

Tesis de maestría titulada:

***"Control Predictivo de Procesos Químicos con
Estimación de Error de Modelado"***

presentada por:

Ilse Cervantes Camacho
Ingeniero Químico

Asesor:

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

*Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa
Av. Michoacán y Purísima s/n, col. Vicentina, C.P. 09340,
México, D.F., México*

1998

Prefacio

La presente tesis trata el problema de control predictivo de procesos químicos con estimación de incertidumbres (errores de modelado) en línea. La entrada de control predictivo es la solución de un problema de optimización con restricciones. En éste, se minimiza una función objetivo restringida a la dinámica del sistema y a las limitaciones del actuador de control. Esta función objetivo (índice de desempeño) consta de dos partes, una en donde se penalizan los movimientos de control y otra en donde se penaliza la desviación de la referencia. Con base en simulaciones se definen reglas de sintonizado basadas en la existencia de dos parámetros fundamentales que afectan dramáticamente el desempeño y la estabilidad del lazo de control: El horizonte de predicción y el costo del control.

La aportación principal de la presente tesis es la del desarrollo de estrategias de estimación de errores de modelado (incertidumbres) con las que se pueda robustecer la ley de control predictivo. Con este fin, se propusieron dos esquemas de estimación de incertidumbres para plantas de una entrada y una salida: La aplicación de estos esquemas depende del grado relativo del sistema. La primera estrategia se desarrolla para plantas de grado relativo uno y está basada en un estimador discreto. En ella, se aprovecha la cualidad de estos sistemas de ser afectados directamente por las incertidumbres, para proponer una funcionalidad explícita de las incertidumbres y reconstruirlas a partir de mediciones de la salida. La segunda estrategia se desarrolla para sistemas de grado relativo mayor y linealizables (total o parcialmente) por retroalimentación. En éstos, es posible desarrollar un estimador de incertidumbres basado en observadores lineales que además provea un estimado de las derivadas de la salida. Los observadores presuponen incertidumbre aditiva y acotada. La estimación de incertidumbres robustece la ley de Control Predictivo (CP), insertando una acción integral al lazo de control.

Se desarrolla una tercera estrategia para robustecer el esquema de control predictivo al insertar una acción integral explícita en el índice de desempeño. El término que incluye la acción integral en la función objetivo puede interpretarse como el correspondiente a la inclusión de una restricción activa sobre el valor integral del error de seguimiento. Esta restricción puede producir inestabilidades o pobre desempeño para sistemas inestables, debido principalmente a que esta ley de control contiene términos que involucran el comportamiento de la planta a lazo abierto (de Oliviera y Biegler, 1994). Los resultados encontrados para sistemas de una entrada y una salida pueden ser extendidos a sistemas múltiple entrada y múltiple salida haciendo consideraciones menores.

Se utilizan reactores de tanque agitado, químicos y biológicos; así como columnas de destilación e intercambiadores de calor para probar la robustez del algoritmo de control con estimación de incertidumbres. En todos estos casos, las pruebas se hicieron mediante simulaciones numéricas. El desempeño estas leyes de control se puede calificar de muy satisfactoria en la mayoría de los casos, siendo excepciones los sistemas asociados con problemas de control mal condicionados y los sistemas inestables de orden relativo mayor que uno, los cuales pueden resultar en controladores inestables o de pobre desempeño.

El manuscrito está organizado de la siguiente manera, en el Capítulo I se muestra la motivación de la presente tesis con base en las necesidades de una creciente industria competitiva y en las deficiencias del control comercial. Se plantea la necesidad de construir controladores robustos que puedan cotrarrestar una gran gama de incertidumbres. Se presenta también una revisión bibliográfica de los artículos de control predictivo que tratan el problema de robustez del control predictivo ante errores de modelado. En el Capítulo II se presentan las herramientas teóricas y se desarrollan de algoritmos de control predictivo con estimación de error de modelado y con acción integral explícita, para sistemas de una entrada y una salida. Así también, se revisa la extensión de los algoritmos propuestos a sistemas de múltiple entrada y múltiple salida, y se discuten las consideraciones adicionales que se requieren para cada esquema.

En el Capítulo III se presentan los casos de estudio en los cuales se pretende ejemplificar los esquemas de control propuestos en el capítulo II. La elección de los ejemplos se justifica en cada caso. En el Capítulo IV se muestra la implementación (mediante simulaciones numéricas) de las estrategias de control predictivo con estimación de incertidumbres a los casos de estudio del capítulo III. Se desarrollan reglas de sintonización para el esquema de control predictivo y para el esquema de control con acción integral explícita. Se discute para todos los esquemas las ventajas y desventajas de algoritmos propuestos. Finalmente en el Capítulo V, se recapitula el material mediante algunas conclusiones y posibles líneas de investigación futuras.

Índice

<i>Prefacio</i>	<i>II</i>
<i>Capítulo I. Introducción</i>	<i>1</i>
<i>I.1 Motivación</i>	<i>1</i>
<i>I.2 Estado del Arte del Control Predictivo</i>	<i>5</i>
<i>I.3 Objetivos</i>	<i>10</i>
<i>Capítulo II. Métodos Teóricos</i>	
<i>II.1 Idea General del Control Predictivo</i>	<i>11</i>
<i>II.2 Formulación Matemática del Problema de Control Predictivo</i>	<i>14</i>
<i>II.3 Esquemas de Control Predictivo con Estimación de Errores de Modelado</i>	<i>16</i>
<i>II.3.1 Reconstrucción de Incertidumbres Basada en un Estimador Discreto</i>	<i>17</i>
<i>II.3.2 Reconstrucción de Incertidumbres Basada en un Estimador Continuo</i>	<i>19</i>

<i>II.4 Control Predictivo con Acción Integral</i>	
<i>Explícita</i>	21
<i>II.5 Revisión de la Estabilidad de la Ley de Control</i>	
<i>Predictivo</i>	23
<i>II.6 Revisión de la Extensión a Sistemas de</i>	
<i>Múltiples Entradas y Salidas</i>	25

Capítulo III. Casos de Estudio

<i>III.1 Reactor Biológico</i>	28
<i>III.2 Reactor Químico</i>	31
<i>III.3 Intercambiador de Calor</i>	32
<i>III.4 Columna de Destilación</i>	34

Capítulo IV. Resultados

<i>IV.1 Requerimientos de Cómputo</i>	
<i>(Hardware y Software)</i>	38
<i>IV.2 Detalles de las Simulaciones</i>	40
<i>IV.3 Sintonización</i>	40
<i>IV.4 Estimación de Incertidumbres</i>	44
<i>IV.4.1 Reconstrucción de Incertidumbres con base</i>	
<i>en un Estimador Discreto</i>	44
<i>IV.4.1-1 Reactor Biológico</i>	44
<i>IV.4.1-2 Reactor Químico</i>	46
<i>IV.4.1-3 Columna de Destilación</i>	48

IV.4.2	<i>Reconstrucción de Incertidumbres Basada en un Observado Continuo</i>	50
IV.5	<i>Control Predictivo con Acción Integral Explícita</i>	53
IV.5.1	<i>Reactor Biológico</i>	54
IV.5.1	<i>Reactor Químico</i>	55
IV.6	<i>Algunas Reflexiones sobre Control Predictivo</i>	56
IV.6.1	<i>Control Predictivo en Sistemas con más entradas que salidas</i>	56
IV.6.1	<i>Comparación del Control Predictivo contra un Controlador Clásico</i>	58
Capítulo V. Conclusiones		
V.1	<i>Logros y Conclusiones</i>	61
V.2	<i>Trabajo Futuro</i>	63
	<i>Bibliografía</i>	64
	<i>Apéndice I. Valores Numéricos de las Constantes Utilizadas en las Simulaciones</i>	68
	<i>Apéndice II. Algoritmo de Optimización Multivariable de Métrica Variable Davidson-Fletcher-Powell</i>	70

Capítulo I

Introducción

Capítulo I. Introducción

En este capítulo se presenta la motivación de esta tesis con base en las necesidades de una creciente industria competitiva y en las deficiencias de los algoritmos de control comercial. Se plantea la necesidad de desarrollar controladores robustos para asegurar un buen desempeño de planta a pesar de la existencia de error de modelado. Además se plantean algunas de las ventajas que brinda el control predictivo dentro del contexto teórico e industrial. Se hace una revisión del estado del arte en control predictivo y con base en ésta se plantean los objetivos de la presente tesis.

I.1 Motivación

El desarrollo industrial de las últimas décadas ha traído consigo mercados más exigentes y competitivos. Actualmente para asegurar la venta de un producto, éste debe cumplir con ciertas normas de calidad pero además, una planta química debe cumplir con otros requerimientos durante su operación, los cuales pueden estar relacionados con la seguridad del personal, con su operación óptima o con la preservación del medio ambiente. A continuación comentamos algunos (Stephanopoulos, 1984):

1. ***Especificaciones del Producto.*** Frecuentemente se requieren productos en una cantidad fija mínima y con una cierta pureza.

2. **Seguridad.** La operación segura de una planta es de los requerimientos más importantes ya que asegura la integridad física de los empleados y una producción ininterrumpida.
3. **Leyes Ambientales.** Las cuales pueden estar impuestas sobre temperaturas, composiciones y flujos de las corrientes de desecho.
4. **Restricciones Impuestas a la Operación de la Planta.** Por ejemplo, el que la temperatura del reactor no exceda cierto límite, para no destruir el catalizador; el que las bombas trabajen con flujos que tengan cierta composición para evitar cavitación, o ruptura de alguna de sus partes.
5. **Restricciones Económicas.** Estas restricciones son generalmente impuestas para asegurar un costo mínimo de operación y un máximo de utilidad.

Para cumplir con estas restricciones es necesario diseñar controladores que garanticen una correcta operación de la planta. De aquí surge el problema técnico de como diseñar tal controlador. Existen tres necesidades que un controlador debe satisfacer:

- *Reducir los efectos de las perturbaciones externas.*
- *Asegurar la estabilidad del proceso.*
- *Optimizar el desempeño del proceso.*

Una de las cualidades más importantes que se buscan en un controlador es su robustez; es decir, que tenga un buen desempeño bajo una gran gama de condiciones de operación (perturbaciones externas). En vista de que el controlador es diseñado basado en un modelo de la planta, también es deseable que tenga un buen desempeño a pesar de incertidumbres paramétricas y dinámica no modelada. Las incertidumbres paramétricas se refieren a las variaciones de los parámetros del modelo de la planta, que ocurren cuando las condiciones de operación cambian. La dinámica no modelada es debida generalmente a la dinámica de los actuadores de control. En la Figura 1 se muestra la esquematización de los factores que afectan el desempeño de un controlador.

Dentro de las estrategias de control cada vez más usadas en procesos químicos y que tienen el potencial de cumplir con los requerimientos anteriores están las de **control predictivo**; las cuales son estrategias discretas que garantizan un control óptimo a cada tiempo t , y hasta un horizonte de control Q , $(u(t), u(t+1), u(t+2), \dots, u(t+Q))^\dagger$. El control predictivo cuenta con varias cualidades que lo hacen una opción de control cada vez más popular (Richalet *et al.* 1993; Ogunnaike, 1994; Deshpande *et al.* 1995):

- Su estructura lo hace versátil para adaptarse a las necesidades de una industria que cambia rápidamente.
- El esquema de control predictivo es de fácil comprensión al personal de la planta.
- Los sistemas de fase no mínima se pueden manejar más fácilmente definiendo un horizonte de predicción mínimo.
- Los tiempos de retardo se manejan explícitamente.
- Las restricciones a los estados y a las variables manipuladas son manejadas explícitamente.
- El cambio de referencia se hace de manera explícita.
- La ley de control predictivo es fácilmente sintonizable y su estructura lo hace versátil para cumplir restricciones de operación.
- Los casos de control de sistemas MEMS (múltiple entrada, múltiple salida) se pueden manejar de manera más simple e independiente.

[†] Vea el Capítulo II, “Métodos Teóricos” de este documento.

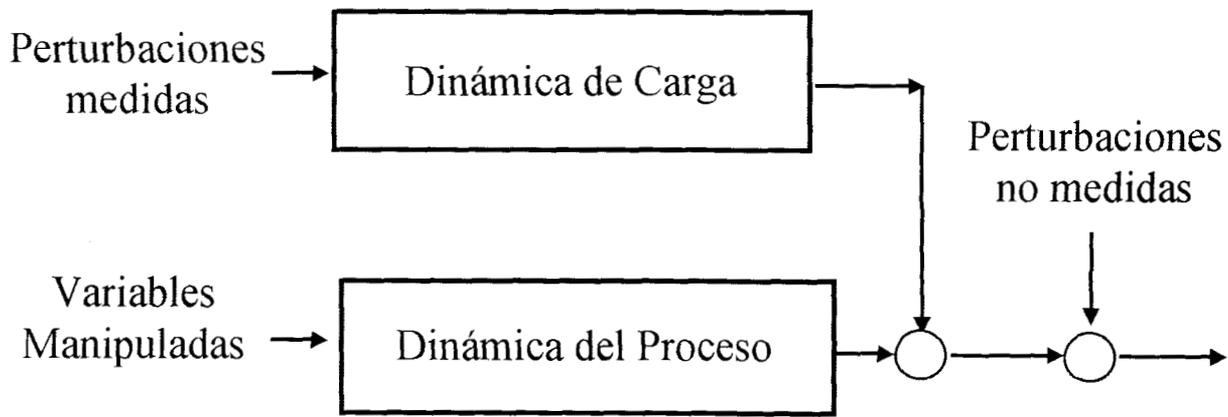


Figura 1. Esquematación de los factores que afectan el desempeño de un controlador.

I.2 Estado del Arte del Control Predictivo

Desde que Newton *et al.* (1957) utilizaron por primera vez una estructura similar al control predictivo, para calcular un control óptimo de norma \mathcal{H}_2 , la idea ha sido ampliamente difundida. Sin embargo, fue hasta finales de los setentas cuando el control predictivo se conoció como tal.

Richalet (1978) da a conocer lo que él llamó “*Model Predictive Heuristic Control*”, nombre que utilizó para denominar el control óptimo que minimizaba cierto índice de desempeño sujeto a la dinámica de un sistema lineal estable. Cutler y Ramaker (1979) minimizaron este índice de desempeño sujeto a la dinámica de entrada-salida de un sistema estable. Esta última es producto de la caracterización del sistema a partir de una perturbación en escalón de la entrada. A esta estrategia se le denominó *Dynamic Matrix Control (DMC)*.

Actualmente existe gran cantidad de algoritmos de control predictivo: **MAC** (*Model Algorithmic Control*), **IdCom** (*Identification and Command*), **GMAXC** (*Goal Maximizing Controller*), **GPC** (*Generalized Predictive Control*). No fue sino hasta 1982 que García y Morari mostraron por primera vez que estos algoritmos eran estructuralmente similares[†].

Existen varias aplicaciones experimentales e industriales del control predictivo reportadas en la literatura (Banerjee y Shah, 1995; Norquay *et al.* 1997). Por otra parte, Richalet (1993) muestra la implementación de un esquema de control predictivo en dos aplicaciones industriales: una columna de destilación y una torre mecánica (*follow-up servo turret*). Ambas aplicaciones muestran resultados favorables aún cuando los controladores están basados en modelos lineales y existen incertidumbres paramétricas y de modelado. Ogunnaike (1994) trata el problema de desarrollo e implementación de un esquema de

[†] Todos estos algoritmos minimizan una función de desempeño sujeta a restricciones, las variaciones de uno a otro pueden estar en el tipo de modelo dinámico que utilizan y/o en la estructura de la función objetivo.

control predictivo en un reactor de polimerización. El sistema cuenta con varios estados que no son accesibles mediante medición y se hace uso de estimadores de estados para calcular la ley de control. El autor señala las bondades del uso del esquema de control predictivo en este tipo de sistemas, en los que las mediciones de las salidas son obtenidas con sensible diferencia (15min y 2hrs).

El problema del desarrollo de controladores predictivos robustos ante perturbaciones externas, paramétricas y de modelado es un problema de importancia práctica y que requiere de investigación, además de la comprensión de todos los factores que están involucrados. Sistu y Bequette (1991) muestran un esquema de estimación de incertidumbres en línea basado en un observador a lazo abierto, para un sistema de fase mínima y que no presenta ruido de medición. A pesar de que los autores presentan mediante simulaciones numéricas que funciona, no recomiendan su aplicación práctica. Vuthandam *et al.* (1995) presentan un esquema de estimación de perturbaciones en línea para un sistema con igual número de entradas y salidas, para un algoritmo de control que está sujeto a restricciones. Dentro de estas restricciones está la de condición final[§], la cual tiene un efecto estabilizante según sus resultados. El autor establece condiciones suficientes para la estabilidad del sistema a lazo cerrado. Sarimveis *et al.* (1996) utilizan el mismo esquema de estimación para sistemas con más entradas que salidas. La solución se propone en términos de las soluciones a dos problemas de optimización, uno para el control y otro para su sintonización. Estos esquemas (Vuthandam *et al.*, 1995; Sarimveis *et al.* 1996) son desarrollados exclusivamente para plantas estables.

Por otro lado, Hrissagis *et al.* (1996) presentan un algoritmo de control sin restricciones para el cual el desempeño nominal se garantiza aún cuando existen diferencias entre la planta real y el modelo de referencia. La estrategia está basada en la parametrización de Youla de la ley de control, para la cual se conocen lineamientos de sintonización (Yoon y Clarke, 1995). El algoritmo es aplicable tanto a plantas estables como inestables pero tiene la desventaja de que ni la robustez, ni la estabilidad de la ley de control se aseguran cuando el control está acotado. La estabilidad de la ley de control predictivo es un tema que ha

[§] $x(M) = x_{ref}$ para $M \geq m$ (m =horizonte de control).

sido objeto de múltiples estudios en los últimos años, sin embargo los resultados obtenidos son meramente parciales. Existen varios trabajos que tratan la estabilidad de estos algoritmos cuando son producto de un problema sin restricciones, para sistemas lineales (Kouvaritakis *et al.* 1992; Vuthandam *et al.* 1995) y para sistemas no lineales (Keerthi *et al.* 1988; Sistu y Bequette, 1996). No obstante, éstos sólo establecen condiciones suficientes de estabilidad nominal del sistema a lazo cerrado. No existen resultados sobre la estabilidad robusta de la ley de control predictivo.

El problema de la estabilidad nominal y robusta del problema de control predictivo con restricciones (duras) es actualmente un problema abierto. Además, se requiere de algoritmos más rápidos y computacionalmente eficientes para solucionar el problema de optimización con restricciones y así hacer posible su aplicación industrial. En el marco del problema de control predictivo con restricciones; de Oliveira y Biegler (1994) presentan condiciones de estabilidad nominal suficientes para un sistema lineal estable. Dentro de sus resultados muestran que la existencia de ciertas restricciones activas puede provocar que el sistema a lazo cerrado sea inestable, independientemente del valor que tengan los parámetros de sintonización.

El sintonizado del control que asegure un desempeño robusto de la planta es uno de los temas esenciales en la implementación de la ley de control predictiva. Sin embargo, aunque existe gran cantidad de literatura sobre el tema, la sintonización de estos esquemas sigue siendo con base en un procedimiento de prueba y error. Banerjee y Shah (1995) examinan el papel de los métodos de procesamiento de señales en el diseño de controles predictivos robustos. Dentro de sus resultados presentan un análisis del efecto de los parámetros más importantes de sintonizado sobre la estabilidad del control predictivo: horizonte de control, horizonte de predicción, costo de control y del modelo utilizado para calcular la ley de control. Sin embargo, no presentan un esquema claro de sintonizado.

McIntosh *et al.* (1991), presentan tres esquemas de sintonizado de **GPC** (*Generalized Predictive Control*). La sintonización propuesta es realizada fuera de línea. Los autores proponen sintonizar sólo un parámetro y fijar todos los demás, con el fin de disminuir los

grados de libertad en el sintonizado del control. Estos parámetros de sintonización son el horizonte de predicción y el costo de control, y afectan directamente la robustez y el desempeño del sistema a lazo cerrado. Se muestra mediante simulaciones numéricas que el esquema en donde se sintoniza el horizonte de control produce un buen desempeño aún en plantas inestables, pero presupone un costo de control nulo. La sintonización del costo de control no tiene un buen desempeño en plantas inestables.

Lee y Yu (1994), presentan lineamientos de sintonización de **GPC** en línea y fuera de línea (*in-line/ off-line*). El esquema de sintonizado fuera de línea presupone un costo de control nulo y la elección del horizonte de control igual al horizonte de predicción. Los horizontes se escogen tan grandes como sea posible (computacionalmente). El esquema de sintonizado en línea se basa en el conocimiento *a priori* de los valores de la función de sensibilidad complementaria, lo cual resulta en algunos casos no factible, además tiene la desventaja de contar con un número grande de parámetros a sintonizar. Los autores muestran que los lineamientos de sintonización propuestos por ellos pueden no ser recomendables para sistemas mal condicionados.

Rani y Unbehauen (1997) presentan reglas de sintonización de algunos de los algoritmos de control predictivo que se encuentran en la literatura (Clarke *et al.* 1987; Clarke y Mohtadi, 1989; Banerjee y Shah, 1992; McIntosh *et al.* 1991). Los autores presentan tablas de valores óptimos de sintonización con base en la minimización de una función de desempeño cuadrática. Sin embargo, los valores de la función objetivo pueden no reflejar en algunos casos el “*buen o mal*” desempeño del controlador, debido a que la función objetivo es un medidor del desempeño promedio del sistema. Con base en la revisión anterior es posible establecer de manera resumida, varios temas de control predictivo que requieren de mayor investigación.

En sistema lineales se requiere,

1. Procedimientos de diseño que garanticen un desempeño robusto de sistemas perturbados paramétricamente y con errores de modelado (incertidumbres).

2. Procedimientos de sintonizado que garanticen desempeño robusto de sistemas MEMS mal condicionados.
3. Estrategias que garanticen buen desempeño a pesar de incertidumbres y perturbaciones; además de profundizar en la comprensión de los factores que están involucrados.

En problemas restringidos se requiere,

1. Mayor investigación sobre los algoritmos de optimización a fin de hacerlos más eficientes y rápidos. Esto haría viable su implementación en línea en la industria.
2. Procedimientos de diseño que garanticen un desempeño robusto de sistemas perturbados paramétricamente y con errores de modelado (incertidumbres). Además de investigación sobre la estabilidad nominal y robusta de estos algoritmos.

En sistemas no lineales se requiere,

1. Investigación sobre la estabilidad y el desempeño nominal y robusto de estos sistemas.
2. Estrategias que garanticen buen desempeño a pesar de incertidumbres y perturbaciones.

En sistemas no lineales con restricciones se requiere,

1. Investigación sobre la estabilidad y el desempeño nominal y robusto de estos sistemas.
2. Estrategias que garanticen buen desempeño a pesar de incertidumbres y perturbaciones.

1.3 Objetivos

Como se ha expresado anteriormente, existe mucho por hacer en el campo del control predictivo. Sin embargo, no es tema de esta tesis abordar la solución de todos los problemas expuestos en la sección anterior, sino realizar en la medida de lo posible, algunas aportaciones en el rubro del control predictivo con estimación del error de modelado (incertidumbres). Con este fin, se proponen los siguientes objetivos generales de esta tesis.

