

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

“Diagrama de fase efectivo de la interacción fuerte en presencia de campos magnéticos extremos”

TESIS

que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias (Física)

PRESENTA

Ana Gabriela Vargas Fernández
MATRÍCULA 2223804753
ORCID 0009-0007-7744-9884
CORREO agvsfz@gmail.com

ASESOR

Dr. Luis Alberto Hernández Rosas

JURADO

PRESIDENTE: Dr. Miguel Angel Bastarracheaa Magnani
SECRETARIO: Dr. Luis Alberto Hernández Rosas
VOCAL: Dr. Wolfgang Perter Bietenholz

Iztapalapa, Ciudad de México, 28 de mayo 2025.

Para mi familia

AGRADECIMIENTOS



En primer lugar, quiero manifestar mi gratitud al Dr. Luis Alberto Hernández, mi asesor, por su guía académica, su paciencia y el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo. Gracias para inspirarme y mostrarme que en este camino puedes conocer personas asombrosas quienes al final consideras tu familia. Agradezco mucho las oportunidades brindadas para enriquecer mi formación académica. Su apoyo en la revisión y redacción de esta tesis fue fundamental para alcanzar este logro.

Agradezco también a la Dra. Ana Julia, con quien realicé una estancia de investigación que resultó en valiosas ideas y aprendizajes. Su disposición para compartir su conocimiento, su trato amable y el apoyo brindado durante mi estancia hicieron de esa experiencia un capítulo muy enriquecedor en mi vida académica.

Quiero agradecer a Michelle, quien siempre estuvo a mi lado, aún en la distancia. Su amistad y comprensión fueron un refugio constante. Agradezco a Iván, en quien encontré no solo un amigo, sino un igual y una fuente de inspiración que me motiva a crecer y ser mejor cada día. A mis amigos Juan, Alex, Diego, Manuel y Gaby, por su compañía, por creer tanto en mí y por su cariño todo este tiempo.

Agradezco a mi hermana Ashea. Su resiliencia me inspira profundamente, me recuerda la importancia de nunca rendirme. A mi tía Ancelma, mi tío Pedro, y a mis primos Lucero, Ernesto y Omar, gracias por recibirme en su casa y cuidar de mí desde el inicio de mis estudios, sobre todo, muchas gracias por darme un hogar. A mi abuelita, gracias por sus oraciones.

Finalmente, a quien más agradezco, mi mamá. Gracias por amarme y muchas gracias por apoyar mi sueño desde el primer segundo. Tu amor y confianza me han dado fuerzas para seguir adelante.

A todos, mi profundo agradecimiento y mi cariño eterno.

RESUMEN



El creciente interés en los sistemas donde la materia fuertemente interactuante experimenta condiciones extremas, tales como altas temperaturas, altas densidades, y en especial, campos magnéticos externos ultraintensos, surge de la pregunta de cómo éstas condiciones influyen en el cambio de estado de la materia, es decir, pasar del gas de hadrones al plasma de quarks y gluones.

Debido a que la teoría que se encarga del estudio de las interacciones fuertes, la Cromodinámica Cuántica, no puede ser estudiada a través de teoría de perturbaciones a bajas energías, donde se encuentran los hadrones. Es una buena alternativa abordar este tipo de problemas a través de modelos efectivos en esas mismas regiones, tal como el Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks, donde los grados de libertad son piones, mesón sigma y quarks no masivos. La propiedad que relaciona a este modelo y a la Cromodinámica Cuántica, es que ambos experimentan el rompimiento espontáneo de la simetría quiral.

En esta tesis buscamos construir un diagrama de fase efectivo de las interacciones fuertes en el plano $T - |eB|$. Con este fin es necesario identificar la fase en la que se encuentra la materia, para lo cual usamos como criterio el rompimiento o restauración de la simetría quiral, pensando en que las distintas fases de la materia poseen o no esta simetría. El mínimo del potencial de la teoría cumple el rol del parámetro de orden.

Puesto que las correcciones cuánticas pueden cambiar el comportamiento del mínimo del potencial clásico de una teoría, calculamos la energía libre del sistema, es decir un potencial efectivo que incluye el potencial a orden árbol o clásico, correcciones cuánticas a 1-loop y correcciones debido al apantallamiento, esto a través de incluir la contribución de los diagramas de anillo. Consideramos que la presencia de campos magnéticos externos uniformes ultraintensos actúan sobre las partículas cargadas modificando su propagación y ya que el sistema tiende al equilibrio térmico, calculamos las correcciones cuánticas en el formalismo de Matsubara.

En esta tesis analizamos para distintos casos el comportamiento del mínimo del potencial como función de la temperatura para distintos valores de la intensidad del campo. Donde ocupamos expresiones obtenidas analíticamente, para las cuales usamos algunas aproximaciones, y soluciones numéricas, que no requieren de aproximaciones en las escalas energéticas. También, exploramos distintas configuraciones del conjunto de parámetros libres de la teoría y finalmente el resultado más relevante se dio luego de considerar el apantallamiento en todos los campos, tanto en parte térmica como en su contribución de vacío, pensando que el campo magnético permea incluso el vacío induciendo correcciones magnéticas. El apantallamiento es implementado a partir de incluir correcciones cuánticas

a las masas a través de la autoenergía, no solo eso sino que lo hicimos de manera auto-consistente este tratamiento de las masas juega un papel muy importante en cómo se ve modificado el comportamiento del potencial, al igual que la elección de los valores de las constantes de acoplamiento λ , g y el parámetro de masa a . Al implementar todas estas ideas fuimos capaces de construir un diagrama de fase efectivo de la interacción fuerte en presencia de campos magnéticos extremos.

ÍNDICE GENERAL



Agradecimientos	II
Resumen	III
Índice de Figuras	VI
1. Introducción	1
2. Interacción Fuerte	5
2.1. Cromodinámica Cuántica	6
2.1.1. Lagrangiano de la QCD	6
2.1.2. Corrimiento de la constante de acoplamiento	7
2.1.2.1. Libertad Asintótica	10
2.1.2.2. Confinamiento	11
2.2. Rompimiento espontáneo de la simetría quiral	11
2.3. Diagrama de fase de las interacciones fuertes	13
3. Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks	16
3.1. Lagrangiano	16
3.2. Rompimiento de la simetría quiral en el LSMq	18
4. Campos Magnéticos e Interacciones Fuertes	21
4.1. Propagador en presencia de un campo magnético constante	21
4.2. Niveles de Landau	26
4.2.1. Propagador escalar	27
4.2.2. Propagador fermiónico	29
4.2.3. Aproximación a campo fuerte	32
4.3. Catálisis magnética	32
5. Fundamentos de Teoría Térmica de Campos	35
5.1. Formalismo de Matsubara	36
5.2. Potencial efectivo	38
5.2.1. Potencial efectivo a orden 1-loop	42
5.3. Transiciones de fase	44

6. Energía libre del Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks	48
6.1. Potencial efectivo	48
6.1.1. Potencial de bosones neutros	51
6.1.1.1. Término de vacío	51
6.1.1.2. Término de materia	52
6.1.2. Potencial de bosones cargados	55
6.1.2.1. Término de vacío	56
6.1.2.2. Término térmico	57
6.1.3. Potencial de fermiones	58
6.1.3.1. Término de vacío	59
6.1.3.2. Término térmico	59
6.2. Diagramas de anillo	61
6.3. Autoenergía	63
6.3.1. Bosones neutros	64
6.3.2. Bosones cargados	65
6.3.3. Fermiones	67
6.3.3.1. Sigma	67
6.3.3.2. Pión neutro	70
6.3.3.3. Piones cargados	72
7. Análisis de Resultados	74
7.1. Elección de parámetros	74
7.1.1. Primer conjunto de parámetros	74
7.1.2. Segundo conjunto de parámetros	75
7.2. Condiciones de estabilidad en el vacío	75
7.3. Validez de los resultados	77
7.4. Análisis del potencial	80
7.5. Consistencia del modelo	90
7.6. Masas autoconsistentes	95
8. Conclusiones	100
A. Fórmulas de Referencia	102
A.1. Métrica de Minkowski	102
A.2. Integración de loops	102
A.2.1. Rotación de Wick	102
A.2.2. Fórmulas de integración	103
A.3. Matrices Gamma	103
B. Expansión a Alta Temperatura	106
B.1. Bosones	106
B.2. Fermiones	108
Bibliografía	111

ÍNDICE DE FIGURAS



1.1.	Cargas eléctricas y masas de los quarks.	1
1.2.	Vista esquemática de una colisión no central de iones pesados.	2
2.1.	Reglas de Feynman de QCD.	8
2.2.	Representación perturbativa de la dispersión de un par quark-antiquark.	9
2.3.	Diagramas de dispersión de un par quark anti-quark.	9
2.4.	Corrimiento de la constante de acoplamiento fuerte.	10
2.5.	Potencial con rompimiento espontáneo de la simetría.	12
2.6.	Diagrama de fase hipotético de QCD en el plano $(T - \mu_B)$	14
2.7.	Diagrama de fase hipotético de QCD en el plano $(T - eB)$	15
3.1.	Diagramas de Feynman de los vértices en el LSMq.	19
3.2.	Potencial a orden árbol con rompimiento explícito de la simetría.	20
4.1.	Contorno de integración en el plano complejo.	27
4.2.	Condensado renormalizado respecto del campo magnético eB	34
5.1.	Potencial y su mínimo asociados a la transición de fase de segundo orden.	46
5.2.	Potencial y su mínimo asociados a la transición de fase de primer orden.	47
5.3.	Potencial y su mínimo asociados al crossover.	47
6.1.	Diagramas de anillo.	61
6.2.	Propagador vestido.	61
6.3.	Diagramas de Feynman a 1-loop de las autoenergías de los bosones.	63
6.4.	Conservación del momento en las autoenergías a orden λ de bosones.	64
7.1.	Potencial de vacío estabilizado como función de v	76
7.2.	Potencial a orden árbol y potencial de vacío estabilizado.	77
7.3.	Comparación entre el potencial de los bosones neutros como $V_{0,T}^1(v)$, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	77
7.4.	Comparación entre el potencial de los bosones cargados $V_{b,T}^1(v)$, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	78
7.5.	Comparación entre el potencial de los fermiones $V_{f,T}^1(v)$, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	78
7.6.	Comparación entre el potencial de los bosones neutros $V_{0,T}^1(v)$, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	79

7.7.	Comparación entre el potencial de los bosones cargados $V_{b,T}^1(v)$, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	79
7.8.	Comparación entre el potencial de los fermiones $V_{f,T}^1(v)$, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	80
7.9.	Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura $V(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	82
7.10.	Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura $V(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	83
7.11.	Mínimo del potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura respecto de la temperatura para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	83
7.12.	Comparación del mínimo del potencial, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	84
7.13.	Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura $V(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	84
7.14.	Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura $V(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	85
7.15.	Mínimo del potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura respecto de la temperatura a campo magnético fijo, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	85
7.16.	Mínimo del potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura respecto de la temperatura para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	86
7.17.	Comparación entre el potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura $V(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.	86
7.18.	Potencial efectivo numérico $V^{num}(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	87
7.19.	Potencial efectivo numérico $V^{num}(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	88
7.20.	Mínimo del potencial efectivo numérico respecto de la temperatura para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	88
7.21.	Comparación entre el potencial efectivo numérico $V^{num}(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	89
7.22.	Diagrama de fase efectivo en el plano $T - eB $ asociado al potencial efectivo numérico con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	89
7.23.	Comparación entre el vacío del potencial y el vacío del potencial más la contribución de materia de los fermiones para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.	90
7.24.	Comparación del vacío del potencial y el vacío del potencial más la contribución de vacío de los fermiones para distintos valores de la constante de acoplamiento, con los parámetros $\lambda = 13.32$ y $a = 0.309$ GeV.	91

7.25. Potencial efectivo numérico $V^{num}(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV.	92
7.26. Potencial efectivo numérico $V^{num}(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV.	92
7.27. Potencial efectivo numérico con corrección en el vacío $V_{\Pi}^{num}(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV.	94
7.28. Potencial efectivo numérico con corrección en el vacío $V_{\Pi}^{num}(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV.	94
7.29. Mínimo del potencial efectivo numérico con corrección en el vacío respecto de la temperatura para distintos valores fijos del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV.	95
7.30. Potencial efectivo numérico usando masas autoconsistentes $V_{sc}(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$	97
7.31. Potencial efectivo numérico usando masas autoconsistentes $V_{sc}(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.33$ y $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$	97
7.32. Mínimo del potencial efectivo numérico con corrección en el vacío usando masas autoconsistentes respecto de la temperatura para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$	98
7.33. Comparación entre el potencial efectivo usando masas autoconsistentes $V_{sc}(v)$ para distintos valores del campo magnético, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$, $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$	98
7.34. Comparación entre el potencial efectivo usando masas autoconsistentes $V_{sc}(v)$ para distintas temperaturas, con los parámetros $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$, $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$	99
7.35. Diagrama de fase efectivo en el plano $T - eB $	99

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El interés por conocer la estructura de la materia y su comportamiento ha evolucionado a lo largo de los años, estudiando desde el átomo, el núcleo atómico, la estructura interna de los nucleones, nos ha traído a intentar comprender y describir a una parte de lo que conocemos como más fundamental hasta el momento, la materia fuertemente interactuante.

Dicha materia se divide en dos grupos, las partículas constituyentes, esto es, quarks, anti-quarks y gluones, donde los *quarks* y sus anti-partículas son fermiones y se clasifican a partir de características tales como su masa, cargas (ver 1.1) y números cuánticos en el espacio de sabor (isospín, extrañesa, encanto y belleza), y los gluones que son los bosones de norma encargados de mediar la interacción fuerte. Además, los estados ligados de estas partículas, los *hadrones*, con la posibilidad de estar formados por tres quarks o anti-quarks de valencia, caso que produce fermiones nombrados *bariones* o por una combinación de quark y un anti-quark de valencia que resulta en bosones conocidos como *mesones*.

Quark	Carga eléctrica (e)	Masa
u (up)	$+\frac{2}{3}$	2.16 ± 0.07 MeV
d (down)	$-\frac{1}{3}$	4.70 ± 0.07 MeV
c (charm)	$+\frac{2}{3}$	1.2730 ± 0.0046 GeV
s (strange)	$-\frac{1}{3}$	93.5 ± 0.8 MeV
t (top)	$+\frac{2}{3}$	172.57 ± 0.29 GeV
b (bottom)	$-\frac{1}{3}$	4.183 ± 0.007 GeV

Fig. 1.1: Cargas eléctricas y masas de los quarks [1].

La *Cromodinámica Cuántica* (QCD por sus siglas en inglés) que es la teoría que describe las interacciones fuertes, posee dos propiedades que influyen en el comportamiento de la materia fuertemente interactuante y cómo es que se aborda el estudio de la misma. Por un lado, está el *confinamiento*, este se traduce desde que, a bajas energías o distancias largas, la intensidad de la interacción crece de forma que favorece la creación de estados ligados, esta propiedad es la responsable de que no podamos encontrar quarks y gluones

libres en la naturaleza, sino que solo son detectados los hadrones. Por otro lado, se conoce el *rompimiento espontáneo de la simetría quiral*, el cual se entiende pensando en que a pesar de que los quarks fuesen no masivos, el condensado de quarks en el vacío adquiere un valor finito, este fenómeno se observa a través de la diferencia de masas entre quarks de valencia y hadrones y se explica como la generación de partículas debido a fluctuaciones cuánticas. Dicho esto, se llega a la conclusión de que la materia fuertemente interactuante puede ser encontrada en dos fases, un gas de hadrones o un plasma de quarks y gluones (QGP por sus siglas en inglés), este último estado se describe a través de quarks y gluones desconfiados, siendo las condiciones energéticas del sistema, las responsables de que se encuentre el sistema en una fase u otra.

La transición de fase de la materia fuertemente interactuante es una de las grandes interrogantes en la actualidad de la física de partículas elementales [2–7]. En principio, pensando en que uno de los sistemas físicos que presentan este comportamiento es el universo temprano [4, 8], donde se sabe que experimentó condiciones extremas, esto es, temperaturas y densidades muy altas. Otro caso, son los objetos astronómicos muy densos, como las estrellas de neutrones [9, 10], donde en el núcleo de éstos, se considera podría existir materia nuclear desconfiada. Experimentalmente, también la transición de fase puede existir en las reacciones que son resultado de las colisiones de iones pesados ultra-relativistas [11, 12]. Aunado a lo anterior, se ha descubierto la generación de los campos magnéticos más intensos del universo en las colisiones de iones pesados no centrales, estos campos son generados por las partículas espectadoras (ver Fig. 1.2). Los efectos magnéticos en estos sistemas comenzaron a ganar popularidad, ya que ahora se sabe que no solo en las colisiones de iones pesados [13, 14] se experimenta una transición de fase entre el QGP y hadrones que puede verse modificada por el campo magnético externo generado además de las condiciones extremas antes mencionadas, sino también el universo temprano [15, 16] y objetos astrofísicos tales como estrellas de neutrones, en específico los magnetares [17–19].

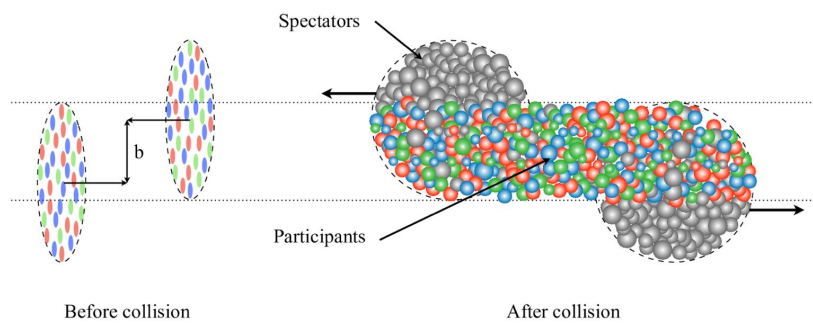


Fig. 1.2: Vista esquemática de una colisión no central de iones pesados. Donde se muestran las partículas espectadoras y participantes. [20]

Los campos magnéticos generados en las colisiones de iones pesados presentan una marcada dependencia espacial y temporal. Por un lado, el valor medio de los intensos campos magnéticos generados varían como función del parámetro de impacto, con una dirección preferente en el espacio [21] y, por otro, decrecen rápidamente a medida que las partículas

espectadoras responsables de su generación se alejan del centro de la colisión [22]. Sin embargo, resulta una buena aproximación tratarlos como campos uniformes y constantes. Esta simplificación es especialmente válida cuando el campo magnético alcanza valores suficientemente intensos, ya que en ese régimen sus efectos dominantes pueden captarse sin necesidad de considerar ni su variación espacio-temporal ni sus fluctuaciones cuánticas, las cuales suelen ser subdominantes frente a la contribución clásica del campo promedio.

A partir de esto, la comunidad de altas energías ha abordado el estudio de la materia fuertemente interactuante en presencia de campos magnéticos, usando varios enfoques, como lo es el estudio de la restauración de la simetría quiral. En particular, en el sector de quarks ligeros, donde es común aproximar su masa como nula. Sin embargo, la QCD es una teoría donde la constante de acoplamiento es relativamente grande a bajas energías, lo cual implica que no es posible usar métodos perturbativos para el estudio de este fenómeno, por lo cual es necesario el uso de otras técnicas.

En el régimen de bajas energías, uno de los enfoques más prometedores ha sido *Lattice QCD* (LQCD por sus siglas en inglés), consiste en discretizar el espacio-tiempo en una red, esto permite simular interacciones entre quarks y gluones usando métodos numéricos. Además, se tienen los *modelos efectivos*, teorías que comparten características o en particular, simetrías con la Cromodinámica Cuántica, donde es posible trabajar de forma analítica o numérica, sin necesidad de discretizar el espacio-tiempo, de tal manera que los métodos de cálculo usuales en teorías cuánticas de campos se puede utilizar. Años antes ya se comenzaban a estudiar las correcciones magnéticas en la propagación de campos cargados [23], resultado de la interacción con los campos magnéticos se encontró la pérdida de invariancia de Lorentz y que la dinámica de estos campos cargados experimentaba algo llamado reducción dimensional [24]. Al agregar este tipo de correcciones en la dinámica de las interacciones fuertes, se obtuvieron resultados que indicaban que el valor del condensado de quarks crecía conforme el campo magnético externo aumentaba, en otras palabras, el campo magnético promovía la formación de estados ligados, a este fenómeno se le conoce como *Catálisis Magnética* [25] (MC por sus siglas en inglés). No obstante, cuando además de un campo magnético externo, el sistema se encuentra en un baño térmico, con una temperatura alrededor de la temperatura de transición, el valor del condensado ya no crece, sino que por el contrario, disminuye, presentándose entonces la *Catálisis Magnética Inversa* [26–29] (IMC por sus siglas en inglés).

La importancia de la IMC radica en el hecho de que al disminuir el valor del condensado de quarks, donde el condensado es el valor de expectación en el vacío de un par quark-antiquark, es un indicador de la restauración de la simetría quiral, la cual como ya se mencionó, puede darnos de información acerca de la transición de fase de la materia fuertemente interactuante.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se hablará más a fondo de las *Interacciones fuertes*, un poco de su historia, cómo surgió el interés en explicar el comportamiento de la materia, así como la teoría que se encarga de estudiarla, la *Cromodinámica Cuántica*. Se va a presentar su Lagrangiano y explicar algunas sus características más importantes, en específico el *Corrimiento de la constante de acoplamiento* y la *Simetría Quiral*, para finalmente unir esta información y presentar los distintos diagramas

de fase para la interacción fuerte.

En el capítulo 3 se presenta el *Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks* (LSMq por sus siglas en inglés), el cual es el modelo efectivo de la QCD con el que se trabajará en este proyecto, dado que comparte la característica del rompimiento espontáneo de la simetría quiral, presentando su Lagrangiano e incluyendo la interacción con el campo magnético a través del acoplamiento mínimo, así como las reglas de Feynman de la teoría.

En el capítulo 4 se desarrollan las expresiones para los propagadores tanto escalar como fermiónico cargados, en presencia de un campo magnético externo constante y uniforme, en el formalismo del tiempo propio de Schwinger [30] para después reescribirlos en función de los niveles de Landau, de manera que obtendremos a los propagadores en la aproximación de campo fuerte, objetos que necesitamos conocer para incluir las correcciones magnéticas en el LSMq. Los campos magnéticos afectan de tal forma a la materia fuertemente interactuante produciendo fenómenos que modifican su dinámica tales como la Catálisis Magnética y la Catálisis Magnética Inversa, esta última donde además interviene la temperatura.

En el capítulo 5, se estudian conceptos importantes de teoría térmica de campos, entre los cuales está el formalismo de tiempo imaginario y el potencial efectivo, este último de gran importancia para nuestro proyecto, además de incluir un apartado sobre transiciones de fase.

En el capítulo 6 se calcula el potencial efectivo o energía libre, que incluyen las correcciones a 1-loop del potencial para cada tipo de partícula, las correcciones de los diagramas de anillo y las respectivas autoenergías.

En el capítulo 7 al ya haber obtenido una expresión para la energía libre de la teoría, con correcciones termo-magnéticas en el límite de campo fuerte y la aproximación a alta temperatura, se hace un análisis para obtener un diagrama de fase efectivo de la teoría.

Finalmente, en el capítulo 8 se hace un resumen del trabajo realizado y se redactan las conclusiones.

Con el fin de organizar a los hadrones en familias surgió el *eightfold way* [33, 34], un esquema de clasificación basado en una simetría de sabor $SU(3)$ a partir de características propias de cada partícula como su isospín, carga eléctrica y extrañeza. Como resultado, creció el interés sobre lo que se consideraba una partícula elemental, puesto que los hadrones, entre ellos protones y neutrones, ya no se pensaban como tal. Fue entonces cuando se propuso una estructura más fundamental, la existencia de partículas de las cuales estaban formados los hadrones, los llamados *quarks constituyentes o de valencia* [35, 36], lo cual fue comprobado experimentalmente poco tiempo después a través de experimentos de dispersión inelástica profunda [37, 38].

Para esos tiempos ya se sabía que la fuerza responsable de mantener a los núcleos atómicos unidos no era exclusiva de protones y neutrones, sino que también debía ser la responsable de que los quarks se uniera para formar a los hadrones. Para ello debía existir una partícula portadora de la interacción, la cual se nombró *gluón*. Donde los gluones son bosones de norma vectoriales, con una propiedad particular, distinta al ya conocido comportamiento de los fotones, estos autointeractuaban, puesto que poseen una carga asociada al grupo $SU(3)$ de color al igual que los quarks, como resultado existen más opciones de tipo de decaimiento fuerte. Esto pudo ser comprobado experimentalmente [39, 40].

De este modo fue que se estableció la *interacción fuerte* como la responsable de que los núcleos atómicos, formados por hadrones estén unidos y de que estos existan como la unión de quarks y gluones, dicha interacción es descrita por una teoría cuántica de campos del tipo Yang-Mills acoplada a una teoría de Dirac, la cual recibió el nombre de *Cromodinámica Cuántica* [41, 42].

2.1. Cromodinámica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica fue propuesta para entender la estructura de bariones y mesones, en especial para dar respuesta a la existencia del barión Δ^{++} el cual parecía violar el principio de exclusión de Pauli, al estar conformado por tres quarks de valencia up (uuu), resultando en que por lo menos dos de los quarks up que lo constituyen estaban en el mismo estado cuántico (recordar que los quarks son partículas fermiónicas), para explicar a este barión se introdujo un nuevo grado de libertad. La carga de color asociada con una simetría del grupo $SU(3)$, esto es, tres configuraciones posibles de carga de color, donde de hecho, se presenta una invariancia ante rotaciones en el espacio de color.

2.1.1. Lagrangiano de la QCD

La densidad Lagrangiana de la Cromodinámica Cuántica está dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde los campos de Dirac de los quarks y antiquarks de corriente de sabor f se denotan como ψ_f y $\bar{\psi}_f$, respectivamente. N_f es el número de sabores de los quarks. Las matrices de Dirac son γ^μ . m_f es la masa del quark de sabor f .

La derivada covariante de QCD

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a G_\mu^a, \quad (2.2)$$

con g la constante de acoplamiento de la teoría, la cual da cuenta de la intensidad de la interacción entre quarks y gluones y está asociada a la constante de acoplamiento fuerte por la relación

$$g^2 = 4\pi\alpha_s. \quad (2.3)$$

T^a forma parte de un conjunto de matrices proporcional a las matrices de Gell-Mann λ^a , las cuales son los generadores de SU(3), tal que

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2}. \quad (2.4)$$

G_μ^a es un campo vectorial que describe al gluón donde el índice a corre sobre el espacio de color en la representación adjunta y el índice μ representa los grados de libertad en el espacio cuatro-dimensional de Lorentz, índices que se contraen con las matrices de Dirac y Gell-Mann, esto es una suma sobre todos los elementos de estos espacios.

