(\theta, \varphi) \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (3.93)$$

$$d_1 = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi) (3 e_r \cos\theta - e_z) \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (3.94)$$

$$d_2 = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(3 e_r \cos\theta - e_z) \cos\theta}{r^2(\theta, \varphi)} \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (3.95)$$

$$d_3 = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \ln \left( \frac{r(\theta, \varphi)}{a} \right) (3 e_r \cos\theta - e_z) \right] \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (3.96)$$

$$d_4 = \frac{1}{2} d_2 + f_2(\varepsilon_g) d_3 \quad (3.97)$$

$$B = \frac{1}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(3 e_r \cos \theta - e_z)^2}{r^3(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.98)$$

$$\langle \tilde{v}_l \tilde{v}_l \rangle'_c = \frac{1}{5} \varepsilon_g \left[ \frac{3}{4} e_x e_x + \frac{3}{4} e_y e_y + e_z e_z \right] U^2 \quad (3.99)$$

En la Tabla 3.1 las relaciones de cerradura para flujo alrededor de una esfera se presentan en las filas denotadas por (1) y (2) para el modelo de celda unitaria concéntrica y excéntrica, respectivamente, donde  $U$  ( $U = Ue_z$ ) representa la velocidad del líquido. La relación de cerradura integral sobre área de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad (segunda columna) dan lugar a los efectos de masa virtual. El resultado obtenido con el modelo de celda unitaria excéntrica incluye un término adicional con respecto a la celda unitaria concéntrica, cuyo efecto está relacionado con el gradiente de la fracción de vacíos. Para establecer su importancia en forma cualitativa, se analizó el valor numérico de las funciones  $f_1(\varepsilon_g)$  y  $f_2(\varepsilon_g)$ , encontrando que son negativas en todos los casos excéntricos, entonces los efectos de masa virtual son mayores para gradientes positivos de la fracción de vacíos (mayores concentraciones de la fase dispersa) y menores con gradientes negativos de la fracción de vacíos. Este efecto no es observado con el modelo de celda unitaria concéntrica y hasta donde se sabe no ha sido reportado en trabajos previos.

Las relaciones de cerradura para flujo con burbuja y líquido en movimiento se presentan en las filas denotados por (3) y (4) en la Tabla 3.1 para el modelo de celda unitaria concéntrica y excéntrica, respectivamente, donde  $U$  ( $U = Ue_z$ ) representa la velocidad relativa dada por la Ec. (3.58). Como se puede observar, el único efecto que presenta es la masa agregada o arrastrada debido al movimiento de la burbuja esférica y el caso excéntrico incluye el gradiente de la fracción de vacíos.

En la tercera columna de la misma tabla se presenta la relación de cerradura promedio intrínseco del producto de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad por las desviaciones espaciales del vector velocidad. Se puede observar que en el modelo de celda unitaria concéntrica este término es nulo, mientras que es distinto de cero con el modelo de celda unitaria excéntrica. Este término incluye la velocidad de líquido al cuadrado y dada su naturaleza se puede relacionar con la energía cinética de las desviaciones espaciales de velocidad. Su efecto con respecto a la burbuja no es sencillo de analizar a-priori. Por el momento, se puede observar que los términos del orden de  $a^6$  son pequeños para burbujas muy cerca del centroide de la esfera exterior [Ec. (3.95)] puesto que  $r(\theta, \varphi)$  es del orden del radio de la esfera exterior  $b$ . Sin embargo, muy cerca de la superficie de la esfera exterior  $r(\theta, \varphi)$  toma valores del orden del radio de la burbuja esférica  $a$  y, como se puede observar en la Ec. (3.69), su inverso al cuadrado presumiblemente sería importante. Otro aspecto relevante de este término, en combinación con el segundo término de la Ec. (3.34), es la aparición de una doble derivada espacial que no se observa en el caso concéntrico, donde desde el punto de vista matemático podría modificar su comportamiento en flujo burbujeante.

En la cuarta columna de la Tabla 3.1 se presenta la relación de cerradura promedio intrínseco de la diáda de las desviaciones espaciales del vector velocidad, la cual está relacionado con los esfuerzos de Reynolds [Ec. (3.8b)]. Se puede observar que para el caso concéntrico está definida por la Ec. (3.99), mientras que para el caso excéntrico presenta dos términos adicionales, Ec. (3.73). En la quinta columna de la misma tabla se presenta la relación de cerradura diferencia de presión interfacial, la cual es la misma para un modelo de celda unitaria concéntrica que para un modelo de celda unitaria excéntrica, debido a que ésta se evalúa en la superficie de la burbuja esférica.

Tabla 3.1. Relaciones de cerradura

*	$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}^{(0)}} \bar{\phi} n_{lg} dA$	$\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l$	$\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle^l$	$\langle \Delta p_{lg} \rangle$
(1)	$\frac{3}{2} \varepsilon_g U$	0	$\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle_c^l$	$-\frac{5}{4} \rho_l U^2$
(2)	$\frac{3}{2} \varepsilon_g U - \left[ \frac{f_1(\varepsilon_g)}{4} + \frac{a^3 f_2(\varepsilon_g)}{2} \right] U \nabla \varepsilon_g$	$\frac{a^3}{2} \left[ -d_1 + \frac{a^3}{4} f_1(\varepsilon_g) d_3 + \frac{a^3}{2} d_4 \right] U^2 \varepsilon_l^{-1} \langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle_c^l - \frac{a^6}{4} \left[ \frac{B + d_3 d_3}{3} \right] U^2$	$\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle_c^l - \frac{a^6}{4} \left[ \frac{B + d_3 d_3}{3} \right] U^2$	$-\frac{5}{4} \rho_l U^2$
(3)	$\frac{1}{2} \varepsilon_g U$	0	$\langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle_c^l$	$-\frac{1}{4} \rho_l U^2$
(4)	$\frac{1}{2} \varepsilon_g U - \frac{a^3}{2} f_2(\varepsilon_g) U \nabla \varepsilon_g$	$\frac{a^6}{4} d_4 U^2$	$\varepsilon_l^{-1} \langle \bar{v}_l \bar{v}_l \rangle_c^l - \frac{a^6}{4} \left[ \frac{B + d_3 d_3}{3} \right] U^2$	$-\frac{1}{4} \rho_l U^2$

\* (1) y (3) Celda unitaria concéntrica, (2) y (4) Celda unitaria excéntrica; (1) y (2) flujo alrededor de una burbuja esférica; (2) y (4) Burbuja esférica en movimiento

### 3.7.1 Relación de cerradura masa agregada

La relación de cerradura de la integral sobre el área interfacial de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad para burbuja esférica y líquido en movimiento ( $f_d = 1$ ) se puede escribir como:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}} \bar{\phi} n_{lg} dA = C_{VM}(\varepsilon_g) v_r \quad (3.100)$$

donde  $v_r$  es la velocidad relativa definida por la Ec. (3.58) y  $C_{VM}$  representa el coeficiente de masa agregada ( $f_d = 1$ ). Por conveniencia en el acoplamiento matemático de las relaciones de cerradura con las ecuaciones de transporte promedio volumétrico (Capítulo 4) el coeficiente de masa agregada se puede expresar como:

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = C_{VMC}(\varepsilon_g) \left[ 1 - \frac{c_2}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \quad (3.101)$$

donde

$$C_{VMC}(\varepsilon_g) = \frac{1}{2} \varepsilon_g \quad (3.102)$$

$$c_2 = \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} c_1 \quad (3.103)$$

$$c_1 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.104)$$

$$a^3 = \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} \varepsilon_g \quad (3.105)$$

Otros modelos relacionados con el coeficiente de masa agregada se presentan a continuación. Todos estos modelos tienen en común que el potencial de velocidad está relacionado con una celda unitaria concéntrica, sin embargo, algunos de ellos consideran interacciones hidrodinámicas que es de interés mencionarlas.

Mercadier (1981) propone un modelo macroscópico considerando que el potencial de velocidad es constante en los extremos que la limitan. El análisis consiste primero en determinar la diferencia de potencial sin burbujas u objetos inmersos y segundo en determinar la diferencia de potencial con objetos, donde la relación entre estos dos da como resultado:

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = \frac{\rho_l}{\rho_{ef}} - 1 - \varepsilon_g \quad (3.106)$$

donde  $\rho_{ef}$  es una propiedad efectiva de la mezcla en dos fases. Para su determinación Mercadier (1981) usó distintos resultados de la literatura, uno de ellos es el trabajo de Maxwell (1891), relacionado con la conductividad eléctrica efectiva de un sistema de partículas aisladas en un medio continuo:

$$\frac{\rho_{ef}}{\rho_l} = \frac{1 - \varepsilon_g}{(1 + \varepsilon_g/2)} + O(\varepsilon_g) \quad (3.107)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.106), se obtiene:

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = \frac{1}{2} \varepsilon_g \left[ \frac{1 + 2 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \quad (3.108)$$

Este resultado fue obtenido por Zuber (1964) con diferente aproximación con un modelo de una burbuja esférica concéntrica moviéndose en una esfera de líquido (Lamb, 1947; Milne-Thomson, 1967), donde el gradiente del potencial en la superficie de la esfera exterior es cero. El resultado obtenido por Zuber (1964) fue denominado esfera protectora por Smereka y Milton (1991), quienes extendieron el resultado de Zuber (1964) considerando burbujas elípticas. El procedimiento utilizado por Zuber (1964) es relativamente menos complejo que el utilizado por Mercadier (1981) en combinación con Maxwell (1891), y con ambos se obtiene el mismo resultado.

esto se debe principalmente la diferencia entre los valores de 2.78 y 3. En relación a este punto Kok (1988) encuentra el mismo resultado obtenido por Biesheuvel y Spoeltra (1989) e incluye una corrección al valor obtenido por van Wijngaarden (1976), es decir, 3.21 en lugar de 2.78. La similitud de los resultados obtenidos por van Wijngaarden (1976), Biesheuvel y Spoeltra (1989) y Kok (1988) se debe a que todos ellos se basan en la aproximación del trabajo de Jeffrey (1973) y la diferencia de valor numérico que multiplica el término de segundo orden se debe principalmente a la distribución de probabilidades (posición o velocidad) que usan estos autores.

Smereka y Milton (1991) estudian la analogía que existe entre flujo burbuja y la conductividad térmica efectiva en compuestos. Su resultado es idéntico al obtenido con la celda unitaria concéntrica [Ec. (3.102)].

Wallis (1992) obtiene una expresión de la integral sobre el área del potencial de velocidad, considerando una celda unitaria con un objeto en reposo (caso base) y después estudia el caso con el objeto en movimiento y superpone estas soluciones. Este análisis es similar al modelo de Mercadier (1981) (su caso base no tiene objetos). Uno de los resultados de Wallis (1992) para el caso sin efectos de gradientes de presión y fuerzas de gravedad es:

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = 1 - \frac{1}{\beta} - \varepsilon_g \quad (3.113)$$

donde  $\sigma^*$  es  $1/\beta$  (o  $\rho_1/\rho_{ef}$  es  $\beta$ ). Este resultado es idéntico al obtenido por Smereka y Milton (1991). Otro de los resultados obtenidos por Wallis (1991) considerando velocidad superficial total igual a cero, es igual al obtenido por Mercadier (1981) y se puede considerar como una generalización del trabajo Mercadier (1981).

Para determinar la difusividad efectiva de un medio poroso aplicando la aproximación del método del promedio volumétrico, Ochoa, *et al.* (1994) obtienen una expresión similar a la Ec. (3.100). El método utilizado por estos autores se presenta en forma detallada en el trabajo de Crapiste, *et al.* (1985). Uno de los casos estudiados por estos autores es considerar al medio poroso como un sistema constituido por una esfera (fase dispersa) inmersa en una esfera de mayor tamaño correspondiente a la fase continua [similar al modelo de Zuber (1964)]. A este modelo se le denomina celda unitaria de Chang. En el caso de la celda unitaria cilíndrica, los autores obtienen el resultado de Rayleigh (1892) y para el caso de la celda unitaria esférica obtienen el resultado de Maxwell (1891). Estos autores extienden la celda unitaria de Chang para el caso de una celda unitaria elipsoidal y proponen una expresión para la difusividad efectiva.

Las aproximaciones previas y la obtenida en este trabajo con la celda unitaria concéntrica indican que el coeficiente de masa virtual se incrementa con la fracción volumétrica del gas. Los datos experimentales muestran que ésta es la tendencia. La siguiente relación empírica fue obtenida por Chernyy y Srebnyuk (1979) para el estudio del deslizamiento de una mezcla gas-líquido a través de un difusor:

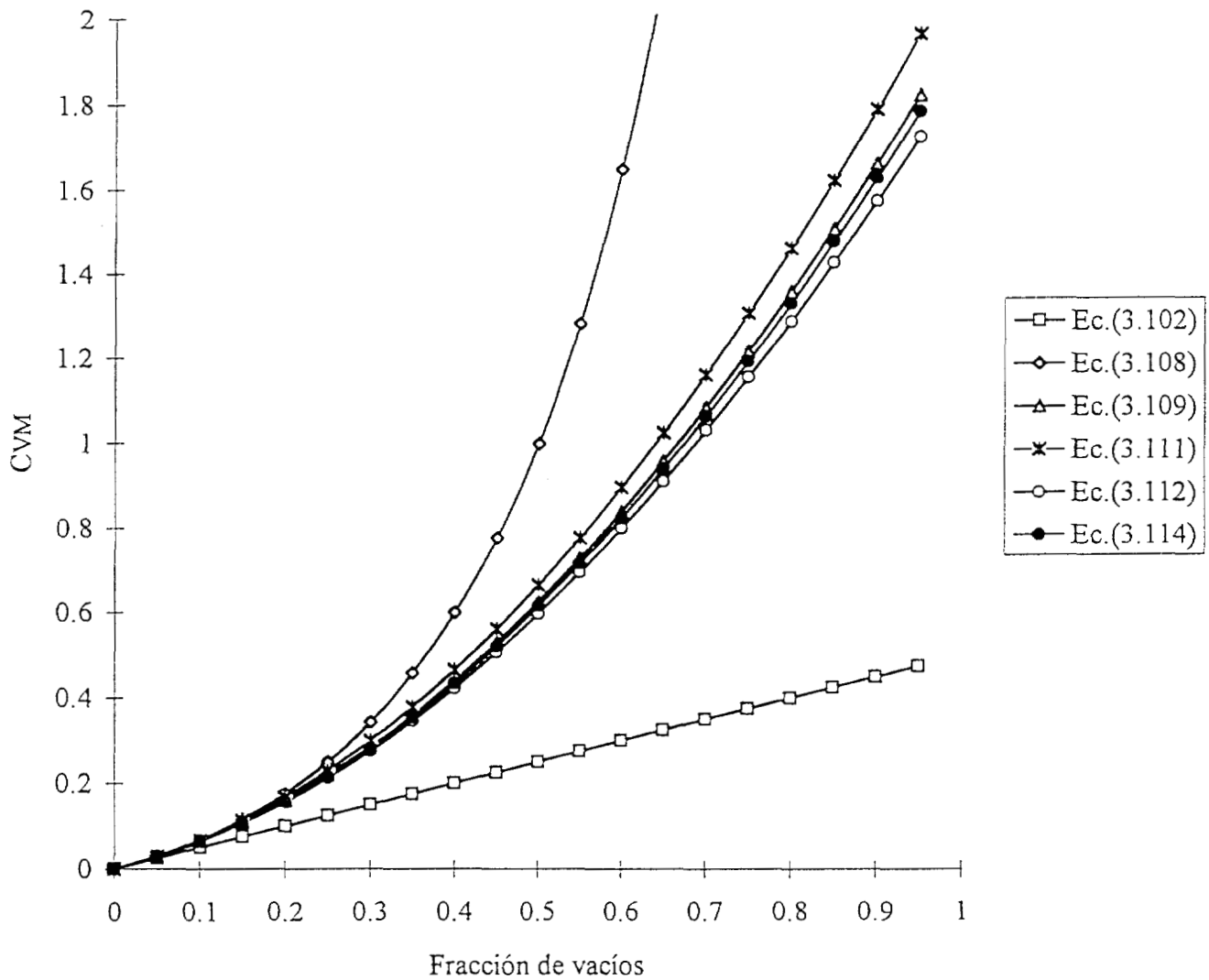
$$C_{VM}(\varepsilon_g) = \frac{1}{2} \varepsilon_g \left( 1 + 3.52 \varepsilon_g^{0.85} \right) + O\left(\varepsilon_g^3\right) \quad (3.114)$$

En la Figura 3.7 se presentan la comparación de los modelos del coeficiente de masa agregada. Como se observa en estas gráficas, todos los modelos presentan el mismo comportamiento para fracciones de vacío en un rango aproximado de 0 a 0.1. Para valores mayores de 0.1, el modelo de primer orden [Ec. (3.102)] exhibe un comportamiento distinto, puesto que su incremento es lento con respecto a los demás modelos y el modelo de Maxwell

(1891) [Ec. (3.108)] también presenta un comportamiento distinto con respecto a los demás debido a que su incremento es muy rápido con el incremento de la fracción de vacíos. En la misma figura se puede observar que los modelos de segundo orden [Ecs. (3.109), (3.111) y (3.112)] presentan el mismo comportamiento para fracciones de vacío en un rango aproximado de 0 a  $\sim 0.3$ . El modelo de Maxwell (1891) para condiciones diluidas presenta el mismo resultado con respecto al modelo empírico [Ec. (3.114)] para fracciones de vacío del orden de 0.6. El modelo de van Wijngaarden (1976) presenta el mismo resultado con respecto al modelo empírico para fracciones de vacío del orden de 0.35 y el modelo de Jeffrey (1973) presenta el mismo resultado que el modelo empírico para fracciones de vacío del orden de 0.25.

Como se puede observar todos estos modelos se basan o aplican la teoría de flujo potencial y, al respecto, se puede decir que los términos de segundo orden se deben a la consideración de interacciones hidrodinámicas aplicando distribuciones aleatorias de posición o velocidad con excepción del modelo de Zuber (1964) que no aplica este tipo de distribuciones pero se considera como un modelo de interacción hidrodinámica. Por lo anterior, los efectos debidos al gradiente de la fracción de vacíos sobre el coeficiente de masa gregada sólo se obtienen mediante una celda unitaria excéntrica, Ec. (3.101).

De acuerdo con los resultados anteriores, en forma general se puede decir que el coeficiente de masa virtual (o propiedades efectivas) depende de la fracción de vacíos y de la estructura geométrica de la configuración del sistema en estudio.



**Figura 3.7.** Comportamiento de los efectos de masa virtual contra la fracción de vacíos. Modelo de primer orden [Ec. (3.102)]; Modelo de Maxwell (1991), Ec. (3.108); Maxwell condiciones diluidas Ec. (3.109); Modelo de Jeffrey (1973), Ec. (3.111); Modelo de van Wijngaarden (1976), Ec. (3.112) y Modelo de Cherny y Srebnyuc (1979), Ec. (3.114).

### 3.7.2 Relación de cerradura energía cinética inducida.

Esta relación de cerradura con un modelo de celda unitaria excéntrica para flujo con burbuja y líquido en movimiento está dada en la fila (4) y tercera columna de la Tabla 3.1. De acuerdo con la literatura consultada, el único autor que encontró este término es Mercadier (1991), en la forma que aparece en el segundo término de la Ec. (3.34). Este autor encontró que este término es del orden  $a^6$ , sin embargo ahora se sabe que este término es estrictamente nulo para una celda unitaria concéntrica.

En la gráfica de la Figura 3.8 se presenta el comportamiento de la energía cinética inducida con respecto a  $\gamma^*$  y  $a^*$ , donde la energía cinética inducida en forma adimensional está dada por:

$$\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^{l*} = \frac{\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l}{v_r^2 b} \quad (3.115)$$

En esta gráfica se puede observar que la energía cinética inducida es sumamente pequeña y su variación con respecto a  $\gamma^*$  y  $a^*$  es del orden de 0 a  $-10^{-6}$ . Los valores positivos no tienen sentido debido a que una parte de la burbuja esférica se encuentra fuera de la esfera exterior de radio  $b$ . Con estos cálculos queda claro que esta relación de cerradura es despreciable.

### 3.7.3 Relación de cerradura esfuerzos de Reynolds

Los esfuerzos de Reynolds definidos por la Ec. (3.8b) son inducidos por la presencia y movimiento de la fase dispersa en un medio continuo. Los esfuerzos de Reynolds son de corto alcance y se consideró que en un sistema diluido las desviaciones espaciales de velocidad de la fase líquida que produce una burbuja no están influenciadas por las desviaciones espaciales de velocidad que producen otras burbujas adyacentes (efectos de interacción hidrodinámica entre burbujas adyacentes son despreciables).

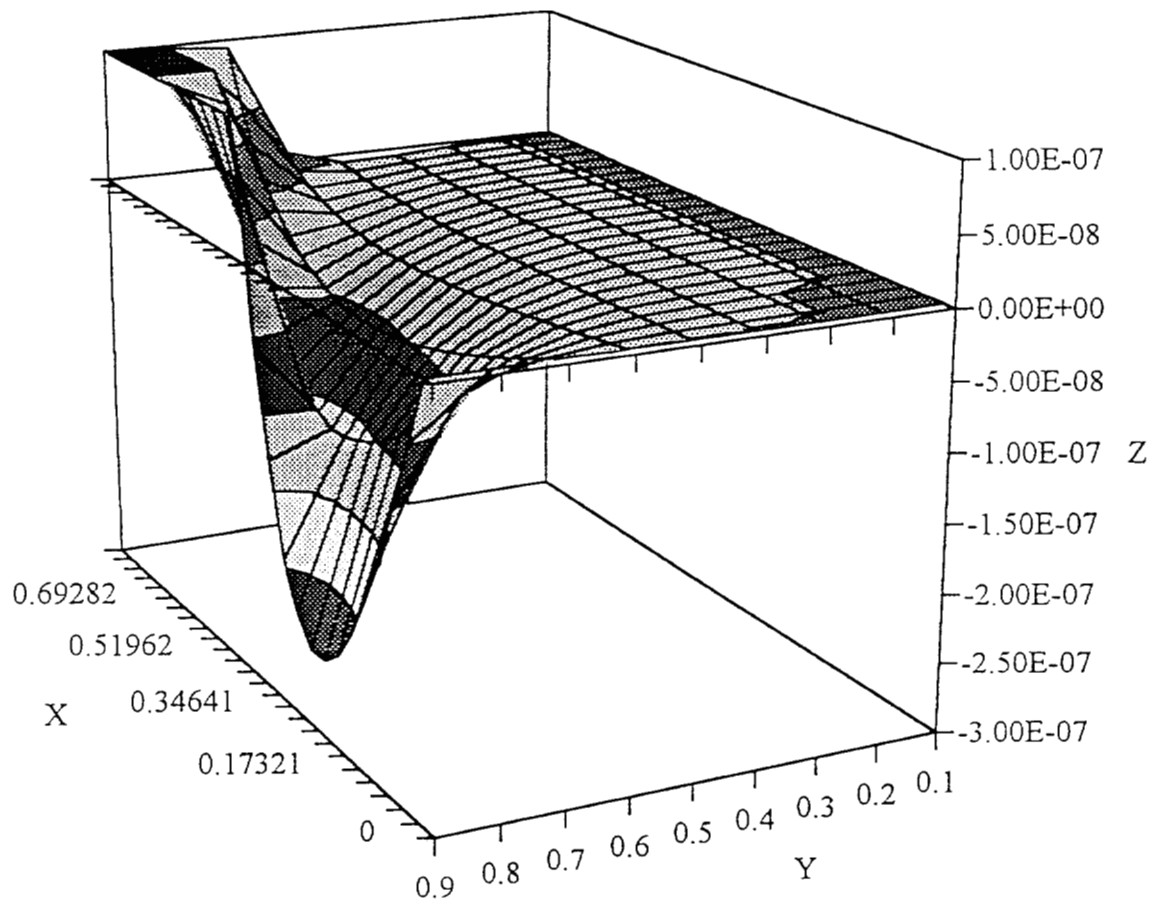


Figura 3.8. Comportamiento de la relación de cerradura energía cinética inducida  $\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^{l*}$  ( $= Z$ ) con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b$  ( $= X$ ) y  $a^* = a/b$  ( $= Y$ ).

Los esfuerzos de Reynolds definidos por la Ec. (3.8b) se pueden escribir como:

$$\tau_l^{Re} = -k(\varepsilon_g) \rho_l \varepsilon_g v_r^2 \quad (3.116)$$

donde  $k$  es un tensor de segundo orden, definido por:

$$k(\varepsilon_g) = \frac{k_c}{1 - \varepsilon_g} - \frac{a^6}{4 \varepsilon_g} \left[ \frac{\mathbf{B}}{3} + d_3 d_3 \right] \quad (3.117)$$

donde

$$k_c = \frac{1}{5} \left[ \frac{3}{4} e_x e_x + \frac{3}{4} e_y e_y + e_z e_z \right] \quad (3.118)$$

En la dirección- $z$  del movimiento los esfuerzos de Reynolds se pueden escribir como:

$$T_{zzl}^{Re} = -k_{zz}(\varepsilon_g) \rho_l \varepsilon_g v_r^2 \quad (3.119)$$

donde

$$k_{zz}(\varepsilon_g) = \frac{k_{zzc}}{1 - \varepsilon_g} - \frac{c_6 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} - \frac{c_7 \varepsilon_g}{(1 - \varepsilon_g)^2} \quad (3.120)$$

$$k_{zzc} = \frac{1}{5} \quad (3.121)$$

$$c_6 = \frac{1}{12} \left[ \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} \right]^2 c_4 \quad (3.122)$$

$$c_7 = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} \right]^2 c_5^2 \quad (3.123)$$

$$c_4 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(9 \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta + 1)}{r^3(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.124)$$

$$c_5 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \ln r(\theta, \varphi) (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.125)$$

El caso concéntrico se obtiene haciendo  $c_6 = k_{zzc}$  y  $c_7 = 0$  en la Ec. (3.120).

Es práctica común denotar al coeficiente de los esfuerzos de Reynolds por  $k$ . En este trabajo se agrega el subíndice  $zz$  para indicar que se refiere a la dirección- $z$ , debido a su carácter tensorial es diferente en las otras dos direcciones.

En la gráfica de la Figura 3.9 se presenta el comportamiento del coeficiente  $k_{zz}$  definido por la Ec. (3.120). En esta figura se puede observar que dicho coeficiente crece negativamente muy cerca del centroide con radios de burbuja adimensional  $a^*$  del orden de 0.7 a 0.9, siendo muy marcado su comportamiento en este rango y tiende a cero cuando la burbuja esférica se aleja del centroide. Durante la ejecución de las pruebas numéricas para determinar el coeficiente  $k_{zz}$ , se observaron valores positivos de éste y esto ocurre cuando la burbuja esférica corta la esfera exterior, lo cual fue un indicativo para asegurar que la localización de la burbuja estuviera dentro de la esfera externa.

Con respecto a los modelos reportados en la literatura, el de van Wijngaarden (1976) considera efectos de interacción entre burbujas y obtiene  $k_{zz} = 1/5$ , el cual corresponde con el obtenido en este trabajo mediante el modelo de celda unitaria concéntrica. También Wallis (1989) reporta el mismo resultado con un modelo de celda macroscópica. Otro trabajo de la literatura que conduce al mismo resultado es el de Biesheuvel y van Wijngaarden (1984) con un término adicional que considera efectos de cambio del radio de la esfera, el cual es importante en procesos de cambio de fase.

El modelo del presente trabajo y de los autores mencionados en los párrafos anteriores

consideran flujo uniforme. Por otro lado, en el trabajo de Pauchon y Smereka (1992) se considera flujo no uniforme y las desviaciones del potencial de velocidad incluyen un término del gradiente de la velocidad de la fase líquida. En el modelo de dichos autores los esfuerzos de Reynolds se definen en términos de la energía cinética de las desviaciones espaciales, y reportan que  $k_{zz} = 1/2$ . Se comprobó que aplicando el potencial de velocidad para el flujo no uniforme de estos autores en el modelo de celda unitaria concéntrica,  $k_{zz} = 1/5$ , observando que los efectos de excéntrica sí modifican el resultado de  $k_{zz}$ , mientras los de flujo no uniforme no modifican a  $k_{zz}$ . Smereka y Milton (1991) estudian la analogía que existe entre flujo burbuja y la conductividad térmica efectiva en compuestos y obtienen:

$$k_{zz}(\varepsilon_g) = \left[ \frac{1 - \varepsilon_g}{\sigma^*} - 1 \right] \frac{1}{\varepsilon_g} \quad (3.126)$$

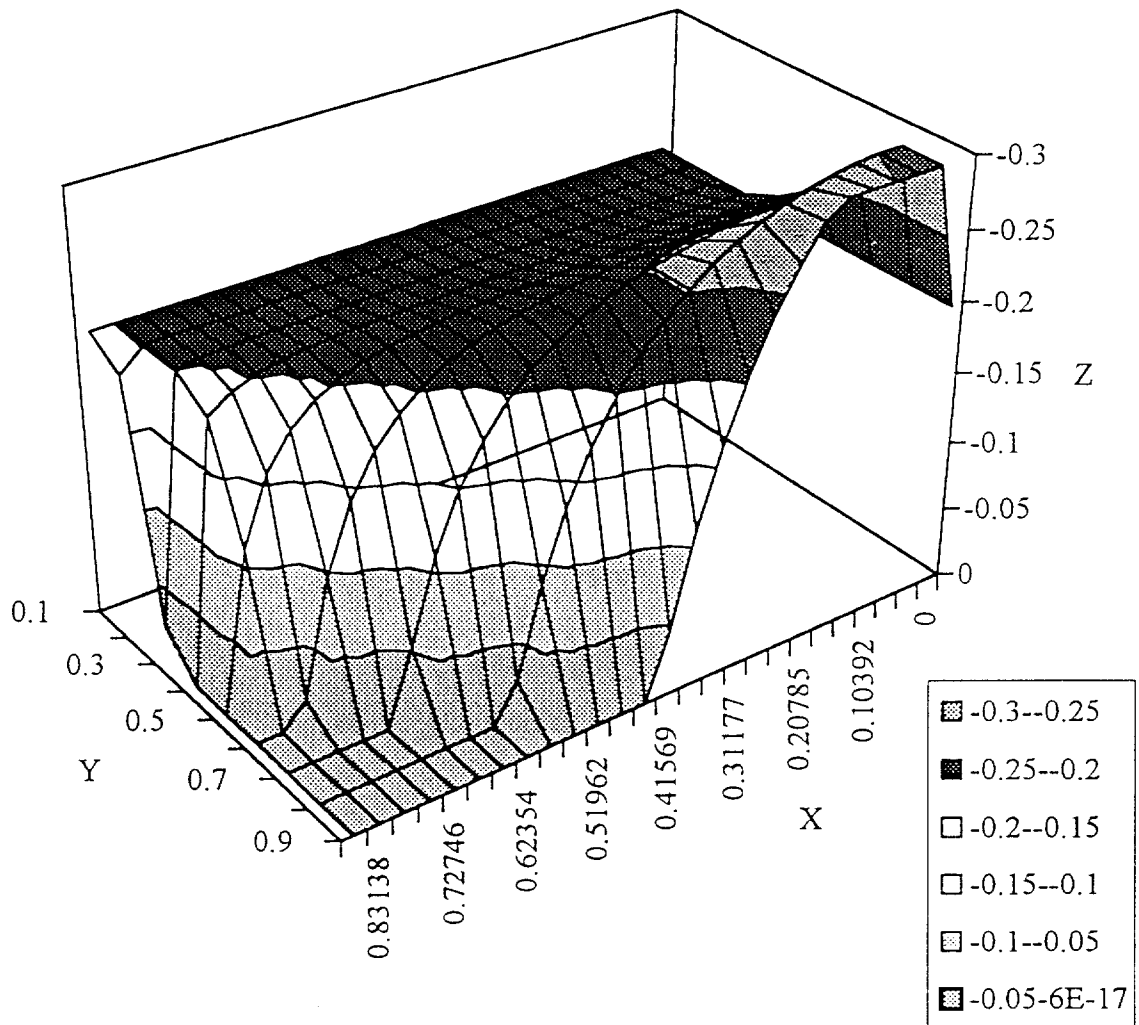
Sustituyendo el resultado de Jeffrey (1973) [Ec. (3.110)] en la ecuación anterior, se obtiene:

$$k_{zz}(\varepsilon_g) = \frac{1}{2} (1 + 0.32 \varepsilon_g) + O(\varepsilon_g^3) \quad (3.127)$$

para obtener el resultado anterior se aplicó una serie binomial (o también expandiendo alrededor de  $\varepsilon_g = 0$ ). Considerando términos de primer orden (sistema en dos fases con fase dispersa muy diluida), se obtiene el resultado de Pauchon y Smereka (1992). Por su parte, Kok (1988) reporta lo mismo. Sustituyendo el resultado de Maxwell [Ec. (3.107)] en la ecuación de Smereka y Milton (1991), se obtiene que:

$$k_{zz}(\varepsilon_g) = \frac{1}{2} \varepsilon_g + O(\varepsilon_g) \quad (3.128)$$

Este es un resultado importante porque reproduce el resultado de Pauchon y Smereka (1992), confirmando que la distribución Maxwelliana es más apropiada para un sistema disperso muy diluido, tal y como lo discuten otros autores (Ochoa, *et al.*, 1994).



**Figura 3.9.** Comportamiento del coeficiente de Reynolds  $k_{zz}$  ( $= Z$ ) con respecto a  $\gamma^* = \gamma/b$  ( $= X$ ) y  $a^* = a/b$  ( $= Y$ ).

Pauchon y Banerjee (1988) utilizan el modelo de la esfera encapsulada de Zuber (1964) y obtienen:

$$k_{zz}(\varepsilon_g) = \frac{1 + 5 \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g)}{5 (1 - \varepsilon_g)^2} \quad (3.129)$$

En la Figura 3.10 se compara el comportamiento del coeficiente de los esfuerzos de Reynolds de modelo de Pauchon y Banerjee (1988) contra el modelo de la celda unitaria excéntrica para  $\gamma = 0.06928$  y  $\gamma = 0.45033$ . Se puede observar que el modelo de Pauchon y Banerjee (1988) crece rápidamente con fracciones de vacíos bajas, mientras que el modelo de celda unitaria excéntrica con burbuja esférica muy cerca del centroide de la esfera exterior ( $\gamma = 0.06928$ ) crece lentamente en forma lineal hasta alcanzar un valor alrededor de 0.3. Por su parte el modelo con burbuja esférica localizada mucho más lejos que en el caso anterior ( $\gamma = 0.45033$ ) también crece en forma lineal hasta alcanzar un valor de 0.23 y esto ocurre con fracción de vacíos de 0.343. Después tiende a cero en el rango de fracción de vacíos de 0.23 a 0.512.

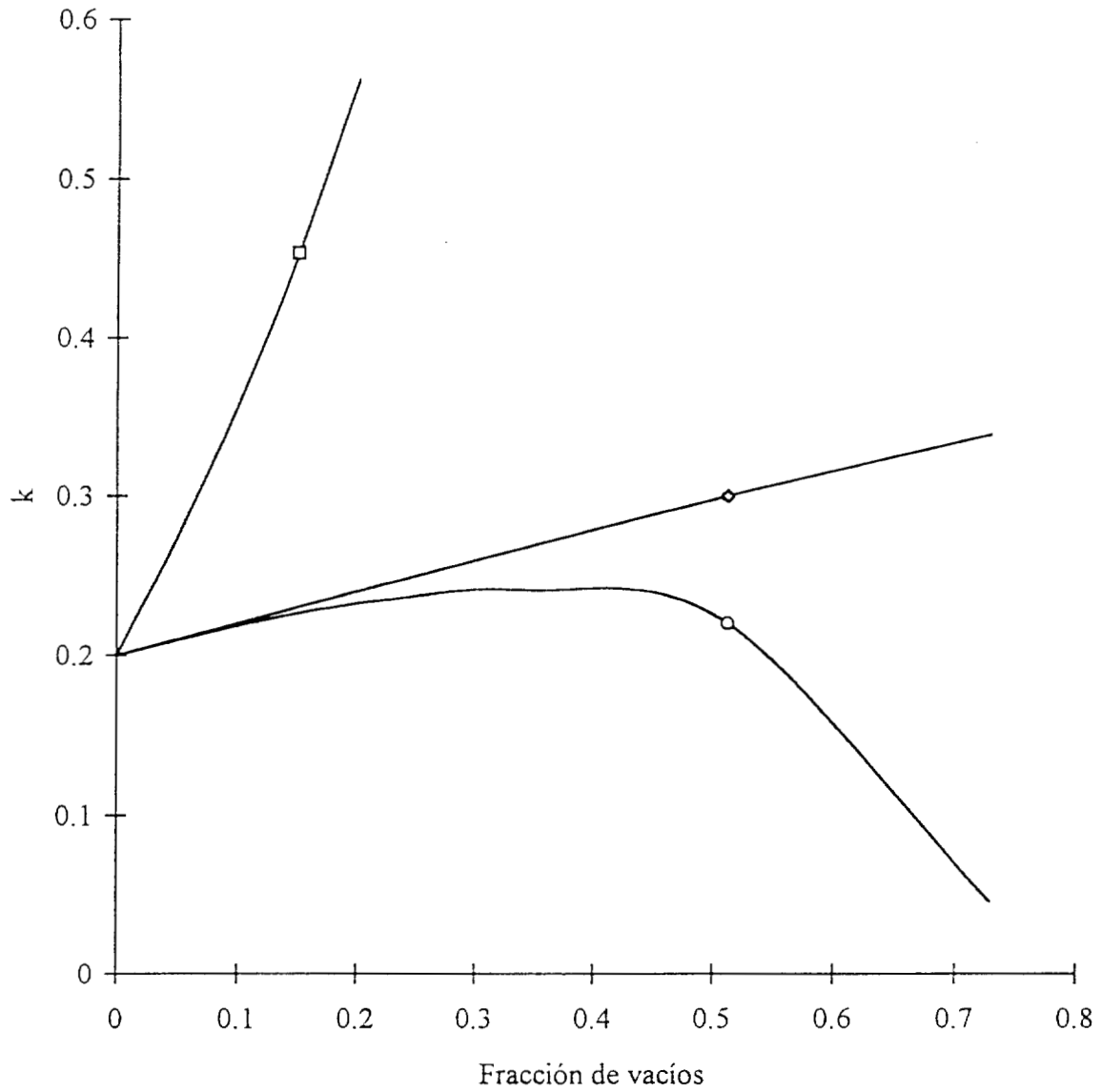
#### 3.7.4 Relación de cerradura diferencia de los promedio de la presión

Esta relación de cerradura está definida en la Tabla 3.1 y se puede escribir como

$$\langle \Delta p_{lg} \rangle = \langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_l \rangle^l = - \xi \rho_l v_r^2 \quad (3.130)$$

donde  $\xi = 1/4$  es el mismo para la celda unitaria excéntrica o concéntrica con burbuja en movimiento.

Diferentes autores (Pauchon y Smereka, 1992; Wallis, 1991) también obtuvieron  $\xi = 1/4$ . Biesheuvel y van Wijngaarden (1984) obtienen el mismo resultado con términos adicionales que consideran efectos de cambio de radio de la burbuja.



**Figura. 3.10.** Comparación de modelos del coeficiente de los esfuerzos de Reynolds. Este trabajo con celda unitaria excéntrica, Ec. (3.120), con ( $\diamond$ )  $\gamma = 0.06928$  y ( $\circ$ )  $\gamma = 0.45033$ ; ( $\square$ ) Modelo de Pauchon y Banerjee (1988) [Ec. (3.129)].

Pauchon y Banerjee (1988) aplican el modelo de la esfera encapsulada de Zuber (1964) y obtienen:

$$\xi(\varepsilon_g) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1 + \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \quad (3.131)$$

Se puede observar en forma cualitativa que este coeficiente crece conforme la fracción de vacíos del gas se incrementa.

### 3.8 Promedio interfacial de las desviaciones espaciales de la presión

Sustituyendo las Ecs. (3.100) y (3.130) en la Ec. (3.34) se obtiene la forma general de la relación de cerradura promedio interfacial de las desviaciones espaciales de la presión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} n_{lg} dA &= \nabla \cdot (\varepsilon_l T_l^{Re}) - \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) a_{VM} \\ &- \rho_l \varepsilon_l \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \nabla \right] (\varepsilon_l^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g)) - \rho_l \xi v_r^2 \nabla \varepsilon_l \end{aligned} \quad (3.132)$$

En la ecuación anterior no se incluye el segundo término de la Ec. (3.34) debido a que tiene un orden magnitud de:  $\langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l \sim 10^{-9}$ , mientras que los demás términos tienen órdenes de magnitud mucho mayores que  $10^{-9}$ , como se puede observar en los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Por lo tanto es despreciable con respecto a los demás términos que aparecen en la Ec. (3.34).

En la ecuación anterior  $a_{VM}$  es el vector aceleración de masa agregada en un sistema de referencia que se mueve con la burbuja esférica:

$$a_{VM} = \frac{d_g}{dt} \langle v_g \rangle^g - \frac{d_l}{dt} \langle v_l \rangle^l \quad (3.133)$$

donde

$$\frac{d_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle v_k \rangle^k \cdot \nabla \quad (3.134)$$

En este trabajo a  $U_r$  se le llama energía cinética relativa:

$$U_r = \frac{1}{2} |\langle v_g \rangle^g|^2 - \frac{1}{2} |\langle v_l \rangle^l|^2 \quad (3.135)$$

Distintos autores (Pauchon y Banerjee, 1986 y 1988 y Lahey, 1991) estudiaron el fenómeno de flujo burbujeante con un modelo de dos fluidos y reportan que el promedio interfacial de las desviaciones espaciales de la presión es igual a:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} \mathbf{n}_{lg} dA = - \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \mathbf{a}_{VM} \quad (3.136)$$

donde  $C_{VM} = 1/2 \varepsilon_g$ , el cual corresponde al obtenido en este trabajo con la celda unitaria concéntrica. En forma muy sencilla se puede demostrar que el resultado anterior de estos autores no está completo debido a que todos ellos aplicaron la descomposición espacial de la presión local instantánea de Banerjee y Chan (1980) y por lo tanto, deben obtener una expresión que incluya la diferencia de los promedios de la presión. Esta observación también fue reportada por Pauchon y Smereka (1992).

Stuhmiller (1977) estudió el efecto de la diferencia de presión interfacial en flujo burbuja. Para ello, aplicó el modelo promediado en tiempo de Ishii (1973) y, en relación a esta cerradura, encontró:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} \mathbf{n}_{lg} dA = - \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \mathbf{a}_{VM} - \rho_l \xi v_r^2 \nabla \varepsilon_l \quad (3.137)$$

Con esto en consideración el resultado encontrado en el presente trabajo se obtienen dos términos adicionales independiente del tipo de celda como se puede observar en la Ec. (3.132).

### 3.9 Conclusiones

Se derivaron las relaciones de cerradura en forma general para el modelo de flujos separados en régimen de flujo burbuja. Con el modelo de celda unitaria excéntrica se encontró que el promedio intrínseco del potencial de velocidad es distinto de cero y es nulo para la celda unitaria concéntrica.

La relación de cerradura de masa agregada con el modelo de celda unitaria excéntrica contiene como término adicional, con respecto al concéntrico, el gradiente de la fracción de vacíos, cuyo efecto global es mayor con mayores concentraciones de burbujas y menor para concentraciones menores de burbujas. La relación de cerradura de los esfuerzos de Reynolds con el modelo de celda unitaria excéntrica contiene un término adicional con respecto al concéntrico cuyo efecto depende fuertemente de la posición excéntrica de la burbuja. La relación de cerradura de energía cinética inducida es distinta de cero, pero su valor es muy pequeño del orden de  $10^{-9}$ .

Hasta donde se sabe, las relaciones de cerraduras presentadas en este trabajo con el modelo de celda unitaria excéntrica no habían sido deducidas con anterioridad. El impacto que tienen las relaciones de cerradura del modelo excéntrico sobre el comportamiento en el flujo en dos fases burbujeante y los fenómenos de propagación de la fracción de vacíos se presentan en detalle en el Capítulo 5 y 6.

Se encontró que la intergral sobre el área interfacial de las desviaciones espaciales de la presión [Ec. (3.132)] está compuesto por cuatro términos: (1) la divergencia del tensor de los esfuerzos de Reynolds, (2) diferencia de presión interfacial, (3) masa agregada y (4) dependencia espacial y temporal del coeficiente de masa agregada. Distintos autores (Pauchon y Banerjee, 1986 y 1988 y Lahey, 1991) sólo consideran el término de masa agregada para estudiar fenómenos de propagación de ondas de fracción de vacíos, sin embargo su resultado no es completo debido a que usan la misma descomposición espacial de la presión local instantánea de Banerjee y Chan (1980) y, por lo tanto, deben obtener una expresión idéntica a la Ec. (3.137). Esta observación también fue reportada por Pauchon y Smereka (1992).

Es importante apuntar que algunos autores (Stuhmiller, 1977; Pauchon y Banerjee, 1986) han obtenido soluciones básicas con un modelo de flujos separados sin incluir los efectos de los esfuerzos de Reynolds. Esto es debido que el límite de validez del modelo no está completamente gobernado por dichos efectos, pero sí contribuyen en el rango de comportamiento hiperbólico, tema que fue abordado en el Capítulo 5 del presente trabajo.

Los resultados obtenidos con la celda unitaria excéntrica son los primeros de su tipo por lo que no fue posible establecer comparaciones, aunque puede considerarse como una generalización del modelo de celda unitaria concéntrica ya muy desarrollado en la literatura (Zuber, 1964; Voinov, 1973; van Wijngaarden, 1976; Stuhmiller, 1977; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1988; Pauchon y Smereka, 1992).

En una celda unitaria excéntrica el promedio intrínseco del potencial de velocidad es diferente de cero y, por lo tanto, se encontró que las desviaciones del potencial de velocidad son distintas de las perturbaciones del potencial de velocidad.

La pregunta surgida después del desarrollo de este capítulo es: ¿Cuál es el límite válido del grado de excéntrica de la burbuja esférica para representar adecuadamente los efectos no homogéneos en flujo burbujenante?. En los Capítulos 5 y 6 se realizan análisis detallados con el modelo acoplado, obteniendo resultados que nos permiten contestar al menos parcialmente esta pregunta.

(1992). El procedimiento empleado en el presente trabajo permite además de (2) obtener (1) como términos ya conocidos en la literatura. Con respecto a (3), en el presente trabajo se encontró que el coeficiente de masa virtual no es constante (en la literatura sobre el tema se considera que es una constante).

Las ecuaciones promedio de masa de la fase continua y la fase dispersa en una dimensión y régimen transitorio están dadas por las Ecs. (4.22) y (4.28), respectivamente, las cuales se obtienen para el modelo de celda excéntrica y luego se reducen a la celda concéntrica, Ecs. (4.23) y (4.29).



## 4. SISTEMA COMPLETO DE ECUACIONES

En este capítulo se presenta el acoplamiento de las ecuaciones promedio de cantidad de movimiento del modelo de flujos separados que fue desarrollado en el Capítulo 2, con las relaciones de cerradura usando el modelo de celda excéntrica del Capítulo 3. De esta manera se obtiene un conjunto cerrado de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) formado por las ecuaciones promediadas de masa de cada una de las fases y una relación independiente de la presión promedio intrínseca de la fase gas. Posteriormente se presenta el caso del modelo de celda excéntrica y como un caso particular el modelo de celda concéntrica. Se realiza una comparación del conjunto completo de ecuaciones obtenidas entre estos dos modelos, así como también con modelos previos de la literatura. Finalmente se presenta el conjunto completo de ecuaciones en forma unidimensional.