- a) *Desarrollar esquemas de control predictivo que incluyan estimación de incertidumbres para sistemas de una entrada y una salida. Con esto se pretende robustecer el algoritmo de control, de manera que se pueda obtener un buen desempeño del control a pesar de errores de modelado.*
- b) *Desarrollar reglas de sintonizado a partir de procedimientos sistemáticos que aseguren el desempeño nominal y robusto del sistema a lazo cerrado. El desarrollo de tales reglas de sintonizado haría factible su aplicación directa, tanto en el ámbito industrial como a escala piloto.*
- c) *Extender los esquemas de control con estimación de incertidumbres a sistemas múltiple entrada y múltiple salida (MEMS). Además de discutir acerca de las posibles limitantes y consideraciones adicionales derivadas de tal extensión.*
- d) *Ejemplificar el procedimiento de diseño de control en reactores agitados, intercambiadores de calor y columnas de destilación, estas últimas asociadas a un problema de control mal condicionado; y mostrar que la aplicación del controlador es factible en todos estos casos.*

Capítulo II

Métodos Teóricos

Capítulo II. Métodos Teóricos

En este capítulo se presentan los métodos teóricos utilizados en el desarrollo de algoritmos de control predictivo que incluyen estimación de incertidumbres. Se explica la idea general de control predictivo y se presenta el planteamiento del problema matemático. Se proponen dos estrategias de estimación de incertidumbres: una basada en un estimador discreto y otra en un estimador continuo. La proposición de tales estrategias depende del grado relativo del sistema. Se hace observar que la estimación de incertidumbres inserta una acción integral en el algoritmo de control y se desarrolla un esquema que incluye una acción integral explícita en la función objetivo. Se presenta un análisis sobre la estabilidad de los algoritmos de control y se hace observar que los algoritmos desarrollados para UEUS, pueden ser extendidos a sistemas MEMS haciendo consideraciones menores.

II.1 Idea General del Control Predictivo

El control predictivo es de naturaleza discreta en tiempo (sistemas muestreados) y tiene como objetivo encontrar entradas de control $u(t), u(t+1), \dots, u(t+Q)$, basado en valores de salida en función del tiempo t (mediciones), $y(t)$ y anteriores $y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n)$ y en entradas anteriores a t , $u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n)$. Es decir, el objetivo es encontrar la función que se muestra a continuación,

$$u(t+i) = f(u(t+i-1), u(t+i-2), \dots, y(t+i), y(t+i-1), y(t+i-2), \dots) \quad (2.1)$$

La idea general de este control puede verse esquematizada en la Figura 2. Para obtener la funcionalidad de $u(t+i)$ según la ecuación (2.1), se resuelve un problema de optimización a cada tiempo de muestreo t . En éste, se minimiza un índice de desempeño sujeto a la dinámica del proceso y a las limitaciones del controlador.

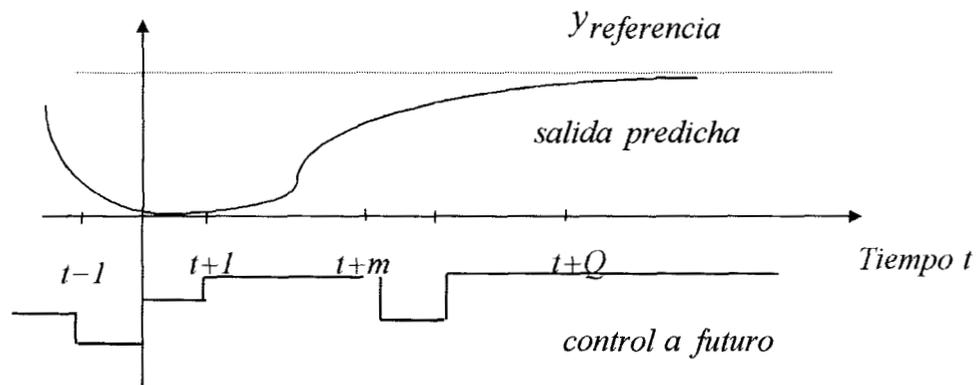


Figura 2. Esquematización de la idea central del control predictivo.

En general la estrategia de control predictivo tiene las siguientes características:

- a) La entrada de control es retroalimentada.
- b) Sólo se aplica la entrada de control $u(t)$ y las demás $\{u(t+1), u(t+2) \dots u(t+Q)\}$ se desechan. Esto permite tomar en cuenta perturbaciones futuras (cambios de set-point) más allá del tiempo de muestreo.
- c) Es de naturaleza recursiva. Esto es, la entrada de control $u(t)$ depende de entradas anteriores y en algunos casos la funcionalidad de la ecuación (2.1) puede obtenerse explícitamente (Clarke, *et al.* 1987 McIntosh *et al.* 1991).

II.2 Formulación Matemática del Problema de Control Predictivo.

Como se expresó anteriormente, la entrada de control predictivo es la solución de un problema de optimización, en el cual se minimiza una función objetivo sujeta a las restricciones de la dinámica del sistema y a las limitaciones del actuador de control. En el problema estándar de control predictivo la función objetivo es cuadrática y consta de dos partes principales, una en la que se penalizan los movimientos de control y otra en la que se penaliza la desviación de la referencia. La idea de usar un criterio cuadrático es heredado de la teoría de control LQR (Goodwin y Sin, 1984), donde se tiene la ventaja de que el problema de optimización resultante en muchos casos (y en particular, en sistemas lineales) es un problema convexo. Sin embargo, el planteamiento de control predictivo permite funciones objetivos no cuadráticas. La formulación matemática que se muestra a continuación se restringe al caso en donde existe sólo una entrada y una salida de control. Además debido a que la mayoría de los sistemas en ingeniería química son no lineales, la discusión en la presente tesis se refiere sólo a ellos, a menos que se diga explícitamente lo contrario.

La formulación matemática del problema estándar de control predictivo es la siguiente:

$$\min_{u(k) \dots u(k+Q-1)} J(u) = \sum_{i=k}^{k+P} \gamma (y(i) - y^*(i))^2 + \sum_{i=k}^{k+Q} \lambda (u(i) - u(i-1))^2 \quad (2.2)$$

Sujeto a las restricciones:

$$\frac{dx}{dt} = f'(x, u) \quad (2.3)$$

$$y = g(x) \quad (2.4)$$

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (2.5)$$

$$u(i) = u(k + Q - 1) \quad \forall \quad i > k + Q - 1 \quad (2.6)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$; $u \in \mathfrak{R}$; $y \in \mathfrak{R}$ son los estados del sistema, la entrada de control y la salida regulada, respectivamente. λ es el costo de control, γ es el costo asociado con el error de seguimiento de la salida, Q y P son los horizontes de control y predicción, respectivamente. Finalmente, $y(i)$ es la salida predicha a tiempo i y $u(i)$ es la entrada calculada a tiempo i .

La función objetivo (ecuación (2.2)), penaliza los movimientos del control mediante la asignación de un costo de control λ . En tanto mayor es el costo de control, menores y más lentas son las acciones de control. La rapidez con que la salida converge a la referencia se contabiliza con el valor del peso del error de seguimiento.

Se asume que el sistema (2.3), (2.4) tiene solución dadas ciertas condiciones iniciales y entradas de control $u(t)$. La representación discreta de las ecuaciones (2.3) y (2.4) está dada por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia:

$$x(k+1) = F'(x(k), u(k))$$

$$y(k) = G'(x(k))$$

La representación discreta correcta del sistema continuo (2.3) y (2.4) deberá ser aquella en la que el grado relativo del sistema discreto sea igual al del original, según lo advierten Sistu y Bequette (1996). Los mencionados autores encontraron que para algunas técnicas de discretización, el grado relativo del sistema no siempre se mantiene*. La discretización (2.3) y (2.4), la cual conforma el sistema de predicción de salidas futuras, $\{y(k), y(k+1)... y(k+P)\}$, puede realizarse en forma exacta para sistemas lineales mediante su transformación al dominio-z o en forma aproximada para sistemas no lineales mediante métodos de integración adecuados (*i.e.* Runge-Kutta)

II.3 Esquemas de Control Predictivo con Estimación de Errores de Modelado

En esta sección se describirán algunos procedimientos para estimar errores de modelado (incertidumbres) en sistemas de una entrada y una salida. Además, se mostrará como acoplar tales procedimientos de estimación al algoritmo estándar de control predictivo con el fin de obtener predicciones de la salida que sean más cercanas a la realidad. En esta forma, se intenta introducir cierta capacidad adaptiva en la ley de control.

* El grado relativo de un sistema continuo se relaciona con el número de veces que se necesita derivar la salida para que aparezca el control explícitamente; mientras que en sistemas discretos esta definición se puede interpretar como el número de mediciones "r" después de las cuales la presente entrada $u(k)$, afecta la salida $y(k+r)$. Matemáticamente esta definición se puede ver como sigue (Goodwin y Sin, 1984)

$$r = \left\{ \min(j) \left[\frac{\partial G'}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial F'(x, u)}{\partial x} \right]^{j-1} \left[\frac{\partial F'(x, u)}{\partial u} \right] \neq 0 \right\}$$

II.3.1 *Reconstrucción de Incertidumbres Basada en un Estimador Discreto*

Debido a que en general, existen diferencias entre el modelo de la planta y la planta real, es necesario estimar tales diferencias (incertidumbres) para robustecer la ley de control. En un sistema de grado relativo uno, tanto la entrada de control como las incertidumbres afectan directamente a la salida. Esta cualidad puede aprovecharse para proponer una funcionalidad explícita de las incertidumbres y reconstruirlas a partir de mediciones de la salida. Para ello se parte de un modelo de la planta de siguiente forma:

$$x(k+1) = F(x(k), u(k), I(k)) \quad (2.7)$$

$$y(k) = G(x(k)) \quad (2.8)$$

Las incertidumbres se aglomeran en el término $I(k)$, sin embargo según la ecuación (2.7), éstas pueden no aparecer explícitamente. El esquema de estimación de incertidumbres que se presenta a continuación presupone incertidumbre aditiva, es decir, existe siempre una función $I(k)$ tal que al sumarla al modelo de la planta, se obtiene la planta real. La incertidumbre se considera acotada debido a que el comportamiento a lazo cerrado del sistema debe ser estable. La estimación se lleva al cabo cada vez que la medición de la salida está disponible. La incertidumbre se supone constante a lo largo del periodo de predicción. Así, si el modelo del sistema puede verse como sigue,

$$y(k+i) = W(u(k+i-1), u(k+i-2), \dots, y(k+i-1), \dots) + I(k+i) \quad (2.9)$$

entonces, el término de incertidumbre tiene la siguiente forma:

$$I(k+i) = y(k+i) - W(u(k+i-1), u(k+i-2), \dots, y(k+i-1), \dots) \quad (2.10)$$

Según la ecuación (2.10), la estimación de la incertidumbre es no causal pues depende de una medición futura de la salida que no es disponible. Sin embargo, si el tiempo de

muestreo es lo suficientemente pequeño, el término que involucra la incertidumbre permanecerá casi constante entre dos medidas consecutivas. Es decir, puede hacerse la siguiente aproximación

$$I(k+i) \approx I(k+i-1) = y(k+i-1) - W(u(k-1), u(k-2), \dots, y(k-1) \dots) \quad (2.11)$$

Ahora se tiene una estimación causal pues la incertidumbre depende de mediciones de salida presentes y pasadas, así como de entradas de control pasadas. Sin embargo, la aproximación de la ecuación (2.11) implica la suposición de que la incertidumbre no sólo sea acotada entre cada intervalo de muestreo, sino que también lo sea su derivada (Vuthandam, *et al.*, 1995).

Como se expresó anteriormente, la aproximación de la ecuación (2.11) será mejor en cuanto más pequeño sea el tiempo de muestreo, sin embargo éste no puede ser más pequeño que cierto valor τ_+ debido principalmente a que pueden ser contaminadas por ruido de medición. Observe que debido a la manera en que la incertidumbre es representada en el modelo de la planta, ésta abarca no sólo incertidumbres paramétricas y de modelado, sino también puede contener perturbaciones externas. Esta idea fue propuesta para sistemas lineales por Genceli y Nikolaou (1993).

II.3-1 *Reconstrucción de Incertidumbres Basada en un Estimador Continuo*

Cuando el sistema a controlar es de orden relativo mayor a uno, el esquema de estimación de incertidumbres expuesto en la sección anterior no es aplicable ya que se requieren medidas de derivadas de la salida hasta un orden igual al grado relativo de la planta. Sin embargo, para casos donde la planta es (total o parcialmente) linealizable por retroalimentación, es posible desarrollar un estimador de incertidumbres basado observadores lineales que además provea un estimado de las derivadas de la salida. Las incertidumbres paramétricas y de modelado se aglomeran en un término que se puede definir como un estado virtual del sistema y pueden ser estimadas por un observador construido a partir de un modelo continuo de la planta. La estimación se realiza cada vez que las mediciones de la salida están disponibles.

En muchos procesos químicos se dispone solo de un modelo lineal de la planta. Si se supone que la planta es de fase mínima y de grado relativo n , el modelo entrada-salida de la planta puede expresarse en la siguiente forma canónica (Isidori, 1989).

$$\begin{aligned}
 y_m &= z_1 \\
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= \sum_{j=1}^n a_j z_j + bu + \phi(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Note que z_i corresponde con la i -ésima derivada de la salida medida. Además las incertidumbres (entrada-salida) han sido aglutinadas en el término $\phi(t)$, que es en general de forma complicada y desconocida, e incorpora incertidumbres tales como no linealidades del sistema y perturbaciones paramétricas. Con el fin de reconstruir las incertidumbres, se

define el término $\phi(t)$, como un estado virtual del sistema y dada la propiedad de observabilidad del sistema (2.12) (Kailath, 1980) es posible reconstruir las dinámicas de los estados no medidos y de la incertidumbre a partir de mediciones de la salida utilizando por ejemplo un observador tipo Luenberger. El sistema extendido en la forma de observador se muestra en la siguiente ecuación (Femat, 1997):

$$\begin{aligned}
 y &= \hat{z}_1 \\
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + g_1(y_m - y) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{z}}_n &= \sum_{j=1}^n a_j \hat{z}_j + bu + \hat{z}_{n+1} + g_n(y_m - y) \\
 \dot{\hat{z}}_{n+1} &= + g_{n+1}(y_m - y)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Donde \hat{z}_j , $n \geq j \geq 1$ son estimados de z_j , $n \geq j \geq 1$ y $\hat{z}_{n+1}(t)$ es un estimado de $\phi(t)$. Si se definen los errores de estimación como $e_j = z_j - \hat{z}_j$, $n \geq j \geq 1$ y $e_{n+1} = \phi - \hat{z}_{n+1}$, entonces no es difícil ver que las ganancias g_i , $n \geq j \geq 1$, se deben escoger de manera tal que el polinomio $s^{n+1} + g_{n+1}s^n + \dots + g_1 = 0$ sea Hurwitz.

Es posible mostrar que conforme el error de observación de la salida ($y_m - y$) tiende a cero, el nuevo estado del sistema extendido z_{n+1} tiende asintóticamente a $\phi(t)^\dagger$ (Femat, 1997). Esto es, conforme el error de observación de la salida se aproxima a cero, el modelo de la planta se aproxima a la planta real. La estimación de la incertidumbre induce una acción integral en el lazo de control (García, et al., 1989), la cual en el marco de control clásico (Stephanopoulos, 1980), es utilizada para dar mayor robustez al lazo de control.

[†] En efecto, las ganancias g_i 's del observador deben escogerse de forma tal que las raíces del anterior polinomio estén localizadas lo más profundo en el lado izquierdo del plano complejo (high-gain observer).

Sin embargo, como se verá más adelante, el uso de estados estimados en vez de los estados reales puede repercutir en el deterioro de la respuesta transitoria del sistema. En el Capítulo IV se ilustrará el efecto de la variación de la ganancia de observación en el desempeño del sistema a lazo cerrado.

II.4 Control Predictivo con Acción Integral Explícita

Se sabe que una ley de control con retroalimentación puramente proporcional es capaz de estabilizar un sistema. Sin embargo, algunos problemas de estabilidad y/o desempeño pueden aparecer en la presencia de incertidumbres. Una idea tradicional es incluir acciones de control tipo integral para inducir mayores márgenes de estabilidad en el lazo de control. En particular, una acción de control del tipo integral es capaz de eliminar offset en la salida regulada. En la sección anterior se expresó que la estimación de incertidumbres induce una acción integral en el lazo de control. En esta sección se mostrará como incluir el desarrollo de un esquema de control predictivo que incluya *explícitamente* una acción integral en la ley de control.

La función objetivo del esquema de control predictivo que se presenta a continuación consta de tres terminos principales y que determinan el desempeño a lazo cerrado. Un primer término que penaliza el error de seguimiento; otro término que penaliza los movimientos de control y un último término en el que penaliza el error integral de regulación. El estado w es la integral del error de seguimiento ($dw/dt = y - y_{ref} :=$ acción integral).

$$\min_{u(k) \dots u(k+Q-1)} J(u) = \sum_{i=k}^{k+P} \gamma (y(i) - y^*(i))^2 + \sum_{i=k}^{k+Q} \lambda (u(i) - u(i-1))^2 + \sum_{i=k}^{k+P} \lambda_{in} w(i)^2 \quad (2.14)$$

Sujeto a:

$$w(k+1) = H(y(k), y_{ref}(k), w(k)) \quad (2.15)$$

$$x(k+1) = F(x(k), u(k)) \quad (2.16)$$

El problema de control está sujeto además a las restricciones del actuador (ecuaciones (2.5) y (2.6)). $x \in \mathfrak{R}^n$; $u \in \mathfrak{R}$; $y \in \mathfrak{R}$ son los estados del sistema, la entrada de control y la salida regulada, respectivamente. λ es el costo de control, γ es el costo asociado con el error de seguimiento de la salida, Q y P son los horizontes de control y predicción, respectivamente.

La acción integral es moderada por la que denomino arbitrariamente como ganancia integral (λ_{int}), por estar ligada al término de acción integral. Sin embargo, tiene un significado muy distinto de lo que la ganancia integral (K_I) tiene en el marco de control clásico (PI). Si el término que involucra la acción integral en la ecuación (2.14), se interpretase como la incorporación de una restricción activa sobre la integral del error de seguimiento, entonces la ganancia integral es un parámetro que regula que “tan activa” es la restricción. Es decir, cuando $\lambda_{int} \rightarrow \infty$ esta restricción se cumple incondicionalmente, mientras que si $\lambda_{int} = 0$ no existe tal restricción.

Es bien conocido que la inclusión de restricciones activas produce mayor complejidad del problema de control; además, según lo muestra de Oliviera y Biegler (1987), la ley de control resultante puede ser inestable en algunos casos. La inestabilidad del problema con restricciones se deriva de que la nueva ley de control involucra algunos términos relacionados con comportamiento de la planta a lazo abierto. Así, es posible prever un problema de estabilidad en plantas inestables a lazo abierto. Es necesario entonces, delimitar los casos en los que esta restricción integral robustifica la ley de control predictivo y en tales casos, mostrar lineamientos para la sintonización de la ganancia integral.

II.5 Revisión de la Estabilidad de la Ley de Control Predictivo

La estabilidad del esquema de control predictivo (ecuaciones (2.2)-(2.6)), es un tema de suma importancia y sujeto todavía a investigación. A pesar de que es posible asegurar estabilidad nominal de sistemas estables a lazo abierto y sin restricciones; existen muchas incógnitas acerca de la estabilidad robusta de este problema y acerca de la estabilidad del problema con restricciones.

Dentro del contexto de reguladores cuadráticos lineales (*linear quadratic regulators*) la estabilidad se asegura al imponer un horizonte infinito de predicción y un peso del error de seguimiento moderado (Sistu y Bequette, 1996). Kwon y Pearson (1978) muestran que un sistema lineal puede ser siempre estabilizado minimizando un índice de desempeño siempre y cuando se cumpla una restricción de estado final ($x(K+M) = x_{ref}$) para M mayor o igual al orden del sistema. En general, esta restricción es demasiado fuerte como para cumplirse en la mayoría de los sistemas prácticos.

Chen y Shaw (1982) utilizan la misma restricción para mostrar que un sistema no lineal puede ser estabilizado por el esquema **RHC** (*Receding Horizon Control*). Este esquema tiene fuertes desventajas ya que la estabilidad no puede ser garantizada prácticamente pues presupone un horizonte de predicción infinito y la satisfacción exacta de la restricción sobre el estado final, además de un perfecto conocimiento de la planta. De Oliviera y Biegler (1995) prueban que la estabilidad nominal de un sistema a lazo cerrado puede ser siempre alcanzado para el caso de plantas estables, si el tiempo de muestreo es lo suficientemente grande. Los mencionados autores suponen la medición de todos los estados y no proporcionan guías para escoger el tiempo de muestreo.

Sistu y Bequette (1996) estudian la estabilidad nominal de sistemas no lineales discretos sin restricciones utilizando regiones de atracción, calculadas bajo el principio de mapeo contractivo (*contraction mapping approach*) y el método directo de Lyapunov. Bajo la primera estrategia, la estabilidad se proclama suficiente sólo en el caso de sistemas lineales, ya que se puede probar que el radio espectral es un escalar (o matriz), mientras que en

sistemas no lineales este radio es función de los estados del sistema y por ello no se puede concluir nada sobre la estabilidad del sistema. Por otro lado, el enfoque de Lyapunov puede ser exhaustivo debido a la dificultad que representa encontrar las funciones de estabilidad. Ambas estrategias tienen la ventaja de que no requieren restricciones de estado final.

De Oliveria y Biegler (1994) estudian la estabilidad a lazo cerrado de sistemas lineales cuando existen saturaciones en las entradas y las salidas del sistema. Ellos prueban que para algunos casos la introducción de restricciones (cuyo efecto en la ley de control es el aumento de términos) puede provocar inestabilidades. Además muestran que un esquema con restricciones suaves puede reproducir los resultados del esquema con restricciones duras, cuando se utilizan parámetros de penalización muy grandes. La metodología que utilizan para probar la estabilidad del sistema tiene la desventaja de que no se puede aplicar a sistemas no lineales ya que presupone una ley de control lineal.

La estabilidad nominal de los esquemas de control con estimación de incertidumbres presentados en esta tesis, puede ser garantizada utilizando la metodología utilizada por Sistu y Bequette (1996) al encontrar una función de Lyapunov que cumpla con las restricciones de estabilidad. Utilizando el enfoque de Oliveria y Biegler (1994), la estabilidad nominal del esquema con acción integral puede probarse pero sólo para sistemas lineales, al interpretar al término integral de la función objetivo como una restricción dura sobre la salida del sistema, en donde el multiplicador de Lagrange es la ganancia integral.