Por último, se encuentra $G_{\mu\nu}^a$ que es el tensor de intensidad del campo, asociado al sector de norma, este término ayuda a garantizar la invariancia del Lagrangiano ante una transformación de norma y aparece como análogo al tensor de Faraday, $F_{\mu\nu}$, pero que además está contemplando el álgebra en el espacio de color y está dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c, \quad (2.5)$$

donde f_{abc} son los factores de estructura o constantes de grupo, y abc son índices que recorren el espacio de color.

El primer término de la ec. (2.1) se traduce en la dinámica de los quarks, se entiende como su propagación, así como en el tercer término, el producto que contenga dos campos gluónicos, corresponde a la propagación de los gluones.

Finalmente, los demás términos están asociados a las posibles interacciones que existen en la teoría, por un lado la interacción entre quarks y gluones y por otro lado los términos con más de dos campos gluónicos que describen la autointeracción entre tres y cuatro gluones, esta información se conoce como las reglas de Feynman de la teoría, vistas gráficamente con diagramas de Feynman en la Fig. 2.1.

2.1.2. Corrimiento de la constante de acoplamiento

En teoría cuántica de campos existe la posibilidad de que en los procesos como la propagación de una partícula ocurran fluctuaciones, que permiten la creación y aniquilación de partículas virtuales, esto siempre que se respete el principio de incertidumbre de Heisenberg.

En un proceso de dispersión, un objeto donde se incluyen las correcciones cuánticas debido a las fluctuaciones es la matriz de dispersión \mathcal{M} . Uno de los métodos más usados en las teorías cuánticas de campos es la teoría de perturbaciones. En analogía con el método perturbativo, un proceso de dispersión puede ser visto en términos de diagramas de

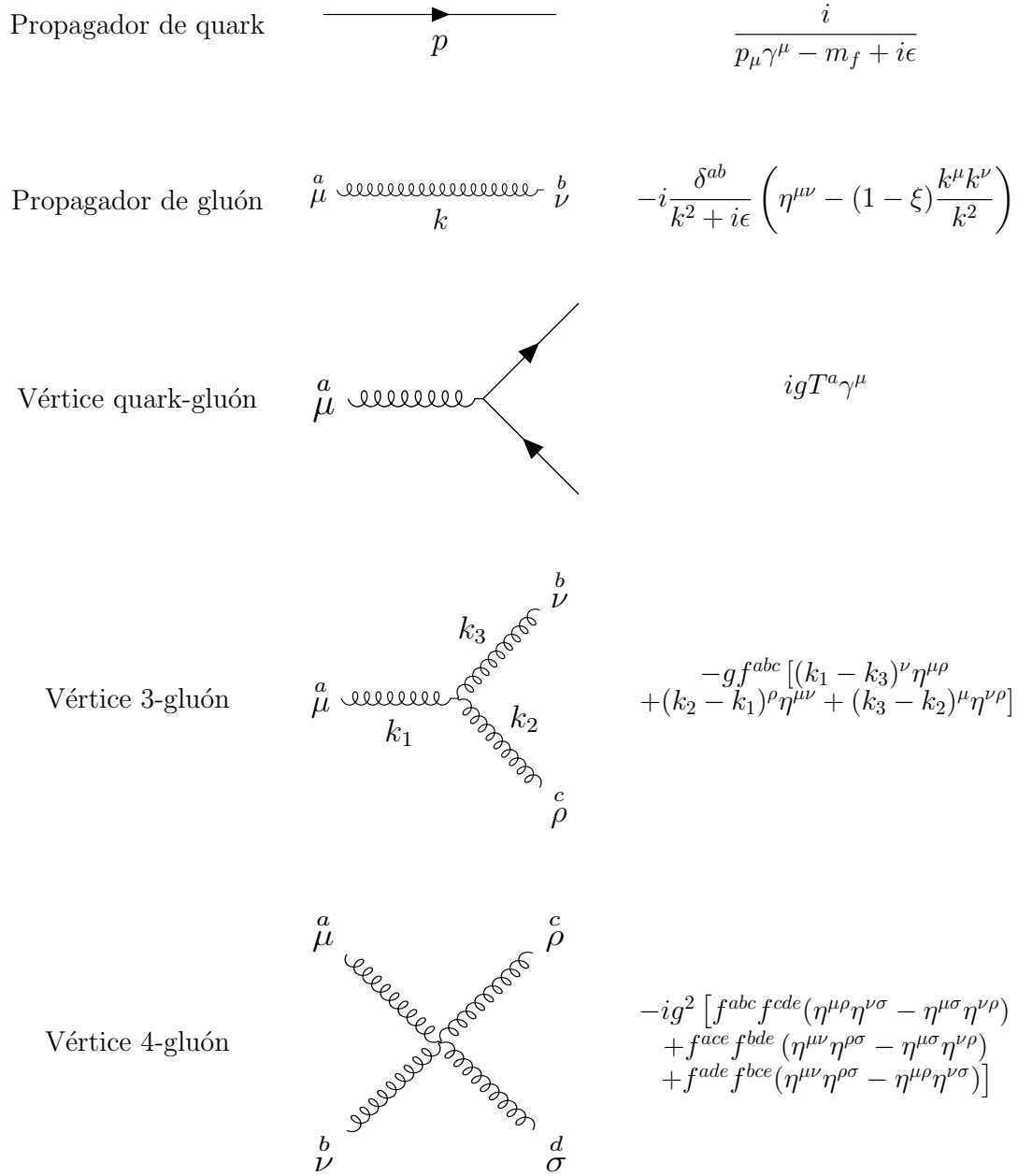


Fig. 2.1: Reglas de Feynman de QCD. p_μ y k_μ son cuadri momentos. γ^μ las matrices de Dirac. m_f la masa del fermión. δ^{ab} es el delta de Kronecker en el espacio de color. ξ es el parámetro que fija la norma del propagador del gluón. g es la constante de acoplamiento fuerte. T^a los generadores del grupo SU(3) en la representación fundamental. f^{abc} las constantes de estructura del grupo SU(3). $\eta^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. Los índices a, b, c, d recorren el espacio de color mientras que los índices μ, ν, ρ, σ representan los grados de libertad en el espacio de Lorentz.

Feynman en la Fig. 2.2.

Es relevante saber que cada uno de las posibilidades es proporcional en algún orden a la constante de acoplamiento fuerte α_s , en ese sentido, la suma de las contribuciones de cada diagrama termina siendo una expansión de la dispersión en términos de α_s .

Si la constante es pequeña, también se piensa como una serie perturbativa debido a las

correcciones cuánticas, donde los procesos a ordenes más bajos serán más dominantes que los subsecuentes.

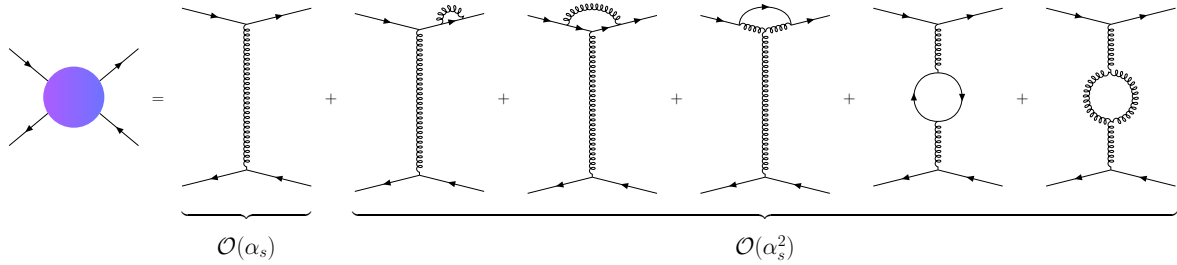


Fig. 2.2: Diagramas de Feynman que contribuyen en la representación perturbativa de la dispersión de un par quark-antiquark con las interacciones permitidas en QCD, ordenados en potencias de la constante de acoplamiento fuerte α_s .

En principio a mayor energía, la probabilidad de que ocurran fluctuaciones más complejas es mayor. Por lo tanto, podrían aparecer contribuciones con un mayor número de vértices, lo cual se traduce en procesos con potencias de α_s cada vez más grandes. Resumar estas contribuciones, a cada orden, nos permiten conocer la dependencia de la constante de acoplamiento α_s respecto a la escala energética del proceso μ , a partir de la llamada función beta

$$\beta(\alpha) = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}. \quad (2.6)$$

Para valores pequeños de la constante de acoplamiento es una buena aproximación considerar solo los términos más dominantes, que son las potencias menores de α_s

$$\beta(\alpha) = \beta_0 \alpha_s^2 + \beta_1 (\alpha_s^2)^2 + \dots \quad (2.7)$$

A diferencia de las teorías de norma Abelianas, en QCD, dado que los gluones poseen carga de color al igual que los quarks, se les permite autointeractuar, esta propiedad es la responsable de términos extras a cada orden en la corrección de la constante de acoplamiento fuerte. Estos términos extras, generan un fenómeno peculiar en QCD que es el anti-apantallamiento.

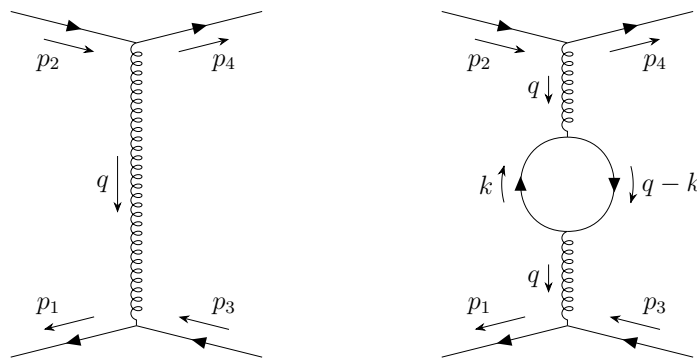


Fig. 2.3: Diagramas de dispersión de un par quark anti-quark, donde podemos ver la relación entre los momentos externos y el momento transferido ($q = p_1 - p_3 = p_2 - p_4$).

Así que la constante de acoplamiento fuerte a orden líder, con dependencia en el momento transferido que podemos ver en la Fig. 2.3, con $Q^2 = -q^2$ tenemos

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \beta_0 \alpha(\mu^2) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}, \quad (2.8)$$

donde

$$\beta_0 = \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi}, \quad (2.9)$$

con $N_c = 3$ el número de color y $N_f = 6$ el número de sabor asociado al espacio de quarks. Conocer a α_s como función del momento transferido Q^2 , nos permite observar su corrimiento, como se muestra en la Fig. 2.4.

Conociendo la expresión de la ec. (2.8), la cual es una buena aproximación para altas energías, es posible identificar dos tipos de comportamientos de la intensidad del acoplamiento, por un lado, a altas energías el acoplamiento tiende a valores pequeños y se puede notar que conforme la energía disminuye esta constante aumenta, sin embargo, que cierto que a bajas energías esta expresión no es válida debido a que el método perturbativo ya no es válido.

La Cromodinámica Cuántica, está dividida en regiones energéticas, debido a que el método perturbativo usado en cálculos de este tipo de teorías se hacen al rededor de parámetros como las constantes de acoplamiento. Siendo que para cuando la constante de acoplamiento es pequeña es llamada región perturbativa, cierta para sistemas a altas energías o pequeñas distancias y por el contrario cuando el acoplamiento es grande se conoce como región no perturbativa, esto para sistemas a baja energía o largas distancias.

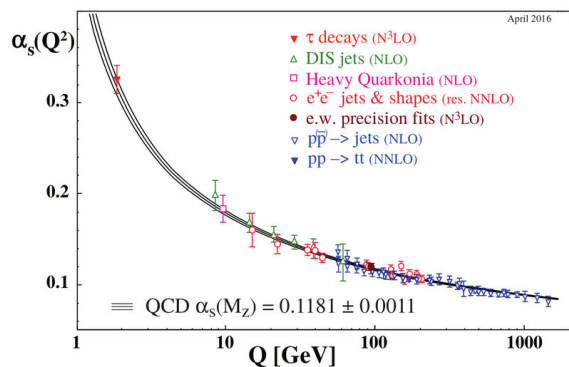


Fig. 2.4: Corrimiento de la constante de acoplamiento fuerte respecto a la energía, [43].

Además, se pueden conocer dos fenómenos propios de la QCD desde la constante de acoplamiento y en relación con las regiones energéticas de la teoría.

2.1.2.1. Libertad Asintótica

La libertad asintótica se entiende como el fenómeno a muy altas energías o distancias muy pequeñas, en donde la intensidad de la interacción entre quarks y gluones es pequeña. Es decir, los quarks y gluones solo pueden estar en estado libre si su energía es infinita.

2.1.2.2. Confinamiento

El confinamiento se refiere al fenómeno que ocurre a bajas energías o distancias grandes, donde la interacción entre quarks y gluones se vuelve muy intensa. La magnitud de la interacción impide que los quarks y gluones existan de manera aislada y se traduce en la formación de estados ligados de quarks y gluones, es decir, los hadrones.

Si bien, α_s depende de la escala energética μ , esta no es única, hay en especial un valor conocido como la escala de QCD, Λ_{QCD} , la cual es la cota inferior de la energía a partir de la cual se puede considerar que estamos en la región perturbativa de QCD; o bien si tomamos su inverso, que corresponde a las distancias, Λ_{QCD} es el umbral donde distinguimos entre hadrones y quarks y gluones, de este modo el corrimiento de la constante es como

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad (2.10)$$

donde la escala típicamente toma su valor a través de medir su evolución en la masa del bosón Z [44]

$$\Lambda_{QCD} = 341(12) \text{ MeV}. \quad (2.11)$$

2.2. Rompimiento espontáneo de la simetría quiral

El fenómeno llamado rompimiento espontáneo de la simetría que ocurre en la Cromodinámica Cuántica, puede ser explicado de forma más simple considerando una teoría con dos campos escalares reales como grados de libertad, σ y π , con un potencial de la forma

$$V(\sigma, \pi) = \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + cte. \quad (2.12)$$

Dicho potencial y en general la teoría posee una simetría continua $SU(2)$, es decir, es invariante ante rotaciones.

En general se considera a λ una constante positiva y análisis interesante es considerar que el parámetro μ^2 no es necesariamente positivo, es decir, que este puede ser

$$\mu^2 > 0 \text{ ó } \mu^2 < 0. \quad (2.13)$$

Cuando $\mu^2 = a^2$ es positivo, el potencial es como en la Fig. 2.5a. Es fácil ver que el potencial posee un mínimo global ubicado en el origen y cuando se está en el estado base, el sistema es invariante ante rotaciones.

Por otro lado, tomando $\mu^2 = -a^2$, un valor negativo definido, el potencial se ve como en la Fig. 2.5b, en este caso el potencial tiene un máximo local en el origen y una infinidad de mínimos globales en v fuera del origen, los cuales satisfacen la relación

$$\langle \sigma \rangle^2 + \langle \pi \rangle^2 = v^2. \quad (2.14)$$

O por conveniencia, elegimos el estado base como

$$\langle \sigma \rangle = v, \quad \langle \pi \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Los estados base de la teoría están degenerados, y una vez que se elige uno, desde este lugar se pierde la invariancia ante rotaciones, es cuando decimos que la simetría se ha roto.

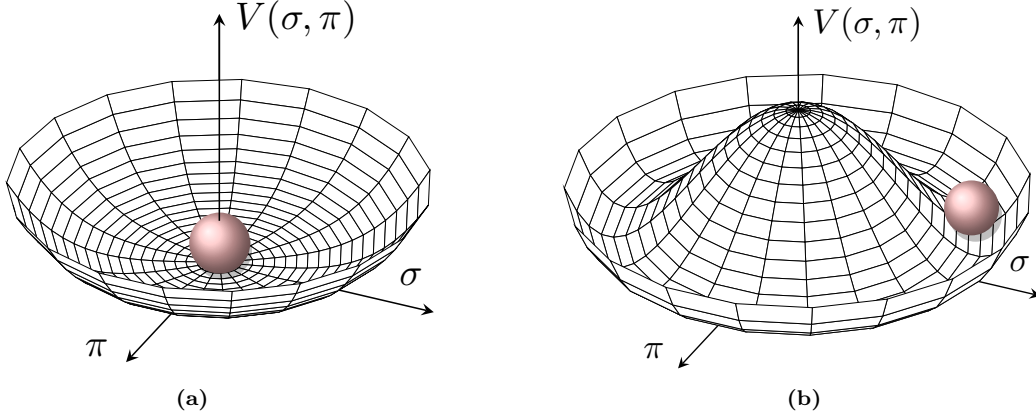


Fig. 2.5: Potencial con rompimiento espontáneo de la simetría.

Así como en el caso del campo escalar donde estudiamos en específico el rompimiento espontáneo de la simetría, ahora consideraremos las teorías con fermiones como es QCD y esto en general puede ser explicado a partir del Lagrangiano de Dirac, donde escribimos los espinores de Dirac ψ descompuestos en dos componentes de espinores de Weyl

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Donde además, las matrices de Dirac en la base de Weyl están dadas en el Apéndice A, de forma que para el campos fermiónicos no masivos tenemos entonces

$$\mathcal{L}_{quiral} = i\bar{\psi}_L \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R, \quad (2.17)$$

donde $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \tau_i)$ viene de la representación quiral de las matrices de Dirac γ^μ y τ_i son las matrices de Pauli.

Este Lagrangiano tiene una simetría global $SU(2)_L \times SU(2)_R$, bajo transformaciones

$$SU(2)_L : \psi'_L = U_L \psi_L, \quad SU(2)_R : \psi'_R = U_R \psi_R, \quad (2.18)$$

donde L es izquierdo y R es derecho, las matrices de transformación en $SU(2)$ son como

$$U_{L,R} = e^{i\vec{\alpha}_{L,R} \cdot \vec{\tau}/2}, \quad (2.19)$$

con $\vec{\tau}$ los generadores del álgebra de Lie de $SU(2)$, el Lagrangiano quiral es invariante.

$$m\bar{\psi}\psi \longrightarrow m\bar{\psi}_R\psi_L + m\bar{\psi}_L\psi_R. \quad (2.20)$$

Siempre que $U_L \neq U_R$, al aplicar las transformaciones de la ec. (2.19) en los términos de la ec. (2.20) es fácil ver que estos términos no son invariantes ante las transformaciones quirales.

Aún si se considera que los campos no tengan masa, como es usual en las teorías cuánticas de campos, en QCD el valor de expectación en el vacío toma un valor finito, es decir que ocurre la formación del llamado *condensado de quarks* o *condensado quiral*, visto como

$$\langle \bar{\psi}_L \psi_R \rangle = -\sigma. \quad (2.21)$$

Considerando que $\sigma > 0$, el valor negativo del condensado quiral se debe a la convención usada en la teoría y tiene una justificación física relacionada con la energía del vacío.

Dicho condensado, al igual que en el caso donde se consideran masivos los campos, no es invariante ante las transformaciones quirales.

En teoría cuántica de campos, este fenómeno se traduce en el *rompimiento espontáneo de la simetría quiral*, puesto que el vacío de la teoría no es invariante ante transformaciones a las cuales el Lagrangiano en este caso, sí lo es.

Dicho esto, algo que llama la atención de la materia fuertemente interactuante surge al comparar la masa de los mesones más ligeros (los piones con masas entre 134-139 MeV), con la masa de sus quarks constituyentes (los quarks up y down con masas de 2.16 y 4.7 MeV, respectivamente).

Además que al comparar la escala de QCD con los valores de las masas de los quarks más ligeros, es útil pensar que al menos en un espacio de sabor SU(2) los campos fermiónicos son no masivos.

En ese sentido, en el límite donde las masas de los quarks más ligeros se considera nula, decimos que la QCD tiene una simetría quiral aproximada. Además, cuando observamos el Lagrangiano de la QCD de la ec. (2.1), podemos ver que el sector de los gluones no interviene en el comportamiento de la simetría quiral, por lo cual, los modelos efectivos a baja energía no requieren ser invariantes de norma para estudiar la transición de fase.

2.3. Diagrama de fase de las interacciones fuertes

Un diagrama de fase es una herramienta usada para representar los distintos estados de un sistema, en función de sus variables termodinámicas. Muestra las regiones donde cada fase es estable así como las transiciones entre ellas. En teorías donde los sistemas exhiben más de una fase, es útil estudiar el comportamiento de sus simetrías, debido a la restauración/rompimiento de la simetría corresponde a una transición de fase.

La materia fuertemente interactuante se compone por quarks, gluones y sus estados ligados: los hadrones. Además en la QCD existe una simetría aproximada, la simetría quiral, que experimenta un rompimiento espontáneo. Esto nos permite decir que dicha materia se puede encontrar en dos fases, el plasma de quarks y gluones y la fase del gas de hadrones. Y que además es posible estudiar sus transiciones de fase a partir del estudio del

comportamiento de su simetría, es decir, de los parámetros termodinámicos a los cuales ocurre el rompimiento o restauración de la simetría quiral.

Los sistemas físicos antes mencionados, donde existe la materia fuertemente interactuante, comparten características, presentan condiciones extremas, esto es altas temperaturas, altas densidades y la presencia de campos magnéticos externos muy intensos, en las cuales se piensa que se encuentra el QGP.

La representación más usual del diagrama de fase hipotético de QCD se ve como en la Fig. 2.6, un diagrama de fase en el plano $(T - \mu_B)$, función de la temperatura T y del potencial químico bariónico μ_B . En la región donde el potencial químico y la temperatura son bajos es donde se encuentra la materia hadrónica. Mientras que al aumentar la temperatura y/o bien el potencial químico bariónico, se encuentra el QGP. La transición de fase, ocurre a cierta temperatura de transición T_c , a bajo potencial químico se encuentra un crossover de acuerdo a los resultados reportados por LQCD [4]. A lo largo de la curva de transición, al aumentar el valor del potencial se encuentra un punto crítico terminal, es decir, se identifica el cambio de un crossover a una transición de primer orden. En general, la temperatura de transición decrece como función del potencial químico bariónico.

Entendemos que a bajas temperaturas la simetría quiral está rota pensando que existen los estados ligados, llamados hadrones y también cómo la temperatura induce la restauración de la simetría quiral, a temperaturas más altas se encuentra la fase desconfiada, el plasma de quarks y gluones.

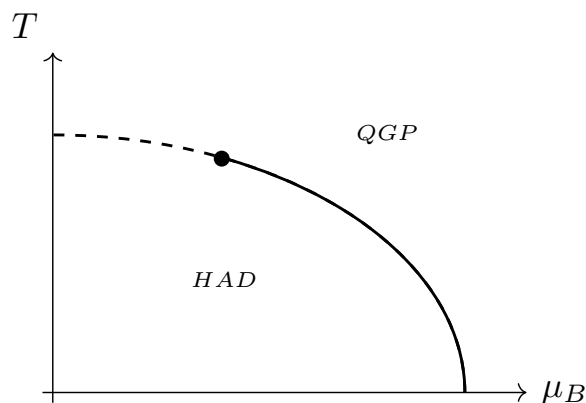


Fig. 2.6: Diagrama de fase hipotético de QCD en el plano $(T - \mu_B)$, donde la línea punteada corresponde a un crossover, la línea sólida a una transición de primer orden y el punto representa un punto crítico.

Otro diagrama de fase de las interacciones fuertes se puede representar en el plano $(T - eB)$, que muestra los efectos de los campos magnéticos ultra intensos y de la temperatura con el fin de observar la transición, esto es un diagrama como el que se muestra en la Fig. 2.7. Aunque comparte características con el diagrama de la Fig. 2.6 como lo son los tipo de transición y la existencia de un punto crítico terminal, este caso está relacionado con un fenómeno antes mencionado, la catálisis magnética inversa, puesto que muestra como conforme el campo magnético aumenta, la temperatura de transición disminuye, o bien que el valor del condensado decrece con respecto del crecimiento del campo a una

temperatura fija mayor que la temperatura de transición, favoreciendo la restauración de la simetría quiral.

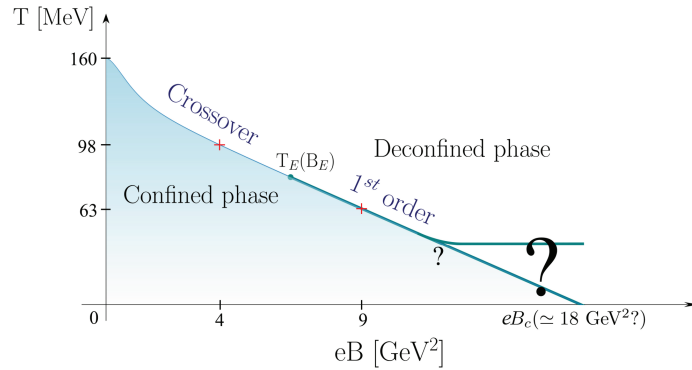


Fig. 2.7: Diagrama de fase hipotético de QCD en el plano $(T - eB)$, donde se identifican las regiones donde se encuentra un crossover, una transición de primer orden y un punto crítico [45].

Un punto relevante a distinguir, es que a pesar de que LQCD es un enfoque no perturbativo bien establecido para resolver la teoría de la Cromodinámica Cuántica, cuando se trata de la materia fría y densa esta técnica tiene muy poco poder predictivo, esto debido al *problema severo del signo* [46], por lo cual, gran parte de los estudios que se han reportado provienen de teorías efectivas de baja energía [47], enfoque que será aplicado en este proyecto en búsqueda de un diagrama de fase efectivo.

CAPÍTULO 3

MODELO SIGMA LINEAL ACOPLADO CON QUARKS

3.1. Lagrangiano

El Modelo Sigma Lineal surgió en 1960 desde un Lagrangiano de las interacciones fuertes [48] propuesto para describir la interacción entre nucleones y piones, al introducir un nuevo mesón escalar sigma [49].

Es actualmente uno de los modelos efectivos de la QCD a bajas energías más usados debido a que posee una característica de gran interés, es invariante ante transformaciones quirales en el espacio $SU(2)_L \times SU(2)_R$ de modo que puede ser analizado el rompimiento espontáneo de la simetría, en ese sentido, este modelo es útil para estudiar la simetría quiral aproximada asociada a la Cromodinámica Cuántica.