El conjunto cerrado de ecuaciones del modelo de dos fluidos encontrado es función de las variables dependientes y de los parámetros de las interacciones interfaciales de cantidad de movimiento. Estos parámetros son constantes para el modelo de celda unitaria concéntrica y son función de la fracción de vacíos con el modelo de celda unitaria excéntrica.

### 4.1. Ecuaciones promediadas de dos fluidos

Las ecuaciones promedio de transporte de masa y cantidad de movimiento para la fase gas y líquida están dadas en el Capítulo 3 por las Ecs. (3.1)-(3.4). En esta sección se desarrollan los operadores diferenciales para obtener un conjunto manejable de ecuaciones en términos de variables dependientes y parámetros interfaciales. Las ecuaciones de masa y cantidad de movimiento de la fase líquida se expresan en términos de la fracción de vacíos del gas ( $\varepsilon_g$ ).

Ecuación promediada de transporte de masa para la fase líquida:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - (1 - \varepsilon_g) \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_l \rangle^l + \langle \mathbf{v}_l \rangle^l \cdot \nabla \varepsilon_g = 0 \quad (4.1)$$

Ecuación promedio de cantidad de movimiento para la fase líquida se obtiene de las Ecs.

(3.1) y (3.2):

$$\begin{aligned} \rho_l (1 - \varepsilon_g) \frac{d_l}{dt} \langle \mathbf{v}_l \rangle^l + (1 - \varepsilon_g) \nabla \langle p_l \rangle^l + \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_g \\ - \nabla \cdot [(1 - \varepsilon_g) \mathbf{T}_l^{Re}] - (1 - \varepsilon_g) \rho_l \mathbf{g} = \mathbf{M}_{lg} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde la derivada temporal está dada por la Ec. (3.134) con  $k = l$ , y

$$\mathbf{M}_{km} = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{n}_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{T}_{km} dA \quad (4.3)$$

con  $k = l$  y  $m = g$ .

Ecuación promedio de transporte de masa para la fase gas:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \varepsilon_g \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_g \rangle^g + \langle \mathbf{v}_g \rangle^g \cdot \nabla \varepsilon_g = 0 \quad (4.4)$$

Ecuación promedio de cantidad de movimiento para la fase gas:

$$\rho_g \varepsilon_g \frac{d_g}{dt} \langle \mathbf{v}_g \rangle^g + \varepsilon_g \nabla \langle p_g \rangle^g - \varepsilon_g \rho_g \mathbf{g} = \mathbf{M}_{gl} \quad (4.5)$$

donde la derivada temporal está dada por la Ec. (3.134) con  $k = g$  y  $\mathbf{M}_{gl}$  está dada por la Ec.

(4.3) con  $k = g$  y  $m = l$ .

La condición de salto de cantidad de movimiento interfacial promedio definida en el Capítulo 3 por la Ec. (3.5), se puede escribir de la siguiente forma:

$$M_{lg} + M_{gl} = (\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg} + 2H_g \sigma) \nabla \varepsilon_g \quad \text{en } A_{lg} \quad (4.6)$$

donde  $M_{lg}$  y  $M_{gl}$  están definidas por las Ecs. (4.3) escribiendo los índices respectivos.

Los términos de cerradura de este conjunto de ecuaciones son:  $M_{lg}$ ,  $\langle \Delta p_{lg} \rangle$ ,  $T^{Re}_l$ . También es necesario proponer una relación independiente para  $\langle p_g \rangle^g$ .

#### 4.2 Presión promedio intrínseco de la fase gaseosa

Para obtener un conjunto cerrado de EDP's es necesario establecer relaciones independientes de la presión promedio intrínseco de la fase gas  $\langle p_g \rangle^g$  que aparece en la Ec. (4.5) y de las presiones interfaciales  $\langle p_l \rangle_{lg}$  y  $\langle p_g \rangle_{lg}$ , que aparecen en la Ec. (4.6).

La relación de cerradura dada por la Ec. (3.130),

$$\langle \Delta p_{lg} \rangle = \langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_l \rangle^l = -\xi \rho_l v_r^2 \quad (4.7)$$

es fundamental para establecer que las presiones en cada una de las fases no son iguales, donde  $\xi = 1/4$  (mismo  $\xi$  para celda excéntrica o concéntrica con burbuja en movimiento). Además, permite relacionar la presión de la fase gaseosa con la presión de la fase líquida y las fuerzas de tensión superficial.

De la Ec. (4.7) y por la hipótesis inicial  $\langle \Delta p_{gl} \rangle = 0$  (H.1 del Capítulo 3), entonces

$$\nabla \langle p_g \rangle^g = \nabla \langle p_l \rangle^l + \nabla \langle \Delta p_{lg} \rangle \quad (4.8)$$

Esta ecuación es la relación independiente requerida.

En este trabajo se propone que

$$\mathbf{M}_{lg} + \mathbf{M}_{gl} = (\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg}) \nabla \varepsilon_g \quad \text{en } A_{lg} \quad (4.9)$$

de donde

$$\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg} = -\sigma H_g \quad (4.10)$$

### 4.3 Fuerzas interfaciales por unidad de volumen

Sustituyendo las Ecs. (3.11) y (3.132) en la Ec. (4.3), se obtienen las fuerzas interfaciales por unidad de volumen que ejercen las burbujas sobre la fase líquida:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{lg} = & -\nabla \cdot \left[ (1 - \varepsilon_g) \mathbf{T}_l^{Re} \right] + \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \mathbf{a}_{VM} + \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_g + \varepsilon_g F_D \\ & + \rho_l (1 - \varepsilon_g) \left[ \mathbf{v}_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \nabla \right] \left[ (1 - \varepsilon_g)^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g) \right] \quad \text{en } A_{lg} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Las fuerzas interfaciales por unidad de volumen que ejerce la fase líquida sobre la fase gaseosa  $\mathbf{M}_{gl}$ , definida por la Ec. (4.3), se obtienen de la Ec. (4.11) y resolviendo para  $\mathbf{M}_{gl}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{gl} = & H_g \sigma \nabla \varepsilon_g + \nabla \cdot \left[ (1 - \varepsilon_g) \mathbf{T}_l^{Re} \right] - \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \mathbf{a}_{VM} - \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_g \\ & - \varepsilon_g F_D - \rho_l (1 - \varepsilon_g) \left[ \mathbf{v}_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \nabla \right] \left[ (1 - \varepsilon_g)^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g) \right] \quad \text{en } A_{lg} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La diferencia que presentan estas dos ecuaciones son las fuerzas interfaciales debido a los efectos de tensión superficial.

### 4.4 Ecuaciones de cantidad de movimiento

Para la fase líquida, se sustituye la Ec. (4.11) en la Ec. (4.2):

$$\begin{aligned} -\rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \frac{d_g}{dt} \langle \mathbf{v}_g \rangle^g + \rho_l \left[ (1 - \varepsilon_g) + C_{VM}(\varepsilon_g) \right] \frac{d_l}{dt} \langle \mathbf{v}_l \rangle^l + (1 - \varepsilon_g) \nabla \langle p_l \rangle^l \\ - (1 - \varepsilon_g) \rho_l \mathbf{g} = \rho_l (1 - \varepsilon_g) \left[ \mathbf{v}_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \nabla \right] \left[ (1 - \varepsilon_g)^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g) \right] + \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (4.13)$$

en donde se sustituyó también la aceleración de masa agregada definida por la Ec. (3.133) del Capítulo 3. Se puede observar que en esta ecuación particular no aparecen los términos de los esfuerzos de Reynolds ni la diferencia de presión interfacial, porque al sustituir las fuerzas interfaciales por unidad de volumen de la fase líquida, éstos se cancelan. Esto representa una diferencia con respecto a los trabajos de Pauchon y Banerjee (1986 y 1988), Ruggles *et al.* (1988a y 1988b), Park *et al.* (1990), Lahey (1991) y Drew (1992). Pauchon y Smereka (1992) identificaron sólo el término de diferencia de presión interfacial, el cual había sido obtenido previamente por Stuhmiller (1977).

En la ecuación anterior, la función del coeficiente de masa agregada  $C_{VM}(\varepsilon_g)$  está dada por la Ec. (3.101). Sustituyendo la Ec. (4.12) en el balance de cantidad de movimiento promediado de la fase gas, Ec. (4.5) resulta:

$$\begin{aligned}
 & [\rho_g \varepsilon_g + \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g)] \frac{d_g}{dt} \langle v_g \rangle^g - \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \frac{d_l}{dt} \langle v_l \rangle^l \\
 & + \varepsilon_g \nabla \langle p_l \rangle^l + \nabla (\varepsilon_g \langle \Delta p_{lg} \rangle) - \varepsilon_g \rho_g g = H_g \sigma \nabla \varepsilon_g \\
 & + \nabla \cdot [(1 - \varepsilon_g) T_l^{Re}] - \rho_l (1 - \varepsilon_g) \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \nabla \right] [(1 - \varepsilon_g)^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g)] - \varepsilon_g F_D
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde se ha utilizado la expresión (4.8) y la relación

$$\nabla (\varepsilon_g \langle \Delta p_{lg} \rangle) = \varepsilon_g \nabla \langle \Delta p_{lg} \rangle + \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_g \tag{4.15}$$

Los términos de cerradura que aparecen en la Ec. (4.14) están dados por:

$$T_l^{Re} = -k(\varepsilon_g) \rho_l \varepsilon_g v_r^2 \tag{4.16}$$

donde  $k$  es un tensor de segundo orden, definido por la Ec. (3.117).

#### 4.5 Modelo promediado unidimensional

El modelo unidimensional es un caso particular del modelo tridimensional. El modelo físico consiste en una columna de burbujeo vertical y los promedios se llevan a cabo en rodajas completas de ella, dando por resultado variables promedio que sólo son función de  $t$  y  $z$ .

La ecuación promediada de masa de la fase líquida, dada por la Ec. (4.1) en una dimensión, es:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l + \langle v_{zl} \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = 0 \quad (4.17)$$

donde

$$\langle v_k \rangle^k = \langle v_{zk} \rangle^l e_k \quad \text{para } k = l, g \quad (4.18)$$

Ecuación unidimensional promediada de cantidad de movimiento de la fase líquida, Ec. (4.13):

$$\begin{aligned} & -\rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g + \rho_l [(1 - \varepsilon_g) + C_{VM}(\varepsilon_g)] \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l \\ & + (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l - \rho_l (1 - \varepsilon_g) \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial z} \right] [(1 - \varepsilon_g)^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g)] \\ & = - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (4.19)$$

Desarrollando los términos de esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_l v_r C_{VM}(\varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - \frac{\rho_l U_r C_{VM}(\varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} - \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g \\ & + \rho_l [(1 - \varepsilon_g) + C_{VM}(\varepsilon_g)] \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l + (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l \\ & - \rho_l v_r \frac{\partial C_{VM}(\varepsilon_g)}{\partial t} - \rho_l U_r \frac{\partial C_{VM}(\varepsilon_g)}{\partial z} = - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde  $C_{VM}(\varepsilon_g)$  está dada por la Ec. (3.101) y en una dimensión es

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = \frac{c_3}{\varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \quad (4.21)$$

donde  $c_3 = 1/2$ . Derivando  $C_{VM}(\varepsilon_g)$  con respecto a  $t$  y  $z$  y sustituyendo en la Ec. (4.21) se tiene:

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - c_3 \rho_l \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g + \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l - c_3 \rho_l \varepsilon_g \langle v_{zg} \rangle^g \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g \\ & + \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) \langle v_{zl} \rangle^l \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l - \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} + (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l \\ & + \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g - \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & + \frac{\rho_l c_3 c_2 (1 + \varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)^2} \left[ v_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & + \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como se puede observar esta ecuación es muy compleja para ser evaluada analíticamente.

Como caso particular, el modelo de celda concéntrica se obtiene cuando  $c_2 = 0$  ( $c_1 =$

$0 \Rightarrow c_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - c_3 \rho_l \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g + \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l \\ & - \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} - c_3 \rho_l \varepsilon_g \langle v_{zg} \rangle^g \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g + \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) \langle v_{zl} \rangle^l \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l \\ & + (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l = - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (4.23)$$

Los términos primero y cuarto del lado izquierdo no han sido reportados en la literatura y, por

lo tanto, se analiza su impacto en el modelado de los fenómenos de propagación en flujo burbujeante en los Capítulos 5 y 6.

Ecuación promediada de masa de la fase gas, dada por la Ec. (4.5), en una dimensión:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g + \langle v_{zg} \rangle^g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = 0 \quad (4.24)$$

Ecuación promedio de cantidad de movimiento de la fase gas está dada por la Ec. (4.14):

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \left[ \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} - H_g \sigma \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} + (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g \\ & - \rho_l c_3 \varepsilon_g \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_g \langle \Delta p_{lg} \rangle) - \frac{\partial}{\partial z} [(1 - \varepsilon_g) T_{zzl}^{Re}] \\ & - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g - \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & - \frac{\rho_l c_3 c_2 (1 + \varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)^2} \left[ v_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = - \varepsilon_g \rho_g g - \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde

$$T_l^{Re} = T_{zzl}^{Re} e_z e_z \quad (4.26)$$

Los esfuerzos de Reynolds del modelo unidimensional se obtienen de las Ecs. (3.119) y (3.120):

$$T_{zzl}^{Re} = - \left[ k_{zzc} - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \frac{\rho_l v_r^2 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \quad (4.27)$$

Sustituyendo las Ecs. (4.7) y (4.27) en la Ec. (4.25) y desarrollando los términos se

obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g - \rho_l c_3 \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l \\
& + \left\{ \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} - H_g \sigma + \rho_l v_r^2 \left[ k_{zzc} - \xi - 2 c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 (2 - \varepsilon_g) \varepsilon_g}{(1 - \varepsilon_g)^2} \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\
& + \left[ (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \langle v_{zg} \rangle^g + 2 \rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zzc} - \xi - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \right] \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g \quad (4.28) \\
& - \left[ \rho_l c_3 \varepsilon_g \langle v_{zl} \rangle^l + 2 \rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zzc} - \xi - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \right] \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l \\
& - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g - \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} - \frac{\rho_l c_3 c_2 (1 + \varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)^2} \left[ v_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\
& - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = -\varepsilon_g \rho_g g - \varepsilon_g F_D
\end{aligned}$$

El caso concéntrico se obtiene haciendo en la ecuación anterior  $c_2 = 0$ ,  $c_7 = 0$  y  $c_6 =$

$k_{zzc}$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g - \rho_l c_3 \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l \\
& + \left\{ \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} - H_g \sigma + \rho_l v_r^2 [k_{zzc} (1 - 2 \varepsilon_g) - \xi] \right\} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \quad (4.29) \\
& + \left\{ (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \langle v_{zg} \rangle^g + 2 \rho_l v_r \varepsilon_g [k_{zzc} (1 - \varepsilon_g) - \xi] \right\} \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g \\
& - \left\{ \rho_l c_3 \varepsilon_g \langle v_{zl} \rangle^l + 2 \rho_l v_r \varepsilon_g [k_{zzc} (1 - \varepsilon_g) - \xi] \right\} \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l = -\varepsilon_g \rho_g g - \varepsilon_g F_D
\end{aligned}$$

## 4.6 Conclusiones

Se sustituyeron las relaciones de cerradura para flujo burbujeante en las ecuaciones promediadas de continuidad y cantidad de movimiento del modelo de dos fluidos. Las relaciones de cerradura están relacionadas con los fenómenos interfaciales de cantidad de movimiento y  $T_{zzl}^{Re}$  con efectos de desviaciones de velocidad en la fase líquida. Se obtuvo un conjunto cerrado de EDP's en términos de 4 variables dependientes (velocidades promedios de las fases, presión promedio de la fase líquida y fracción de vacíos) y de 7 parámetros interfaciales ( $c_2, c_3, c_6, c_7, \xi, k_{zzc}, H_g$ ) para el modelo excéntrico y de 4 parámetros interfaciales para el modelo concéntrico ( $c_3, \xi, k_{zzc}, H_g$ ).

La condición de salto de cantidad de movimiento considera efectos de tensión superficial mediante un modelo particular dado por la Ec. (4.10).

Las fuerzas interfaciales por unidad de volumen que ejerce la fase dispersa sobre la fase continua  $M_{lg}$ , Ec. (4.11) contiene tres términos adicionales con respecto a trabajos previos:

- (1) divergencia de los esfuerzos de Reynolds,
- (2) diferencia de presión interfacial, y
- (3) efectos de masa agregada dependiente en el tiempo y el espacio [quinto término de la Ec. (4.11)].

Siendo (3) completamente nuevo. En los trabajos previos están incluidos (1) y (2) en las ecuaciones promedio pero no en  $M_{lg}$ , que es el argumento que se quiere resaltar. Stuhmiller (1977) obtiene (2) en  $M_{lg}$ . Tiempo después comprueban este resultado Pauchon y Smereka

## 5. ANALISIS DINAMICO Y VELOCIDADES CARACTERISTICAS

En este capítulo se presenta el análisis dinámico del sistema de EDP's, usando el método de los valores característicos. El procedimiento consiste en encontrar el determinante característico, cuya solución permite establecer la clasificación del sistema de EDP's y su rango de aplicabilidad o validez del modelo. Los valores característicos representan las velocidades de propagación de la onda de fracción de vacíos. Los resultados encontrados por este método se compararon con datos experimentales, obteniendo resultados acordes.

Se analiza una serie de casos para establecer la importancia de los efectos interfaciales, los efectos de masa agregada dependiente del tiempo y del espacio, y también se analizó dicho efecto pero considerándolo constante (tal y como se encuentra en la literatura). Un parámetro importante encontrado en este estudio es el diámetro de burbuja, el cual modifica el dominio de comportamiento hiperbólico de las ondas de propagación.

Los efectos de excentricidad generan un conjunto de EDP's de segundo orden no-lineales, las cuales fueron aproximadas en forma lineal para aplicar el método de los valores característicos. Los efectos no lineales se deben al término de masa agregada obtenido con el modelo de celda unitaria excéntrica, el cual está dado por [Ec. (3.101) del Capítulo 3]:

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = C_{VMC}(\varepsilon_g) \left[ 1 - \frac{c_2}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right]$$

Para el caso concéntrico el gradiente de la fracción de vacíos es nulo y su consideración genera un conjunto de EDP cuasi-lineal. Para ambos casos, es decir, excéntrico y concéntrico se estudian los fenómenos de propagación de ondas cinemáticas.

## 5.1 Introducción

Existen diferentes técnicas para evaluar el modelo de flujos separados en condiciones transitorias: (1) Solución numérica del conjunto de EDP's no lineales (González-Santaló, 1973; Lyczkowski *et al.*, 1975; Travis, *et al.*, 1976; Martini, *et al.*, 1978; Ferch, 1979; Hancox, *et al.*, 1980; Andersen y Shaug, 1984; Doster, 1989; Minami y Shoham, 1994, Espinosa-Paredes y Soria, 1998, entre otros) sujeto a condiciones iniciales y de frontera. Usando esta técnica se pueden investigar efectos no lineales; (2) Linearización del conjunto de ecuaciones y análisis de la relación de dispersión resultante (Ramshaw y Trapp, 1977; Biesheuvel y Gorissen, 1990; Park, *et al.*, 1990; Lahey, 1991; Lisseter y Fowler, 1992). Wallis (1969) presenta el procedimiento para obtener la relación de dispersión; (3) La tercera aproximación es encontrar los valores característicos (raíces características) y vectores característicos del conjunto de EDP (Ramshaw y Trapp, 1977; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1986). Los valores característicos representan las velocidades de propagación del modelo de flujos separados.

Las dos últimas técnicas son comúnmente empleadas para analizar fenómenos de propagación de ondas de vacíos. En este capítulo se aplica la técnica de los valores característicos para estudiar la estabilidad "fuerte" del modelo matemático y para predecir la propagación de fracción de vacíos. En el Capítulo 6 se obtiene la relación de dispersión que se analiza. En el Capítulo 7, se presenta el análisis numérico para cuantificar los efectos no lineales, debidos a los efectos de masa agregada, obtenida en el Capítulo 3, con el modelo de la celda unitaria excéntrica.

Los valores característicos proporcionan suficiente información para determinar las

velocidades de propagación de las ondas de vacíos y en el transcurso de todo el trabajo se le llamarán velocidades características. También los valores característicos permiten establecer la clasificación de las EDP's, es decir, parabólica, hiperbólica o elíptica, así como su rango de comportamiento.

El modelo de flujos separados en régimen de flujo burbuja en conjunto con la hipótesis de fases incompresibles genera dos velocidades características, una mayor que la otra en magnitud. A la de mayor velocidad se le llama velocidad característica rápida y a la de menor velocidad característica lenta (Whitham, 1974).

Desde el punto de vista matemático un sistema con valores característicos reales representa un problema de valores a la frontera bien condicionado, y desde el punto de estabilidad el modelo es estable dentro de ese rango. Sin embargo, un sistema de EDP's del tipo elíptico, el cual presenta valores característicos complejos conjugados, representa un sistema con valores a la frontera mal condicionado, los cuales están relacionadas con inestabilidades (Ramshaw y Trapp, 1978; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1986). Sin embargo, algunos autores mencionan (Soria y de Lasa, 1992b; Brauner y Naron, 1992) que los valores característicos complejos conjugados no necesariamente implican un problema de valores a la frontera mal condicionado y lo atribuyen a inestabilidades de fenómenos físicos de la configuración del flujo tales como transiciones de patrones de flujo. Por ejemplo, una transición de flujo burbuja a flujo tapón (estructura alargada de la burbuja), debido a las interacciones entre burbujas y a la coalición de ellas.

Al respecto, Saiz-Jabardo y Bouré (1989) encontraron experimentalmente que la

transición del patrón de flujo burbuja a flujo tapón está acompañada de inestabilidades y que la velocidad de propagación es mayor que la velocidad promedio del gas. Otras inestabilidades que se han presentado en procesos físicos equipados con reactores nucleares son las transiciones de patrones de flujo y la onda de densidad (Lahey, 1991).

Modelos previos (Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1986; Pauchon y Banerjee, 1988; Ruggles *et al.*, 1988a y 1988b; Park *et al.*, 1990; Lahey, 1991 y Drew, 1992) predicen ondas hiperbólicas donde la velocidad característica rápida no puede ser mayor que la velocidad promedio del gas y la velocidad característica lenta no puede ser inferior a la velocidad promedio de la fase líquida. En el presente trabajo se encontró que los efectos de tensión superficial (dichos efectos no son incluidos por los autores antes mencionados) hacen que las velocidades características rápida y lenta puedan tener velocidades mayor que la velocidad promedio de la fase dispersa y menor que la velocidad promedio de la fase continua, respectivamente.

Es importante destacar que de acuerdo a los requerimientos del método del promedio volumétrico considerado, la ocurrencia de inestabilidades (valores característicos complejos conjugados) será el límite de aplicación del modelo. Esto es debido a las restricciones de escalas de longitud características impuestas, las cuales no satisfacen la transición del patrón de flujo burbuja a flujo tapón, donde un gran número de burbujas disminuye y su tamaño se incrementa a longitudes del orden de magnitud de la longitud característica del sistema completo (Soria de Lasa, 1992b; Espinosa- Paredes y Soria, 1998).

Las relaciones de cerradura con el modelo excéntrico genera un sistema de EDP's no

lineales debido a los efectos de masa agregada, el cual contiene al gradiente de la fracción de vacíos como término adicional con respecto al concéntrico. Este sistema de ecuaciones se aproxima a uno lineal y se encontró que el comportamiento es de tipo parabólico con respecto al gradiente de la fracción de vacíos, independiente de los parámetros interfaciales y excéntricos.

## 5.2 Resumen del conjunto completo de EDP's unidimensional

Ecuación promediada de masa de la fase dispersa:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g + \langle v_{zg} \rangle^g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

Ecuación promediada de cantidad de movimiento de la fase dispersa:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g - \rho_l c_3 \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l \\ & + \left\{ \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} - H_g \sigma + \rho_l v_r^2 \left[ k_{zzc} - \xi - 2c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 (2 - \varepsilon_g) \varepsilon_g}{(1 - \varepsilon_g)^2} \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & + \left[ (\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g) \langle v_{zg} \rangle^g + 2\rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zzc} - \xi - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \right] \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g \\ & - \left[ \rho_l c_3 \varepsilon_g \langle v_{zl} \rangle^l + 2\rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zzc} - \xi - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \right] \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l \\ & - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g - \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} - \frac{\rho_l c_3 c_2 (1 + \varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)^2} \left[ v_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = -\varepsilon_g \rho_g g - \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ecuación promediada de masa de la fase continua:

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l + \langle v_{zl} \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

Ecuación promediada de cantidad de movimiento de la fase continua:

$$\begin{aligned}
& - \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - c_3 \rho_l \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g + \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l \\
& - \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} - c_3 \rho_l \varepsilon_g \langle v_{zg} \rangle^g \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g + \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) \langle v_{zl} \rangle^l \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l \\
& + (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l + \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ \frac{d_{zg}}{dt} \langle v_{zg} \rangle^g - \frac{d_{zl}}{dt} \langle v_{zl} \rangle^l \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\
& + \frac{\rho_l c_3 c_2 (1 + \varepsilon_g)}{(1 - \varepsilon_g)^2} \left[ v_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + U_r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} + \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\
& = - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde

$$\frac{d_{zk}}{dt} \langle v_{zk} \rangle^k = \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zk} \rangle^k + \langle v_{zk} \rangle^k \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zk} \rangle^k \tag{5.5}$$

En la Tabla 5.1 se presentan los parámetros interfaciales y las definiciones empleadas en las ecuaciones anteriores. Las ecuaciones de cantidad de movimiento contienen los parámetros de una celda unitaria excéntrica y se recuperan los parámetros correspondientes a la celda unitaria concéntrica haciendo en ellas  $c_2 = 0$ ,  $c_7 = 0$  y  $c_6 = k_{zgc}$ .

En la Tabla 5.1,  $\gamma$  es la distancia de la burbuja esférica con respecto al sistema de referencia concéntrico y las coordenadas que la definen son  $(h, k, l)$ ,  $V$  es el volumen total y  $b$  es el radio de la burbuja externa con respecto al centroide del sistema concéntrico (Capítulo 3).

### 5.3. Valores características y estabilidad del sistema de EDP's

El análisis que a continuación se presenta consiste en determinar los valores característicos del sistema de EDP's. Se analiza el caso de la celda unitaria excéntrica y como caso límite cuando  $\gamma = 0$  se obtiene el caso de celda unitaria concéntrica.

**Tabla 5.1.** Parámetros interfaciales y definiciones empleadas en el conjunto completo de EDP's

$$c_1 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi) \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (5.6)$$

$$c_2 = \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} c_1 \quad (5.7)$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \quad (5.8)$$

$$c_4 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(9 \cos^4\theta - 6 \cos^2\theta + 1)}{r^3(\theta, \varphi)} \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (5.9)$$

$$c_5 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \ln r(\theta, \varphi) (3 \cos^2\theta - 1) \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \quad (5.10)$$

$$c_6 = \frac{1}{12} \left[ \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} \right]^2 c_4 \quad (5.11)$$

$$c_7 = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} \right]^2 c_5^2 \quad (5.12)$$

$$k_{zzc} = 1/5 \quad (5.13)$$

$$\xi = 1/4 \quad (5.14)$$

$$r(\theta, \varphi) = - [g(\varphi) \operatorname{sen}\theta + l \cos\theta] + \sqrt{[g(\varphi) \operatorname{sen}\theta + l \cos\theta]^2 + (b^2 - \gamma^2)} \quad (5.15)$$

$$g(\varphi) = h \cos\varphi + k \operatorname{sen}\varphi \quad (5.16)$$

$$\gamma^2 = h^2 + k^2 + l^2 \quad (5.17)$$

$$v_r = \langle v_{zg} \rangle^g - \langle v_{zl} \rangle^l \quad (5.18)$$

$$U_r = \frac{1}{2} \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)^2 \quad (5.19)$$

Se analiza el efecto de la masa agregada ( $C_{VM}$ ) como función del tiempo y del espacio y también considerando masa agregada constante (como se encuentra en la literatura).

### 5.3.1 Sistema con celda excéntrica y con dependencia espacial y temporal de $C_{VM}$ .

Para aplicar el método de las características es necesario aproximar el sistema de EDP's no lineales de segundo orden (Sección 5.2) a un sistema de EDP's cuasi-lineales de primer orden. Para ello se propone la siguiente ecuación adicional (Ramshaw y Trapp, 1977):

$$\beta = \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \quad (5.20)$$

Con esta ecuación, los operadores entre derivadas parciales de segundo orden y productos entre operadores diferenciales de las Ecs. (5.2) y (5.4) se reducen a operadores diferenciales de primer orden y los términos no-lineales aparecen como lineales en función de  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2(1 + \varepsilon_g)\beta}{1 - \varepsilon_g} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \left[ \rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) \right] \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g \\ & - \rho_l c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} v_r \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ & + \left\{ \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2(1 + \varepsilon_g)\beta}{1 - \varepsilon_g} \right] - H_g \sigma + \rho_l v_r^2 \left[ k_{zgc} - \xi - 2c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7(2 - \varepsilon_g)\varepsilon_g}{(1 - \varepsilon_g)^2} \right] \right\} \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \\ & + \left\{ \left[ \rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) \right] \langle v_{zg} \rangle^g + 2\rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zgc} - \xi - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \right\} \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g \\ & - \left[ \rho_l c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) \langle v_{zl} \rangle^l + 2\rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zgc} - \xi - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{1 - \varepsilon_g} \right] \right] \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l \\ & + \varepsilon_g \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l - \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} U_r \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\varepsilon_g \rho_g g - \varepsilon_g F_D \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\rho_l v_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2 \beta (1 + \varepsilon_g)}{1 - \varepsilon_g} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} - \rho_l c_3 \varepsilon_g \left[ 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right] \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zg} \rangle^g \\
& + \rho_l \left[ 1 - c_3 \varepsilon_g - \frac{\varepsilon_g c_3 c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right] \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{zl} \rangle^l + \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} v_r \frac{\partial \beta}{\partial t} \\
& - \frac{\rho_l U_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2 \beta (1 + \varepsilon_g)}{1 - \varepsilon_g} \right] \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} - \rho_l c_3 \varepsilon_g \left[ 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right] \langle v_{zg} \rangle^g \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zg} \rangle^g \\
& + \rho_l \left[ 1 - c_3 \varepsilon_g - \frac{\varepsilon_g c_3 c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right] \langle v_{zl} \rangle^l \frac{\partial}{\partial z} \langle v_{zl} \rangle^l + (1 - \varepsilon_g) \frac{\partial}{\partial z} \langle p_l \rangle^l \\
& + \frac{\rho_l \varepsilon_g c_3 c_2}{1 - \varepsilon_g} U_r \frac{\partial \beta}{\partial z} = - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Las Ecs. (5.1), (5.3), (5.20), (5.21) y (5.22) constituyen el conjunto de ecuaciones transitorias gobernantes para flujo burbujeante, las cuales se pueden escribir en forma matricial:

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial z} = D \tag{5.23}$$

donde  $U$  es un vector columna de variables dependientes dado por:

$$U = \begin{pmatrix} \varepsilon_g \\ \langle v_{zg} \rangle^g \\ \langle v_{zl} \rangle^l \\ \langle p_l \rangle^l \\ \beta \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

$D$  es un vector columna de variables algebraicas, el cual está dado por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon_g \rho_g g - \varepsilon_g F_D \\ - (1 - \varepsilon_g) \rho_l g + \varepsilon_g F_D \\ \beta \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

y  $A$  y  $B$  son matrices de coeficientes, definidas por:

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\rho_1 \nu_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2(1 + \varepsilon_g)\beta}{1 - \varepsilon_g} \right] & \left[ \rho_g \varepsilon_g + \rho_1 c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) \right] & -\rho_1 c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) & 0 & -\frac{\rho_1 \varepsilon_g c_3 c_2 \nu_r}{1 - \varepsilon_g} & 0 \\
-\frac{\rho_1 \nu_r c_3}{1 - \varepsilon_g} \left[ 1 - \frac{c_2 \beta (1 + \varepsilon_g)}{1 - \varepsilon_g} \right] & -\rho_1 c_3 \varepsilon_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) & \rho_1 \left( 1 - c_3 \varepsilon_g - \frac{\varepsilon_g c_3 c_2 \beta}{1 - \varepsilon_g} \right) & 0 & \frac{\rho_1 \varepsilon_g c_3 c_2 \nu_r}{1 - \varepsilon_g} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{5.26}$$



Los elementos de  $A$ ,  $B$ , y  $D$  son funciones no específicas de los elementos de  $U$ . Las raíces características  $\lambda$  del sistema definido por la Ec. (5.23) se obtienen al resolver el siguiente polinomio característico:

$$\det [ A \lambda - B ] = 0 \quad (5.28)$$

La solución del determinante característico es:

$$\lambda^* = \frac{\lambda - \langle v_l \rangle^l}{v_r} = v \quad (5.29)$$

donde  $\lambda^*$  define la velocidad característica adimensional y  $\lambda$  y  $v$  están dadas por:

$$\lambda = \frac{1}{2} v_r + \langle v_l \rangle^l \quad (5.30)$$

$$v = \frac{1}{2} \quad (5.31)$$

El determinante característico en forma explícita está dado por:

El resultado del valor característico adimensional dado por la Ec. (5.29) indica que se trata de una onda unidireccional, lo cual implica que es una onda de tipo parabólica con respecto a  $\beta$  o el gradiente de la fracción de vacíos, cuyo comportamiento es independiente de los parámetros interfaciales y parámetros relacionados con la excentricidad. Como se puede observar, en el proceso de linealizar las EDP's no lineales se pierde información relacionada con los efectos interfaciales entre la fase continua y la fase dispersa. Además con esta aproximación, la onda de propagación es independiente de grado de excentricidad. De acuerdo con estos resultados se puede concluir que los efectos excéntricos dan como resultado un sistema de EDP's no lineal y se deben usar técnicas apropiadas para abordarlo.

$$\begin{pmatrix}
 (\lambda - \langle v_{zg} \rangle) & -e_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (\lambda - \langle v_{zj} \rangle) & 0 & 1 - e_g & 0 & 0 & 0 \\
 -(\lambda v_r - U_r) \frac{\rho_1 c_3}{1 - e_g} \left[ 1 - \frac{c_2(1 + e_g) \beta}{1 - e_g} \right] & -(\lambda - \langle v_{zg} \rangle) \left[ \rho_g e_g + \rho_1 c_3 e_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - e_g} \right) \right] & (\lambda - \langle v_{zj} \rangle) \rho_1 c_3 e_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - e_g} \right) & e_g & \frac{(\lambda v_r - U_r) \rho_1 e_g c_3 c_2}{1 - e_g} & 0 \\
 -H_g \sigma + \rho_1 v_r^2 \left[ k_{zxc} - \xi - 2c_6 e_g - \frac{c_7(2 - e_g) e_g}{(1 - e_g)^2} \right] & + 2\rho_1 v_r e_g \left( k_{zxc} - \xi - c_6 e_g - \frac{c_7 e_g}{1 - e_g} \right) & -2\rho_1 v_r e_g \left( k_{zxc} - \xi - c_6 e_g - \frac{c_7 e_g}{1 - e_g} \right) & 0 & 0 & 0 \\
 (\lambda v_r - U_r) \frac{\rho_1 c_3}{1 - e_g} \left[ 1 - \frac{c_2 \beta(1 + e_g)}{1 - e_g} \right] & (\lambda - \langle v_{zg} \rangle) \rho_1 c_3 e_g \left( 1 - \frac{c_2 \beta}{1 - e_g} \right) & -(\lambda - \langle v_{zj} \rangle) \rho_1 \left( 1 - c_3 e_g - \frac{e_g c_3 c_2 \beta}{1 - e_g} \right) & 1 - e_g & -\frac{(\lambda v_r - U_r) \rho_1 e_g c_3 c_2}{1 - e_g} & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.32}$$

En la literatura consultada sobre flujo burbujeante (Mercadier, 1981; Biesheuvel y van Wijngaarden, 1984; Pauchon y Banerjee, 1986; Pauchon y Banerjee, 1988; Ruggles *et al.*, 1988a y 1988b; Park *et al.*, 1990; Lahey, 1991 y Pauchon y Smereka, 1992) no se han encontrado ondas de tipo parabólico. En el modelado de flujo burbujeante, Drew (1992) incluye efectos de viscosidad en la fase continua obteniendo un sistema de EDP's de segundo orden con comportamiento de tipo parabólico, cuyo valor característico es:

$$\lambda = \langle v_l \rangle^l \quad (5.33)$$

El resultado obtenido en el presente trabajo [Ec. (5.30)] y el modelo de Drew (1992) [Ec. (5.33)] tienen en común que los sistemas de EDP's son estables (valor característico real) y que no dependen explícitamente de los parámetros interfaciales, y la diferencia es el término de  $1/2v_r$  con respecto al trabajo de Drew (1992).

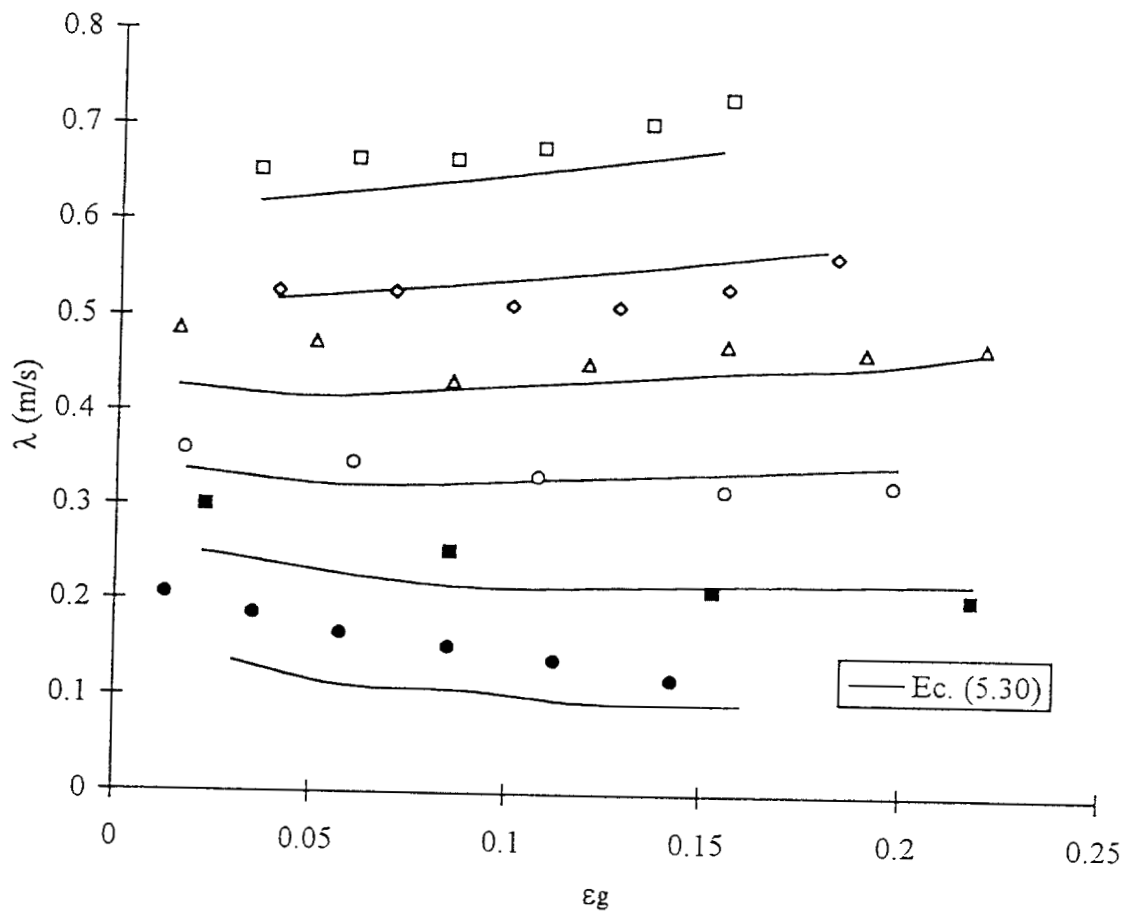
Los valores característicos de un sistema de EDP's cuasi-lineal de primer orden presenta un rango de comportamiento hiperbólico (Mercadier, 1981; Pauchon y Banerjee, 1986; Pauchon y Banerjee, 1988; Ruggles *et al.*, 1988a y 1988b; Park *et al.*, 1990; Lahey, 1991; Pauchon y Smereka, 1992), el cual depende fuertemente del detalle del modelado de los efectos interfaciales, es decir, de los parámetros de las relaciones de cerradura interfacial.

Es importante apuntar que el resultado del presente estudio es una consecuencia inmediata de la relación de cerradura de masa agregada obtenida con el modelo de celda unitaria excéntrica [Ec. (3.101), en el Capítulo 3], el cual contiene como término adicional el gradiente de la fracción de vacíos, dando origen a un sistema de EDP's de segundo orden no lineal.

En la Figura 5.1 se presenta una comparación de la velocidad de onda de vacíos obtenida experimentalmente por Mercadier (1981) contra el resultado obtenido analíticamente [Ec. (5.30)]. En dicha figura se puede observar que para una velocidad superficial de líquido igual a cero ( $\langle v_{zl} \rangle = 0$ ), la tendencia predicha por la Ec. (5.30) es correcta y su precisión no es buena practicamente en todo el rango de la fracción de vacíos ( $\varepsilon_g$ ) comparado. Para  $\langle v_{zl} \rangle = 0.1$  m/s y  $\varepsilon_g > 0.085$ , la figura muestra que la predicción es más cercana a los resultados experimentales. Para  $\langle v_{zl} \rangle = 0.2$  m/s se puede observar que la predicción es bastante parecida en precisión y tendencia a los datos experimentales y presenta un error mínimo en  $\varepsilon_g = 0.1075$ . Para  $\langle v_{zl} \rangle = 0.29$  m/s y  $\varepsilon_g < 0.12$  la predicción se aleja de los datos experimentales mientras que para  $\varepsilon_g \geq 0.12$  las predicciones son prácticamente iguales que los datos experimentales. Para  $\langle v_{zl} \rangle = 0.39$  y  $0.09 < \varepsilon_g < 0.15$ , las velocidades de las ondas de vacíos de los datos experimentales son ligeramente inferiores que los obtenidos analíticamente, mientras que para valores de  $\varepsilon_g < 0.09$  y de  $\varepsilon_g > 0.15$ , la predicción es prácticamente exacta. Finalmente para valores de  $\langle v_{zl} \rangle = 0.49$ , la tendencia de la predicción es la misma que los datos experimentales, mientras que para valores de  $\varepsilon_g < 0.06$  y de  $\varepsilon_g > 0.15$  se presenta mayor diferencia entre la predicción y los datos experimentales que para valores medios (entre 0.08 y 0.12) de  $\varepsilon_g$  donde esa diferencia disminuye.

De acuerdo con los resultados obtenidos con la Ec. (5.30), la predicción de la velocidad de la onda de vacíos depende fuertemente de datos precisos de la velocidad relativa.

En el Apéndice E se presenta un conjunto de datos experimentales sobre flujo burbujeante obtenidos de la literatura. Algunos de ellos serán usados en este capítulo para validar las predicciones del modelo que se presenta.



**Figura 5.1.** Velocidad de la onda de vacíos contra la fracción de vacíos para diferentes valores de la velocidad superficial de líquido  $\langle v_{zl} \rangle$ . Comparación con datos experimentales de Mercadier (1981): (●)  $\langle v_{zl} \rangle = 0.0\text{m/s}$ , (■)  $\langle v_{zl} \rangle = 0.1\text{m/s}$ , (○)  $\langle v_{zl} \rangle = 0.2\text{m/s}$ , (△)  $\langle v_{zl} \rangle = 0.29\text{m/s}$ , (◇)  $\langle v_{zl} \rangle = 0.39\text{m/s}$ , (□)  $\langle v_{zl} \rangle = 0.49\text{m/s}$ .

### 5.3.2 Sistema con celda concéntrica y con dependencia espacial y temporal de $C_{VM}$ .

El punto de partida para obtener el determinante característico con el modelo de celda concéntrica es el determinante característico del modelo de celda excéntrica dado por la Ec. (5.32). En la Ec. (5.32) se hace  $c_2 = 0$ ,  $c_7 = 0$  y  $c_6 = k_{zzc}$ , y como resultado se obtiene el determinante característico definido por la Ec. (5.34). Como se puede observar en este caso ya no es necesario considerar a la Ec. (5.20).

En la Ec. (34) se incluye a  $\eta$  como una variable indicadora:

$$\eta = \begin{cases} 1 & C_{VM} \text{ como función del tiempo y del espacio} \\ 0 & C_{VM} \text{ constante} \end{cases}$$

La solución del determinante característico dado por la Ec. (38) produce como resultado un polinomio característico de segundo orden con solución:

donde

$$\lambda_{\pm}^* = v \pm \left[ \frac{\nu}{\tau} \right]^{1/2} \quad (5.34)$$

$$v = \frac{(1 - \varepsilon_g)}{\tau} \left[ c_3 - \xi + k(1 - \varepsilon_g) + \rho_g^* (1 - \varepsilon_g) - \frac{c_3}{2(1 - \varepsilon_g)} \right] \quad (5.35)$$

$$\nu = v^2 \tau - \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g) c_3 + (1 - \varepsilon_g)^2 (\xi - \rho_g^* + H_g^* \sigma^* - c_3 - k_{zzc}) + \frac{1}{2} c_3 \quad (5.36)$$

$$\tau = \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g) + c_3 + \rho_g^* (1 - \varepsilon_g)^2 \quad (5.37)$$

el índice \* sobre los parámetros indica formas adimensionales definidas por:

$$\lambda_{\pm}^* = \frac{\lambda_{\pm} - \langle v_{zI} \rangle^l}{v_r} \quad (5.38)$$

$$\begin{pmatrix}
(\lambda - \langle v_{zg} \rangle^s) & -\varepsilon_g & 0 & 0 \\
(\lambda - \langle v_{zl} \rangle^l) & 0 & 1 - \varepsilon_g & 0 \\
-\left(\lambda v_r - U_r\right) \frac{\rho_l \eta c_3}{1 - \varepsilon_g} - H_g^\sigma & -\left(\lambda - \langle v_{zg} \rangle^s\right) \left(\rho_g \varepsilon_g + \rho_l c_3 \varepsilon_g\right) & \left[ \begin{array}{l} (\lambda - \langle v_{zl} \rangle^l) \rho_l c_3 \varepsilon_g \\ -2 \rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zzc} (1 - \varepsilon_g) - \xi \right] \end{array} \right] & \varepsilon_g \\
+ \rho_l v_r^2 \left[ k_{zzc} (1 - 2\varepsilon_g) - \xi \right] & + 2 \rho_l v_r \varepsilon_g \left[ k_{zzc} (1 - \varepsilon_g) - \xi \right] & \left[ \begin{array}{l} (\lambda - \langle v_{zg} \rangle^s) \rho_l c_3 \varepsilon_g \\ -\left(\lambda - \langle v_{zl} \rangle^l\right) \rho_l (1 - c_3 \varepsilon_g) (1 - \varepsilon_g) \end{array} \right] & = 0
\end{pmatrix} \quad (5.39)$$

$$H_g^* \sigma^* = \frac{H_g \sigma}{\rho_l v_r^2} \quad (5.40)$$

$$\rho_g^* = \frac{\rho_g}{\rho_l} \quad (5.41)$$

El resultado obtenido contiene dos velocidades características. Para el modelo de celda concéntrica se trata de dos ondas de vacíos una rápida y una lenta, lo cual implica que son de tipo hiperbólico sí las raíces características son reales, es decir para  $\nu > 0$ , con lo que se puede garantizar que el sistema es estable en el rango de comportamiento hiperbólico que cumpla esta condición. Por el contrario sí  $\nu < 0$ , los valores característicos son complejos conjugados y en consecuencia se pueden presentar inestabilidades. Los términos algebraicos del conjunto de EDP's no contribuyen a la velocidad de propagación de la fracción de vacíos.