II.6 Revisión de la Extensión a Sistemas de Múltiples Entradas y Salidas

La extensión de la ley de control predictivo a sistemas de múltiple entradas y múltiple salidas (*MEMS*), es directa en el caso del problema estándar de control predictivo (ecuaciones (2.2)-(2.6)), al hacer γ y λ matrices diagonales (y positivas) de dimensiones apropiadas, e introduciendo los vectores de salida $y \in \mathcal{R}^m$, y de entrada $u \in \mathcal{R}^l$, $u_{min} \in \mathcal{R}^l$, $u_{max} \in \mathcal{R}^l$. Los grados de libertad de sintonización se extienden a $2(\#_{entradas} + \#_{salidas})$, estos parámetros se escogen de manera similar al caso UEUS, como se verá en las Secciones IV.3 y IV.6. La sintonización de este esquema no representa mayores complicaciones como en el caso de controladores clásicos, singularidad que lo hace recomendable para estos casos.

La extensión al caso de sistemas de múltiples entradas y salidas del esquema de estimación de incertidumbres basado en un observador continuo (ecuaciones (2.12)-(2.13)) se produce al definir un nuevo sistema extendido de orden $2n+m$, a partir del original[‡]. La derivada de los nuevos estados es la desviación de la salida *i-ésima* con respecto a su referencia.

El sistema es observable si, la matriz de observabilidad[§] $\mathcal{O}(A,C)$ es de rango completo. El sistema extendido tiene la forma que se muestra en la ecuación (2.17). Las ganancias de observación se escogen de manera tal que el polinomio característico asociado sea Hurwitz.

$$\dot{z} = Az + Bu + ge \quad (2.17)$$

[‡] Donde m es el número de salidas y n el orden del sistema original.

[§] Si el modelo del sistema puede verse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ y &= Cz \end{aligned}$$

donde,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & A_2 \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \dots & A_m \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \dots & a_{in} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & B_2 \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \dots & B_m \end{bmatrix} \quad \text{donde } B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} g_{1,1} \dots & g_{1,n+1} \\ \vdots & \\ g_{m,1} \dots & g_{m,n+1} \end{bmatrix} \quad e^T = \begin{bmatrix} y_{med,1} - y_1 \\ \vdots \\ y_{med,m} - y_m \end{bmatrix}$$

Cabe señalar que tal esquema de control MEMS, presupone la representación de incertidumbres de la ecuación (2.12), es decir, en el modelo (y por ello en la planta) es posible representar la interacción de cada entrada-salida de forma independiente mediante una retroalimentación de estados. Esto es, existe una incertidumbre asociada a una sola y a cada medida. Una forma donde esta restricción es posible, es representando al sistema MEMS como muchos modelos UEUS. Maciejowski (1989) muestra que tal representación es posible para plantas lineales, al transformar la matriz de transferencia entrada-salida, a la representación canónica de Smith-McMillan, y presenta la metodología a seguir.

En el caso de la ley de control con acción integral (ecuaciones (2.14)-(2.16)), la extensión a MEMS es inmediata al hacer γ , λ , y λ_{in} matrices diagonales (positiva-definidas) de dimensiones apropiadas e introduciendo los vectores $y \in \mathfrak{R}^m$, $u \in \mathfrak{R}^l$, $u_{min} \in \mathfrak{R}^l$, $u_{max} \in \mathfrak{R}^l$.

La acción integral se logra introduciendo al sistema original, un número de estados integrales igual al número de salidas. La derivada de estos estados es precisamente el error de seguimiento ($y-y_{ref}$). Los grados de libertad de sintonización se extienden a ($2\#_{entradas} + 3\#_{salidas}$). Tales parámetros se escogen de manera similar al caso de plantas de una entrada y una salida, como se verá en las Secciones IV.3 y IV.6. Esta sintonización no representa mayores complicaciones como en el caso de controladores clásicos, singularidad que hace recomendable al control predictivo para estos sistemas. La estabilidad del control resultante se puede probar por el mismo procedimiento utilizado para el caso de sistemas de una entrada y una salida, para los esquemas de estimación de incertidumbres (Sistu y Bequette, 1996), mientras que para el caso del algoritmo con acción integral, el análisis se restringe solo para el caso lineal, de manera similar a lo propuesto por de Oliviera y Biegler, (1994).

La implementación de los algoritmos para sistemas de múltiple entradas y salidas presupone dificultades de tipo computacional. En general, la ley de control multivariable requerirá más tiempo y esfuerzo de cómputo (asociado por ejemplo al cálculo de matrices inversas, jacobiano, hessiano) que para el caso de plantas de una entrada y una salida. De aquí que exista la necesidad de mayor investigación para el desarrollo de algoritmos (de integración-optimización) más rápidos y eficientes.

Capítulo III

Casos de Estudio

Capítulo III. Casos de Estudio

En este capítulo se presentan cuatro casos de estudio que representan algunos de los procesos químicos más comunes en las plantas industriales y en los que se pretende ejemplificar la ley de control predictivo con estimación de incertidumbres (véase el Capítulo II). Los casos son los siguientes: un reactor químico, un reactor biológico, una torre de destilación y un intercambiador de calor. Estos ejemplos ilustran sistemas inestables y estables de una entrada y una salida, así como sistemas estables de múltiples entradas y salidas.

III.1 Reactor Biológico

Actualmente, los reactores biológicos juegan un papel muy importante en diversas áreas de producción a pequeña y gran escalas. Dentro de éstas se encuentran las industrias alimenticia, farmacéutica, de síntesis de compuestos orgánicos y de tratamiento de aguas residuales. Esto es debido principalmente a las ventajas tecnológicas, económicas y ambientales que representa el empleo de biotecnología en los esquemas de reacción que permitan obtener una mayor eficiencia de producción. Existen diseños de biorreactores que operan bajo diferentes regímenes como son por lotes, en forma continua y recientemente por lote alimentado. Este último tiene gran aplicación en la industria farmacéutica por el alto valor agregado de sus productos. Sin embargo, la dinámica de los reactores biológicos es muy compleja y sensible a perturbaciones y dinámicas de estructura desconocida que pueden impedir su operación estable (en las condiciones de interés para cada caso). Para evitar esto, es necesario aplicar una ley de control que regule la salida del biorreactor a pesar de estas perturbaciones y dinámicas de estructura desconocida.

Anteriormente las condiciones deseadas de operación se lograban aceptablemente con los métodos tradicionales de control como los controladores *on-off*, P, PI y PID. En la actualidad, los reactores biológicos al igual que todos los medios de producción, deben cumplir con especificaciones y normas cada vez más estrictas por razones ecológicas y económicas. Por ello, *la tendencia actual es diseñar estrategias de control basadas en modelos dinámicos del sistema a controlar. Sin embargo, para diseñar estrategias de control en reactores biológicos existe el inconveniente de que algunas variables de interés tales como la concentración de biomasa, son muy difíciles de medir, sobre todo cuando el medio posee compuestos de características físicas similares a las de los microorganismos. Además, las mediciones de biomasa sólo son confiables a bajas concentraciones.* Es muy importante considerar que en los modelos dinámicos comúnmente empleados para diseñar algoritmos de control, existen incertidumbres asociadas a términos no conocidos con exactitud y a dinámicas no modeladas. En un reactor biológico, este término está dado por el término correspondiente a la tasa de consumo de sustrato, el cual es directamente proporcional a la tasa de generación de biomasa.

La incertidumbre en el término asociado a la tasa de consumo de sustrato, se origina por las múltiples y complejas reacciones que se llevan al cabo en el medio y que en la práctica se aproximan con leyes de validez restringida. Una variable implicada en este término es la tasa de crecimiento específico de la biomasa la cual es función de diversos factores biológicos y fisicoquímicos del medio, tales como pH, temperatura, concentración de inhibidores. En la práctica se emplean leyes que son función únicamente de sustrato (e.g. ley de Monod). Se pueden adicionar términos a esta ley, en los cuales se considere la tasa de mortalidad de los microorganismos y el consumo de sustrato para las funciones de mantenimiento de los mismos. Existen otras expresiones para la tasa de crecimiento específico de biomasa más complejas que además toman en cuenta la presencia de sustancias inhibidoras. Sin embargo, *con fines de control es necesario incluir esquemas no sólo de incertidumbres de modelado, sino también paramétricas y que sean robustos ante perturbaciones externas.*

El ejemplo del reactor biológico nos permitirá ilustrar a un sistema simple estable a lazo abierto en el cual el control predictivo acoplado con estimación de incertidumbres puede obtener un buen desempeño y un sintonizado claro y eficaz. Así, considere un reactor biológico de tanque agitado (RBTA), en el que se requiere degradar el sustrato, la tasa de degradación se modela como una cinética de degradación tipo Monod. El sistema es estable de una entrada y una salida. La entrada de control es la tasa de dilución (inverso del tiempo de residencia del reactor), la salida es la concentración de sustrato de la corriente de efluente. El modelo que se presenta a continuación se obtiene mediante balances de materia

$$\dot{x}_1 = -\frac{\mu x_2}{Y} + u(S_0 - x_1) \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = (\mu - u) x_2 \quad (3.2)$$

$$\mu = \frac{\mu_{max} x_1}{K_s + x_1}$$

$$y = x_1 \quad (3.3)$$

donde x_1 es la concentración de sustrato (salida medida), x_2 es la concentración de biomasa, S_0 la concentración de sustrato de alimentación, Y un coeficiente de rendimiento (biomasa-sustrato), μ_{max} la tasa máxima de crecimiento, K_s la constante de afinidad y u la entrada de control (tasa de dilución).

III.2 Reactor Químico

Los reactores continuos de tanque agitado representan un reto de operación en las plantas químicas debido principalmente, al complejo comportamiento inestable que presentan a lazo abierto. Estos sistemas presentan además, multiplicidad de puntos de operación, alta sensibilidad paramétrica, oscilaciones inherentes a su comportamiento no lineal y en algunos casos, caos. Estas características demuestran la necesidad y al mismo tiempo la dificultad de diseño de controladores para tales sistemas. Así también, es deseable que durante su operación, se respeten las condiciones óptimas para la conservación del equipo (y en su caso), del catalizador; y al mismo tiempo que su eficiencia de conversión sea máxima. Por todo esto, los reactores químicos son buenos candidatos para la aplicación de la ley de control predictivo, pues se puede incluir directamente todas las restricciones que les son impuestas. *Los sistemas reactivos además, se caracterizan por la gran incertidumbre con la que se conoce la tasa de reacción, por ejemplo en algunos casos la velocidad de producción depende de reactivos inestables difíciles de medir.*

El ejemplo del reactor químico permitirá ilustrar el caso de sistemas inestables, para los que existen pocos resultados en la literatura en el ámbito del control predictivo. El problema asociado al control de este sistema se prevee en la posible inestabilidad del predictor de salidas. Si existen incertidumbres, entonces la salida predicha y la real difieren, lo cual puede llevar a inestabilidades. El objetivo de utilizar este ejemplo es mostrar que introduciendo el estimado de la incertidumbre es posible robustecer la ley de control predictivo. Así, considere un reactor químico de Tanque Agitado (RQTA) no isotérmico, en donde se lleva al cabo la reacción $A \rightarrow B$, la tasa de reacción es de primer orden y obedece la ley de Arrhenius. El sistema es no lineal y tiene tres puntos de equilibrio, dos estables y uno inestable, (Luyben, 1990). El problema de control asociado a este sistema es de su estabilización en el punto de equilibrio inestable a lazo abierto. El sistema es de UEUS, la entrada de control es la temperatura de la chaqueta, la salida es la temperatura del efluente del reactor.

$$\dot{x}_1 = \theta(T_e - x_1) + \beta Ke^{-\frac{E_a}{Rx_1}} x_2 - \gamma(x_2 - u) \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2 = \theta(S_e - x_2) - Ke^{-\frac{E_a}{Rx_1}} x_2 \quad (3.5)$$

$$y = x_1 \quad (3.3)$$

Donde x_1 es la temperatura del reactor (salida medida), x_2 la concentración de reactivo, S_e la concentración de reactivo a la entrada, T_e la temperatura de entrada al reactor, θ el inverso del tiempo de residencia del reactor, β es un parámetro asociado con el calor de reacción, γ un parámetro asociado con el coeficiente de transferencia de calor y u es la entrada de control (temperatura de la chaqueta).

III.3 Intercambiador de Calor

El problema del control de un intercambiador de calor, radica en la regulación de la temperatura de la corriente de un proceso. Sin embargo, tal tarea puede ser difícil de llevar al cabo cuando existen incertidumbres en la tasa de transferencia de calor y perturbaciones en la condiciones de entrada. Cuando un cambiador de calor ha estado en servicio durante algún tiempo, su eficiencia puede cambiar debido a la acumulación de una capa de incrustación en la superficie de transferencia de calor debido al deterioro de la superficie por un fluido corrosivo. Cuando se altera la naturaleza de la superficie de manera que se afecte la capacidad de transferencia de calor, se dice que la superficie está sucia. Una evaluación física de tal deterioro, puede no ser realizable bajo las versátiles condiciones de operación de la industria química actual. Además, como la mayoría de los procesos químicos, estos sistemas están continuamente expuestos a perturbaciones en las condiciones de entrada: temperaturas de los flujos de las corrientes de servicio y de procesos. Es por ello que se hace necesario desarrollar controladores que regulen la

operación del intercambiador y que aseguren su buen comportamiento a pesar de incrustaciones en la superficie de intercambio y perturbaciones externas. En el marco del control predictivo, tales controladores son capaces de asegurar una óptima ocupación de energía y son más fácilmente extensibles a redes de intercambio de calor.

El objetivo de utilizar este ejemplo es ejemplificar un sistema estable de grado relativo mayor a uno y para el cual se mostrará el uso de observadores de estado/incertidumbre dentro del esquema de control predictivo. Así entonces, considere un intercambiador de calor de flujos perfectamente agitados, de manera tal que la temperatura de las corrientes que pasan por la coraza y los tubos no dependen de su posición en el intercambiador. Este sistema es estable UEUS, de orden relativo 2 y se puede modelar según la ecuaciones (3.6) y (3.7). La entrada de control es el flujo másico de la corriente de servicio, la salida es la temperatura de proceso. La temperatura media efectiva Δx_{eff} puede modelarse como la media aritmética o logarítmica de la diferencia de las corrientes de entrada y salida¹.

$$\dot{x}_1 = \frac{2}{M_p} [F_p(x_{1,e} - x_1) - C_{1,t}a\Delta x_{eff}] \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2}{M_p} [C_{2,t}a\Delta x_{eff} + u(x_{2,e} - x_2)] \quad (3.7)$$

$$C_{i,t} = \frac{U(t)}{C_{p,i}} \quad (3.3)$$

$$y = x_1$$

Donde x_1 es la temperatura de efluente del proceso², x_2 la temperatura de la corriente de servicio (salida medida), $U(t)$ el coeficiente de transferencia de calor, $C_{i,t}$ el coeficiente

¹ La media logarítmica es la más comúnmente usada, pero tiene efectos adversos sobre la estabilidad del algoritmo en algunos casos.

² El subíndice e se refiere a las condiciones de entrada.

total de transferencia de calor, $C_{p,i}$ la capacidad calorífica de la corriente i^3 , a el área efectiva de intercambio de calor, F_p el flujo másico de la corriente del proceso, u la entrada de control (flujo másico de la corriente de servicio), M_p el peso molar de la corriente del proceso, M_c el peso molar de la corriente de servicio, y Δx_{eff} la temperatura media efectiva.

III.4 Columna de Destilación

Dos terceras partes de los procesos “lentos” de la industria se encuentran en plantas petroquímicas, donde las dos terceras partes son columnas de destilación (Richalet, 1993). Es por eso que el control de columnas de destilación es un problema actual y de repercusiones industriales y económicas vastas. Sin embargo, el diseño de controladores para columnas de destilación no es una tarea fácil pues por su naturaleza, este sistema está asociado con un problema de control que es mal condicionado.

La caracterización de una columna de destilación se hace con base en propiedades físico-químicas de las sustancias involucradas y que son por mencionar algunas: calor de vaporización, punto de burbuja y punto de rocío de la mezcla. Tales propiedades dependen de las proporciones de los componentes presentes así como de la temperatura y presión a las que son sometidas. Además, como la mayoría de los procesos químicos, éstos están continuamente expuestos a perturbaciones en las condiciones de entrada: composiciones y temperaturas de las mezclas de alimentación. De ahí que el problema del control de estas unidades esté dirigido a cumplir estrictas normas de calidad, de disminución de material contaminante y de minimización de las influencias de las perturbaciones.

El objetivo de utilizar este caso es ejemplificar la estrategia de control predictiva para el caso de múltiple entrada/múltiple salida y asociado a un problema de control mal condicionado. Así, considere una columna de destilación binaria ideal de 40 platos, de flujos constantes y equimolares, calor de vaporización constante y *Hold-Up* constante. El

³ El subíndice 1 se refiere a la corriente del proceso, mientras que el 2 a la corriente de servicio

sistema es estable de dos entradas y dos salidas. Las entradas de control son los flujos de líquido y vapor a lo largo de la torre y las salidas son las composiciones del destilado y del rehervidor.

Condensador

$$\dot{x}_1 = V(y_2^* - x_1)/hc \quad (3.8)$$

Etapas de rectificación

$$\dot{x}_i = L(x_{i-1} - x_i) + V(y_{i+1}^* - y_i^*)/he \quad (3.9)$$

Alimentación

$$\dot{x}_{na} = L(x_{na-1} - x_{na}) + F_a z_a + V(y_{na+1}^* - y_{na}^*)/he \quad (3.10)$$

Etapas de rectificación

$$\dot{x}_i = (L + F_a)(x_{i-1} - x_i) + V(y_{i+1}^* - y_i^*)/he \quad (3.11)$$

Rehervidor

$$\dot{x}_{ne} = (L + F_a)(x_{ne-1} - x_{ne}) - V y_{ne}^* - (F_a + L - V)x_{ne}/hr \quad (3.12)$$

$$y_1 = x_1 \quad (3.13)$$

$$y_2 = x_{ne} \quad (3.14)$$

Donde x_i es la fracción molar del compuesto más volátil en fase líquida en el plato i -ésimo, y_i^* la fracción molar del compuesto más volátil en la fase vapor en equilibrio con x_i , L el flujo de líquido (entrada de control), V el flujo de vapor (entrada de control), F_a el flujo de alimentación, Z_a la fracción molar del compuesto más volátil en el flujo de alimentación, h_e el *Hold-up* asociado a las etapas de rectificación, h_c el *Hold-up* asociado a la etapa de condensación y h_r el *Hold-up* asociado a la etapa del rehervidor. Las salidas medidas son la concentración en el condensador y el rehervidor.

Capítulo IV

Resultados

Capítulo IV. Resultados

En este capítulo se ilustra la aplicación de los algoritmos de estimación de incertidumbres a los casos de estudio del Capítulo III y se muestra que tal aplicación es factible. La implementación del control predictivo se hace mediante simulaciones numéricas. Se analizan los efectos de los métodos de integración y de optimización sobre la estabilidad global del controlador. Se establece el comportamiento de los sistemas en relación con los parámetros de sintonización: horizonte de predicción, horizonte de control, peso del error de seguimiento y costo del control; y se presentan lineamientos de sintonización. Se muestra que el algoritmo de estimación de incertidumbres robustece la ley de control al estabilizar al sistema aún ante la presencia de perturbaciones paramétricas y errores de modelado. Además se propone un esquema de filtrado de manera tal que el algoritmo sea robusto aún ante ruido de medición. Se muestra que aunque la ley de control predictivo con acción integral tiene buen desempeño en plantas estables, no es recomendable cuando se trata de controlar plantas inestables, debido a que puede no cumplirse el objetivo de estabilización o en caso de cumplirse presentar pobre desempeño. Se muestra que el control predictivo es altamente recomendable para sistemas MEMS debido a la facilidad con la que puede ser sintonizado.

IV.1 *Requerimientos de Cómputo (Hardware y Software)*

Las primeras aplicaciones de **MPC** (Model Predictive Control) se realizaron en máquinas con gran capacidad de cómputo y equipadas con sistemas de control distribuido como: Honeywell TDC-2000s y TDC-3000s. Típicamente, los procesos bajo control eran operados por esquemas de control que trataban de compensar tiempos de retardo, o que incluían esquemas control en cascada y/o de prealimentación, etc. Implementaciones posteriores de **MPC** se realizaron en computadoras DEC VAX. Estos computadores requieren de equipo de interfase, así como el software apropiado para realizar la comunicación entre una workstation y el **DCS** (*Distributed Control System*). Sin embargo, el creciente poder y versatilidad de las computadoras personales ha permitido su implementación aún en pequeños procesos químicos, mediante la utilización de ambientes multitareas de sistemas operativos tales como Windows y Windows NT de Microsoft. Además, el software disponible para la adquisición de datos y sistemas de control es con mucho, mayor. Es por ello, que el control predictivo es una opción factible aún en pequeñas industrias, pues los requerimientos de cómputo son fácilmente accesibles (Desphande *et al.* 1995). En la presente tesis, se utilizó una computadora personal PC 586, 8MHz RAM, 120MHz.

La implementación de la ley de control predictivo, requiere del uso de integradores de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como de optimizadores de funciones multivariables. En esta tesis, para resolver el problema de optimización definido por las ecuaciones (2.2)-(2.6), y los casos de estimación de incertidumbres (ecuaciones: (2.7),(2.8),(2.11),(2.13)) y acción integral (ecuaciones: (2.14)-(2.16)) se utilizó el algoritmo de optimización de métrica variable Davidson-Fletcher-Powell (DFP). Este algoritmo es de convergencia cuadrática y el procedimiento de búsqueda se basa en encontrar primero un mínimo a lo largo de una dirección d_i , y elegir la próxima dirección de búsqueda con base en la información disponible de la derivada de la función y la matriz hessiana. Este algoritmo tiene la ventaja de que requiere menos esfuerzo de cómputo que la mayoría de los métodos de optimización, ya que la inversa de la matriz hessiana no es calculada en cada iteración. En el Apéndice II se muestra los pormenores de este algoritmo.

Se hicieron uso de las subrutinas en FORTRAN: DFPMIN, LINMIN, MNBRAK, F1DIM, BRENT de Press *et al.* (1986), para elaborar el programa que implementara el algoritmo DFP. Las simulaciones de la dinámica de los sistemas se hicieron utilizando un algoritmo de integración Runge-Kutta de cuarto orden. En cada tiempo de muestreo se resuelven dos sistemas dinámicos. Un modelo riguroso simula el comportamiento de la planta real y otro con incertidumbres (modelo linealizado o con perturbaciones paramétricas y errores de modelado) se toma como modelo de la planta. El optimizador toma la dinámica del sistema utilizando el modelo de la planta, mientras que el modelo riguroso se utiliza para aplicar la ley de control predictiva y para actualizar el valor de los estados y de las salidas de control.

En las simulaciones realizadas para la presente tesis, se han observado diferentes aspectos relacionados con el efecto del método de integración sobre la desempeño del control, así como del efecto de la eficiencia del optimizador sobre la estabilidad de la ley de control. Dentro de los resultados obtenidos sobre estos rubros, la experiencia indica que el método de integración afecta fuertemente el desempeño del controlador cuando se simula plantas inestables o altamente no lineales. Los esquemas explícitos como los de Euler, tienden a producir inestabilidad en el algoritmo de optimización. Por otra parte, existen algoritmos de optimización para los cuales la estabilidad del controlador se ve sacrificada, por ejemplo el método de Brent o de gradiente conjugado (puro). Sobre esta línea, Sistu *et al.* (1991) presentan un análisis acerca de algunos aspectos computacionales asociados a las diferentes técnicas de solución del NLPC (*Nonlinear Predictive Control*).