El Lagrangiano del Modelo Sigma Lineal es dado como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + \frac{a^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi, \quad (3.1)$$

donde λ y g son constantes de acoplamiento positivas asociadas a la autointeracción entre bosones y la interacción bosón-fermión, respectivamente. a es el parámetro de masa, además en una representación del grupo $SU(2)$, el campo fermiónico cargado no masivo ψ es un doblete de isoespín, los campos pseudoescalares $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ forman un triplete de isoespín y el campo escalar real σ corresponde a un estado singulete. Finalmente $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, donde τ_i son las matrices de Pauli, los generadores del grupo $SU(2)$.

La simetría quiral puede ser mostrada desde la ec. (3.1), al reescribir en términos de la matriz

$$\Sigma = \sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}, \quad (3.2)$$

la cual satisface

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}[\Sigma^\dagger \Sigma], \quad (3.3)$$

así como

$$(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}[\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma], \quad (3.4)$$

además de tomar el espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

tal que es posible escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \text{Tr}[\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma] + \frac{a^2}{4} \text{Tr}[\Sigma^\dagger \Sigma] - \frac{\lambda}{16} \text{Tr}[\Sigma^\dagger \Sigma]^2 + i\bar{\psi}_L \gamma_\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma_\mu \partial_\mu \psi_R \\ & - g\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R - g\bar{\psi}_R \Sigma^\dagger \psi_L. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Análogo al caso de la QCD, si los espinores quirales se transforman como

$$\psi'_{L,R} = U_{L,R} \psi_{L,R}, \quad \bar{\psi}'_{L,R} = \bar{\psi}_{L,R} U_{L,R}^\dagger, \quad (3.7)$$

donde las matrices $U_{L,R}$ están dadas en la ec. (2.19), se satisface que los términos cinéticos son invariantes, sin embargo, para que se cumpla

$$\bar{\psi}'_L \Sigma' \psi'_R + \bar{\psi}'_R \Sigma'^\dagger \psi'_L = \bar{\psi}_L U_L^\dagger \Sigma' U_R \psi_R + \bar{\psi}_R U_R^\dagger \Sigma'^\dagger U_L \psi_L = \bar{\psi}_L \Sigma \psi_R + \bar{\psi}_R \Sigma^\dagger \psi_L, \quad (3.8)$$

la matriz Σ debe transformarse como

$$\Sigma' = U_L \Sigma U_R^\dagger, \quad \Sigma'^\dagger = U_R \Sigma^\dagger U_L^\dagger, \quad (3.9)$$

es decir, el Lagrangiano del modelo sigma lineal es invariante bajo las transformaciones en $SU(2)_L \times SU(2)_R$, dadas por las ecs. (3.7) y (3.9), y por lo tanto se dice que posee simetría quiral.

Por otro lado, es posible reescribir el Lagrangiano en término de los campos físicos, tomando a π_3 como el campo del pión neutro π_0 y a los de los piones cargados como campos complejos dados por la transformación

$$\pi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2). \quad (3.10)$$

De forma que se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_0)^2 + \partial_\mu \pi_- \partial^\mu \pi_+ + \frac{a^2}{2} (\sigma^2 + \pi_0^2 + 2\pi_- \pi_+) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi_0^2 + 2\pi_- \pi_+) \\ & + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - g\bar{\psi} (\sigma + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \psi, \end{aligned} \quad (3.11)$$

o bien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi_0)^2 + \partial_\mu\pi_-\partial^\mu\pi_+ + \frac{a^2}{2}(\sigma^2 + \pi_0^2) + a^2\pi_-\pi_+ \\
& - \frac{\lambda}{4}(\sigma^4 + \pi_0^4 + 4(\pi_-\pi_+)^2 + 2\sigma^2\pi_0^2 + 4\sigma^2\pi_-\pi_+ + 4\pi_-\pi_+\pi_0^2) \\
& + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - g\bar{\psi}\psi\sigma - ig\bar{\psi}\gamma^5(\tau_+\pi_+ + \tau_-\pi_- + \tau_3\pi_0)\psi,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

con las matrices de Pauli reescritas como

$$\tau_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \mp i\tau_2). \tag{3.13}$$

3.2. Rompimiento de la simetría quiral en el LSMq

El Lagrangiano de la ec. (3.1) reescrito como la ec. (3.6) satisface que es invariante ante transformaciones quirales, sin embargo, esto es debido a que los campos fermiónicos se han considerados no masivos hasta ahora, para emular el fenómeno que sucede en la Cromodinámica Cuántica, rompemos espontáneamente la simetría, a partir de que el campo σ adquiera un valor de expectación en el vacío distinto de cero, vamos a escribir al campo σ haciendo un desplazamiento

$$\sigma \rightarrow \sigma + v. \tag{3.14}$$

Al desarrollar la ec. (3.12) con el cambio en el campo σ , tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\pi_0\partial^\mu\pi_0 + \partial_\mu\pi_-\partial^\mu\pi_+ - \frac{1}{2}(3\lambda v^2 - a^2)\sigma^2 - \frac{1}{2}(\lambda v^2 - a^2)\pi_0^2 \\
& - (\lambda v^2 - a^2)\pi_-\pi_+ + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - gv\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_{int} - V^{árbol},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} = & -\frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \lambda v\sigma^3 - \lambda v^3\sigma - \lambda\sigma^2\pi_-\pi_+ - 2\lambda v\sigma\pi_-\pi_+ - \frac{\lambda}{2}\sigma^2\pi_0^2 - \lambda(\pi_-\pi_+)^2 \\
& - \frac{\lambda}{4}\pi_0^4 + a^2v\sigma - \lambda\pi_-\pi_+\pi_0^2 - g\bar{\psi}\psi\sigma - ig\bar{\psi}\gamma^5(\tau_+\pi_+ + \tau_-\pi_- + \tau_3\pi_0)\psi,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

contiene todos los términos de interacción entre los campos, de estas posibles interacciones obtenemos las reglas de Feynman de los vértices de la teoría, mostrados mediante diagramas de Feynman en la Fig. 3.1.

Y el término

$$V^{árbol} = -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4, \tag{3.17}$$

es el potencial clásico o bien el potencial orden árbol, el cual posee un mínimo en

$$v_0 = \sqrt{\frac{a^2}{\lambda}}, \tag{3.18}$$

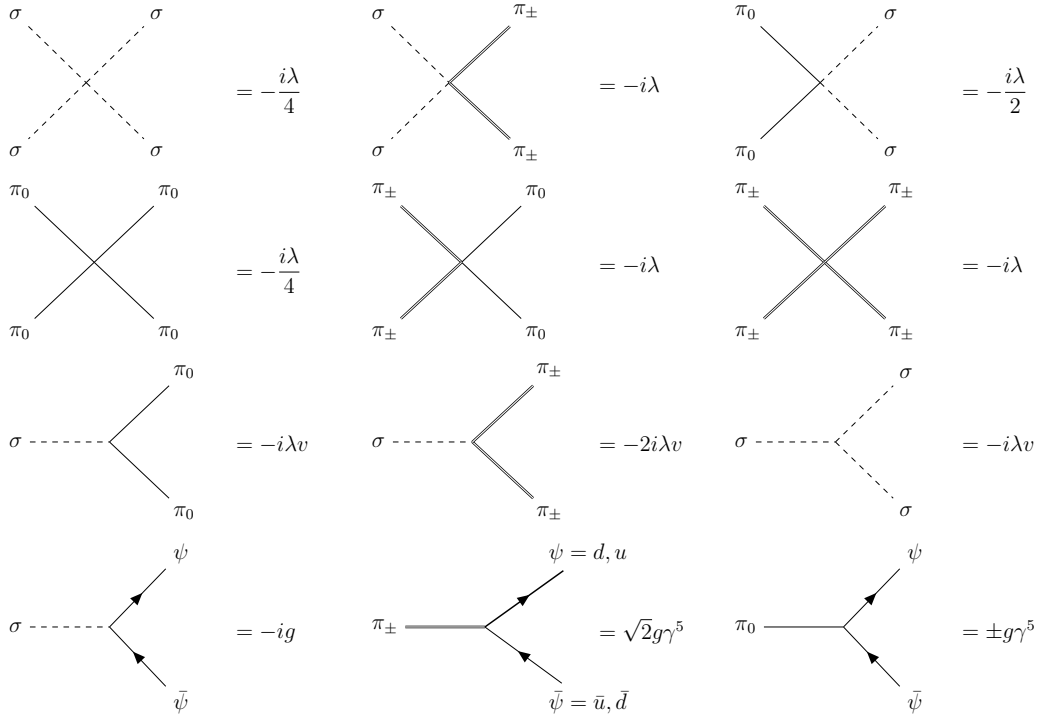


Fig. 3.1: Diagramas de Feynman de los vértices en el Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks y su valor, donde las líneas punteadas corresponden a los mesones σ , la línea sólida a los piones neutros π_0 , las líneas dobles a los piones cargados π_{\pm} y las líneas con una flecha a los quarks.

el cual es el parámetro de orden de la teoría y se conoce como el valor de expectación en el vacío.

De la ec. (3.15) es posible identificar que los campos, tanto bosónicos como fermiónicos, desarrollaron masas dinámicas con dependencia en el parámetro de orden v , definidas como

$$m_{\sigma}^2(v) = 3\lambda v^2 - a^2, \quad m_0^2(v) = \lambda v^2 - a^2, \quad m_f(v) = gv. \quad (3.19)$$

Como consecuencia del rompimiento espontáneo de la simetría en este modelo, es que a pesar de que en principio los campos fermiónicos eran no masivos, estos ahora adquieren una masa. Además, en el Lagrangiano se puede incorporar un término que rompa explícitamente la simetría quiral, que en este caso para el modelo Sigma Lineal es

$$\delta\mathcal{L} = h\sigma, \quad (3.20)$$

donde h es el parámetro del rompimiento de la simetría. De esta forma, al escribir el término del rompimiento espontáneo de la simetría v , como en la ec. (3.15), el potencial a orden árbol adquiere la forma

$$V^0 = -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 - hv. \quad (3.21)$$

Ahora este potencial se ve como en la Fig. 3.2, donde además de notar que ya no es simétrico, el mínimo también se ve modificado, tomando un valor distinto al de la ec. (3.18), ahora en un valor f_{π} .

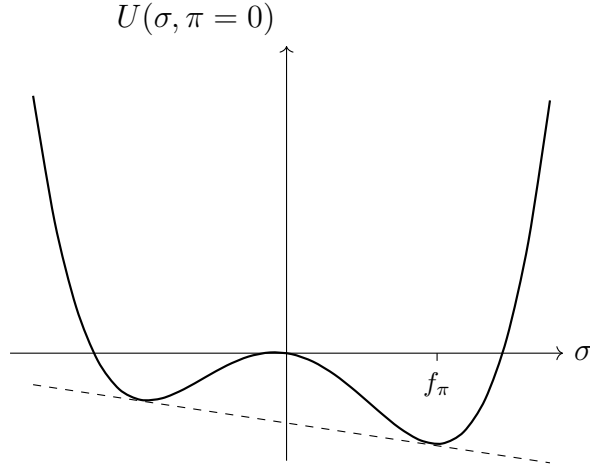


Fig. 3.2: Potencial a orden árbol con rompimiento explícito de la simetría.

Debido a que trabajaremos con un sistema donde los campos magnéticos permean el espacio, esto implica que las partículas cargadas en presencia de un campo magnético externo, van a interactuar con éste. Por lo tanto, es necesario incluir estos efectos en la propagación de las partículas, a través de la derivada covariante o acoplamiento mínimo

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (3.22)$$

donde q es la carga eléctrica de la partícula y A_μ es el cuadri potencial electromagnético asociado al campo magnético externo.

Así obtenemos el Lagrangiano del Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks donde la derivada covariante de los campos cargados se ha incluido, debido a la presencia de un campo magnético externo constante, escrito como función del valor de expectación v debido al rompimiento espontáneo de la simetría.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_0 \partial^\mu \pi_0 + D_\mu \pi_- D^\mu \pi_+ - \frac{1}{2} m_\sigma^2(v) \sigma^2 - \frac{1}{2} m_0^2(v) \pi_0^2 \\ & - m_0^2(v) \pi_- \pi_+ + i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m_f(v) \bar{\psi} \psi + \mathcal{L}_{int} - V^{árbol}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$(\not{A} - m) S(x', x'') = \delta(x' - x''), \quad (4.3)$$

o bien, en su representación matricial en el espacio de momentos

$$S(p) = \frac{1}{\not{A} - m + i\epsilon}, \quad (4.4)$$

para una partícula de masa m y carga q , donde el término $i\epsilon$ sirve para manejar los polos en el plano complejo con ϵ positivo y el momento conjugado $\not{A} = \gamma^\mu \Pi_\mu$, con el acoplamiento mínimo al campo de un bosón con potencial A_μ , es dado como

$$\Pi_\mu = p_\mu - qA_\mu. \quad (4.5)$$

Reescribiendo $S(p)$ tenemos

$$S(p) = \frac{\not{A} + m}{\not{A}^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.6)$$

al desarrollar

$$\not{A}^2 = (\gamma^\mu \Pi_\mu)^2 = \Pi^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} [\Pi_\mu, \Pi_\nu]. \quad (4.7)$$

donde usamos las relaciones de conmutación y anti-conmutación de las matrices de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

para mostrar que se cumple

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = iqF_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

tal que

$$\not{A}^2 = \Pi^2 + \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Al considerar un campo magnético constante con magnitud B en la dirección z , es decir, $\vec{B} = B\hat{z}$, las únicas componentes no nulas del tensor de intensidad del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, serán

$$F_{12} = -F_{21} = B, \quad (4.12)$$

así es como conocemos el potencial A_μ , elegido en la norma simétrica, como

$$A_\mu = \frac{B}{2} (0, -y, x, 0). \quad (4.13)$$

Al conocer explícitamente A_μ y las componentes de $F_{\mu\nu}$, podemos tomar que

$$A_\mu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu. \quad (4.14)$$

De esta manera escribimos

$$\not{A}^2 = \Pi^2 + qB\sigma^{12} = \Pi^2 + qB\sigma^3, \quad (4.15)$$

con

$$\sigma^3 = \sigma^{12} = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = i\gamma^1\gamma^2, \quad (4.16)$$

Así

$$S(p) = \frac{\not{\mathbb{I}} + m}{\Pi^2 - \kappa^2 + i\epsilon}, \quad (4.17)$$

al definir

$$\kappa^2 \equiv m^2 - qB\sigma^3.$$

De la ec. (4.17) podemos identificar a la función de Green $G(p)$ que satisface la ecuación de Klein-Gordon en el espacio de momentos como en la ec. (4.1), de modo que buscamos la solución de la ecuación

$$(\Pi^2 - m^2 + i\epsilon) G(p) = 1 \quad (4.18)$$

puesto que es un campo escalar con espín nulo, solo se toma la masa del término de κ^2 , así escrito explícitamente como

$$((p_\mu - qA_\mu)^2 - m^2 + i\epsilon) G(p) = 1 \quad (4.19)$$

de la ec. (4.14) podemos conocer al potencial en el espacio de momentos al sustituir $x_\mu = i\partial_\mu^{(p)}$, la derivada respecto del momento, tal que

$$A^\mu = -\frac{i}{2} F^{\mu\nu} \partial_\nu^{(p)}. \quad (4.20)$$

Así obtenemos

$$\left(p^2 + \frac{q^2}{4} \partial_\mu^{(p)} (F^{\mu\nu})^2 \partial_\nu^{(p)} - m^2 + i\epsilon \right) G(p) = 1. \quad (4.21)$$

Para intentar resolver la ecuación se propone un Ansatz de la forma

$$G(p) = -i \int_0^\infty ds e^{-M(is)} e^{-is(m^2 - i\epsilon)}, \quad (4.22)$$

donde

$$M(is) = p^\alpha X_{\alpha\beta}(is) p^\beta + Y(is). \quad (4.23)$$

Al sustituir la ec. (4.22) en la ec. (4.21) obtenemos

$$i \int_0^\infty ds e^{-is(m^2 - i\epsilon)} \left(p^2 + \frac{q^2}{4} \partial_\mu^{(p)} (F^{\mu\nu})^2 \partial_\nu^{(p)} - m^2 + i\epsilon \right) e^{-M(is)} = 1, \quad (4.24)$$

donde al derivar

$$(\partial_\mu^{(p)} (F^{\mu\nu})^2 \partial_\nu^{(p)}) e^{-M(is)} = (-2\text{Tr} [F^2 X] + 4pX F^2 X p) e^{-M(is)}, \quad (4.25)$$

nos permite reescribir la ec. (4.24) como

$$i \int_0^\infty ds \left(p (1 + q^2 X F^2 X) p - \frac{q^2}{2} \text{Tr} [F^2 X] - m^2 + i\epsilon \right) e^{-M(is) - is(m^2 - i\epsilon)} = 1. \quad (4.26)$$

Si esta ecuación, donde es necesario determinar $X(is)$ y $Y(is)$, toma la forma

$$i \int_0^\infty ds g(is) e^{-f(is)} = 1, \quad (4.27)$$

y se cumple que

$$g(is) = \frac{df(is)}{d(is)}, \quad (4.28)$$

tendría una solución que satisfaga la ec. (4.27)

$$i \int_0^\infty ds g(is) e^{-f(is)} = e^{-f(0)} - \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-f(is)} = 1, \quad (4.29)$$

al cumplirse las condiciones

$$f(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Re f(is) = \infty. \quad (4.30)$$

De esta forma

$$\dot{M}(is) = p \left(1 + q^2 X(is) F^2 X(is) \right) p - \frac{q^2}{2} \text{Tr} [F^2 X(is)]. \quad (4.31)$$

Haciendo $is \rightarrow s$ podemos identificar

$$\begin{aligned} \dot{X}(s) &= 1 + q^2 X[s] F^2 X[s] \\ \dot{Y}(s) &= -\frac{1}{2} q^2 \text{Tr} [F^2 X[s]]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Estas ecuaciones diferenciales tienen como solución

$$X(s) = \frac{\tan(qFs)}{qF}, \quad (4.33)$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln \cos(qFs)]. \quad (4.34)$$

Es obvio que $X(0) = Y(0) = 0$, de modo que se satisface la primera de las condiciones de la ec. (4.30).

El tensor de intensidad de campo y su cuadrado son explícitamente de la forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (iF^{\mu\nu})^2 = B^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Estas representaciones son útiles para encontrar

$$X^{\mu\nu}(is) = -is \left(\eta_{\parallel}^{\mu\nu} - \eta_{\perp}^{\mu\nu} \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right), \quad (4.36)$$

donde el tensor $\eta^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, y la notación paralela y perpendicular se define en el Apéndice A, así

$$p_\mu X^{\mu\nu}(is) p_\nu = -is \left(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right). \quad (4.37)$$

Por otro lado

$$Y(is) = \frac{1}{2} \ln \cos^2(qBs) = \ln \cos(qBs). \quad (4.38)$$

Así obtenemos la función de la ec. (4.23) como

$$M(is) = -is \left(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) + \ln \cos(qBs), \quad (4.39)$$

tal que obtenemos al propagador escalar en presencia de un campo magnético en el formalismo de Schwinger, es decir a la ec. (4.22) como

$$G(p) = i \int_0^\infty ds \frac{1}{\cos(qBs)} e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.40)$$

Conociendo $G(p)$ podemos reescribir la ec. (4.17) como

$$S(p) = (\not{A} + m)G(p), \quad (4.41)$$

o bien al sustituir la ec. (4.20)

$$S(p) = \left(\gamma^\mu p_\mu + \frac{i}{2} q \gamma_\mu F^{\mu\nu} \partial_\nu^{(p)} + m \right) G(p), \quad (4.42)$$

conociendo el tensor de Maxwell desde la ec. (4.12) tenemos que $F^{\mu\nu} \partial_\nu$ será no nulo solo para las componentes perpendiculares del momento, así que al calcular

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - \kappa^2 + i\epsilon)} \right) = -is \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - \kappa^2 + i\epsilon)}, \quad (4.43)$$

donde hemos escrito κ^2 desde la ec. (4.1) en lugar de solo la masa como fue para el caso escalar, tenemos

$$\frac{i}{2} q \gamma_\mu F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(-is p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) = qs \gamma_\mu F^{\mu\nu} p_\nu \frac{\tan(qBs)}{qBs}, \quad (4.44)$$

explícitamente

$$\begin{aligned} \gamma_\mu F^{\mu\nu} p_\nu \frac{\tan(qBs)}{B} &= (\gamma_1 p_2 - \gamma_2 p_1) \tan(qBs) \\ &= \frac{1}{2} [(\gamma_2 p_2 - \gamma_1 p^1)(\gamma_1 \gamma^1 + \gamma_2 \gamma^2)] \tan(qBs), \end{aligned} \quad (4.45)$$

utilizando la relación de la ec. (4.9) obtenemos

$$\gamma_\mu F^{\mu\nu} p_\nu \frac{\tan(qBs)}{B} = i\sigma^3 \not{p}_\perp \tan(qBs), \quad (4.46)$$

al sustituir en la ec. (4.42)

$$S(p) = i \int_0^\infty ds \frac{e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + qB\sigma^3 + i\epsilon)}}{\cos(qBs)} (\not{p} + i\sigma^3 \not{p}_\perp \tan(qBs) + m), \quad (4.47)$$

desarrollamos usando que $(\sigma^3)^n = \sigma^3$ con n es impar

$$i\sigma^3 \not{p}_\perp \tan(qBs) = i \not{p}_\perp \tan(qBs\sigma^3), \quad (4.48)$$

tomando $\not{p} = \not{p}_\parallel - \not{p}_\perp$

$$S(p) = i \int_0^\infty ds e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)} \frac{e^{iqBs\sigma^3}}{\cos(qBs)} \{ \not{p}_\parallel + m - \not{p}_\perp (1 - i \tan(qBs\sigma^3)) \}, \quad (4.49)$$

se cumple que

$$1 \pm i \tan(qBs\sigma^3) = \frac{1}{\cos(qBs\sigma^3)} (\cos(qBs\sigma^3) \pm i \sin(qBs\sigma^3)) = \frac{e^{\pm iqBs\sigma^3}}{\cos(qBs\sigma^3)}, \quad (4.50)$$

así

$$S(p) = i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(qBs)} e^{-is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)} \times \left\{ (\not{p}_\parallel + m) (\cos(qBs\sigma^3) - i \sin(qBs\sigma^3)) - \frac{\not{p}_\perp}{\cos(qBs)} \right\}. \quad (4.51)$$

De la definición de σ^3 en la ec. (4.16), es posible reescribir

$$\sin(qBs\sigma^3) = i\gamma^1\gamma^2 \sin(qBs) = i\gamma^1\gamma^2 \sin(|qB|s) \operatorname{sgn}(qB), \quad (4.52)$$

donde $\operatorname{sgn}(qB)$ es la función signo y depende de la carga.

Finalmente obtenemos

$$S(p) = i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(|qB|s)} e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)} \times \left\{ (\not{p}_\parallel + m) (\cos(|qB|s) + \gamma^1\gamma^2 \sin(|qB|s) \operatorname{sgn}(qB)) - \frac{\not{p}_\perp}{\cos(|qB|s)} \right\}. \quad (4.53)$$

4.2. Niveles de Landau

Habiendo obtenido el propagador escalar de una partícula cargada de masa m_b y carga e en presencia de un campo magnético, en su representación del tiempo propio de Schwinger, en la métrica de Minkowski y al multiplicar por un factor i , como

$$iG(p) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(|eB|s)} e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(|eB|s)}{|eB|s} - m_b^2 + i\epsilon)}. \quad (4.54)$$

A su vez, para fermiones con masa m_f y carga q , tenemos

$$iS(p) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(|qB|s)} e^{is(p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m_f^2 + i\epsilon)} \times \left\{ (\not{p}_\parallel + m_f) (\cos(|qB|s) + \gamma^1 \gamma^2 \sin(|qB|s) \operatorname{sgn}(qB)) - \frac{\not{p}_\perp}{\cos(|qB|s)} \right\}. \quad (4.55)$$

Puesto que en presencia de un campo magnético, las partículas cargadas no tienen un espectro continuo de energía en todas las componentes, sino que se organizan en niveles discretos en el plano perpendicular, es ahí donde surge la necesidad de representar a los propagadores como función de los llamados niveles de Landau.

4.2.1. Propagador escalar

Haciendo el cambio de variable $S = |eB|s$ en el propagador de la ec. (4.54) obtenemos que

$$iG(p) = \frac{1}{|eB|} \int_0^\infty \frac{dS}{\cos(S)} e^{\frac{iS}{|eB|} (p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(S)}{S} - m_b^2 + i\epsilon)}. \quad (4.56)$$

Podemos notar que $iG(p)$, tiene una infinidad de polos cuando $S = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ ya que el denominador se anula en el intervalo de integración, es analítica en el plano complejo con todos sus polos localizados en el eje real.

En el plano complejo, un contorno que evite los polo en el eje real, como en la Fig. 4.1

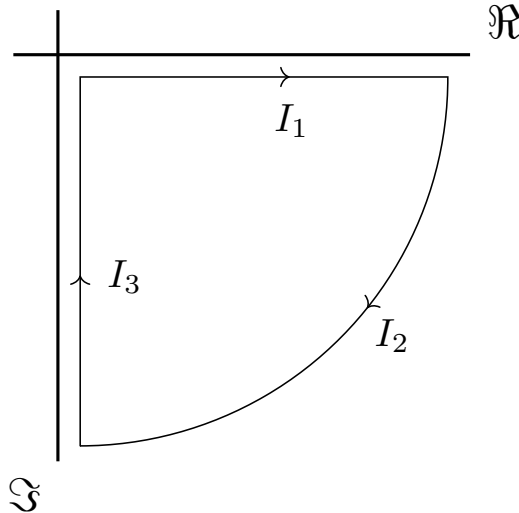


Fig. 4.1: Contorno de integración en el plano complejo que permite usar el Teorema de Cauchy.

Nos permite hacer uso del teorema de Cauchy, con la relación

$$\oint_c dS = 0 = I_1 + I_2 + I_3, \quad (4.57)$$

En la ec. (4.56), el término $i\epsilon$ asegura que cuando $S \rightarrow \infty$ la integral cae lo suficientemente rápido, de forma que $I_2 \rightarrow 0$. Por lo tanto $I_1 = -I_3$, donde I_3 recorre del infinito negativo imaginario al cero.