El término  $c_3/2(1-\varepsilon_g)$  que aparece en la Ec. (5.35) y el término  $c_3/2$  en la Ec. (5.36) son términos que resultan como consecuencia de los efectos de masa agregada dependientes del espacio y tiempo.

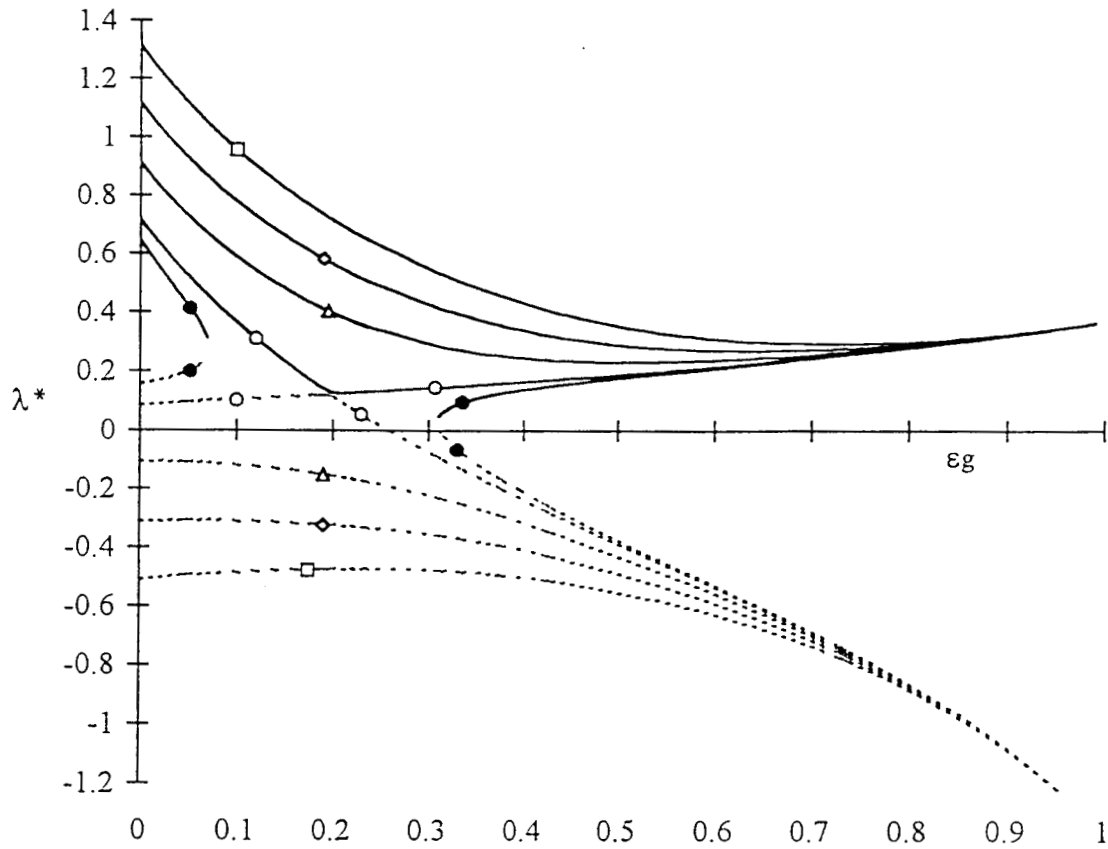
En la Figura 5.2 se presenta el comportamiento del  $\lambda^*$ , definido por la Ec. (5.34) para diferentes radios de burbuja  $R_b$ . Se puede observar que para  $R_b$  inferiores a 2.2mm las ondas presentan un comportamiento hiperbólico en todo el rango de fracciones de vacíos (0 a 1). Es importante apuntar que el rango de existencia de flujo burbujeante cubre fracciones de vacío entre 0 y 0.4, por lo tanto, después de estos valores físicamente no es posible el patrón de flujo burbuja. En la misma figura, para  $R_b = 2.5$ mm aparecen dos transiciones matemáticas ( $\lambda_+^* = \lambda_-^*$ ): una en  $\varepsilon_g = 0.07$  y otra en  $\varepsilon_g = 0.31$ . En este rango el comportamiento es de tipo elíptico existen dos zonas hiperbólicas en  $\varepsilon_g \leq 0.07$  y en  $\varepsilon_g \geq 0.31$ .

En general, los valores de  $\lambda_+^* > 1$  representan ondas con velocidades mayores que la velocidad promedio de la fase dispersa y los valores de  $\lambda_-^* < 0$  representa ondas con velocidades inferiores que la velocidad promedio de la fase continua.

En esta misma figura se puede observar que para  $R_b = 0.7\text{mm}$  y  $R_b = 1.0\text{mm}$ , las velocidades de propagación de las ondas rápidas pueden ser mayores que la velocidad promedio de la fase dispersa, mientras que para  $R_b = 1.5\text{mm}$  la velocidad de la onda rápida es inferior que la velocidad promedio de la fase dispersa. Para estos radios la onda lenta presenta velocidades inferiores a la velocidad promedio de la fase continua.

En el caso de las dos zonas hiperbólicas que se presenta con  $R_b = 2.5\text{mm}$ , se observa que para  $\varepsilon_g \leq 0.07$  (primera zona de comportamiento hiperbólica) las ondas rápida y la lenta presentan velocidades inferiores a la velocidad promedio de la fase dispersa pero mayores que la velocidad promedio de la fase continua. Por otro lado, para  $\varepsilon_g \geq 0.31$  (segunda zona de comportamiento hiperbólico), se observa que cuando  $\lambda_+^* = \lambda_-^* = 0$  (en  $\varepsilon_g = 0.31$ ) la velocidad de la onda es igual a la velocidad promedio de la fase continua y después ( $\varepsilon_g > 0.31$ ) la onda rápida presenta velocidades inferiores que la velocidad promedio del gas pero mayores que la velocidad promedio de la fase continua, mientras que la onda lenta presenta velocidades inferiores que la velocidad promedio de la fase continua.

En la Figura 5.2 se puede observar una transición matemática interesante, encontrada en el punto  $\varepsilon_g \approx 0.2$  con un  $R_b = 2.2\text{mm}$ . En este punto se puede observar que la onda presenta cuatro velocidades iguales.



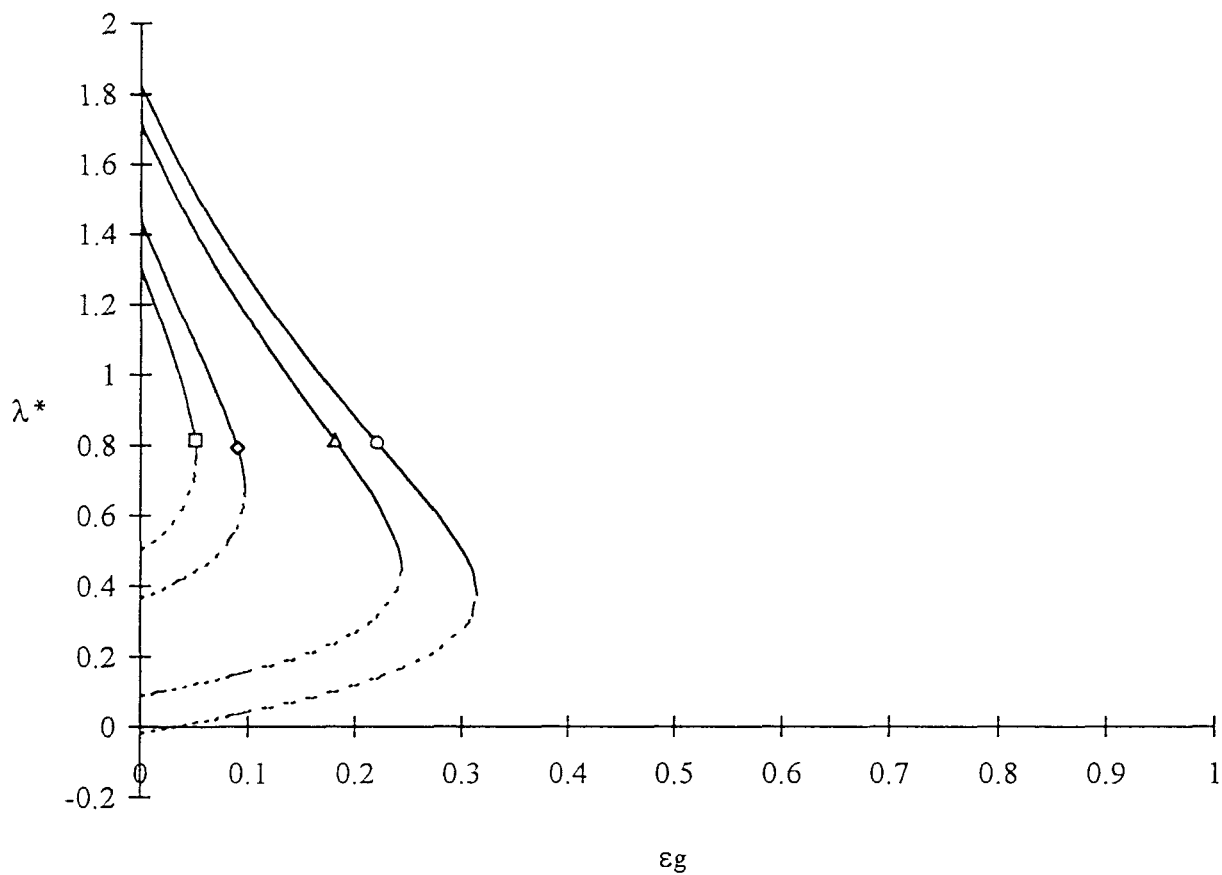
**Figura 5.2.** Variación de las velocidades características (adimensional) como una función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$ ; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$ , ( $\diamond$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$ , ( $\triangle$ )  $R_b = 1.5\text{mm}$ , ( $\circ$ )  $R_b = 2.2\text{mm}$ , ( $\bullet$ )  $R_b = 2.5\text{mm}$ .

### 5.3.3 Sistema con celda concéntrica y con $C_{VM}$ constante

Es de interés conocer el comportamiento de las velocidades características lentas y rápidas cuando los efectos de masa agregada  $C_{VM}$  se consideran constantes, con el fin de establecer la diferencia con respecto al caso estudiado en la sección previa.

El considerar a  $C_{VM}$  como constante implica hacer  $\eta = 0$  en la Ec. (5.34) cuyo resultado implica  $c_3/2(1 - \varepsilon_g) = 0$  y  $c_3/2 = 0$  en la Ec. (5.36) y en la Ec. (5.37), respectivamente. En la Figura 5.3 se presenta el comportamiento de las velocidades características normalizadas para diferentes radios de burbuja. Se puede observar que para los radios de burbuja considerados, el comportamiento de las ondas es de tipo hiperbólico para un rango determinado de  $\varepsilon_g$ : para las ondas lentas las velocidades son mayores o iguales a la velocidad promedio de la fase continua y para las ondas rápidas las velocidades de propagación son mayores que la velocidad promedio de la fase dispersa en todos los casos considerados. En la figura se puede observar que los rangos de comportamiento hiperbólico dependen fuertemente del radio de burbuja, siendo cada vez más pequeño este rango conforme aumenta el radio de burbuja. Los rangos de comportamiento hiperbólico para los casos mostrados en la Figura 5.3 son:  $\varepsilon_g \leq 0.052$  para  $R_b = 3\text{mm}$ ,  $\varepsilon_g \leq 0.097$  para  $R_b = 2\text{mm}$ ,  $\varepsilon_g \leq 0.244$  para  $R_b = 1\text{mm}$  y  $\varepsilon_g \leq 0.314$  para  $R_b = 0.8\text{mm}$ .

Existen diferencias apreciables con los dos casos analizados, que se pueden resumir de acuerdo a las siguientes observaciones: los efectos de masa agregada dependiente en espacio y tiempo presentan un comportamiento hiperbólico en todo el rango de  $\varepsilon_g$  para  $R_b < 2.2\text{mm}$ , mientras que con masa agregada constante el rango de comportamiento hiperbólico depende fuertemente del radio de burbuja.



**Figura 5.3.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$  y  $C_{VM}$  constante; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 3.0\text{mm}$ , ( $\diamond$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$ , ( $\Delta$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$ , ( $\circ$ )  $R_b = 0.8\text{mm}$ .

## 5.4 Otros casos de estudio

En esta sección se analizan dos casos relacionados con la importancia de los efectos de las fuerzas interfaciales por unidad de volumen. En concreto, se analizan las ecuaciones:

- (1) Sin esfuerzos de Reynolds ( $\tau_{zz}^{Re}$ )
- (2) Sin  $\tau_{zz}^{Re}$  y sin efectos de diferencia de los promedio de la presión ( $\langle \Delta p_{lg} \rangle$ )

En cada uno de en estos casos se cuantifica el efecto de masa agregada ( $C_{VM}$ ) dependiente del tiempo y del espacio y también los efectos de masa agregada constante.

Este estudio está motivado por los resultados obtenidos por Stuhmiller (1977) y Pauchon y Smereka (1992), quienes encontraron que las fuerzas interfaciales por unidad de volumen incluyen efectos de diferencia de presión interfacial, efectos de masa agregada (constante) y efectos de fuerzas de arrastre interfacial, sin incluir los efectos debido a los esfuerzos de Reynolds. Otros autores (Pauchon y Banerjee, 1986 y 1988; Ruggles *et al.*, 1988a y 1988b; Park *et al.*, 1990 y Lahey, 1991) encontraron que las fuerzas interfaciales por unidad de volumen incluyen sólo efectos de masa agregada (constantes) y efectos de fuerzas de arrastre interfacial. Los autores antes mencionados no incluyen los efectos de tensión superficial y masa agregada dependiente en el espacio y tiempo y los resultados obtenidos por ellos son independientes del radio de burbuja. En la sección anterior se encontró que el radio de burbuja modifica el rango de comportamiento hiperbólico y por lo tanto, es crucial en el modelo de flujos separados para flujo burbujeante.

En el apéndice F se desarrolla el análisis de los  $\tau_{zz}^{Re}$  y  $\langle \Delta p_{lg} \rangle$ , concluyendo que:

- 1) Sin efectos de  $\tau_{zz}^{Re}$  el comportamiento observado es la desaceleración de velocidad

característica rápida.

2) Sin  $\tau_{zz}^{Re}$  y sin  $\langle \Delta p_{lg} \rangle$  se observa aceleración de la velocidad característica rápida.

## 5.5 Comparación con modelos previos

El cálculo de los efectos de tensión interfacial, basado en la teoría de flujo potencial, está dado por Drew (1992):

$$M_{gl} = -k_{\sigma} \rho_l \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon_g \left( \langle v_{zg} \rangle^g - \langle v_{zl} \rangle^l \right)^2 \right] - M_{lg} \quad (5.42)$$

donde  $k_{\sigma} = 1/20$ . Esta ecuación se usa en forma similar que en los casos anteriores. Los resultados se muestran en la Tabla 5.2, así como los resultados de modelos previos y un modelo sin efectos interfaciales.

Analizando los resultados de la Tabla 5.2, se puede inferir que si se hace  $k_{zzc} = 0$ ,  $\rho_g^* = 0$ ,  $H_g^* \sigma^* = 0$ ,  $c_3/2(1 - \varepsilon_g) = 0$  y  $c_3/2 = 0$ , en las Ecs. (F.3), (F.5) y (F.6) (Apéndice F), el resultado se reduce al reportado por Pauchon y Banerjee (1986). Mientras que si  $\rho_g^* = 0$ ,  $H_g^* \sigma^* = 0$ ,  $c_3/2(1 - \varepsilon_g) = 0$  y  $c_3/2 = 0$ , el modelo obtenido es el de Pauchon y Banerjee (1988). Por lo tanto esto se puede interpretar como casos límite del resultado obtenido en el presente trabajo. Comparando el resultado del presente trabajo con el modelo de Lahey (1991) se pueden apuntar las siguientes diferencias: (1) Lahey considera que el tensor de esfuerzos viscosos interfaciales de la fase líquida son del mismo orden de magnitud que  $\tau_{zzl}^{Re}$ , (2) Lahey no considera efectos de tensión superficial y no incluye efectos de masa agregada dependientes de tiempo y del espacio.

Tabla 5.2 Comparación entre modelos

$\nu$	$\nu$	$\tau$	modelo
$\varepsilon_l(c_3 - \xi - k_{\infty c} \varepsilon_g)/\tau$	$\nu^2 \tau + \varepsilon_g \varepsilon_l (\xi + k_{\infty c} - c_3) + \varepsilon_l^2 (2\xi - c_3) + \varepsilon_l^2 \varepsilon_g \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon_l} + \varepsilon_g \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_l} \right]$	$\varepsilon_g \varepsilon_l + c_3$	Pauchon-Banerjee (1988) con interacción de burbujas
$\varepsilon_l(c_3 - \xi)/\tau$	$\nu^2 \tau + \varepsilon_g \varepsilon_l (\xi - c_3) + \varepsilon_l^2 (2\xi - c_3)$	$\varepsilon_g \varepsilon_l + c_3$	Pauchon-Banerjee (1986)
$\varepsilon_l(c_3 - \xi - k_{\infty c} \varepsilon_g + \rho_g^* \varepsilon_l)/\tau$	$\nu^2 \tau + \varepsilon_g \varepsilon_l (\xi + k_{\infty c} - c_3) + \varepsilon_l^2 (2\xi - \rho_g^* - c_3) - k_{\infty c} \varepsilon_g^2 \varepsilon_l$	$\varepsilon_g \varepsilon_l + c_3 + \rho_g^* \varepsilon_l^2$	Lahey (1991)
$\frac{\varepsilon_l(c_3 - \xi - k_{\infty c} \varepsilon_g + \rho_g^* \varepsilon_l + k_g)}{\tau}$	$\nu^2 \tau + \varepsilon_g \varepsilon_l (\xi + k_{\infty c} - c_3) + \varepsilon_l^2 (2\xi - \rho_g^* - c_3 - k_g)$	$\varepsilon_g \varepsilon_l + c_3 + \rho_g^* \varepsilon_l^2$	Este trabajo con Ec. (5.42)
$\varepsilon_l(c_3 - \xi - k_{\infty c} \varepsilon_g)/\tau$	$\nu^2 \tau + \varepsilon_g \varepsilon_l (\xi + k_{\infty c} - c_3) + \varepsilon_l^2 (2\xi - c_3)$	$\varepsilon_g \varepsilon_l + c_3$	Pauchon-Banerjee (1988) sin interacción de burbujas
$\rho_g^* \varepsilon_l^2/\tau$	$\nu^2 \tau - \rho_g^* \varepsilon_l^2$	$\varepsilon_g \varepsilon_l + \rho_g^* \varepsilon_l^2$	Este trabajo sin efectos interfaciales.

Nota:  $\varepsilon_l = 1 - \varepsilon_g$

El efecto de interacción de burbujas son considerados por Pauchon y Banerjee (1988), quienes se basaron en el modelo de celda encapsulada de Zuber (1964). El resultado obtenido por ellos es:

$$C_{VM}(\varepsilon_g) = \frac{2\varepsilon_g + 1}{2\varepsilon_l} ; \quad \xi(\varepsilon_g) = \frac{1 + \varepsilon_g}{4\varepsilon_l} ; \quad k(\varepsilon_g) = \frac{1 + 5\varepsilon_g \varepsilon_l}{5\varepsilon_l^2} \quad (5.43)$$

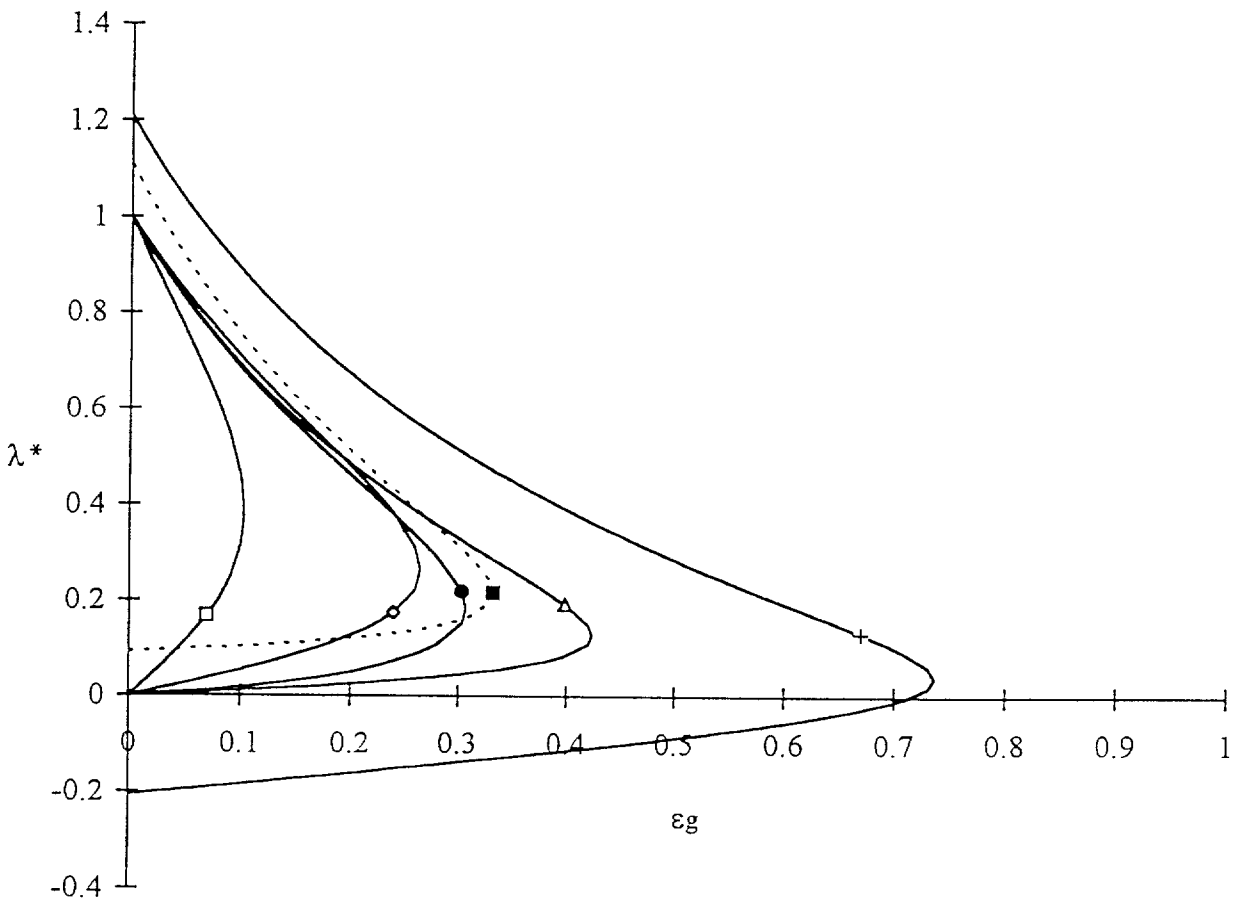
En la Figura 5.4 se presenta un mapa de características  $\lambda_{\pm}^*$  como funciones de la fracción de vacíos para flujo burbuja. En estas gráficas se muestra el dominio de comportamiento hiperbólico de los seis modelos. La transición matemática de un sistema hiperbólico a un sistema no hiperbólico ( $\lambda_+^* = \lambda_-^*$ ) es un indicador de posibles transiciones de flujo (coalescencia de burbujas). En la Tabla 5.3 se presenta el límite de estabilidad de los diferentes modelos.

**Tabla 5.3.** Límite de estabilidad ( $\lambda_+^* = \lambda_-^*$ )

<i>Modelo</i>	$\varepsilon_g$
Pauchon y Banerjee (1986)	0.2646
Pauchon y Banerjee (1988) (sin interacción de burbujas)	0.4234
Pauchon y Banerjee (1988) (con interacción de burbujas)	0.1027
Lahey (1991)	0.3064
Este trabajo con Ec. (5.42)	0.3320

El dominio de hiperbolicidad del modelo del presente trabajo se reduce cuando  $R_b$  es mayor que 3mm, sí  $R_b \rightarrow \infty$  la curvatura media promedio  $H_g \rightarrow 0$  y el resultado se reduce al modelo de Pauchon y Banerjee (1988) sin efectos de interacción de burbujas.

La inclusión de los efectos de esfuerzos viscosos interfaciales con la aproximación de Lahey (1991), reduce el dominio hiperbólico y dicho dominio se incrementa con los esfuerzos de Reynolds (Figura 5.4). En particular, el dominio de hiperbolicidad se reduce cuando  $c_3$  es mayor que 1/2 y se incrementa cuando  $c_3$  es pequeño. El modelo sin efectos interfaciales es inestable para  $\langle v_{zg} \rangle^g \neq \langle v_{zl} \rangle^l$ .



**Figura 5.4.** Comparación de modelos de ondas de vacíos. (□) Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas, (◇) Pauchon y Banerjee (1986), (●) Lahey (1991), (■) este trabajo con efectos de tensión superficial usando la Ec. (5.42), (Δ) Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas, (+) Este trabajo con efectos de tensión superficial con  $R_b = 3mm$  con  $C_{VM}$  constante.

Los efectos de tensión interfacial tienden a incrementar la velocidad característica más allá de estos límites, como se puede observar en la Figura 5.4. Entonces, la predicción de ondas de vacíos pueden tener velocidades características mayores que  $\langle v_{zg} \rangle^g$  (curva superior  $\lambda_+^*$  mayor que 1) y menor que  $\langle v_{zl} \rangle^l$  (curva inferior de  $\lambda_-^*$ , menor que 0) debido a los efectos de tensión interfacial.

## 5.6 Propagación de onda de vacíos

Algunos datos experimentales sobre flujo burbuja aire/agua están disponibles en la literatura para validar los modelos (Mercadier, 1981; Bernier, 1982). En las Figuras 5.5 y 5.6 se comparan los resultados de la solución analítica con el modelo de efectos de tensión superficial en forma explícita y modelos previos con datos experimentales de propagación de vacíos de Mercadier (1981) y Bernier (1982). En estas figuras, la coordenada y se toma con la misma escala para observar apropiadamente las diferencias en los resultados al incrementarse la velocidad la onda de vacíos.

Los datos de Bernier (1982) cubren un rango estrecho de velocidades promedio de la fase líquida  $0 \leq \langle v_{zl} \rangle \leq 0.318 \text{ m/s}$  (también conocida como velocidad superficial de líquido y representada algunas veces por  $j_l$ ), con diámetros de burbuja del orden de 0.5cm y un rango de fracciones de vacío de 0 to 0.25. Los datos de Mercadier (1981) cubre un rango de velocidades superficiales de líquido de  $-0.05 \leq \langle v_{zl} \rangle \leq 1.0 \text{ m/s}$  y un rango de fracciones de vacío de 0 a 0.22 (Apéndice E).

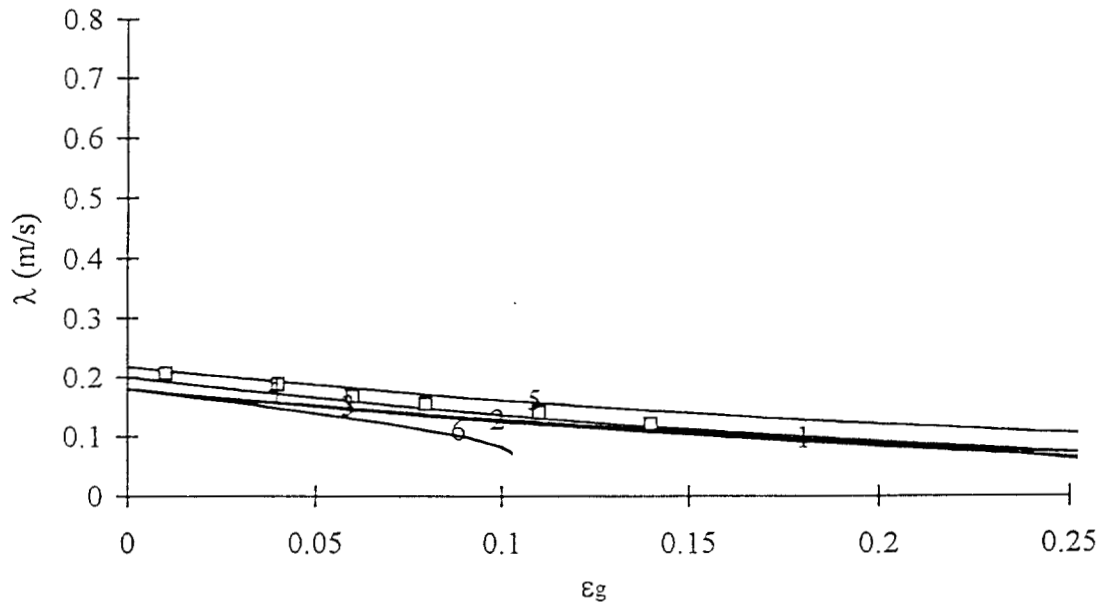


Figura 5.5a. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{zl} \rangle = 0$  m/s

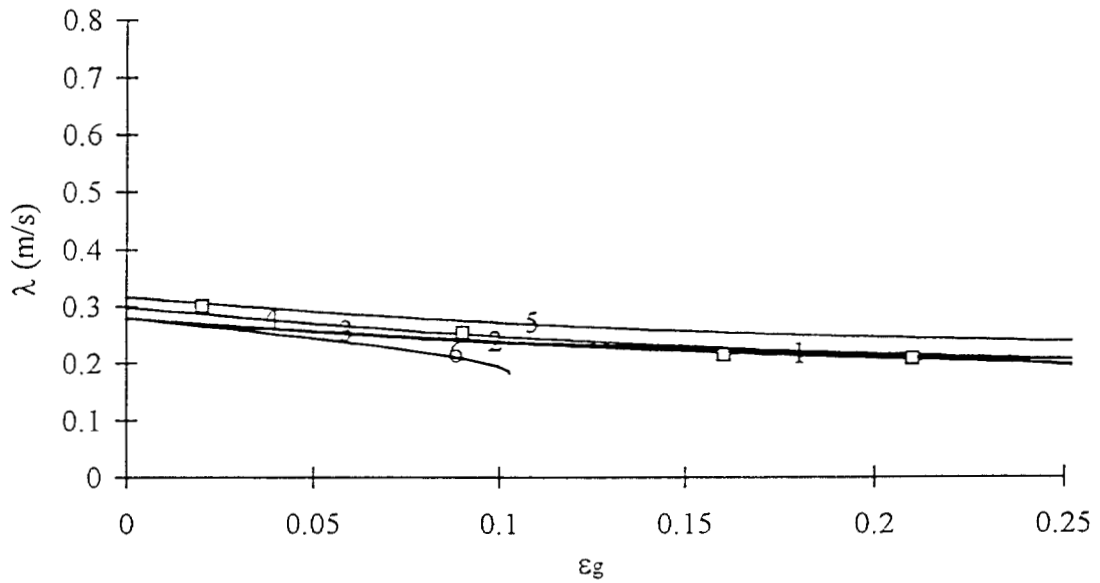


Figura 5.5b. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{zl} \rangle = 0.1$  m/s

(□) Datos de Mercadier (1981); (1) Lahey (1991); (2) Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas; (3) Pauchon y Banerjee (1986); (4) y (5) con efectos de tensión superficial usando las Ecs. (5.49) y (5.47), respectivamente, y (6) Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas.

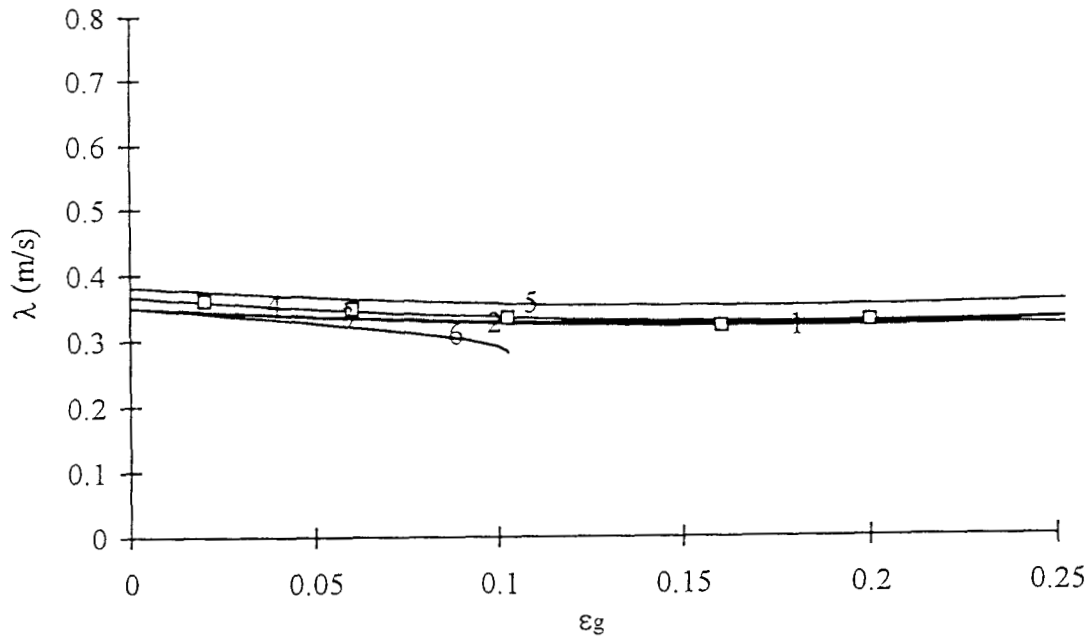


Figura 5.5c. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{z1} \rangle = 0.2$  m/s

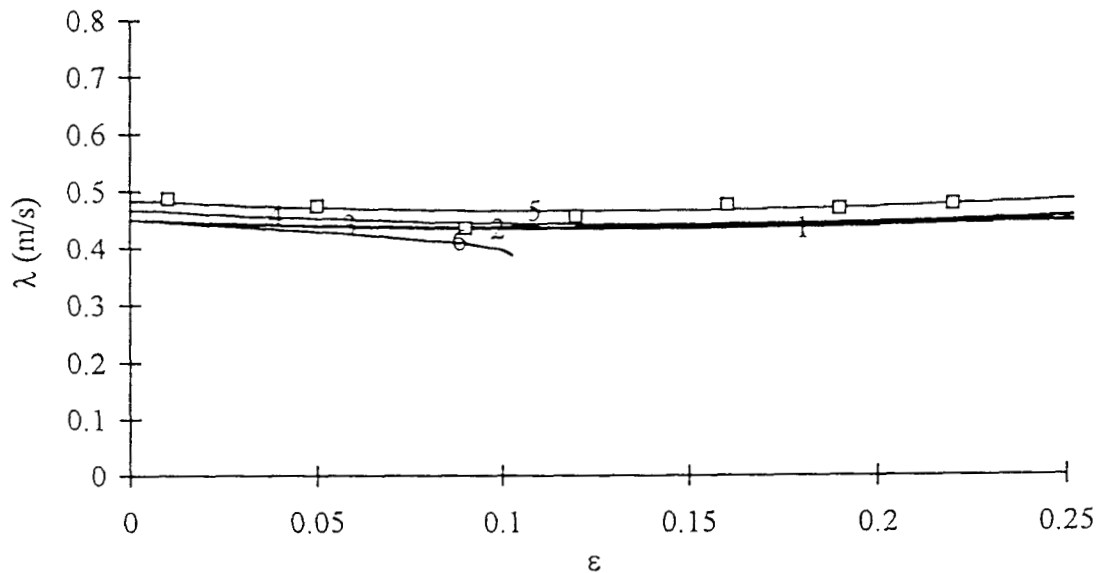


Figura 5.5d. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{z1} \rangle = 0.29$  m/s

(□) Datos de Mercadier (1981); (1) Lahey (1991); (2) Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas; (3) Pauchon y Banerjee (1986); (4) y (5) con efectos de tensión superficial usando las Ecs. (5.49) y (5.47), respectivamente, y (6) Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas.

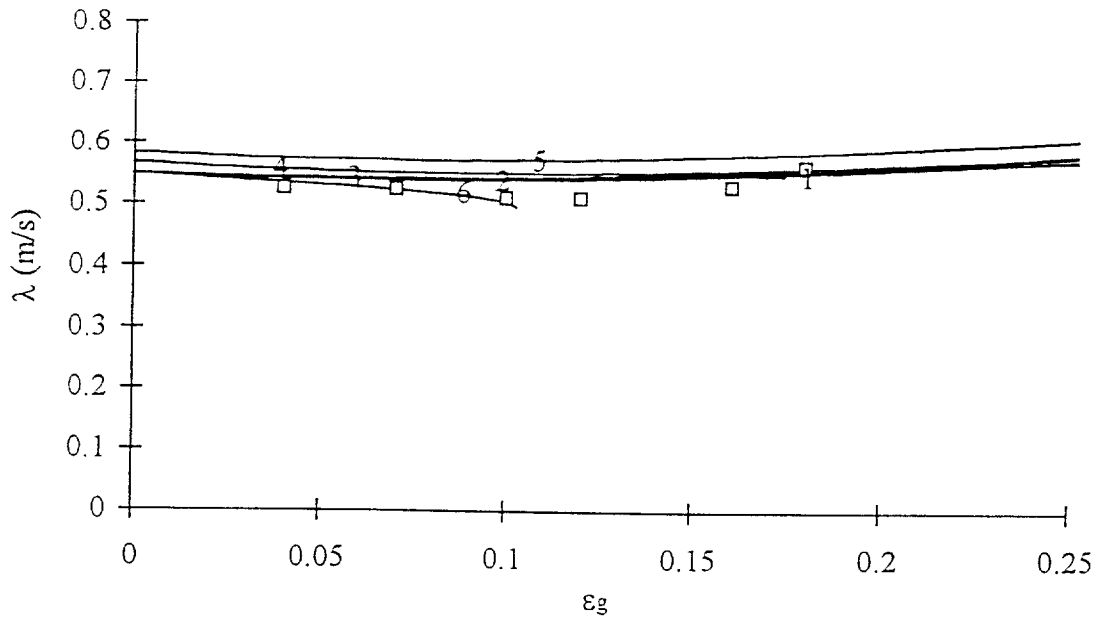


Figura 5.5e. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{zl} \rangle = 0.39$  m/s

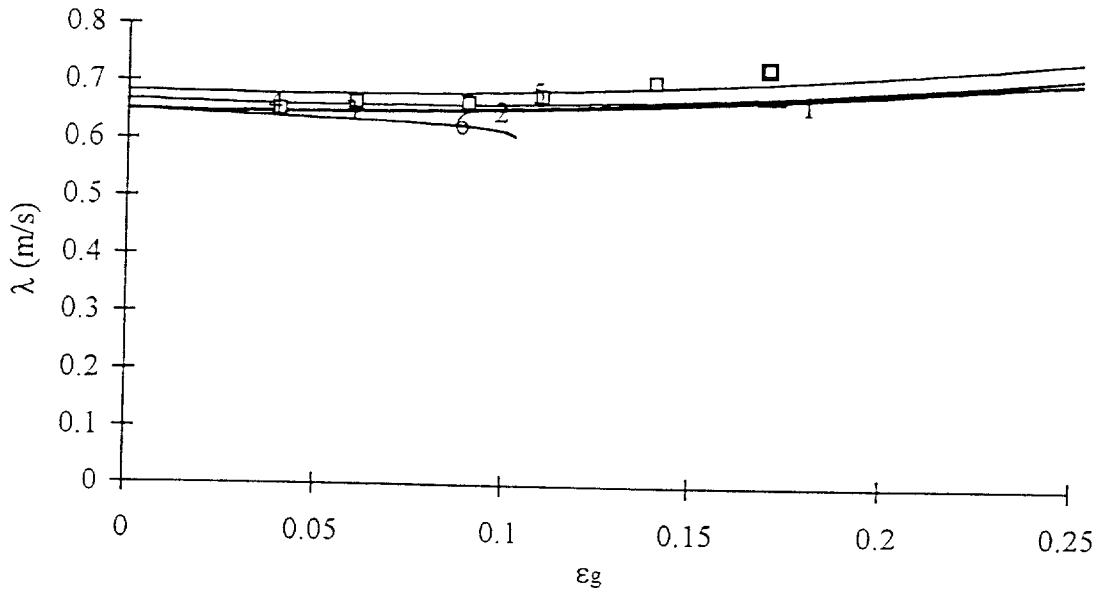


Figura 5.5f. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{zl} \rangle = 0.49$  m/s

(□) Datos de Mercadier (1981); (1) Lahey (1991); (2) Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas; (3) Pauchon y Banerjee (1986); (4) y (5) con efectos de tensión superficial usando las Ecs. (5.49) y (5.47), respectivamente, y (6) Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas.

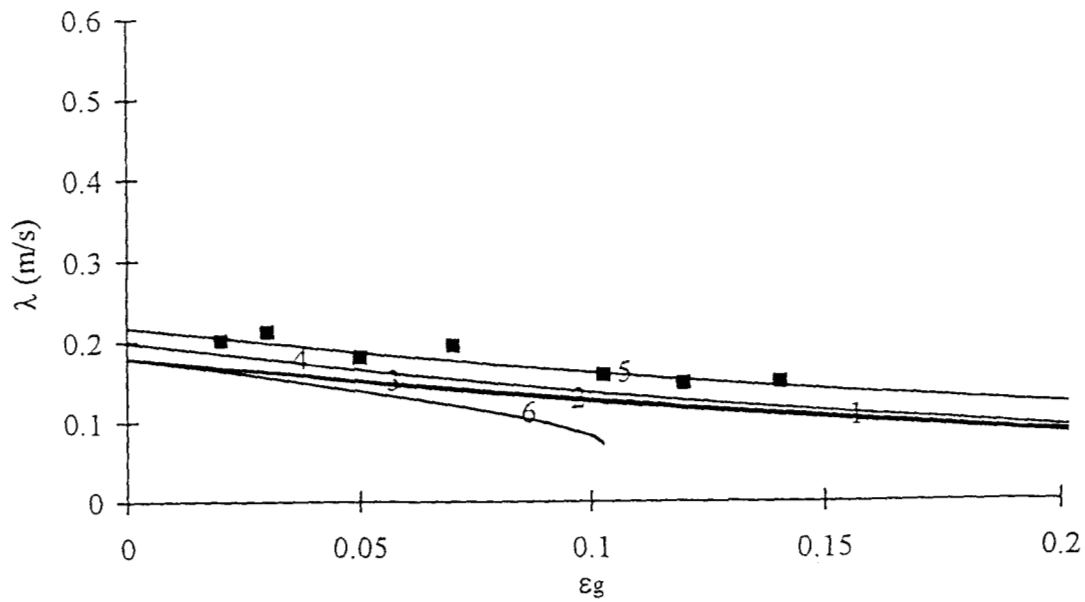


Figura 5.6a. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{zI} \rangle = 0$  m/s

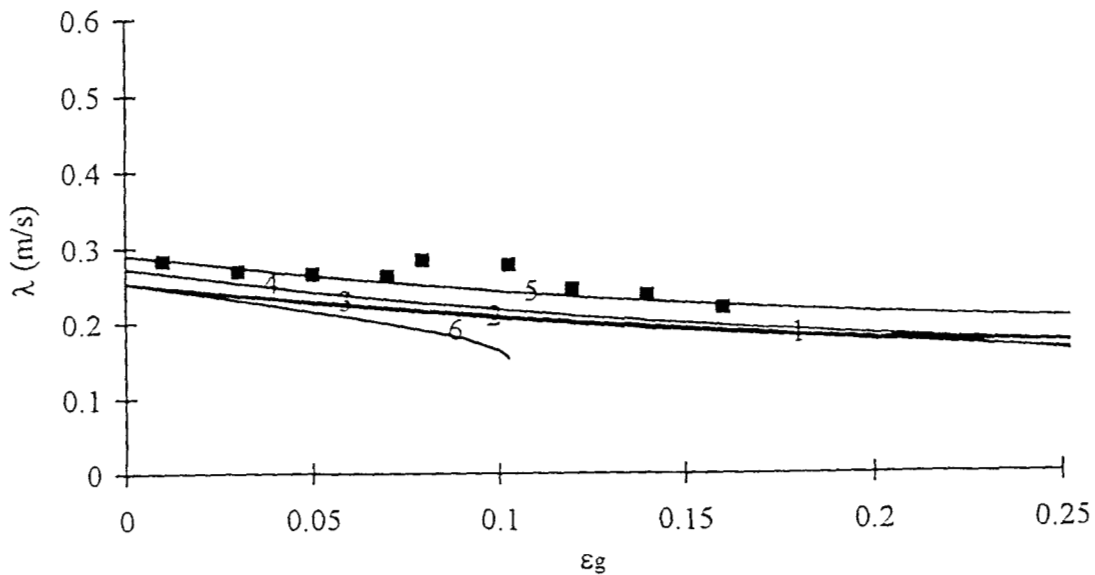


Figura 5.6b. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{zI} \rangle = 0.073$  m/s

(■) Datos de Bernier (1982); (1) Lahey (1991); (2) Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas; (3) Pauchon y Banerjee (1986); (4) y (5) con efectos de tensión superficial usando las Ecs. (5.49) y (5.47), respectivamente, y (6) Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas.