IV.2 Detalles de las Simulaciones

Con el fin de valorar el desempeño de las leyes de control se llevaron al cabo una serie de simulaciones basadas en los algoritmos de control predictivo sujetos a la dinámica de un sistema en particular. Las secciones posteriores presentan los resultados obtenidos de estas simulaciones y están organizadas por temas de la siguiente forma. Primero se pretende establecer el comportamiento de los sistemas en relación con los parámetros de sintonización más importantes, lo anterior acompañado de reflexiones de tipo técnico y que enmarcan algunos trabajos previos. Después se valora el desempeño de los esquemas de control propuestos en esta tesis y se analizan las limitaciones en cada caso. En todas estas secciones se desarrollan las ecuaciones particulares para cada ejemplo.

IV.3 Sintonización

La sintonización de la ley de control predictivo (ecuaciones (2.2)-(2.6)) de manera que asegure la estabilidad y buen desempeño del controlador, es un problema de suma importancia y de cuya solución depende la viabilidad de la aplicación del control, tanto de forma industrial como a nivel laboratorio. En la ley de control predictivo existen 4 parámetros de sintonización: horizonte de predicción, horizonte de control, costo de control y peso del error de referencia.

Uno de los parámetros más importantes en el esquema de control predictivo, es el costo de control λ , precisamente por estar asociado con la facilidad con la que los movimientos de control pueden ser realizados. El término de la ecuación (2.2) que involucra el costo del control se interpreta como una restricción sobre la entrada de control. Este parámetro representa el peso con la que la restricción sobre la cantidad y la velocidad de la entrada es impuesta. De Oliveira y Biegler (1994), muestran como un peso sobre la restricción muy grande ($\lambda \rightarrow \infty$) equivale a tener una restricción dura sobre la entrada de control, lo cual puede producir inestabilidades para ciertos sistemas.

El resultado de variar λ se muestra en las Figuras 3.a-3.c para el biorreactor y las Figuras 4.a-4.c para el reactor químico. Observe que un costo $\lambda=0$ implica un perfecto seguimiento de la referencia (perfecto desempeño), ya que no hay restricciones sobre el control y por ello se puede disponer del control en cualquier proporción y con una velocidad arbitrariamente grande (Figura 3.c). Sin embargo, este controlador no es físicamente realizable ya que existen restricciones impuestas por el equipo. Se hace necesario entonces, escoger un valor de λ que no sólo penalice los movimientos de control de manera más real sino que también asegure un buen desempeño. La elección de λ debe cumplir un compromiso entre desempeño y estabilidad.

Observe que para el caso del reactor químico, el cual es inestable a lazo abierto, los esfuerzos de control necesarios para estabilizar el sistema son grandes. En este ejemplo se puede ilustrar la ventaja de tener un esquema en el que se penalicen directamente los movimientos de control. (vea Figura 4.c).

En lo que respecta al efecto del peso de error de seguimiento se establece lo siguiente: el término de la ecuación (2.2) que involucra el peso del error de seguimiento puede interpretarse como una restricción sobre la velocidad con la que la salida converge a la referencia. Sin embargo, esta velocidad está siempre supeditada a la disponibilidad del control, es decir, la salida no convergirá más rápidamente que lo que el control pueda llevarla. Esto implica que la elección del peso del error de seguimiento se tiene que hacer con base en un valor predeterminado del costo de control y su efecto siempre será marginal. Por ello es suficiente sintonizar uno de ellos, y se escoge el costo de control por estar relacionado directamente con la disponibilidad de control.

El horizonte de predicción (P) y el horizonte de control (Q) son dos parámetros estrechamente ligados con la estabilidad del control a lazo cerrado. Valores pequeños del horizonte de control y predicción resultan en controladores más agresivos. Se sabe que la estabilidad nominal de un sistema no lineal se asegura al hacer $P \rightarrow \infty$ y que para sistemas

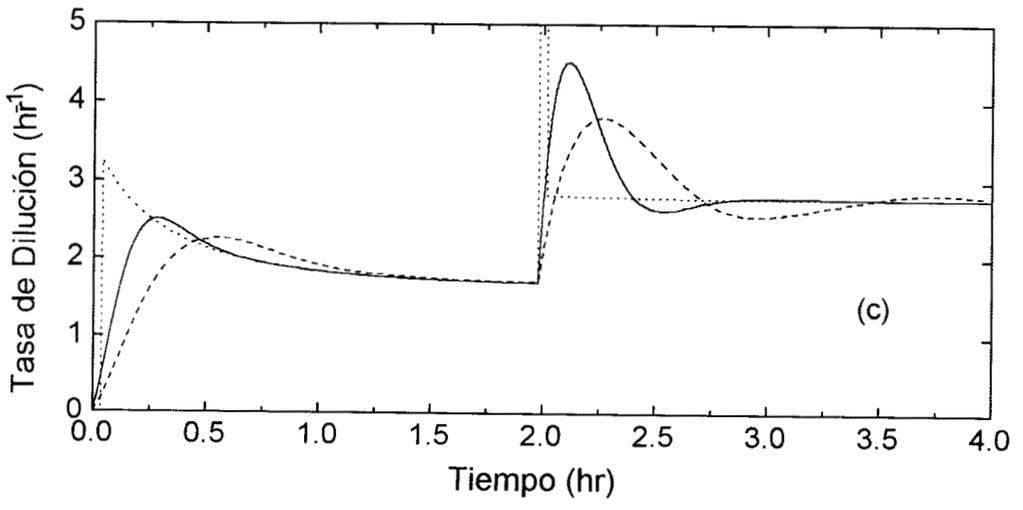
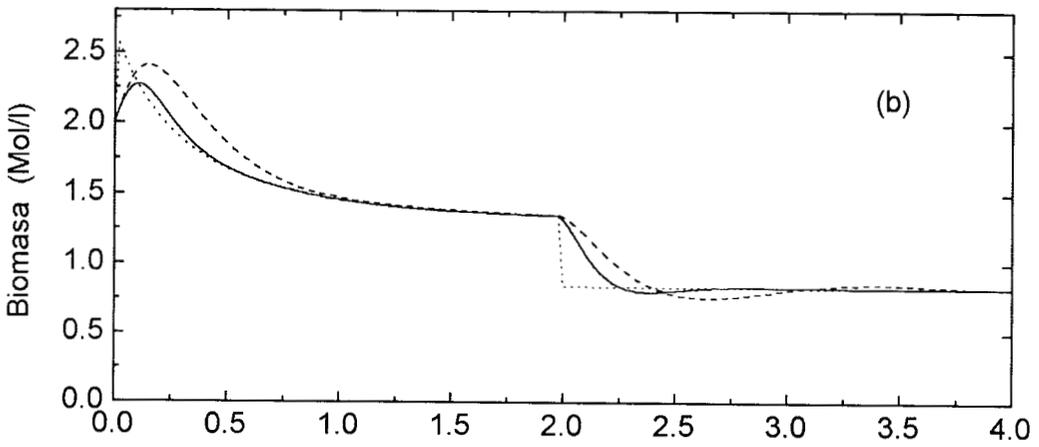
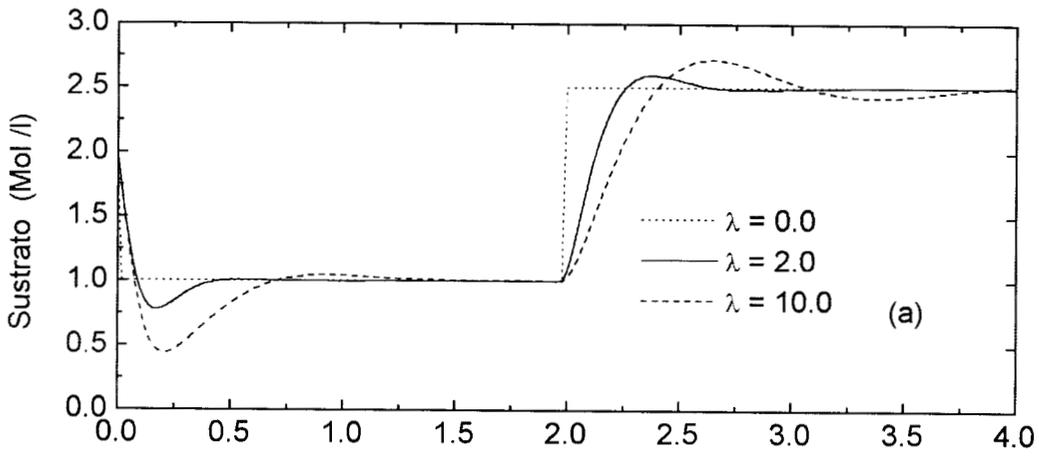


Figura 3

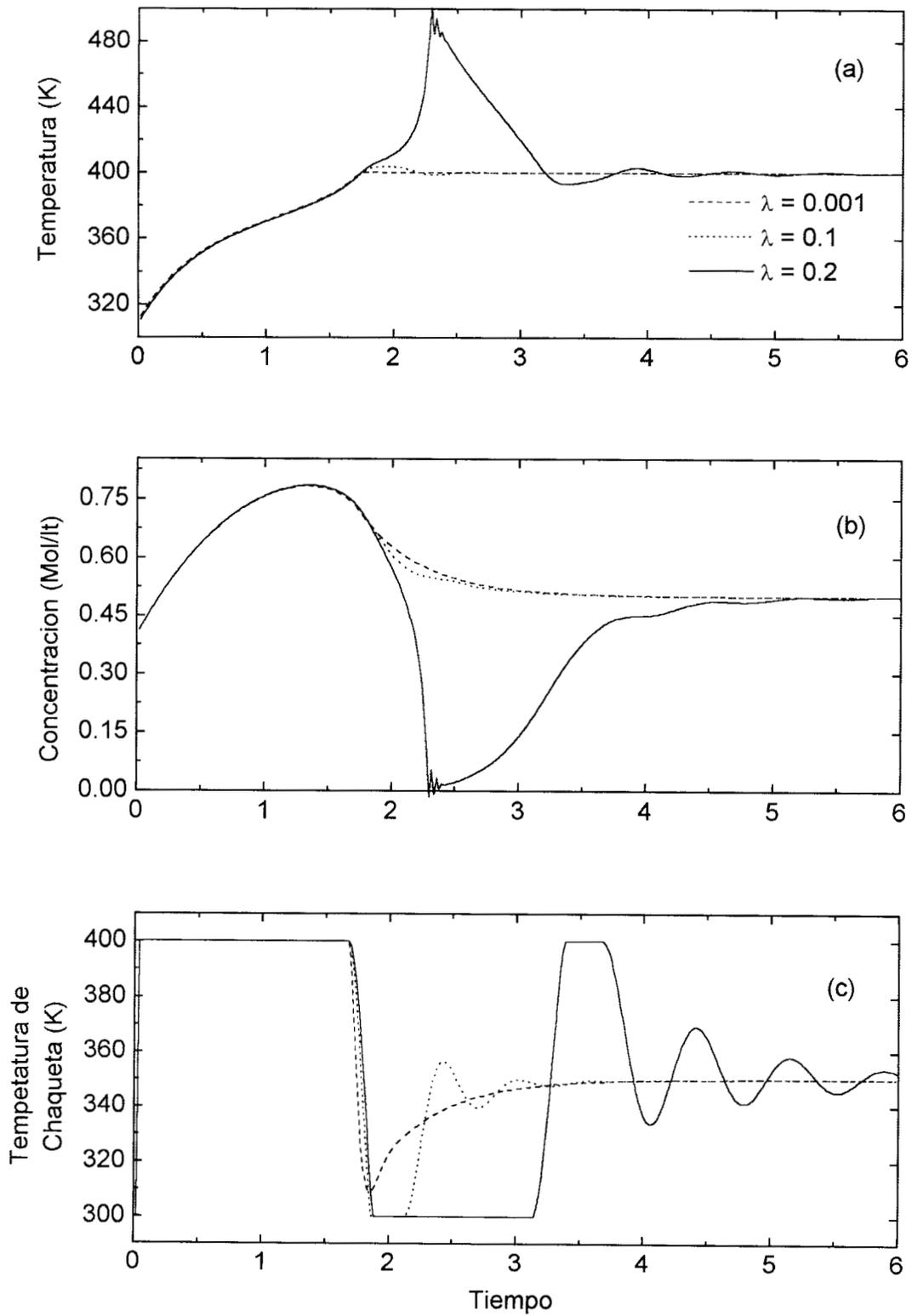


Figura 4

de fase mínima y estables a lazo abierto; las siguientes igualdades $P = Q$ y $\lambda = 0$ redundan en un comportamiento asintóticamente estable. (Sistu y Bequette, 1996)

La ley de control predictivo (ecuaciones (2.2)-(2.6)) es siempre asintóticamente estable para $P=Q$, si se cumple la restricción de estado final ($x(t|t+Q) = x_{ref}$). En las Figuras 5.a-5.c se observa el resultado de variar el horizonte de predicción en el caso del reactor biológico. Un valor pequeño de P implica esfuerzos de control moderados (Figura 5.c) y un mal desempeño del sistema. En las Figuras 5.a-b se ilustra que el desempeño mejora al aumentar P . El sistema se comporta de manera similar al variar el horizonte de control (Q) (Figuras 6.a-6.c). Sin embargo, como Q es menor o igual a P (de otra manera no es realizable), tenemos que la elección de Q depende siempre de una previa elección de P , lo cual lo convierte en un parámetro de sintonización secundario.

De los resultados anteriores, se concluye que existen dos parámetros principales que afectan directamente la estabilidad y el desempeño de la ley de control predictivo: el costo del control y el horizonte de predicción. Esta característica lo hace fácilmente sintonizable aún en sistemas de múltiples entradas y salidas, pues aunque los grados de libertad se vean acrecentados, la estabilidad y el desempeño se aseguran sólo con la elección de dos parámetros. Esta idea fue explotada por McIntosh *et al.* (1991) para establecer reglas de sintonizado para el esquema **GPC** (*Generalized Predictive Control*). La mayoría de los parámetros de sintonización son fijados en un valor nominal y se escoge el horizonte de predicción o el costo del control, de manera tal que se asegure la estabilidad y el buen desempeño del sistema a lazo cerrado. Los autores muestran que el sintonizado del sistema a partir de la elección del horizonte de control constituye una técnica noble, pero para ciertos sistemas no es prácticamente realizable ($P \rightarrow \infty$).

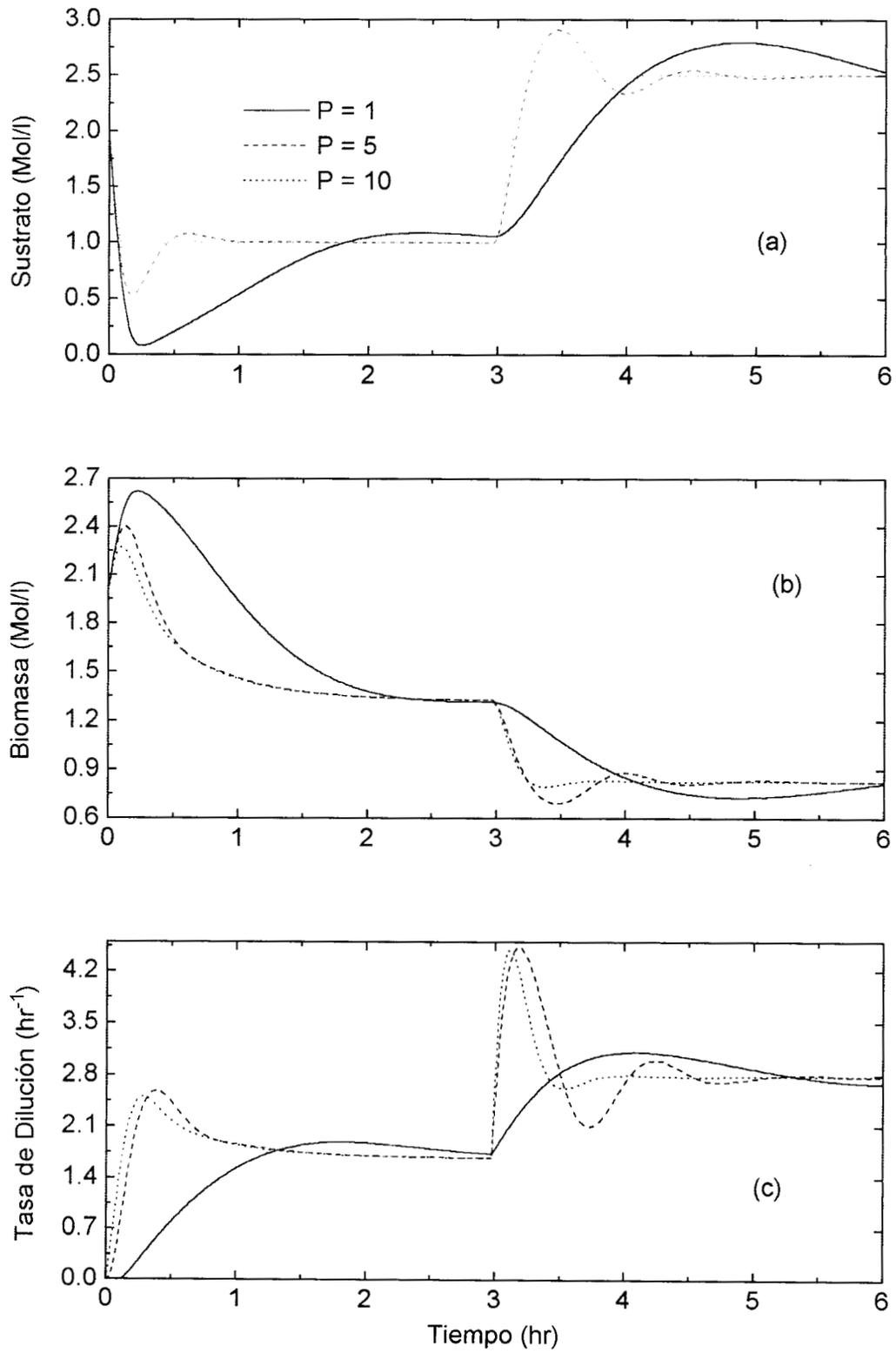


Figura 5

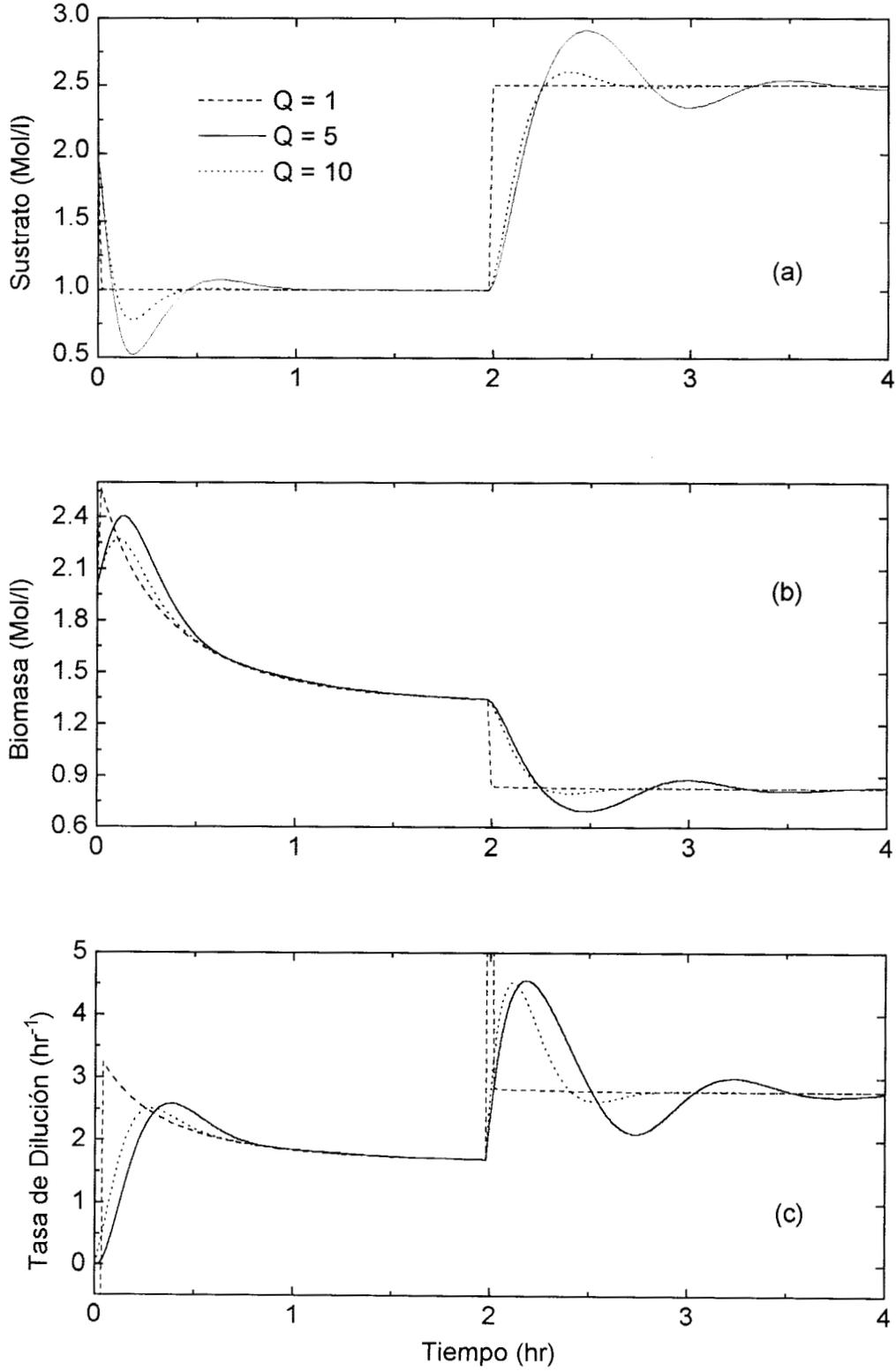


Figura 6

Reglas de Sintonizado.

Con base en las simulaciones realizadas, se proponen las siguientes reglas de sintonizado sobre el horizonte de control y predicción. En todos los casos se trata de sistemas estables a lazo abierto. Estas reglas coinciden los requerimientos de estabilidad observados por Sistu y Bequette, (1996) y con la mayoría de las guías de sintonizado propuestas en MPC (García *et al.* 1989). *Para asegurar estabilidad es deseable hacer $P \rightarrow \infty$. Escoger $n \leq p$, $p/2 \leq m \leq p$ y $n \leq m$, en general, resulta en controladores estables y con buen desempeño.*

Por otra parte, *el costo de control deberá escogerse de manera que cumpla un compromiso entre el buen desempeño y la estabilidad del controlador* y deberá escogerse para cada caso en particular. Costos pequeños suponen esfuerzos de control grandes y para sistemas inestables a lazo abierto la elección de bajos costos de control son un requisito indispensable para asegurar su estabilidad.