Así podemos reescribir la ec. (4.56) como

$$iG(p) = -\frac{1}{|eB|} \int_{-i\infty}^0 \frac{dS}{\cos(S)} e^{\frac{iS}{|eB|} (p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 \frac{\tan(S)}{S} - m_b^2 + i\epsilon)}, \quad (4.58)$$

con un cambio de variable $S = -i\tau$, tenemos

$$iG(p) = -\frac{i}{|eB|} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\cos(-i\tau)} e^{\frac{\tau}{|eB|} (p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 \frac{\tan(-i\tau)}{-i\tau} - m_b^2 + i\epsilon)}. \quad (4.59)$$

Esta última ecuación converge cuando las componentes paralelas del momento son pequeñas, es decir, $p_{\parallel}^2 < 0$. Es posible usar las relaciones

$$\cos(-i\tau) = \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2}, \quad i \tan(-i\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}}. \quad (4.60)$$

Al definir $u = e^{-2\tau}$, se tiene

$$\frac{1}{\cos(-i\tau)} = 2 \frac{\sqrt{u}}{1+u}, \quad i \tan(-i\tau) = 1 - \frac{2u}{1+u}. \quad (4.61)$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en el propagador

$$iG(k) = -\frac{2i}{|eB|} \int_0^{\infty} d\tau e^{\frac{\tau}{|eB|} (p_{\parallel}^2 - m_b^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_{\perp}^2}{|eB|}} e^{2\frac{p_{\perp}^2}{|eB|} \frac{u}{1+u}} \frac{\sqrt{u}}{1+u}. \quad (4.62)$$

Al identificar la función generadora de polinomios de Laguerre, como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} L_{\ell}^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}}. \quad (4.63)$$

Donde al usar que $x = 2\frac{p_{\perp}^2}{|eB|}$ y $t = -u$, escribimos

$$\frac{e^{\frac{2p_{\perp}^2}{|eB|} \frac{-u}{1-(-u)}}}{1-(-u)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-u)^{\ell} L_{\ell}^{(0)} \left(\frac{2p_{\perp}^2}{|eB|} \right). \quad (4.64)$$

Substituyendo obtenemos

$$iG(p) = -\frac{2i}{|eB|} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} L_{\ell}^{(0)} \left(\frac{2p_{\perp}^2}{|eB|} \right) e^{-\frac{p_{\perp}^2}{|eB|}} \int_0^{\infty} d\tau e^{2\tau(\ell+\frac{1}{2})} e^{\frac{\tau}{|eB|} (p_{\parallel}^2 - m_b^2 + i\epsilon)}. \quad (4.65)$$

La integral anterior tiene solución como

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{-2\tau(\ell+\frac{1}{2}) + \frac{\tau}{|eB|} (p_{\parallel}^2 - m_b^2 + i\epsilon)} = \frac{-|eB|}{p_{\parallel}^2 - m_b^2 - (2\ell+1)|eB| + i\epsilon}. \quad (4.66)$$

Por lo tanto podemos escribir el propagador de partícula libre en presencia de un campo magnético en función de los niveles de Landau como

$$iG(p) = 2i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|eB|} \right) e^{-\frac{p_\perp^2}{|eB|}}}{p_\parallel^2 - m_b^2 - (2\ell + 1)|eB| + i\epsilon}. \quad (4.67)$$

4.2.2. Propagador fermiónico

Para el propagador fermiónico, seguimos un procedimiento análogo al caso escalar partiendo de hacer $|qB|s \rightarrow S$ en la ec. (4.55) y usando la igualdad dada por el teorema de Cauchy, tal que

$$iS(p) = \frac{1}{|qB|} \int_{-i\infty}^0 \frac{dS}{\cos(S)} e^{\frac{iS}{|qB|} (p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(S)}{S} - m_f^2 + i\epsilon)} \quad (4.68)$$

$$\times \left\{ (\not{p}_\parallel + m_f) \cos(S) (1 + \gamma^1 \gamma^2 \tan(S) \text{sgn}(qB)) - \frac{\not{p}_\perp}{\cos(S)} \right\}.$$

Al relacionar la integral en el eje real con una integral en el eje imaginario, se hace un cambio de variable $S = -i\tau$, con τ real, tal que

$$iS(p) = -\frac{i}{|qB|} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\cos(-i\tau)} e^{\frac{\tau}{|qB|} (p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(-i\tau)}{-i\tau} - m_f^2 + i\epsilon)} \quad (4.69)$$

$$\times \left\{ (\not{p}_\parallel + m_f) \cos(-i\tau) (1 + \gamma^1 \gamma^2 \tan(-i\tau) \text{sgn}(qB)) - \frac{\not{p}_\perp}{\cos(-i\tau)} \right\}.$$

Conociendo las relaciones de la ec. (4.61), se hace un cambio de variable tal que

$$iS(p) = -\frac{i}{|qB|} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|} (p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} e^{\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \left(\frac{u}{1+u} \right)} \frac{\sqrt{u}}{1+u} \quad (4.70)$$

$$\times \left\{ (\not{p}_\parallel + m_f) \frac{1+u}{\sqrt{u}} \left[1 - i\gamma^1 \gamma^2 \left(1 - \frac{2u}{1+u} \right) \text{sgn}(qB) \right] - 4 \not{p}_\perp \frac{\sqrt{u}}{1+u} \right\}.$$

Reescribiendo la expresión

$$iS(p) = -\frac{i}{|qB|} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|} (p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} \quad (4.71)$$

$$\times \left\{ (1+u) \frac{e^{\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \left(\frac{u}{1+u} \right)}}{(1+u)} (1 - i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) \right.$$

$$\left. + 2u \frac{e^{\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \left(\frac{u}{1+u} \right)}}{(1+u)} i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB) (\not{p}_\parallel + m_f) - 4 \not{p}_\perp \frac{ue^{\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \left(\frac{u}{1+u} \right)}}{(1+u)^2} \right\},$$

haciendo uso de la ec. (4.63), se obtiene al propagador como

$$\begin{aligned}
iS(p) = & -\frac{i}{|qB|} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|}(p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} \left\{ (1+u) \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \right. \\
& \times (1 - i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) + 2u \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \\
& \left. \times (i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) - 4 \not{p}_\perp \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(1)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \right\}. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Reordenando

$$\begin{aligned}
iS(p) = & -\frac{i}{|qB|} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|}(p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} \\
& \times \left\{ (1 - i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \right. \\
& + (1 + i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^{\ell+1} \\
& \left. - 4 \not{p}_\perp \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(1)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \right\}. \tag{4.73}
\end{aligned}$$

La suma

$$\sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^{\ell+1}, \tag{4.74}$$

busca ser reescrita haciendo $\ell + 1 \rightarrow \ell$, tal que

$$\sum_{\ell=1}^\infty (-1)^{\ell-1} L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell = - \sum_{\ell=1}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell, \tag{4.75}$$

$$= L_{-1}^{(0)} - \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell. \tag{4.76}$$

Por definición, se conoce $L_{-1}^{(0)} = 0$, de forma que se encuentra

$$\sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^{\ell+1} = - \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell. \tag{4.77}$$

Al sustituir se tiene

$$\begin{aligned}
iS(p) = & -\frac{i}{|qB|} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|}(p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} \\
& \times \left\{ (1 - i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \right. \\
& - (1 + i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)) (\not{p}_\parallel + m_f) \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \\
& \left. + 4 \not{p}_\perp \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell L_{\ell-1}^{(1)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) u^\ell \right\}.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

El llamado *proyector* O^\pm cumple la función de proyectar el espín del fermión de forma paralela o anti-paralela sobre el campo magnético, se define como

$$O^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(qB)). \tag{4.79}$$

Con todas las sumas de (D.16) de la misma forma, es posible intercambiar la suma con la integral para así escribir

$$\begin{aligned}
iS(p) = & -\frac{i}{|qB|} \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|}(p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon)} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} u^\ell \left\{ 2(\not{p}_\parallel + m_f) O^- L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) \right. \\
& \left. - 2(\not{p}_\parallel + m_f) O^+ L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) - 4 \not{p}_\perp L_{\ell-1}^{(1)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) \right\},
\end{aligned} \tag{4.80}$$

donde la integral tiene solución

$$\int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{|qB|}(p_\parallel^2 - m_f^2 + i\epsilon - 2\ell|qB|)} = \frac{-|qB|}{p_\parallel^2 - m_f^2 - 2\ell|qB| + i\epsilon}, \tag{4.81}$$

así

$$\begin{aligned}
iS(p) = & -\frac{i}{|qB|} e^{-\frac{p_\perp^2}{|qB|}} \sum_{\ell=0}^\infty (-1)^\ell \left(\frac{-|qB|}{p_\parallel^2 - m_f^2 - 2\ell|qB| + i\epsilon} \right) \left\{ 2(\not{p}_\parallel + m_f) O^- L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) \right. \\
& \left. - 2(\not{p}_\parallel + m_f) O^+ L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) - 4 \not{p}_\perp L_{\ell-1}^{(1)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Al definir

$$\begin{aligned}
D_\ell(|qB|, p) = & 2(\not{p}_\parallel + m_f) O^- L_\ell^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) - 2(\not{p}_\parallel + m_f) O^+ L_{\ell-1}^{(0)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right) \\
& - 4 \not{p}_\perp L_{\ell-1}^{(1)} \left(\frac{2p_\perp^2}{|qB|} \right).
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Obtenemos finalmente el propagador fermiónico en presencia de un campo magnético en términos de los niveles de Landau

$$iS(p) = ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{|qB|}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{D_{\ell}(qB, p)}{p_{\parallel}^2 - m_f^2 - 2\ell|qB| + i\epsilon}, \quad (4.84)$$

4.2.3. Aproximación a campo fuerte

Cuando se considera la escala más grande posible de campo, tal que, $|qB| \gg p$, la partícula no posee suficiente energía para pasar de un nivel de Landau a otro, por lo que para la aproximación al campo fuerte se dice que la partícula se queda en el nivel más bajo de Landau, esto es en $\ell = 0$.

El propagador escalar en el nivel más bajo de Landau es

$$iG(p) = 2ie^{\frac{p_{\perp}^2}{|eB|}} \frac{1}{p_{\parallel}^2 - m_b^2 - |eB| + i\epsilon}. \quad (4.85)$$

Para el caso fermiónico es

$$iS(p) = ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{|qB|}} \frac{D_0(qB, p)}{p_{\parallel}^2 - m_f^2 + i\epsilon}, \quad (4.86)$$

donde

$$D_0 = 2(\not{p}_{\parallel} + m_f)O^+L_0^{(0)}\left(\frac{2p_{\perp}^2}{|qB|}\right) - 2(\not{p}_{\parallel} + m_f)O^-L_{-1}^{(0)}\left(\frac{2p_{\perp}^2}{|qB|}\right) - 4\not{p}_{\perp}L_{-1}^{(1)}\left(\frac{2p_{\perp}^2}{|qB|}\right) \quad (4.87)$$

si $L_0 = 1$ y $L_{-1}^{(0)} = L_{-1}^{(1)} = 0$ la aproximación del propagador fermiónico en el límite del campo fuerte es

$$iS(p) = 2ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{|qB|}} \frac{\not{p}_{\parallel} + m_f}{p_{\parallel}^2 - m_f^2 + i\epsilon} O^+. \quad (4.88)$$

4.3. Catálisis magnética

En varias áreas de la física el rompimiento espontáneo de la simetría es de interés, en la física de altas energías este fenómeno fue usado para explicar el comportamiento dinámico de la masa de las partículas elementales, esta idea surgió alrededor de los años 60 por Yoichiro Nambu y Giovanni Jona-Lasinio [50, 51], quienes estudiando a los nucleones encontraron que la masa de los nucleones se debe a las fluctuaciones de los fermiones que los componen, los quarks.

Conocer este hecho llevó a la comunidad científica a preguntarse si el origen dinámico de la masa podría verse modificado por condiciones externas en los sistemas físicos que presentan este comportamiento. Una de las condiciones a considerar fue la presencia de campos magnéticos.

Años más tarde, para sistemas de materia condensada se mostró que en $2+1$ dimensiones, un campo magnético constante promueve la ruptura de la simetría, lo que lleva a generar una masa dinámica de fermiones [52], este estudio definió por primera vez el fenómeno de la Catálisis Magnética, llevando estas ideas a la física de partículas, se encontró que en $3+1$ dimensiones el campo magnético catalizaba la ruptura de la simetría quiral [53], además se estableció que la esencia de este efecto es la reducción dimensional de una dimensión D a una dimensión $D-2$, lo cual puede ser visto como la pérdida de la isotropía de los sistemas debido al campo magnético, o como podemos ver desde las ecs. (4.54) y (4.55), ahora lo se distinguen entre componentes paralelas y componentes perpendiculares del momento respecto del campo magnético.

La atención a estos fenómenos aumentó cuando se dio a conocer que sistemas físicos de materia fuertemente interactuante de interés, tales como las colisiones de iones pesados que se encuentran permeadas por campos magnéticos muy intensos (del orden de la masa del pión al cuadrado) [22, 54–56]. Bajo todas estas condiciones se comenzó el estudio de la transición de fase de la QCD, en su mayor parte a partir del estudio de la restauración o el rompimiento de la simetría quiral a través de modelos como el NJL, sabiendo que este enfoque requiere una aproximación a la masa cero, por lo cual aplica solo en el sector ligero de los quarks.

No fue hasta hace algunos años que un grupo de Lattice QCD [25] que, además de corroborar la catálisis magnética obteniendo el comportamiento esperado predicho por muchos modelos, encontró que al considerar una temperatura finita ocurría el efecto opuesto, los campos magnéticos inhiben en lugar de catalizar por el cual se reduce la temperatura pseudocrítica para la transición de fase quiral, a esto se le llamó Catálisis Magnética Inversa.

Así se pudo observar el comportamiento del condensado de quarks como función del campo magnético, por un lado a temperatura cero donde el valor del condensado incrementa como función de la intensidad del campo, tal y como se puede observar en la Fig. 4.2a. Notamos que la catálisis magnética es descrita por el aumento del condensado de quarks cuando el campo magnético crece, por lo tanto se está promoviendo la ruptura de la simetría quiral. Por otro lado como se ve en la Fig. 4.2b, al estar en un baño térmico, tenemos que a temperaturas bajas el condensado continua creciendo, hasta que a una temperatura pseudocrítica el comportamiento cambia, el condensado comienza creciendo y a cierto valor del campo magnético empieza a decrecer, finalmente a temperaturas por encima de esta temperatura, el valor del condensado solo decrece como función del campo, es así como se ve la catálisis magnética inversa, donde la temperatura promueve la restauración de la simetría.

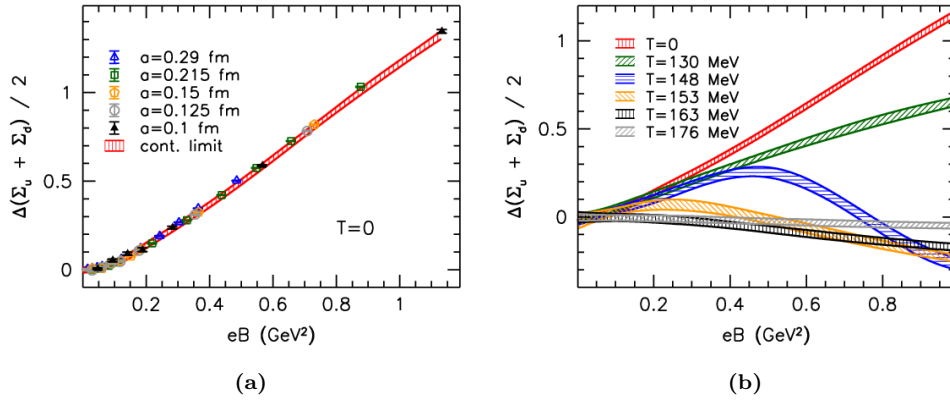


Fig. 4.2: El cambio del condensado renormalizado respecto del campo magnético eB . En (a) a temperatura cero, medido en cinco espaciamentos de red y en el límite continuo. En (b) a seis temperaturas diferentes [25].

Por estos distintos comportamientos, las propiedades de la materia fuertemente interactuante en presencia de campos magnéticos se convirtieron en un tema muy interesante en la actualidad.

5.1. Formalismo de Matsubara

El comportamiento estadístico de un sistema cuántico en equilibrio térmico usualmente se estudia a través de un ensamble, la una matriz de densidad para un sistema como

$$\rho(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (5.1)$$

donde β representa el inverso de la temperatura de equilibrio

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad (5.2)$$

aquí se consideran unidades naturales, con la constante de Boltzmann $k_B = 1$. \mathcal{H} es el Hamiltoniano que corresponde al ensamble.

Dada la matriz de densidad, la función de partición de un sistema es

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr}(\rho(\beta)) = \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}), \quad (5.3)$$

el operador de traza Tr corresponde a la suma sobre todos los valores de expectación en alguna base completa. El ensamble promedio de algún observable A es definido como

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}A)}{\text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}})}. \quad (5.4)$$

El promedio térmico de una función de dos operadores, A y B , puede escribirse como

$$\langle AB \rangle_\beta = \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}(\rho(\beta)AB). \quad (5.5)$$

Dado un ensamble y un conjunto de operadores de Schrödinger, podemos definir en una imagen de Heisenberg como sigue. Para algún operador de Schrödinger arbitrario A tenemos el operador de Heisenberg $A_H(t)$ definido como

$$A_H(t) = e^{i\mathcal{H}t} A e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (5.6)$$

Para una función de correlación térmica de dos operadores de Heisenberg $A_H(t)$ y $B_H(t')$, usando la ec. (5.6) y la propiedad cíclica de la traza

$$\begin{aligned} \langle A_H(t)B_H(t') \rangle_\beta &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}(\rho(\beta)A_H(t)B_H(t')) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}A_H(t)e^{\beta\mathcal{H}}e^{-\beta\mathcal{H}}B_H(t')) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}(A_H(t+i\beta)e^{-\beta\mathcal{H}}B_H(t')) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}B_H(t')A_H(t+i\beta)) \\ &= \langle B_H(t')A_H(t+i\beta) \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Esta expresión conducirá a identificar la periodicidad o antiperiodicidad en las funciones de Green de dos puntos.

Podemos definir la función de Green de dos puntos en la imagen de Heisenberg como

$$\begin{aligned}
G(\tau, \tau') &= \left\langle \mathbb{T} \left(\phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \right) \right\rangle \\
&= \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}} \mathbb{T} \left(\phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \right),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

aquí \mathbb{T} es el operador del producto temporalmente ordenado y donde ϕ_H se refiere a un campo, bosónico o fermiónico en la imagen de Heisenberg. Además

$$\mathbb{T} \left(\phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \right) = \theta(\tau - \tau') \phi_H(\tau) \phi_H^\dagger(\tau') \pm \theta(\tau - \tau') \phi_H^\dagger(\tau') \phi_H(\tau), \tag{5.9}$$

donde el signo positivo y negativo representan a los campos bosónicos y fermiónicos, respectivamente.

Usando las ecs. (5.7) y (5.9), tenemos que

$$\begin{aligned}
G(0, \tau) &= \pm \left\langle \phi_H^\dagger(\tau) \phi_H(0) \right\rangle \\
&= \pm \left\langle \phi_H(\beta) \phi_H^\dagger(\tau) \right\rangle \\
&= \pm G(\beta, \tau).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

expresión que se traduce en un comportamiento periódico o antiperiódico de los campos bosónicos y fermiónicos.

Para las funciones de Green definidas en un intervalo finito de tiempo, sus transformadas de Fourier puede contener frecuencias discretas, como

$$G(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G(\omega_n), \tag{5.11}$$

$$G(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau), \tag{5.12}$$

donde $\omega_n = n\pi T$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Al usar la ec. (5.10) para reescribir la ec. (5.12), tenemos que

$$\begin{aligned}
G(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau) \\
&= \pm \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau + \beta) + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau) \\
&= \pm \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n(\tau - \beta)} G(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau) \\
&= \frac{1}{2} (1 \pm e^{-i\omega_n \beta}) \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau) \\
&= \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^n) \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Es posible notar que $G(\omega_n)$ se anula para los bosones, asociados al signo positivo, cuando n es impar y para los fermiones, asociados al signo negativos, para valores de n par.

En general que las funciones de Green satisfacen

$$G(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G(\omega_n), \quad (5.14)$$

$$G(\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau), \quad (5.15)$$

donde

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi T & \text{para bosones} \\ (2n+1)\pi T & \text{para fermiones} \end{cases}. \quad (5.16)$$

Tomamos ω_n como las frecuencias de Matsubara para bosones y $\tilde{\omega}_n$ las frecuencias de Matsubara para fermiones.

Este formalismo resulta en que ahora los valores de la energía están cuantizados, por lo cual las integrales en el espacio de momentos se reescriben. Se calculan en el espacio Euclidiano a partir de una rotación de Wick

$$k_0 \rightarrow ik_4 \quad (5.17)$$

y se escriben como una integral tridimensional y una suma sobre todos los modos discretos

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (5.18)$$

Por otro lado, la función de partición en mecánica cuántica puede ser representada como una integral de caminos en el espacio Euclidiano como

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int dq K_E(q, \dot{q}; \beta) = \mathcal{N} \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q_E e^{-S_E}, \quad (5.19)$$

donde \mathcal{N} es la constante de normalización, q es una coordenada generalizada y \dot{q} es su respectiva velocidad generalizada, y la acción Euclidiana es

$$S_E[q, \dot{q}] = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right). \quad (5.20)$$

Una vez que \mathcal{Z} es calculada, cantidades termodinámicas tales como la energía libre de Helmholtz F , entropía S y energía interna promedio E pueden ser obtenidas a través relaciones estándar de la física estadística.

5.2. Potencial efectivo

En las teorías cuánticas de campos, el potencial clásico es usado en el estudio del rompimiento espontáneo de la simetría, las correcciones radiativas en la teoría podrían cambiar el comportamiento del potencial clásico. Una simetría que es espontáneamente rota en

el nivel clásico podría ser restaurada o una simetría que no está rota en el nivel clásico podría ser rota espontáneamente debido a los efectos de las correcciones cuánticas.

El potencial efectivo no tiene una expresión de forma cerrada, por lo cual debe ser calculado orden por orden, en una serie perturbativa. En este caso restringimos a las correcciones orden 1-loop.

Considerando una teoría $\lambda\phi^4$ en presencia de una fuente J , descrita por la acción

$$S^J = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] = S = \int d^4x J\phi. \quad (5.21)$$

El potencial a orden árbol o clásico esta dado por

$$V^0 = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (5.22)$$

La función generadora es definida como

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S^J}. \quad (5.23)$$

$W[J]$ es conocida como la función generadora de las funciones de Green conectadas, dadas como

$$\left. \frac{\delta W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = (i\hbar)^{(n-1)} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle^c, \quad (5.24)$$

donde T es una vez más, el operador del producto temporalmente ordenado. En particular notamos que la función de un punto es

$$\phi_c(x) = \left. \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle. \quad (5.25)$$

De la anterior definición, podemos ver que el campo clásico ϕ_c , el cual representa el valor de expectación en el vacío del campo ϕ , debería ser una constante independiente del espacio-tiempo cuando la fuente está apagada, debido a la invariancia de Lorentz en el vacío. Sin embargo, en general se trata de un funcional de la fuente J .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange siguiendo la forma de la acción son dadas por

$$\frac{\delta S^J}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) = 0. \quad (5.26)$$

Considerando la teoría $\lambda\phi^4$ en la ec. (5.26), tenemos la siguiente expresión

$$(\square + m^2) \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 - J = 0. \quad (5.27)$$

Por otra parte podemos representar a J a través del operador de Euler, de tal forma que optamos por la siguiente notación

$$J = F(\phi). \quad (5.28)$$

Notamos desde la definición de la función generadora que no tiene dependencia en el campo. Al sustituir

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi, \quad (5.29)$$

la función generadora no debería cambiar, conduce a la identidad

$$\delta Z[J] = 0. \quad (5.30)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta S^J}{\delta\phi} e^{iS^J} &= \int \mathcal{D}\phi (F(\phi) - J) e^{iS^J} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left(F\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right) - J \right) e^{iS^J} \\ &= \left(F\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right) - J \right) Z[J] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

En términos de $W[J]$ entonces da

$$e^{-\frac{i}{\hbar}W[J]} F\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right) e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = J(x), \quad (5.32)$$

donde hemos ocupado que el campo ϕ se obtiene a partir del operador $\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}$ aplicado a la función generadora de las funciones de Green conectadas. Por lo tanto podemos terminar escribiendo

$$F\left(\frac{\delta W}{\delta J(x)} + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) = J(x). \quad (5.33)$$

En el límite donde \hbar se desvanece, se reduce a

$$F\left(\frac{\delta W}{\delta J(x)}\right) = J(x), \quad (5.34)$$

$$F(\phi_c) = J(x). \quad (5.35)$$

Así vemos que el campo clásico satisface la misma ecuación que la ecuación de Euler-Lagrange de la teoría original cuando \hbar se desvanece. Si apagamos la fuente, el campo clásico debería solo tener un valor constante. En este límite resulta

$$\frac{\partial V^0(\phi_c)}{\partial\phi_c} = 0. \quad (5.36)$$

Tenemos la ecuación del mínimo para el potencial en términos de ϕ_c y como vimos antes, un mínimo no trivial del potencial a orden árbol debería corresponder a una solución no trivial de la ecuación anterior. Un mínimo no trivial del potencial clásico implica que el valor de expectación del campos, en el vacío es distinto de cero,

$$\phi_c = \langle 0|\phi|0\rangle \neq 0. \quad (5.37)$$

Podemos pensar de $\phi_c = \langle 0|\phi|0\rangle$ como un parámetro de orden del rompimiento de la simetría, tal que es posible identificar el rompimiento espontáneo de la simetría si

$$\left. \frac{\delta W}{\delta J} \right|_{J=0} \neq 0. \quad (5.38)$$

Un mejor enfoque es a partir de la acción efectiva, definida como

$$\Gamma(\phi_c) = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x). \quad (5.39)$$

Esta definición conduce a

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \quad (5.40)$$

La condición del rompimiento de la simetría puede ahora ser escrita como

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\phi_c=v \neq 0} = 0. \quad (5.41)$$

Esta condición es más como la condición del mínimo. La acción efectiva Γ es un funcional del campo clásico y hay dos formas equivalentes de expandirla. Primero como una expansión en serie de potencias en ϕ_c para escribir

$$\Gamma(\phi_c) = \sum_n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n) \Gamma^n(x_1, \dots, x_n), \quad (5.42)$$

donde

$$\Gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \right|_{\phi_c=0}. \quad (5.43)$$

Esta expresión asume que no hay rompimiento de la simetría. Por otro lado, si tenemos rompimiento espontáneo de la simetría, la fórmula tomaría la forma

$$\Gamma(\phi_c) = \sum_n \int d^4x_1 \dots d^4x_n (\phi_c(x_1) - v) \dots (\phi_c(x_n) - v) \Gamma^n(x_1, \dots, x_n), \quad (5.44)$$

donde

$$\Gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \right|_{\phi_c=v}, \quad (5.45)$$

con v denotando la solución de la ecuación del mínimo.