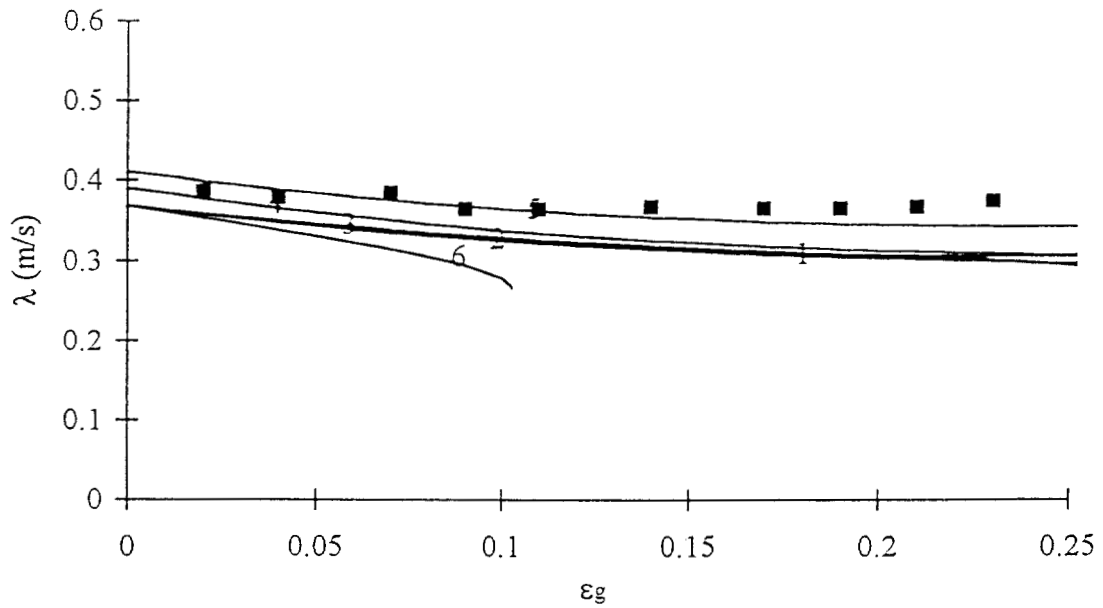


Figura 5.6c. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{z1} \rangle = 0.169$  m/s

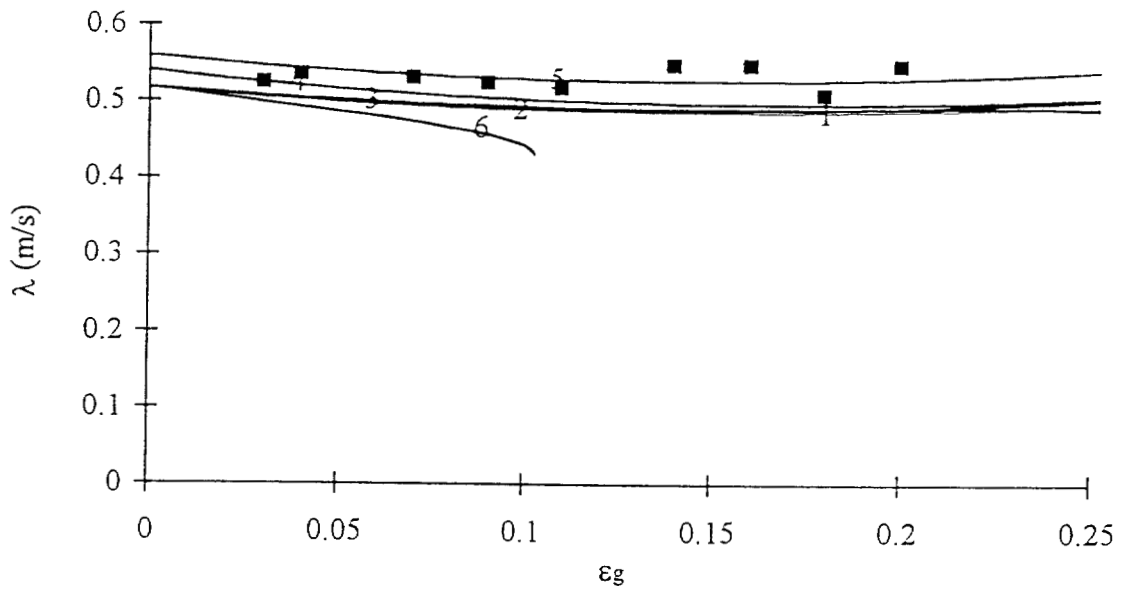


Figura 5.6d. Velocidad de onda de vacíos a  $\langle v_{z1} \rangle = 0.318$  m/s

(■) Datos de Bernier (1982); (1) Lahey (1991); (2) Pauchon y Banerjee (1988) sin interacción de burbujas; (3) Pauchon y Banerjee (1986); (4) y (5) con efectos de tensión superficial usando las Ecs. (5.49) y (5.47), respectivamente, y (6) Pauchon y Banerjee (1988) con interacción de burbujas.

Como se puede observar en las Figuras 5.5 y 5.6, el modelo de dos fluidos es consistente con estos datos experimentales, con excepción del modelo de interacción de burbujas, el cual sobrestima la propagación de la onda de vacíos. Como una consecuencia, el análisis comparativo con datos de propagación de ondas de vacíos ofrece un medio para validar la transferencia de cantidad de movimiento interfacial del modelo dinámico.

Se puede observar que los efectos de tensión superficial son muy útiles para determinar el dominio hiperbólico y sólo modifican ligeramente la velocidad de propagación de las ondas. Esto se observa en las Figuras 5.5 y 5.6 y se ve que presenta mayores velocidades de propagación con respecto a los modelos previos.

En general la comparación de los resultados del modelo del presente trabajo contra los datos experimentales indican que su predicción es ligeramente mejor con los datos experimentales de Bernier (1982), que con respecto a los datos experimentales de Mercadier (1981). Esto se debe a que el modelo propuesto no incluye efectos de pared y los efectos de pared de los experimentos de Bernier (1982), son inferiores que los efectos de pared de los experimentos de Mercadier (1981). En el apéndice E se presentan las características experimentales de estos autores y uno de los datos importantes para sustentar lo anterior es el diámetro de la tubería de experimentación, Bernier (1982) usa un diámetro de tubería de 10cm mientras que Mercadier (1981) usa una diámetro de tubería de 3.8cm.

## **5.7 Conclusiones**

El modelo de celda concéntrica con efectos de masa agregada, dependientes del espacio y del tiempo y con efectos de tensión superficial, producen en general un comportamiento

hiperbólico en todo el rango de fracciones de vacíos y su magnitud depende fuertemente del radio de burbuja. Se encontró también que la velocidad de la onda rápida puede llegar a presentar velocidades superiores que la velocidad promedio de la fase dispersa y la onda lenta puede llegar a presentar velocidades inferiores a la velocidad promedio de la fase continua.

Un caso especial se muestra en la Figura 5.2 donde la velocidad de la onda puede tomar cuatro trayectorias posibles para un radio de burbuja de 2.2mm: dos la onda rápida y dos la onda lenta.

El modelo promedio de celda concéntrica con efectos de masa agregada constantes y efectos de tensión superficial, reducen el dominio de comportamiento hiperbólico, el cual depende del radio de la burbuja. Como en el caso anterior, también se encontró que la velocidad de la onda rápida puede llegar a presentar velocidades superiores que la velocidad promedio de la fase dispersa y la onda lenta puede llegar a presentar velocidades inferiores a la velocidad promedio de la fase continua. Sí los efectos de tensión superficial no son considerados, las velocidades de propagación de la onda rápida son menores o iguales a la velocidad promedio de la fase dispersa y la velocidad de la onda lenta es mayor o igual a la velocidad promedio de la fase continua en consistencia con trabajos reportados previamente.

De acuerdo con las observaciones realizadas, otra conclusión consiste en que los efectos de los esfuerzos de Reynolds producen desaceleración de las velocidades características de la onda, mientras que los efectos de diferencia de presión interfacial, producen aceleración de la velocidad característica de la onda rápida y desaceleran las ondas características lentas.

## 6. DESCRIPCION DINAMICA DE LA ECUACION DE ONDA DE VACIOS

En este capítulo se presenta la derivación teórica de la ecuación de onda de vacíos, cuya estructura matemática corresponde a una EDP lineal de tercer orden, en función de la fracción de vacíos en las variables dependientes del sistema de las ecuaciones de masa y cantidad de movimiento, previamente desarrolladas en el Capítulo 2. Los coeficientes que multiplican a los operadores diferenciales son función de los efectos interfaciales, los cuales gobiernan los fenómenos de propagación. La derivación dinámica de la ecuación de onda se obtiene al aplicar un método de perturbaciones.

Aplicando técnicas de estabilidad lineal se encontraron cuatro velocidades de propagación para flujo burbujeante: una onda cinemática asociada a las derivadas de primer orden, dos velocidades características relacionadas con las derivadas de segundo orden y una onda que surge de las derivadas de tercer orden. Este último término está relacionado con los efectos de masa agregada, el cual se obtuvo en el Capítulo 3 con el modelo de celda unitaria excéntrica.

En este capítulo se calculan los tiempos de relajación, los cuales están asociados con los efectos inerciales y también se calcula el coeficiente asociado con la difusividad de la onda, estableciendo el mecanismo dominante del movimiento de las burbujas para los diferentes casos estudiados. La ecuación de onda dinámica proporciona mayor información que el análisis de los valores característicos presentado en el Capítulo 5, debido a que la ecuación de onda dinámica proporciona información de la onda cinemática, de las velocidades características, los tiempos de relajación y el coeficiente asociado a la difusión de una onda.

## 6.1 Introducción

Para obtener la descripción dinámica de la ecuación de onda de fracción de vacíos en flujo burbujeante, el punto de partida son las ecuaciones de transporte promedio en volumen e instantáneas en una dimensión para flujo en dos fases [Ecs. (4.1)-(4.6) del capítulo 4], las cuales son un caso especial de las ecuaciones de transporte promedio en volumen e instantáneas tridimensionales, previamente desarrolladas en el Capítulo 2. Estas ecuaciones expresadas en forma adimensional son:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t^*} + \varepsilon_k \frac{\partial v_k^*}{\partial z^*} + v_k^* \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z^*} = 0 \quad (6.1)$$

$$\rho_k^* \left( \frac{\partial v_k^*}{\partial t^*} + v_k^* \frac{\partial v_k^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p_k^*}{\partial z^*} + \frac{\Delta p_{km}^*}{\varepsilon_k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z^*} + \frac{\partial T_{zzk}^{Re*}}{\partial z^*} + \frac{T_{zzk}^{Re*}}{\varepsilon_k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z^*} - \rho_k^* + \frac{M_{km}^*}{\varepsilon_k} \quad (6.2)$$

El grupo de variables adimensionales utilizadas para obtener las formas de las ecuaciones anteriores se presentan en la Tabla 6.1.

**Tabla 6.1.** Grupo de variables adimensionales

$v_k^* = \frac{\langle v_k \rangle^k}{v_{r_o}}$	$p_k^* = \frac{\langle p_k \rangle^k}{\rho_L v_{r_o}^2}$	$\Delta p_{km}^* = \frac{\langle \Delta p_{km} \rangle}{\rho_L v_{r_o}^2}$
$T_{zzl}^{Re*} = \frac{T_{zzl}^{Re}}{\rho_L v_{r_o}^2}$	$M_{km}^* = \frac{M_{km}}{\rho_L g}$	$\rho_k^* = \frac{\rho_k}{\rho_L}$
$t^* = \frac{g}{v_{r_o}} t$	$z^* = \frac{g}{v_{r_o}^2} z$	

En la Tabla 6.1, la velocidad relativa que aparece en el grupo de números adimensionales se define como:

$$v_{r_0} = \langle v_g \rangle^g_o - \langle v_l \rangle^l_o \quad (6.3)$$

Para realizar el análisis lineal es necesario obtener la ecuación de onda en términos de la perturbación de la fracción de vacíos del gas. La relación de dispersión se obtiene al proponer una solución de la ecuación de onda. Para lograr esto se requiere que las Ecs. (6.1) y (6.2) se conviertan en formas apropiadas para que satisfagan las variables perturbadas. La metodología seguida para obtener la relación de dispersión se obtiene principalmente del texto de Wallis (1969) y el trabajo de Lahey (1991).

## 6.2 Ecuaciones en el estado base y entre variables perturbadas

Para obtener las ecuaciones entre variables perturbadas se aplica el siguiente procedimiento:

- Se define el estado base y las perturbaciones.
- Se obtienen las ecuaciones adimensionales en el estado base.
- Las ecuaciones perturbadas se obtienen al sustituir las perturbaciones en las Ecs. (6.1) y (6.2). Después se restan las ecuaciones del estado base en las ecuaciones que resultan del paso anterior.

### *Estado base y perturbaciones*

El estado base define el régimen permanente como función de la posición  $z^*$ . Sea  $\psi$  una variable auxiliar que representa las variables dependientes, entonces el estado base se define

como:

$$\psi_k^* = \psi_{k_0}^*(z^*) \quad (6.4)$$

y la perturbación alrededor del estado base se define como:

$$\delta\psi_k^* = \psi_k^*(t^*, z^*) - \psi_{k_0}^*(z^*) \quad (6.5)$$

### *Estado base de las ecuaciones adimensionales*

El estado base de las ecuaciones de conservación adimensionales se obtiene al sustituir la Ec. (6.4) en las Ecs. (6.1) y (6.2):

$$\varepsilon_{k_0} \frac{\partial v_{k_0}^*}{\partial z^*} + v_{k_0}^* \frac{\partial \varepsilon_{k_0}}{\partial z^*} = 0 \quad (6.6)$$

$$\rho_k^* v_{k_0}^* \frac{\partial v_{k_0}^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p_{k_0}^*}{\partial z^*} + \frac{\Delta p_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}} \frac{\partial \varepsilon_{k_0}}{\partial z^*} + \frac{\partial T_{zzk_0}^{Re*}}{\partial z^*} + \frac{T_{zzk_0}^{Re*}}{\varepsilon_{k_0}} \frac{\partial \varepsilon_{k_0}}{\partial z^*} + \rho_k^* + \frac{M_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}} \quad (6.7)$$

donde las propiedades físicas del sistema bifásico se consideran constantes.

### *Ecuaciones entre variables perturbadas*

Sustituyendo la relación de perturbación, dada por la Ec. (6.5), en la Ec. (6.1), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial t^*} + \varepsilon_{k_0} \frac{\partial \delta v_k^*}{\partial z^*} + \delta \varepsilon_k \frac{\partial \delta v_k^*}{\partial z^*} + v_{k_0}^* \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} + \delta v_k^* \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} \\ + \varepsilon_{k_0} \frac{\partial v_{k_0}^*}{\partial z^*} + v_{k_0}^* \frac{\partial \varepsilon_{k_0}}{\partial z^*} = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Conservando los términos lineales y restando la ecuación de masa en el estado base definida por la Ec. (6.6), se obtiene:

$$\frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial t^*} + \varepsilon_{k_0} \frac{\partial \delta v_k^*}{\partial z^*} + v_{k_0}^* \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} = 0 \quad (6.9)$$

En forma similar se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento adimensional para la fase  $k$  de las variables perturbadas:

$$\begin{aligned} \rho_k^* \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{k_0}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta v_k^* = & - \frac{\partial \delta p_k^*}{\partial z^*} + \frac{\Delta p_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}} \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} + \frac{\partial \delta T_{zzk}^{Re^*}}{\partial z^*} + \frac{T_{zzk_0}^{Re^*}}{\varepsilon_{k_0}} \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} \\ & + \frac{(\delta M_{km}^* + M_{km_0}^*)}{(\delta \varepsilon_k + \varepsilon_{k_0})} - \frac{M_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Los dos últimos términos de la ecuación anterior se pueden expresar como:

$$\frac{\delta M_{km}^*}{\varepsilon_{k_0}} - \frac{M_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}^2} \delta \varepsilon_k \quad (6.11)$$

Considerando que la desigualdad  $\delta \varepsilon_k \ll \varepsilon_{k_0}$  se cumple, finalmente la Ec. (6.10) queda como:

$$\begin{aligned} \rho_k^* \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{k_0}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta v_k^* = & - \frac{\partial \delta p_k^*}{\partial z^*} + \frac{\Delta p_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}} \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} + \frac{\partial \delta T_{zzk}^{Re^*}}{\partial z^*} + \frac{T_{zzk_0}^{Re^*}}{\varepsilon_{k_0}} \frac{\partial \delta \varepsilon_k}{\partial z^*} \\ & + \frac{\delta M_{km}^*}{\varepsilon_{k_0}} - \frac{M_{km_0}^*}{\varepsilon_{k_0}^2} \delta \varepsilon_k \end{aligned} \quad (6.12)$$

Las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento en la forma adimensional entre variables perturbadas para la fase dispersa y la fase continua se obtienen de las Ecs. (6.9) y (6.12) al hacer  $k = g$  para  $m = l$  y  $k = l$  para  $m = g$ , respectivamente.

Ecuación de masa, fase gas

$$\frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} + \varepsilon_{g_0} \frac{\partial \delta v_g^*}{\partial z^*} + v_{g_0}^* \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} = 0 \quad (6.13)$$

Ecuación de masa, fase líquida

$$-\frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} + \varepsilon_{l_0} \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial z^*} - v_{l_0}^* \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} = 0 \quad (6.14)$$

donde  $\varepsilon_{l_0} = 1 - \varepsilon_{g_0}$  y  $\delta \varepsilon_l = -\delta \varepsilon_g$ .

Ecuación de cantidad de movimiento, fase gas

$$\rho_g^* \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_0}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta v_g^* = -\frac{\partial \delta p_g^*}{\partial z^*} + \frac{\delta M_{gl}^*}{\varepsilon_{g_0}} - \frac{M_{gl_0}^*}{\varepsilon_{g_0}^2} \delta \varepsilon_g \quad (6.15)$$

donde  $\Delta p_{gl}^* = 0$  y  $\tau_{zzl}^{Re*} = 0$  para la fase gaseosa, las cuales representan las consideraciones iniciales establecidas para flujo burbujeante, como ya se mencionó en los Capítulos 2 y 3.

Ecuación de cantidad de movimiento, fase líquida

$$\left( \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial t^*} + v_{l_0}^* \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial \delta p_l^*}{\partial z^*} - \frac{\Delta p_{lg}^*}{\varepsilon_{l_0}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \frac{\partial \delta T_{zzl}^{Re*}}{\partial z^*} - \frac{T_{zzl_0}^{Re*}}{\varepsilon_{l_0}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \frac{\delta M_{lg}^*}{\varepsilon_{l_0}} + \frac{M_{lg_0}^*}{\varepsilon_{l_0}^2} \delta \varepsilon_g \quad (6.16)$$

donde  $\rho_l^* = 1$ .

### 6.3 Ecuación de onda

La ecuación de onda cinemática se obtiene de la combinación de las ecuaciones de transporte para variables perturbadas, Ecs. (6.13)-(6.16). Para que la única variable dependiente de la ecuación resultante sea  $\delta\varepsilon_g$ , es necesario aplicar la siguiente metodología (Wallis, 1969):

- (1) Restar las ecuaciones de cantidad de movimiento, Ecs. (6.15) y (6.16).
- (2) Sustituir los términos de interacción y relaciones independientes en el resultado obtenido en (1).
- (3) Cálculo de  $\delta\Delta p_{li}^*$ ,  $\delta T_{zzl}^{Re*}$  y  $\delta F_D^*$
- (4) Derivar con respecto a  $z^*$  la ecuación que resulta del paso anterior.
- (5) Sustituir las ecuaciones de masa de cada una de las fases.

A continuación se desarrollan cada uno de los pasos antes mencionados.

- (1) Al restar la ecuación de cantidad de movimiento de la fase gas [Ec. (6.15)] de la ecuación de cantidad de movimiento de la fase líquida [(6.16)], se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta v_l^* - \rho_g^* \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta v_g^* &= \frac{\partial}{\partial z^*} (\delta p_g^* - \delta p_l^*) \\ - \frac{\Delta p_{lg_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \frac{\partial \delta T_{zzl}^{Re*}}{\partial z^*} - \frac{T_{zzl_o}^{Re*}}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} & \quad (6.17) \\ + \frac{\delta M_{lg}^*}{\varepsilon_{l_o}} - \frac{\delta M_{gl}^*}{\varepsilon_{g_o}} + \left[ \frac{M_{lg_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} + \frac{M_{gl_o}^*}{\varepsilon_{g_o}^2} \right] \delta \varepsilon_g & \end{aligned}$$

- (2) La relación independiente para la presión promedio interfacial de la fase gaseosa está dada por la Ec. (4.8), la cual en términos de variables perturbadas está dada por:

$$\delta p_g^* - \delta p_l^* = \delta \Delta p_{lg}^* \quad (6.18)$$

Con las Ecs. (4.9) y (4.10) se obtiene la condición de salto en el estado base y entre variables perturbadas:

$$M_{gl_o}^* = -\sigma^* H_g^* \frac{\partial \varepsilon_{g_o}}{\partial z^*} - M_{lg_o}^* \quad (6.19)$$

$$\delta M_{gl}^* = -\sigma^* H_g^* \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} - \delta M_{lg}^* \quad (6.20)$$

donde

$$\sigma^* = \frac{\sigma g}{\rho_L v_{r_o}^4} \quad (6.21)$$

$$H_g^* = \frac{v_{r_o}^2 H_g}{g} \quad (6.22)$$

La Ec. (6.17) se simplifica al aplicar las Ecs. (6.18)-(6.20):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_l^* - \rho_g^* \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_g^* &= \frac{\partial (\delta \Delta p_{lg}^* + \delta T_{zzl}^{Re*})}{\partial z^*} \\ - \left[ \frac{\Delta p_{lg_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} + \frac{T_{zzl_o}^{Re*}}{\varepsilon_{l_o}} - \frac{\sigma^* H_g^*}{\varepsilon_{g_o}} \right] \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} & \\ + \left[ \frac{1}{\varepsilon_{l_o}} + \frac{1}{\varepsilon_{g_o}} \right] \delta M_{lg}^* + \left[ \frac{1}{\varepsilon_{l_o}} - \frac{1}{\varepsilon_{g_o}} \right] M_{lg_o}^* \delta \varepsilon_g & \end{aligned} \quad (6.23)$$

Las fuerzas interfaciales por unidad de volumen que ejercen las burbujas sobre la fase líquida en condiciones del estado base se obtienen a partir de la Ec. (4.11):

$$M_{l_{g_o}}^* = T_{zzl_o}^{Re*} \frac{\partial \varepsilon_{g_o}}{\partial z^*} - \varepsilon_{l_o} \frac{\partial T_{zzl_o}^{Re*}}{\partial z^*} + C_{VM_o}^* a_{VM_o}^* + \Delta p_{l_{g_o}}^* \frac{\partial \varepsilon_{g_o}}{\partial z^*} + \varepsilon_{g_o} F_{D_o}^* + U_{r_o}^* \left[ \frac{\partial C_{VM_o}^*}{\partial z^*} + \frac{C_{VM_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \varepsilon_{g_o}}{\partial z^*} \right] \quad (6.24)$$

donde

$$U_{r_o}^* = \frac{1}{2} v_{g_o}^{*2} - \frac{1}{2} v_{l_o}^{*2} \quad (6.25)$$

$$C_{VM_o}^* = c_3 \varepsilon_{g_o} \left[ 1 - \frac{c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \varepsilon_{g_o}}{\partial z^*} \right] \quad (6.26)$$

$$a_{VM_o}^* = v_{g_o}^* \frac{\partial v_{g_o}^*}{\partial z^*} - v_{l_o}^* \frac{\partial v_{l_o}^*}{\partial z^*} \quad (6.27)$$

La forma adimensional del parámetro excéntrico  $c_{2_o}^*$ , está dado por:

$$c_{2_o}^* = \frac{g}{v_{r_o}^2} c_2 \quad (6.28)$$

Las perturbaciones de las fuerzas interfaciales por unidad de volumen que ejercen las burbujas sobre la fase líquida también se obtienen de la Ec. (4.11):

$$\begin{aligned} \delta M_{l_g}^* &= T_{zzl_o}^{Re*} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} - \varepsilon_{l_o} \frac{\partial \delta T_{zzl_o}^{Re*}}{\partial z^*} + C_{VM_o}^* \delta a_{VM}^* + a_{VM_o}^* \delta C_{VM}^* \\ &\quad + \Delta p_{l_{g_o}}^* \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \varepsilon_{g_o} \delta F_D^* + F_{D_o}^* \delta \varepsilon_g \\ &\quad + v_{r_o}^* \left[ \frac{\partial \delta C_{VM}^*}{\partial t^*} + \frac{C_{VM_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} \right] + U_{r_o}^* \left[ \frac{\partial \delta C_{VM}^*}{\partial z^*} + \frac{C_{VM_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Las perturbaciones del coeficiente de masa virtual y la aceleración de la masa agregada están dadas por:

$$\delta C_{VM}^* = c_3 \delta \varepsilon_g - \frac{c_3 \varepsilon_{g_o} c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} \quad (6.30)$$

$$\delta a_{VM}^* = \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_g^* - \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_l^* \quad (6.31)$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la Ec. (6.29) se encuentra que:

$$\begin{aligned} \delta M_{lg}^* &= \frac{c_3 v_{r_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} + \left[ \Delta p_{lg_o}^* + T_{zzl_o}^{Re*} + \frac{c_3 U_{r_o}}{\varepsilon_{l_o}} \right] \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} - \varepsilon_{l_o} \frac{\partial \delta T_{zzl}^{Re*}}{\partial z^*} \\ &+ c_3 \varepsilon_{g_o} \left[ \left[ \frac{\partial \delta v_g^*}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial \delta v_g^*}{\partial z^*} \right] - \left[ \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial z^*} \right] \right] \\ &- \frac{c_3 \varepsilon_{g_o} c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \left[ v_{r_o} \frac{\partial}{\partial t^*} + U_{r_o} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \varepsilon_{g_o} \delta F_D^* + F_{D_o}^* \delta \varepsilon_g \end{aligned} \quad (6.32)$$

en donde todos los términos lineales sólo son considerados.

Sustituyendo las Ecs.(6.24) y (6.32) en la Ec. (6.23), se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_l^* - \left[ \rho_g^* + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_g^* \\ + \varphi_{o1} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} + \left[ \varphi_{o2} + \varphi_{o3} \frac{\partial}{\partial t^*} + \varphi_{o4} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} \\ - \frac{\partial \delta \Delta p_{lg}^*}{\partial z^*} + \frac{\varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}} \frac{\partial \delta T_{zzl}^{Re*}}{\partial z^*} - \frac{\delta F_D^*}{\varepsilon_{l_o}} - \frac{F_{D_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \delta \varepsilon_{g_o} = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde el producto entre  $a_{VMo}^*$  [Ec. (6.27)] y  $\delta C_{vm}^*$  [Ec. (6.30)] desaparece por presentar características no-lineales. Los coeficientes que aparecen en la ecuación anterior están dados por:

$$\varphi_{01} = - \frac{c_3 v_{r_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2 \varepsilon_{g_o}} \quad (6.34)$$

$$\varphi_{02} = - \frac{1}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \Delta p_{lg_o}^* + T_{zzl_o}^{Re*} + \sigma^* H_g^* + \frac{c_3 U_{r_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \right] \quad (6.35)$$

$$\varphi_{03} = \frac{v_{r_o}^* c_3 c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \quad (6.36)$$

$$\varphi_{04} = \frac{U_{r_o}^* c_3 c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \quad (6.37)$$

(3) Como se puede observar, en la Ec. (6.33) aparecen términos de cerraduras en forma de perturbaciones ( $\delta \Delta p_{li}^*$ ,  $\delta \tau_{zzl}^{Re*}$  y  $\delta F_D^*$ ) que deben determinarse. De acuerdo con los modelos matemáticos de las relaciones de cerradura, se sabe que son función de  $\varepsilon_g$ ,  $v_g^*$  y  $v_l^*$ . Estos términos se pueden conocer aplicando la fórmula de Taylor y considerando sólo las derivadas de primer orden.

$$\delta \Delta p_{lg}^* = \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial \varepsilon_g} \right]_o \delta \varepsilon_g + \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_l^*} \right]_o \delta v_l^* + \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_g^*} \right]_o \delta v_g^* \quad (6.38)$$

$$\delta T_{zzl}^{Re*} = \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial \varepsilon_g} \right]_o \delta \varepsilon_g + \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_l^*} \right]_o \delta v_l^* + \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_g^*} \right]_o \delta v_g^* \quad (6.39)$$

$$\delta F_D^* = \left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial \varepsilon_g} \right]_o \delta \varepsilon_g + \left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial v_l^*} \right]_o \delta v_l^* + \left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial v_g^*} \right]_o \delta v_g^* \quad (6.40)$$

Las funciones entre derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones anteriores se obtienen de las relaciones de cerradura, como se verá más adelante. Sustituyendo las Ecs. (6.38) y (6.39) en el quinto y sexto término de la Ec. (6.33), se obtiene que:

$$-\frac{\partial \delta \Delta p_{lg}^*}{\partial z^*} + \frac{\varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}} \frac{\partial \delta T_{zzl}^{Re*}}{\partial z^*} = \varphi_{o5} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \varphi_{o6} \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial z^*} + \varphi_{o7} \frac{\partial \delta v_g^*}{\partial z^*} \quad (6.41)$$

donde

$$\varphi_{o5} = - \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial \varepsilon_g} \right]_o + \frac{\varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial \varepsilon_g} \right]_o \quad (6.42)$$

$$\varphi_{o6} = - \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_l^*} \right]_o + \frac{\varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_l^*} \right]_o \quad (6.43)$$

$$\varphi_{o7} = - \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_g^*} \right]_o + \frac{\varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_g^*} \right]_o \quad (6.44)$$

Sustituyendo la Ec. (6.41) en la Ec. (6.33):

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ 1 + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] + \varphi_{o6} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_l^* \\ & - \left[ \left[ \rho_g^* + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] - \varphi_{o7} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta v_g^* \\ & + \varphi_{o1} \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} + \left[ \varphi_{o2} + \varphi_{o5} + \varphi_{o3} \frac{\partial}{\partial t^*} + \varphi_{o4} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} - \frac{\delta F_D^*}{\varepsilon_{l_o}} - \frac{F_{D_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \delta \varepsilon_{g_o} = 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

(4) Como se puede observar en la ecuación anterior los únicos términos entre derivadas parciales que no son distintos de  $\delta\varepsilon_g$  son  $\delta v_g^*$  y  $\delta v_l^*$ . Para eliminar  $\delta v_g^*$  y  $\delta v_l^*$  se deriva con respecto a  $z^*$  y como paso subsecuente se sustituyen las ecuaciones de conservación de masa. Entonces, al derivar con respecto a  $z^*$  la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left[ 1 + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{l_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] + \varphi_{o6} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial z^*} - \frac{1}{\varepsilon_{l_o}} \left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial v_l^*} \right]_o \frac{\partial \delta v_l^*}{\partial z^*} \\
& - \left[ \left[ \rho_g^* + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + v_{g_o}^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] - \varphi_{o7} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial \delta v_g^*}{\partial z^*} - \frac{1}{\varepsilon_{l_o}} \left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial v_g^*} \right]_o \frac{\partial \delta v_g^*}{\partial z^*} \quad (6.46) \\
& + \varphi_{o1} \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial t^* \partial z^*} + \left[ \varphi_{o2} + \varphi_{o5} + \varphi_{o3} \frac{\partial}{\partial t^*} + \varphi_{o4} \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial z^{*2}} \\
& - \left[ \frac{1}{\varepsilon_{l_o}} \left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial \varepsilon_g} \right]_o + \frac{F_{D_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \right] \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} = 0
\end{aligned}$$

Para la obtención de este resultado fue necesario sustituir la Ec. (6.40).

(5) Sustituyendo las ecuaciones de conservación de masa adimensionales entre variables perturbadas, dadas por las Ecs. (6.13) y (6.14) para la fase dispersa y fase continua respectivamente y ordenando términos, se obtiene la ecuación de onda:

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial t^*} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \delta \varepsilon_g}{\partial z^*} + \mathfrak{C}_3 \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial t^{*2}} \\
& + \mathfrak{C}_4 \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial t^* \partial z^*} + \mathfrak{C}_5 \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial z^{*2}} + \mathfrak{C}_6 \frac{\partial^3 \delta \varepsilon_g}{\partial t^* \partial z^{*2}} + \mathfrak{C}_7 \frac{\partial^3 \delta \varepsilon_g}{\partial z^{*3}} = 0 \quad (6.47)
\end{aligned}$$

y los coeficientes  $\mathfrak{C}_1$  a  $\mathfrak{C}_7$  son función del estado base, los cuales están dados en el Apéndice G.

De acuerdo con la literatura en el campo de estudio de los fenómenos de propagación en flujo burbujeante, los trabajos de Bouré (1982), Pauchon y Banerjee (1988) y Lahey (1991) reportan una ecuación de onda de vacíos que involucra derivadas de segundo orden. Por otra parte, Biesheuvel y Gorissen (1990) derivan una expresión entre derivadas de tercer orden para la propagación de onda de vacíos. Cada uno de estos trabajos presentan diferencias entre ellos y con respecto al presente trabajo.

La derivación de la ecuación de onda de Bouré (1982) se basa en una descripción de tipo cinemática, es decir, no incluye las fuerzas que originan el movimiento del flujo en dos fases. Con la ecuación de balance de masa promedio y el modelo de flujos relativos Bouré (1982) obtiene una ecuación de onda de vacíos de segundo orden [Ec. (8.3) del trabajo de Bouré], cuyos coeficientes ( $\mathcal{C}_1$  a  $\mathcal{C}_5$ ), que se determinan experimentalmente, son función de la velocidad superficial total y la fracción de vacíos. Este autor observa que la ecuación de onda cinemática de primer orden es no dispersiva, es decir, que no depende de la frecuencia de la señal (perturbación), mientras que la ecuación de onda de vacíos de segundo orden es dispersiva y es amortiguada o amplificada (Bouré, 1988).

Los trabajos de Pauchon y Banerjee (1988) y Lahey (1991) se basan en una descripción dinámica y la diferencia entre ambos trabajos se debe a que Lahey (1991) supone que los esfuerzos viscosos interfaciales son del mismo orden de magnitud que los esfuerzos de Reynolds (esta diferencia modifica el rango de comportamiento hiperbólico, como se discutió en el Capítulo 5 del presente trabajo). Ambos trabajos obtienen una ecuación de onda de segundo orden cuyos coeficientes dependen de las relaciones de cerradura, las cuales se basan en un modelo de celda concéntrica.

Biesheuvel y Gorissen (1990) plantean las ecuaciones de balance de las burbujas y de cantidad de movimiento de las burbujas. La ecuación de cantidad de movimiento se obtiene a partir del impulso de Kelvin. Estos autores aplican el método promedio sobre un ensamble de realizaciones de flujo (similar al aplicado en la teoría cinética de gases densos) para obtener las ecuaciones promedio, introduciendo en ellas efectos de difusividad debido al movimiento aleatorio de las burbujas en presencia de un gradiente de fracción de vacíos. Debido al efecto difusivo obtienen una ecuación de onda de tercer orden.

#### 6.4 Velocidades de propagación, tiempo de relajación y coeficiente de difusión

Los primeros cinco términos de la ecuación de onda [Ec. (6.47)] se pueden reescribir de la siguiente forma (Whitham, 1974):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t^*} + a_+^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta \varepsilon_g + T^* \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + r_-^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + r_+^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \delta \varepsilon_g \quad (6.48)$$

$$+ T^* D_e^* \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + U_+^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial z^{*2}} = 0$$

donde  $a_+^*$  es conocida como la velocidad de la onda cinemática (Pauchon y Banerjee, 1988) en forma adimensional,  $T^*$  es un tiempo de relajación en forma adimensional,  $r_{\pm}^*$  son las velocidades características adimensionales para la onda de segundo orden,  $D_e^*$  es un coeficiente de difusividad referido al tiempo de relajación y  $U_+^*$  es la velocidad cinemática para la onda de primer orden. En la Tabla 6.2 se presenta el grupo de variables adimensionales y su correspondiente dimensional, también se presentan las relaciones de las velocidades de la onda en forma adimensional referida a la velocidad promedio. En la Tabla 6.3 se presenta el análisis dimensional y los nombres para cada uno de los parámetros.

En las Ecs. (6.52) y (6.55) de la Tabla 6.2 el parámetro  $\tau^*$  esta dado por la Ec. (5.38) y  $v^*$  y  $\nu^*$  por:

$$v^* = \frac{\varepsilon_{l_o}}{\tau} \left[ \rho_g^* \varepsilon_{l_o} + c_3 - \xi + k_{zzc} - c_6 \varepsilon_{g_o} - c_7 \frac{\varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} - \frac{c_3}{2\varepsilon_{l_o}} \right] \quad (6.49)$$

$$\nu^* = v^{*2} \tau^* - c_3 \varepsilon_{l_o} \varepsilon_{g_o} + \varepsilon_{l_o}^2 \left[ \xi - \rho_g^* + H_g^* \sigma^* - c_3 - k_{zzc} - \frac{c_7 \varepsilon_{g_o}^2}{\varepsilon_{l_o}^2} \right] + \frac{1}{2} c_3 \quad (6.50)$$

Es importante señalar que en el modelo de celda concéntrica, las velocidades características obtenidas con la Ec. (6.57) en la Tabla 6.2 y calculadas con las Ecs. (6.49) y (6.50), se reducen a las Ecs. (5.36) y (5.37) del Capítulo 5, las cuales se obtienen calculando los valores característicos del sistema de EDP's lineales de primer orden. Lo antes mencionado se comprueba haciendo  $c_6 = k_{ccz}$  y  $c_7 = 0$  (celda concéntrica) en las Ecs. (6.49) y (6.50).

La Ec. (6.58) corresponde a la Ec. (5.31) previamente obtenida en el Capítulo 5, en donde se encontró que el comportamiento es de tipo parabólico con respecto al gradiente de la fracción de vacíos.

La Ec. (6.48) es idéntica a la obtenida por Biesheuvel y Gorissen (1990) [Ec. (49) del trabajo de estos autores], sin embargo las expresiones de las velocidades de las ondas, del tiempo de relajación y del coeficiente de difusión son distintas con respecto al presente trabajo. Por citar una diferencia; en el trabajo de Biesheuvel y Gorissen (1990)  $U_+$  representa la velocidad promedio de la fase gaseosa y el presente trabajo está dada por la Ec. (6.61).

Tabla 6.2. Grupos de variables adimensionales y dimensionales de la Ec. (6.48)

Variables adimensionales	Variables dimensionales
$a_+^* = \frac{\mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1} = 1 - \frac{5}{4} \varepsilon_{g_o} + v_{l_o}^* \quad (6.51)$	$a_+ = v_{r_o} a_+^* = \left[ 1 - \frac{5}{4} \varepsilon_{g_o} \right] v_{r_o} + \langle v_l \rangle_o^l \quad (6.59)$
$r_{\pm}^* = -\frac{\mathcal{G}_4}{2\mathcal{G}_3} \pm \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\mathcal{G}_4}{\mathcal{G}_3} \right)^2 - \left( \frac{\mathcal{G}_5}{\mathcal{G}_3} \right) \right]^{1/2} \quad (6.52)$ $= v^* + v_{l_o}^* \pm \left( \frac{\nu^*}{\tau^*} \right)^{1/2}$	$r_{\pm} = v_{r_o} r_{\pm}^* = v^* v_{r_o} + \langle v_l \rangle_o^l \pm v_{r_o} \left( \frac{\nu^*}{\tau^*} \right)^{1/2} \quad (6.60)$
$U_+^* = \frac{\mathcal{G}_7}{\mathcal{G}_6} = U_{r_o}^* = \frac{1}{2} + v_{l_o}^* \quad (6.53)$	$U_+ = v_{r_o} U_+^* = \frac{1}{2} v_{r_o} + \langle v_l \rangle_o^l \quad (6.61)$
$D_e^* = \frac{\mathcal{G}_6}{\mathcal{G}_3} = \frac{c_2^* c_3 \varepsilon_{g_o}}{\tau^*} \quad (6.54)$	$D_e = \frac{v_{r_o}^3}{g^2} D_e^* \quad (6.62)$
$T^* = \frac{\mathcal{G}_3}{\mathcal{G}_1} = \tau^* \left( \frac{1 - \rho_g^*}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right)^{-1/2} \quad (6.55)$	$T = \frac{v_{r_o}}{g} T^* \quad (6.63)$
<p>Velocidades de las ondas referidas a la velocidad promedio:</p>	
$A_+^* = \frac{a_+ - \langle v_l \rangle_o^l}{v_{r_o}} = 1 - \frac{5}{4} \varepsilon_{g_o} \quad (6.56)$	
$\lambda_{\pm}^* = \frac{r_{\pm} - \langle v_l \rangle_o^l}{v_{r_o}} = v^* \pm \left( \frac{\nu^*}{\tau^*} \right)^{1/2} \quad (6.57)$	
$U_o^* = \frac{U_+ - \langle v_l \rangle_o^l}{v_{r_o}} = \frac{1}{2} \quad (6.58)$	

**Tabla 6.3.** Análisis dimensional

Variable	Dimensiones	Descripción
$a_+$	$L S^{-1}$	Velocidad de la onda cinemática para la onda de primer orden de la Ec. (6.48)
$r_{\pm}$	$L S^{-1}$	Velocidades características para la onda de segundo orden de la Ec. (6.48)
$U_+$	$L S^{-1}$	Velocidad cinemática relacionada con el término difusivo de la onda de primer orden
$D_e$	$L^2 S^{-1}$	Coefficiente de difisividad referido al tiempo de relajación
$T$	$S$	Tiempo de relajación

La velocidad de la onda en el término difusivo de la Ec. (6.48), se puede descomponer en dos velocidades:

$$U_+^* = a_+^* - b_+^* \quad (6.64)$$

sustituyendo en la Ec. (6.48):

$$T^* \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + r_-^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + r_+^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta \varepsilon_g + D_e^* \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + a_+^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_g}{\partial z^{*2}} \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial t^*} + a_+^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right] \delta \varepsilon_g - T^* D_e^* b_+^* \frac{\partial^3 \delta \varepsilon_g}{\partial z^{*3}} = 0 \quad (6.65)$$

donde  $b_+^*$  es el efecto en la velocidad debido a la excentricidad el cual se obtiene al combinar las Ecs. (6.51), (6.53) y (6.64):

$$b_+^* = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \varepsilon_{g_0} \quad (6.66)$$

Se puede observar en la Ec. (6.65) un término de difusión que multiplica a la ecuación de onda

de primer orden y el último término es el gradiente del término de difusión. Si en la ecuación anterior  $D_e^* = 0$ , se recupera la ecuación de onda con efectos concéntricos. La interpretación física de la ecuación anterior no es sencilla, sin embargo se puede observar que las perturbaciones pueden viajar con cuatro velocidades ( $a_+^*$ ,  $r_+^*$ ,  $r_-^*$  y  $b_+^*$ ). Si  $T^* \rightarrow \infty$  las ondas viajan también con cuatro velocidades debido a los términos difusivos, mientras que en el caso concéntrico ( $D_e^* = 0$ ) las perturbaciones viajan con las velocidades características. Para  $T^* = 0$  y  $D_e^* = 0$  la perturbación viaja con la velocidad cinemática.

### 6.5 Estabilidad lineal para flujo burbujeante

La propagación de las perturbaciones de la fracción de vacíos de amplitud infinitesimal está gobernada por la ecuación de onda jerárquica dada por la Ec. (6.65). El criterio de estabilidad para  $D_e = 0$  está dado por Whitham (1974):

$$r_+^* \geq a_+^* \geq r_-^* \quad (6.67)$$

Si este criterio es violado, se presentan inestabilidades cuya interpretación física es la coalescencia de burbujas el cual genera otro estructura de patrón de flujo. De acuerdo con el trabajo de Biesheuvel y Gorissen (1990) para  $D_e \neq 0$  este criterio de estabilidad permanece inalterable. También estos autores demostraron que el criterio de estabilidad está dado por:

$$r_+^* \geq U_+^* \geq r_-^* \quad (6.68)$$

La demostración de este criterio de estabilidad se presenta en el Apéndice H.

En la siguiente sección se encuentra que el límite de aplicabilidad de la ecuación de onda y por lo tanto el límite de estabilidad ocurre en  $U_+^* = a_+^*$ , para  $\varepsilon_g = 0.4$ . Sustituyendo este valor de fracción de vacíos en la Ec. (6.66) se obtiene que  $b_+^* = 0$ . Con esto en consideración el criterio de estabilidad dado por la Ec. (6.68) se reduce al criterio dado por la Ec. (6.67).

## 6.6 Resultados

Las gráficas de las Figuras 6.1 y 6.2 muestran el comportamiento de las velocidades de la onda cinemática  $A_+^*$  [Ec.(6.56)], velocidades características rápidas y lentas  $\lambda_{\pm}^*$  [Ec.(6.57)] y la velocidad debido a los efectos de la celda excéntrica  $U_o^*$  [Ec.(6.58)] referidas a la velocidad promedio del líquido. En estas figuras las velocidades de propagación  $\lambda_{\pm}^*$  se presentan para diferentes radios de burbuja. Las velocidades de propagación  $\lambda_{\pm}^*$  mostradas en la Figura 6.1 se calcularon considerando que la masa agregada  $C_{VM}$  es dependiente en el espacio y tiempo, mientras que las velocidades de propagación  $\lambda_{\pm}^*$  mostradas en la Figura 6.2 se calcularon considerando que  $C_{VM}$  es constante. En dichas figuras existen diferencias apreciables las cuales se analizan con ayuda de los criterios de estabilidad definidos por las Ecs. (6.67) y (6.68).

Con respecto a la onda cinemática, para  $R_b = 0.7\text{mm}$ , se observa en la Figura 6.1 que el intervalo  $0.525 \geq \varepsilon_g \geq 0.16$  corresponde a una zona de inestabilidad ( $A_+^* \geq \lambda_+^*$ ). La interpretación física del inicio de esta zona de inestabilidad ( $\varepsilon_g = 0.16$ ) es la transición de una nueva estructura de flujo en dos fases. De acuerdo con datos experimentales, la probabilidad de que esto ocurra en  $\varepsilon_g = 0.16$  es baja (Saiz-Jabardo y Bouré, 1983). La zona de transición reportada experimentalmente ocurre a un valor de fracción de vacío alrededor de 0.3 (con  $R_b \sim 0.7\text{mm}$ ), punto que se encuentra dentro del intervalo  $0.525 \geq \varepsilon_g \geq 0.16$ . Al incrementar el radio de burbuja, se observa que  $A_+^* \geq \lambda_+^*$  en todos los casos mostrados en la Figura 6.1, excepto en  $R_b = 1.0\text{mm}$ , que presenta una pequeña zona estable en  $\varepsilon_g \leq 0.05$ .

De acuerdo con las tendencias de las velocidades características mostradas en la Figura 6.1, para un radio de burbuja  $\sim 0.55\text{mm}$  se cumple que  $\lambda_+^* \geq A_+^*$  en todo el rango de  $\varepsilon_g$  válido

para el modelo, es decir, es estable de 0-0.4 de  $\varepsilon_g$ . Esto significa que para este radio de burbuja no existe transición que dé lugar a otra estructura de flujo en dos fases. Para radios mayores o alrededor de 1.5mm, se cumple que  $A_+^* \geq \lambda_+^*$  para fracciones de vacío de 0 a 0.525-0.6 (dependiendo del radio de burbuja), es decir, el flujo es inestables dentro de este intervalo de  $\varepsilon_g$ . Esto significa que en estos radios de burbuja se presenta una transición que da lugar a una nueva estructura de flujo en dos fases, inclusive para valores muy bajos de  $\varepsilon_g$ , siendo esta transición solo función del radio de burbuja y de los efectos interfaciales asociados.

Con respecto a la onda  $U_o^*$ , se pueden observar en la Figura 6.1 distintos puntos de transición  $U_o^* = \lambda_+^*$  que son función del radio de burbuja. En la Tabla 6.4 se muestran estas transiciones.

**Tabla 6.4.** Inestabilidades del modelo de celda excéntrica cuando  $C_{VM}$  es función del espacio y del tiempo

$R_b$ (mm)	$\varepsilon_g$
2.5	0.055
1.5	0.15
1	0.24
0.7	0.337

De la tabla anterior se puede observar que el valor de  $\varepsilon_g = 0.337$  con  $R_b = 0.7$ mm es una predicción de transición acorde con datos experimentales. Este es un resultado importante ya que el modelo de celda excéntrica cobra sentido físico.