IV.4 *Estimación de Incertidumbres*

En esta sección se mostrará el desempeño de controladores predictivos cuando se incluyen esquemas de estimación de incertidumbres.

IV.4.1 *Reconstrucción de Incertidumbres con base en un Estimador Discreto*

El esquema de control predictivo con estimación de incertidumbres basado en un observador discreto se ejemplificó en un reactor químico (RQTA), un reactor biológico (RBTA) y una torre de destilación, esta última asociada a un problema de control mal condicionado. A partir de un modelo entrada salida del sistema se construye el estimador. La ley de control es calculada al resolver el problema de optimización definido por la ecuación (2.2), sujeta a la dinámica del sistema (modelo entrada-salida). El desempeño del estimador se valora utilizando un modelo riguroso para simular el comportamiento de la planta real.

IV.4.1-1 *Reactor Biológico*

A partir del modelo riguroso del reactor biológico (ecuaciones (3.1)-(3.3)), es posible construir un modelo entrada-salida del sistema, caracterizándolo a partir de una perturbación en la entrada de control. *El modelo de la planta lineal así obtenido contiene por lo tanto errores de modelado.* Para desarrollar un esquema de estimación de incertidumbres, se incluye un nuevo término que corresponde a la adición de la función $\phi(t)$, donde se aglutinan todos los errores de modelado, según se muestra a continuación*.

* Las incertidumbres de este tipo de sistemas se deben generalmente al desconocimiento de la tasa de reacción. Estas incertidumbres pueden ser incluidas en el término $\phi(t)$ de esta ecuación, $I(k)$, de la ec. (3.e).

$$\dot{x}_1 = -3.573x_1 + 3.8202u - 2.889 + \phi(t) \quad (4.1)$$

Con base en este modelo es posible hacer una estimación de la incertidumbre al aproximar la derivada por diferencias finitas, pero debido a que esta aproximación es no causal (se requiere de mediciones futuras no disponibles), se hace necesario retrasarla un intervalo de tiempo de muestreo.

$$\phi_k = \left(3.5373 - \frac{1}{\Delta}\right)x_k - 3.8202u_k + 2.889 + \frac{x_{k+1}}{\Delta} \quad (4.2)$$

$$\phi_k \approx \phi_{k-1} = \left(3.5373 - \frac{1}{\Delta}\right)x_{k-1} - 3.8202u_{k-1} + 2.889 + \frac{x_k}{\Delta} \quad (4.3)$$

La incertidumbre se considera constante durante el periodo de predicción y es actualizada hasta que es disponible la siguiente medición de la salida.

En la Figura 7 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas, en éstas el sustrato es alimentado a 2.0 mol/g y estabilizado a 1 mol/g. Al tiempo $t = 4.0$, el sistema es sometido a una perturbación en escalón, al cambiar el valor de referencia a $x_{ref} = 2.5$ g/mol. y en $t = 8.0$ entra una perturbación en la concentración de sustrato del flujo de entrada. La dinámica de la referencia se propuso de primer orden con un tiempo característico $\tau = 0.7$. Como se observa en las figuras, los esfuerzos de control son moderados al suavizar el comportamiento de la perturbación en escalón (filtrado), la salida sigue casi perfectamente a la referencia, no requiriendo para ello grandes esfuerzos de control (Figura 7.c). Así, el esquema de control propuesto se comporta en forma robusta al estabilizar al sistema aún ante la presencia de perturbaciones, errores de modelado y limitaciones físicas del controlador (saturación). Sin embargo, si existe saturación en el controlador, es necesario saber de antemano a su implementación, cual es la cota máxima sobre el controlador que derivará un comportamiento estable a lazo cerrado. Esta tarea puede ser llevada al cabo, mediante un análisis con funciones de Lyapunov, según lo muestra Álvarez –Ramírez, *et al.*

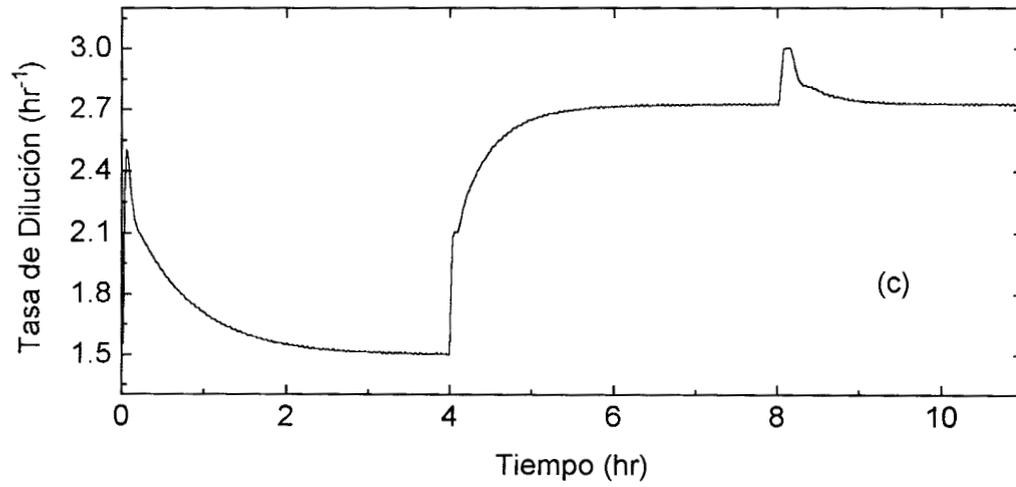
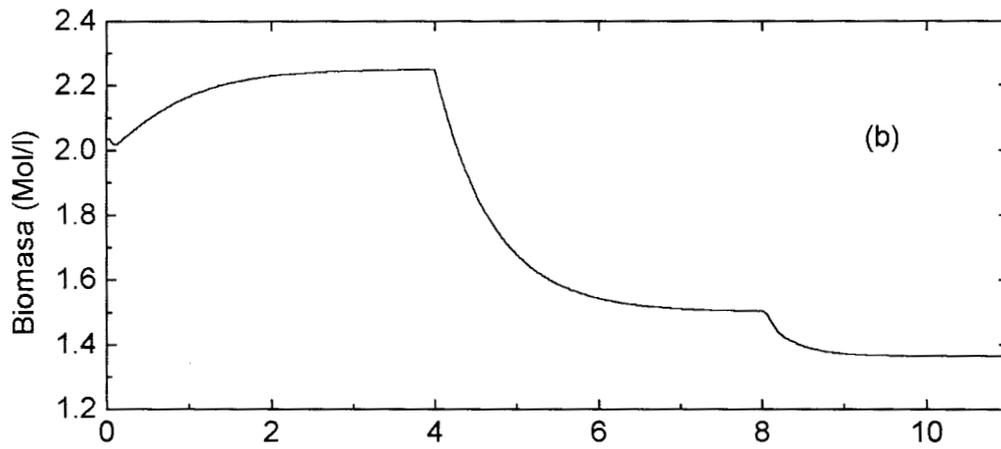
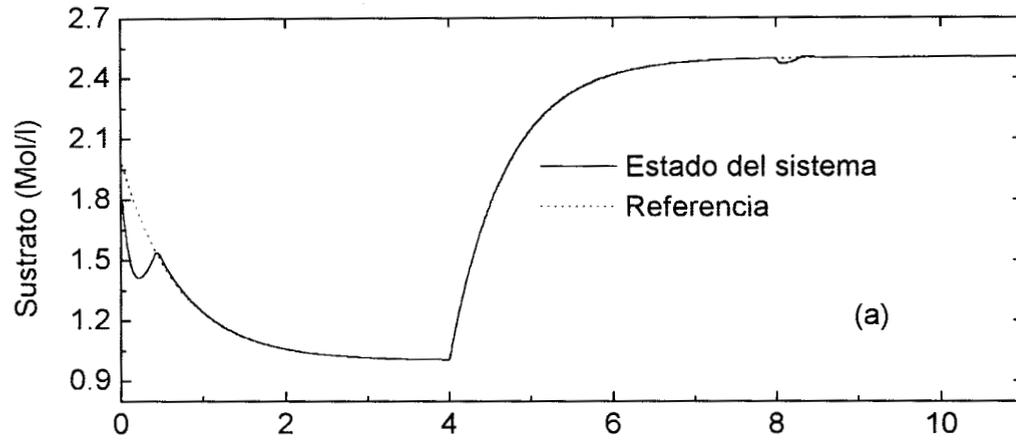


Figura 7

(1997b) y Solís (1998). O bien mediante simulaciones numéricas, utilizando un procedimiento de prueba y error para saber las cotas máximas y mínimas del controlador. Por supuesto utilizando este último enfoque, no puede garantizarse que tales cotas existen.

La estimación de la incertidumbre propuesta en esta sección presupone una exacta medición de la salida, lo cual no es físicamente realizable ya que éstas siempre están contaminadas con ruido[†] (generalmente de alta frecuencia). Así que para hacer esta ley de control robusta aún ante ruido de medición, se propuso filtrar la estimación de la incertidumbre calculada. Se utilizó un filtro de segundo orden tipo Battenworth. El esquema con filtro probó estabilizar al sistema aún ante perturbaciones sostenidas (oscilatorias) de amplitud $0.25 x_{ref}$. El comportamiento reprodujo los resultados del caso donde no existe ruido de medición.

IV.4.1-2 Reactor Químico

El modelo de la planta que se muestra en las ecuaciones (3.4)-(3.5), se utiliza para hacer un modelo entrada-salida del sistema. *La incertidumbre se supone, en el desconocimiento del término asociado con la producción de calor debida a la reacción*, según se muestra a continuación,

$$\dot{x}_1 = \theta(T_e - x_1) + \gamma(u - x_1) + \phi(t) \quad (4.4)$$

Con base en este modelo es posible hacer una estimación de la incertidumbre al aproximar la derivada por diferencias finitas. Sin embargo, como de nueva cuenta esta aproximación es no causal (se requiere de mediciones futuras no disponibles), se hace necesario retrasarla un intervalo de tiempo de muestreo.

[†] Cabe mencionar que el tiempo de muestreo debe ser lo suficientemente grande como para que la medición (contaminada) pueda ser confiable.

$$\phi_k = \left(\theta + \gamma + \frac{1}{\Delta}\right)x_k - \gamma u_k - \theta T_e + \frac{x_{k+1}}{\Delta} \quad (4.5)$$

$$\phi_k \approx \phi_{k-1} = \left(\theta + \gamma + \frac{1}{\Delta}\right)x_{k-1} - \gamma u_{k-1} - \theta T_e + \frac{x_k}{\Delta} \quad (4.6)$$

La incertidumbre se considera constante durante el periodo de predicción. En la Figura 8 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas, en éstas la mezcla de reactivo es alimentado a una temperatura de 398 K. La temperatura del reactor es estabilizada a 400 K para luego someter al sistema en $t= 2.5$, a una perturbación en escalón, al cambiar el valor de referencia a $x_{ref} = 410.0$ K. Al tiempo $t = 8.0$ entra una perturbación en la temperatura de entrada al reactor. La dinámica de la referencia se propuso de primer orden con un tiempo característico $\tau = 0.7$. Como se observa en las figuras, el esquema de control propuesto se comporta en forma robusta al estabilizar al sistema aún ante la presencia de perturbaciones, errores de modelado y limitaciones físicas del controlador (saturación). Se utiliza un filtro de segundo orden tipo Buttenworth para filtrar el término de incertidumbre contaminado por ruido de medición de alta frecuencia.

La experiencia indica que en sistemas inestables el valor del tiempo de muestreo es crucial en la estabilidad del sistema a lazo cerrado. Tiempos grandes de muestreo conducen a la desestabilización del sistema; sin embargo, el tiempo de muestreo tiene que ser lo suficientemente grande como para tener una medición confiable en el caso de que ésta esté contaminada por ruido. Se llega entonces a la conclusión de que el valor del tiempo de muestreo deberá cumplir un compromiso entre estabilidad y desempeño. Sin embargo, en la realidad el tiempo de muestreo no es un parámetro que se pueda fijar libremente y es necesario demostrar para su implementación, que la ley de control propuesta es estable para cierto tiempo de muestreo. Lo anterior puede probarse siguiendo la metodología de Sistu y Bequette (1996), con un análisis basado en funciones de Lyapunov. Las desventajas de este método se mostraron en la Sección II.5 de este documento.

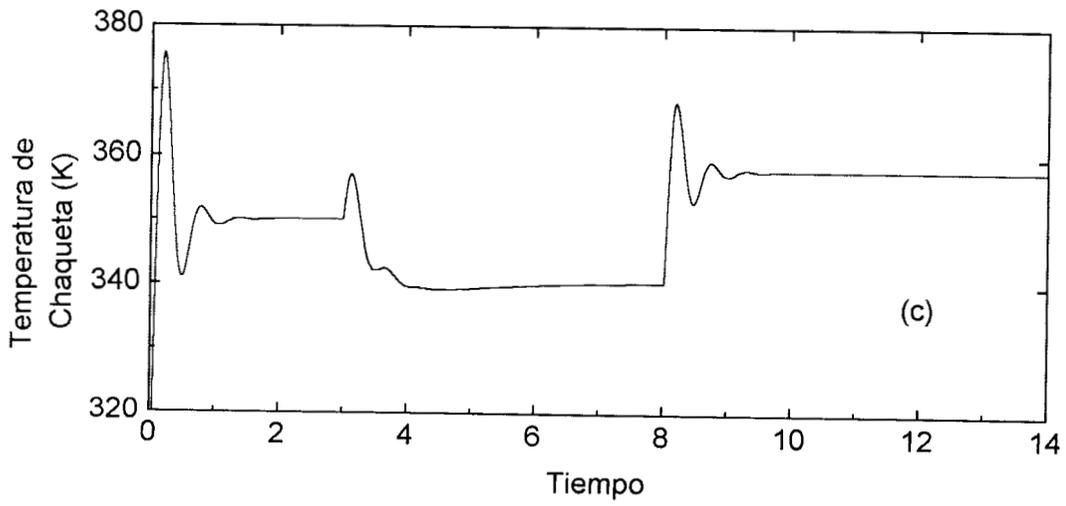
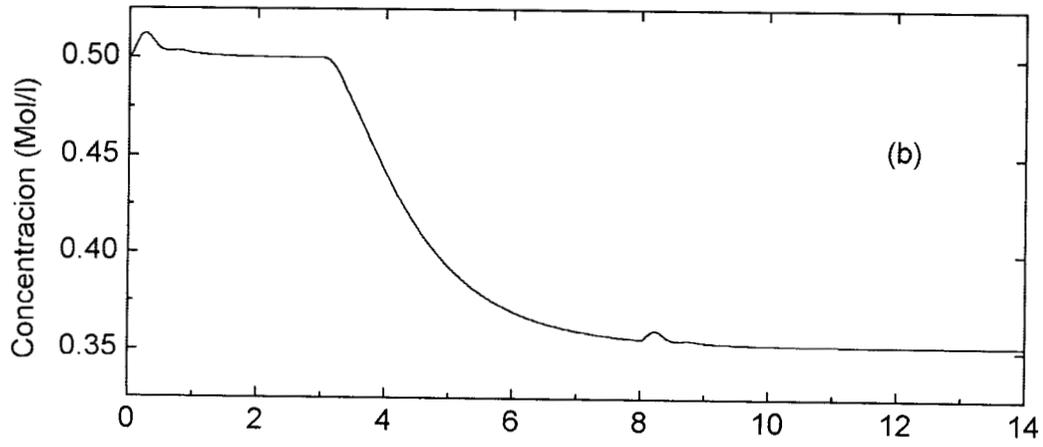
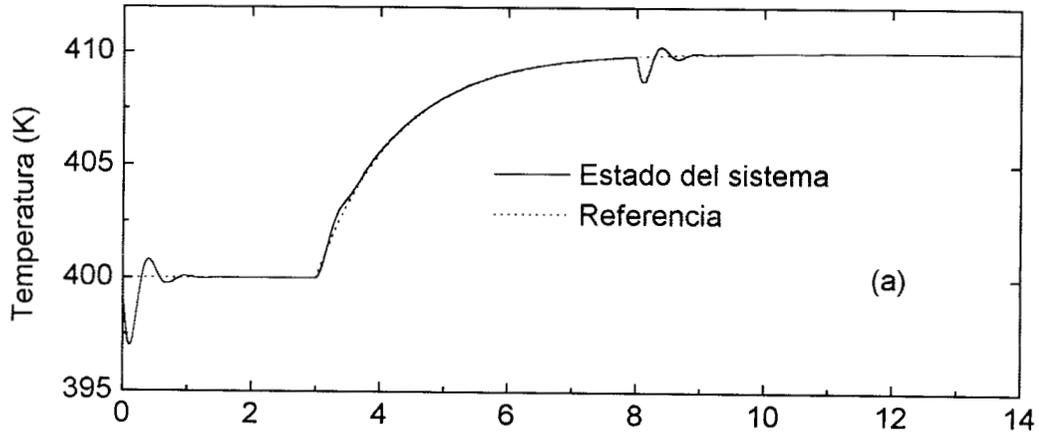


Figura 8

IV.4.1-3 Columna de Destilación

A partir del modelo riguroso de la columna de destilación (ecuaciones (3.8)-(3.14)), es posible construir un modelo entrada-salida del sistema, caracterizándolo a partir de una perturbación en la entrada de control. *El modelo lineal así obtenido contiene por lo tanto errores de modelado.* Para desarrollar un esquema de estimación de incertidumbres, se incluye un nuevo término que corresponde a la adición de la función $\phi(t)$, donde se aglutinan todos los errores de modelado, según se muestra a continuación[†].

$$\dot{x}_1 = (-z_d + 0.005058u_1^* - 0.003463u_2^*)/\tau + \phi_1(t) \quad (4.7)$$

$$\dot{x}_{ne} = (-z_r + 0.01452u_1^* - 0.011069u_2^*)/\tau + \phi_2(t) \quad (4.8)$$

$$z_d = x_1 - x_{1,N} \quad u_1^* = u_1 - u_{1,N}$$

$$z_r = x_{ne} - x_{ne,N} \quad u_2^* = u_2 - u_{2,N}$$

Con base en este modelo es posible hacer una estimación de la incertidumbre al aproximar la derivada por diferencias finitas, pero debido a que esta aproximación es no causal (se requiere de mediciones futuras no disponibles), se hace necesario retrasarla un intervalo de tiempo de muestreo.

$$\phi_1(k) = \frac{x_{1,k+1} - x_{1,k}}{\Delta} - (-z_{d,k} + 0.005058u_{1,k}^* - 0.003463u_{2,k}^*)/\tau \quad (4.9)$$

$$\phi_2(k) = \frac{x_{ne,k+1} - x_{ne,k}}{\Delta} - (-z_{r,k} + 0.01452u_{1,k}^* - 0.011069u_{2,k}^*)/\tau \quad (4.10)$$

[†] El subíndice N se refiere a los valores nominales de las variables. Las entrada y salidas de control se definen en la Sección III.4.

$$\phi_1(k) \approx \phi_1(k-1) = \frac{x_{1,k} - x_{1,k-1}}{\Delta} - (-z_{d,k-1} + 0.005058u_{1,k-1}^* - 0.003463u_{2,k-1}^*) / \tau \quad (4.11)$$

$$\phi_2(k) \approx \phi_2(k-1) = \frac{x_{ne,k} - x_{ne,k-1}}{\Delta} - (-z_{r,k-1} + 0.01452u_{1,k-1}^* - 0.011069u_{2,k-1}^*) / \tau \quad (4.12)$$

En la Figura 9 se muestran los resultados de la columna de destilación. Este sistema tiene dos entradas y dos salidas. Las entradas de control son el flujo de líquido y vapor dentro de la columna, las salidas son las composiciones del tope y la base de la columna (destilados y condensados).

La columna de destilación se supone ideal: los flujos de vapor y líquido son constantes a lo largo de la torre, al igual que el calor de vaporización. Existe equilibrio termodinámico en cada plato y obedece la ley de equilibrio ideal (ecuaciones (3.8)-(3.12)). En las simulaciones, se propone una dinámica de la referencia de primer orden con tiempo característico $\tau = 10.0$. Las composiciones son estabilizadas en 0.98 y 0.02 en el tope y la base de la columna respectivamente. Al tiempo $t = 500.0$, el sistema es sometido a una perturbación en escalón ($x_{1,ref} = 0.99$ y $x_{2,ref} = 0.01$) y a $t = 900.0$ se presenta una perturbación en la composición del flujo de entrada.

En las Figuras 9.a y 9.b, se observa un pobre desempeño de las salidas, al presentar sobredisparos y múltiples oscilaciones correspondientes a la entrada de perturbaciones; sin embargo, el control estabiliza al sistema aún cuando existen incertidumbres tales como errores paramétricos y de modelado. *La experiencia indica que existe un costo de control mínimo para el cual la ley de control deriva en un comportamiento estable. En un sistema mal condicionado se requieren grandes esfuerzos de control con fines de estabilización. Sin embargo, cuando no existen restricciones sobre el control (costo de control nulo) se dispone de acciones de control arbitrariamente grandes que pueden desestabilizar al sistema. Así, como se vio en la sección IV.3 de este documento, es necesario elegir un costo de control lo suficientemente pequeño de manera que el*

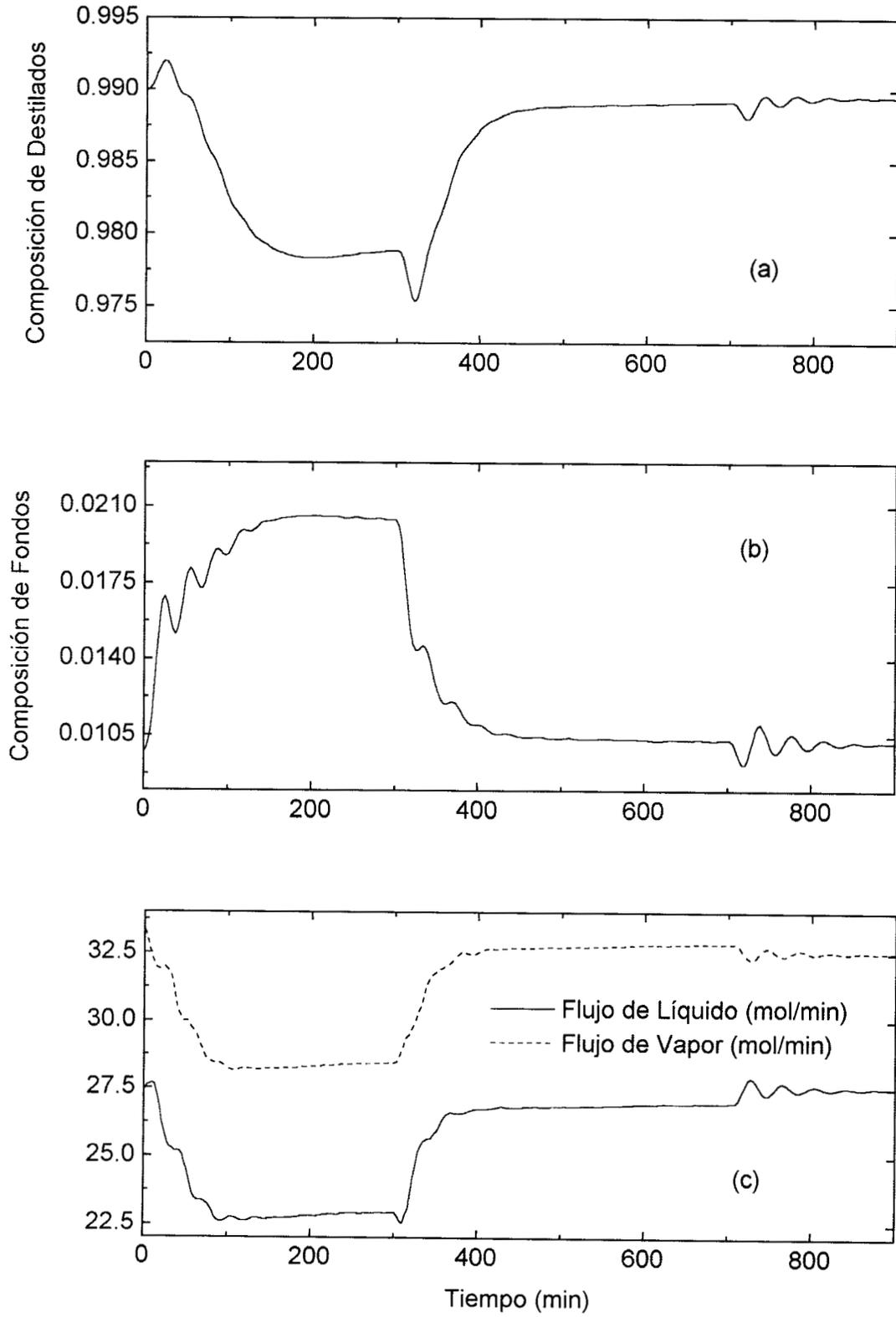


Figura 9

desempeño del sistema no se vea sacrificado, desempeño que tiene un límite debido a que el sistema es mal condicionado. Por estas características, el control predictivo puede no ser recomendable para sistemas mal condicionados[§], ya que se requiere (directa e indirectamente) la inversa de la matriz de ganancias. Deshpande *et al.* (1995), llegan a estas conclusiones al analizar las situaciones en donde el control predictivo es recomendable, dentro de sus conclusiones remarcan la importancia que tiene el estudio de sistemas mal condicionados.