Una expansión alternativa de la acción efectiva es en términos de potencias del momento y sus derivadas como

$$\Gamma(\phi_c) = \int d^4x \left(-V(\phi_c) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c + \dots \right), \quad (5.46)$$

Podemos ver que esta expansión es posible porque Γ representa una acción efectiva y necesariamente contiene la estructura de la acción clásica. Esta forma de la expansión de la acción efectiva sin embargo, es más conveniente desde el punto de vista del estudio del rompimiento de la simetría. Vimos que cuando $J \rightarrow 0$, $\phi_c(x) = \phi$ es una constante. En

este límite entonces todos los términos de las derivadas en la expansión se desvanecen y tenemos

$$\Gamma(\phi_c) = -(2\pi)^4 \delta(0) V(\phi) = -\Omega V(\phi), \quad (5.47)$$

donde $V(\phi)$ es conocido como el potencial efectivo. El factor Ω representa el volumen espacio-temporal y dado que ϕ es una constante, tenemos solo una función y no un funcional de esta variable, es decir

$$\int d^4x = (2\pi)^4 \delta(0) = \Omega. \quad (5.48)$$

La ecuación del mínimo toma la forma

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (5.49)$$

Sin embargo, V contiene correcciones cuánticas al potencial clásico original.

5.2.1. Potencial efectivo a orden 1-loop

La función V representa el potencial efectivo incluyendo correcciones cuánticas a todos los órdenes. En ausencia de una técnica no perturbativa, su estructura debe ser estudiada orden por orden en teoría de perturbaciones. Una expansión perturbativa, la cual es particularmente conveniente en conexión con la ruptura de la simetría, es en términos del número de loops de un diagrama de Feynman los cuales además coinciden con una expansión en potencias de \hbar , tomando solo hasta orden 1-loop escribimos

$$V = V^0 + \hbar V^1 + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (5.50)$$

Conocemos el potencial a orden árbol o clásico, V^0 , y estamos interesados en calcular la corrección a orden 1-loop, V^1 .

Asumimos que ϕ_0 representa la solución de la ecuación de Euler-Lagrange a orden árbol

$$\left. \frac{\delta S^J}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (5.51)$$

En tal caso, expandimos el campo al rededor de su solución clásica como

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sqrt{\hbar} \chi(x), \quad (5.52)$$

por consecuencia, la acción clásica tendría una expansión

$$\begin{aligned} S^J(\phi) &= S^J(\phi_0 + \sqrt{\hbar} \chi) \\ &= S^J(\phi_0) + \sqrt{\hbar} \int d^4x \chi(x) \left. \frac{\delta S^J}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_0} \\ &\quad + \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) \left. \frac{\delta^2 S^J}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0} \chi(y) + \dots \end{aligned}$$

$$S^J(\phi) \simeq S^J(\phi_0) - \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) G^{-1}(x, y) \chi(y) + \dots \quad (5.53)$$

Notamos que el término lineal en χ desaparece debido a que la derivada de la acción clásica lo hace como en la ec. (5.51).

Definimos el propagador inverso o bien la función de Green de dos puntos como

$$G^{-1}(x, y) = - \left. \frac{\delta^2 S^J}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} = - \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0}. \quad (5.54)$$

Sustituyendo la expansión en la expresión para la función generadora, tenemos

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} \simeq \int \mathcal{D}\chi e^{\frac{i}{\hbar} S^J(\phi_0 + \sqrt{\hbar}\chi)} \\ &\simeq e^{\frac{i}{\hbar} S^J(\phi_0)} \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) G^{-1}(x, y) \chi(y)} \\ &\simeq e^{\frac{i}{\hbar} S^J(\phi_0)} [\det(G^{-1})]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} W[J] &\simeq S^J(\phi_0) - i\hbar \ln [\det(G^{-1})]^{-1/2} \\ &\simeq S^J(\phi_0) + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Para avanzar a la acción efectiva, notamos que ϕ_c , el campo clásico puede ser expandido en potencias de \hbar , sin embargo, como se satisface el límite $\hbar \rightarrow 0$, escribimos la expansión de la siguiente forma

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \dots, \quad (5.57)$$

donde por definición, ϕ_1 es del orden de \hbar , notamos que

$$\begin{aligned} S(\phi_c) &\sim S(\phi_0 + \phi_1) \\ &= S(\phi_0) + \int d^4x \phi_1 \left. \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right|_{\phi_0} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= S(\phi_0) - \int d^4x J(x) \phi_1(x), \end{aligned} \quad (5.58)$$

donde hemos usado la ecuación clásica de Euler-Lagrange y hemos despreciado los términos de mayor orden.

Ahora la acción efectiva, a ese orden tiene la forma

$$\begin{aligned}
\Gamma(\phi_c) &= W[J] - \int d^4x \phi_c(x) J(x) \\
&= S^J(\phi_0) + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} - \int d^4x (\phi_0 + \phi_1) J \\
&= S(\phi_0) + \int d^4x \phi_0 J + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} \\
&= S(\phi_c) + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Para un campo clásico constante, obtenemos el potencial efectivo a primer orden como

$$\Gamma(\phi_c) = -\Omega V(\phi_c) = -\Omega V^0(\phi_c) + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1}, \tag{5.60}$$

$$V(\phi_c) = V^0(\phi_c) - \frac{i\hbar}{2} \Omega^{-1} \text{Tr} \ln G^{-1}. \tag{5.61}$$

Ahora vemos que la contribución a 1-loop del potencial efectivo es dado por

$$V^1(\phi_c) = -\frac{i\hbar}{2} \Omega^{-1} \text{Tr} \ln G^{-1}, \tag{5.62}$$

donde la traza representa la suma sobre todos los grados de libertad del sistema.

5.3. Transiciones de fase

En física, las fases de una sustancia representan estados de la materia con propiedades físicas y químicas homogéneas, como gas, líquido, sólido o bien distintos estados cristalinos. Estas fases están determinadas por las interacciones entre partículas y las condiciones termodinámicas, como la temperatura y la presión. El paso de una fase a otra, conocido como una transición de fase, es un fenómeno que involucra cambios en las propiedades del sistema.

En el caso de un líquido y un gas, se puede pensar que dichas fases se diferencian entre sí solo en un carácter cuantitativo, es decir, difieren uno de otro solo en cuanto interactúan sus moléculas. En cambio, las diferencias entre un líquido y un sólido resultan cualitativas, dado que estos se distinguen por su simetría interna, en ese sentido dicha simetría existe o no en una u otra fase.

Las fases de una sustancia pueden describirse en términos del potencial termodinámico o en general, del potencial efectivo en teorías de campo.

Como ya se mencionó anteriormente, el potencial de una teoría, llámese clásico o efectivo al considerar las correcciones cuánticas, permite el estudio del rompimiento o restauración de una simetría.

Con frecuencia, el mínimo del potencial efectivo actúa como *parámetro de orden*, caracterizando la transición de fase del sistema. Es nulo en la fase simétrica, donde la simetría está

restaurada, y toma un valor distinto de cero cuando hay ruptura espontánea de la simetría.

Las propiedades termodinámicas del sistema pueden modificar el mínimo y dependiendo del comportamiento de dicho parámetro la transición de fase puede distinguirse entre primer o segundo orden, en el estudio de las transiciones es importante conocer el tipo u orden de la transición, por lo cual existe la llamada clasificación de Ehrenfest. El orden de la transición viene dado por condiciones en la continuidad de la n -ésima derivada del potencial. Es decir, cuando la derivada de orden n diverge, decimos que la transición es de orden n .

Para ilustrar los distintos tipos de transiciones de fase, un caso simple es cuando tomamos el potencial efectivo de un campo escalar ϕ con autointeracción cuártica, un bosón neutro en un baño térmico, donde el potencial clásico corresponde al obtenido en la ec. (3.17)

$$V^0 = -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4, \quad (5.63)$$

recordamos que la teoría asociada a este campo presenta un rompimiento espontáneo de la simetría puesto que su valor de expectación en el vacío es finito. Debido a esto, el campo adquiere una masa dinámica dada en la ec. (3.19)

$$m^2 = 3\lambda v^2 - a^2. \quad (5.64)$$

Por otro lado la corrección a 1-loop de la teoría es calculada a partir de la ec. (5.62). En la literatura es bien conocido el resultado en la aproximación de alta temperatura [59]. Solo tomando los términos más dominantes de esta aproximación tenemos un potencial efectivo

$$V(v, T) = -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 + \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{\pi^2 T^4}{90}. \quad (5.65)$$

Al sustituir la masa, se reescribe como

$$V(v, T) = \frac{\lambda}{4}v^4 + \left(\frac{\lambda}{8}T^2 - \frac{a^2}{2}\right)v^2 - \frac{a^2 T^2}{24} - \frac{\pi^2 T^4}{90}. \quad (5.66)$$

El mínimo de este potencial es dado por la solución de

$$\frac{1}{v} \frac{\partial V}{\partial v} \Big|_{v=v_{min}} = 0, \quad (5.67)$$

o bien

$$\lambda v_{min}^2 + \left(\frac{\lambda}{4}T^2 - a^2\right) = 0, \quad (5.68)$$

que es la solución no trivial de la ecuación. A una temperatura fija, tendremos distintos comportamientos para el potencial que podemos observar en la Fig. 5.1a así como el mínimo del potencial en función de la temperatura en la Fig. 5.1b, para lo cual hay que analizar el coeficiente que acompaña al término cuadrático de v .

Por un lado, cuando la temperatura es nula o bien el coeficiente resulta negativo definido, observamos que la simetría está rota, es decir, el mínimo del potencial es distinto de cero, en ese caso conforme aumenta la temperatura el valor del mínimo decrece hasta llegar a

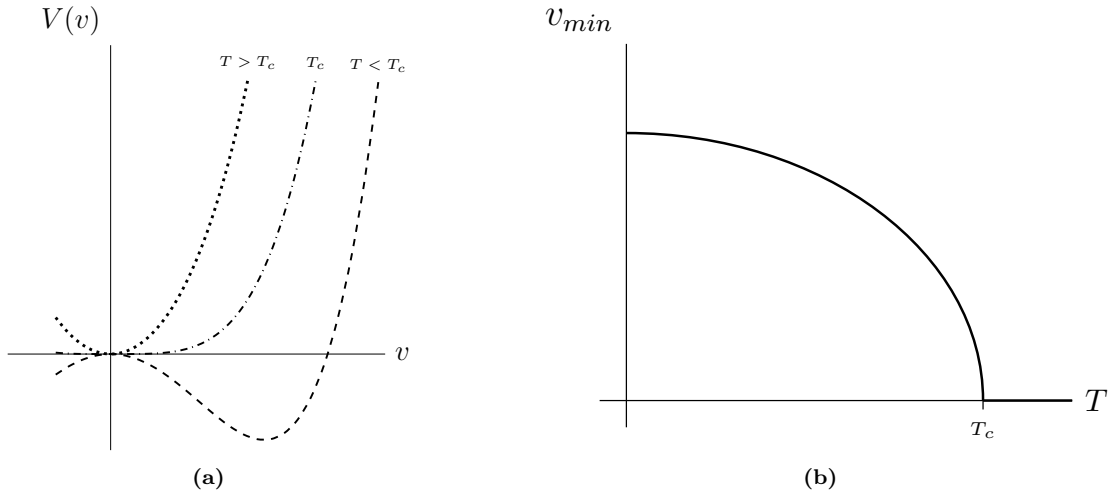


Fig. 5.1: En el lado izquierdo vemos un potencial $V(v)$ que experimenta la ruptura y restauración de la simetría a distintas temperaturas. En el lado derecho graficamos el mínimo del potencial como función de la temperatura $v_{min}(T)$, observando una transición de fase de segundo orden.

un valor crítico de la temperatura. Esta temperatura de transición T_c es la cual permite que el lado de izquierdo de la ec. (5.68) se anule, a partir de ese valor, la simetría se ve restaurada puesto que el valor del mínimo del potencial se anula. Finalmente, para valores de la temperatura más altos que la temperatura de transición, la simetría permanece restaurada por lo cual el valor del mínimo continua siendo cero.

En este caso, además podemos conocer la segunda derivada del potencial como

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right|_{v=v_{min}} = 2a^2 - \frac{\lambda}{2} T^2, \quad (5.69)$$

expresión que es finita para cualquier valor de T , por lo que dada definición de la clasificación, este tipo de transición corresponde a una transición de *segundo orden*.

Por otro lado, hay ocasiones en las que el potencial tiene un comportamiento más complejo, como puede ser visto en la Fig. 5.2a. Para temperaturas por arriba o por debajo de la temperatura de transición T_c permanece la el comportamiento del mínimo al igual que para las transiciones de segundo orden, sin embargo, en la temperatura de transición el potencial puede presentar múltiples mínimos haciendo que el valor de $v_{min}(T_c)$ de un salto abrupto al cero, como puede ser visto en la Fig. 5.2b.

A diferencia del caso del segundo orden, cuyo mínimo decrece suavemente y se ve reflejado en una segunda derivada del potencial en el mínimo finita, este salto puede pensarse como una discontinuidad en la segunda deriva, por lo cual, solo la primera derivada es continua, dicho esto, este comportamiento describe una transición de *primer orden*.

Por otro lado, otro tipo de transición ocurre cuando en el potencial a orden árbol se incluye un término que rompa explícitamente la simetría, esto se ve en la Fig. 5.3a desde que el mínimo se ha trasladado fuera del origen para todas las temperaturas.

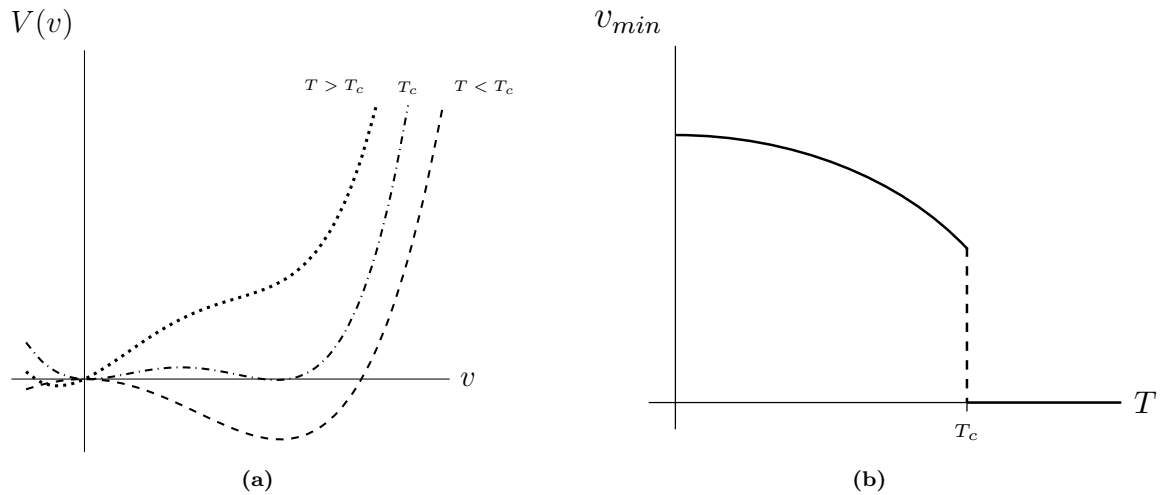


Fig. 5.2: En el lado izquierdo vemos un potencial $V(v)$ que experimenta la ruptura y restauración de la simetría a distintas temperaturas. En el lado derecho graficamos el mínimo del potencial como función de la temperatura $v_{min}(T)$, observando una transición de fase de primer orden.

Ahora el mínimo respecto de la temperatura, luego de decrecer cambia la dirección de su pendiente en alguna T , la cual se denomina la temperatura de transición, sin embargo, nunca llega a cero sino que tiende asintóticamente a un valor f . Además que a ningún orden de las derivadas del potencial presentan divergencias. A este tipo de transición se le denomina *crossover*.

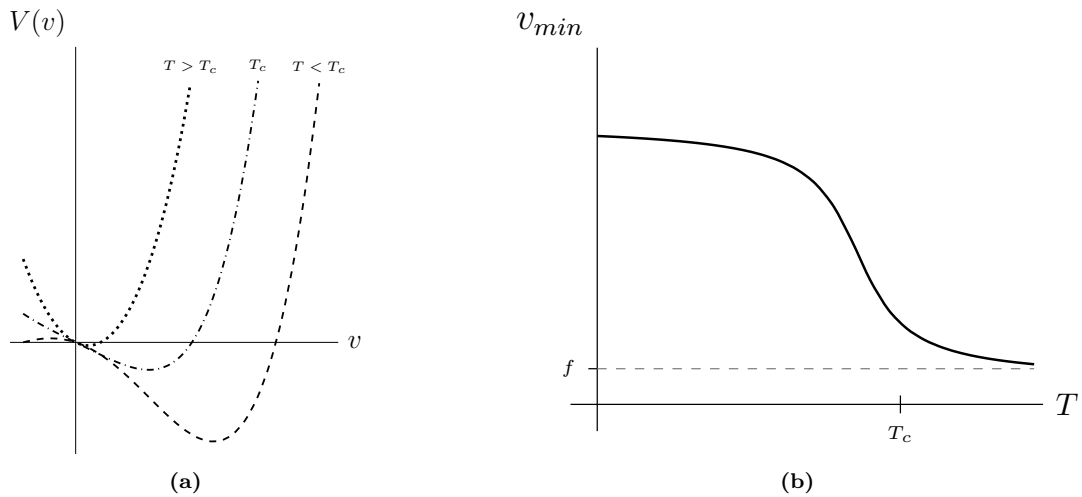


Fig. 5.3: En el lado izquierdo vemos un potencial $V(v)$ que experimenta la ruptura y restauración de la simetría a distintas temperaturas. En el lado derecho graficamos el mínimo del potencial como función de la temperatura $v_{min}(T)$, observando un crossover.

Finalmente, otra definición de interés es la de un *punto crítico*, este es dado por un punto en el que se experimenta un cambio en el tipo de transición de fase, es decir, de un crossover a un primer orden, por ejemplo.

$$\text{Tr} \ln G^{-1} = \int d^4x \langle x | \ln G^{-1} | x \rangle, \quad (6.4)$$

usando la condición de completitud

$$\text{Tr} \ln G^{-1} = \int d^4x d^4k d^4k' \langle x | k \rangle \langle k | \ln G^{-1} | k' \rangle \langle k' | x \rangle, \quad (6.5)$$

con

$$\langle k | x \rangle = \langle x | k \rangle^* = \frac{e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^2}, \quad (6.6)$$

tenemos

$$\text{Tr} \ln G^{-1} = \int d^4x d^4k d^4k' \frac{e^{-i(k-k') \cdot x}}{(2\pi)^4} \langle k | \ln G^{-1} | k' \rangle. \quad (6.7)$$

Tomamos una teoría para un campo escalar, tal que el propagador en el espacio de momentos es

$$\langle k | G^{-1} | k' \rangle = G^{-1}(k, k') = (-k^2 + m^2) \delta^4(k - k'). \quad (6.8)$$

Al sustituir en la ec. (6.7)

$$\text{Tr} \ln G^{-1} = \int d^4x d^4k d^4k' \frac{e^{-i(k-k') \cdot x}}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2) \delta^4(k - k'). \quad (6.9)$$

Al integrar

$$\text{Tr} \ln G^{-1} = \int d^4x d^4k \ln(-k^2 + m^2). \quad (6.10)$$

La integral cuadrimensional en el espacio de configuraciones, resulta en el volumen Ω , así

$$\text{Tr} \ln G^{-1} = \Omega \int d^4k \ln(-k^2 + m^2). \quad (6.11)$$

Por lo tanto, para un campo escalar, el potencial a primer orden es

$$V^1 = -\frac{i}{2} \int d^4k \ln(-k^2 + m^2). \quad (6.12)$$

La ec. (6.12), para un campo escalar, es la corrección a 1-loop del potencial y se puede escribir de forma general como

$$V_b^1 = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln G^{-1}, \quad (6.13)$$

o bien en el formalismo de Matsubara como

$$V_b^1 = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln G^{-1} \quad (6.14)$$

Por su parte, realizando el cálculo de forma análoga al caso escalar, la contribución para un fermión de espín 1/2 es de la forma

$$V_f^1 = -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \ln S^{-1}, \quad (6.15)$$

donde la traza Tr es sobre el espacio de Minkowski.

Para darle solución a temperatura finita, es necesario hacer una rotación de Wick para pasar del espacio de Minkowski al de Euclides como en la ec. (5.17)

$$k_0 \rightarrow ik_4, \quad (6.16)$$

donde la componente temporal del cuadrimento toma el valor de las frecuencias de Matsubara

$$k_4 = \omega_n, \tilde{\omega}_n \quad (6.17)$$

con ω_n para los bosones y $\tilde{\omega}_n$ para los fermiones. Así hacemos la transformación

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (6.18)$$

De igual forma se reescriben los propagadores, tal que para los campos neutros, π_0 y σ , tenemos el propagador escalar de la ec. (4.1), en el espacio de momentos, escrito en el formalismo de Matsubara

$$iG(k) = \frac{i}{\omega_n^2 + k^2 + m^2}. \quad (6.19)$$

Por otro lado, para los campos escalares cargados, π_+ y π_- es necesario usar el propagador escalar en presencia de campos magnéticos en la aproximación de campo fuerte de la ec. (4.85), escrito en el formalismo de Matsubara como

$$iG^{LLL}(k) = 2i \frac{e^{-\frac{k_4^2}{|eB|}}}{\omega_n^2 + k_3^2 + m_b^2 + |eB|}. \quad (6.20)$$

De manera análoga, para los fermiones, que son los quarks, usamos el propagador obtenido en la ec. (4.88), escrito en el formalismo de Matsubara como

$$iS^{LLL}(k) = 2ie^{-\frac{k_4^2}{|qB|}} \frac{\not{k}_\parallel + m_f}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2} O^+. \quad (6.21)$$

Con esto presente, vamos a desarrollar cada una de las diferentes contribuciones, V_0^1 , V_b^1 y V_f^1 , que son las correcciones a 1-loop del potencial para bosones neutros, bosones cargados y fermiones, respectivamente.

6.1.1. Potencial de bosones neutros

Para los campos neutros de la teoría, σ y π_0 , al sustituir la ec. (6.19) en la ec. (6.14), la corrección a 1-loop en el formalismo de Matsubara se escribe de la siguiente forma

$$V_0^1 = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2). \quad (6.22)$$

Esta ecuación la podemos reescribir, integrando y derivando respecto del cuadrado de la masa, de tal forma que

$$V_0^1 = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm^2 \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (6.23)$$

La suma sobre las frecuencias de Matsubara tiene como resultado

$$T \sum_n \frac{1}{(2\pi nT)^2 + \vec{k}^2 + m^2} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}{T}} - 1} \right), \quad (6.24)$$

por lo tanto la contribución 1-loop de un mesón neutro se escribe como

$$V_0^1 = \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} + \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}{T}} - 1} \right). \quad (6.25)$$

De la ec. (6.25) podemos notar dos términos distintos dentro del paréntesis, el primero corresponde a la contribución del vacío puesto que solo depende del momento y la masa, sin dependencia en la temperatura y el segundo corresponde al llamado término de materia, porque tiene dependencia en la temperatura. Distinguiamos cada término con los subíndices *vac* y β , respectivamente.

6.1.1.1. Término de vacío

La contribución del vacío tiene una divergencia UV, característica que podemos notar desde el conteo de las dimensiones. El método que vamos a llevar a cabo para calcular este tipo de términos, es recurriendo a la regularización dimensional [60].