Otro punto de inestabilidad ocurre en  $U_o^* = A_+^*$ . En las Figuras 6.1 y 6.2, esto

corresponde a  $\varepsilon_g = 0.4$ , cuyo criterio de estabilidad se deduce de las Ecs. (6.67) y (6.68):

$$r_+^* - a_+^* \geq 0 \geq r_-^* - a_+^* \quad (6.69)$$

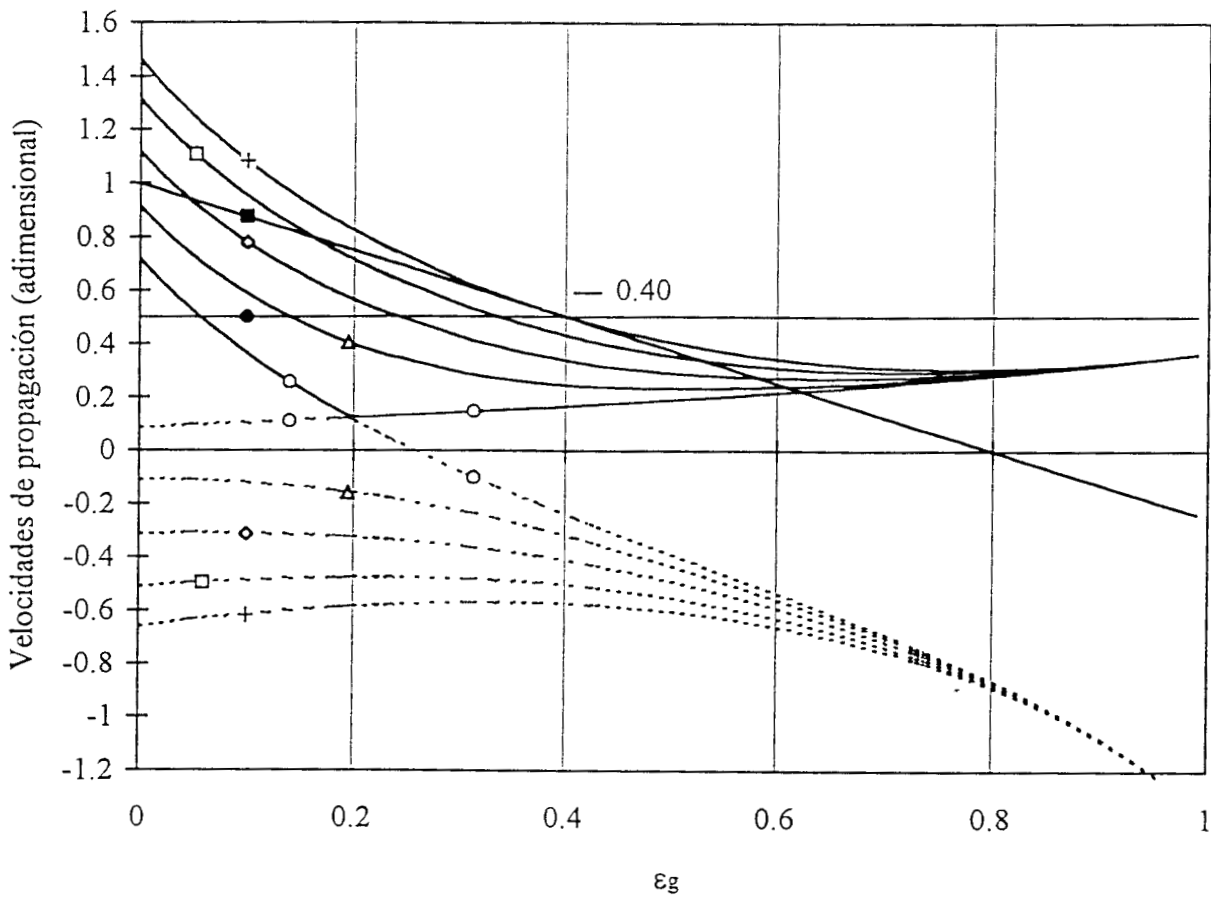
o también

$$r_+^* - U_+^* \geq 0 \geq r_-^* - U_+^* \quad (6.70)$$

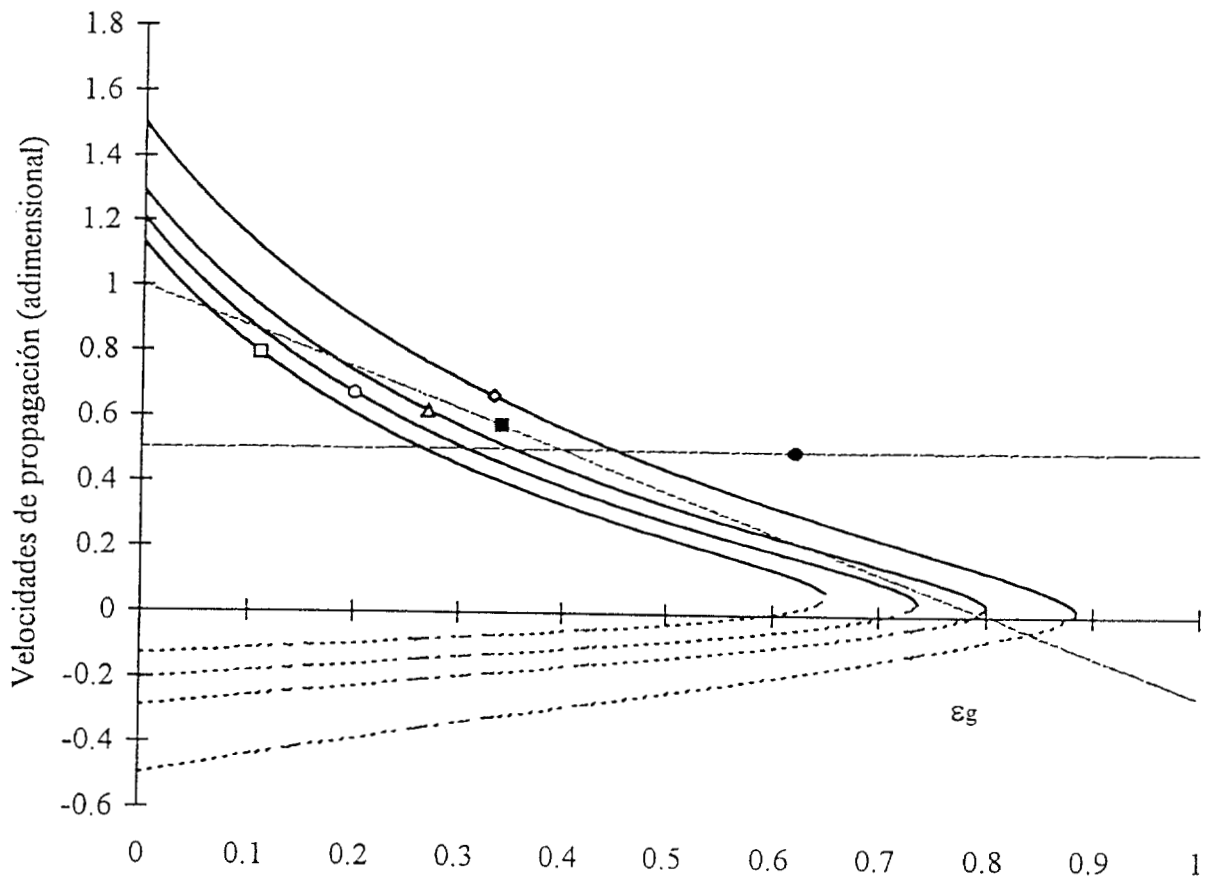
En la Figura 6.2 se muestra el comportamiento de  $\lambda_{\pm}^*$  como función de la fracción de vacíos, considerando  $C_{VM}$  constante. Con respecto a la onda cinemática se puede observar que para  $R_b \leq 1.0\text{mm}$ , la onda es estable en todo el rango de fracciones de vacío, mientras que cuando  $C_{VM}$  es dependiente del espacio y tiempo, la estabilidad existe para radios de burbuja inferiores que  $0.7\text{mm}$  (Figura 6.1). Esta es una diferencia fundamental entre considerar  $C_{VM}$  constante o no. Para  $R_b = 2.0\text{mm}$  la onda es estable para valores de  $\varepsilon_g \leq 0.2$ , y la zona de inestabilidad se encuentra en un rango de valores de  $0.2 \geq \varepsilon_g \geq 0.63$ . Para  $R_b = 3.0\text{mm}$  la onda es estable para valores de  $\varepsilon_g \leq 0.15$  y para  $R_b = 5.0\text{mm}$  la onda es estable para valores de  $\varepsilon_g \leq 0.065$ . Con estos resultados se puede observar que conforme aumenta el radio de burbuja la zona de estabilidad se reduce.

Con respecto a la onda  $U_0^*$  se pueden observar en la Figura 6.2 distintos puntos de transición, los cuales se presentan en la Tabla 6.5. En dicha tabla se puede observar que las primeros tres predicciones corresponden a transiciones acordes con los datos experimentales, mientras que para  $R_b = 1.0\text{mm}$  la inestabilidad ocurre a una fracción de vacíos mayor que el rango de validez del modelo, es decir  $\varepsilon_g \leq 0.4$ .

Las predicciones presentadas en la Tabla 6.5 indican que conforme el radio de burbuja aumenta las transiciones suceden a menores fracciones de vacío, lo contrario ocurre conforme el radio de burbujas disminuye.



**Figura 6.1.** Modelo de celda concéntrica con dependencia espacial y temporal de  $C_{VM}$ . (■)  $A_+^*$  [Ec.(6.56)], (●)  $U_o^*$  [Ec.(6.58)],  $\lambda_{\pm}^*$  [Ec.(6.57)] para: (+)  $R_b = 0.7\text{mm}$ , (□)  $R_b = 0.7\text{mm}$ , (◇)  $R_b = 1.0\text{mm}$ , (△)  $R_b = 1.5\text{mm}$ , (●), (○)  $R_b = 2.5\text{mm}$ .



**Figura 6.2.** Modelo de celda concéntrica con  $C_{VM}$  constante. (■)  $A_+^*$  [Ec.(6.56)], (●)  $U_o^*$  [Ec.(6.58)],  $\lambda_{\pm}^*$  [Ec.(6.57)]: (◇)  $R_b = 1.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.885$ ), (△)  $R_b = 2.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.80$ ), (○)  $R_b = 3.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.736$ ), (□)  $R_b = 5.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.65$ ).

**Tabla 6.5.** Inestabilidades del modelo de celda excéntrica cuando  $C_{VM}$  es constante.

$R_b$ (mm)	$\varepsilon_g$
5	0.28
3	0.31
2	0.35
1	0.45

De acuerdo con las predicciones presentadas en las Tablas 6.4 y 6.5, se puede inferir que los efectos de masa agregada como función del espacio y el tiempo predicen inestabilidades consistentes con transiciones de patrones de flujo.

*Tiempo de relajación y coeficiente de difusividad*

El tiempo de retraso en que la perturbación se propaga se le conoce como tiempo de relajación. El tiempo de relajación se obtiene directamente con la Ec. (6.55) y en la Tabla 6.6 se presentan algunos valores para distintas fracciones de vacío.

**Tabla 6.6.** Tiempos de relajación

$\varepsilon_g$	$T^*$
0.05	0.3540
0.1	0.3712
0.15	0.3836
0.2	0.3914
0.25	0.3947
0.3	0.3937
0.35	0.3887

En el rango de fracciones de vacío de la tabla anterior, se puede observar que el tiempo

de relajación presenta una dependencia débil con la fracción de vacíos.

El coeficiente de difusión está dado por la Ec. (6.54) y para determinarlo se debe calcular el parámetro adimensional  $c_2^*$ , el cual depende de la distancia donde se localiza la burbuja con respecto al centroide de la celda unitaria excéntrica. Recordando, dicho parámetro está dado por:

$$c_2 = \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} c_1 \quad (6.71)$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{V} \Gamma_2(\gamma) \quad (6.72)$$

$$\Gamma_2(\gamma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (6.73)$$

En estas ecuaciones  $\gamma$  representa la distancia del centro de la burbuja con respecto al centroide de la celda excéntrica, Capítulos 3 y 4. En la Tabla D.1 del Apéndice D se presentan valores de la doble integral como una función de  $\gamma$ ; dichos valores se usan para calcular el coeficiente de difusividad. En la Tabla 6.7 se presentan cálculos de  $c_2^*$  para diferentes excentricidades y en la Tabla 6.8 las difusividades.

En la Tabla 6.8 se puede observar que cuando la burbuja coincide con el centroide, es decir en  $\gamma = 0$  (celda unitaria concéntrica), el coeficiente de difusividad es cero y el término de tercer orden de la ecuación de onda de fracción de vacíos [Ec.(6.65)] es nulo. Para una fracción de vacíos dada, el coeficiente de difusividad se incrementa conforme la burbuja se aleja del centroide y para una excentricidad dada, el coeficiente de difusividad también se incrementa al incrementarse la fracción de vacíos.

**Tabla 6.7.** Valores del parámetro  $c_2^*$  en función de la excentricidad

$\gamma$ (adim)	$\Gamma_2(\gamma)$ (m)	$c_2$ (m)	$c_2^*$ (adim)
0	0	0	0
0.086	0.2094	0.0500	12.262
0.173	0.4191	0.1000	24.541
0.259	0.6289	0.1501	36.821
0.346	0.8386	0.2002	49.100
0.433	1.0483	0.2502	61.379
0.519	1.2580	0.3003	73.659
0.692	1.6775	0.4004	98.218
0.779	1.8873	0.4505	110.50
0.866	2.0969	0.5006	122.77
0.952	2.3067	0.5506	135.05
0.999	2.4201	0.5777	141.69

**Tabla 6.8.** Coeficiente de difusividad en función de la excentricidad para diferentes valores de  $\varepsilon_g$

$\gamma$	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.05$ )	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.1$ )	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.15$ )	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.2$ )	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.25$ )	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.3$ )	$D_e^*$ ( $\varepsilon_g=0.35$ )
0	0	0	0	0	0	0	0
0.086	0.5590	1.0377	1.4639	1.8561	2.2277	2.5888	2.9480
0.173	1.1187	2.0769	2.9299	3.7148	4.4585	5.1813	5.9001
0.259	1.6785	3.1161	4.3959	5.5736	6.6893	7.7738	8.8522
0.346	2.2383	4.1553	5.8618	7.4322	8.9200	10.366	11.804
0.433	2.7981	5.1945	7.3277	9.2909	11.150	12.958	14.756
0.519	3.3579	6.2337	8.7937	11.149	13.381	15.551	17.708
0.606	3.9176	7.2729	10.259	13.008	15.612	18.143	20.660
0.692	4.4774	8.3121	11.725	14.867	17.843	20.736	23.612
0.779	5.0374	9.3518	13.192	16.726	20.075	23.329	26.566
0.866	5.5970	10.390	14.657	18.584	22.304	25.920	29.516
0.952	6.1567	11.429	16.123	20.443	24.535	28.513	32.468
0.999	6.4594	11.991	16.916	21.448	25.741	29.914	34.064

Con lo anterior, se puede decir que el análisis lineal con efectos de excentricidad permite identificar mecanismos difusivos del movimiento de las burbujas, los cuales hasta donde se sabe, sólo han sido reportados en el trabajo de Biesheuvel y Gorissen (1990) quienes aplicaron técnicas estocásticas para describir la propagación de las perturbaciones en flujo burbujeante.

## 6.7 Conclusiones

Aplicando técnicas de análisis de estabilidad lineal, se derivó la ecuación de onda definida por la Ec. (6.65) partiendo de las ecuaciones promediadas de masa y cantidad de movimiento de la fase dispersa y la fase continua con efectos de interacción interfacial de cantidad de movimiento. La ecuación de onda presenta 4 modos de propagación: uno correspondiente al término de primer orden conocida como onda cinemática, dos ondas relacionadas con los términos de segundo orden (velocidades características) y una onda relacionada con los términos de tercer orden.

Los términos de tercer orden son una consecuencia directa del modelo de celda excéntrica. La importancia del término de tercer orden, además de predecir un cuarto modo de propagación, representa otro mecanismo del movimiento de la onda que es de tipo difusivo. Para el modelo de celda concéntrica no aparecen los efectos difusivos (el término de tercer orden es nulo), dando lugar a un sistema de EDP's de segundo orden, en el cual el movimiento de la onda sólo se debe a los efectos inerciales.

Se aplicaron criterios de estabilidad (Apéndice H) definidos, por las Ecs. (6.67) y (6.68), para predecir los cambios de estructura del patrón de flujo en dos fases, los cuales se asociaron con la inestabilidad de la ecuación de onda.

Con respecto a la onda del modelo excéntrico (Tablas 6.4 y 6.5), los efectos de masa agregada que resultan dependientes del espacio y del tiempo predicen transiciones para valores de la fracción de vacíos menores que aquellas en los que ocurren las transiciones cuando se consideran constantes los efectos de masa agregada.

Se encontró que el tiempo de relajación presenta una dependencia débil con respecto a la fracción de vacíos. También se encontró que el coeficiente de difusividad es nulo para el modelo de celda concéntrica mientras que para el modelo de celda concéntrica no es nulo.

## 7. ONDA DE VACIOS POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

En este capítulo se presenta la solución numérica del sistema de EDP's que describen los procesos de flujo en dos fases utilizando el método de diferencias finitas en forma implícita. El objetivo es desarrollar una herramienta de análisis versátil que incorpore los efectos interfaciales de cantidad de movimiento y permita predecir los perfiles de velocidad de las fases gas y líquida, la distribución de presión y la distribución de la fracción de vacíos en la dirección axial y en régimen transitorio. El análisis transitorio es fundamental en centrales nucleares para la generación de energía eléctrica, y es práctica común realizar dichos análisis mediante códigos numéricos (Andersen, *et al.*, 1984; Borkowski y Wade, 1992; Khan, *et al.*, 1993; por citar algunos).

El análisis numérico que se realiza en este capítulo cubre dos aspectos fundamentales:

- (1) Conocer el impacto de los efectos de tensión superficial sobre el comportamiento de las fases en condiciones transitorias.
- (2) Predecir la velocidad de la onda de fracción de vacíos, simulando el proceso de medición real de una columna de burbujeo.

El código numérico desarrollado se validó con datos experimentales de Mercadier (1981) y Bernier (1982), cubriendo un rango de fracciones de vacío de 0.02 a 0.26 y velocidades superficiales de líquido de 0.0 a 0.49 m/s. También, el código numérico se comparó con los resultados de la solución analítica de las velocidades características obtenida en el Capítulo 5 de este trabajo.

## 7.1 Introducción

El punto de partida para desarrollar el código numérico es el sistema cerrado de EDP's presentadas en el Capítulo 4, las cuales se obtienen al acoplar las ecuaciones macroscópicas de cantidad de movimiento y las relaciones de cerradura derivadas en el Capítulo 3.

Las ecuaciones de gobierno [Ecs. (4.17), (4.23), (4.24) y (4.29), en Capítulo 4] son un conjunto completo de EDP's de tipo hiperbólico para las cuales existen diferentes procedimientos numéricos de solución (González-Santaló y Lahey, 1973; Lyczkowski *et al.*, 1975; Travis, *et al.*, 1976; Martini, *et al.*, 1978; Ferch, 1979; Hancox, *et al.*, 1980; Andersen y Shaug, 1984; Doster, 1989; Minami y Shoham, 1994; Espinosa-Paredes y Soria, 1998; entre otros). El método de las características (González-Santaló y Lahey, 1973; Lyczkowski *et al.*, 1975; Ferch, 1979) se considera una técnica con alto grado de dificultad para ser aplicada, por lo que este método ha sido sustituido por el método de diferencias finitas, el cual es una técnica directa y sencilla. El procedimiento de diferencias finitas es computacionalmente más rápido y flexible que el método de las características.

La solución del conjunto de EDP's para obtener la distribución de la fracción de vacíos  $\epsilon_g$ , velocidades de la fase gas  $\langle v_g \rangle^g$ , velocidades de la fase líquida  $\langle v_l \rangle^l$  y presión de la fase líquida  $\langle p_l \rangle^l$ , en función del tiempo y espacio se basó en el método de diferencias finitas en forma implícita empleando el concepto de *celda donadora*. Este esquema se aplica para mostrar el procedimiento de solución numérico, el cual es fácil de codificar y validar con datos experimentales de velocidades de propagación de vacíos en flujo burbuja.

El sistema modelado es una columna vertical de burbujeo de 1m de longitud con una

mallas unidimensionales formadas con 100 celdas (0.01m de separación entre celdas). Las variables calculadas en cada celda son: fracción de vacíos, velocidad del gas, velocidad de líquido y presión. El concepto de celda donadora se aplica para propósitos de parámetros concentrados, es decir, el estado del fluido a las condiciones de salida de celda son las mismas que las condiciones del fluido en la misma celda. La estabilidad de la solución numérica mejora usando este concepto. Las ecuaciones gobernantes se resuelven en cada paso de tiempo para cada una de las celdas.

## 7.2. Discretización de las ecuaciones promedio instantáneas

A continuación se presenta el desarrollo de las formas discretas del conjunto de ecuaciones diferenciales desarrolladas en el Capítulo 4. Las técnicas de discretización generan una ecuación matricial dispersa que se resuelve en cada paso de tiempo de simulación.

La discretización espacial usada es de primer orden y el esquema de solución de diferencias finitas hacia atrás en forma implícita presenta un error de truncamiento del orden de  $\Delta z$ . El proceso de discretización consiste en reemplazar los operadores diferenciales de una ecuación específica por su análogo de diferencias finitas.

Iniciando con la forma diferencial de la ecuación de conservación de masa de la fase gaseosa dada por la Ec. (4.24) en el Capítulo 4, cuya forma discretizada se desarrolla mediante diferencias finitas en los términos espacial y temporal. El resultado es:

$$\Lambda \left[ (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} - (\varepsilon_g)_j^t \right] + \left( \langle v_{zg} \rangle_g \right)_j^{t+\Delta t} \left[ (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} - (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} \right] + (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} \left[ \left( \langle v_{zg} \rangle_g \right)_j^{t+\Delta t} - \left( \langle v_{zg} \rangle_g \right)_{j-1}^{t+\Delta t} \right] = 0 \quad (7.1)$$

donde  $\Lambda = \Delta z / \Delta t$ ,  $\Delta t$  define el paso de tiempo y los índices  $t$  y  $t + \Delta t$  se usan para indicar que las variables dependientes son evaluadas en el tiempo anterior y tiempo actual, respectivamente, y el subíndice  $j$  representa el número de celda o nodo en donde son calculadas las variables dependientes. Al aplicar el esquema implícito se obtiene como resultado un sistema de ecuaciones no lineales que debe resolverse con un método iterativo. Analizando la ecuación anterior, se puede observar que las variables que contienen los subíndices  $j-1$  y los superíndices  $t$  son conocidas porque dependen de las condiciones de entrada del nodo  $j-1$ , [considerando que las variables calculadas en la celda son iguales en toda la celda incluyendo la frontera (*concepto de celda donadora*)] y de las condiciones iniciales establecidas en el tiempo  $t$ . Con estas consideraciones, la ecuación anterior puede re-escribirse como:

$$\left[ \Lambda + \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^o \right] (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^{t+\Delta t} = \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^o (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_{j-1}^{t+\Delta t} \quad (7.2)$$

donde el superíndice  $o$  representa las variables seleccionadas sobre las cuales se aplica el método iterativo de convergencia. En forma análoga, la ecuación de conservación de masa para la fase líquida [Ec. (4.17) en el Capítulo 4] en forma discretizada está dada por:

$$\left[ \Lambda + \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^o \right] (\varepsilon_l)_j^{t+\Delta t} - (\varepsilon_l)_j^o \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^{t+\Delta t} = \Lambda (\varepsilon_l)_j^t + \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^o (\varepsilon_l)_{j-1}^{t+\Delta t} - (\varepsilon_l)_j^o \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_{j-1}^{t+\Delta t} \quad (7.3)$$

donde

$$(\varepsilon_l)_j^o = 1 - (\varepsilon_g)_j^o \quad (7.4)$$

La forma discretizada de la ecuación de cantidad de movimiento de la fase gas [Ec. (4.29)], está dada por:

$$\begin{aligned} & \left[ (\alpha_1)_j^o \Lambda + (\alpha_2)_j^o \right] (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} + \left[ (\alpha_3)_j^o \Lambda + (\alpha_4)_j^o \right] \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^{t+\Delta t} \\ & - \left[ (K_{VM})_j^o \Lambda - (\alpha_5)_j^o \right] \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o \left( \langle p_l \rangle^l \right)_j^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$= (\alpha_1)_j^o \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + (\alpha_2)_j^o (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\alpha_3)_j^o \Lambda \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^t + (\alpha_4)_j^o \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_{j-1}^{t+\Delta t}$$

$$- (K_{VM})_j^o \Lambda \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^t + (\alpha_5)_j^o \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o \left( \langle p_l \rangle^l \right)_{j-1}^{t+\Delta t} - (\varepsilon_g)_j^o (F_D)_j^o \Delta z - (\varepsilon_g)_j^o \rho_g g \Delta z$$

donde

$$(\alpha_1)_j^o = \rho_g \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^o \quad (7.6)$$

$$(\alpha_2)_j^o = \rho_g \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^{o^2} - \sigma \langle H_g \rangle_i \quad (7.7)$$

$$(\alpha_3)_j^o = \rho_g (\varepsilon_g)_j^o + (K_{VM})_j^o \quad (7.8)$$

$$(\alpha_4)_j^o = 2 (\varepsilon_g)_j^o \left[ \rho_g \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^o - \xi \rho_l (v_r)_j^o \right] + (K_{VM})_j^o \left( \langle v_{zg} \rangle^g \right)_j^o \quad (7.9)$$

$$(\alpha_5)_j^o = 2 \xi (\varepsilon_g)_j^o \rho_l (v_r)_j^o - (K_{VM})_j^o \left( \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^o \quad (7.10)$$

$$(K_{VM})_j^o = \rho_l (\varepsilon_g)_j^o c_3 \quad (7.11)$$

$$(F_D)_j^o = \frac{1}{2} \left[ \frac{g(\rho_l - \rho_g)}{\sigma (\varepsilon_g)_j^o} \right]^{1/2} (v_r)_j^o |(v_r)_j^o| \quad (7.12)$$

$$(v_r)_j^o = \left( \langle v_{zg} \rangle^g - \langle v_{zl} \rangle^l \right)_j^o \quad (7.13)$$

La forma discretizada de la ecuación de cantidad de movimiento de la fase líquida [Ec.

(4.23)] está dada por:

$$\begin{aligned} & \left[ (\beta_1)_j^o \Lambda + (\beta_2)_j^o \right] (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} + \left[ - (K_{VM})_j^o \Lambda + (\beta_5)_j^o \right] (\langle v_{zg} \rangle g)_j^{t+\Delta t} \\ & + \left[ (\beta_3)_j^o \Lambda + (\beta_4)_j^o \right] (\langle v_{zl} \rangle l)_j^{t+\Delta t} + (\varepsilon_l)_j^o (\langle p_l \rangle)_j^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} & = (\beta_1)_j^o \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + (\beta_2)_j^o (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t} - (K_{VM})_j^o \Lambda (\langle v_{zg} \rangle g)_j^t + (\beta_5)_j^o (\langle v_{zg} \rangle g)_{j-1}^{t+\Delta t} \\ & + (\beta_3)_j^o \Lambda (\langle v_{zl} \rangle l)_j^t + (\beta_4)_j^o (\langle v_{zl} \rangle l)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_l)_j^o (\langle p_l \rangle)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o (F_D)_j^o \Delta z - (\varepsilon_l)_j^o \rho_l g \Delta z \end{aligned}$$

donde

$$(\beta_1)_j^o = - \rho_l (\langle v_{zl} \rangle l)_j^o \quad (7.15)$$

$$(\beta_2)_j^o = - \rho_l \left\{ (\langle v_{zl} \rangle l)_j^o{}^2 + (v_r)_j^o{}^2 \left[ \xi - k (\varepsilon_l - \varepsilon_g)_j^o \right] \right\} \quad (7.16)$$

$$(\beta_3)_j^o = \rho_l (\varepsilon_l)_j^o + (K_{VM})_j^o \quad (7.17)$$

$$(\beta_4)_j^o = 2 \rho_l (\varepsilon_l)_j^o \left[ (\langle v_{zl} \rangle l)_j^o - k (\varepsilon_g)_j^o (v_r)_j^o \right] + (K_{VM})_j^o (\langle v_{zl} \rangle l)_j^o \quad (7.18)$$

$$(\beta_5)_j^o = 2 \rho_l k (\varepsilon_l)_j^o (\varepsilon_g)_j^o (v_r)_j^o - (K_{VM})_j^o (\langle v_{zg} \rangle g)_j^o \quad (7.19)$$

Las formas discretas de las ecuaciones de cantidad de movimiento de la fase gas y líquida [Ecs. (7.5) y (7.14)], no incluyen efectos de excentricidad ni de la dependencia espacial y temporal de los efectos de masa virtual, y los efectos de transferencia de cantidad de movimiento interfacial están dados por:

$$M_{lg} + M_{gl} = \langle H_g \rangle_{gl} \sigma \nabla \varepsilon_g \quad \text{en} \quad A_{lg} \quad (7.20)$$

donde

$$M_{lg} = \rho_l c_3 \varepsilon_g a_{VM} + \varepsilon_g F_D \quad \text{en} \quad A_{lg} \quad (7.21)$$

El conjunto de ecuaciones discretas, se puede escribir en forma matricial:

$$A_j (U_j^o) U_j^{t+\Delta t} = B_j (U_j^o, U_j^t, U_{j-1}^{t+\Delta t}) \quad (7.22)$$

donde  $U$  es el vector columna de variables dependientes, definido por la Ec. (5.24) en el

Capítulo 5, y la matriz  $A$  y el vector columna  $B$  están dados por:

$$A_j = \begin{pmatrix} [\Lambda + \langle v_{zl} \rangle_j^o] & 0 & -(\varepsilon_l)_j^o & 0 \\ [(\beta_1)_j^o \Lambda + (\beta_2)_j^o] & [-(K_{VM})_j^o \Lambda + (\beta_5)_j^o] & [(\beta_3)_j^o \Lambda + (\beta_4)_j^o] & (\varepsilon_l)_j^o \\ [\Lambda + \langle v_{zg} \rangle_j^o] & (\varepsilon_g)_j^o & 0 & 0 \\ [(\alpha_1)_j^o \Lambda + (\alpha_2)_j^o] & [(\alpha_3)_j^o \Lambda + (\alpha_4)_j^o] & [(\alpha_5)_j^o - (K_{VM})_j^o \Lambda] & (\varepsilon_g)_j^o \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + \langle v_{zl} \rangle_j^o (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} - (\varepsilon_l)_j^o \langle v_{zl} \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} \\ (\beta_1)_j^o \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + (\beta_2)_j^o (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} - (K_{VM})_j^o \Lambda \langle v_{zg} \rangle_{j-1}^t + (\beta_5)_j^o \langle v_{zg} \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} \\ + (\varepsilon_l)_j^o \langle p_l \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} + (\beta_3)_j^o \Lambda \langle v_{zl} \rangle_j^t + (\beta_4)_j^o \langle v_{zl} \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o [(F_D)_j^o - \rho_l g] \Delta z \\ \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + \langle v_{zg} \rangle_j^o (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o \langle v_{zg} \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} \\ (\alpha_1)_j^o \Lambda (\varepsilon_g)_j^t + (\alpha_2)_j^o (\varepsilon_g)_{j-1}^{t+\Delta t} + (\alpha_3)_j^o \Lambda \langle v_{zg} \rangle_j^t + (\alpha_4)_j^o \langle v_{zg} \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} \\ - (K_{VM})_j^o \Lambda \langle v_{zl} \rangle_j^t + (\alpha_5)_j^o \langle v_{zl} \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} + (\varepsilon_g)_j^o \langle p_l \rangle_{j-1}^{t+\Delta t} - (\varepsilon_g)_j^o [(F_D)_j^o + \rho_g g] \Delta z \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

### 7.3 Procedimiento de solución

Para resolver en forma numérica la Ec. (7.22) se usa el paquete de computadora *LINPACK* (Dongarra *et al.*, 1990), el cual es un código numérico para resolver ecuaciones lineales simultáneas. El algoritmo en el cual se basa este código consiste en factorizar la matriz  $A$  en una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior usando pivoteo parcial (es una versión de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial). Estos factores y la información del pivoteo se usan para encontrar la solución del vector  $U$ . Para realizar simulaciones es necesario especificar las condiciones iniciales y de frontera y los parámetros físicos.

*Condiciones iniciales.* En el tiempo  $t = 0$ , es necesario particularizar las condiciones iniciales en todas las celdas. Esta condición inicial es aplicable a las variables:  $(\varepsilon_g)_j^t$ ,  $(\langle v_{zg} \rangle^g)_j^t$ ,  $(\langle v_{zl} \rangle^l)_j^t$ .

*Condiciones de frontera.* Son las condiciones de entrada del sistema a simular y estas pueden ser constantes o función del tiempo. Estas variables son:  $(\varepsilon_g)_e$ ,  $(\langle v_{zg} \rangle^g)_e$ ,  $(\langle v_{zl} \rangle^l)_e$ ,  $(\langle p_l \rangle^l)_e$ , donde  $e$  significa que se trata de una condición de frontera a la entrada del sistema.

*Parámetros físicos.* Densidad del aire ( $\rho_g$ ) = 1.2043 Kg/m<sup>3</sup>; densidad del agua ( $\rho_l$ ) = 997.0 Kg/m<sup>3</sup> y tensión superficial ( $\sigma$ ) = 0.0715 N/m.

#### *Procedimiento de solución*

- Paso 1** Se asignan las condiciones de frontera a la celda o nodo 1 ( $j = 1$ ):  $(\varepsilon_g)_1 = (\varepsilon_g)_e$ ;  
 $(\langle v_{zg} \rangle^g)_1 = (\langle v_{zg} \rangle^g)_e$ ;  $(\langle v_{zl} \rangle^l)_1 = (\langle v_{zl} \rangle^l)_e$ ;  $(\langle p_l \rangle^l)_1 = (\langle p_l \rangle^l)_e$ .
- Paso 2** Las condiciones iniciales ( $t = 0$ ) establecidas para la solución del problema en particular, se asignan a las variables con subíndice  $0$  para todas las celdas ( $j =$

$1, 2, \dots, n$ ;  $n$  es el número total de celdas del sistema simulado):  $(\varepsilon_g)_j^o = (\varepsilon_g)_j^t$ ;  
 $(\langle v_{zg} \rangle^g)_j^o = (\langle v_{zg} \rangle^g)_j^t$ ;  $(\langle v_{zl} \rangle^l)_j^o = (\langle v_{zl} \rangle^l)_j^t$ ;  $(\langle p_l \rangle^l)_j^o = (\langle p_l \rangle^l)_j^t$

**Paso 3** Se calculan los coeficientes y variables necesarias para la segunda celda ( $j = 2$ ) usando las condiciones del **Paso 2**:  $(\alpha_i)_j^o$  [Ecs. (7.6)-(7.10)],  $(\beta_i)_j^o$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) [Ecs.(7.15)-(7.19)],  $(K_{VM})_j^o$  [Ec. (7.11)],  $(\varepsilon_l)_j^o$  [Ec. (7.4)],  $(F_D)_j^o$  [Ec. (7.12)] y  $(v_r)_j^o$  [Ec. (7.13)].

**paso 4** Se calcula cada uno de los elementos de la matriz  $A$  [Ec. (7.23)] y los elementos del vector columna  $B$  [Ec. (7.24)].

**Paso 5** Los elementos de la matriz  $A$  y del vector  $B$  son suministrados al programa de computadora numérico *LINPACK*, con el cual se encuentra el vector de solución  $U$  en el tiempo  $t + \Delta t$ , obteniendo las siguientes variables dependientes:  $(\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t}$ ;  $(\langle v_{zg} \rangle^g)_j^{t+\Delta t}$ ;  $(\langle v_{zl} \rangle^l)_j^{t+\Delta t}$ ;  $(\langle p_l \rangle^l)_j^{t+\Delta t}$ .

**Paso 6** El proceso iterativo de convergencia para resolver el problema de flujo en dos fases se realiza usando las formas discretizadas de las ecuaciones de masa y cantidad de movimiento de cada una de las fases. Si  $[A_j U_j^{t+\Delta t} - B_j] \leq |error|$  no se satisface (criterio de paro), el proceso de cálculo reinicia desde el **Paso 2**, pero ahora se asigna  $\psi_j^o = (\psi_j^t + \psi_j^{t+\Delta t})/2$  hasta obtener la convergencia. Este método requiere para converger un máximo de cuatro iteraciones (bajos flujos) con  $\Delta z = 0.01m$  y  $\Delta t = 0.01s$ .

**Paso 7** El proceso descrito en los **Pasos 3-6** se repite para las celdas  $j = 3$  hasta  $j = n$ . Las variables calculadas en la celda  $j = 2$  son las variables de entrada de la celda  $j = 3$ , y así sucesivamente. Las variables de entrada del nodo  $n$  son las variables calculadas en el nodo  $n - 1$ . Este procedimiento es la base de la aproximación de la celda donadora.

**Paso 8** Una vez concluido el cálculo de todas las celdas y antes de avanzar en el tiempo, se asignan las variables dependientes calculadas en el tiempo actual  $t + \Delta t$  a las variables en el tiempo  $t$  para que en el siguiente paso de tiempo correspondan al del tiempo anterior:  $(\varepsilon_g)_j^t = (\varepsilon_g)_j^{t+\Delta t}$ ;  $(\langle v_{zg} \rangle)_j^t = (\langle v_{zg} \rangle)_j^{t+\Delta t}$ ;  $(\langle v_{zl} \rangle)_j^t = (\langle v_{zl} \rangle)_j^{t+\Delta t}$ .

**Paso 9** Se avanza en el tiempo  $t + \Delta t$  iniciando nuevamente el proceso en el **Paso 2**.

La implantación del procedimiento de solución numérico en un programa de computadora es sencillo y directo.

#### *Escalamiento de la matriz*

La matriz  $A$  que se muestra en la Ec. (7.23) es una matriz mal condicionada. Por simple inspección se puede observar que los elementos  $(1,3)$ ,  $(2,4)$ ,  $(3,2)$  y  $(4,4)$   $[(m,k), m \text{ y } k = 1,2,3,4]$  de dicha matriz, presentan valores inferiores a la unidad, mientras que el elemento  $(1,1)$  presenta un valor del orden de 600, el elemento  $(4,3)$  del orden de 5000 y el elemento  $(2,2)$  del orden de 200 (usando  $\Lambda = \Delta z / \Delta t \sim 1$ ).

Para resolver este problema y minimizar el error de la solución, fue necesario escalar la matriz con los siguientes valores: los elementos  $(m,1)$   $[m=1,2,3,4]$  se escalaron usando un valor de 620, los elementos  $(m,2)$  con un valor de 250, los elementos  $(m,3)$  con un valor de 5000 y los elementos  $(m,4)$  no fue necesario escalarlos. Estos valores de escalamiento fueron adecuados para el conjunto de pruebas aquí presentadas y no fue necesario modificarlos. Existe un paquete de computadora denominado *LAPACK* (1992), posterior al paquete *LINPACK*, que escala la matriz en forma automática.

## 7.4 Resultados numéricos y discusión

Los términos interfaciales son una característica esencial del balance de cantidad de movimiento para flujos en dos fases. Si de los efectos interfaciales sólo son considerados la diferencia de presión interfacial y las fuerzas de arrastre interfacial, se obtiene una solución numérica básica. Esta solución presenta un patrón de decaimiento en la velocidad del líquido y para la fracción de vacíos y la velocidad de la fase gas presenta un incremento en su patrón de comportamiento. La combinación de ambos patrones es una indicación de un deslizamiento pronunciado entre las fases. Se pueden considerar otros mecanismos adicionales, tanto de bulto como interfaciales. De este modo, los esfuerzos de Reynolds modifican ligeramente la solución básica, a diferencia del término de masa agregada, cuyo efecto contribuye sumamente a reducir el deslizamiento entre las fases, puesto que el término de masa agregada ocasiona la desaceleración de la fase gaseosa debido a la masa de líquido arrastrada por las burbujas de gas. Por otro lado los efectos de masa agregada contribuyen a mejorar sustancialmente la estabilidad numérica.

### 7.4.1 Rapidez de propagación de la onda de vacíos

Los fenómenos en flujos en dos fases en condiciones de estado estable y condiciones transitorias son controlados por la propagación de la onda de vacíos (transiciones de patrones de flujo, inestabilidades de onda de densidad neutrónica). Por otro lado, las ondas de vacíos dependen fuertemente de las relaciones de cerradura usadas en el modelo de dos fluidos (Pauchon y Banerjee, 1986 y 1988; Ruggles, *et al.*, 1988a ; Lahey, 1991; Park, *et al.*, 1990).

En el Capítulo 5 se calcularon los valores característicos (análisis lineal) del conjunto de EDP's para analizar los fenómenos de propagación de vacíos, y en el Capítulo 6 se derivó la

ecuación de onda de vacíos (descripción dinámica) con el mismo propósito. La diferencia entre estas dos aproximaciones radica en que la ecuación de onda proporciona 4 modos de propagación, de los cuales dos de ellos corresponden a los obtenidos con la aproximación de los valores característicos. En esta sección las ondas de vacíos son calculadas usando la aproximación numérica.

La rapidez de propagación de las ondas de vacíos se puede calcular con la simulación numérica de una columna de burbujeo, definiendo el tiempo de viaje de la onda de vacíos de un nivel  $N$  de la columna a otro nivel  $N+1$ . La siguiente función de correlación cruzada fue definida para este propósito:

$$R_{xy}(N, \tau_j) = \sum_{i=1}^{m-j} [\varepsilon_g(N+1, t_{i+j}) - \varepsilon_g(N, t_i)]^2 \quad (7.25)$$

donde  $t_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ , es una sucesión de instantes de tiempo donde los valores de la fracción de vacíos son registrados (almacenados) y  $\tau_j$ ;  $j = 1, \dots, n$  ( $n < m$ ) es una sucesión de tiempos de retardo. El tiempo de viaje de la onda es el valor de  $\tau_j$  cuando  $R_{xy}(N, \tau_j)$  alcanza su mínimo valor, y entonces, la rapidez de la onda de vacíos se define como la relación de la distancia entre los niveles  $N$  y  $N+1$  y el tiempo de viaje previamente encontrado.

Las pruebas dinámicas se realizaron para  $\varepsilon_g \geq 0$ . En estas pruebas, la velocidad superficial del líquido  $\langle v_{z_l} \rangle$  (velocidad promedio de fase de líquido) fue mantenida constante mientras que la velocidad superficial del gas  $\langle v_{z_g} \rangle$  fue perturbada alrededor de un estado estacionario. El comportamiento transitorio de  $\varepsilon_g$  fue calculado numéricamente en los niveles  $N$  y  $N+1$  para un conjunto de tiempos  $t_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ , para obtener la velocidad de propagación de la onda usando la función de correlación cruzada dada por la Ec. (7.25).

#### 7.4.2 Validación del código numérico

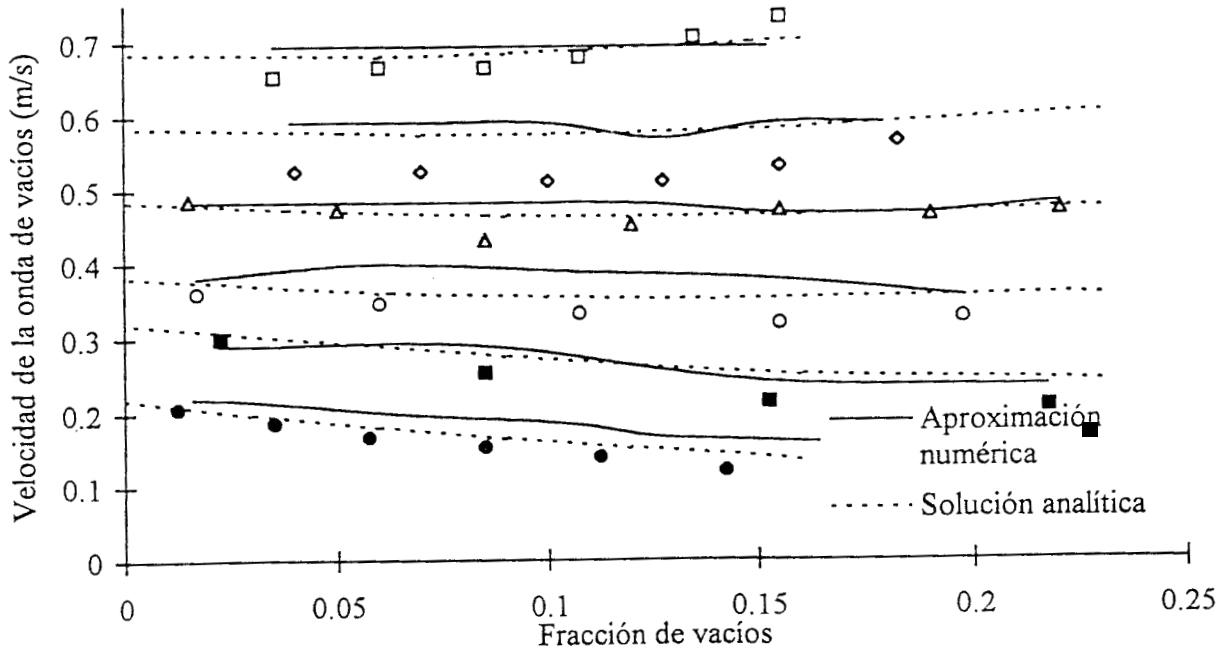
El modelo numérico se validó realizando comparaciones de las velocidades de propagación de la fracción de vacíos contra datos experimentales disponibles en la literatura (Apéndice E). En este caso, se seleccionaron los datos reportados por Mercadier (1981) y Bernier (1982) para flujo burbujeante. También el modelo numérico se comparó con la solución analítica reportada en el Capítulo 5.

En las Figuras 7.1 y 7.2 se presentan dichas comparaciones para diferentes velocidades superficiales de líquido  $j_l (= \varepsilon_l \langle v_l \rangle^l)$  y fracciones de vacío  $\varepsilon_g$ . Es de interés realizar las siguientes comparaciones para realizar un análisis de la validez del modelo numérico:

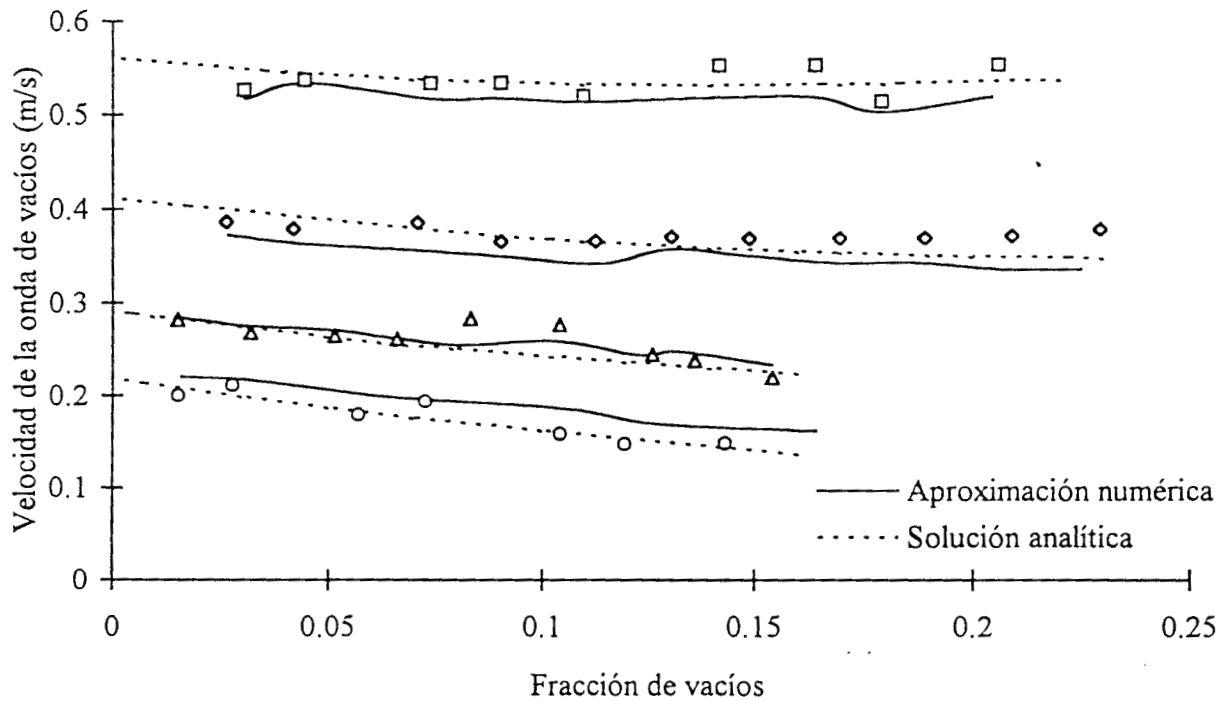
- (i) comparación del modelo analítico con datos experimentales,
- (ii) comparación del modelo numérico con datos experimentales y
- (iii) comparación del modelo numérico con el modelo analítico

(i) Comparación del modelo analítico con datos experimentales. Se puede observar en la Figura 7.1 que la solución analítica presenta la mayor diferencia con respecto a los datos experimentales de Mercadier (1981) para un valor  $\langle v_{zI} \rangle = 0.39\text{m/s}$ , y para los demás casos mostrados, la predicción concuerda con los datos experimentales. Con respecto a la Figura 7.2, existen ligeras diferencias entre la solución analítica y los datos experimentales de Bernier (1982), para todos los casos mostrados en dicha figura.