IV.4.2 Reconstrucción de Incertidumbres con base en un Estimador Continuo

Cuando el sistema a controlar es de orden relativo mayor a uno, el esquema de estimación de incertidumbres expuesto en la Sección IV.4.1 no es aplicable. Sin embargo, para sistemas (parcial o totalmente) linealizables por retroalimentación es posible desarrollar un estimador de incertidumbres, basado en la teoría clásica de observadores lineales (Kailath, 1980) y que además provean un estimado de las derivadas de la salida. Las incertidumbres paramétricas y de modelado se aglomeran en un término que se define como un estado virtual del sistema y pueden ser estimadas por un observador construido a partir de un modelo continuo de la planta. La estimación se realiza cada vez que las mediciones de la salida están disponibles. Este esquema de control se ejemplificó en un intercambiador de calor en régimen continuo (sistema no distribuido). La entrada de control es el flujo másico de la corriente de servicio y la salida es la temperatura del proceso. Debido a que el sistema es estable, se puede construir un modelo entrada-salida del proceso a partir de una perturbación en las entradas de control y con base en él, construir el estimador. Para ello, se transforma el modelo perturbado de la planta a la siguiente forma canónica mediante un cambio de coordenadas, según lo muestra Kanellakopoulos *et al.*, (1997):

[§] La matriz de control tiene un número de condición de 64.88

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.13)$$

$$\dot{x}_2 = -13.33x_1 - 7.33x_2 - 3.33u + \phi(t) \quad (4.14)$$

La incertidumbre se interpreta como un estado virtual del sistema y se estima utilizando un observador lineal de alta ganancia según lo muestra la ecuación (2.13). En las simulaciones, *el desempeño del estimador se valora utilizando un modelo riguroso para simular el comportamiento de la planta real y el modelo lineal con el estado virtual de la ecuación anterior, para calcular la ley de control predictiva.*

En la Figura 10 se muestra el resultado de aplicar la estrategia anterior, ahí observa que el sistema real se estabiliza, aún cuando existen incertidumbres en el modelo utilizado por el controlador. La lentitud del actuador es simulado por el costo del control. El sistema es exitosamente estabilizado a 130°F y después sometido a una perturbación en escalón (cambio de referencia, $x_{ref} = 150^\circ\text{F}$) a un tiempo de 2.4 min. El desempeño del control es bueno aún ante la presencia de perturbaciones y errores de modelado, no requiriendo para estabilizar el sistema grandes esfuerzos de control.

El efecto del observador en la ley de control es el de modificar la velocidad con la que ésta afecta a la planta real. El controlador basado en un observador llevará más rápidamente al sistema a la referencia en cuanto mejor sea la estimación de los estados. La rapidez de convergencia del observador se modera con el valor de la ganancia del observador. Cuanto mayor es la ganancia del observador, más rápidamente el sistema observado converge a la planta real y la ley de control es más efectiva. En la Figura10 se muestra el desempeño del sistema en relación con diferentes ganancias de observación.

Cabe observar que aunque en este ejemplo, la ley de control predictivo presentó un buen comportamiento (Figura 10), la estabilidad y el desempeño de este control en sistemas de orden relativo superior no está garantizada y se requiere más investigación al respecto. No es difícil encontrar ejemplos para los cuales el control predictivo tiene un desempeño pobre

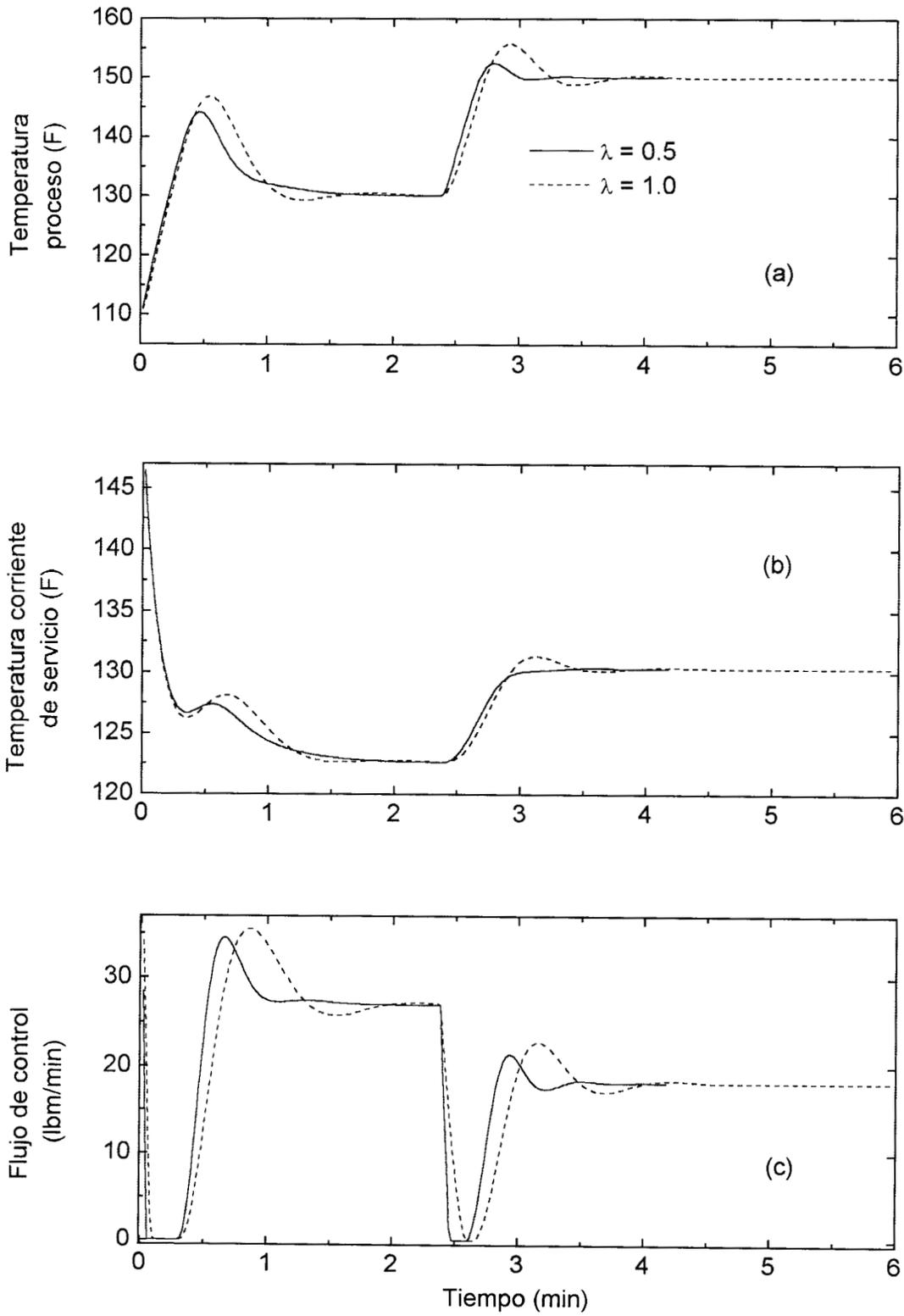


Figura 10

o es inestable, sobre todo cuando la ley de control no afecta sino hasta después de “ r ” mediciones^{**}. Un sistema de grado relativo mayor a uno puede modelarse como un sistema de grado uno con un cierto tiempo de retardo; es decir, puede interpretarse como un sistema de fase no mínima para el cual, tanto el desempeño como la estabilidad (si el sistema a lazo abierto es inestable) están limitados. Aström (1997) muestra que cuanto mayor es el grado relativo de un sistema, mayor es la ganancia del controlador que produce el mismo margen de estabilidad, de ahí se deriva que la ley de control puede no ser estable sino es para un controlador sin restricciones. Considere el siguiente ejemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) \quad (4.15)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + u \quad (4.16)$$

Este sistema es altamente no lineal e inestable. Para este caso, la ley de control predictivo es inestable a menos que el costo del control sea igual a cero. En la Figura 11 se muestra el desempeño del sistema a lazo cerrado. Se observa que la estabilidad del controlador depende dramáticamente de las condiciones iniciales. La experiencia indica que el efecto de las condiciones iniciales es crucial en la estabilidad de la ley de control, cuando se trata de controlar una planta inestable a lazo abierto. Debido a la dinámica inestable del sistema, la predicción de los estados (y en la cual está basado el controlador) puede acumular grandes errores de seguimiento y por ello requerir grandes esfuerzos de control. Además, debido a la dinámica no lineal del sistema la función objetivo puede ser altamente no lineal y por ello tener más de un mínimo. El algoritmo de optimización entonces, puede no encontrar el mínimo global y estar oscilando entre soluciones “subóptimas”. Las acciones de control, entonces derivan en un comportamiento inestable.

^{**} $r \in \mathcal{N}$, es el grado relativo del sistema.

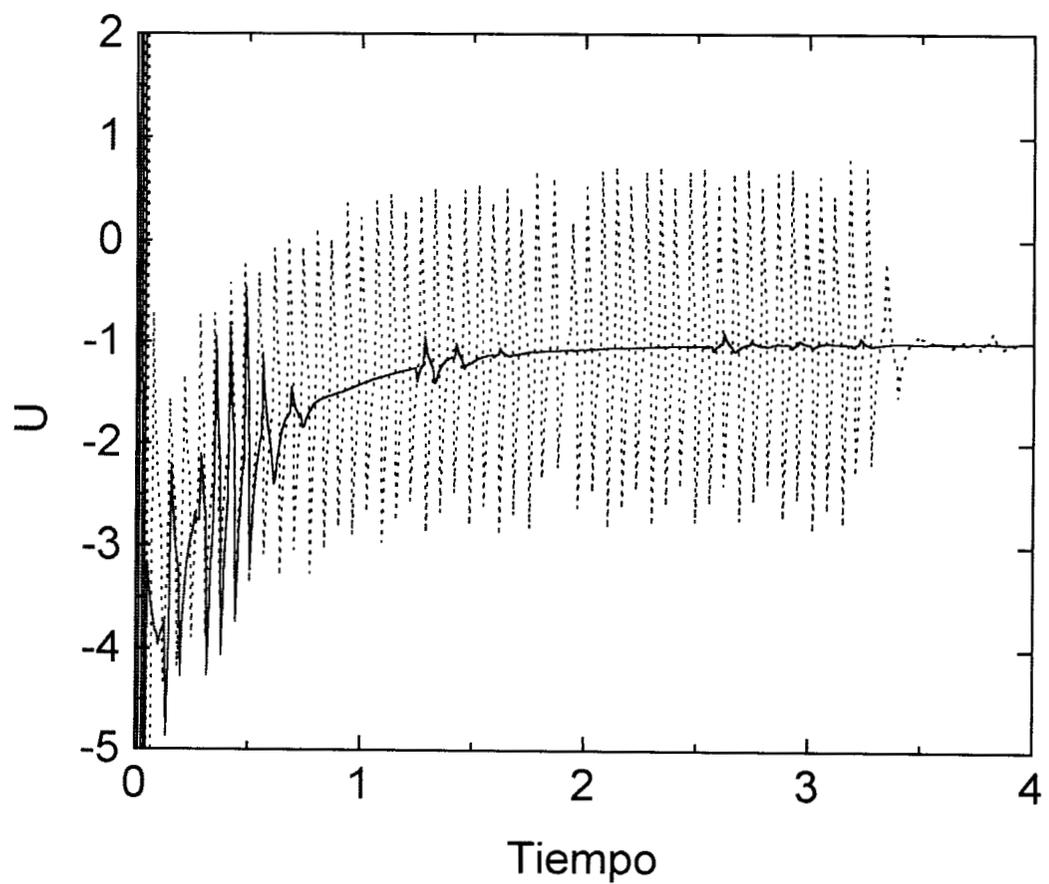
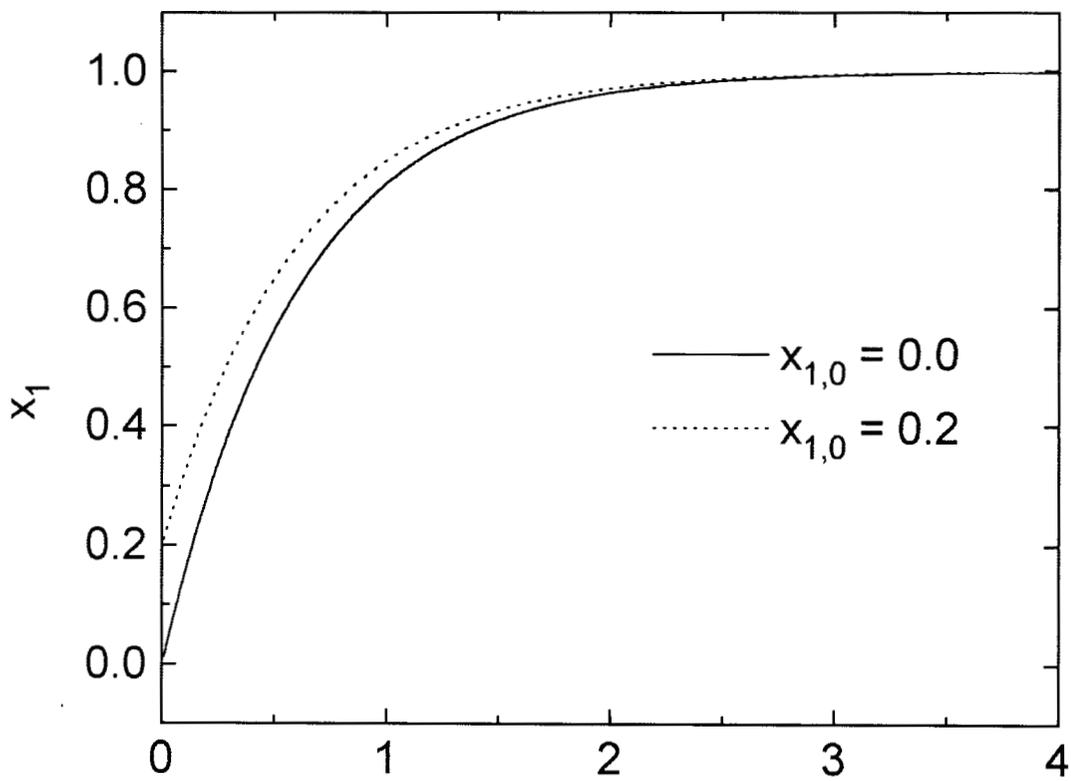


Figura 11

IV.5 Control Predictivo con Acción Integral Explícita

Con el objetivo de robustecer la ley de control de control predictivo se le incorporó un término integral de forma explícita (ecuaciones (2.14)-(2.16)). Este término puede interpretarse, según las investigaciones de de Oliviera y Biegler (1994), como el correspondiente a la introducción de una restricción dura sobre el valor integral del error de seguimiento ($y-y_{ref}$). Bajo esta interpretación, la ganancia integral es el parámetro que modera el peso de la restricción. $\lambda_{int} \rightarrow \infty$ implica el cumplimiento incondicional de la restricción.

El algoritmo con acción integral se ejemplificó con un reactor químico (ecuaciones (3.4) y (3.5)) y un reactor biológico (ecuaciones (3.1)-(3-3)). Para estos casos, las simulaciones se basaron en dos modelos. Un modelo con errores paramétricos y de modelado con base en el cual se construye la ley de control predictivo, y otro riguroso que simula la planta real. El desempeño de la ley de control con acción integral depende dramáticamente de la planta a controlar. En plantas estables, la inclusión de la acción integral deriva en el robustecimiento del control predictivo, eliminando el *off-set* y rechazando perturbaciones. Sin embargo en plantas inestables, las acciones de control requeridas, en general, son muy grandes y derivan, ya sea en un comportamiento inestable o en un pobre desempeño del sistema. A continuación se presentan los dos casos de estudio.

IV.5.1 Reactor Biológico

La Figura 12 muestra el desempeño del reactor biológico bajo la ley de control con acción integral. En ellas, *la incertidumbre se supuso en el desconocimiento de la tasa de degradación de sustrato*, y se observa como la concentración de sustrato es estabilizado a 1 mol/l y luego sometido a una perturbación en escalón al cambiar la referencia a 2.5 mol/l. Al tiempo $t=13.0$ la concentración de sustrato de alimentación cambia súbitamente. La entrada de control está saturada. La dinámica de referencia se propuso de primer orden con un tiempo característico de 0.5. En las figuras se observa como la ley de control es capaz de controlar al sistema rechazando eficazmente las perturbaciones y eliminando el *off-set* producido por las diferencias existentes entre la planta real y el modelo de la planta^{††}.

La experiencia indica que la introducción de una acción integral causa, para bajas ganancias integrales, el rechazo de perturbaciones y la eliminación del sesgo (off-set). No siendo así para ganancias grandes, las cuales tienden a empobrecer el desempeño del sistema. Esto es fácilmente explicable si se interpreta la acción integral como una restricción adicional sobre la salida. Una ganancia integral mayor implica una restricción “más dura” sobre la salida, que deriva en acciones de control más violentas.

IV.5.2 Reactor Químico

La Figura 13 muestra el desempeño del reactor químico bajo la ley de control con acción integral. En ellas, *la incertidumbre se supuso en el desconocimiento de la tasa generación de calor debida a la reacción* y se observa como el sistema trata de estabilizarse a una temperatura de 400K, después es sometido a una perturbación en escalón al cambiar la referencia a 410 K. Al tiempo $t=12.0$ la temperatura del flujo de entrada del reactor cambia súbitamente. La entrada de control está saturada. La dinámica de referencia se propuso de primer orden con un valor de tiempo característico igual a 0.2. En las figuras

^{††} Es importante reconocer que la ley de control predictivo estándar produce *off-set* cuando existen diferencias entre el modelo de la planta y la planta real.