Comenzamos haciendo un cambio en la dimensión del espacio de integración como

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \longrightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \quad (6.26)$$

Siguiendo el método añadimos una constante μ de la dimensión masa que permitirá regular la dimensión en la que se está trabajando, tal que

$$V_{0,vac}^1 = \frac{\mu^{3-d}}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} dm^2 \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}. \quad (6.27)$$

Integrando sobre m^2

$$V_{0,vac}^1 = \frac{\mu^{3-d}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (6.28)$$

al reescribir

$$V_{0,vac}^1 = \frac{\mu^{3-d}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + m^2)^{-1/2}}. \quad (6.29)$$

En la literatura [61], es conocida la solución para integrales del tipo de la ec. (6.29), como

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}}. \quad (6.30)$$

En este caso tomando $n = -1/2$ y $\Delta = m^2$, tiene solución

$$V_{0,vac}^1 = \frac{\mu^{3-d}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(-\frac{1+d}{2})}{\Gamma(-1/2)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1+d}{2}}, \quad (6.31)$$

Ahora nos acercamos a la dimensión original haciendo tender $d \rightarrow 3 - 2\epsilon$, obteniendo

$$V_{0,vac}^1 = \frac{\mu^{2\epsilon}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}-\epsilon}} \frac{\Gamma(-2 + \epsilon)}{\Gamma(-1/2)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{-2+\epsilon}, \quad (6.32)$$

tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$

$$V_{0,vac}^1 = \frac{m^4}{128\pi^2} \left(-\frac{2}{\epsilon} + (-3 + 2\gamma_E) - 2 \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right). \quad (6.33)$$

Usando el esquema de sustracción mínima modificado \overline{MS} [60], el cual es un esquema de renormalización utilizado para absorber la parte divergente de las correcciones radiativas además de la constante de Euler γ_E y el término $\ln(4\pi)$, tenemos

$$V_{0,vac}^1 = -\frac{m^4}{64\pi^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right). \quad (6.34)$$

6.1.1.2. Término de materia

Por otro lado, el término de materia es

$$V_{0,T}^1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} dm^2 \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}/T} - 1}. \quad (6.35)$$

Realizando la integral respecto a m^2 , se tiene

$$V_{0,T}^1 = T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}/T}). \quad (6.36)$$

Es posible hacer un cambio en la integral tridimensional, al pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \rightarrow \int_0^{\infty} dk k^2 \int_{S^2} d\Omega = 4\pi \int_0^{\infty} dk k^2, \quad (6.37)$$

donde $d\Omega$ representa el diferencial del ángulo sólido. Así tenemos

$$V_{0,T}^1 = \frac{T}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{k^2 + m^2}/T} \right), \quad (6.38)$$

para llevar a cabo la última integral, hacemos un cambio de variable a $x = k/T$ y $y = m/T$, tal que

$$V_{0,T}^1 = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \right). \quad (6.39)$$

Este cambio de variable es útil para hacer uso de la aproximación a alta temperatura, es decir, cuando $y^2 \ll 1$ o bien $m \ll T$, podemos calcular $V_{0,T}^1$ a partir de una expansión en serie de potencias de y^2 , como

$$V_{0,T}^1 \approx V_{0,T}^1 \Big|_{y=0} + \frac{\partial V_{0,T}^1}{\partial y^2} \Big|_{y=0} y^2 + \frac{\partial^2 V_{0,T}^1}{\partial (y^2)^2} \Big|_{y=0} y^4 + \dots \quad (6.40)$$

A orden cero, es decir al tomar $y = 0$, tiene solución

$$V_{0,T}^1 \Big|_{y=0} = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln (1 - e^{-x}) = -\frac{T^4 \pi^2}{90}. \quad (6.41)$$

Al derivar la ec. (6.38) respecto de y^2

$$\frac{\partial V_{0,T}^1}{\partial y^2} = \frac{T^4}{4\pi^2} \int dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}, \quad (6.42)$$

evaluando en $y = 0$, obtenemos

$$\frac{dV_{0,T}^1}{dy^2} \Big|_{y=0} = \frac{T^4}{4\pi^2} \int dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{T^4}{24}. \quad (6.43)$$

Para la segunda derivada tenemos

$$\frac{\partial^2 V_{0,T}^1}{\partial (y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y^2} \left(\frac{\partial V_{0,T}^1}{\partial y^2} \right) = \frac{T^4}{4\pi^2} \int dx x^2 \frac{\partial}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \right). \quad (6.44)$$

Notando que

$$\frac{\partial}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \right) = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \right), \quad (6.45)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_{0,T}^1}{d(y^2)^2} &= \frac{T^4}{4\pi^2} \int dx x^2 \frac{\partial}{dx^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \right) \\ &= \frac{T^4}{4\pi^2} \int dx x^2 \frac{d}{2x dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \right) \\ &= \frac{T^4}{8\pi^2} \int x d \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

usando integración por partes con

$$u = x \quad , \quad v = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1},$$

se tiene

$$\frac{d^2 V_{0,T}^1}{d(y^2)^2} = \frac{T^4}{4\pi^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}} \right). \quad (6.47)$$

tal que

$$\frac{d^2 V_{0,\beta}^1}{d(y^2)^2} = -\frac{T^4}{8\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}. \quad (6.48)$$

Para integrar esta última expresión podemos usar la identidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z - 1} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2\pi\ell)^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2\pi\ell)^2}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

para reescribirla como

$$\frac{d^2 V_{0,T}^1}{d(y^2)^2} = \frac{T^4}{8\pi^2} \int_0^\infty dx \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \sum_{\ell} \frac{1}{x^2+y^2+(2\pi\ell)^2} \right), \quad (6.50)$$

con solución, que se encuentra desarrollada en el Apéndice B, obteniendo

$$\frac{d^2 V_{\beta}^1}{d(y^2)^2} = -\frac{T^4}{8\pi^2} \left(\frac{\gamma_E}{2} + \frac{\pi}{2y} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) + \mathcal{O}(y^2) \right). \quad (6.51)$$

Al usar el método de separación de variables para calcular

$$\begin{aligned} \int \frac{dV_{\beta}^1}{dy^2} &= -\frac{T^4}{8\pi^2} \int \left(\frac{\gamma_E}{2} + \frac{\pi}{2y} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) + \mathcal{O}(y^2) \right) dy^2 \\ &= -\frac{T^4}{8\pi^2} \int \left(\frac{\gamma_E}{2} + \frac{\pi}{2y} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) + \mathcal{O}(y^2) \right) 2y dy, \end{aligned} \quad (6.52)$$

obtenemos

$$\frac{dV_{\beta}^1}{dy^2} = -\frac{T^4}{(4\pi)^2} \left(\gamma_E y^2 + 2\pi y + y^2 \ln \left(\frac{y}{4\pi} \right) - \frac{y^2}{2} + C_1 + \mathcal{O}(y^3) \right). \quad (6.53)$$

Para conocer la constante de integración, con la primera derivada en $y = 0$, dada por la ec. (6.43) tenemos

$$\left. \frac{dV_{\beta}^1}{dy^2} \right|_{y=0} = -\frac{T^4}{16\pi^2} C_1 = \frac{T^4}{24}, \quad (6.54)$$

tal que

$$C_1 = -\frac{2\pi^2}{3}, \quad (6.55)$$

así que

$$\frac{dV_\beta^1}{dy^2} = -\frac{T^4}{(4\pi)^2} \left(\gamma_E y^2 + 2\pi y + y^2 \ln\left(\frac{y}{4\pi}\right) - \frac{y^2}{2} - \frac{2\pi^2}{3} + \mathcal{O}(y^3) \right). \quad (6.56)$$

Al integrar nuevamente

$$V_\beta^1 = \frac{T^4}{8\pi^2} \int \left(\frac{2\pi^2}{3} - 2\pi y + \left(\frac{1}{2} - \gamma_E \right) y^2 - y^2 \ln\left(\frac{y}{4\pi}\right) \right) y dy, \quad (6.57)$$

tenemos

$$V_\beta^1 = \frac{T^4}{32\pi^2} \left(\frac{4\pi^2 y^2}{3} - \frac{8\pi y^3}{3} + \left(\frac{3}{4} - \gamma_E \right) y^4 - y^4 \ln\left(\frac{y}{4\pi}\right) + C_2 + \mathcal{O}(y^5) \right). \quad (6.58)$$

Evaluando en $y = 0$ e igualando con lo obtenido en la ec. (6.41)

$$V_{0,T}^1 \Big|_{y=0} = \frac{T^4}{32\pi^2} C_2 = -\frac{T^4 \pi^2}{90}, \quad (6.59)$$

así

$$C_2 = -\frac{16\pi^4}{45}, \quad (6.60)$$

entonces tenemos

$$V_{0,T}^1 = -\frac{T^4}{8\pi^2} \left(\frac{4\pi^4}{45} - \frac{\pi^2 y^2}{3} + \frac{2\pi y^3}{3} + \left(\gamma_E - \frac{3}{4} \right) \frac{y^4}{4} + \ln\left(\frac{y}{4\pi}\right) \frac{y^4}{4} + \mathcal{O}(y^5) \right). \quad (6.61)$$

Finalmente al sustituir y y considerar los términos dominantes de la serie, obtenemos

$$V_{0,T}^1 = -\frac{T^4 \pi^2}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{m^3 T}{12\pi} - \frac{m^4}{64\pi^2} \left(2\gamma_E - \frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m^2}{(4\pi T)^2}\right) \right). \quad (6.62)$$

Al unir los términos de vacío desde la ec. (6.34) y térmico de la ec. (6.62), obtenemos la expresión final para la corrección a 1-loop del potencial para bosones neutros como

$$V_0^1 = -\frac{T^4 \pi^2}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{m^3 T}{12\pi} - \frac{m^4}{64\pi^2} \left(2\gamma_E + \ln\left(\frac{\mu^2}{(4\pi T)^2}\right) \right). \quad (6.63)$$

6.1.2. Potencial de bosones cargados

Para el caso de los piones cargados, también partimos de la expresión de la corrección del potencial a 1-loop de bosones de la ec. (6.14) en el formalismo de Matsubara

$$V_b^1 = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi^3)} \ln G^{-1}(\omega_n, \vec{k}), \quad (6.64)$$

y volvemos a reescribir esta expresión, derivando e integrando respecto del cuadrado de la masa, como se hizo en la ec. (6.23)

$$V_b^1 = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm_b^2 G^{LLL}(\omega_n, \vec{k}). \quad (6.65)$$

En este caso sustituimos la expresión del propagador para bosones en presencia de un campo magnético en la aproximación de campo fuerte de la ec. (6.20), tal que tenemos

$$V_b^1 = \sum_n T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm_b^2 \frac{e^{-\frac{k_\perp^2}{|eB|}}}{\omega_n^2 + k_3^2 + m_b^2 + |eB|}, \quad (6.66)$$

al sumar sobre las frecuencias de Matsubara, obtenemos

$$V_b^1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm_b^2 \frac{e^{-\frac{k_\perp^2}{|eB|}}}{\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}} \left(1 + \frac{2}{e \frac{\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}}{T} - 1} \right). \quad (6.67)$$

A continuación, integramos sobre las componentes perpendiculares del momento

$$\int d^2k_\perp e^{-\frac{k_\perp^2}{|eB|}} = \pi |eB|, \quad (6.68)$$

tal que el potencial resulta en

$$V_b^1 = \frac{|eB|}{8\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} dm_b^2 \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}} \left(1 + \frac{2}{e \frac{\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}}{T} - 1} \right). \quad (6.69)$$

El siguiente paso es integrar sobre la masa m_b^2

$$V_b^1 = \frac{|eB|}{4\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|} + 2T \ln(1 - e^{-\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}/T}) \right). \quad (6.70)$$

En esta última expresión podemos identificar nuevamente la existencia de dos tipos de términos, uno de vacío (independiente de T), pero que sí depende del campo magnético. Toda la expresión de la ec. (6.70) es proporcional a eB , resultado de recordar que el campo permea todo el espacio, y un término térmico o de materia, al igual que para los bosones neutros se les da solución por separado.

6.1.2.1. Término de vacío

Para el término de vacío de la corrección a 1-loop del potencial para bosones neutros, nuevamente hacemos uso de la regularización dimensional, al incluir una constante μ y haciendo un cambio en las dimensiones del espacio de integración como en la ec. (6.26). Ante estos cambios el término de vacío resulta en

$$V_{b,vac}^1 = \frac{|eB|}{4\pi} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{1-d}}{(k_3^2 + m_b^2 + |eB|)^{-1/2}}. \quad (6.71)$$

Usando la ec. (6.30), se integra, y obtenemos

$$V_{b,vac}^1 = \frac{|eB|}{4\pi} \frac{\mu^{1-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(-\frac{1+d}{2})}{\Gamma(-1/2)} \left(\frac{1}{m_b^2 + |eB|} \right)^{-\frac{1+d}{2}}. \quad (6.72)$$

Regresamos a la dimensión original haciendo tender $d \rightarrow 1 - 2\epsilon$

$$V_{b,vac}^1 = \frac{|eB|}{2\pi} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{1/2-\epsilon}} \frac{\Gamma(-1+\epsilon)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{m_b^2 + |eB|} \right)^{-1+\epsilon}, \quad (6.73)$$

donde después de un álgebra sencilla, se escribe como

$$V_{b,vac}^1 = -\frac{|eB|}{(4\pi)^2} (m_b^2 + |eB|) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_b^2 + |eB|} \right)^\epsilon \Gamma(-1+\epsilon). \quad (6.74)$$

Ahora vamos a tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y así

$$V_{b,vac}^1 = \frac{|eB|}{(4\pi)^2} (m_b^2 + |eB|) \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_b^2 + |eB|} \right) \right). \quad (6.75)$$

Aislamos y sustraemos la divergencia usando el esquema \overline{MS} , así renormalizamos la teoría, de modo que el término de vacío termina siendo

$$V_{b,vac}^1 = \frac{|eB|}{(4\pi)^2} (m_b^2 + |eB|) \left(1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b^2 + |eB|} \right) \right). \quad (6.76)$$

6.1.2.2. Término térmico

El término térmico resulta ser

$$V_{b,T}^1 = \frac{T|eB|}{2\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \ln \left(1 - e^{-\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}/T} \right). \quad (6.77)$$

Si bien, continuando con el procedimiento usado para el caso de bosones neutros es posible usar la expansión a alta temperatura para darle solución a la integral, es importante notar que en el argumento de la exponencial se encuentra un término proporcional al campo magnético $|eB|$, el cual es la escala energética más alta del sistema. En ese sentido el cociente $|eB|/T^2$ implica que la expansión a alta temperatura no sea la mejor ruta a seguir.

Optamos por aprovechar que la exponencial tiende a ser pequeña, debido a los valores de interés del campo magnético en el argumento. Esto nos permite usar una expansión del logaritmo como

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (6.78)$$

Haciendo uso de esta expansión, podemos escribir la ec. (6.77) de la siguiente forma

$$V_{b,T}^1 = -\frac{T|eB|}{2\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}n/T}}{n}. \quad (6.79)$$

Con un cambio de variable $z = \sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}$, tenemos

$$V_{b,T}^1 = -\frac{T|eB|}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sqrt{m_b^2+|eB|}}^{\infty} dz \frac{z}{\sqrt{z^2 - m_b^2 - |eB|}} \frac{e^{-nz/T}}{n}. \quad (6.80)$$

Al integrar, obtenemos la solución para la parte térmica del potencial para bosones cargados como

$$V_{b,T}^1 = -\frac{T|eB|}{2\pi^2} \sqrt{m_b^2 + |eB|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1\left(n\sqrt{m_b^2 + |eB|}/T\right)}{n}. \quad (6.81)$$

Así, al unir la parte del vacío de la ec. (6.76) y la térmica de la ec. (6.81), obtenemos la expresión completa del potencial para bosones cargados como

$$V_b^1 = \frac{|eB|}{(4\pi)^2} (m_b^2 + |eB|) \left(1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_b^2 + |eB|}\right)\right) - \frac{T|eB|}{2\pi^2} \sqrt{m_b^2 + |eB|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{n\sqrt{m_b^2+|eB|}}{T}\right)}{n}. \quad (6.82)$$

6.1.3. Potencial de fermiones

Tras escribir la contribución fermiónica al potencial de la ec. (6.15) en el formalismo de Matsubara, integrando y derivando respecto del cuadrado de la masa del fermión, sustituyendo el propagador fermiónico desde la ec. (6.21), y colocando el coeficiente N_c que nos indica el número de colores de los quarks, esta contribución al potencial efectivo se expresa como

$$V_f^1 = -4N_c \sum_n T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm_f^2 \frac{e^{-\frac{k_1^2}{|qB|}}}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2}. \quad (6.83)$$

Para encontrar la expresión final de V_f^1 , iniciamos sumando sobre las frecuencias de Matsubara, donde $\tilde{\omega}_n = (2n+1)\pi$, llegando a

$$V_f^1 = -2N_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm_f^2 \frac{e^{-\frac{k_1^2}{|qB|}}}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1}\right). \quad (6.84)$$

Las componentes perpendiculares del momento se integran al igual que en la ec. (6.68), tal que

$$V_f^1 = -\frac{N_c|qB|}{2\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} dm_f^2 \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1}\right). \quad (6.85)$$

Una vez más aparecen dos términos, el término de independiente de T , que al igual al caso de bosones cargados depende de eB , y el término con temperatura, vamos a proceder a resolverlos.

6.1.3.1. Término de vacío

La técnica para resolver las integrales en el término de vacío, es completamente análoga a todos los casos anteriores: introducimos una constante de renormalización μ , ocupamos el método de regularización dimensional, y el término de vacío se escribe como

$$V_{f,vac}^1 = -\frac{N_c|qB|}{2\pi} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} dm_f^2 \frac{\mu^{1-d}}{(k_3^2 + m_f^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.86)$$

Integramos usando la ec. (6.30)

$$V_{f,vac}^1 = -\frac{N_c|qB|}{2\pi} \int dm_f^2 \frac{\mu^{1-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{m_f^2}\right)^{1/2-d/2}, \quad (6.87)$$

hacemos tender $d \rightarrow 1 - 2\epsilon$

$$V_{f,vac}^1 = -\frac{N_c|qB|}{2\pi} \int dm_f^2 \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{1/2-\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{m_f^2}\right)^\epsilon, \quad (6.88)$$

y tomamos el límite $\epsilon \rightarrow 0$

$$V_{f,vac}^1 = -\frac{N_c|qB|}{2\pi} \int dm_f^2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_f^2}\right)\right), \quad (6.89)$$

ahora para renormalizar este término, usamos el esquema de sustracción \overline{MS}

$$V_{f,vac}^1 = -\frac{N_c|qB|}{4\pi^2} \int dm_f^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}\right). \quad (6.90)$$

Finalmente al integrar sobre el cuadrado de la masa, obtenemos

$$V_{f,vac}^1 = -\frac{N_c|qB|}{4\pi^2} m_f^2 \left(1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}\right)\right). \quad (6.91)$$

6.1.3.2. Término térmico

La expresión para la parte térmica de los fermiones está dada por

$$V_{f,T}^1 = \frac{N_c|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} dm_f^2 \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1}, \quad (6.92)$$

al integrar sobre la masa al cuadrado, se ve como

$$V_{f,T}^1 = -\frac{2N_c|qB|T}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \ln\left(1 + e^{-\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T}\right). \quad (6.93)$$

Es posible resolver este término a partir de los dos métodos usados anteriormente, por un lado desde la ec. (6.92), se ocupa el método de la expansión a alta temperatura, tal y como se hizo para los bosones neutros. Por otro desde la ec. (6.93), haciendo una expansión del tipo de la ec. (6.78), como se hizo en el caso de los bosones cargados.

Primer método. Partimos haciendo un cambio de variable de $x = \frac{k_3}{T}$ y $y = \frac{m_f}{T}$ en la ec. (6.92), tal que

$$V_{f,T}^1 = \frac{N_c |qB| T^2}{2\pi^2} \int dx dy^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1}. \quad (6.94)$$

La integral sobre x tiene solución, desde el Apéndice B en (B.20), así

$$V_{f,T}^1 = -\frac{N_c |qB| T^2}{\pi^2} \int dy^2 \left(\frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y}{\pi} \right) \right) \quad (6.95)$$

Luego de integrar sobre y^2 y sustituyendo, la solución usando la expansión a alta temperatura es

$$V_{f,T}^1 = -\frac{N_c |qB|}{4\pi^2} m_f^2 \left(-1 + 2\gamma_E + \ln \left(\frac{m_f^2}{\pi^2 T^2} \right) \right). \quad (6.96)$$

Segundo método. Usando la expansión del logaritmo, podemos reescribir la ec. (6.78), tal que

$$V_{f,T}^1 = -\frac{2N_c |qB| T}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\sqrt{k_3^2 + m_f^2} n/T}. \quad (6.97)$$

Con el cambio de variable $z = \sqrt{k_3^2 + m_f^2}$, toma la forma

$$V_{f,T}^1 = -\frac{4N_c |qB| T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{m_f}^{\infty} dz \frac{z}{\sqrt{z^2 - m_f^2}} e^{-nz/T}. \quad (6.98)$$

Finalmente, al integrar sobre z , obtenemos

$$V_{f,T}^1 = -\frac{2N_c |qB| T}{\pi^2} m_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} K_1 \left(\frac{nm_f}{T} \right). \quad (6.99)$$

Uniendo la solución del término de vacío con cada una de las soluciones, obtenemos dos expresiones para la corrección a 1-loop del potencial para los fermiones,

$$V_f^1 = -\frac{N_c |qB|}{4\pi^2} m_f^2 \left(2\gamma_E + \ln \left(\frac{\mu^2}{\pi^2 T^2} \right) \right), \quad (6.100)$$

$$V_f^1 = -\frac{N_c|qB|}{4\pi^2}m_f^2 \left(1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_f^2}\right)\right) - \frac{2N_c|qB|T}{\pi^2}m_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} K_1\left(\frac{m_f}{T}\right). \quad (6.101)$$

6.2. Diagramas de anillo

En teorías cuánticas de campos, incluso para las soluciones estacionarias de la dinámica de un campo, se permite que en una delta de tiempo la partícula se propague en el vacío. Este proceso se describe a partir de las correcciones cuánticas o loops. Sin embargo, en un sistemas de muchas partículas, se abre la posibilidad de que el campo pueda interactuar con otros campos, generándose más correcciones cuánticas debido a estas interacciones, como vemos en la Fig. 6.1, donde las interacciones entre partículas se representan mediante los llamados diagramas de anillo.

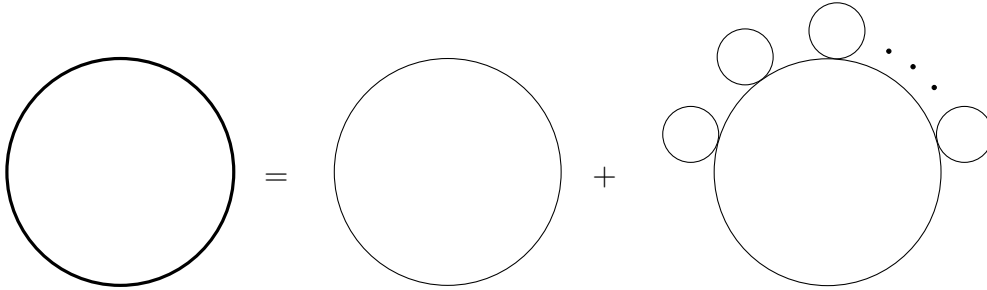


Fig. 6.1: Diagramas de las soluciones estacionarias de la propagación de un campo con la contribución de sus interacciones, diagrama 1-loop más diagramas de *daisy*.

Dichos diagramas son fundamentales para describir el fenómeno con *apantallamiento*, donde la interacción efectiva entre dos partículas se ve modificada debido a la presencia de un medio.

El efecto del apantallamiento en el propagación de una partícula, se interpreta como el reemplazo del propagador libre por el llamado propagador vestido, visto como en la Fig. 6.2, el propagador se corrige con el término conocido como la *autoenergía*.

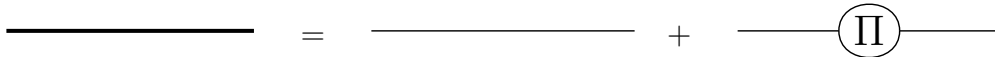


Fig. 6.2: Propagador vestido con la corrección debido a los efectos de apantallamiento.

En teorías que describen sistemas de muchas partículas, como lo es el Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks (LSMq), las masas se vuelven dinámicas, cuando se permite un rompimiento espontáneo de la simetría y el potencial se parametriza por las fluctuaciones alrededor del mínimo de la teoría. En el caso del LSMq, la correspondiente contribución de los grados de libertad bosónicos, genera la siguiente forma de las masas

$$m_\sigma^2 = 3\lambda v^2 - a^2 \quad \text{y} \quad m_0^2 = \lambda v^2 - a^2. \quad (6.102)$$

Estas expresiones dependen de los parámetros λ , v y a . Para algunos valores de las constantes, el cuadrado de las masas dinámicas podría ser negativo, es decir, las masas podría ser imaginaria. Al analizar cada contribución del potencial efectivo, llama la atención que en la corrección del potencial para bosones neutros de la ec. (6.62) hay términos de la masa dinámica al cubo m^3 , para valores del parámetro m cuando es imaginaria, este término será también imaginario, lo cual representa un problema.

Añadir las correcciones correspondientes a los diagramas de anillo es necesario, es decir incluir los efectos debido al apantallamiento, no solo porque al considerar las interacciones entre partículas nos permite acercarnos a la realidad, sino que además no ayudará a tratar con el problema de las masas.

Estas correcciones, denotadas como V^{ring} , se calculan en el formalismo de Matsubara como

$$V^{ring} = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 + \Pi G), \quad (6.103)$$

donde Π es la autoenergía del campo. La ec. (6.103) se puede reescribir de la siguiente forma

$$V^{ring} = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\ln(G^{-1} + \Pi) - \ln G^{-1} \right), \quad (6.104)$$

donde G es el propagador de la ec. (6.19). Dado que para los bosones neutros trabajamos a alta temperatura, podemos tomar el término más dominante, el cual corresponde al modo cero de Matsubara, esto es tomando $n = 0$, así

$$V^{ring} = \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\ln(k^2 + m^2 + \Pi_b) - (k^2 + m^2) \right). \quad (6.105)$$

Si integramos y derivamos respecto de la masa al cuadrado, se tiene

$$V^{ring} = \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dm^2 \left(\frac{1}{k^2 + m^2 + \Pi} - \frac{1}{k^2 + m^2} \right). \quad (6.106)$$

Al integrarse sobre d^3k , usando la ec. (6.30), se obtiene

$$V^{ring} = -\frac{T}{8\pi} \int dm^2 \left(\sqrt{m^2 + \Pi} - \sqrt{m^2} \right). \quad (6.107)$$

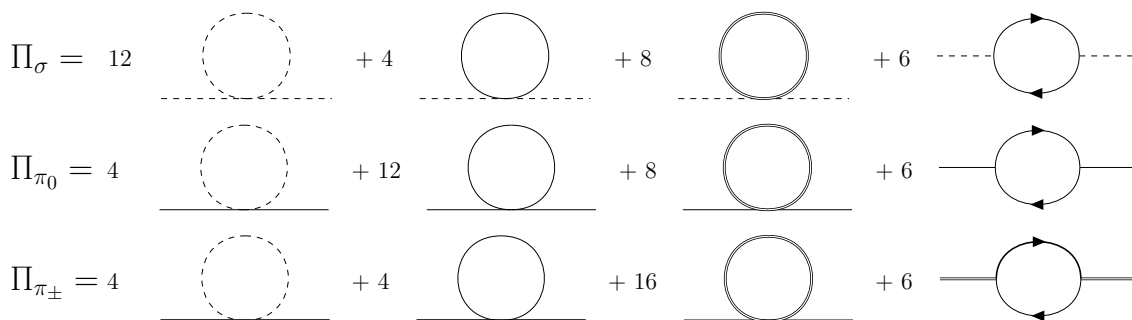
Finalmente al integrar sobre la masa, obtenemos la contribución de los diagramas de anillo en la aproximación a alta temperatura para bosones neutros como

$$V^{ring} = -\frac{T}{12\pi} (m^2 + \Pi)^{3/2} + \frac{Tm^3}{12\pi}. \quad (6.108)$$

6.3. Autoenergía

Para escribir completamente explícita la expresión de la ec. (6.108), necesitamos conocer la expresión de la autoenergía. Entendemos que la autoenergía Π es una corrección cuántica a la propagación de los campos debido a sus interacciones con otros campos o consigo mismo.

Las posibles interacciones de los bosones vienen dadas desde las reglas de Feynman de la teoría, en el caso del LSMq desde la ec. (3.16).