(ii) Comparación del modelo numérico con datos experimentales. En la Figura 7.1 se puede observar que las predicciones del modelo numérico presentan su mayor diferencia con respecto a los datos experimentales de Mercadier (1981) para valores de  $\langle v_{zI} \rangle = 0.2\text{m/s}$  y  $\langle v_{zI} \rangle = 0.39\text{m/s}$ . En los demás casos mostrados en la figura, las predicciones son acordes en magnitud



**Figura 7.1.** Velocidad de la onda de vacíos como una función de  $\varepsilon_g$  para diferentes velocidades superficiales de líquido, obtenidos de Mercadier (1981): (●)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.0\text{m/s}$ , (■)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.1\text{m/s}$ , (○)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.2\text{m/s}$ , (△)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.29\text{m/s}$ , (◇)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.39\text{m/s}$ , (□)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.49\text{m/s}$ .



**Figure 7.2.** Velocidad de la onda de vacíos como una función de  $\varepsilon_g$  para diferentes velocidades superficiales de líquido, obtenidos de Bernier (1982). (○)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.0\text{m/s}$ , (△)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.073\text{m/s}$ , (◇)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.169\text{m/s}$ , (□)  $\langle v_{z_l} \rangle = 0.318\text{m/s}$

y tendencia con los datos experimentales. La comparación de resultados que se presenta en la Figura 7.2, muestra que la aproximación numérica predice resultados similares en tendencia y magnitud que los datos experimentales de Bernier (1982).

(iii) Comparación del modelo numérico con el modelo analítico. Se puede observar en las Figuras 7.1 y 7.2, que los resultados obtenidos con respecto a los experimentales son más exactos con la solución analítica que con la aproximación numérica, excepto para el valor de  $\langle v_{z1} \rangle = 0.2\text{m/s}$  (Figura 7.1).

El análisis de este grupo de 3 comparaciones indica que tanto las predicciones de la solución analítica como las predicciones de la solución numérica no son acordes con los datos experimentales de Mercadier (1981) para el valor de  $\langle v_{z1} \rangle = 0.39\text{m/s}$ , aunque ambos son muy similares entre sí. Esto sugiere de acuerdo al rango de las fracciones de vacío y a las velocidades superficiales, que los datos experimentales podrían no ser correctos para esta velocidad.

La predicción de las velocidades de propagación de las ondas de vacíos con la aproximación numérica es más compleja que con la solución analítica, ya que no se tiene control absoluto sobre la fracción de vacíos debido a los efectos de frontera y a los datos reportados, los cuales no son suficientes para establecer exactamente las condiciones de frontera. De acuerdo con lo anterior, la diferencia con los datos experimentales en la predicción numérica presentada en la Figura 7.1 para  $\langle v_{z1} \rangle = 0.2\text{m/s}$  se puede deber a que no se establecieron con mayor precisión las condiciones de frontera, las cuales se deben perturbar alrededor del estado estacionario para producir un cambio transitorio del sistema y poder registrar este cambio para los cálculos necesarios. Esto respalda el resultado de la solución analítica la cual no presenta esta diferencia con respecto a los datos experimentales para el valor de  $\langle v_{z1} \rangle = 0.2\text{m/s}$ .

### 7.4.3 Comportamiento transitorio de los efectos interfaciales y de bulto

Para estudiar la importancia en condiciones transitorias de los efectos interfaciales, primero se define y se obtienen las condiciones de estado estacionario de la columna de burbujeo simulada con el código numérico, después se realiza la perturbación del sistema partiendo de estas condiciones. Entonces, para  $t = 0$  las condiciones iniciales establecidas son:

$$\varepsilon_g = 0.1518, \langle v_{zg} \rangle^s = 0.3214 \text{ m/s} (\langle v_{zg} \rangle = \varepsilon_g \langle v_{zg} \rangle^s = 0.0488 \text{ m/s}) \text{ y}$$
$$\langle v_{zl} \rangle^l = 0.1179 \text{ m/s} (\langle v_{zl} \rangle = 0.1 \text{ m/s})$$

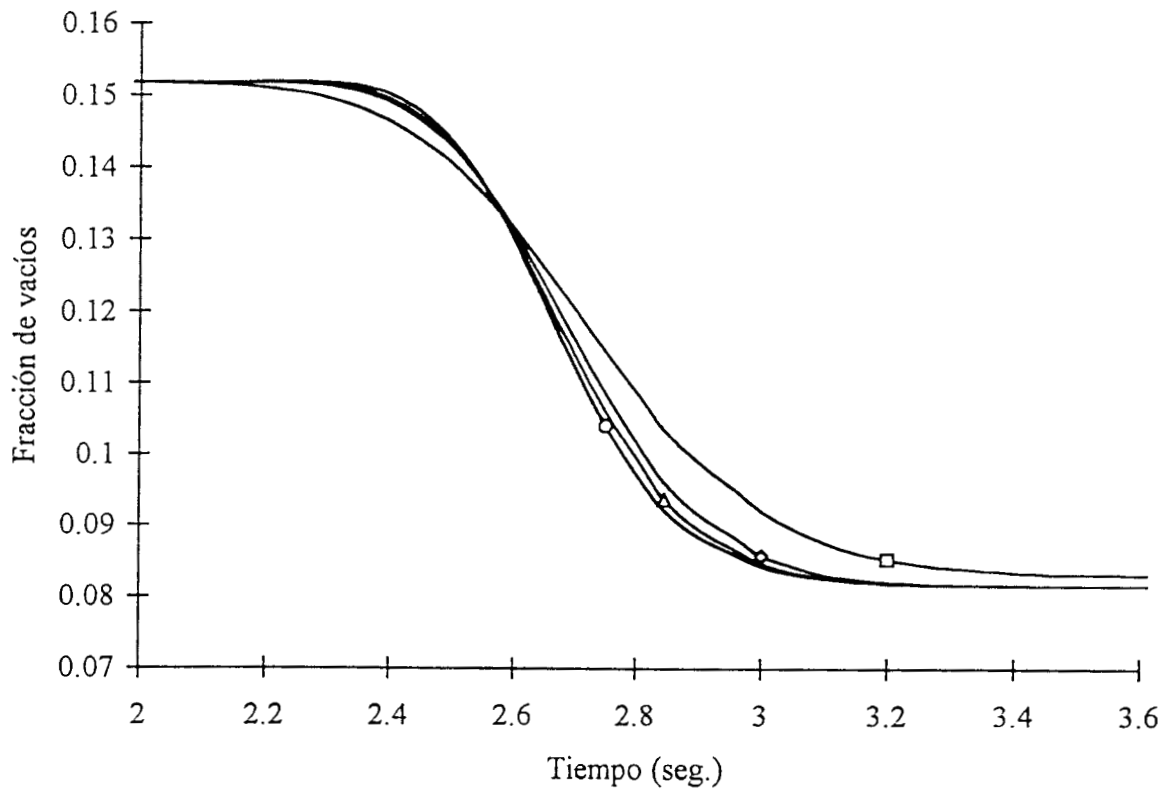
Con estas condiciones el estado transitorio se produce en el tiempo  $t = 1$ . Al perturbar la velocidad superficial a  $\langle v_{zg} \rangle = 0.0275 \text{ m/s}$ , el comportamiento de la perturbación introducida es en forma de rampa de  $t = 1$  a  $t = 1.2$  seg.. Con esta perturbación se realizaron las siguientes pruebas y la información se registró en la celda 45 (45cm de la entrada), lejos de la entrada:

- Con todos los efectos interfaciales y de bulto,
- sin efectos de tensión interfacial,
- sin esfuerzos de Reynolds y
- sin efectos de presión interfacial.

En la Figura 7.3 se presenta el comportamiento transitorio de la fracción de vacíos para todos los casos mencionados anteriormente. Se ve que sí los esfuerzos de Reynolds no son considerados, entonces para tiempos mayores que 2.6 seg., el cambio de la fracción de vacíos es localmente acelerada, modificando ligeramente la solución básica completa, es decir, con todos los efectos interfaciales y de bulto. Por otro lado, sí los efectos de presión interfacial no son considerados, entonces para tiempos mayores que 2.6 seg., los cambios experimentados por

la fracción de vacíos también son localmente acelerados y la contribución de este efecto es mayor que los efectos debidos a los esfuerzos de Reynolds, como se puede observar en la Figura 7.3. En el caso en que los efectos de tensión interfacial no son incluidos, para tiempos mayores que 2.6 seg., los cambios de la fracción de vacíos son localmente retardados (desacelerados). Este efecto contribuye sumamente a modificar la estructura de la onda cinemática: la rapidez de la onda de vacíos sin considerar efectos de tensión interfacial fue de  $0.262 \text{ m/s}$  y la fracción de vacíos alcanzó un nuevo estado estacionario en  $0,0831$ , mientras que en todos los demás casos, la velocidad de la onda de vacíos fue de  $0.271 \text{ m/s}$  con una fracción de vacíos final de  $0.0816$ . Con estas pruebas transitorias se encontró que los efectos de presión interfacial y los efectos de tensión interfacial son fuertemente significativos en comparación con los esfuerzos de Reynolds. Este hecho es una indicación de mucho peso para que dichos términos sean considerados en el modelado, puesto que los efectos de tensión interfacial no han sido considerados en previos análisis sobre propagación de vacíos en flujo burbuja (Lahey, 1991; Park, *et al.*, 1989; Ruggles, *et al.*, 1988a; Pauchon y Banerjee, 1986 y 1988). Es importante hacer notar que para tiempos menores de 2.6 seg., en todos los casos el efecto del comportamiento es opuesto al analizado previamente.

Las mismas pruebas descritas arriba, también se realizaron para  $\langle v_{z1} \rangle = 0.49 \text{ m/s}$ . Se encontró que el comportamiento de la fracción de vacíos es prácticamente invariante para cambios en  $\langle v_{z2} \rangle$ . Este comportamiento se puede entender debido a que el movimiento dinámico de la mezcla bifásica es controlada por efectos convectivos y se observó que los efectos interfaciales y de bulto no contribuyen en forma apreciable en el comportamiento transitorio estudiado. En consecuencia, los efectos interfaciales y de bulto son importantes a bajas velocidades superficiales de líquido.



**Figura 7.3.** Efectos de cantidad de movimiento interfacial y de bulto en condiciones transitorias. (◇) Todos los efectos interfaciales y de bulto, (□) sin efectos de tensión interfacial, (△) sin efectos de esfuerzos de Reynolds y (○) sin efectos de presión interfacial.

## 7.5 Conclusiones

Se desarrollo un código numérico que simula una columna de burbujeo aire-agua, el cual se basa en el conjunto de ecuaciones macroscópicas de transporte de masa y cantidad de movimiento con efectos de tensión superficial, además de los efectos de masa agregada, diferencia de presión interfacial y esfuerzos de Reynolds. Este código describe los fenómenos de flujo burbujeante en una dimensión en régimen de comportamiento estable y transitorio.

El procedimiento de solución propuesto es numéricamente estable, directo para su implantación y rápido de ejecutar (aproximadamente 10 veces mas lento que tiempo real). El procedimiento se basa en el método de diferencias finitas en forma implícita aplicando el concepto de celda donadora.

La validación del modelo con datos experimentales y su comparación con la solución analítica, sugiere que la solución numérica desarrollada es una técnica apropiada para analizar los fenómenos de propagación y ofrece un medio para validar modelos de flujo en dos fases.

Los resultados numéricos obtenidos de las pruebas transitorias demuestran que los efectos de tensión interfacial producen aceleración de la onda de vacíos, mientras que la consideración de los efectos presión interfacial y efectos de los esfuerzos de Reynolds causan la desaceleración de la onda de vacíos. También se encontró que los efectos de tensión interfacial cobran mayor importancia (mecanismo predominante) a bajas velocidades superficiales de líquido (aproximadamente  $0.1 \text{ m/s}$ ) que a altas velocidades (aproximadamente  $0.49 \text{ m/s}$ ).

De acuerdo con los resultados obtenidos, el orden de importancia en los efectos

interfaciales y de bulto que más influyen en el comportamiento transitorio de las fases es: (1) tensión superficial, (2) presión interfacial y (3) relacionado con los efectos de bulto, el esfuerzo de Reynolds de la fase líquida.

Los efectos de masa agregada contribuyen en forma dramática en la estabilidad numérica del código, y sin este efecto se presentan inestabilidades.

## REFERENCIAS

- Andersen, J.G.M. y Shaug, J.C., 1984, A predictor method for the BWR version of the TRAC computer code, in N. M. Farukhi, editor, *AIChE Symposium Series*, **80**, pp. 275-280.
- Aris, R., *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Banerjee, S. y Chan, A.M., 1980, Separated flow model, I-analysis of the averaged and local instantaneous formulations, *Int. J. Multiphase Flow*, **6**, 1-24.
- Bernier, R.J.N., 1982, Unsteady two-phase flow instrumentation and measurement, *Ph D. Thesis*, California Institute of Technology, 1982.
- Biesheuvel, A. y van Wijngaarden, L., 1984, Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid, *J. Fluid Mech.*, **148**, 301-318.
- Biesheuvel, A. y Spoeltra, S., 1989, The added mass coefficient of a dispersion of spherical gas bubbles in liquid, *Int. J. Multiphase Flow*, **15**, 911-924.
- Biesheuvel, A. y Gorissen, C.M., 1990, Void waves disturbances in a uniform bubbly fluid, *Int. J. Multiphase Flow*, **16**, 211-231.
- Borkowski, J.A. y Wade, N.L., 1992, TRAC-BF1/MOD1 Models and correlations, NUREG/CR-4391, EGG-2680, Idaho National Engineering Laboratory, E.U.
- Bouré, J.A., 1982, Kinematic models, void fractions and other propagation phenomena in two phase flows, Presented at *Semin. on Multiphase Processes in LMFBR safety Analysis*, Ispra, Italia.
- Bouré, J.A. y Mercadier, Y., 1982, Existence and properties of flow structure ways in two-phase bubbly flows, *Appl. Scient. Res.*, **38**, 297-303.
- Bouré, J.A., 1987, Properties and modeling of kinematic and pressure waves in two-phase flow, *ICHMT Seminar on Transient Phenomena in Multiphase Flow*, Dubrovnik, 319-340.
- Bouré, J.A., 1988, Properties of kinematic waves in two-phase pipe flows consequences on the modeling strategy, *Proc. Eur. Two-Phase Flow Group Meet.*
- Brauner, N., y Maron, M.D., 1992, Stability analysis of stratified liquid-liquid flow, *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 103-121.
- Burden, L.R. y Faires D.J., 1985, *Análisis numérico*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

- Carbonell, R.G. y Whitaker, S., 1984, Heat and Mass Transfer in Porous Media, en *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media* (Editores: J. Bear y M.Y. Corapcioglu), 121-198. Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- Chernyy, I.M. y Srebnyuk, S.M., 1979, Phase slip in a flow of a gas-liquid mixture, *Fluid Mechanics - Soviet Research*, **8**, 86-92.
- Chexal, B., Merilo, M., Maulbetsch, J., Horowitz, *et al.*, 1997, *Void fraction technology for design and analysis*, EPRI, TR-106323.
- Collier, J.G., 1972, *Convective boiling and condensation*, McGraw-Hill, New York.
- Crapiste, G.H., Rotstein, E. y Whitaker, S., 1986, A general closure scheme for the method of volume averaging, *Chem. Engng. Sci.*, **41**, 227-235.
- Currie, I.G., 1993, *Fundamental mechanics of fluids*, McGraw-Hill, Estados Unidos.
- Darwin, C., 1952, Note on hydrodynamics, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49**, 342-354
- Delhaye, J. M., 1981, Basic Equations for two phase flow modeling, en *Two-phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries* (Eds. A. E. Bergles, J. G. Collier, J. M. Delhaye, G. F. Hewitt y F. Mayinger), 40-97. Hemisphere, Washington, DC.
- Dongorra, J.J., Bunch, J.R., Moler, C.B. y Stewart, G.W., 1990, LINPACK user guide, *Soc. Ind. Appl. Math.*
- Doster, J.M., 1989, Numerical solutions of mutiphase flow problems, en *Simulators VI* (A. Sharon and M.R Facory, eds.), **21**, 59-66.
- Drew, D. A., 1992, Analytical modeling of multiphase flows, en *Boiling Heat Transfer: Modern Developments and Advances*, (Editador R.T. Lahey, Jr.), Elsevier Science Publishers.
- Espinosa-Paredes, G. y Soria, A., 1998, Method of finite difference solutions to the transient bubbly air/water flows, *Int. J. Num. Methd. Fluids*, **26**, 1155-1180.
- Espinosa, G. y Máximo, A., 1992, A comparison between two real time simulators of BWR reactor kinetics, thermohdraulics and heat transfer models, 24.01-24.15, *8th Power Plant Dynamics Cntrol & Testing*, Department of Nuclear Engineering, The University of Tennessee, Knoxville, Tennessee, Estados Unidos.
- Ferch, R.L., 1979, Method of characteristics solutions for non-equilibrium transient flow-boiling, *Int. J. Multiphase Flow*, **5**, 265-279.
- Geurst, J.A., 1985, Virtual mass in two-phase bubbly flow, *Physica*, **129A**, 233-261.

- Geurst, J.A., 1986, Variational principles and two-fluid hydrodynamics of bubbly liquid/gas mixture, *Physica*, **135A**, 435-486.
- Glatzmair, G.C. y Ramírez, W.F., 1988, Use of volume averaging for the modeling of thermal properties of porous materials, *Chem. Engng. Sci.*, **43**, 3157-3169.
- González-Santaló, J.M y Lahey, R.T., 1973, An exact solution for flow transients in two-phase systems by the method of characteristics, *ASME, paper 75-WA/HT-25*, pp. 470-476.
- Gray, W.G., 1975, A derivation of the equations for multiphase transport, *Chem. Engng. Sci.*, **30**, 229-233.
- Gray, W.G. y Lee, P.C.Y., 1977, On the theorems for local volume averaging of multiphase systems, *Int. J. Multiphase Flow*, **3**, 333-340.
- Gray, W.G., 1983, Local volume averaging of multiphase systems using a non-constant averaging volume, *Int. J. Multiphase Flow*, **9**, 755-761.
- Hancox, W.T., Ferch, R.L., Liu, W.S. y Nieman, R.E, 1980, One-dimensional models for transient gas-liquid flows in ducts, *Int. J. Multiphase Flow*, **6**, 25-40.
- Harmathy, T.Z., 1960, Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent, *A.I.Ch.E. J.*, **6**, 281-288.
- Hassanizadeh, M. y Gray, W.G., 1979, General conservation equations for multiphase systems: 1. Averaging procedure, *Adv. Water Resour.*, **2**, 131-144.
- Homes, F.A. y Whitaker, S., 1984, The spatial averaging theorem revisited, *Chem. Engng. Sci.*, **40**, 1387-1392.
- Ishii, M., 1975, *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Eyrolles, Paris.
- Ishii, M. y Zuber, N., 1979, Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, *A.I.Ch.E. J.*, **25**, 843-855.
- Ishii, M. y Mishima, K., 1984, Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations, *Nuclear Engineering and Design*, **82**, 107-126.
- Jeffrey, D.J., 1973, Conduction through a random suspension of spheres, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A335**, 355--367.
- Khan, H.J., Cheng, H.S. y Rohatgi, U.S., 1993, Prediction of BWR performance under influence of isolation condenser using RAMONA-4B code, BNL-NUREG-48415, National Engineering Laboratory Idaho, E.U.A.

- Kok, 1988, Kinetic energy and added mass of hydrodynamically interacting gas bubbles in liquid, *Physica*, **148A**, 240-252.
- Lahey, R.T. y Drew, D.A., 1989, The three-dimensional time and volume averaged conservations equations of two-phase flow, *Adv. Nuclear Sci. Technol.*, **20**, 1-69.
- Lahey, R.T., 1991, Void wave propagation phenomena in two-phase flow, *A.I.Ch.E. J.*, **37**, 123-135.
- Lahey, R.T., 1992, The prediction of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models, en *Boiling Heat Transfer: Modern Developments and Advances* (Editado por R.T. Lahey), 102-103, Elsevier Science Publishers.
- Lamb, H., 1945, *Hydrodynamics*. Dover, New York (Cambridge, 1879).
- Lisseter, P.E. y Fowler, A.C., 1992, Bubbly flow-II, modeling void fracción waves, *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 205-215.
- Lyczkowski, R.W., Gidaspow, D, Solbrig, C.W. y Hughes, E.D., 1975, Characteristic and stability analyses of transient one-dimensional two-phase flow equations and their finite difference approximations, *ASME, paper 75-WA/HT-23*, pp. 1-15.
- Martini, R., Pierini, G.C. y Sandri, C., 1978, A one-dimensional transient two-phase flow model and its implicit finite-difference solution, in Proc. *CSNI Specialists Meeting on Transient Two-Phase Flow, Toronto*, pp. 379-397.
- Maxwell, J.C., 1891, *A treatise on Electricity and Magnetism*, 3<sup>ra</sup> edición, Vol. 1, Clarendon Press. Oxford.
- Mercadier, 1981, Contribution A L'Etudes des propagations de perturbations de taux de vide dans les ecolulements diphasiques eau-air a bulles, Thèse, L'Université Scientifique et Médicale et L'Institut National Polytechnique de Grenoble, Francia.
- Micaelli, J.C., 1982, Propagation d'ondes dans les ecoulements diphsiques a bulles a deux constituants. Etude theorique et experimentale. Tesis de Doctorado en Ciencias, Institut National Polytechnique de Grenoble, Francia.
- Milne-Thomson, L.M., 1968, *Theoretical hydrodynamics*, 5a ed. Mc. Millan, New York.
- Minami, K. y Shoham, O., 1994, Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling. *Int. J. Multiphase Flow*, **4**, 739-752.
- Mokeyev, Yu. G., 1977, Effect of particle concentration on their drag and induced mass, *Fluid Mechanics - Soviet Research*, **6**, 161-168.

- Nigmatulin, R.I., 1979, Spatial averaging in the mechanics of heterogeneous and dispersed systems, *Int. J. Multiphase Flow*, **5**, 353-385.
- Ochoa-Tapia, J.A., Del Rio, J. y Whitaker, S., 1993, Bulk and surface diffusion in porous media: An application of surface-averaging theorem, *Chem. Engng. Sci.*, **48**, 2061-2082.
- Ochoa-Tapia, J.A., Stroeve, P. y Whitaker, S., 1994, Diffusive transport in two-phase media: Spatially periodic models and Maxwell's theory for isotropic systems, *Chem. Engng. Sci.*, **49**, 709-726.
- Ochoa-Tapia, J.A., y Whitaker, S., 1995, Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid I: Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**, 2635-2646.
- Park, J-W., Drew, D.A y Lahey, R.T., 1990, Void wave dispersion in bubbly Flows, *Nucl. Eng. Des.*, **121**, 1-10.
- Pauchon, C. y Banerjee, S., 1986, Interphase momentum interaction effects in the averaged multifield model. Part I: Void propagation in bubbly flows. *Int. J. Multiphase Flow*, **12**, 559-573.
- Pauchon, C. y Banerjee, S., 1988, Interphase momentum interaction effects in the averaged multifield model. Part II: Kinematic waves and interfacial drag in bubbly flows. *Int. J. Multiphase Flow*, **14**, 253-264.
- Pauchon, C. y Smeraka, P., 1992, Momentum interactions in dispersed flow: An averaging and a variacional approach, *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 65-87.
- Ramshaw, J.D. y Trapp, J.A., 1978, Characteristic, stability and short-wavelength phenomena in two-phase flow equation system, *Nucl. Sci. Eng.*, **66**, 93-102.
- Ruggles, A.E., Lahey, R.T, Drew, D.A y Scarton, H.A, 1988a, An investigation of the propagation of pressure perturbations in bubbly air/water flows, *Trans. ASME C: Journal of Heat Transfer*, **110**, 495-499.
- Ruggles, A.E., Lahey, R.T. y Drew, D.A., 1988b, An analysis of void wave propagation in bubbly Flows, *Proc., 15th Miami Intl. Symp., Multiphase Transport and Particulate Fenomena*.
- Saiz-Jabardo, J.M. y Bouré, J.A., 1989, Experiments on void fraction waves, *Int. J. Multiphase Flow*, **15**, 483-493.

- Sangani, A.S. y Acrivos, A., 1982 Slow flow through a periodic array of spheres, *Int. J. Multiphase Flow*, **8**, 343-360.
- Sangani, A.S. y Acrivos, A., 1983, The effective conductivity of a periodic array of spheres, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A386**, 263-275.
- Slattery, J.C., 1967, Flow of viscoelastic fluids through porous media, *A.I.Ch.E. J.*, **13**, 1066-1071.
- Smereka, P. y Milton, G.W., 1991, Bubbly flow and its relation to conduction in composites, *J. fluid Mech.*, **233**, 65-81.
- Soria, A., 1991a, Kinematic waves and governing equations in bubble columns and three-phase fluidized beds. *Ph. D. Thesis*, The University of Western Ontario, London, Canada.
- Soria, A. y De Lasa, H.I., 1991b, Averaged transport equations for multiphase systems with interfacial effects, *Chem. Engng. Sci.*, **46**, 2093-2111.
- Soria, A. y De Lasa, H.I., 1992a, Kinematics waves and flow patterns in bubble columns and three-phase fluidized beds. *Chem. Engng. Sci.*, **47**, 3403-3410.
- Soria, A. y De Lasa, H.I., 1992b, Averaged topological equations for dispersed two-phase flows, *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 943-963.
- Stuhmiller, J.H., 1977, The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations, *Int. J. Multiphase Flow*, **3**, 551-560.
- Travis, J.R, Harlow, F.H. y Amdsen, A., 1976, Numerical calculation of two-phase flows, *Nucl. Sci. Engng*, **61**, 1-10.
- van Wijngaarden, L., 1976, Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid, *J. Fluid Mech.*, **77**, 27-44.
- Voinov, O.V., 1973, On the force acting on a sphere in a non-uniform flow of ideal incompressible fluid, *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, **4**, 182-184.
- Wallis, G.B., 1969, *One-dimensional two-phase* , McGraw Hill Book Co..
- Wallis, G.B., 1989, Inertial coupling in two phase flow: Macroscopic properties of suspensions in an inviscid fluid, *Multiphase Science and Technology*, **5**, 239-361.
- Wallis, G.B., 1991, The averaged Bernoulli equation and macroscopic equations of motion for the potential flow of two-phase dispersion, *Int. J. Multiphase Flow*, **6**, 683-695.

- Wallis, G.B., 1992, Macroscopic properties of a two-phase potential dispersion composed of identical unit cells, *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 989-1017.
- Wang, S.K., Lee, S.J., Jones O.C. y Lahey, R.T., 1987, 3-D turbulence structure and phase distribution measurements in bubbly two-phase flow, *Int. J. Multiphase Flow*, **13**, 327-343.
- Whitaker, S., 1967, Diffusion and dispersion in porous media, *A.I.Ch.E. J.*, **13**, 420-427.
- Whitaker, S., 1969, Advances in the theory of fluid motion in porous media, *Ind. Engng. Chem.*, **61**, 14-28.
- Whitaker, S., 1986a, Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law, *Transport in Porous Media*, **1**, 3-25.
- Whitaker, S., 1986b, Flow in Porous Media II: The governing equations for immiscible, two-phase flow, *Transport in Porous Media*, **1**, 105-125.
- Whitaker, S., 1994, The closure problem for two-phase flow in homogeneous porous media, *Chem. Engng. Sci.*, **49**, 765-780.
- Whitham, G.B, 1974, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons.
- Yadigaroglu, G. y Lahey, R.T., 1976, On the various forms of the conservation equations in two-phase flow, *Int. J. Multiphase Flow*, **2**, 477-494.
- Zanotti, F. y Carbonell, R., G., 1984a, Development of transport equations for multiphase systems-I: General development for two phase system, *Chem. Engng. Sci.*, **39**, 263-278.
- Zanotti, F. y Carbonell, R., G., 1984b, Development of transport equations for multiphase systems-I, Application to one-dimensional axisymmetric flows of two phases, *Chem. Engng. Sci.*, **39**, 279-297.
- Zuber, N., 1964, On the disperse two-phase flow in the laminar flow regime, *Chem. Engng. Sci.*, **49**, 897-917.
- Zuber, N., y Findlay, J., 1965, Average volumetric concentration in two-phase flow systems, *J. Heat Transfer*, **88**, 453.

## APENDICE A.

### TERMINO FUENTE DE LA CONDICION DE SALTO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En este apéndice se demuestra la siguiente relación:

$$m = 2H_g \sigma n_{gl} \quad (\text{A.1})$$

donde la cantidad vectorial  $m$  es el término fuente de cantidad de movimiento,  $H_g$  es la curvatura media media medida desde la fase gas,  $\sigma$  es la tensión superficial y  $n_{gl}$  es el vector normal unitario apuntando de la fase gas a la fase líquida. Esta relación es válida para  $\sigma = \text{constante}$ .

La notación empleada en todo el apéndice es básicamente la misma que Aris (1962), para cantidades tensoriales superficiales se usan índices griegos, mientras que para cantidades tensoriales e'paciales se usan índices latinos.

#### *Preliminares*

Sea  $x^i$  que representa un sistema de coordenadas generalizadas de un punto en el espacio, entonces una superficie  $s(t)$  moviéndose tiene la siguiente ecuación paramétrica:

$$s(t) : \quad x^i = x^i (u^\alpha, t), \quad i = 1,2,3 \quad \alpha = 1,2 \quad (\text{A.2})$$

donde  $u^\alpha$  son las coordenadas de superficie y  $t$  representa el tiempo. Un vector tangente en cualquier punto de la superficie está dado por:

$$t_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \quad (\text{A.3})$$

donde  $t_\alpha^i$  es un vector espacial contravariante el cual se puede interpretar como un vector de superficie covariante, este símbolo se conoce como tensor híbrido (Aris, 1962). También en cualquier punto de la superficie existe un vector normal unitario

$$n^i = n^i (u^\alpha, t) \quad (\text{A.4})$$

La contracción o proyección de los dos vectores anteriores son:

$$n^i n^i = 1 \quad t_\alpha^i n^i = 0, \quad \text{para toda } t \quad (\text{A.5})$$

### *Demostración*

Sea  $\phi^{\alpha\beta}$  un tensor de esfuerzos superficiales ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ), este mismo tensor en coordenadas de volumen o espaciales está definido por:

$$\phi^{ij} = t_\alpha^i t_\beta^j \phi^{\alpha\beta} \quad (\text{A.6})$$

La derivada covariante (se denota por la coma) de este tensor es:

$$\phi_{, \gamma}^{ij} = t_{\alpha, \gamma}^i t_\beta^j \phi^{\alpha\beta} + t_\alpha^i t_{\beta, \gamma}^j \phi^{\alpha\beta} + t_\alpha^i t_\beta^j \phi_{, \gamma}^{\alpha\beta} \quad (\text{A.7})$$

el cual es un tensor de tercer orden y representa el gradiente de  $\phi^{ij}$  en la superficie. El tensor híbrido  $t_\alpha^i$  es un vector tangente a la superficie y su derivada covariante  $t_{\alpha, \gamma}^i$  es un vector normal a  $t_1^i$  y  $t_2^i$ , siendo este proporcional a  $n^i$ , el cual está dado por (Aris, 1962):

$$t_{\alpha, \gamma}^i = b_{\alpha\gamma} n^i \quad (\text{A.8})$$

la segunda forma fundamental de la superficie se relaciona con la razón de cambio de la superficie en la dirección tangencial, aplicando este resultado en la Ec. (A.7), se obtiene:

$$\phi_{,\gamma}^{ij} = b_{\alpha\gamma} n^i t_{\beta}^j \phi^{\alpha\beta} + t_{\alpha}^i b_{\beta\gamma} n^j \phi^{\alpha\beta} + t_{\alpha}^i t_{\beta}^j \phi_{,\gamma}^{\alpha\beta} \quad (\text{A.9})$$

Para obtener la divergencia superficial, se multiplica esta ecuación por  $a^{\gamma\delta} t_{\alpha}^k g_{kj}$  (donde  $a^{\gamma\delta}$  es un tensor métrico de superficie y  $g_{kj}$  es un tensor métrico espacial), se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_{,\gamma}^{ij} \left( a^{\gamma\delta} t_{\delta}^k g_{kj} \right) &= a^{\gamma\delta} b_{\alpha\gamma} g_{kj} t_{\delta}^k t_{\beta}^j n^i \phi^{\alpha\beta} + a^{\gamma\delta} g_{kj} t_{\delta}^k t_{\alpha}^i b_{\beta\gamma} n^j \phi^{\alpha\beta} \\ &+ a^{\gamma\delta} g_{kj} t_{\delta}^k t_{\alpha}^i t_{\beta}^j \phi_{,\gamma}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para simplificar la ecuación anterior, se aplican las siguientes identidades e igualdades:

$$a^{\delta\beta} = g_{kj} t_{\delta}^k t_{\beta}^j \quad (\text{A.11})$$

$$g_{kj} t_{\delta}^k n^j = t_{\delta}^k n_k = 0 \quad (\text{A.12})$$

Entonces la Ec. (A.10), se puede escribir como:

$$\phi_{,\gamma}^{ij} \left( a^{\gamma\delta} t_{\delta}^k g_{kj} \right) = a^{\gamma\delta} a_{\delta\beta} b_{\alpha\gamma} n^i \phi^{\alpha\beta} + a^{\gamma\delta} a_{\delta\beta} t_{\alpha}^i \phi_{,\gamma}^{\alpha\beta} \quad (\text{A.13})$$

El primer término de la ecuación anterior se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a^{\gamma\delta} a_{\delta\beta} b_{\alpha\gamma} n^i \phi^{\alpha\beta} &= \delta_{\beta}^{\gamma} b_{\alpha\gamma} n^i \phi^{\alpha\beta} \\ &= b_{\alpha\beta} n^i \phi^{\alpha\beta} \\ &= t_{\alpha,\beta}^i \phi^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde  $\delta_{\beta}^{\gamma}$  es la delta de Kronecker en la superficie, la cual toma un valor de 1 si  $\gamma=\beta$  y cero si  $\gamma \neq \beta$ . El segundo término de la Ec. (A.13) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} a^{\gamma\delta} a_{\delta\beta} t_{\alpha}^i \phi_{,\gamma}^{\alpha\beta} &= \delta_{\beta}^{\gamma} t_{\alpha}^i \phi_{,\gamma}^{\alpha\beta} \\ &= t_{\alpha}^i \phi_{,\beta}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

El gradiente de  $\phi^{ij}$  en la superficie en términos del gradiente de  $\phi^{ij}$  en el espacio, es:

$$\phi_{,\gamma}^{ij} = t_{\gamma}^l \phi_{,l}^{ij} \quad (\text{A.16})$$

multiplicando esta ecuación nuevamente por el término  $a^{\gamma\delta} t_{\alpha}^k g_{kj}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_{,\gamma}^{ij} \left( a^{\gamma\delta} t_{\delta}^k g_{kj} \right) &= a^{\gamma\delta} t_{\delta}^k t_{\gamma}^l g_{kj} \phi_{,l}^{ij} \\ &= \left( g^{kl} - n^k n^l \right) g_{kj} \phi_{,l}^{ij} \\ &= \left( \delta_j^l - n_j n^l \right) \phi_{,l}^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde  $a^{\gamma\delta}$  es simétrico ( $= a^{\delta\gamma}$ ) y  $\delta_j^l$  es la delta de Kronecker en el espacio, la cual es 1 si  $l=j$  y cero si  $l \neq j$ . El resultado de la identidad (segunda igualdad de esta ecuación) se obtiene del texto de Aris (1962). Sustituyendo las Ecs. (A.14), (A.15) y (A.17) en la Ec. (A.13):

$$\left( \delta_j^l - n^l n_j \right) \phi_{,l}^{ij} = \left( t_{\alpha}^i \phi^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} \quad (\text{A.18})$$

donde

$$\left( t_{\alpha}^i \phi^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} = t_{\alpha,\beta}^i \phi^{\alpha\beta} + t_{\alpha}^i \phi_{,\beta}^{\alpha\beta} \quad (\text{A.19})$$

La Ec. (A.19), es una relación general, considerando en particular el siguiente tensor:

$$\phi^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} \sigma \quad (\text{A.20})$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial. Sustituyendo la Ec. (A.20) en (A.6) y obteniendo la diferenciación covariante en coordenadas espaciales, se obtiene:

$$\phi_{,l}^{ij} = \left( t_{\alpha}^i t_{\beta}^j a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,l} = \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,l} \quad (\text{A.21})$$

este resultado puede introducirse en el lado derecho de la Ec. (A.18), para obtener:

$$\left( \delta_j^l - n^l n_j \right) \phi_{,l}^{ij} = \delta_j^l \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,l} - n^l n_j \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,l} \quad (\text{A.22})$$

operando el primer término de la ecuación anterior:

$$\delta_j^l \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,l} = \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,j} \quad (\text{A.23})$$

El segundo término de la Ec. (A.22), se encuentra que es:

$$\begin{aligned} - n^l n_j \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,l} &= - n^l n_j \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma_{,l} \\ &\quad - n^l n_j g_{,l}^{ij} \sigma + n^l n_j \left( n^i n^j \right)_{,l} \sigma \\ &= - n^l n_j \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma_{,l} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

donde el segundo término es cero porque  $g^{ij}$  es una constante con respecto a la diferenciación covariante (Aris, 1962) y el tercer término es cero por tratarse de vectores unitarios ortogonales ( $n^i n_{,j} = 0$ ). Entonces la Ec. (A.22), después de sustituir las Ecs. (A.23) y (A.24), queda como:

$$\left( \delta_j^l - n^l n_j \right) \phi_{,l}^{ij} = \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,j} - n^l n_j \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma_{,l} \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo este resultado y la Ec. (A.20) en (A.18), se obtiene:

$$\left( t_\alpha^i a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,\beta} = \left[ \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma \right]_{,j} - n^l n_j \left( g^{ij} - n^i n^j \right) \sigma_{,l} \quad (\text{A.26})$$

Desarrollando la derivada covariante superficial:

$$\begin{aligned} \left( t_\alpha^i a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,\beta} &= t_{\alpha,\beta}^i a^{\alpha\beta} \sigma + t_\alpha^i a_{,\beta}^{\alpha\beta} \sigma + t_\alpha^i a^{\alpha\beta} \sigma_{,\beta} \\ &= b_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} \sigma n^i + t_\alpha^i a^{\alpha\beta} \sigma_{,\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

donde  $a^{\alpha\beta}$  es una constante con respecto a la diferenciación covariante (Aris, 1962). La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left( t_{\alpha}^i a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,\beta} = 2 H \sigma n^i + t_{\alpha}^i a^{\alpha\beta} \sigma_{,\beta} \quad (\text{A.28})$$

donde (Aris, 1962):

$$b_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} = 2 H \quad (\text{A.29})$$

Finalmente, expandiendo la derivada covariante espacial de la Ec. (A.27), se obtiene:

$$\left[ (g^{ij} - n^i n^j) \sigma \right]_{,j} = - \left( n_j^i n^j - n^i n_j^j \right) \sigma - n^l n_j (g^{ij} - n^i n^j) \sigma_{,l} \quad (\text{A.30})$$

en esta ecuación  $n_{,j}^i n^j = 0$  y de acuerdo con Soria (1992) -  $n_{,j}^j = 2H$ , por lo tanto::

$$\left[ (g^{ij} - n^i n^j) \sigma \right]_{,j} = 2 H \sigma n^i - n^l n_j (g^{ij} - n^i n^j) \sigma_{,l} \quad (\text{A.31})$$

Para el caso particular en que  $\sigma$  es una constante, de las Ecs. (A.28) y (A.31) se obtiene la siguiente identidad:

$$\left( t_{\alpha}^i a^{\alpha\beta} \sigma \right)_{,\beta} = \left[ (g^{ij} - n^i n^j) \sigma \right]_{,j} = 2 H \sigma n^i \quad (\text{A.32})$$

donde  $n^i = n_{gl}$  con  $H_g$  o  $n^i = n_{lg}$  con  $H_l$  ( $H_l = -H_g$ ).

## APENDICE B.

### ECUACIONES PROMEDIO CON EFECTOS DE COMPRESIBILIDAD Y TRANSPORTE INTERFACIAL

El flujo en dos fases a través de un ducto vertical se describe en la Figura 2.1 del Capítulo 2 y representa el sistema bajo estudio. El sistema está constituido por una fase dispersa y una fase continua, las cuales pueden estar en contacto con la superficie sólida del ducto. El ducto representa estrictamente la fase sólida. En este sistema la fase líquida y la fase gaseosa fluyen dentro del ducto y la fase sólida es estática. El planteamiento del modelo considera régimen transitorio, efectos de compresibilidad y efectos de transporte interfacial de masa, cantidad de movimiento y energía con tensión superficial constante.

#### B.1 Ecuaciones locales instantáneas

Ecuación de continuidad para la fase  $k$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde  $k = l$  para la fase líquida y  $k = g$  para la fase gas,  $\rho_k$  representa la densidad de la fase  $k$  y  $\mathbf{v}_k$  es el vector velocidad de la fase  $k$ .

Ecuación de cantidad de movimiento para la fase  $k$

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (p_k \mathbf{I}) - \nabla \cdot \mathbf{T}_k - \rho_k \mathbf{g} = 0 \quad (\text{B.2})$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad,  $p_k$  representa la presión de la fase  $k$ ,  $\mathbf{T}_k$  es el tensor de esfuerzos viscosos de la fase  $k$  y  $\mathbf{g}$  es el vector de aceleración de la gravedad que actúa sobre la fase  $k$ .

Ecuación de energía total para la fase  $k$

$$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k \mathbf{v}_k) - \frac{\partial p_k}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' - q_k''' - \rho_k \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad (\text{B.3})$$

donde  $h_k$  es la entalpía específica de la fase  $k$ ,  $\mathbf{q}_k''$  es el vector flujo de calor por unidad de área de la fase  $k$  y  $q_k'''$  es el término de generación de calor por unidad de volumen de la fase  $k$ . En reactores nucleares este término se debe principalmente a la energía generada por radiación gamma.

## B.2 Condiciones de salto

Condición de salto de masa interfacial

$$\rho_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{w}_{lg}) \cdot \mathbf{n}_{lg} + \rho_g (\mathbf{v}_g - \mathbf{w}_{lg}) \cdot \mathbf{n}_{gl} = 0, \quad \text{en } A_{lg} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{ks} = \mathbf{w}_{ks} \cdot \mathbf{n}_{ks} = 0 \quad \text{en } A_{ks} \quad (\text{B.5})$$

donde  $\mathbf{w}_{lg}$  es la velocidad de la interfase  $l$ - $g$ ,  $A_{lg}$  es la región interfacial (Figura 2.2 del Capítulo 2),  $A_{ks}$  es la región interfacial ocupada entre la fase  $k$  y la pared sólida  $s$  del ducto,  $\mathbf{n}_{lg}$  es el vector normal unitario dirigido de la fase  $l$  a la fase  $g$ , el cual tiene la propiedad  $\mathbf{n}_{lg} = -\mathbf{n}_{gl}$ , y  $\mathbf{n}_{ks}$  es el vector normal unitario dirigido de la fase  $k$  a la pared del ducto  $s$ . La Ec. (B.5) establece la condición de frontera de adherencia o también conocida como condición de no deslizamiento en la interfase  $k$ - $s$ . La condición de salto de masa [Ec.(B.4)] no considera efectos de acumulación en la región interfacial.

Condición de salto de cantidad de movimiento interfacial

$$[\rho_l \mathbf{v}_l (\mathbf{v}_l - \mathbf{w}_{lg}) + p_{lg} \mathbf{I} - \mathbf{T}_{lg}] \cdot \mathbf{n}_{lg} + [\rho_g \mathbf{v}_g (\mathbf{v}_g - \mathbf{w}_{lg}) + p_{gl} \mathbf{I} - \mathbf{T}_{gl}] \cdot \mathbf{n}_{gl} = \mathbf{m}, \quad \text{en } A_{lg} \quad (\text{B.6})$$

donde  $\mathbf{m}$  es la fuerza debido a la tensión superficial, la cual está definida por la Ec. (2.7a).

Condición de salto de energía total

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_l \left( h_l - \frac{p_{lg}}{\rho_l} \right) (\mathbf{v}_l - \mathbf{w}_{lg}) + \mathbf{q}_{lg}'' + (p_{lg} \mathbf{I} - \mathbf{T}_{lg}) \cdot \mathbf{v}_l \right] \cdot \mathbf{n}_{lg} \\ & + \left[ \rho_g \left( h_g - \frac{p_{gl}}{\rho_g} \right) (\mathbf{v}_g - \mathbf{w}_{lg}) + \mathbf{q}_{gl}'' + (p_{gl} \mathbf{I} - \mathbf{T}_{gl}) \cdot \mathbf{v}_g \right] \cdot \mathbf{n}_{gl} = \epsilon, \quad \text{en } A_{lg} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde  $\epsilon$  es el término fuente de energía de superficie debido a la tensión superficial (trabajo realizado por la tensión superficial), el cual está dado por (Ishii, 1975):

$$\epsilon = \left( t_{\alpha}^k a^{\alpha\beta} \sigma \cdot \mathbf{w}_{lg} \right)_{,\beta} = -2H_g \sigma \mathbf{n}_{gl} \cdot \mathbf{w}_{lg} \quad (\text{B.8})$$

La solución también requiere condiciones de frontera y condiciones iniciales:

$$C.F. \quad \varphi_k = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{en } A_{ke} \quad (\text{B.9})$$

$$C.I. \quad \varphi_k = g(\mathbf{x}), \quad \text{en } t = 0 \quad (\text{B.10})$$

donde  $A_{ke}$  representa las áreas de entrada y salida de la fase  $k$  asociadas con la región de estudio (Figura 2.1),  $\mathbf{x}$  es el vector de posición,  $t$  la variable temporal y  $\varphi_k$ , representa a las variables dependientes ( $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p$  y  $h$ ) de cada una de las fases.