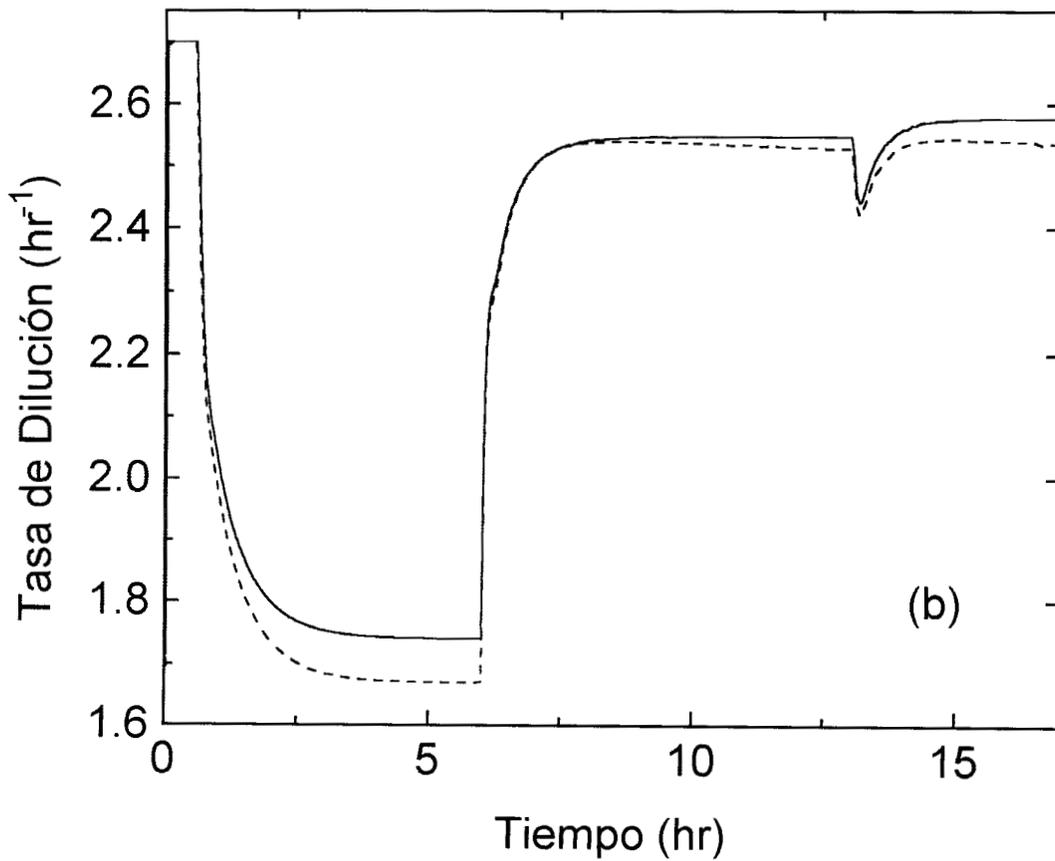
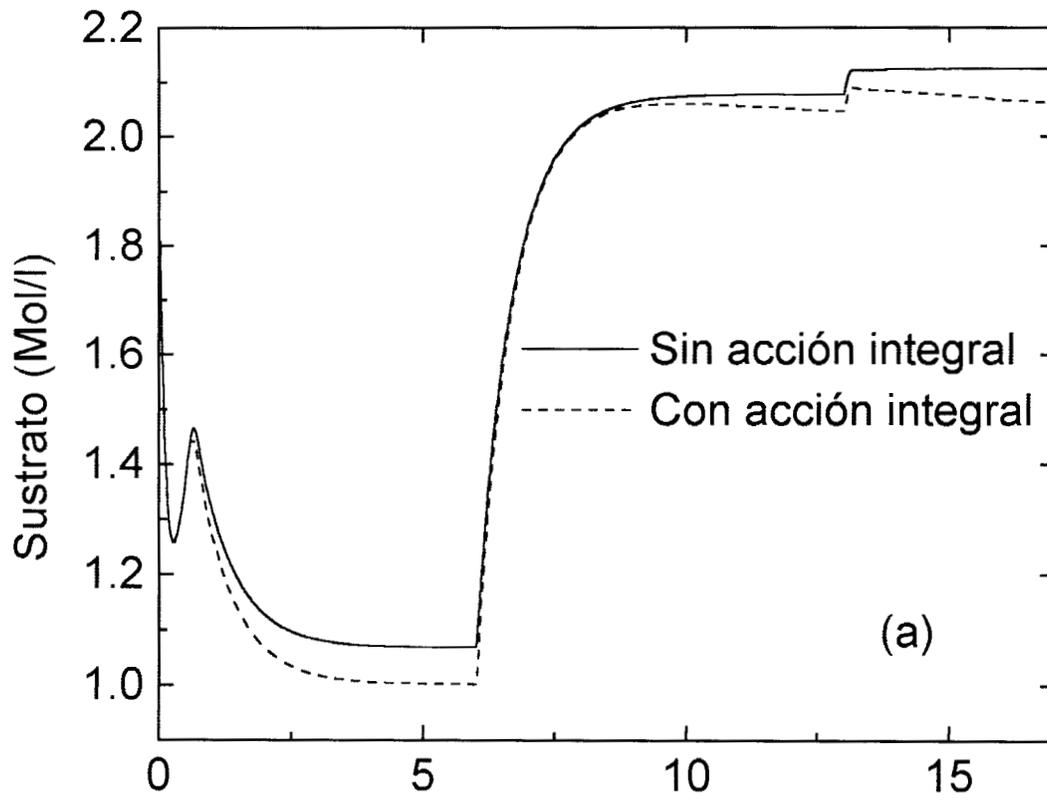


Figura 12

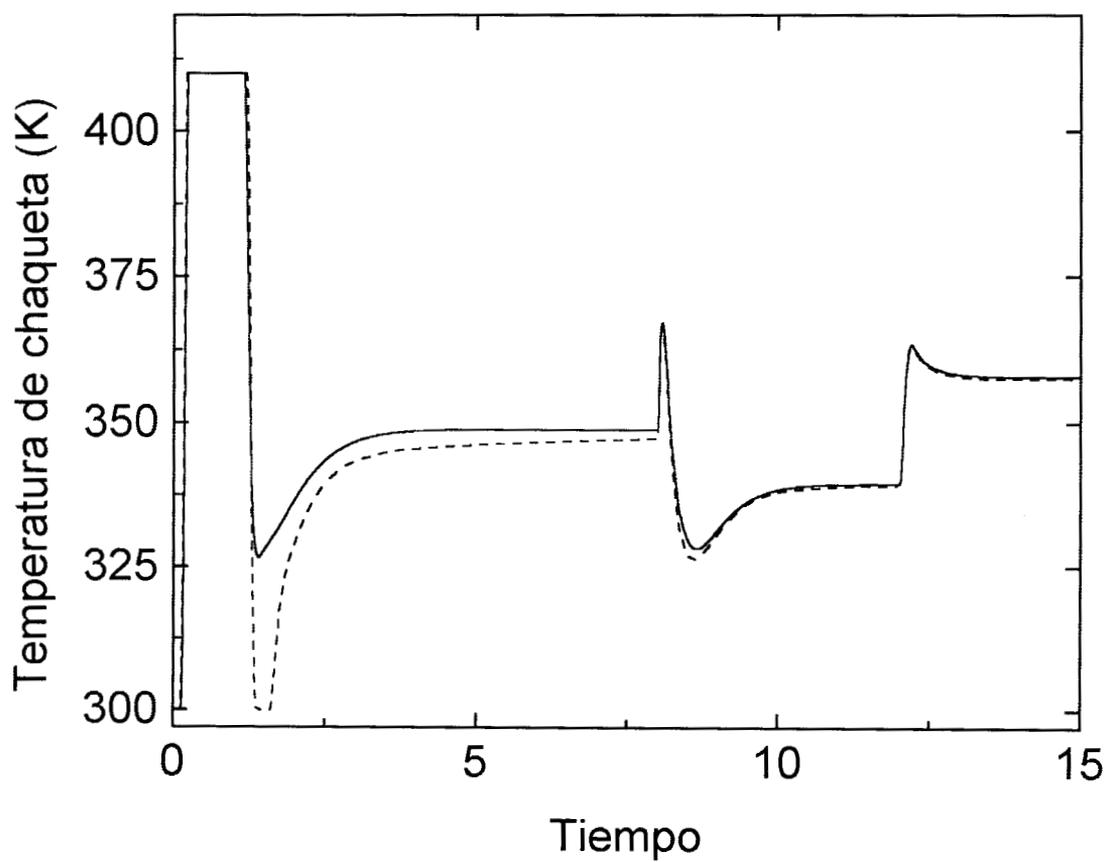
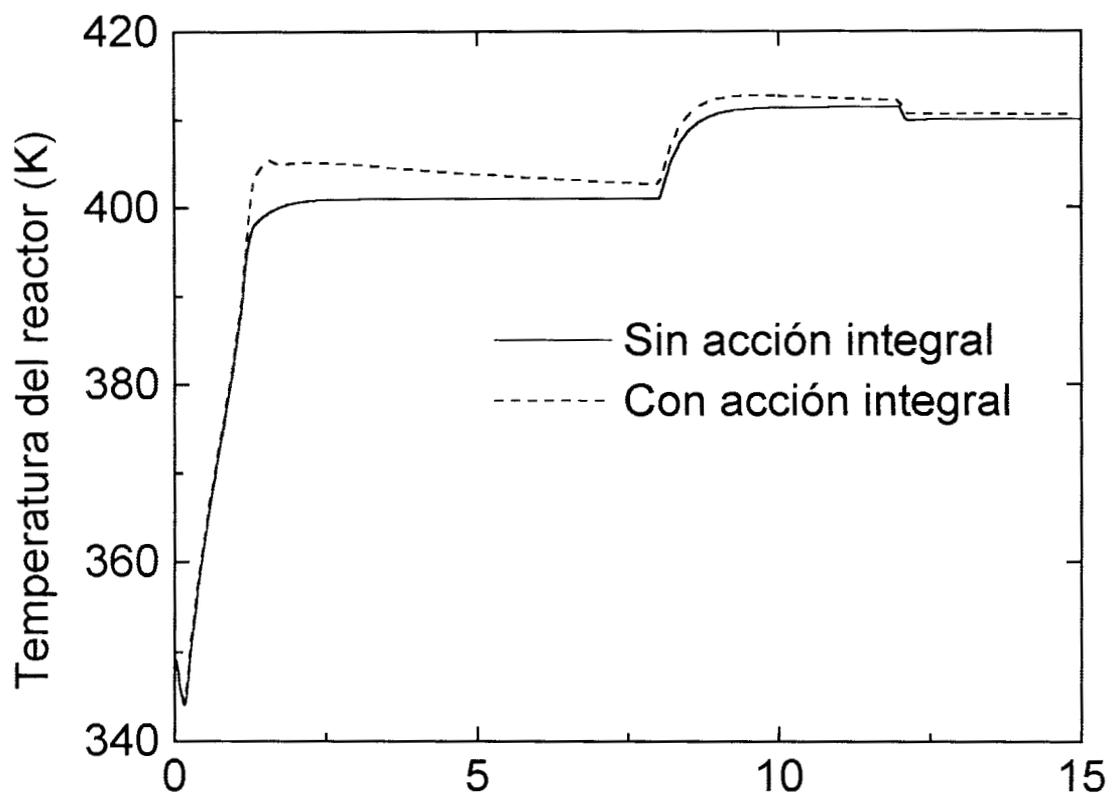


Figura 13

se observa como la ley de control tiene un desempeño pobre, presentando mayor sesgo que el de la ley de control predictiva estándar.

La experiencia indica que la introducción de una acción integral causa, cuando se trata de controlar plantas inestables, pobre desempeño o desestabilización del sistema a lazo cerrado para ciertas ganancias integrales. Existen cuatro fenómenos asociados con el control predictivo con acción integral cuando se requiere estabilizar plantas inestables:

1. **Existe un costo máximo de control para el cual la ley de control predictivo es estable.** Este fenómeno está directamente asociado con el hecho de que sistema es inestable a lazo abierto, pues se requieren grandes acciones de control para estabilizarlo. Un costo de control muy grande puede derivar en una ley de control insuficiente.
2. **Existe una ganancia integral máxima para la cual el sistema a lazo cerrado es estable.** Si se parte del hecho de que el término de acción integral puede verse como una restricción adicional sobre la salida, la ganancia integral se interpreta como el peso que modera la restricción. Un problema “más restringido” requiere de acciones de control más grandes. De Oliviera y Biegler (1994) muestran que existen valores de la ganancia para los cuales la LCP (Ley de Control Predictivo) es inestable ($\lambda_{in} \rightarrow \infty$). Estos autores, muestran que tal inestabilidad se deriva de que en la ley de control con restricciones existen términos que están asociados a la dinámica del sistema a lazo abierto.
3. **La ley de control es altamente dependiente del tiempo de muestreo.** Un valor de muestreo grande tiende a desestabilizar al sistema, debido principalmente a que las acciones de control pueden no ser oportunas (se calcula la ley de control a cada tiempo de muestreo) y el sistema opera por algún tiempo a lazo abierto. Por otro lado se requiere también un tiempo de muestreo mínimo pues valores muy pequeños producen problemas de estabilidad matemática de los algoritmos. Debe tenerse siempre presente en esta discusión, que el tiempo de muestreo no es, en general, un parámetro que se

pueda fijar libremente y es necesario demostrar para su implementación, que la ley de control propuesta es estable para cierto tiempo de muestreo.

4. **El desempeño de la ley de control es dependiente del tiempo de filtrado** y debe escogerse de un valor moderado. Largos tiempos de filtrado no son recomendables, pues la dinámica de la referencia puede ser demasiado lenta como para que se alcance la referencia (en un periodo de tiempo práctico). Por otro lado, esta dinámica debe ser lo suficientemente lenta como para que el sistema no demande grandes esfuerzos de control, los cuales pueden desestabilizar al sistema

La ley de control predictivo con acción integral no es entonces, recomendable cuando se trata de controlar plantas inestables, debido a la poca robustez del algoritmo. Sin embargo, puede ser utilizada de manera satisfactoria cuando se trata de plantas estables, como se vió en la Sección IV.5.1.

IV.6 Algunas Reflexiones sobre Control Predictivo

IV.6.1 Control Predictivo en Sistemas con más Entradas que Salidas

Una de las características más aprovechables para controlar un sistema es la multiplicidad de entradas sobre una salida debido a la gran estabilidad y desempeño que presentan a lazo cerrado. En estos sistemas existen más grados de libertad en las acciones de control que pueden llevar al sistema a la referencia y pueden estabilizarse asintóticamente aún cuando algunas entradas estén saturadas.

Muchos procesos químicos tienen esta característica (Sarimveis *et al.* 1996), lo cual los hace candidatos óptimos para la utilización de algoritmos de control robusto que utilicen todas las entradas disponibles. Sin embargo, bajo el marco de control clásico (PI, PID) la

sintonización de tales controladores no es tarea fácil, debido al vasto número de grados de libertad y el poco entendimiento que se tiene de su interacción. En el contexto de control predictivo esta multiplicidad es particularmente ventajosa, pues se puede sintonizar de forma **directa** e independiente la disponibilidad de estas entradas. En la Sección IV.4 se vio que es posible sintonizar la ley de control predictivo utilizando dos grupos de parámetros: los horizontes de predicción y los costos de control; los cuales afectan directamente la estabilidad y el desempeño de la ley de control. Aún más, dentro de este contexto existe la manera de moderar estos efectos de forma independiente.

El uso de dos entradas de control sobre una salida supone menor tiempo de estabilización y menor esfuerzo de control que el obtenido con una sola entrada. Para ilustrar las ventajas de la utilización de las entradas disponibles de control, considere el caso de un reactor químico de tanque agitado clásicamente controlado con la temperatura de la chaqueta y para el cual se ha propuesto como segunda entrada de control la temperatura del flujo de entrada. El modelo del sistema se muestra a continuación^{††}:

$$\dot{x}_1 = \theta(u_2 - x_1) + \beta Ke^{-\frac{E_a}{Rx_1}} x_2 - \gamma(x_2 - u_1) \quad (4.17)$$

$$\dot{x}_2 = \theta(S_e - x_2) - Ke^{-\frac{E_a}{Rx_1}} x_2 \quad (4.18)$$

$$y = x_1 \quad (4.19)$$

Este modelo se utilizó para realizar las simulaciones numéricas que se ilustran la Figura 14, en ésta se muestra la comparación del desempeño del controlador para los casos de una y dos entradas de control. La ley de control se deriva de un modelo con errores paramétricos y de modelado, mientras que un modelo riguroso simula la planta real. En las figuras se observa que aunque el controlador lleva al sistema a la referencia en ambos casos, existe una notoria diferencia en el tiempo que ocupan para lograrlo.

^{††} El valor de las constantes utilizadas en las simulaciones se muestran en el apéndice I.

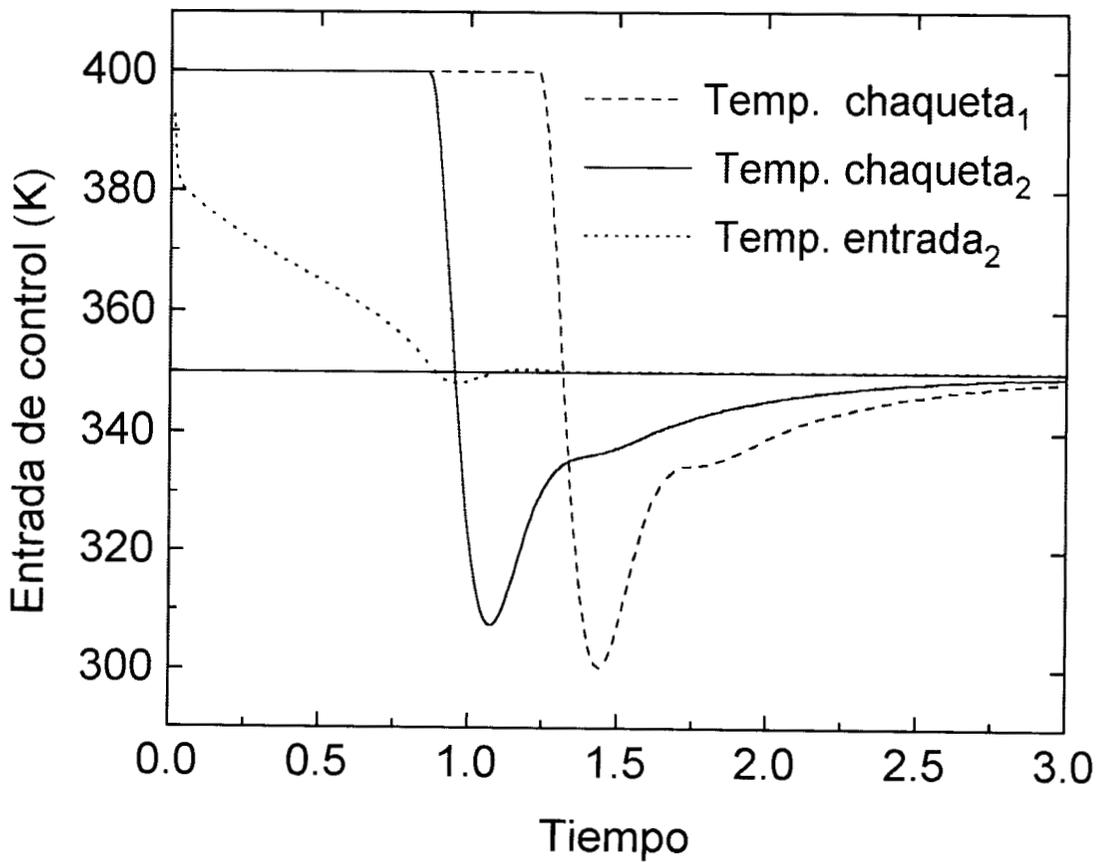
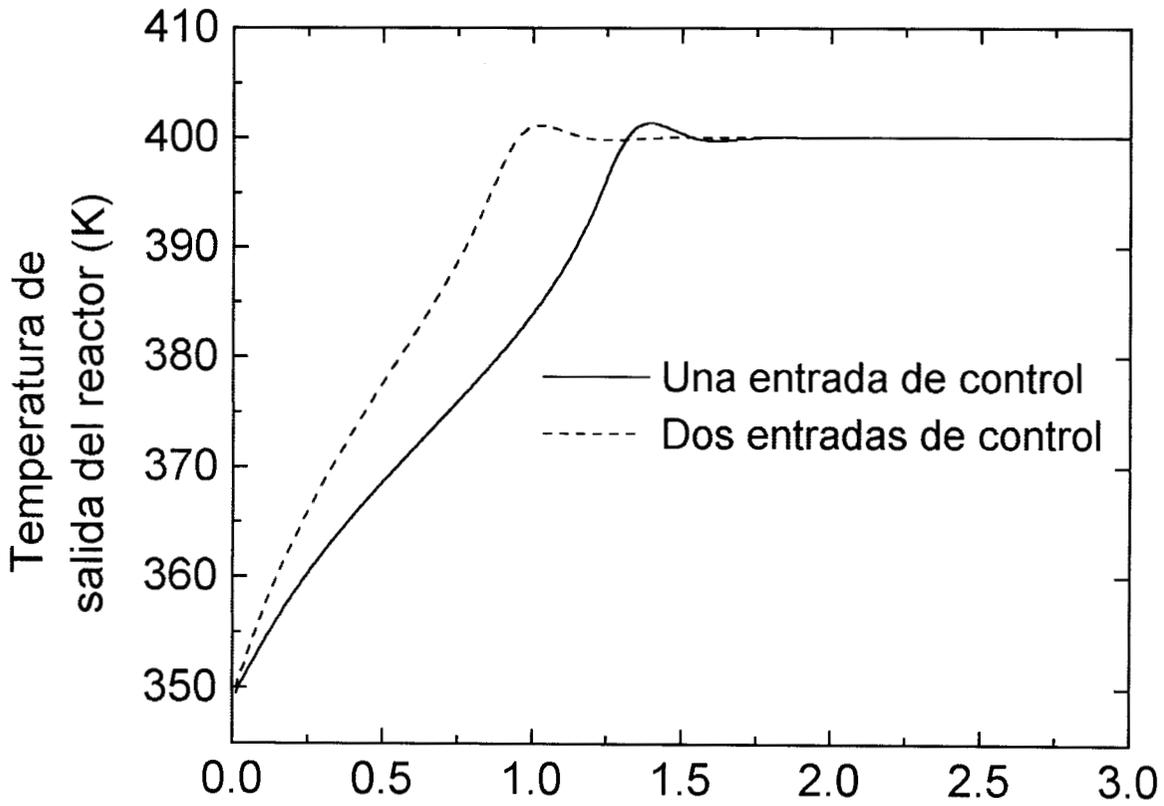


Figura 14

Los esfuerzos de control demandados a la temperatura de la chaqueta son menores para el caso de dos entradas de control, lo que implica un mejor desempeño. El efecto de la saturación de una entrada, provoca la compensación de la segunda entrada de manera que la salida siga la referencia. Esto resulta en un comportamiento a lazo cerrado más estable.

En el esquema de una sola entrada, la saturación del controlador representa un comportamiento momentáneo a lazo abierto, lo que significa una desventaja en sistemas inestables. La disponibilidad de las entradas de control se simula por su costo. Un mayor costo de control significa una mayor restricción sobre la cantidad y velocidad con la que la entrada de control es disponible. La elección de un mayor costo de control para la entrada más cara (económicamente hablando), puede resultar en costos de operación menores.

IV.6.2 Comparación del Control Predictivo contra un Controlador Clásico

Como se explicó en el Capítulo II de este documento, el control predictivo es un esquema de control versátil capaz de lidiar con un vasto número de plantas y además tiene la ventaja de que su estructura es de fácil comprensión para el personal de la planta. Entre las cualidades del control predictivo ejemplificadas en la presente tesis, está la facilidad de manejo de sistemas de múltiples entradas y salidas. En la Sección IV.7 se mostró como el esquema de control predictivo es sencillo de aplicar en estos casos, pues su sintonización es una extensión de la sintonización para plantas de una entrada y una salida: Esto lo convierte en una estrategia noble de control y en un buen candidato para el control de plantas industriales.