La suma de las contribuciones de cada interacción componen la autoenergía, la cual puede ser vista a partir de diagramas de Feynman como en la Fig. 6.3, habiendo tomado $N_c = 3$ y $N_f = 2$. Considerando solo las contribuciones orden 1-loop a la autoenergía, al igual que en el caso del potencial, desde el punto de vista perturbativo, cada diagrama es del orden de λ aunque existen otras contribuciones. En el caso de los diagramas donde interactúan un bosón con un par fermión anti-fermión, a pesar de que los vértices son proporcionales a g , es decir, que el diagrama es proporcional a g^2 , usamos la relación

$$\lambda = 2g^2. \quad (6.109)$$

La ec. (6.109) es obtenida como consecuencia de respetar la identidad de Ward para el Modelo Sigma Lineal acoplado con quarks en el vacío. A partir de la relación entre las masas

$$m_{\sigma}^2 - m_{\pi}^2 = 4m_f^2. \quad (6.110)$$

Las autoenergías de los bosones de la Fig. 6.3, se pueden calcular a partir de expresiones como

$$\Pi_{\sigma} = \frac{\lambda}{4} [12I(m_{\sigma}^2) + 4I(m_{\pi_0}^2) + 8I(m_{\pi_{\pm}}^2)] + N_f N_c \Pi_f, \quad (6.111)$$

$$\Pi_{\pi_0} = \frac{\lambda}{4} [4I(m_{\sigma}^2) + 12I(m_{\pi_0}^2) + 8I(m_{\pi_{\pm}}^2)] + N_f N_c \Pi_f, \quad (6.112)$$

$$\Pi_{\pi_{\pm}} = \frac{\lambda}{4} [4I(m_{\sigma}^2) + 4I(m_{\pi_0}^2) + 16I(m_{\pi_{\pm}}^2)] + N_f N_c \Pi_f. \quad (6.113)$$

La función $I(m_b^2)$ es

$$I(m_b^2) = 2 \frac{dV_b^1}{dm_b^2}, \quad (6.114)$$

y la autoenergía fermiónica es

$$\Pi_f = 2g^2 \frac{dV_f^1}{dm_f^2}. \quad (6.115)$$

Además podemos identificar que dependen de las constantes de acoplamiento λ y g , son proporcionales a factores de simetría y en el caso de la autoenergía de los fermiones, proporcional al número de sabores N_f y el número en espacio de color N_c .

Aunque las expresiones simplificadas de las ecs. (6.111), (6.112) y (6.113) nos permiten aproximar la autoenergía de manera más directa puesto que ya hemos calculado el potencial efectivo, es posible realizar el cálculo completo desde los diagramas de Feynman a partir de

$$-i\Pi_b = iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-i\lambda) iG(k), \quad (6.116)$$

$$-i\Pi_f = -iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [(-ig) iS(k) (-ig) iS(k+q)]. \quad (6.117)$$

La ec. (6.116) representa el cálculo del diagrama de la Fig. 6.4a y la ec. (6.117) al diagrama de la Fig. 6.4b, el valor de los vértices dependerá de las partículas que interactúan en cada caso, por su parte la autoenergía asociada a los fermiones depende del momento externo q proveniente de los mesones. Ambos casos están escritos en el formalismo de Matsubara.

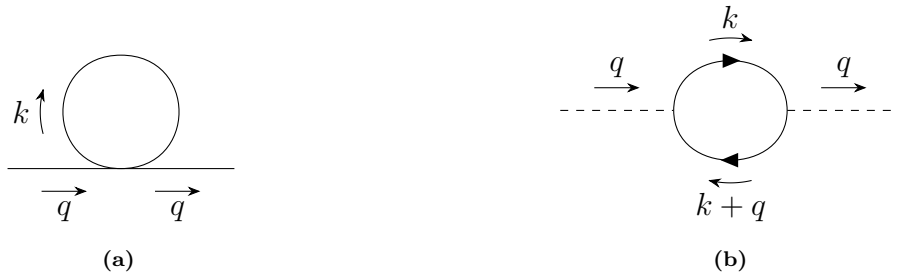


Fig. 6.4: Diagramas de Feynman donde se observa la conservación del momento en las contribuciones a 1-loop a orden λ de las autoenergías de bosones interactuando con bosones en (a) y la contribución de fermión antifermión en (b).

6.3.1. Bosones neutros

Partimos calculando la autoenergía asociada a los bosones neutros interactuando con bosones neutros. Al sustituir el propagador desde la ec. (6.19) en la ec. (6.116), tenemos

$$-i\Pi_0 = -i\lambda T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}, \quad (6.118)$$

que al sumar sobre las frecuencias de Matsubara, da

$$-i\Pi_0 = -i\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}/T} - 1} \right). \quad (6.119)$$

A pesar de que la expresión para la autoenergía tiene un término de vacío y un término de materia al igual que la corrección a 1-loop del potencial, el vacío en este caso, tras ser renormalizado y tomando valores fijos, este permanece constante por lo cual no contribuye. Al igual que en la ec. (6.37), reescribimos

$$-i\Pi_{0,T} = -\frac{i\lambda}{\pi^2} \int dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k^2 + m^2}/T} - 1}, \quad (6.120)$$

con el cambio de variable $x = \frac{k}{T}$ y $y = \frac{m}{T}$, tenemos

$$-i\Pi_{0,T} = -\frac{i\lambda}{\pi^2} T^2 \int dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}. \quad (6.121)$$

Usamos la relación de la ec. (B.1) del Apéndice B, donde identificamos las funciones

$$h_3(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}, \quad (6.122)$$

$$h_1(y) = \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} \quad (6.123)$$

así

$$\int dh_3(y) = -\frac{1}{2} \int dy y h_1(y), \quad (6.124)$$

por lo tanto tenemos

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = -\frac{\pi}{2} y + \frac{y^2}{8} \left(1 - 2\gamma_E - \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) \right) + \frac{\pi^2}{6}. \quad (6.125)$$

Entonces la autoenergía para bosones neutros es dada por

$$-i\Pi_0 = \frac{i\lambda}{2\pi} \sqrt{m^2} T + \frac{i\lambda}{8\pi^2} m^2 \left(1 - 2\gamma_E - \ln \left(\frac{m^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) - \frac{i\lambda T^2}{6}. \quad (6.126)$$

6.3.2. Bosones cargados

Cuando en la interacción, en específico en el loop, se presentan los bosones cargados, tenemos que su autoenergía es dada cuando sustituimos el propagador de la ec. (6.20) en la ec. (6.116), así tenemos

$$-i\Pi_{\pm} = -2i\lambda T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|eB|}}}{\omega_n^2 + k_3^2 + m_b^2 + |eB|}, \quad (6.127)$$

La integral sobre las componentes del momento se divide en dos partes, la contribución perpendicular $d^2k_{\perp} = dk_1 dk_2$ y la componente tres dk_3 . Si integramos sobre las componentes perpendiculares del momento, tenemos

$$-i\Pi_{\pm} = -i \frac{\lambda|eB|}{\pi} T \sum_n \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{\omega_n^2 + k_3^2 + m_b^2 + |eB|}. \quad (6.128)$$

El siguiente paso es sumar sobre las frecuencias de Matsubara

$$-i\Pi_{\pm} = -i \frac{\lambda|eB|}{2\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}} \left(1 + \frac{2}{e\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|} - 1} \right). \quad (6.129)$$

Para el caso particular de los bosones cargados, el vacío se encuentra magnetizado, ya que el campo magnético permea todo el espacio. Por lo tanto el término de vacío de la autoenergía dependerá de la intensidad del campo magnético de forma que no será constante como para los bosones neutros, por lo cual es relevante considerar también este término.

Para resolver la integral sobre la componente tres del momento, seguimos el mismo procedimiento que para los potenciales, se hace regularización dimensional, donde μ es la constante de renormalización, tal que

$$-i\Pi_{\pm,vac} = -\frac{i\lambda|eB|}{2\pi} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{1-d}}{(k_3^2 + m_b^2 + |eB|)^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.130)$$

con la solución dada por la ec. (6.30)

$$-i\Pi_{\pm,vac} = -\frac{i\lambda|eB|T}{2\pi} \frac{\mu^{1-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{(m_b^2 + |eB|)^{\frac{1-d}{2}}}, \quad (6.131)$$

donde $d \rightarrow 1 - 2\epsilon$, para regresar a la dimensión correcta del problema

$$-i\Pi_{\pm,vac} = -\frac{i\lambda|eB|}{2\pi} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{1/2-\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{m_b^2 + |eB|} \right)^{\epsilon}. \quad (6.132)$$

Tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$

$$-i\Pi_{\pm,vac} = -\frac{i\lambda|eB|}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_b^2 + |eB|} \right) \right), \quad (6.133)$$

y usando el esquema de sustracción \overline{MS} , obtenemos

$$-i\Pi_{\pm,vac} = -i \frac{\lambda|eB|}{4\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b^2 + |eB|} \right). \quad (6.134)$$

Por otra parte, el término térmico puede ser reescrito, usando la integral y derivada respecto del cuadrado de la masa, como

$$-i\Pi_{\pm,T} = -2i \frac{\lambda|eB|T}{\pi^2} \frac{d}{dm_b^2} \int dk_3 \ln \left(1 - e^{\sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}/T} \right) \quad (6.135)$$

Esta expresión tiene solución como en el caso del potencial para bosones neutros usando la ec. (6.78), tal que

$$-i\Pi_{\pm,\beta} = 2i \frac{\lambda|eB|T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dm_b^2} \int dk_3 \frac{e^{-n\sqrt{k_3^2+m_b^2+|eB|}/T}}{n}, \quad (6.136)$$

con el cambio de variable $z = \sqrt{k_3^2 + m_b^2 + |eB|}$, escribimos

$$-i\Pi_{\pm,T} = 2i \frac{\lambda|eB|T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dm_b^2} \int_{\sqrt{m_b^2+|eB|}}^{\infty} dz \frac{z}{\sqrt{z^2 - m_b^2 - |eB|}} \frac{e^{-nz/T}}{n}. \quad (6.137)$$

Integramos sobre la variable z

$$-i\Pi_{\pm,T} = 2i \frac{\lambda|eB|T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dm_b^2} \frac{\sqrt{m_b^2 + |eB|}}{n} K_1 \left(\frac{n\sqrt{m_b^2 + |eB|}}{T} \right). \quad (6.138)$$

Finalmente al derivar respecto de la masa al cuadrado

$$-i\Pi_{\pm,T} = -\frac{i\lambda|eB|}{2\pi^2} \sum_n K_0 \left(\frac{n\sqrt{m_b^2 + |eB|}}{T} \right), \quad (6.139)$$

obtenemos la expresión completa como

$$-i\Pi_{\pm} = -i \frac{\lambda|eB|}{4\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_b^2 + |eB|} \right) - \frac{i\lambda|eB|}{2\pi^2} \sum_n K_0 \left(\frac{n\sqrt{m_b^2 + |eB|}}{T} \right) \quad (6.140)$$

6.3.3. Fermiones

Partiendo de la ec. (3.16) o bien desde los diagramas de la Fig. 3.1, vemos que los vértices de cada interacción entre fermiones y bosones son diferentes, es decir que es necesario calcular los tres distintos diagramas de autoenergía fermiónica de la Fig. 6.3, interacciones fermiones con el mesón sigma, fermiones con el pión neutro, fermiones con los piones cargados.

6.3.3.1. Sigma

La autoenergía correspondiente al bosón sigma, caso para el cual los vértices son $-ig$, se calcula a partir de

$$-i\Pi_f^{\sigma} = -iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [(-ig)iS(k)(-ig)iS(k+q)] + C.C. \quad (6.141)$$

donde $C.C.$ se refiere a la contribución correspondiente al conjugado de carga [62]. Al sustituir los propagadores desde la ec. (4.88), podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned}
-i\Pi_f^\sigma &= ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\left(2ie^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} \frac{k_\parallel + m_f}{k_\parallel^2 - m_f^2} O^+ \right) \left(2ie^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{(k+q)_\parallel + m_f}{(k+q)_\parallel^2 - m_f^2} O^+ \right) \right] \\
&= -4ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{\text{Tr} [(k_\parallel + m_f) O^+ ((k+q)_\parallel + m_f) O^+]}{(k_\parallel^2 - m_f^2) ((k+q)_\parallel^2 - m_f^2)}.
\end{aligned} \tag{6.142}$$

Al operar el numerador y sumar el conjugado de carga (C.C.)

$$-i\Pi_f^\sigma = -4ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{\text{Tr} [k_\parallel^\mu (k+q)_\parallel^\nu \gamma_\mu^\nu + \mathbb{1} m_f^2]}{(k_\parallel^2 - m_f^2) ((k+q)_\parallel^2 - m_f^2)}, \tag{6.143}$$

tenemos

$$-i\Pi_f^\sigma = -16ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{(k_\parallel \cdot (k+q)_\parallel + m_f^2)}{(k_\parallel^2 - m_f^2) ((k+q)_\parallel^2 - m_f^2)}. \tag{6.144}$$

Escribiendo en términos de las frecuencias de Matsubara

$$\begin{aligned}
-i\Pi_f^\sigma &= 16ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \\
&\quad \times \frac{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\omega}_n \omega + k_3^2 + k_3 q_3 - m_f^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2) ((\tilde{\omega}_n + \omega)^2 + (k_3 + q_3)^2 + m_f^2)},
\end{aligned} \tag{6.145}$$

donde al integrar la parte perpendicular del momento

$$\int d^2k_\perp e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} = \frac{\pi}{2} |qB| e^{-\frac{q_\perp^2}{2|qB|}}, \tag{6.146}$$

esta contribución a la autoenergía es

$$\begin{aligned}
-i\Pi_f^\sigma &= \frac{2ig^2|qB|T}{\pi} e^{-\frac{q_\perp^2}{2|qB|}} \\
&\quad \times \sum_n \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\omega}_n \omega + k_3^2 + k_3 q_3 - m_f^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2) ((\tilde{\omega}_n + \omega)^2 + (k_3 + q_3)^2 + m_f^2)}
\end{aligned} \tag{6.147}$$

donde ω es el momento externo. Al ser un bosón el término $\tilde{\omega}_n + \omega$ continúa siendo tomando valores impares. Sin embargo, dado que el momento externo q es pequeño a comparación de las otras escalas energéticas del sistema, nos permite escribir

$$-i\Pi_f^\sigma = \frac{2ig^2|qB|T}{\pi} \sum_n \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 - m_f^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2)^2},$$

o bien

$$-i\Pi_f^\sigma = \frac{2ig^2|qB|}{\pi} T \sum_n \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2} - 2m_f^2 \frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2)^2} \right), \quad (6.148)$$

y expresando el segundo de los términos como una derivada respecto de la masa

$$-i\Pi_f^\sigma = \frac{2ig^2|qB|}{\pi} T \sum_n \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2} + 2m_f^2 \frac{d}{dm_f^2} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2} \right). \quad (6.149)$$

Sumamos sobre las frecuencias de Matsubara

$$\begin{aligned} -i\Pi_f^\sigma &= \frac{2ig^2|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}}{2T} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2m_f^2 \frac{d}{dm_f^2} \left(\frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}}{2T} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.150)$$

La parte térmica de la autoenergía es entonces

$$\begin{aligned} -i\Pi_f^\sigma &= -\frac{4ig^2|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} \right. \\ &\quad \left. + 2m_f^2 \frac{d}{dm_f^2} \left(\frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.151)$$

o reescrita

$$\begin{aligned} -i\Pi_{f,T}^\sigma &= -\frac{4ig^2|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{d}{dm_f^2} \left(\frac{2m_f^2}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2/T}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} \right). \end{aligned} \quad (6.152)$$

Notamos que se tienen integrales de la forma

$$I = \int dk_3 \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1}, \quad (6.153)$$

conocemos entonces que a alta temperatura, esta integral tiene una solución aproximada calculada en el Apéndice B en la ec. (B.20), tal que

$$I = -\frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{m_f^2}{T^2 \pi^2} \right). \quad (6.154)$$

Por otro lado, la ec. (6.153) puede escribirse como

$$I = -2T \int dk_3 \frac{d}{dm_f^2} \ln \left(1 + e^{-\frac{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}}{T}} \right), \quad (6.155)$$

para después reescribirse con la ec. (6.78) y llegar a la expresión

$$I = -2T \frac{d}{dm_f^2} \int dk_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\frac{n\sqrt{k_3^2 + m_f^2}}{T}}, \quad (6.156)$$

cuya solución es dada como la ec. (6.99), tal que

$$I = -2T \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{nm_f}{T} \right). \quad (6.157)$$

Así resulta la solución

$$\int dk_3 \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} = -2T \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{nm_f}{T} \right). \quad (6.158)$$

La derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm_f^2} \int dk_3 \frac{2m_f^2}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2/T}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} + 1} &= -4 \frac{d}{dm_f^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n m_f^2 K_0 \left(\frac{nm_f}{T} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{nm_f}{T} K_1 \left(\frac{nm_f}{T} \right) - 2K_0 \left(\frac{nm_f}{T} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.159)$$

Por lo tanto, finalmente obtenemos

$$-i\Pi_f^\sigma = -\frac{4ig^2|qB|}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{nm_f}{T} K_1 \left(\frac{nm_f}{T} \right) - K_0 \left(\frac{nm_f}{T} \right) \right). \quad (6.160)$$

6.3.3.2. Pión neutro

Por otro lado, para el caso de piones neutros, donde el vértice es $-g\gamma^5$, la autoenergía es de la forma

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = -iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\pm g\gamma^5 iS^{LLL}(k) \pm g\gamma^5 iS^{LLL}(k+q)] + C.C. \quad (6.161)$$

Sustituyendo los propagadores de los fermiones desde la ec. (4.88)

$$\begin{aligned}
-i\Pi_f^{\pi_0} &= -ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\gamma^5 \left(2ie^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} \frac{k_\parallel + m_f}{k_\parallel^2 - m_f^2} O^+ \right) \right. \\
&\quad \left. \times \gamma^5 \left(2ie^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{(k+q)_\parallel + m_f}{(k+q)_\parallel^2 - m_f^2} O^+ \right) \right] \quad (6.162) \\
&= 4ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}}}{(k_\parallel^2 - m_f^2) ((k+q)_\parallel^2 - m_f^2)} \\
&\quad \times \text{Tr} [\gamma^5 (k_\parallel + m_f) O^+ \gamma^5 ((k+q)_\parallel + m_f) O^+].
\end{aligned}$$

El primer paso que realizamos es calcular la traza

$$\text{Tr} [\gamma^5 (k_\parallel + m_f) O^+ \gamma^5 ((k+q)_\parallel + m_f) O^+] \quad (6.163)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} [\gamma^5 (k_\parallel + m_f) \gamma^5 O^+ ((k+q)_\parallel + m_f) O^+] \\
&= \text{Tr} [\gamma^5 (k_\parallel + m_f) O^+ \gamma^5 ((k+q)_\parallel + m_f) O^+] \\
&= \text{Tr} [(-k_\parallel + m_f) O^+ ((k+q)_\parallel + m_f) O^+] \\
&= \text{Tr} [(-k_\parallel + m_f) ((k+q)_\parallel + m_f) O^+] \quad (6.164)
\end{aligned}$$

habiendo usado que $\not{k}_\parallel O^+ = O^+ \not{k}_\parallel$ y que O^\pm es idempotente, así finalmente al sumar el conjugado de carga (C.C.), donde $O^+ + O^- = \mathbf{1}$, entonces

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = 4ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{\text{Tr} [-k_\mu^\parallel (k+q)_\nu^\parallel \gamma^\mu \gamma^\nu + \mathbf{1} m_f^2]}{(k_\parallel^2 - m_f^2) ((k+q)_\parallel^2 - m_f^2)}. \quad (6.165)$$

La traza se ha simplificado y su resultado nos permite escribir a esta contribución a la autoenergía como sigue

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = -16ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_\perp^2}{|qB|}} e^{-\frac{(k+q)_\perp^2}{|qB|}} \frac{k_\parallel \cdot (k+q)_\parallel - m_f^2}{(k_\parallel^2 - m_f^2) ((k+q)_\parallel^2 - m_f^2)}. \quad (6.166)$$

Continuando con la idea de estar en una aproximación de alta temperatura, decimos que el momento externo es suave, y que la temperatura es una escala dura, una idea proveniente de los *Hard Thermal Loops*, por lo que tomamos la aproximación $q \rightarrow 0$, y trabajando en el formalismo de Matsubara, se tiene

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = 16ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-2\frac{k_\perp^2}{|qB|}} \frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2)}. \quad (6.167)$$

Luego de integrar en las componentes perpendiculares del momento y sumar sobre los modos de Matsubara, la expresión puede reescribirse como

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = \frac{2ig^2|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}}{2T} \right), \quad (6.168)$$

o bien

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = \frac{2ig^2|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} \right), \quad (6.169)$$

Consideramos solo el término de materia

$$-i\Pi_{f,T}^{\pi_0} = -\frac{4ig^2|qB|}{\pi} \int \frac{dk_3}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k_3^2 + m_f^2}/T} + 1} \right),$$

En principio conocemos la solución de la expresión anterior, usando la expansión del logaritmo desde la ec. (6.158), así al sustituir obtenemos finalmente

$$-i\Pi_f^{\pi_0} = \frac{4ig^2|qB|}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{nm_f}{T} \right). \quad (6.170)$$

6.3.3.3. Piones cargados

En el caso de los piones cargados, los vértices son $\sqrt{2}g\gamma^5$, entonces escribimos

$$\begin{aligned} -i\Pi_f^{\pi_{\pm}} &= -iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\sqrt{2}g\gamma^5 \left(2ie^{-\frac{k_{\perp}^2}{|quB|}} \frac{k_{\parallel} + m_f}{k_{\parallel}^2 - m_f^2} O^+ \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{2}g\gamma^5 \left(2ie^{-\frac{k_{\perp}^2}{|quB|}} \frac{(k + q)_{\parallel} + m_f}{(k + q)_{\parallel}^2 - m_f^2} O^+ \right) \right] + C.C. \\ &= 8ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|quB|}} e^{-\frac{(k+q)_{\perp}^2}{|quB|}}}{(k_{\parallel}^2 - m_f^2) ((k + q)_{\parallel}^2 - m_f^2)} \\ &\quad \times \text{Tr} \left[\gamma^5 (k_{\parallel} + m_f) O^+ \gamma^5 ((k + q)_{\parallel} + m_f) O^+ \right] + C.C. \end{aligned} \quad (6.171)$$

Una vez más primero vamos a calcular la traza y de manera consecutiva sumar el término conjugado de carga, al igual que en la ec. (6.165)

$$-i\Pi_f^{\pi_{\pm}} = -32ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|quB|}} e^{-\frac{(k+q)_{\perp}^2}{|quB|}} \frac{k_{\parallel} \cdot (k + q)_{\parallel} - m_f^2}{(k_{\parallel}^2 - m_f^2) ((k + q)_{\parallel}^2 - m_f^2)}. \quad (6.172)$$

Siendo consistentes con la aproximación de alta temperatura, el momento externo es suave, tal que $q \rightarrow 0$. Entonces, considerando esta aproximación y trabajando con el formalismo de Matsubara, escribimos

$$-i\Pi_f^{\pi_{\pm}} = 32ig^2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|quB|}} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|quB|}} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2}. \quad (6.173)$$

Integrando la componentes perpendiculares del momento, se obtiene

$$\int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|q_u B|}} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{|q_d B|}} = \frac{|\sqrt{q_u q_d} B|}{4\pi}, \quad (6.174)$$

y sustituyendo en la autoenergía, se llega a

$$-i\Pi_f^{\pi\pm} = \frac{8ig^2|\sqrt{q_u q_d} B|}{\pi} T \sum_n \int \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + k_3^2 + m_f^2}. \quad (6.175)$$

Siguiendo el procedimiento análogo al realizado desde la ec. (6.168) hasta la ec. (6.170), obtenemos

$$-i\Pi_f^{\pi\pm} = \frac{32ig^2|\sqrt{q_u q_d} B|}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0\left(\frac{nm_f}{T}\right). \quad (6.176)$$

Para determinar los parámetros, además se deben cumplir las condiciones

$$\left. \frac{\partial V}{\partial v} \right|_{v=f_\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right|_{v=f_\pi} = m_\pi^2. \quad (7.2)$$

Así obtenemos

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2}, \quad a = \sqrt{\lambda f_\pi^2 - m_\pi^2}, \quad h = f_\pi m_\pi^2. \quad (7.3)$$

Con los valores para las masas físicas $m_\sigma = 0.500$ GeV, $m_\pi = 0.140$ GeV, $f_\pi = 0.093$ GeV y $g = \sqrt{\lambda/2}$ de la ec. (6.109), obtenemos

$$\lambda = 13.319, \quad g = 2.580, \quad a = 0.309 \text{ GeV}, \quad h = 0.0018 \text{ GeV}^3. \quad (7.4)$$

7.1.2. Segundo conjunto de parámetros

En el segundo caso, se escoge el valor de las constantes de acoplamiento que fenomenológicamente se obtienen en el LSMq, para cuando se tienen campos magnéticos muy intensos [63]. Estos valores son $\lambda = 1.5$ y $g = 0.33$. Adaptamos los valores de los demás parámetros de manera que satisfacen las mismas condiciones que ya se establecieron, con

$$f_\pi = 0.217 \text{ GeV}, \quad a = 0.150 \text{ GeV}, \quad h = 0.0105 \text{ GeV}^3. \quad (7.5)$$

7.2. Condiciones de estabilidad en el vacío

Para asegurar que las correcciones cuánticas en el vacío no modifiquen el mínimo de la teoría, es necesario implementar las condiciones de estabilidad del vacío, donde introducimos dos contratérminos δa^2 y $\delta \lambda$.

Construimos el potencial de vacío (denotado como V^{vac}), a partir del potencial orden árbol de la ec. (3.21) y la corrección a 1-loop de los bosones neutros del vacío de la ec. (6.34), obteniendo

$$V^{vac} = -\frac{a^2 + \delta a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda + \delta \lambda}{4}v^4 - hv - \frac{(3\lambda v^2 - a^2)^2}{64\pi^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\mu^2}{3\lambda v^2 - a^2} \right) \right) - \frac{(\lambda v^2 - a^2)^2}{64\pi^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda v^2 - a^2} \right) \right). \quad (7.6)$$

Para preservar el valor del mínimo de la contribución clásica, es necesario que el potencial V^{vac} satisfaga las condiciones

$$\left. \frac{\partial V^{vac}}{\partial v} \right|_{v=f_\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V^{vac}}{\partial v^2} \right|_{v=f_\pi} = 2a^2. \quad (7.7)$$

Resolviendo las ecuaciones (7.7), los contratérminos obtenidos son

$$\delta a^2 = \frac{1}{16\pi^2 f_\pi} \left(\lambda f_\pi a^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda f_\pi^2 - a^2} \right) + 3a^2 f_\pi \lambda \ln \left(\frac{\mu^2}{3\lambda f_\pi^2 - a^2} \right) + 4a^2 f_\pi \lambda - 24\pi^2 a^2 f_\pi - 10f_\pi^3 \lambda^2 + 24\pi^2 f_\pi^3 \lambda - 24\pi^2 h \right), \quad (7.8)$$

$$\delta \lambda = \frac{1}{16} \left(-\frac{8(a^2 f_\pi - \lambda f_\pi^3 + h)}{f_\pi^3} + \frac{\lambda^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda f_\pi^2 - a^2} \right)}{\pi^2} + \frac{9\lambda^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{3\lambda f_\pi^2 - a^2} \right)}{\pi^2} \right). \quad (7.9)$$

A simple vista de las expresiones, el potencial de vacío y los contratérminos dependen de la escala de regularización μ , la cual en principio se toma como la escala energética más alta del sistema. Sin embargo, las condiciones de estabilidad también permiten reescribir el vacío del potencial de forma que no depende de dicha escala. En la Fig. 7.1 graficamos el potencial de vacío estabilizado para distintos valores de μ , mostrando que el mínimo permanece invariante.