La ecuación de estado es la siguiente:

$$\rho_k = \rho_k(h_k, p_k) \quad (\text{B.11})$$

### B.3 Teoremas promedio para un sistema de $M$ fases

Los teoremas presentados en el Capítulo 2 [Ecs. (2.17)-(2.20)] para un sistema de  $M$  fases, están dados por:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_k \rangle}{\partial t} - \sum_{m=1(k \neq m)}^{m=M} \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \psi_k \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.12})$$

$$\langle \nabla \psi_k \rangle = \nabla \langle \psi_k \rangle + \sum_{m=1(k \neq m)}^{m=M} \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \psi_k \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = \sum_{m=1(k \neq m)}^{m=M} \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla \varepsilon_k = - \sum_{m=1(k \neq m)}^{m=M} \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.15})$$

donde  $w_{km}$  es la velocidad en la interfase  $k$ - $m$ ,  $n_{km}$  es el vector normal unitario en la interfaz apuntando de la fase  $k$  a la fase  $m$  y  $\psi_k$  es cualquier cantidad asociada con la fase  $k$ . Si  $\psi_k$  es una constante igual a 1 en la Ec. (2.13), se obtiene:

$$\langle 1 \rangle = \frac{1}{V} \int_{R_k(t)} 1 dV = \frac{V_k(t)}{V} = \varepsilon_k \quad (\text{B.16})$$

El resultado anterior indica que el promedio de una constante es igual a la fracción de vacíos de la fase  $k$  multiplicada por esa constante.

El caso en estudio se considera que la fase líquida ( $l$ ) y la fase gaseosa ( $g$ ) contenidas en el volumen promedio pueden estar en contacto con la pared del ducto ( $s$ ). Las áreas interfaciales contenidas en el volumen promedio son el área interfacial ocupada entre la fase gaseosa y la fase líquida  $A_{lg}$  y el área interfacial ocupada entre la fase  $k$  y la pared del ducto  $A_{ks}$ . Para este caso, la Ec. (B.12) para la fase líquida está dada por:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_l}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_l \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \psi_l \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{ls}(t)} \psi_l \mathbf{w}_{ls} \cdot \mathbf{n}_{ls} dA \quad (\text{B.17})$$

Aplicando la condición de frontera dada por la Ec. (B.5), este resultado se simplifica:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_l}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_l \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \psi_l \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{B.18})$$

En forma similar para la fase gaseosa, se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_g}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_g \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{gl}(t)} \psi_g w_{gl} \cdot n_{gl} dA \quad (\text{B.19})$$

Las propiedades de estas dos ecuaciones son:  $w_{lg} = w_{gl}$ ,  $A_{lg} = A_{gl}$  y  $n_{lg} = -n_{gl}$ . Entonces, para los propósitos del sistema en estudio es conveniente expresar la Ec. (B.18) como:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \psi_k w_{km} \cdot n_{km} dA ; \quad k \neq m \quad (\text{B.20})$$

donde  $k=l$  para  $m=g$  y  $k=g$  para  $m=l$ . En forma similar las Ecs. (B.13)-(B.15):

$$\langle \nabla \psi_k \rangle = \nabla \langle \psi_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \psi_k n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \psi_k n_{ks} dA ; \quad k \neq m \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} w_{km} \cdot n_{km} dA ; \quad k \neq m \quad (\text{B.22})$$

$$-\nabla \varepsilon_k = \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} dA ; \quad k \neq m \quad (\text{B.23})$$

#### B.4 Ecuación de masa promedio instantánea

Aplicando el operador promedio en la ecuación de balance de masa local instantánea,

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_k v_k) \rangle = 0 \quad (\text{B.24})$$

Introduciendo los teoremas [Ecs. (B.20) y (B.21) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k w_{km} \cdot n_{km} dA \quad (\text{B.25})$$

$$\langle \nabla \cdot \rho_k v_k \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_k v_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k v_k \cdot n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \rho_k v_k \cdot n_{ks} dA \quad (\text{B.26})$$

La Ec. (B.26) se simplifica al considerar la condición de frontera dada por la Ec. (B.5):

$$\langle \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.27})$$

Sustituyendo las Ecs. (B.25) y (B.27) en la Ec. (B.24) se obtiene:

$$\frac{\partial \langle \rho_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{km}) \cdot \mathbf{n}_{km} dA = 0 \quad (\text{B.28})$$

El término de la integral representa la transferencia de flujo másico interfacial por unidad de volumen para el caso en que la fase  $l$  se evapora. Debido a que la componente normal de la velocidad interfacial  $w_{lg}$ , es mayor que la componente normal de velocidad de la fase local en la interfase  $v_l$ , entonces dicho término es una cantidad negativa, y de acuerdo con la condición de salto de masa dada por la Ec. (B.4), se puede observar que:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_k (\mathbf{v}_l - \mathbf{w}_{lg}) \cdot \mathbf{n}_{lg} dA = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_k (\mathbf{v}_g - \mathbf{w}_{lg}) \cdot \mathbf{n}_{gl} dA \quad (\text{B.29})$$

La transferencia de masa se lleva a cabo en la interfaz entre las fases fluidas y se presenta debido al desequilibrio termodinámico entre las fases. Esta ecuación algunos autores denotan por  $\Gamma_l = -\Gamma_g$  y su magnitud se determina a través de una relación de cerradura.

Una de las variables críticas a determinar como función del espacio y tiempo es la fracción de vacíos  $\varepsilon_k$  de la fase  $k$ , debido a su importancia en la predicción de los procesos de retroalimentación nuclear-termohidráulicos, los cuales son gobernados por las condiciones que imperan en el refrigerante-moderador. Por consiguiente, es conveniente representar la Ec. (B.28) en términos de  $\varepsilon_k$ , esto se logra aplicando la definición:

$$\langle \mathbf{v}_k \rangle = \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.30})$$

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle = \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.31})$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la Ec. (B.28), se obtiene:

$$\frac{\partial \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k v_k \rangle^k) + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA = 0 \quad (\text{B.32})$$

Para el planteamiento propuesto es conveniente obtener variables de productos entre promedios más que el promedio de productos entre variables locales instantáneas. Esto se logra introduciendo las desviaciones espaciales de las variables locales instantáneas (Gray, 1975). Las variables entre desviaciones espaciales tienen características importantes asociadas con su longitud característica que permiten realizar simplificaciones de las ecuaciones promedio, las cuales están en términos de variables promedio y de las desviaciones espaciales (Ochoa, 1995).

$$v_k = \langle v_k \rangle^k + \tilde{v}_k \quad (\text{B.33})$$

$$\rho_k = \langle \rho_k \rangle^k + \tilde{\rho}_k \quad (\text{B.34})$$

El producto de estas variables origina el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \rho_k v_k &= (\langle \rho_k \rangle^k + \tilde{\rho}_k) (\langle v_k \rangle^k + \tilde{v}_k) \\ &= \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k + \tilde{\rho}_k \langle v_k \rangle^k + \langle \rho_k \rangle^k \tilde{v}_k + \tilde{\rho}_k \tilde{v}_k \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

En este punto se promedia la ecuación anterior y se obtiene:

$$\langle \rho_k v_k \rangle^k = \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k + \langle \tilde{\rho}_k \tilde{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.36})$$

donde

$$\langle \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \rangle^k = \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \quad (\text{B.37})$$

$$\langle \langle \tilde{\rho}_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \rangle^k = \langle \tilde{\rho}_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k = 0 \quad (\text{B.38})$$

$$\langle \langle \tilde{v}_k \rangle^k \langle \rho_k \rangle^k \rangle^k = \langle \tilde{v}_k \rangle^k \langle \rho_k \rangle^k = 0 \quad (\text{B.39})$$

Se puede observar en este grupo de ecuaciones que el promedio de una cantidad promedio es igual a la cantidad promedio y es válido cuando se satisface la restricción de escala de longitud [Ec. (2.1)]. El resultado dado por las Ecs. (B.38) y (B.39) es una consecuencia inmediata de

promediar las Ecs. (B.33) y (B.34), donde el promedio intrínseco de las desviaciones espaciales es cero si la variable local instantánea presenta un buen comportamiento; no ocurre lo mismo para el promedio fase de las desviaciones espaciales que producen términos de dispersión cuando la variable local instantánea es uniforme (Gray, 1975).

Finalmente, sustituyendo la Ec. (B.35) en la Ec. (B.32) se obtiene la ecuación de conservación de masa promedio en volumen instantánea en términos de la fracción volumen, variables promedio y de las desviaciones espaciales para la fase  $k$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{v}_k \rangle^k) \\ = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA \end{aligned} \quad (B.40)$$

Esta ecuación considera efectos de acumulación, convectivos, dispersivos y de transferencia de masa interfacial. Este resultado fue obtenido previamente por Gray y O'Neill (1976).

### B.5 Ecuación de cantidad de movimiento promedio instantánea

Nuevamente aplicando el operador promedio en la ecuación de cantidad de movimiento local instantánea dada por la Ec. (B.2):

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k v_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_k v_k v_k) \rangle + \langle \nabla p_k \rangle - \langle \nabla \cdot T_k \rangle - \langle \rho_k g_k \rangle = 0 \quad (B.41)$$

Al introducir los teoremas promedio en espacio y tiempo [Ecs. (B.20) y (B.21)] se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k v_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho_k v_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k v_k w_{km} \cdot n_{km} dA \quad (B.42)$$

$$\langle \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.43})$$

$$\langle \nabla p_k \rangle = \nabla \langle p_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{n}_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} p_k \mathbf{n}_{ks} dA \quad (\text{B.44})$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{T}_k \rangle = \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{T}_k dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} \cdot \mathbf{T}_k dA \quad (\text{B.45})$$

$$\langle \rho_k \mathbf{g}_k \rangle = \langle \rho_k \rangle \mathbf{g}_k \quad (\text{B.46})$$

El resultado de la Ec. (B.43) se obtiene al aplicar la condición de adherencia dada por la Ec. (B.5), que establece que no existe deslizamiento de las fases con la pared del ducto, es decir:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{ks} dA = 0 \quad (\text{B.47})$$

Es interesante observar que en la Ec. (B.44) aparecen 3 términos de presión en forma natural al aplicar el método de volumen promedio. Estos términos están relacionados con el gradiente de la presión en la fase  $k$ , la presión en la región interfacial  $k-m$  y la presión en la región interfacial  $k-s$ . Lo mismo se puede observar en la Ec. (B.45), donde el proceso de promediar da lugar a tres términos viscosos, uno ellos es el gradiente de los esfuerzos viscosos fluido-fluido en la fase  $k$ , el segundo término son los esfuerzos viscosos en la región interfacial  $k-m$  y el tercer término son los esfuerzos viscosos en la región interfacial  $k-s$ . Para flujo turbulento en dos fases, los esfuerzos viscosos en las fases normalmente son pequeños y frecuentemente no se consideran. En este trabajo sí se considerarían para obtener un conjunto de ecuaciones promedio con el mínimo de restricciones posibles. En este punto, podemos decir que todos estos términos están relacionados con el comportamiento físico del proceso de flujo en dos fases.

Se puede demostrar que para un flujo Newtoniano y compresible, la divergencia del promedio del tensor de esfuerzos viscosos [primer término de la Ec. (B.45)], está dado por:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \langle T_k \rangle &= \mu_k \nabla^2 \langle v_k \rangle + \frac{1}{3} \mu_k \nabla (\nabla \cdot \langle v_k \rangle) \\
&+ \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} v_k dA \right] + \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} v_k dA \right]^T \\
&+ \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} v_k dA \right] + \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} v_k dA \right]^T \\
&- \frac{2}{3} \mu_k \nabla \cdot \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot v_k I dA \right]
\end{aligned} \tag{B.48}$$

y los términos de las integrales están dados por:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_k dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot T_k dA \\
&= \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot \nabla v_k dA \right] + \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot \nabla v_k^T dA \right] \\
&+ \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot \nabla v_k dA \right] + \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot \nabla v_k^T dA \right] \\
&- \frac{2}{3} \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot (\nabla \cdot v_k) I dA \right] - \frac{2}{3} \mu_k \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot (\nabla \cdot v_k) I dA \right]
\end{aligned} \tag{B.49}$$

Con estas dos últimas ecuaciones se puede observar que el promedio del término viscoso para un flujo Newtoniano y compresible da origen a catorce (14) términos viscosos para cada una de las fases. Estas ecuaciones se pueden simplificar realizando un análisis de orden de magnitud.

En este punto se sustituyen las Ecs. (B.42)-(B.46) en la Ec. (B.41):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle + \nabla \langle p_k \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{T}_k \rangle - \langle \rho_k \rangle \mathbf{g}_k \\
= & -\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{km}) \cdot \mathbf{n}_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{n}_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} p_k \mathbf{n}_{ks} dA \quad (\text{B.50}) \\
& + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{T}_k dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} \cdot \mathbf{T}_k dA
\end{aligned}$$

Para obtener la ecuación anterior en términos de  $\varepsilon_k$ , se aplican las siguientes definiciones:

$$\langle \rho_k \rangle = \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \quad (\text{B.51})$$

$$\langle \mathbf{v}_k \rangle = \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.52})$$

$$\langle p_k \rangle = \varepsilon_k \langle p_k \rangle^k \quad (\text{B.53})$$

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle = \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.54})$$

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle = \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.55})$$

De acuerdo con Whitaker (1986), la presión promedio de fase intrínseca corresponde a un valor más realista del valor de la presión medida o del valor de la presión impuesto como condición de frontera. Aplicando las Ecs. (B.30) y (B.31) en las Ecs. (B.54) y (B.55):

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle = \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \quad (\text{B.56})$$

$$\begin{aligned}
\langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle = & \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \\
& + \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \quad (\text{B.57})
\end{aligned}$$

Sustituyendo las Ecs. (B.51)-(B.53), (B.56) y (B.57) en (B.50), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \nabla (\varepsilon_k \langle p_k \rangle^k) \\
& - \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle T_k \rangle^k) - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k g_k + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{v}_k \rangle^k) \\
& + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{v}_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle v_k \rangle^k \langle \bar{\rho}_k \bar{v}_k \rangle^k) \\
& + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{v}_k \bar{v}_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{v}_k \bar{v}_k \rangle^k) \tag{B.58} \\
& = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k v_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k n_{km} dA \\
& - \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} p_k n_{ks} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_k dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot T_k dA
\end{aligned}$$

En este trabajo para presión local instantánea se aplica la descomposición espacial propuesta por Banerjee y Chan (1980), Ecs. (2.45) y (2.46). Esta descomposición también fue aplicada por Lahey y Drew (1988) para la obtención de las ecuaciones de conservación promedio en volumen y tiempo.

Sustituyendo la Ec. (B.2.45) en las primeras integrales del lado derecho de la Ec. (B.58):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} p_k n_{ks} dA = \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} dA \right] \langle p_k \rangle^k \\
& + \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} dA \right] \langle \Delta p_{km} \rangle + \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} dA \right] \langle \Delta p_{ks} \rangle \\
& + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} n_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \bar{p}_{ks} n_{ks} dA \tag{B.59}
\end{aligned}$$

Los términos promedios actúan como constantes en la integral sobre el área interfacial: la suma de las integrales que aparecen en el primer término del lado derecho de esta ecuación, representan el gradiente de la fracción de vacíos [Ec. (B.23)], entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{n}_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} p_k \mathbf{n}_{ks} dA = & - \langle p_k \rangle^k \nabla \varepsilon_k + \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} dA \right] \langle \Delta p_{km} \rangle \\
& + \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} dA \right] \langle \Delta p_{ks} \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{n}_{km} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \bar{p}_{ks} \mathbf{n}_{ks} dA
\end{aligned} \tag{B.60}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (B.58):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \varepsilon_k \nabla \langle p_k \rangle^k \\
& - \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{T}_k \rangle^k \right) - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \\
& + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) \\
& = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{km}) \cdot \mathbf{n}_{km} dA - \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} dA \right] \langle \Delta p_{km} \rangle \\
& - \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} dA \right] \langle \Delta p_{ks} \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{n}_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \bar{p}_{ks} \mathbf{n}_{ks} dA \\
& + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{T}_k dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} \cdot \mathbf{T}_k dA
\end{aligned} \tag{B.61}$$

donde

$$\varepsilon_k \nabla \langle p_k \rangle^k = \nabla \left( \varepsilon_k \langle p_k \rangle^k \right) - \langle p_k \rangle^k \nabla \varepsilon_k \tag{B.62}$$

La primera integral del lado izquierdo de la ecuación anterior representa el intercambio de cantidad de movimiento interfacial debido a la transferencia de masa interfacial.

### B.6 Ecuación de energía total promedio instantánea

Aplicando el operador promedio en la ecuación de balance de energía total local

instantánea dada por la Ec. (B.3):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_k h_k \mathbf{v}_k) \rangle - \left\langle \frac{\partial p_k}{\partial t} \right\rangle - \langle \nabla \cdot (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) \rangle \\ + \langle \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' \rangle - \langle q_k''' \rangle - \langle \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Aplicando los teoremas promedio en espacio y tiempo, dados por las Ecs. (B.20) y (B.21) respectivamente, para cada uno de los términos de la ecuación anterior se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho_k h_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k h_k \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.64})$$

$$\langle \nabla \cdot (\rho_k h_k \mathbf{v}_k) \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_k h_k \mathbf{v}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.65})$$

$$\left\langle \frac{\partial p_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle p_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.66})$$

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) dA \quad (\text{B.67})$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{q}_k'' \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{n}_{km} \cdot \mathbf{q}_k'' dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} \cdot \mathbf{q}_k'' dA \quad (\text{B.68})$$

$$\langle \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k \rangle = \mathbf{g}_k \cdot \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle \quad (\text{B.69})$$

El resultado de las Ecs. (B.65) y (B.67) se obtiene de la condición de no deslizamiento [Ec. (B.5)] entre las fases fluidas y la pared del ducto, entonces los siguientes términos son nulos:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{ks} dA = 0 \quad (\text{B.70})$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \mathbf{n}_{ks} \cdot (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) dA = 0 \quad (\text{B.71})$$

El término  $\langle \rho_k h_k \rangle$  de la Ec. (B.64), se puede escribir como:

$$\langle \rho_k h_k \rangle = \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \rangle^k \quad (\text{B.72})$$

Al sustir en la Ec. (B.64) se obtiene el siguiente resultado:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \rangle^k \right) - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k h_k \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.73})$$

Para la Ec. (B.65) procedemos de la misma forma que en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot (\rho_k h_k \mathbf{v}_k) \rangle &= \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right) \\ &+ \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle h_k \rangle^k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{h}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) \\ &+ \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{km} dA \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \rho_k h_k \mathbf{v}_k \rangle &= \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \rangle^k \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \\ &+ \varepsilon_k \langle h_k \rangle^k \langle \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{h}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle^k \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

El primer término de la Ec. (B.66), se puede expresar en términos de promedio intrínseco:

$$\frac{\partial \langle p_k \rangle}{\partial t} = \varepsilon_k \frac{\partial \langle p_k \rangle^k}{\partial t} + \langle p_k \rangle^k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} \quad (\text{B.76})$$

También para la integral sobre el área interfacial que aparece en la Ec. (B.66), se aplica la definición de las desviaciones espaciales dada por la Ec. (2.45):

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA &= \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \right] \left( \langle p_k \rangle^k + \langle \Delta p_{km} \rangle \right) \\ &+ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

La ecuación anterior se puede simplificar aplicando el lema dado por la Ec. (B.22):

$$\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} p_k \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA = \left( \langle p_k \rangle^k + \langle \Delta p_{km} \rangle \right) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} \mathbf{w}_{km} \cdot \mathbf{n}_{km} dA \quad (\text{B.78})$$

Sustituyendo las Ecs. (B.76) y (B.78) en la Ec. (B.66), se obtiene:

$$\left\langle \frac{\partial p_k}{\partial t} \right\rangle = \varepsilon_k \frac{\partial \langle p_k \rangle^k}{\partial t} - \langle \Delta p_{km} \rangle \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} w_{km} \cdot n_{km} dA \quad (\text{B.79})$$

El primer término de la Ec. (B.67) también se puede descomponer:

$$\langle T_k \cdot v_k \rangle = \varepsilon_k \langle T_k \rangle^k \cdot \langle v_k \rangle^k + \varepsilon_k \langle \tilde{T}_k \cdot \tilde{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.80})$$

Al aplicar el operador gradiente en la ecuación anterior se obtiene:

$$\nabla \cdot \langle T_k \cdot v_k \rangle = \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle T_k \rangle^k \cdot \langle v_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \tilde{T}_k \cdot \tilde{v}_k \rangle^k \right) \quad (\text{B.81})$$

Sustituyendo esta ecuación en la Ec. (B.67), se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot (T_k \cdot v_k) \rangle &= \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle T_k \rangle^k \cdot \langle v_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \tilde{T}_k \cdot \tilde{v}_k \rangle^k \right) \\ &+ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot (T_k \cdot v_k) dA \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

La Ec. (B.69) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\langle \rho_k g_k \cdot v_k \rangle = g_k \cdot \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k + g_k \cdot \langle \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \rangle^k \quad (\text{B.83})$$

Sustituyendo las Ecs. (B.68), (B.73), (B.75), (B.79), (B.81) y (B.83) en la Ec. (B.63):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \tilde{h}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \right) \\ &+ \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \tilde{h}_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle h_k \rangle^k \langle \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \tilde{h}_k \tilde{v}_k \rangle^k \right) \\ &+ \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \tilde{h}_k \tilde{v}_k \rangle^k \right) - \varepsilon_k \frac{\partial \langle p_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \Delta p_{km} \rangle \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} \\ &- \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle T_k \rangle^k \cdot \langle v_k \rangle^k \right) - \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \tilde{T}_k \cdot \tilde{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle q_k' \rangle^k \right) \\ &- \varepsilon_k \langle q_k' \rangle^k - g_k \cdot \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k - g_k \cdot \langle \bar{\rho}_k \tilde{v}_k \rangle^k \\ &= -\frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k h_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} w_{km} \cdot n_{km} dA \\ &+ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot (T_k \cdot v_k) dA - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot q_k'' dA - \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot q_k'' dA \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

donde

$$\langle q_k'' \rangle = \varepsilon_k \langle q_k'' \rangle^k \quad (\text{B.85})$$

$$\langle q_k''' \rangle = \varepsilon_k \langle q_k''' \rangle^k \quad (\text{B.86})$$

### B.7 Simplificación de las ecuaciones de conservación promedio

Una fuerte simplificación de las ecuaciones de conservación promedio derivadas en las secciones anteriores y definidas por las Ecs. (B.40), (B.61) y (B.84), se puede realizar si los gradientes de presión no son muy grandes. Cuando esto ocurre los gradientes de densidad a nivel microscópico son muy pequeños en comparación con los gradientes de velocidad. Entonces todos los términos que contienen desviaciones espaciales de la densidad alrededor de su valor promedio, se pueden despreciar:

Ecuación promedio de conservación de masa:

$$\frac{\partial \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) = - \frac{1}{V} \int_{A_{kg}(t)} \rho_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA \quad (\text{B.87})$$

Ecuación promedio de conservación de movimiento:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) + \varepsilon_k \nabla \langle p_k \rangle^k \\ & - \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle T_k \rangle^k) - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k g_k + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{v}_k \bar{v}_k \rangle^k) \\ & = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k v_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA - \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} dA \right] \langle \Delta p_{km} \rangle \\ & - \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} dA \right] \langle \Delta p_{ks} \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} n_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} \bar{p}_{ks} n_{ks} dA \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot T_k dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot T_k dA \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

Ecuación promedio de conservación de energía total:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k) + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \bar{\rho}_k \bar{h}_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle h_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) \\
& + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \langle \bar{h}_k \bar{v}_k \rangle^k) - \varepsilon_k \frac{\partial \langle p_k \rangle^k}{\partial t} + \langle \Delta p_{km} \rangle \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} \\
& - \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle T_k \rangle^k \cdot \langle v_k \rangle^k) - \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \bar{T}_k \cdot \bar{v}_k \rangle^k) \\
& + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle q_k'' \rangle^k) - \varepsilon_k \langle q_k''' \rangle^k - g_k \cdot \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k \\
& = - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \rho_k h_k (v_k - w_{km}) \cdot n_{km} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} \bar{p}_{km} w_{km} \cdot n_{km} dA \\
& + \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot (T_k \cdot v_k) dA - \frac{1}{V} \int_{A_{km}(t)} n_{km} \cdot q_k'' dA - \frac{1}{V} \int_{A_{ks}(t)} n_{ks} \cdot q_k'' dA
\end{aligned} \tag{B.89}$$

### B.8 Condiciones de salto promedio instantáneas

En el proceso de promediar las ecuaciones locales instantáneas se obtienen las contribuciones debido al transporte interfacial de masa, cantidad de movimiento y energía. Estas contribuciones aparecen en el lado derecho de las Ecs. (B.87)-(B.89). El promedio de las condiciones de salto locales instantáneas de masa, cantidad de movimiento y energía dadas por las Ecs. (B.4), (B.6) y (B.8), permiten el acoplamiento de las ecuaciones promedio y su interacción es a través de las contribuciones interfaciales.

La condición de salto de masa interfacial promedio instantánea está dada por la Ec. (B.29) y acopla a las ecuaciones promedio de masa representada por la Ec. (B.87). Debido a que esta condición de salto no considera efectos de acumulación, en un proceso de condensación de la fase gaseosa, será una ganancia total en masa para la fase líquida. Esto sería un ejemplo de acoplamiento con interacción interfacial de transferencia de masa. Un proceso similar se puede

observar con las ecuaciones promedio transferencia de cantidad de movimiento y energía. Para ello, a continuación se presentan las condiciones de salto promedio.

Ecuacion de salto de cantidad de movimiento promedio:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_l v_l (v_l - w_{lg}) \cdot n_{lg} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} n_{lg} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{lg} \cdot T_l dA \\
& -\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_g v_g (v_g - w_{lg}) \cdot n_{gl} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{gl} n_{gl} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{gl} \cdot T_g dA \quad (\text{B.90}) \\
& = -(\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg} - 2 \langle H_g \rangle_{gl} \sigma) \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{gl} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} 2 \tilde{H}_g \sigma n_{gl} dA
\end{aligned}$$

Ecuación de salto de energía total promedio:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_l h_l (v_l - w_{lg}) \cdot n_{lg} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{lg} w_{lg} \cdot n_{lg} dA \\
& + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{lg} \cdot (T_l \cdot v_l) dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{lg} \cdot q_l'' dA \\
& -\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \rho_g h_g (v_g - w_{lg}) \cdot n_{gl} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{p}_{gl} w_{lg} \cdot n_{gl} dA \quad (\text{B.91}) \\
& + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{gl} \cdot (T_g \cdot v_g) dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} n_{gl} \cdot q_g'' dA \\
& = -(\langle p_l \rangle_{lg} - \langle p_g \rangle_{lg} - 2 \langle H_g \rangle_{gl} \sigma) \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} 2 \tilde{H}_g \sigma w_{lg} \cdot n_{gl} dA
\end{aligned}$$

En estas dos ecuaciones se aplicaron las desviaciones espaciales de la presión [Ec. (2.47)].

## APENDICE C

### CALCULO DE $\bar{\Xi}_1$ , $\bar{\Xi}_2$ y $\bar{\Xi}_3$

Para el cálculo de los diferentes términos de las integrales sobre el área interfacial que aparecen en la Ec. (3.24), se aplican los teoremas de promedio espacial y transporte (Slattery, 1967 y Whitaker, 1967), Ecs. (2.17)-(2.20). Estas ecuaciones para  $k = l$ , toman la siguiente forma:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_l}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_l \rangle}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \psi_l \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.1})$$

$$\langle \nabla \psi_l \rangle = \nabla \langle \psi_l \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \psi_l \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \mathbf{n}_{lg} \cdot \mathbf{w}_{lg} dA \quad (\text{C.3})$$

$$\nabla \varepsilon_l = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.4})$$

Cálculo de  $\bar{\Xi}_1$ . Este término está dado por:

$$\bar{\Xi}_1 = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l \right] \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.5})$$

Aplicando la Ec. (C.4), se obtiene:

$$\bar{\Xi}_1 = - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n}_{lg} dA - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l \nabla \varepsilon_l \quad (\text{C.6})$$

Como se puede observar, la cantidad promedio actúa como una constante en la integral sobre el área interfacial, debido a la restricción de escalas de longitud del volumen promedio. Aplicando el teorema del promedio espacial, definido por la Ec. (C.2), para  $\psi_l = \partial \phi / \partial t$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n}_{lg} dA &= \varepsilon_l \left\langle \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l - \nabla \left[ \varepsilon_l \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l \right] \\ &= \varepsilon_l \left\langle \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l - \varepsilon_l \nabla \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l \nabla \varepsilon_l \end{aligned} \quad (C.7)$$

donde  $\langle \psi_l \rangle = \varepsilon_l \langle \psi_l \rangle^l$ . Sustituyendo este resultado en la Ec.(C.6), se obtiene:

$$\Xi_1 = - \varepsilon_l \left\langle \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l + \varepsilon_l \nabla \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l \quad (C.8)$$

Para el primer término, se aplica el teorema dado por la Ec. (C.1), para  $\psi_l = \nabla \phi$ :

$$\varepsilon_l \left\langle \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_l \langle \nabla \phi \rangle^l \right) - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \nabla \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \quad (C.9)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la Ec. (C.8) se obtiene que:

$$\Xi_1 = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_l \langle \nabla \phi \rangle^l \right) + \varepsilon_l \nabla \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \nabla \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \quad (C.10)$$

Nuevamente se aplica este teorema para  $\psi_l = \phi$ :

$$\varepsilon_l \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_l \langle \phi \rangle^l \right) - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \quad (C.11)$$

El término dentro de la integral de la ecuación anterior se puede descomponer aplicando desviaciones espaciales (Gray, 1975), definidas por:

$$\phi = \langle \phi \rangle^l + \bar{\phi} \quad (C.12)$$

Sustituyendo  $\phi$  en el término de la integral de la Ec. (C.11) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA &= \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \langle \phi \rangle^l \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA + \langle \phi \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} \end{aligned} \quad (C.13)$$

en virtud de aplicar también la Ec. (C.3). Sustituyendo este resultado en la Ec. (C.11):

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle^l = \frac{\partial \langle \phi \rangle^l}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.14})$$

Aplicando directamente este resultado en la Ec.(C.10), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Xi_1 = & - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_l \langle \nabla \phi \rangle^l) + \varepsilon_l \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \langle \phi \rangle^l) \\ & - \varepsilon_l \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \nabla \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Para determinar la expresión que aparece dentro del segundo término de la ecuación anterior, se aplica el teorema del promedio espacial [Ec.(C.2)] para  $\psi_l = \phi$ :

$$\nabla \langle \phi \rangle^l = \langle \nabla \phi \rangle^l - \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.16})$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA &= \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \phi \mathbf{n}_{lg} dA - \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \langle \phi \rangle^l \mathbf{n}_{lg} dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \phi \mathbf{n}_{lg} dA + \langle \phi \rangle^l \nabla \varepsilon_l \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Sustituyendo la Ec. (C.16) en (C.15) finalmente se obtiene la Ec. (3.25), es decir:

$$\begin{aligned} \Xi_1 = & - \langle \nabla \phi \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} - \varepsilon_l \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \right] \\ & - \varepsilon_l \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} \nabla \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Cálculo de  $\Xi_2$ . Este término está dado por:

$$\Xi_2 = \frac{1}{2V} \int_{A_{lg}(t)} \left( |\nabla \phi|^2 - \langle |\nabla \phi|^2 \rangle^l \right) \mathbf{n}_{lg} dA \quad (\text{C.19})$$

Aplicando la Ec. (C.4):

$$\Xi_2 = \frac{1}{2V} \int_{A_{lg}(t)} |\nabla\phi|^2 n_{lg} dA + \frac{1}{2} \langle |\nabla\phi|^2 \rangle^l \nabla \varepsilon_l \quad (C.20)$$

Para el término de la integral, se aplica el teorema dado por la Ec. (C.2) para  $\psi_l = |\nabla\phi|^2$ :

$$\frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} |\nabla\phi|^2 n_{lg} dA = \varepsilon_l \langle \nabla |\nabla\phi|^2 \rangle^l - \nabla (\varepsilon_l \langle |\nabla\phi|^2 \rangle^l) \quad (C.21)$$

Sustituyendo en la Ec. (C.20):

$$\Xi_2 = \frac{\varepsilon_l}{2} \langle \nabla |\nabla\phi|^2 \rangle^l - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \langle |\nabla\phi|^2 \rangle^l \quad (C.22)$$

La consideración de movimiento irrotacional del fluido permite aplicar la identidad vectorial:

$$\nabla |\nabla\phi|^2 = 2 \nabla \cdot (\nabla\phi \nabla\phi) \quad (C.23)$$

donde  $(\nabla\phi \nabla\phi)$  es un producto vectorial (diáda). Sustituyendo en la Ec. (C.22):

$$\Xi_2 = \varepsilon_l \langle \nabla \cdot (\nabla\phi \nabla\phi) \rangle^l - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \langle \nabla\phi \cdot \nabla\phi \rangle^l \quad (C.24)$$

Aplicando nuevamente el teorema dado por la Ec. (C.2) para  $\psi_l = (\nabla\phi \nabla\phi)$ , se obtiene:

$$\varepsilon_l \langle \nabla \cdot (\nabla\phi \nabla\phi) \rangle^l = \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \nabla\phi \nabla\phi \rangle^l) + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (\nabla\phi \nabla\phi) \cdot n_{lg} dA \quad (C.25)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (C.24):

$$\Xi_2 = \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \nabla\phi \nabla\phi \rangle^l) - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \langle \nabla\phi \cdot \nabla\phi \rangle^l + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (\nabla\phi \nabla\phi) \cdot n_{lg} dA \quad (C.26)$$

Aplicando nuevamente el teorema dado por la Ec. (C.2) para descomponer el segundo término

de la ecuación anterior y con  $\psi_l = \phi \nabla\phi$ , se obtiene:

$$\varepsilon_l \langle \nabla\phi \cdot \nabla\phi \rangle^l = \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \phi \nabla\phi \rangle^l) + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (\phi \nabla\phi) \cdot n_{lg} dA \quad (C.27)$$

donde  $\nabla\phi \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) - \phi \nabla^2\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla\phi)$ , con  $\nabla^2\phi = 0$ . Sustituyendo en la Ec. (C.26)

finalmente se obtiene la Ec. (3.26), es decir:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_2 = & \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \nabla \phi \nabla \phi \rangle^l \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{lg}(t)} (\nabla \phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \\ & - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \phi \nabla \phi \rangle^l \right) + \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} (\phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Cálculo de la Ec. (3.29). Sustituyendo las Ecs. (C.18)-(C.28) [Ecs. (3.25) y (3.26)] y las Ecs. (3.27) y (3.28) en la Ec. (3.24), se obtiene la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_l V} \int_{A_{lg}(t)} (p_l - \langle p_l \rangle^l) \mathbf{n}_{lg} dA = & \langle v_l \rangle^l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle v_l v_l \rangle^l \right) \\ & - \varepsilon_l \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{n}_{lg} dA \right] - \varepsilon_l \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] + \bar{\Xi}_3 \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

donde:

$$\bar{\Xi}_3 = \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \phi v_l \rangle^l \right) + \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] \quad (\text{C.30})$$

Cálculo de  $\bar{\Xi}_3$ . Expresando la ecuación anterior en función de las desviaciones espaciales del potencial de velocidad, Ec. (C.12), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_3 = & \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \phi \rangle^l \langle v_l \rangle^l \right) + \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l \right) \right. \\ & \left. + \frac{\langle \phi \rangle^l}{\varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA \right] \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

donde

$$\nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \phi v_k \rangle^l \right) = \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \phi \rangle^l \langle v_l \rangle^l \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_l \langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l \right) \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \phi \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA = \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} \mathbf{w}_{lg} \cdot \mathbf{n}_{lg} dA + \frac{\langle \phi \rangle^l}{\varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} \quad (\text{C.33})$$

la Ec. (C.33) se obtiene al aplicar la Ec. (C.3). Para simplificar la Ec. (C.31) se usa la ecuación de conservación de masa dada por la Ec. (2.25) para  $k=l$ , es decir:

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = - \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle v_l \rangle^l) \quad (C.34)$$

Sustituyendo en la Ec. (C.31), se obtiene:

$$\Xi_3 = \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ (\nabla \langle \phi \rangle^l) \cdot \langle v_l \rangle^l + \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l) + \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} w_{lg} \cdot n_{lg} dA \right] \quad (C.35)$$

Sustituyendo la Ec. (C.16) en la ecuación anterior finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \Xi_3 = & - \varepsilon_l \langle v_l \rangle^l \cdot \nabla \langle v_l \rangle^l + \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l} \nabla \cdot (\varepsilon_l \langle \bar{\phi} \bar{v}_l \rangle^l) \right] \\ & - \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \langle v_l \rangle^l \cdot \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} n_{lg} dA \right] + \frac{\varepsilon_l}{2} \nabla \left[ \frac{1}{\varepsilon_l V} \int_{A_{lg}(t)} \bar{\phi} w_{lg} \cdot n_{lg} dA \right] \end{aligned} \quad (C.36)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (C.29) se obtiene finalmente la Ec. (3.29).

## APENDICE D

### CALCULO NUMERICO DE INTEGRALES MULTIPLES

La técnica numérica que a continuación se presenta resuelve la integral doble del tipo:

$$\int_R \int f(x, y) dx dy \quad (D.1)$$

donde  $R$  es el dominio de integración:  $R\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$ . Primero se usa la regla compuesta de Simpson para evaluar:

$$\int_c^d f(x, y) dx dy \quad (D.2)$$

El tamaño de paso para el dominio de integración de  $y$  se define como:

$$\Delta y = \frac{d - c}{2m} \quad (D.3)$$

donde  $m$  es un número entero y se utiliza para determinar el tamaño de paso. Los incrementos en el dominio de integración en  $y$  están definidos por:

$$y_j = c + j \Delta y \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, 2m \quad (D.4)$$

El resultado de aproximar la integral por el método compuesto de Simpson dada por la Ec. (D.2) corresponde a la Ec. (4.48) de Burden y Faires (1985). Con este resultado se aplica nuevamente la regla compuesta de Simpson para el dominio  $x$  considerado ahora y constante. El tamaño de paso y los incrementos se definen como:

$$\Delta x = \frac{b - a}{2n} \quad (D.5)$$

$$x_i = c + i \Delta x \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, 2n \quad (D.6)$$

donde  $n$  también es un número entero. El resultado de la doble integral aplicando dos veces la regla compuesta de Simpson es (Burden y Faires, Cap. 4, 1985):

$$\begin{aligned}
 \int_R \int f(x, y) dx dy \approx & \frac{\Delta x \Delta y}{9} \left[ f(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_0) \right. \\
 & + f(x_{2n}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2j}) \\
 & + 8 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2j}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_0, y_{2j-1}) \\
 & + 8 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) + 16 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) \\
 & + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2n}, y_{2j-1}) + f(x_0, y_{2m}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2m}) \\
 & \left. + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y_{2m}) + f(x_{2n}, y_{2m}) \right] + E
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

donde el error  $E$  de la aproximación está dado por:

$$E = \frac{-(d-c)(b-a)}{180} \left[ \Delta x^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + \Delta y^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} f(\eta, \mu) \right] \tag{D.8}$$

Las Ecs. (D.3)-(D.7) se programó directamente en una computadora personal en lenguaje Fortrán de Microsoft.

El problema a resolver es la siguiente integral doble:

$$\langle \phi \rangle' = \frac{U}{V_l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{4} r(\theta, \varphi)^4 + \frac{a^3}{2} r(\theta, \varphi) \right] \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \tag{D.9}$$

Para aplicar la regla compuesta de Simpson dada por la Ec. (D.7) se hacen las siguientes asignaciones:

$$f(\theta, \varphi) = \left[ \frac{1}{4} r(\theta, \varphi)^4 + \frac{a^3}{2} r(\theta, \varphi) \right] \cos \theta \operatorname{sen} \theta \quad (\text{D.10})$$

$$\Delta \theta = \frac{\pi - 0}{2n} = \frac{\pi}{2n} \quad (\text{D.11})$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi - 0}{2m} = \frac{\pi}{m} \quad (\text{D.12})$$

$$\theta_i = c + i \Delta \theta \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, 2n \quad (\text{D.13})$$

$$\varphi_j = c + j \Delta \varphi \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, 2m \quad (\text{D.14})$$

En la Ec. (D.10) el término  $r(\theta, \varphi)$  está definido por:

$$r(\theta, \varphi) = - [g(\varphi) \operatorname{sen} \theta + l \cos \theta] + \sqrt{[g(\varphi) \operatorname{sen} \theta + l \cos \theta]^2 + (b^2 - \gamma^2)} \quad (\text{D.15})$$

donde

$$g(\varphi) = h \cos \varphi + k \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{D.16})$$

$$\gamma^2 = h^2 + k^2 + l^2 \quad (\text{D.17})$$

La Ec. (D.9) se puede expresar en una forma más compacta ya que se conoce el parámetro funcional de las integrales de dicha ecuación, entonces:

$$\langle \phi \rangle^l = \frac{U}{V_l} \left[ \frac{1}{4} \Gamma_1(\gamma) + \frac{a^3}{2} \Gamma_2(\gamma) \right] \quad (\text{D.18})$$

donde

$$\Gamma_1(\gamma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi)^4 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{D.19})$$

$$\Gamma_2(\gamma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r(\theta, \varphi) \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{D.20})$$

En la Tabla D.1 se presentan los valores del potencial [Ec. (D.9)] en función de  $\gamma$  y  $a$ , en la Tabla D.2 se presentán los valores de las integrales anteriores para diferentes  $\gamma$ .

**Tabla D.1.** Cálculo de  $\langle \phi \rangle' / bU$ , usando la regla compuesta de Simpson para resolver la integral múltiple

$\gamma$	$\epsilon_g = 0$ ( $a = 0$ )	$\epsilon_g = 0.027$ ( $a = 0.3$ )	$\epsilon_g = 0.064$ ( $a = 0.4$ )	$\epsilon_g = 0.125$ ( $a = 0.5$ )	$\epsilon_g = 0.216$ ( $a = 0.6$ )	$\epsilon_g = 0.343$ ( $a = 0.7$ )	$\epsilon_g = 0.512$ ( $a = 0.8$ )	$\epsilon_g = 0.73$ ( $a = 0.9$ )
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0866	0.0500	0.05208	0.05513	0.06071	0.07066	0.08916	0.12869	0.25175
0.17321	0.10007	0.10423	0.11033	0.12151	0.14142	0.17843	0.25755	0.50385
0.25981	0.15014	0.15639	0.16554	0.18231	0.21218	0.26771	0.38642	0.75595
0.34641	0.20021	0.20854	0.22074	0.24311	0.28294	0.35699	0.51529	1.00805
0.43301	0.25028	0.26069	0.27594	0.30391	0.35371	0.44627	0.64415	1.26015
0.51962	0.30034	0.31285	0.33115	0.36470	0.42447	0.53554	0.77302	1.51225
0.60622	0.35041	0.36500	0.38635	0.42550	0.49523	0.62482	0.90188	1.76435
0.69282	0.40048	0.41715	0.44156	0.48630	0.56599	0.71410	1.03075	2.01644
0.77942	0.45055	0.46930	0.49676	0.54709	0.63674	0.80338	1.15961	2.26854
0.86603	0.50062	0.52145	0.55196	0.60789	0.70750	0.89265	1.28847	2.52064
0.95263	0.55068	0.57361	0.60716	0.66869	0.77826	0.98193	1.41734	2.77273
0.99939	0.57775	0.60180	0.63701	0.70156	0.81652	1.03019	1.48700	2.90902

**Tabla D.2** Cálculo de las Ecs. (D.19) y (D.20)

$\gamma$	$\Gamma_1(\gamma)$	$\Gamma_2(\gamma)$
0	0	0
0.08660	0.83776	0.20944
0.17321	1.67667	0.41917
0.25981	2.51558	0.62890
0.34641	3.35449	0.83862
0.43301	4.19340	1.04835
0.51962	5.03231	1.25808
0.60622	5.87121	1.46781
0.69282	6.71011	1.67754
0.77942	7.54901	1.88736
0.86603	8.38791	2.09699
0.95263	9.22680	2.30672
0.99939	9.68033	2.42010

## APENDICE E

### DATOS EXPERIMENTALES

A continuación se presentan datos experimentales de flujo burbujeante aire-agua de algunos autores que han realizado principalmente estudios de propagación de fracción de vacíos en flujos aire-agua:

Soria y De Lasa (1992) usan técnicas de impedancia eléctrica para obtener la velocidad de propagación de las ondas de fracción de vacíos en columnas de burbujeo y tres fases fluidizadas. La columna tiene un diámetro interno de 0.20 m y una longitud axial de 2.6 m. Estos autores presentan gráficas de fracción de vacíos de líquido contra velocidad superficial del gas, para velocidades superficiales de líquido de 0.0 y 0.010 m/s. Estos autores establecen un criterio para caracterizar distintos patrones de flujo burbujeante. El patrón de flujo burbujeante homogéneo y el patrón de flujo burbujeante turbulento se identifica por un cambio asintótico en sus datos reportados y encontraron que la transición ocurre a una velocidad superficial del gas alrededor 0.0120 m/s para velocidades superficiales de líquido entre 0.010 m/s y 0.0505 m/s. También presentan resultados en gráficas de fracción de vacíos contra la velocidad de propagación de la onda de la fracción volumen de líquido, con dos modos de propagación en condiciones de velocidades superficiales de líquido de 0.0197, 0.0358, 0.0505 m/s en dos alturas, 1.130 m y 1.587 m.

Soria (1991a) en su trabajo presenta un conjunto de datos que cubre un rango mayor de velocidades de propagación, para fracciones de vacíos del gas de 0.0091 a 0.26, con un rango de velocidades superficiales del gas de 0.0013 m/s a 0.0437 m/s y un rango de velocidades

superficiales de líquido de 0.0 a 0.0506 m/s. En la Tabla E.1, se presentan algunos datos experimentales del trabajo de Soria (1991a), la velocidad de propagación corresponde al coeficiente de correlación máximo.

**Tabla E.1.** Datos experimentales de velocidades de propagación, Soria (1991a)

$\epsilon_g$	$J_l$ (m/s)	$J_g$ (m/s)	Velocidad de Propagación (m/s)			
			Couples (Nivel Bajo)			
			<u>1-2</u>	<u>2-3</u>	<u>3-4</u>	<u>4-5</u>
0.0091	0.0201	0.0013	0.2886	0.3451	0.2785	0.2995
0.0450	0.0	0.0026	0.2785	0.1890	0.1707	0.1784
0.2466	0.0201	0.0425	1.5875	1.5875	1.5875	1.5875
0.2610	0.0	0.0328	1.2940	0.4961	1.3229	1.4432
			Couples (Nivel intermedio)			
			<u>1-2</u>	<u>2-3</u>	<u>3-4</u>	<u>4-5</u>
0.0626	0.0197	0.0045	0.2785	0.1936	0.1334	0.1291
0.1167	0.0506	0.0094	0.2646	0.3608	0.4811	0.6902
0.2248	0.0506	0.0424	1.5875	1.5875	1.5875	1.5875
0.2321	0.0197	0.0437	1.5875	1.5875	1.4432	1.5875

Saiz-Jabardo y Bouré (1989) reportan resultados experimentales de velocidades de propagación de fracción de vacíos para flujos burbujeantes y transiciones de flujo (burbuja-tapón) en una sección vertical de 2 m de longitud y diámetro interno de 0.025 m, usando técnicas de impedancia eléctrica. Estos autores muestran que pueden coexistir dos fenómenos de propagación con diferentes velocidades y que la onda de mayor velocidad esta estrechamente relacionada con la aparición de flujo tapón (estructura alargada de la burbuja). En la Tabla E.2 se pueden observar dos velocidades de propagación para todas la fracciones de vacío, la primera velocidad de propagación,  $C_1$ , corresponde a perturbaciones naturales (bajas frecuencias), mientras que la segunda velocidad de propagación,  $C_2$ , (altas frecuencias) se caracteriza porque se observa una nueva estructura de la fase gaseosa. El criterio de transición de flujo establecido por estos autores es que la segunda velocidad de propagación sea mayor que la velocidad promedio del

gas (Tabla E.3).