Sin embargo, anterior a su implementación, es necesario evaluar el desempeño del control predictivo en relación con otros controladores usados comúnmente en la industria, p. ej. el proporcional integral (PI). En esta sección se llevará al cabo tal comparación, la cual se restringirá a plantas estables para las que existen en la literatura reglas de sintonizado para ambos esquemas (McIntosh *et al.*, 1991; Luyben, 1996; Chien y Fruehauf, 1990). Con este

fin, considere el reactor biológico de las ecuaciones (3.1)-(3.3) al cual se le aplican dos estrategias de control: *a) Control predictivo con un estimador de incertidumbres* (ecuaciones (4.1)-(4.3)) *y b) Un control Proporcional Integral.*

En la sección IV.4.1-1 se muestra la metodología seguida para aplicar el esquema de control predictivo con un estimador de incertidumbres discreto al caso del reactor biológico y se desarrollan las ecuaciones pertinentes. La implementación del control proporcional se hace en forma directa al asignar la dinámica del controlador de la siguiente forma:

$$u = K_c \left[(y - y_{ref}) + \frac{1}{\tau_I} \int (y - y_{ref}) \right] \quad (4.19)$$

La salida de control y los estados se definen por las ecuaciones (3.1)-(3.3). Las ganancias del controlador PI se designaron según las reglas de sintonización mostradas por Chien y Fruehauf (1990) y bajo la presuposición de que la planta se puede modelar de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau s + 1} \quad (4.20)$$

donde las ganancias se escogen de la siguiente forma:

$$K_c K_p = \frac{\tau}{\tau_{CL} + \theta} \quad (4.21)$$

$$\tau = \tau_I \quad (4.22)$$

El resultado de aplicar estas estrategias de control con la utilización de métodos numéricos se muestra en la Figura 15. En ésta, el sustrato es alimentado a 2.0 mol/g y estabilizado a 1 mol/g. Al tiempo $t = 6.0$, el sistema es sometido a una perturbación en escalón, al cambiar el valor de referencia a $x_{ref} = 2.5$ g/mol. y en $t = 10.0$ entra una perturbación en la concentración de sustrato del flujo de entrada. La dinámica de la referencia se propuso de

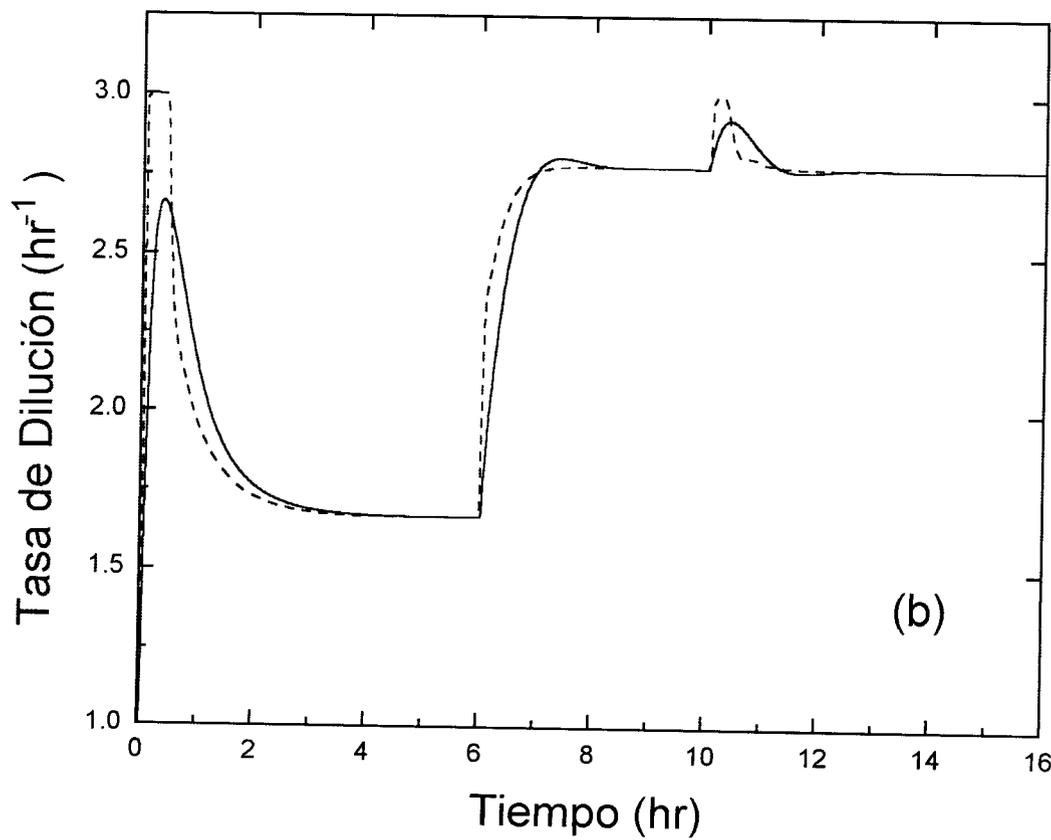
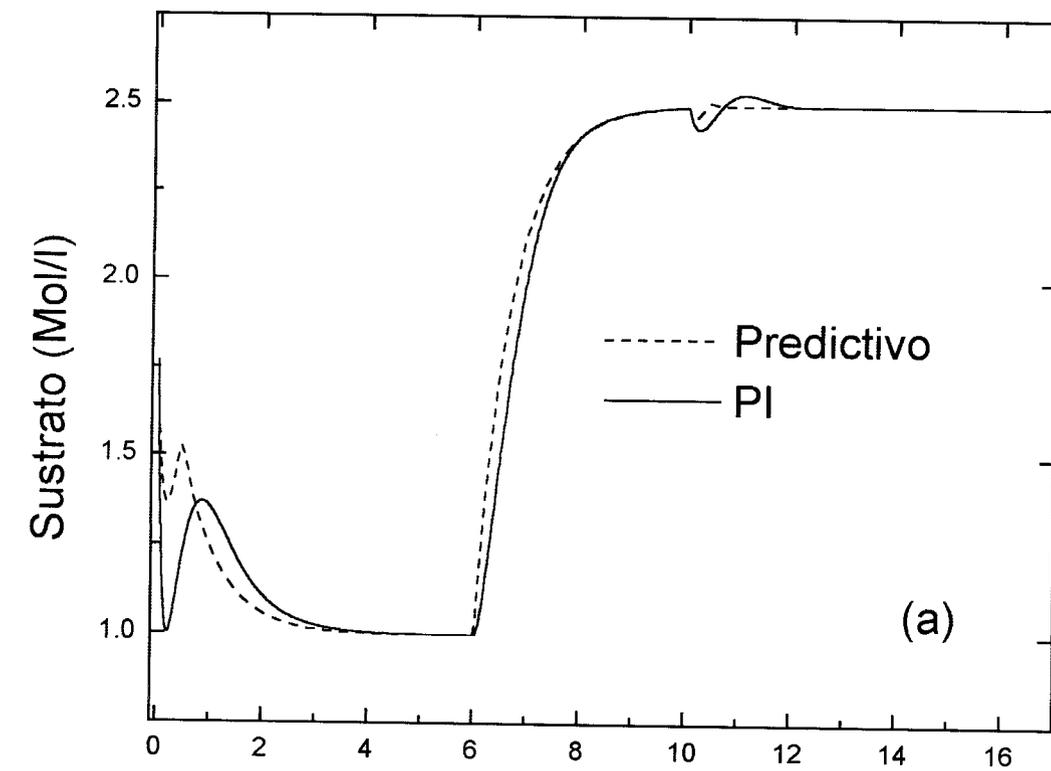


Figura 15

primer orden con un tiempo característico $\tau = 0.7$. Las entradas de control están saturadas y no pueden ser menores a cero, ni mayores a 3 hr^{-1} .

Como se observa en la Figura 15, ambos esquemas pueden rechazar perturbaciones pero difieren en la respuesta transitoria para lograrlo. El esquema de control predictivo muestra un mejor desempeño en la salida, estabilizando más rápidamente y con menor sobredisparo. Así también, tiene una mejor respuesta a las perturbaciones en las condiciones de entrada. El controlador proporcional integral por su parte, requiere de esfuerzos de control menores lo que en las simulaciones repercute en que el control no se satura. Sin embargo, si existe saturación en el controlador, es necesario saber de antemano a su implementación, cual es la cota máxima sobre el controlador que derivará un comportamiento estable a lazo cerrado. Esta tarea puede ser llevada al cabo, mediante un análisis con funciones de Lyapunov, según lo muestra Álvarez –Ramírez, *et al.* (1997b) y Solís (1998). O bien mediante simulaciones numéricas, utilizando un procedimiento de prueba y error para saber las cotas máximas y mínimas del controlador. Por supuesto utilizando este último enfoque, no puede garantizarse que tales cotas existen.

Capítulo V
Conclusiones

Capítulo V. Conclusiones

En este capítulo se resumen los logros y resultados de la presente tesis, así como los aspectos más importantes que vinculan el uso del control predictivo. Además, se dedica una pequeña sección a la discusión sobre el trabajo futuro en la línea de control predictivo.

V.1 Logros y Conclusiones

En esta sección se resumen los logros obtenidos en la presente tesis, con base en los resultados presentados en el Capítulo IV. Así también se anexan las conclusiones pertinentes en cada caso. Cabe hacer notar, que aunque la aportación principal de este trabajo ha sido sobre la línea de la estimación de incertidumbres en el campo del control predictivo; es conveniente mayor investigación en lo referente a la aplicación experimental o industrial de las metodologías aquí presentadas.

1. La ley de control predictivo se implementó mediante simulaciones numéricas en reactores agitados, columnas de destilación e intercambiadores de calor; y se mostró que para todos estos casos, tal aplicación es factible.
2. Se establece que el método de integración influye fuertemente en la estabilidad de la ley de control predictivo, cuando se trata de plantas inestables o altamente no lineales.
3. Se establece que el sintonizado de la ley de control predictivo puede llevarse al cabo con la manipulación de dos parámetros ligados estrechamente a la estabilidad y desempeño a lazo cerrado: el horizonte de predicción y el costo de

control. Se logró establecer el comportamiento del sistema en relación con éstos parámetros y se obtuvieron lineamientos para su sintonización.

4. Se propusieron dos esquemas de estimación de incertidumbres, uno basado en un estimador discreto y el otro en uno continuo. La elección de tales estimadores se efectúa con base en las propiedades de entrada-salida del sistema.
5. La ley de control predictivo con estimación de incertidumbres basada en un observador discreto se ejemplificó en reactores agitados: un químico y uno biológico, además de una columna de destilación. Las simulaciones mostraron que esta ley de control puede no ser recomendable cuando se trata de controlar sistemas mal condicionados, pues el desempeño obtenido es pobre. Además, en sistemas inestables el valor del tiempo de muestreo puede ser definitivo para asegurar la estabilidad del lazo de control. Si se eligen valores grandes del tiempo de muestreo, éstos causan inestabilidad en el sistema, mientras que valores muy pequeños pueden no ser recomendables cuando la medida esta contaminada por ruido.
6. La ley de control predictivo con estimación de incertidumbres basada en un observador continuo se ejemplificó en un intercambiador de calor. Las simulaciones mostraron que esta ley de control tiene un buen desempeño en este caso, pero puede no ser recomendable cuando se trata de controlar sistemas de grado relativo mayor a uno, cuando éstos son inestables a lazo abierto. En este caso, la dependencia de la estabilidad depende dramáticamente de las condiciones iniciales.
7. Se construyó un esquema de control predictivo que incluye acción integral, el cual tiene la propiedad de eliminar el sesgo (*off-set*) a bajas ganancias integrales y se mostró que este esquema puede no ser recomendable en sistemas inestables a lazo abierto. Para plantas inestables existen cuatro fenómenos asociados con el

comportamiento a lazo cerrado: Existe un costo de control máximo, así como una ganancia integral máxima para la cual la ley de control es estable. La estabilidad del sistema es altamente dependiente del tiempo de muestreo y del tiempo de filtrado de la referencia.

8. La ley de control predictivo es altamente recomendable cuando se trata de controlar sistemas de múltiples entradas y salidas de control. La ventaja de este esquema radica en la facilidad con que este esquema es sintonizado, en el cual la acción de los parámetros de sintonización es independiente.

V.2 Trabajo Futuro

Como se mencionó anteriormente, aunque la aportación principal de este trabajo ha sido sobre la línea de la estimación de incertidumbres en el campo del control predictivo; es conveniente mayor investigación en lo referente a la aplicación experimental y/o industrial de estos esquemas. Tarea que deberá ser llevada al cabo eventualmente y de la que se prevén algunos contratiempos, en especial sobre la adquisición y desarrollo de interfases. Sin embargo, existen otros temas dentro del marco teórico que deberán ser resueltos antes de pensar en su aplicación experimental. Tal es el caso por ejemplo del desarrollo o fortalecimiento de herramientas teóricas con las que se pruebe la estabilidad de las leyes de control predictivo, bajo condiciones arbitrarias y reales de operación. Otro sería el caso del desarrollo de procedimientos de diseño con los que se asegure el desempeño robusto del sistema a lazo cerrado. También, se requiere de mayor investigación acerca de cómo hacer más eficientes y rápidos los algoritmos de optimización, de manera que su aplicación sea factible aún en procesos altamente sofisticados. En la parte introductoria de este documento (Capítulo I) se presentan otras áreas en las que se requiere mayor investigación en el campo del control predictivo.

Bibliografía

- Álvarez-Ramirez, J., Cervantes I, Femat R., (1997a) *Robust Controllers for a Heat Exchanger*, Ind. Eng. Chem. Res., **36**, No.2, 382-388
- Álvarez-Ramirez, J., Suárez R., Solís-Daun, J., (1997b) *Global and Semiglobal Stabilization of Linear Systems using Constrained Control*, submitted Int. J. Robust and Nonlinear Control
- Aström, K.J.,(1997) *Limitations on Control System Performance*, Proc. ECC
- Bailey E.J. and Ollis, D.F., (1986), *Biochemical Engineering Fundamentals*, 2nd. Edition, McGraw-Hill
- Barnerjee, P., Shah, S. L., (1985), *The Role of Signal Processing Methods in the Robust Design of Predictive Control*, Automática, **31**, No. 5, 681-695
- Chen, C.C., Shaw, L. (1982), *On Receding Horizon Control*, Automatica, **15**, 349.
- Chien, L., Fruehauf, P.S., (1990), *Consider IMC Tuning to Improve Controller Performance*, Chem. Eng. Progr., October, 33-41
- Clarke, D.W., Mohtadi, C., Tuffs, P.S. (1987), *Generalized Predictive Control-Part I The Basic Algorithm*, Automatica, **23**, No. 2, 137-148.
- Clarke, D.W., Mohtadi, C., Tuffs, P.S. (1987), *Generalized Predictive Control-Part II Extensions and Interpretations*, Automatica, **23**, No. 2, 149-160.
- Cutler. C.R., B.L. Ramaker (1979), *Dynamic matrix control- a computer control algorithm*. AIChE, National MTG, Houston, Texas.

- De Oliviera, N.M.C., Biegler, L.T., (1994), *Constraint Handling and Stability Properties of Model-Predictive Control*. AICHE J., **40**, No.7
- Deshpande, P.B., Caldwell, J.A., Yerrapragada, S.S., Bhalodia, M.A., (1995), *Should you Use Constrained Model Predictive Control?*, Chem. Eng. Prog., March 65-72.
- García, C.E. and M. Morari (1982). *Internal model control-1. A unifying review and some new results*. Ind. Engng. Chem. Process Des. Dev., **21**, 308-323.
- García, C.E., Prett, D.M., Morari, M., (1989), *Model Predictive Control: Theory and Practice- a Survey*, Automatica **25**, No. 3.
- Genceli, H., Nikolaou, M., (1993), *Robust Stability Analysis of Constrained L_1 -Norm Model Predictive control*, AICHE J., **39**, No. 12.
- Goodwin, G.C., Sin K.S., (1984), *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice-Hall.
- Hrissagis, K., Crisalle, O.D., Sznaier, M., (1996), *Robust Unconstrained Predictive Control design with Guaranteed Nominal Performance*, AICHE. J., **42**, No. 5.
- Isidori, A., (1989) *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Heidelberg Germany.
- Kailath, T., (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall, USA.
- Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V., Morse A.S., (1991) *Adaptive Output-feedback Control of a Class of Nonlinear Systems*, Proc. Conf. Decision Contrl.
- Keerthi, S.S., Gilbert E.G., (1988), *Optimal Infinite-Horizon Feedback Laws for a General Class of Constrained discrete-Time systems: Stability and Moving- Horizon Approximations*, JOTA **57**, No. 2.
- Kouvaritakis, B., Rossiter, J.A., Chang, A.O.T., (1992), *Stable Generalized Predictive Control: an algorithm with guaranteed stability*, IEE Proceeding-D, **139**, No.4.
- Kwon, W.H., Pearson, A.E., (1978) *On Feedback Stabilization of Time Varying Discrete*

- Linear Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr. **AC-23**, 479.
- Lee J.H., Yu, Z.H., (1994) *Tuning of Model Predictive Controllers for Robust Performance*, Computers Chem. Engng., **18** No. 1.
- Luyben , W.L. (1990), *Process Modeling, simulation, and Control for Chemical Engineers*, Mc. Graw-Hill.
- Luyben , W.L. (1996), *Tuning Proportional-Integral-Derivative Controllers for Integrator/Deadtime Processes*, Ind. Eng. Chem. Res. **35**, 3480-34831.
- Maciejowski, J.M., (1989) *Multivariable Feedback Design*, Addison - Wesley
- McIntosh, A.R., Shah, S.L., Fisher, D.G., (1991), *Analysis and Tuning of Adaptive Generalized Predictive Control*, The Canadian J. Chem. Eng., **69**, february.
- Newton, G.C., L. A. Gould and J.F. Kaiser, (1957), *Analytical Design of Feedback Controls*. Wiley, New York.
- Norquay, S.J., Plazoglu, A., Romagnoli, J.A., (1997), *Unconstrained and Constrained Model Predictive Control Using Wiener Model: An Application to pH Neutralization*, Proc. ACC.
- Ogunnaike, B.A., (1994), *On-line modelling and Predictive control of an Industrial terpolymerization Reactor*, Int. J. Control, **59**, No. 3, 711-729.
- Press, W.P., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., (1986), *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing.*, Cambridge University Press.
- Rawlings, J.B., Muske, K.R. (1993), *The Stability of Constrained Receding Horizon Control*, IEEE Trans. Automat. Contr. **38**, No.10.
- Richalet, J.A., A. Rault, J.L. Testud and J. Papon (1978), *Model Predictive Heuristic Control: Applications to an industrial process*. Automatica, 14, 413-428.
- Richalet, J, (1993), *Industrial Applications of Model Based Predictive Control*. Automatica,

29, No.5 1251-1274.

Sarimveis, H., Genceli, G., Nikolaou, M., (1996). *Design of Robust Nonsquare Constrained Model-Predictive Control*, AIChE J., **42**, No. 9, 2582-2593

Sistu, P.B., Bequette, B.W., (1991) *Nonlinear Predictive Control of Uncertain Processes: Application to a CSTR*, AIChE J., **37**, No. 11

Sistu, P.B., Bequette, B.W., (1996) *Nonlinear Model-Predictive control: Closed-loop Stability Analysis*, AIChE J., **42**, No. 12

Sistu, P.B., Gopinath, R.S., Bequette, B.W., (1991) *Implementation Issues in Nonlinear Predictive Control*, Proc. Amer. Control Conf., 2361

Solis, D.J.E., (1998) *Estabilización de Sistemas Afines Mediante Controles Acotados*, Tesis de Doctorado. UAM-Izt. México.

Vuthandam, P., Genceli, H., Nikolaou, M., (1995), *Performance Bounds for Robust Quadratic Dynamic Matrix Control with End Condition*, AIChE J., **41**, No.9, 2083-2097.

Yamura Rani, K., Unbehauen H.,(1997) *Study of Predictive Controller Tuning Methods*, Automatica., **33**, No. 12, 2243-2248

Yoon, T.W., Clarke, D.W.,(1995) *Observer Design in Receding-horizon Predictive Control*, Int. J. Control., **61**, No. 1

Apéndice I

Valores Numéricos de las Constantes Utilizadas en las Simulaciones.

Reactor Químico

$$\begin{aligned}\theta &= 1.0 \text{ t}^{-1} \\ \gamma &= 1.0 \text{ t}^{-1} \\ \beta &= 200.0 \text{ L}^3 \text{ T t}^{-1} \\ K &= \exp(25.0) \text{ t}^{-1} \\ T_e &= 350.0 \text{ T} \\ E_a/R &= 10000.0 \text{ T} \\ S_e &= 1.0 \text{ mol t}^{-1}\end{aligned}$$

Reactor Biológico (Bailey y Ollis, 1986)

$$\begin{aligned}\mu_{max} &= 5.5 \text{ t}^{-1} \\ K_s &= 1.8 \text{ mol t}^{-1} \\ Y &= 0.3 \text{ mol/mol} \\ S_0 &= 1.0 \text{ mol t}^{-1}\end{aligned}$$

Intercambiador de Calor (Álvarez-Ramirez et al., 1997a)

$$\begin{aligned}F_p &= 25.0 \text{ M t}^{-1} \\ M_p &= 15.0 \text{ M/mol} \\ M_c &= 40.0 \text{ M/mol} \\ x_{1,e} &= 200.0 \text{ F} \\ x_{2,e} &= 70.0 \text{ F} \\ C_{p,1} &= 0.38 \text{ BTU mol}^{-1} \\ C_{p,2} &= 0.456 \text{ BTU mol}^{-1} \\ U(t) &= 0.6 \\ Aa &= 20 \text{ L}^2 \\ \Delta x_{eff} &= [(x_{1,e} - x_1) + (x_2 - x_{2,e})]/2\end{aligned}$$

Columna de Destilación (Luyben, 1990)

$$F_a = 10.0 \text{ mol t}^{-1}$$

$$z_a = 0.5$$

$$n_e = 41$$

$$n_a = 19$$

$$h_e = 10.0$$

$$h_c = 100.0$$

$$h_r = 100.0$$

Apéndice II

Algoritmo de Optimización Multivariable de Métrica Variable Davidson-Fletcher-Powell (DFP).

El procedimiento de optimización de una función objetivo f para la mayoría de los algoritmos es estructuralmente similar. Así, tal procedimiento puede estandarizarse de la siguiente forma: La búsqueda del mínimo de una función f , empieza en un punto \mathbf{P} del espacio N -dimensional, esta búsqueda prosigue en la dirección \mathbf{n} , la cual satisface cierto criterio de elección. La función es evaluada sucesivamente a lo largo de las direcciones de búsqueda, hasta que la condición de existencia del mínimo es satisfecha.

El algoritmo de Davidson-Fletcher-Powell, es un ejemplo algoritmos de métrica variable, también llamados métodos *quasi-Newton*. En estos algoritmos, se toma como direcciones iniciales de búsqueda los vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$. Así dada cierta aproximación \mathbf{P} y dirección \mathbf{n} , se encuentra un escalar λ que minimiza la función $f(\mathbf{P}+\lambda\mathbf{n})$. Entonces se reemplaza \mathbf{P} por $\mathbf{P}+\lambda\mathbf{n}$ y \mathbf{n} por $\lambda\mathbf{n}$. El procedimiento del algoritmo **DFP** no es muy diferente del de gradiente conjugado. En éstos, se acumula información de las sucesivas minimizaciones en línea, las cuales conducen al mínimo exacto de la forma cuadrática N -dimensional. Así, el método converge cuadráticamente en la mayoría de las funciones suaves. Ambos procedimientos, de gradiente conjugado y métrica variable, requieren información del gradiente de la función objetivo (o primeras derivadas parciales), pero la diferencia consiste en la cantidad de información que es acumulada. En los algoritmos de métrica variable se requiere almacenar una matriz de orden $N \times N$, en vez de requerir un almacenamiento de un arreglo de orden N (como los métodos de gradiente conjugado), desventaja clara desde un punto de vista computacional. Sin embargo, el algoritmo de **DFP** tiene la ventaja de que no requiere calcular en cada tiempo la inversa de la matriz hessiana, sino que ésta es actualizada a través de una aproximación. La inversa de la matriz hessiana

se calcula en una primera iteración y posteriormente se actualiza con un término de corrección como se muestra a continuación:

Paso 1) Se define $d_k = -S_k f_x(x_k)$

donde, $S_k = F^{-1}(x_k)$; f es la matriz hessiana

Paso 2) Se resuelve el problema $\min_c f(x_k + c_k d_k)$ y se obtiene c_k

Paso 3) $x_{k+1} = x_k + c_k d_k$

Paso 4) Se define, $P_k = c_k d_k$ y se calcula $f_x(x_{k+1})$

Paso 5) Se actualiza la matriz hessiana como:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{P_k P_k^T}{P_k^T q_k} - \frac{S_k q_k q_k^T S_k}{q_k^T S_k q_k}$$

donde $q_k = f_x(x_{k+1}) - f_x(x_k)$

El algoritmo antes propuesto tiene convergencia cuadrática según lo establece Press *et al.* (1986). Este autor muestra algunas de las demostraciones de las ecuaciones que comprenden el algoritmo.