**Tabla E.2.** Datos experimentales de velocidades de propagación, diferentes frecuencias, Saiz-Jabardo y Bouré (1989)

f (Hz) Couple	velocidad de propagación (m/s)							
	<u>0.4</u> *	<u>2.2</u> *	<u>3.3</u> *	<u>2.2</u> **	<u>3.1</u> **	<u>3.7</u> **	<u>2.8</u> ***	<u>3.2</u> ***
1-2	0.50	0.50	0.50	0.47	0.47	0.47		
2-3	0.50	0.50	0.50	0.47	0.47	0.47	0.46	0.60
3-4	0.50	0.49	0.51	0.47	0.48	0.48	0.45	0.59
4-5	0.50	0.49	0.51	0.47	0.48	0.48	0.47	0.62
5-6	0.50	0.50	0.51	0.47	0.48	0.49	0.59	0.60
6-7	0.50	0.50	0.51	0.47	0.49	0.50	0.60	0.62
7-8	0.50	0.50	0.53	0.47	0.49	0.51	0.60	0.62
8-9	0.50	0.50	0.53	0.47	0.50	0.53	0.60	0.62

\* $\epsilon_g=0.053$ ,  $J_1=0.275\text{m/s}$ ,  $J_g=0.025\text{ m/s}$ ; \*\*  $\epsilon_g=0.105$ ,  $J_1=0.275\text{m/s}$ ,  $J_g=0.055\text{m/s}$ ; \*\*\* $\epsilon_g=0.238$ ,  $J_1=0.260\text{m/s}$ ,  $J_g=0.111\text{m/s}$

**Tabla E.3.** Modos de propagación, baja frecuencia,  $C_1$ , alta frecuencia  $C_2$ . Saiz-Jabardo y Bouré (1989)

$\epsilon_g$	$J_1 = 0.120\text{ m/s}$			$\epsilon_g$	$J_1 = 0.275\text{ m/s}$		
	$C_1(\text{m/s})$	$C_2(\text{m/s})$	$v_g(\text{m/s})$		$C_1(\text{m/s})$	$C_2(\text{m/s})$	$v_g(\text{m/s})$
0.05	0.34	0.37	0.29	0.04	0.51	0.54	0.47
0.11	0.32	0.41	0.35	0.06	0.22		0.16
0.16	0.31	0.46	0.37	0.10	0.47	0.53	0.54
0.21	0.31	0.45	0.40	0.15	0.45		0.51
0.31	0.48	0.54	0.37	0.18	0.50	0.63	0.57
0.37	0.52	0.57	0.42	0.26	0.63		0.51
				0.28	0.70	0.72	0.54
				0.34	0.78	0.81	0.58
				0.39	0.84	0.92	0.62

Pauchon y Banerjee (1986) obtuvieron datos experimentales de propagación de fracción de vacíos en flujo burbujeante, la fracción de vacíos fue medida con técnicas de radiación gamma. La sección de prueba del ducto fue de 0.038 m de diámetro interno, la primera estación de medición se localizó a 5 m de la entrada de aire. El rango de flujo burbuja que cubren los datos son fracciones de vacíos de 0.1 a 0.15 y velocidades superficiales de líquido de 0.0884 m/s

a 0.765 m/s, en estos experimentos la velocidad superficial del gas fue constante del orden de 0.1 m/s. En la tabla siguiente se resumen sus resultados:

**Tabla E.4.** Datos experimentales de velocidades de propagación ( $J_g=0.1$  m/s). Pauchon Banerjee (1986)

$\epsilon_g$	$C_e$ (m/s)
0.1028	0.933
0.1221	0.711
0.1414	0.533
0.1500	0.444

Bernier (1982) realizó experimentos para estudiar la propagación natural de las ondas de fracción de vacíos, en un tubo vertical de sección circular, de diámetro interno de 0.1 m, la primera estación de medición se localiza a 1 m de la entrada, también utilizó técnicas de impedancia eléctrica. El rango de flujo burbuja que cubren los datos de Bernier ocurren a bajas velocidades de líquido del orden de 0.0 m/s a 0.32 m/s con diámetros de burbuja del orden de 0.005 m y un rango de fracciones de vacío de 0 a 0.25.

**Tabla E.5.** Datos experimentales de velocidades de propagación, para diferentes velocidades superficiales de líquido. Bernier (1982)

$J_l = 0.0$ (m/s)		$J_l = 0.073$ (m/s)		$J_l = 0.169$ (m/s)		$J_l = 0.318$ (m/s)	
$\epsilon_g$	C (m/s)	$\epsilon_g$	C (m/s)	$\epsilon_g$	C (m/s)	$\epsilon_g$	C (m/s)
0.0152	0.2000	0.0152	0.2821	0.0263	0.3857	0.0305	0.5253
0.0277	0.2107	0.0319	0.2678	0.0410	0.3785	0.0444	0.5358
0.0570	0.1785	0.0513	0.2642	0.0708	0.3842	0.0722	0.5323
0.0727	0.1928	0.0661	0.2607	0.0902	0.3642	0.0902	0.5253
0.1041	0.1571	0.0833	0.2821	0.1125	0.3642	0.1097	0.5182
0.1194	0.1464	0.1041	0.2750	0.1305	0.3678	0.1416	0.5500
0.1430	0.1470	0.1263	0.2428	0.1486	0.3657	0.1638	0.5500
		0.1361	0.2357	0.1694	0.3657	0.1791	0.5112
		0.1541	0.2178	0.1888	0.3658	0.2055	0.5500
				0.2088	0.3678		
				0.2291	0.3750		

Mercadier (1981) estudia la propagación natural e inducida de ondas de fracción de vacíos, usando técnicas de impedancia eléctrica. La sección de prueba es un tubo vertical anular de 2 m de longitud, el diámetro de la barra central es de 0.032 m y el diámetro interno del tubo exterior es de 0.070 m (Bouré y Mercadier, 1982).

El rango de velocidades superficiales de líquido que cubren estos experimentos es de ~ - 0.05 m/s a 1. m/s (incluyendo 0.0 m/s) y un rango de fracciones de vacío de aproximadamente de 0.01 a 0.22, en la tabla siguiente se resumen sus resultados:

**Tabla E.6.** Datos experimentales de velocidades de propagación, para diferentes velocidades superficiales de líquido. Mercadier (1981).

$J_l = 0.0 \text{ m/s}$		$J_l = 0.1 \text{ m/s}$		$J_l = 0.2 \text{ m/s}$	
$\epsilon_g$	C(m/s)	$\epsilon_g$	C(m/s)	$\epsilon_g$	C(m/s)
0.0125	0.2066	0.0225	0.3000	0.0170	0.3600
0.0350	0.1866	0.0850	0.2533	0.0600	0.3466
0.0575	0.1666	0.1525	0.2133	0.1075	0.3333
0.0850	0.1533	0.2175	0.2066	0.1550	0.3200
0.1125	0.1400			0.1975	0.3266
0.1425	0.1200				
$J_l = 0.29 \text{ m/s}$		$J_l = 0.39 \text{ m/s}$		$J_l = 0.49 \text{ m/s}$	
$\epsilon_g$	C(m/s)	$\epsilon_g$	C(m/s)	$\epsilon_g$	C(m/s)
0.0155	0.4866	0.0400	0.5266	0.0350	0.6533
0.0500	0.4733	0.0700	0.5266	0.0600	0.6666
0.0850	0.4333	0.1000	0.5133	0.0850	0.6666
0.1200	0.4533	0.1275	0.5133	0.1075	0.6800
0.1550	0.4733	0.1550	0.5333	0.1350	0.7066
0.1900	0.4666	0.1825	0.5666	0.1550	0.7333
0.2200	0.4733				

Micaelli (1982) realizó experimentos en un tubo vertical de sección cuadrada, para altas velocidades superficiales de líquido, 0-10 m/s.

En la Tabla E.7, se presentan el rango de números de Reynolds de líquido,  $Re_l$ , que cubren los datos experimentales de flujos burbujeantes aire-agua. El del número de Reynolds se cálculo con las velocidades superficiales de líquido y fracción de vacíos mínimos y máximos de los datos reportados. En esta Tabla se puede observar que los flujos de los experimentos de Soria y De Lasa, (1992); Soria (1992) y Saiz-Jabardo y Bouré (1989), son lentos. En el caso de Pauchon y Banerjee (1986); Bernier (1982) y Mercadier (1981), existe un zona de bajo flujo para bajas fracciones de vacíos y una zona predominante de flujos altos.

**Tabla E.7.** Números de Reynolds de los datos experimentales reportados por diferentes autores

Autor	$Re_l$	$\epsilon_g$	$J_l$ (m/s)	$D_b$ (m)		
Soria y De Lasa (1992)	2182	2946	0.0013	0.26	0.01	0.20
Soria (1992)	10914	14729	0.0013	0.25	0.05	0.20
Saiz-Jabardo y Bouré (1989)	7888	12285	0.05	0.39	0.275	0.025
Pauchon y Banerjee (1986)	4068	4308	0.1	0.15	0.088	0.038
	35206	37277	0.1	0.15	0.765	
Bernier (1982)	8080	9406	0.015	0.15	0.073	0.1
	35976	46506	0.03	0.25	0.32	
Mercadier (1981)	4237	5293	0.022	0.22	0.1	0.038
	41837	53101	0.0	0.22	1.0	

## APENDICE F

### ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS Y DIFERENCIA DE LOS PROMEDIOS DE LA PRESION

#### F.1 Velocidades características sin efectos de $T_{zz}^{Re}$

**Análisis con dependencia espacial y temporal de  $C_{VM}$ .** Eliminado los esfuerzos de Reynolds en la Ec. (4.11) del Capítulo 4, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 M_{lg} = & \rho_l C_{VM}(\varepsilon_g) a_{VM} + \langle \Delta p_{lg} \rangle \nabla \varepsilon_g + \varepsilon_g F_D \\
 & + \rho_l (1 - \varepsilon_g) \left[ v_r \frac{\partial}{\partial t} + U_r \nabla \right] [(1 - \varepsilon_g)^{-1} C_{VM}(\varepsilon_g)] \quad \text{en } A_{lg}
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

donde el primer término corresponde a los efectos de masa agregada constantes, el segundo término es la diferencia de presión interfacial, el tercer término son las fuerzas de arrastre interfacial y el cuarto término son los efectos de masa agregada dependientes del tiempo y el espacio. El resultado del polinomio característico es:

$$\lambda_{\pm}^* = v \pm \left[ \frac{\nu}{\tau} \right]^{1/2} \tag{F.2}$$

$$\nu = \frac{(1 - \varepsilon_g)}{\tau} \left[ c_3 - \xi - k\varepsilon_g + \rho_g^* (1 - \varepsilon_g) - \frac{c_3}{2(1 - \varepsilon_g)} \right] \tag{F.3}$$

$$\nu = v^2 \tau + \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g) (k_{ccz} - c_3) + (1 - \varepsilon_g)^2 (\xi - \rho_g^* + H_g^* \sigma^* - c_3) + \frac{1}{2} c_3 \tag{F.4}$$

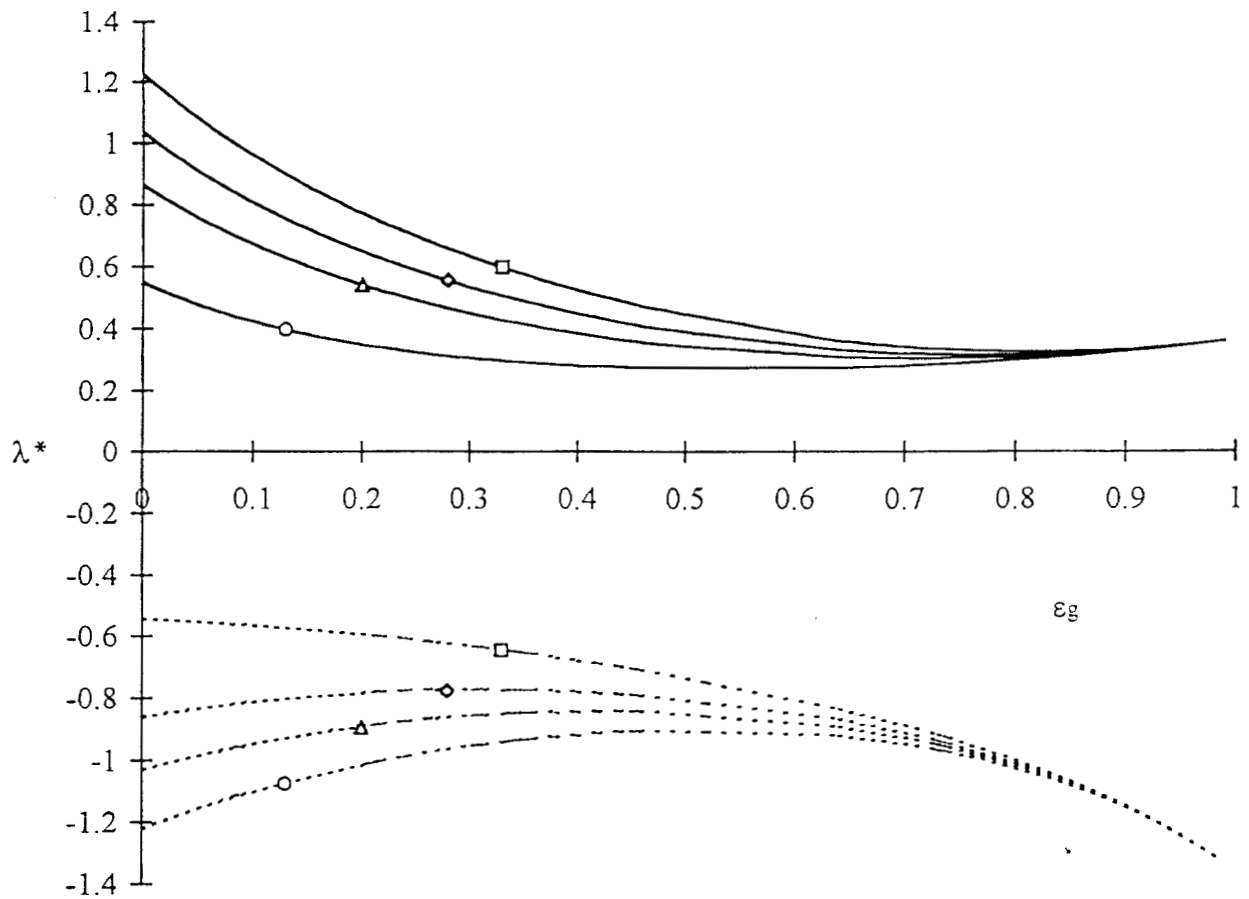
$$\tau = \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g) + c_3 + \rho_g^* (1 - \varepsilon_g)^2 \tag{F.5}$$

Comparando este resultado con las Ecs. (5.36)-(5.38), se puede observar que existen diferencias en las ecuaciones que describen  $v$  y  $\nu$ , mientras que la expresión para  $\tau$  es la misma para ambos

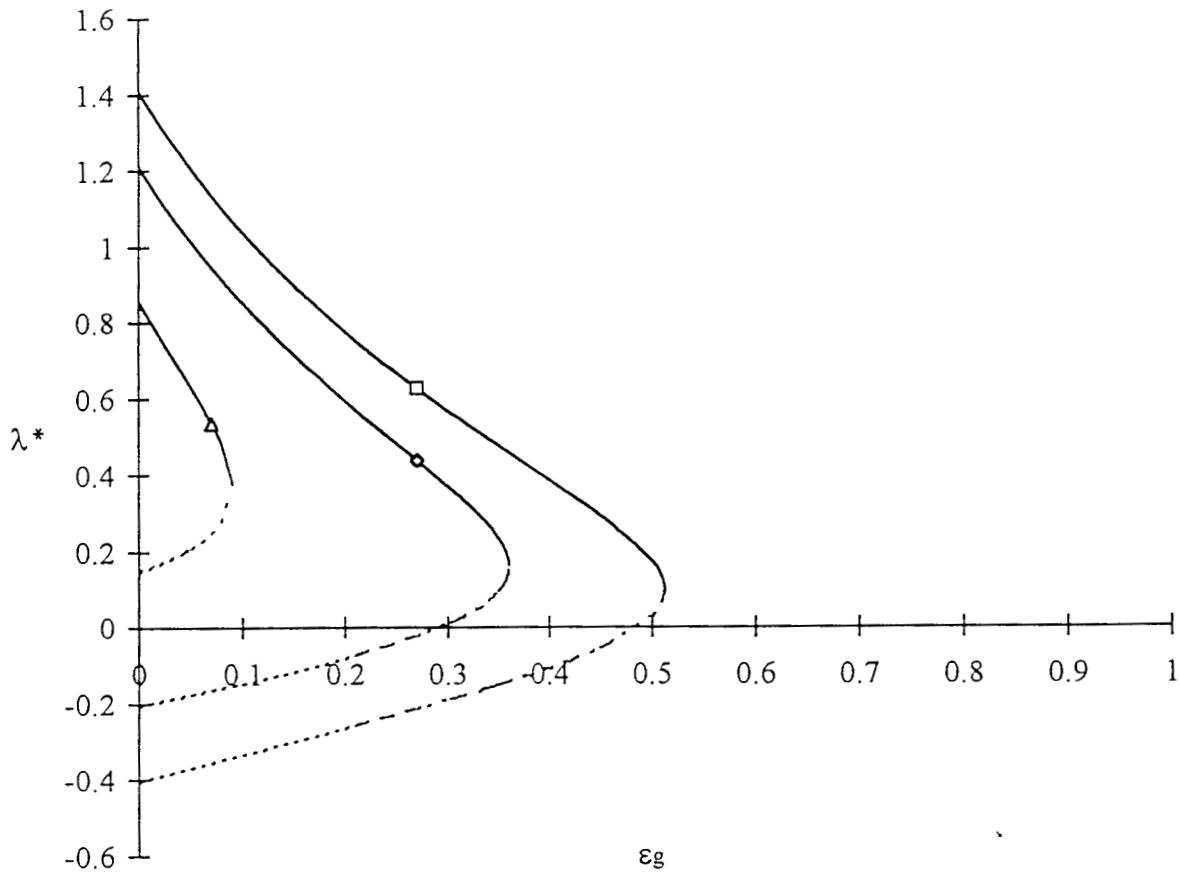
resultados. En la Figura F.1 se presenta el comportamiento de las velocidades características rápidas (líneas continuas) y velocidades características lentas (líneas discontinuas), para 4 diferentes radios de burbuja. Se puede observar que las velocidades características presentan un comportamiento hiperbólico en todo el rango de  $\varepsilon_g$ . Cuando  $R_b \rightarrow \infty$ , se encontró que  $\lambda_+^* = \lambda_-^* = 0$  en  $\varepsilon_g = 0$  y para  $\varepsilon_g > 0$  la velocidad característica rápida se incrementa positivamente, mientras que la velocidad característica lenta se incrementa negativamente. Comparando estas gráficas con las gráficas de la Figura 5.2, se puede observar que para un mismo radio de burbuja, la velocidad de la onda rápida es ligeramente mayor en la Figura 5.2 que en la Figura 5.4. Lo mismo se observa para la velocidad lenta con una diferencia mucho mas grande.

**Análisis con  $C_{VM}$  constante.** Este caso se obtiene directamente de las Ecs. (F.3) y (F.4) con  $c_3/2(1 - \varepsilon_g) = 0$  y  $c_3/2 = 0$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Figura F.2 indicando el rango de comportamiento hiperbólico. Se puede observar que los resultados son similares a los presentados en la Figura 5.3 aunque se observan dos diferencias importantes con respecto a los resultado de la Figura F.2: (1) el rango de comportamiento hiperbólico es mayor conforme disminuye  $R_b$  y (2) las velocidades de propagación son inferiores, inclusive menores de la velocidad promedio de la fase continua.

Las observaciones realizadas indican que los efectos de  $T_{zz}^{Re}$  en las fuerzas interfaciales por unidad de volumen producen aceleración de la velocidad característica de la onda, este resultado ya fue reportado en el trabajo de Espinosa-Paredes y Soria (1998).



**Figura F.1.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$ , usando la Ec. (5.42); ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.5\text{mm}$ , ( $\diamond$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$ , ( $\triangle$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$ , ( $\circ$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$ .



**Figura F.2.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$  y  $C_{VM}$  constante; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.512$ ), ( $\diamond$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.36$ ), ( $\triangle$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.091$ ).

## F.2 Velocidades características sin efectos de $T_{zzi}^{Re}$ y de $\langle \Delta p_{lg} \rangle$

**Análisis con dependencia espacial y temporal de  $C_{VM}$ .** Eliminando los esfuerzos de Reynolds y la diferencia de presión interfacial en la Ec. (4.11), se obtiene que el único término que es diferente del polinomio característico con respecto al caso anterior es:

$$\nu = v^2 \tau + \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g) (\xi + k_{ccz} - c_3) + (1 - \varepsilon_g)^2 (2\xi - \rho_g^* + H_g^* \sigma^* - c_3) + \frac{1}{2} c_3 \quad (F.6)$$

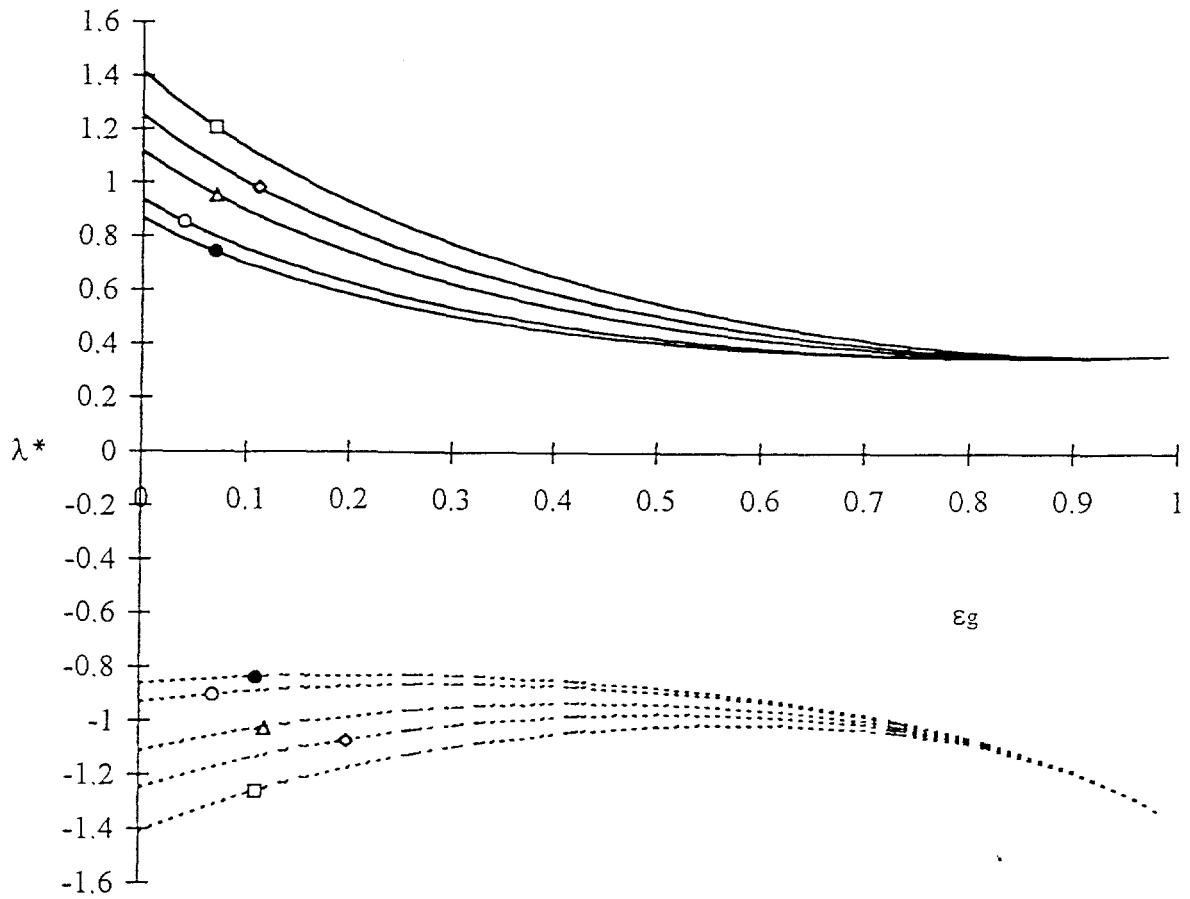
En las gráficas de la Figura F.3 se presenta el comportamiento de las velocidades características rápidas (líneas continuas) y velocidades características lentas (líneas discontinuas), para 5 diferentes radios de burbuja. Se puede observar que las velocidades características presentan un comportamiento hiperbólico en todo el rango de  $\varepsilon_g$ , en forma muy similar al como en caso presentado en al Sección anterior (sin efectos de Reynolds). Cuando  $R_b \rightarrow \infty$ , las velocidades características rápidas tienden a un valor menor que la velocidad promedio de la fase dispersa y mayor que la velocidad promedio de la fase continua. Con las velocidades características lentas ocurre lo mismo pero su velocidad es menor que la velocidad promedio de la fase continua. Esta tendencia se muestra en la Figura F.3, donde para un radio de burbuja de  $R_b = 2.0\text{mm}$  y de  $R_b = 3.0\text{mm}$ , las velocidades características no son muy diferentes entre ellas, sin embargo, para radios menores, por ejemplo en  $R_b = 0.5\text{mm}$ , la diferencia es notable.

Comparando este caso y el obtenido sin esfuerzos de Reynolds (Figura F.1), se puede observar que los resultados obtenidos en el presente caso (Figura F.2), las velocidades características rápidas son mayores que las obtenidos sin esfuerzos de Reynolds (Figura F.1), mientras que para las velocidades características lentas ocurre lo contrario.

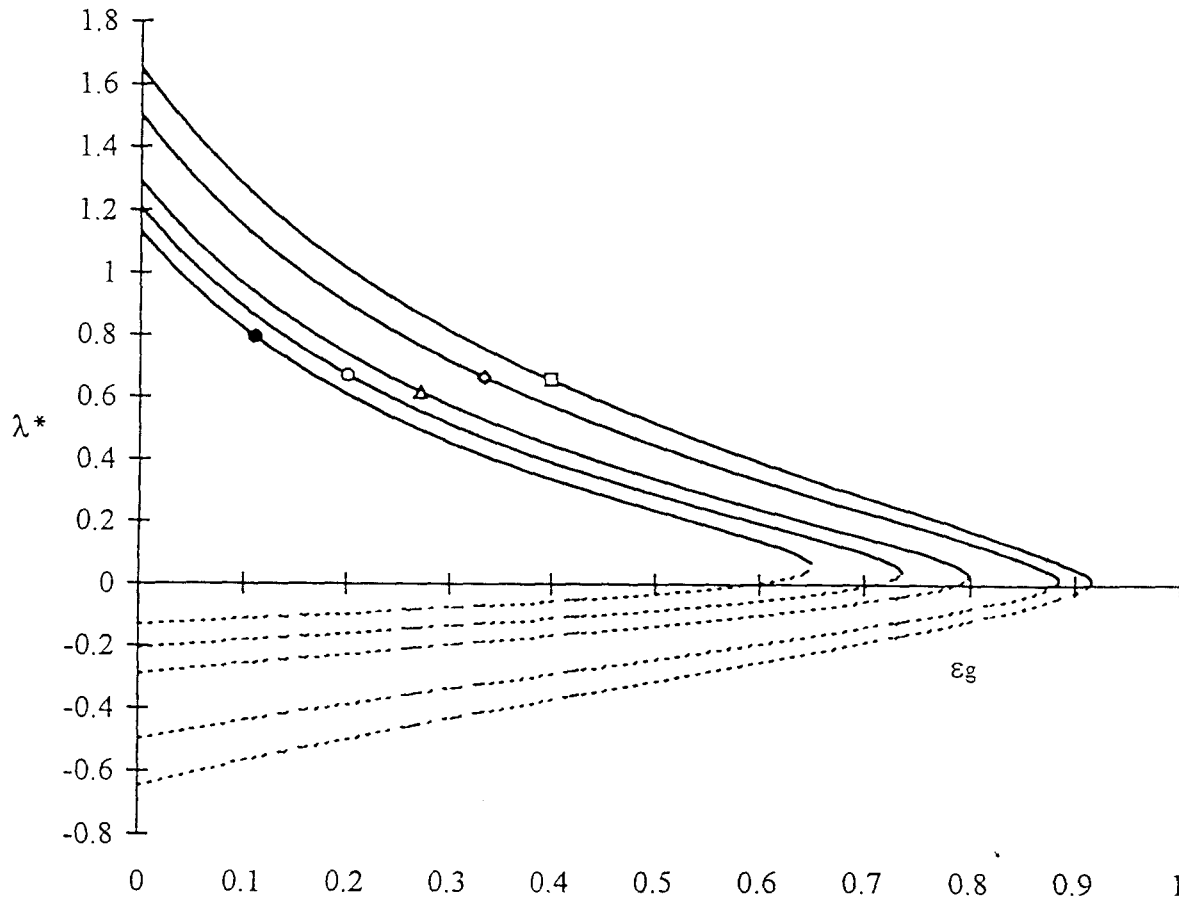
Comparando este caso con el caso completo, es decir, con el presentado en la Figura 5.2 se puede observar el mismo comportamiento para  $R_b \leq 2.2\text{mm}$ .

**Análisis con  $C_{VM}$  constante.** Los resultados obtenidos se muestran en la Figura F.4 indicando el rango de comportamiento hiperbólico. Se puede observar que los resultados son similares a los presentados en las Figuras 5.3. y F.2, pero con dos diferencias importantes: (1) el rango de comportamiento hiperbólico es mucho mayor conforme disminuye  $R_b$  y (2) las velocidades características son mayores.

Se puede concluir que los efectos de diferencia de presión interfacial aceleran la velocidad característica de la onda rápida y desaceleran las ondas características lentas. Este resultado ya fue reportado en el trabajo de Espinosa-Paredes y Soria (1998).



**Figura F.3.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$  y  $C_{VM}$  constante; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.5\text{mm}$ , ( $\diamond$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$ , ( $\triangle$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$ , ( $\circ$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$ , ( $\bullet$ )  $R_b = 3.0\text{mm}$ .



**Figura F.4.** Variación de las velocidades características (adimensional) como función de la fracción de vacíos para diferentes radios de burbuja  $R_b$ ; ondas rápidas líneas continuas y ondas lentas líneas discontinuas. ( $\square$ )  $R_b = 0.7\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.916$ ), ( $\diamond$ )  $R_b = 1.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.885$ ), ( $\Delta$ )  $R_b = 2.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.80$ ), ( $\circ$ )  $R_b = 3.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.736$ ), ( $\bullet$ )  $R_b = 5.0\text{mm}$  ( $\epsilon_g \leq 0.65$ ).

## APENDICE G

### COEFICIENTES DE LA ECUACION DE ONDA DE FRACCION DE VACIOS

Los coeficientes de la ecuación de onda definida por la Ec. (6.47) están dados por:

$$\mathfrak{C}_1 = -\frac{1}{\varepsilon_{l_0}} \left[ \frac{1}{\varepsilon_{l_0}} \left( \frac{\partial F_D^*}{\partial v_l^*} \right)_o - \frac{1}{\varepsilon_{g_0}} \left( \frac{\partial F_D^*}{\partial v_g^*} \right)_o \right] \quad (G.1)$$

$$\mathfrak{C}_2 = -\frac{1}{\varepsilon_{l_0}} \left[ \left( \frac{\partial F_D^*}{\partial \varepsilon_g^*} \right)_o + \frac{v_{l_0}^*}{\varepsilon_{l_0}} \left( \frac{\partial F_D^*}{\partial v_l^*} \right)_o - \frac{v_{g_0}^*}{\varepsilon_{g_0}} \left( \frac{\partial F_D^*}{\partial v_g^*} \right)_o \right] - \frac{F_{D_0}^*}{\varepsilon_{l_0}^2} \quad (G.2)$$

$$\mathfrak{C}_3 = \frac{1}{\varepsilon_{l_0}} + \frac{\rho_g^*}{\varepsilon_{g_0}} + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_0}^2 \varepsilon_{g_0}} \quad (G.3)$$

$$\mathfrak{C}_4 = 2 \left[ \frac{v_{l_0}^*}{\varepsilon_{l_0}} + \rho_g^* \frac{v_{g_0}^*}{\varepsilon_{g_0}} + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_0}} \left( \frac{v_{l_0}^*}{\varepsilon_{l_0}} + \frac{v_{g_0}^*}{\varepsilon_{g_0}} \right) \right] + \varphi_{01} + \frac{\varphi_{06}}{\varepsilon_{l_0}} - \frac{\varphi_{07}}{\varepsilon_{g_0}} \quad (G.4)$$

donde  $\varphi_{01}$ ,  $\varphi_{06}$  y  $\varphi_{07}$  están dadas por las Ecs. (6.34), (6.43) y (6.44), entonces sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_4 = & 2 \left[ \frac{v_{l_0}^*}{\varepsilon_{l_0}} + \rho_g^* \frac{v_{g_0}^*}{\varepsilon_{g_0}} + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_0}} \left( \frac{v_{l_0}^*}{\varepsilon_{l_0}} + \frac{v_{g_0}^*}{\varepsilon_{g_0}} \right) \right] - \frac{c_3}{\varepsilon_{l_0}^2 \varepsilon_{g_0}} \\ & - \frac{1}{\varepsilon_{l_0}} \left( \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_l^*} \right)_o + \frac{1}{\varepsilon_{g_0}} \left( \frac{\partial T_{zzl}^{Re^*}}{\partial v_l^*} \right)_o + \frac{1}{\varepsilon_{g_0}} \left( \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_g^*} \right)_o - \frac{\varepsilon_{l_0}}{\varepsilon_{g_0}^2} \left( \frac{\partial T_{zzl}^{Re^*}}{\partial v_g^*} \right)_o \end{aligned} \quad (G.5)$$

donde  $v_{r0}^* = (v_{g_0}^* - v_{l_0}^*) = 1$ . El coeficiente  $\mathfrak{C}_5$ , está dado por:

$$\mathfrak{C}_5 = \frac{v_{l_0}^{*2}}{\varepsilon_{l_0}} + \frac{v_{g_0}^{*2}}{\varepsilon_{g_0}} \rho_g^* + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_0}} \left( \frac{v_{l_0}^{*2}}{\varepsilon_{l_0}} + \frac{v_{g_0}^{*2}}{\varepsilon_{g_0}} \right) + \varphi_{02} + \varphi_{05} + \frac{v_{l_0}^*}{\varepsilon_{l_0}} \varphi_{06} - \frac{v_{g_0}^*}{\varepsilon_{g_0}} \varphi_{07} \quad (G.6)$$

Sustituyendo  $\varphi_{02}$ ,  $\varphi_{05}$ ,  $\varphi_{06}$  y  $\varphi_{07}$  [Ecs.(6.35), (6.42), (6.43) y (6.44)]

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_5 = & \frac{v_{l_o}^{*2}}{\varepsilon_{l_o}} + \frac{v_{g_o}^{*2}}{\varepsilon_{g_o}} \rho_g^* + \frac{c_3}{\varepsilon_{l_o}} \left[ \frac{v_{l_o}^{*2}}{\varepsilon_{l_o}} + \frac{v_{g_o}^{*2}}{\varepsilon_{g_o}} \right] \\ & - \frac{1}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \Delta p_{lg_o}^* + T_{zzl_o}^{Re*} + \sigma^* H_g^* + \frac{c_3 U_{r_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \right] - \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial \varepsilon_g} \right]_o + \frac{\varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial \varepsilon_g} \right]_o \\ & - \frac{v_{l_o}^*}{\varepsilon_{l_o}} \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_{l_o}^*} \right]_o + \frac{v_{l_o}^*}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_{l_o}^*} \right]_o + \frac{v_{g_o}^*}{\varepsilon_{g_o}} \left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_g^*} \right]_o - \frac{v_{g_o}^* \varepsilon_{l_o}}{\varepsilon_{g_o}^2} \left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_g^*} \right]_o \end{aligned} \quad (G.7)$$

y

$$\mathfrak{C}_6 = \varphi_{03} = \frac{c_3 c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \quad (G.8)$$

$$\mathfrak{C}_7 = \varphi_{04} = \frac{U_{r_o}^* c_3 c_{2_o}^*}{\varepsilon_{l_o}^2} \quad (G.9)$$

### *Funciones entre derivadas parciales*

Los coeficientes de la ecuación de onda [Ec. (6.47)], están definidos a través de las Ecs. (G.1)-(G.3), (G.5), (G.7)-(G.9). En estas ecuaciones aparecen términos entre derivadas parciales, las cuales serán obtenidas con el conjunto de relaciones de cerradura excéntricas. Primero se presentan las cerraduras en forma adimensional para obtener las funciones entre derivadas parciales y después se definirán los términos de los coeficientes de la ecuación de onda en función de variables conocidas.

Las formas adimensionales de las relaciones de cerradura son:

$$F_D^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \rho_g}{\sigma^* \varepsilon_l} \right]^{1/2} (v_g^* - v_l^*)^2 \quad (\text{G.10})$$

$$\Delta p_{lg}^* = - \xi (v_g^* - v_l^*)^2 \quad (\text{G.11})$$

donde  $\xi = 1/4$ .

$$T_{zzl}^{Re*} = - \left[ k_{zzc} - c_6 \varepsilon_g - \frac{c_7 \varepsilon_g}{\varepsilon_l} \right] \frac{\varepsilon_g (v_g^* - v_l^*)^2}{\varepsilon_l} \quad (\text{G.12})$$

donde  $k_{zzc} = 1/5$ ,  $c_6$  y  $c_7$  son parámetros constantes para una configuración establecida de la celda unitaria excéntrica, estos dos parámetros están definidos por las Ecs. (3.122) y (3.123) del Capítulo 3. El estado base de las Ecs. (G.10)-(G.12) son:

$$F_{D_o}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \rho_g}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right]^{1/2} \quad (\text{G.13})$$

$$\Delta p_{lg_o}^* = - \xi \quad (\text{G.14})$$

$$T_{zzl_o}^{Re*} = - \left[ k_{zzc} - c_6 \varepsilon_{g_o} - \frac{c_7 \varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \right] \frac{\varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \quad (\text{G.15})$$

Derivando con respecto a  $\varepsilon_g$ ,  $v_g^*$ ,  $v_l^*$  las Ecs. (G.13)-(G.15) y evaluando en el estado base, se obtiene:

$$\left( \frac{\partial F_D^*}{\partial \varepsilon_g} \right)_o = \frac{1}{4 \varepsilon_{l_o}} \left[ \frac{1 - \rho_g^*}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right]^{1/2} \quad (\text{G.16})$$

$$\left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial v_l^*} \right]_o = - \left[ \frac{1 - \rho_g^*}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right]^{1/2} \quad (\text{G.17})$$

$$\left[ \frac{\partial F_D^*}{\partial v_g^*} \right]_o = \left[ \frac{1 - \rho_g^*}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right]^{1/2} \quad (\text{G.18})$$

$$\left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial \varepsilon_g} \right]_o = 0 \quad (\text{G.19})$$

$$\left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_l^*} \right]_o = 2 \xi \quad (\text{G.20})$$

$$\left[ \frac{\partial \Delta p_{lg}^*}{\partial v_g^*} \right]_o = - 2 \xi \quad (\text{G.21})$$

$$\left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial \varepsilon_g} \right]_o = - \frac{k_{zzc}}{2 \varepsilon_{l_o}} + c_6 \frac{\varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_{l_o}} \right) + \frac{2 c_7 \varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}^3} \quad (\text{G.22})$$

$$\left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_l^*} \right]_o = 2 \left[ k_{zzc} - c_6 \varepsilon_{g_o} - \frac{c_7 \varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \right] \frac{\varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \quad (\text{G.23})$$

$$\left[ \frac{\partial T_{zzl}^{Re*}}{\partial v_g^*} \right]_o = - 2 \left[ k_{zzc} - c_6 \varepsilon_{g_o} - \frac{c_7 \varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \right] \frac{\varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \quad (\text{G.24})$$

Con estos resultados los coeficientes de la ecuación de onda dada por la Ec. (6.47), se pueden escribir en términos de la fracción de vacíos, parámetros de las cerraduras y propiedades físicas adimensionales; Sustituyendo las Ecs. (G.17) y (G.18) en la Ec. (G.1), se obtiene:

$$\mathbb{G}_1 = \frac{1}{\varepsilon_{l_o}^2 \varepsilon_{g_o}} \left( \frac{1 - \rho_g^*}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right)^{1/2} \quad (\text{G.25})$$

sustituyendo las Ecs. (G.16)-(G.18) en las Ec. (G.2), se obtiene:

$$\mathbb{G}_2 = \frac{1}{\varepsilon_{l_o}^2 \varepsilon_{g_o}} \left( \frac{1 - \rho_g^*}{\sigma^* \varepsilon_{l_o}} \right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{5}{4} \varepsilon_{g_o} + v_{l_o}^* \right] \quad (\text{G.26})$$

La Ec. (G.3) se puede reescribir de la siguiente forma conveniente:

$$\mathbb{G}_3 = \frac{1}{\varepsilon_{l_o}^2 \varepsilon_{g_o}} \left( \varepsilon_{l_o} \varepsilon_{g_o} + c_3 + \rho_g^* \varepsilon_{l_o}^2 \right) \quad (\text{G.27})$$

Sustituyendo las Ecs. (G.20), (G.21), (G.23) y (G.24) en la Ec. (G.5), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_4 = \frac{2}{\varepsilon_{l_o}^2 \varepsilon_{g_o}} & \left[ \rho_g^* \varepsilon_{l_o}^2 + c_3 \varepsilon_{l_o} - \xi \varepsilon_{l_o} + k_{zcc} \varepsilon_{l_o} - c_6 \varepsilon_{g_o} \varepsilon_{l_o} - c_7 \varepsilon_{g_o} \right. \\ & \left. + v_{l_o}^* \left( \varepsilon_{l_o} \varepsilon_{g_o} + c_3 + \rho_g^* \varepsilon_{l_o}^2 \right) - \frac{c_3}{2} \right] \quad (\text{G.28}) \end{aligned}$$

La Ec. (G.7) se puede reescribir de la siguiente forma, después de sustituir las Ecs. (G.14), (G.15) y (G.19)- (G.24):

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_5 = \frac{1}{\varepsilon_{l_o}^2 \varepsilon_{g_o}} & \left[ v_{l_o}^{*2} \left( \varepsilon_{l_o} \varepsilon_{g_o} + c_3 + \rho_g^* \varepsilon_{l_o}^2 \right) + 2v_{l_o}^* \varepsilon_{l_o} \left( c_3 + \rho_g^* \varepsilon_{l_o} - \xi + k_{zcc} - c_6 \varepsilon_{g_o} - \frac{c_7 \varepsilon_{g_o}}{\varepsilon_{l_o}} \right) \right. \\ & \left. - \varepsilon_{l_o}^2 \left[ \xi - k_{zcc} - \frac{c_7 \varepsilon_{g_o}^2}{2 \varepsilon_{l_o}} + \sigma^* H_g^* - c_3 - \rho_g^* \right] + \varepsilon_{l_o} \varepsilon_{g_o} c_3 - c_3 U_{r_o}^* \right] \quad (\text{G.29}) \end{aligned}$$

## APENDICE H

### DEMOSTRACION DEL CRITERIO DE ESTABILIDAD

La demostración que a continuación se presenta se obtiene del trabajo de Biesheuvel y Gorissen (1990). La solución de la Ec. (6.48) es de la forma:

$$\delta \varepsilon_g = \varepsilon_{g_0} e^{ik(z - ct)} \quad (\text{H.1})$$

donde  $k^*$  es el número de onda adimensional y  $c^*$  está dada por:

$$c^* = \frac{\omega^*}{k^*} \quad (\text{H.2})$$

donde  $\omega^*$  es la frecuencia. Sustituyendo la Ec. (H.1) en la Ec. (6.65) se obtiene la siguiente relación de dispersión lineal:

$$T^* k^* (r_+^* - c^*) (c^* - r_-^*) + ik^{*2} D_e^* T^* (c^* - U_+^*) + i(c^* - a_+^*) = 0 \quad (\text{H.3})$$

Para encontrar las raíces de la ecuación cuadrática, primero se re-escibe de la siguiente forma:

$$(c^* - r_m)^2 + iP(c^* - r_m) - (Q - iR) = 0 \quad (\text{H.4})$$

donde:

$$r_m = \frac{1}{2} (r_+ + r_-) \quad (\text{H.5})$$

$$P = \frac{1 + k^{*2} D_e^* T^*}{k^* T^*} \quad (\text{H.6})$$

$$Q = \frac{1}{4} (r_+ - r_-)^2 \quad (\text{H.7})$$

$$R = \frac{(a_+^* - r_m) + k^{*2} D_e^* T^* (U_+^* - r_m)}{k^* T^*} \quad (\text{H.8})$$

Entonces las raices de las Ec. (H.4) son:

$$c^* = r_m - \frac{1}{2} i P \mp i \left( \frac{1}{4} P^2 - Q - i R \right)^{1/2} \quad (\text{H.9})$$

Introduciendo  $c^* = c_R^* + i c_I^*$  en la ecuación anterior, se obtiene que:

$$c_R = r_m \pm \left\{ -\frac{1}{8} P^2 + \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{4} P^2 - Q \right)^2 + R^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (\text{H.10})$$

$$c_I = -\frac{1}{2} P \mp \left\{ \frac{1}{8} P^2 - \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{4} P^2 - Q \right)^2 + R^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (\text{H.11})$$

En estas ecuaciones  $c_R^*$  es la velocidad de fase (Whitham, 1974) y  $c_I^*$  está relacionada con el crecimiento o amortiguamiento de la perturbación ( $kc_I^*$ ). El flujo es estable cuando se cumple que  $c_I^* \leq 0$ , esto es equivalente a  $R^2 \leq P^2 - Q$ . De las Ecs. (H.6)-(H.8) se obtiene:

$$\left[ (a_+^* - r_-^*) - k^{*2} D_e^* T^* (U_+^* - r_-) \right] \left[ (r_+^* - a_+^*) + k^{*2} D_e^* T^* (r_+^* - U_+^*) \right] \geq 0 \quad (\text{H.12})$$

La desigualdad anterior sólo se satisface cuando:

$$r_-^* \leq U_+^* \leq r_+^* \quad (\text{H.13})$$

y

$$r_-^* - k^{*2} D_e^* T^* (U_+^* - r_-) \leq a_+^* \leq r_+^* + k^{*2} D_e^* T^* (r_+^* - U_+^*) \quad (\text{H.14})$$