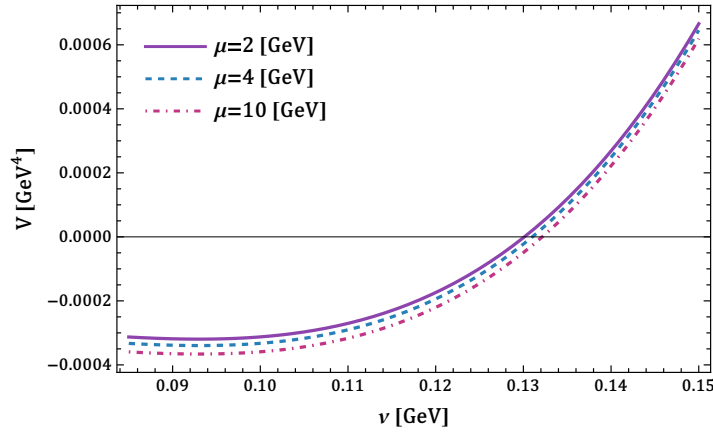


Fig. 7.1: Potencial de vacío estabilizado como función de v , graficado para tres valores de la escala de regularización $\mu = 2, 4, 10$ GeV.

En la Fig. 7.2 podemos observar la gráfica del potencial a orden árbol V^0 comparado con el potencial de vacío con los contratérminos calculados V^{vac} , para un valor fijo de μ , donde se muestra que en efecto conserva el valor del mínimo en el vacío. También podemos ver como el potencial de vacío estabilizado no es finito en valores de v cerca del origen. No es extraño desde que en la ec. (7.6), el término del logaritmo depende la masa de las partículas al cuadrado, que como se mencionó antes podría tomar valores negativos o ser cero, de forma que no es posible el estudio del potencial efectivo en ese régimen.

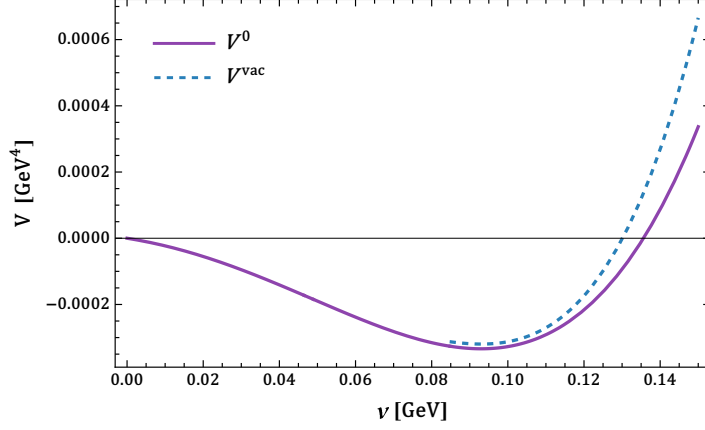


Fig. 7.2: Comparación entre el potencial a orden árbol (curva continua de color morado) y el potencial de vacío estabilizado (curva semicontinua en color azul).

7.3. Validez de los resultados

Dado que para la solución de las contribuciones térmicas del potencial de cada campo fue calculado usando algún tipo de aproximación, vamos a probar para cada caso que las expresiones que hemos calculado se comporten como su solución numérica. Esto a su vez se hace para cada conjunto de parámetros antes mencionado.

Usando los valores de la ec. (7.4), en la Fig. 7.3 analizamos el caso de la contribución térmica del potencial de los bosones neutros con la solución dada usando la aproximación a alta temperatura de la ec.(6.62) y comparamos con la solución numérica desde la expresión en la ec. (6.35), donde observamos como se comportan para tres casos distintos de valores de la temperatura. Podemos ver en las Figs. 7.3a y 7.3b, que a ese orden de temperaturas, las dos soluciones muestran un comportamiento de la expresión aproximada que rápidamente se aleja de la solución numérica, esta última es la solución correcta. Es hasta la Fig. 7.3c a una temperatura tan alta como $T = 1.1$ GeV que vemos mayor similitud entre ambos resultados. Podemos concluir que nuestra solución es válida solo para valores muy grandes de la temperatura, lo cual tiene sentido debido a la aproximación que usamos.

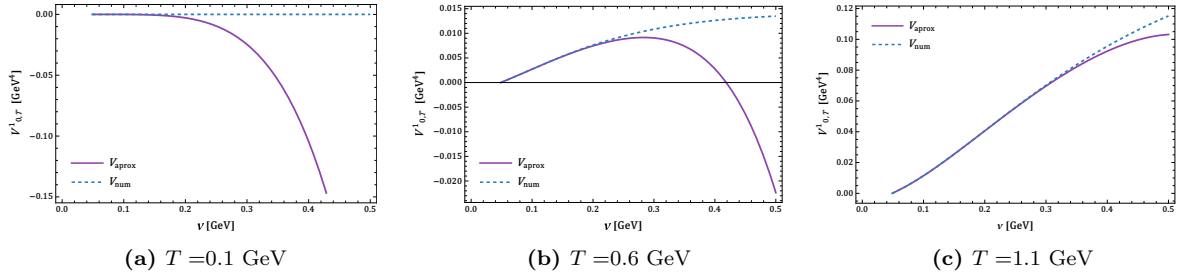


Fig. 7.3: Comparación entre la contribución térmica del potencial de los bosones neutros $V_{0,T}^1$ como función de v , usando la aproximación a alta temperatura (curva continua de color morado) y la solución numérica (curva semicontinua azul), graficado para tres valores de la temperatura: a la izquierda a $T = 0.1$ GeV, al centro $T = 0.6$ GeV y a la derecha $T = 1.1$ GeV. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.

Para los bosones cargados, usamos una expansión para encontrar la solución de la ec.

(6.81) y donde la solución numérica es dada como en la ec. (6.77). Así en la Fig. 7.4 comparamos ambos resultados, para cada temperatura tomamos $n = 10$ términos de la serie y el campo toma un valor fijo de $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Es fácil notar que para cualquier valor de la temperatura, sea pequeña o grande, nuestra solución es fiel al comportamiento de la solución numérica, las curvas se encuentran una encima de la otra.

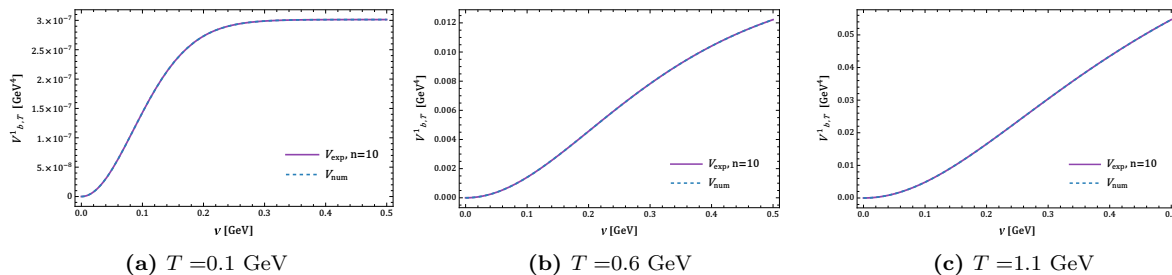


Fig. 7.4: Comparación entre la contribución térmica del potencial de los bosones cargados $V_{b,T}^1$ como función de v , usando la expansión tomando $n = 10$ términos de la serie (curva continua de color morado) y la solución numérica (curva semicontinua azul), con un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, graficado para tres valores de la temperatura: a la izquierda a $T = 0.1 \text{ GeV}$, al centro $T = 0.6 \text{ GeV}$ y a la derecha $T = 1.1 \text{ GeV}$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

En el caso de los fermiones, no solo obtuvimos la solución del término de materia del potencial en la aproximación a alta temperatura como en la ec. (6.96), sino también como una expansión al igual que el método usado para los bosones cargados dado en la ec. (6.99), por lo cual comparamos ambas soluciones con los resultados numéricos de la ec. (6.94). En la Fig. 7.5, podemos observar los potenciales a distintas temperaturas, donde la expansión se trunca en $n = 15$ y con un valor del campo magnético fijo en $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Para todas las temperaturas, podemos ver como el potencial en la aproximación, al igual que en caso de los bosones neutros no se asemeja al comportamiento de la solución numérica. Sin embargo, al igual que para los bosones cargados, el potencial obtenido como una expansión se comporta de manera casi idéntica a los resultados numéricos.

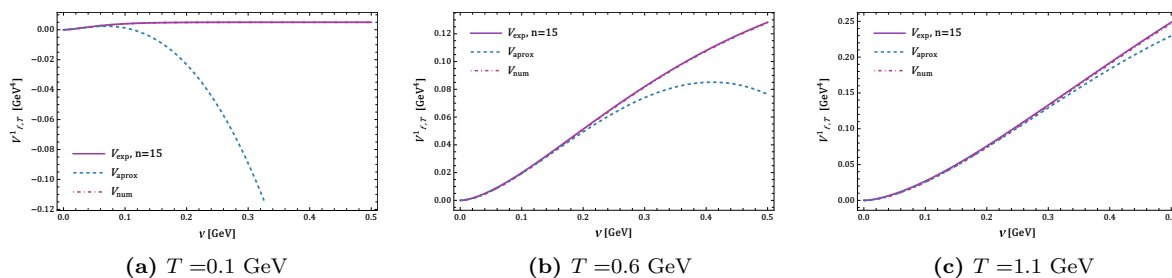


Fig. 7.5: Comparación entre la solución en términos de una expansión, la aproximación a alta temperatura y la solución numérica de las contribuciones a 1-loop del término de materia asociado a los fermiones, esto para distintas temperaturas. Comparación entre la contribución térmica del potencial de los fermiones $V_{f,T}^1$ como función de v , usando la expansión tomando $n = 15$ términos de la serie (curva continua de color morado), la aproximación a alta temperatura (curva semicontinua azul) y la solución numérica (curva punto y guión rosa), con un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, graficado para tres valores de la temperatura: a la izquierda a $T = 0.1 \text{ GeV}$, al centro $T = 0.6 \text{ GeV}$ y a la derecha $T = 1.1 \text{ GeV}$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

El mismo análisis puede hacerse para el segundo conjunto de parámetros, el dado en la

ec. (7.5), antes que hay dos razones que motivan el estudio del potencial en estos valores: en primer lugar porque se conoce que el acoplamiento entre los campos también se ve modificado debido a los efectos termo-magnéticos, tal que en altos valores de la intensidad del campo, el cual es el régimen que estamos estudiando. En segundo lugar estos acoplamientos tiendan asintóticamente a un valor, los valores de λ , g y a , son pequeños, de manera que las masas de la ec. (3.19) toman también valores pequeños, esto es importante para las contribuciones donde se consideró la aproximación a alta temperatura, puesto que si se cumple que $\frac{m}{T} \ll 1$, en este caso se tendrá una mejor aproximación.

Para los bosones neutros, en la Fig. 7.6 podemos ver como desde temperaturas al rededor de 0.6 GeV, tanto la aproximación como la solución numérica se comportan de forma casi idéntica.

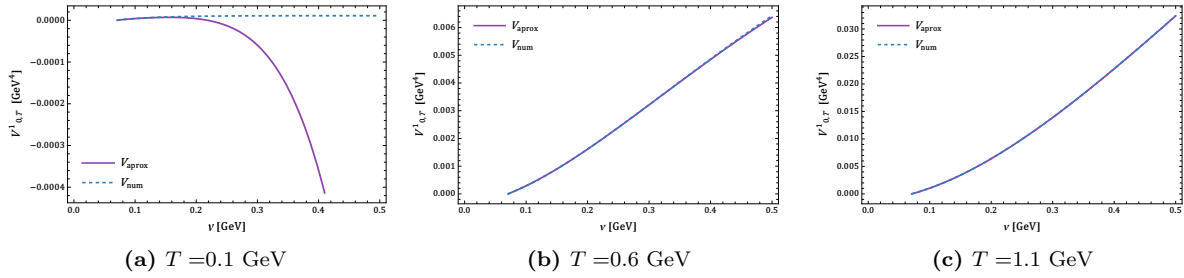


Fig. 7.6: Comparación entre la contribución térmica del potencial de los bosones neutros $V_{0,T}^1$ como función de v , usando la aproximación a alta temperatura (curva continua de color morado) y la solución numérica (curva semicontinua azul), con un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, graficado para tres valores de la temperatura: a la izquierda a $T = 0.1 \text{ GeV}$, al centro $T = 0.6 \text{ GeV}$ y a la derecha $T = 1.1 \text{ GeV}$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15 \text{ GeV}$.

Al igual que en el caso anterior, en la Fig. 7.7 se muestra como en el caso de bosones cargados, el resultado de la expansión considerando los primeros diez términos. Para todos los valores de temperatura se comporta de la misma forma que lo hace la solución numérica.

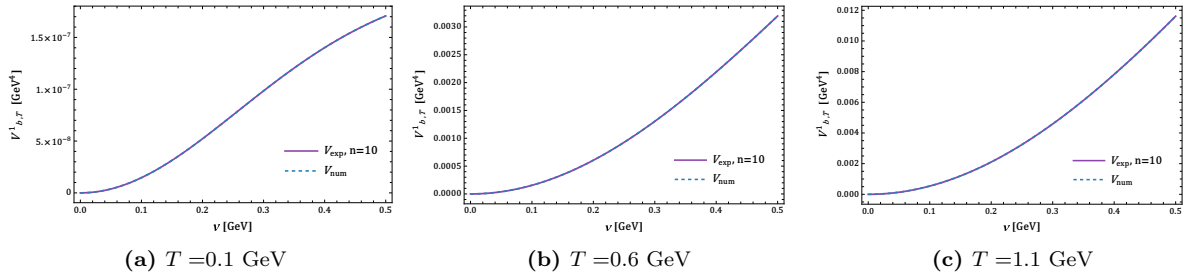


Fig. 7.7: Comparación entre la contribución térmica del potencial de los bosones cargados $V_{b,T}^1$ como función de v , usando la expansión tomando $n = 10$ términos de la serie (curva continua de color morado) y la solución numérica (curva semicontinua azul), con un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, graficado para tres valores de la temperatura: a la izquierda a $T = 0.1 \text{ GeV}$, al centro $T = 0.6 \text{ GeV}$ y a la derecha $T = 1.1 \text{ GeV}$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15 \text{ GeV}$.

En la Fig. 7.8 correspondiente a los fermiones, es donde observamos que para estos valores en los parámetros, como sucedió con los bosones neutros, la expresión obtenida en el

límite de alta temperatura de la ec. (6.100) se comporta considerablemente mejor. Para la expresión hecha con la expansión basta con considerar $n = 15$ en la suma, para notar el acuerdo con el resultado numérico.

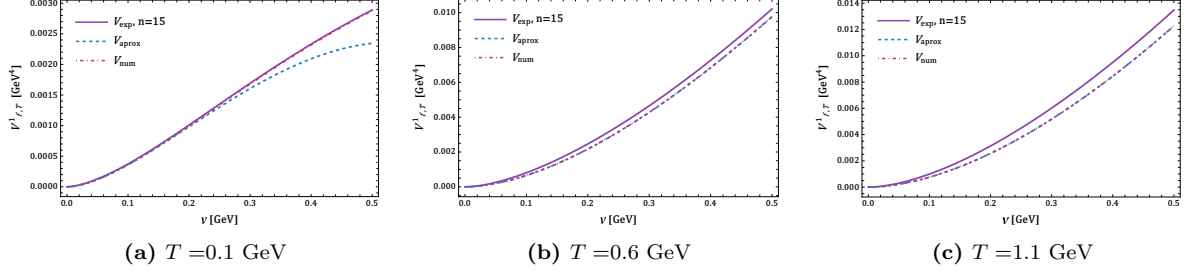


Fig. 7.8: Comparación entre la solución en términos de una expansión, la aproximación a alta temperatura y la solución numérica de las contribuciones a 1-loop del término de materia asociado a los fermiones, esto para distintas temperaturas. Comparación entre la contribución térmica del potencial de los fermiones $V_{f,T}^1$ como función de v , usando la expansión tomando $n = 15$ términos de la serie (curva continua de color morado), la aproximación a alta temperatura (curva semicontinua azul) y la solución numérica (curva punto y guión rosa), con un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, graficado para tres valores de la temperatura: a la izquierda a $T = 0.1 \text{ GeV}$, al centro $T = 0.6 \text{ GeV}$ y a la derecha $T = 1.1 \text{ GeV}$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15 \text{ GeV}$.

En general, a altas temperaturas, las expresiones obtenidas para cada campo son una buena aproximación. Sin embargo, el análisis nos se restringe a esa región de las temperaturas, por lo cual estudiaremos dos casos, un potencial efectivo con las contribuciones en la aproximación a alta temperatura al que llamamos potencial aproximado y otro resuelto numéricamente, llamado potencial numérico.

7.4. Análisis del potencial

El potencial en la aproximación a alta temperatura, se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
V = & -\frac{a^2 + \delta a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{4}v^4 - hv - \frac{(3\lambda v^2 - a^2)^2}{64\pi^2} \left(2\gamma_E + \ln \left(\frac{\mu^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) \quad (7.10) \\
& - \frac{(\lambda v^2 - a^2)^2}{64\pi^2} \left(2\gamma_E + \ln \left(\frac{\mu^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) - \frac{T^4\pi^2}{45} + \frac{(3\lambda v^2 - a^2)T^2}{24} \\
& + \frac{(\lambda v^2 - a^2)T^2}{24} - \frac{(3\lambda v^2 - a^2 + \Pi_\sigma)^{3/2}T}{12\pi} - \frac{(\lambda v^2 - a^2 + \Pi_{\pi_0})^{3/2}T}{12\pi} \\
& + \frac{|eB|}{2\pi^2}(\lambda v^2 - a^2 + |eB|) \left(1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda v^2 - a^2 + |eB|} \right) \right) \\
& - \frac{T|eB|}{\pi^2} \sqrt{\lambda v^2 - a^2 + |eB|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1 \left(\frac{n\sqrt{\lambda v^2 - a^2 + |eB|}}{T} \right) \\
& - \frac{3|qB|}{4\pi^2} (gv)^2 \left(1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{(gv)^2} \right) \right) - \frac{6|qB|T}{\pi^2} gv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} K_1 \left(\frac{ngv}{T} \right).
\end{aligned}$$

Este potencial aproximado depende de v , tras escribir las masas desde la ec. (3.19). Sin embargo, va a variar para distintas condiciones en el sistema, al fijar la temperatura T y la intensidad del campo $|eB|$. Además, los términos del vacío dependen de la escala de renormalización μ , como mencionamos, toma el valor de la escala energética más grande de todo el sistema, por lo que será del orden del campo. Para ser consistentes con la aproximación del nivel más bajo de Landau que se ocupó para escribir a los propagadores de partículas con carga eléctrica, definimos que

$$\mu^2 = 2|eB|. \quad (7.11)$$

Es relevante notar de las ecs. (6.63) y (7.10) para la solución de la contribución a 1-loop del potencial de bosones neutros en la aproximación a alta temperatura, el logaritmo de la masa en el vacío se absorbe con el término opuesto que proviene del término de materia, así que no habrá ningún término que genere una discontinuidad en el potencial efectivo aproximado.

El potencial efectivo de la ec. (7.10) incluye la contribución de los diagramas de anillo, dada en la ec. (6.103), donde la autoenergía de cada bosón neutro está dada por las ecs. (6.126), (6.140) y (6.170). Consideramos los factores de simetría provenientes de las reglas de Feynman, mismas que aparecen en la Fig. 6.3. Las autoenergías correspondientes a los bosones neutros son

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma = & \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda T^2}{6} - \frac{\lambda \sqrt{m_\sigma^2}}{2\pi} T - \frac{\lambda m_\sigma^2}{8\pi^2} \left(1 - 2\gamma_E - \ln \left(\frac{m_\sigma^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) \right) \\ & + \left(\frac{\lambda T^2}{6} - \frac{\lambda \sqrt{m_\pi^2}}{2\pi} T - \frac{\lambda m_\pi^2}{8\pi^2} \left(1 - 2\gamma_E - \ln \left(\frac{m_\pi^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) \right) \\ & + \frac{\lambda |eB|}{2\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_\pi^2 + |eB|} \right) + \frac{\lambda |eB|}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{n \sqrt{m_\pi^2 + |eB|}}{T} \right) \\ & - 6 \left(\frac{4g^2 |qB|}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{ngf_\pi}{T} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi_0} = & \left(\frac{\lambda T^2}{6} - \frac{\lambda \sqrt{m_\sigma^2}}{2\pi} T - \frac{\lambda m_\sigma^2}{8\pi^2} \left(1 - 2\gamma_E - \ln \left(\frac{m_\sigma^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) \right) \\ & + \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda T^2}{6} - \frac{\lambda \sqrt{m_\pi^2}}{2\pi} T - \frac{\lambda m_\pi^2}{8\pi^2} \left(1 - 2\gamma_E - \ln \left(\frac{m_\pi^2}{(4\pi T)^2} \right) \right) \right) \\ & + \frac{\lambda |eB|}{2\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_\pi^2 + |eB|} \right) + \frac{\lambda |eB|}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{n \sqrt{m_\pi^2 + |eB|}}{T} \right) \\ & - 6 \left(\frac{4g^2 |qB|}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{ngf_\pi}{T} \right) \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Es importante mencionar que los sistemas físicos de interés son los que están en presencia de campos magnéticos ultra intensos, por lo cual el régimen de valores de la intensidad del campo que analizaremos es entre $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$ y $|eB| = 10 \text{ GeV}^2$, valores que garantizan que el campo magnético es la escala más grande en el análisis. Además, el fin de este proyecto es construir un diagrama de fase efectivo en el plano $T - |eB|$, al tomar como referencia el diagrama de fase de la Fig. 2.7, donde las temperaturas de transición son relativamente pequeñas. Buscamos encontrar también un punto crítico terminal, al pasar de un crossover a una transición de primer orden.

Una vez definido el potencial efectivo aproximado, en la Fig. 7.9, podemos observar como cambia para distintas temperaturas, habiendo usado los parámetros desde la ec. (7.4), donde la intensidad del campo magnético toma un valor fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$.

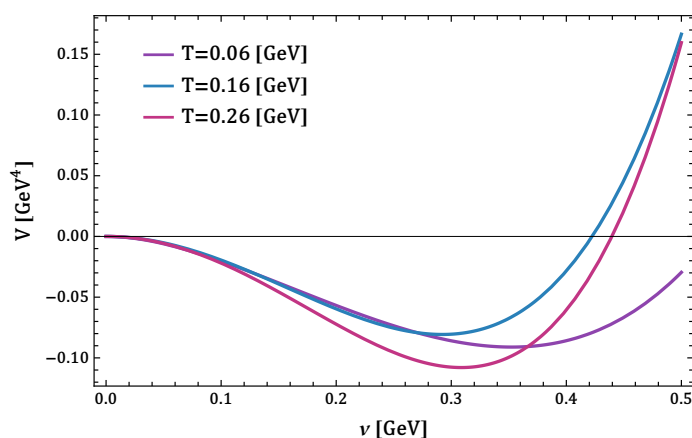


Fig. 7.9: Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura como función de v , para distintas temperaturas a un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

Podemos ver que conforme la temperatura aumenta, el mínimo del potencial se desplaza. Lo esperado es que se desplace hacia el valor del mínimo en el vacío f_π puesto que recordamos que tenemos un término de rompimiento explícito de la simetría en el potencial. Este comportamiento es el que apoya la idea de que la temperatura promueve la restauración de la simetría. Sin embargo, no es lo que observamos, a una temperatura baja de 0.06 GeV, el mínimo está en el mayor valor de v , al aumentar la temperatura a 0.16 GeV, el mínimo se desplaza a la izquierda, sin embargo, al aumentar la temperatura aún más en lugar de seguir reduciendo el valor del mínimo, comienza a crecer. Esto muestra un comportamiento inconsistente y errático.

Por otra parte, en la Fig. 7.10 hemos graficado el potencial efectivo a una temperatura fija $T = 0.1 \text{ GeV}$, para distintos valores de la intensidad del campo magnético. Al notar como, conforme el campo crece, el mínimo se desplaza a valores más grandes, decimos que el campo está rompiendo aún más la simetría. Este comportamiento del potencial nos da señales de la Catálisis Magnética. Para este caso, el comportamiento es el adecuado y que físicamente es consistente.

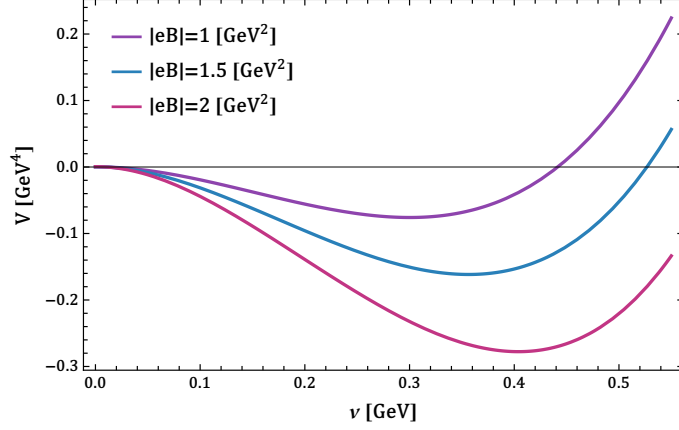


Fig. 7.10: Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura como función de v , para distintos valores del campo magnético, a una temperatura fija $T = 0.1$ GeV. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.

Este potencial visto en las Figs. 7.9 y 7.10, es continuo para todos los valores de v , esto puede verse desde la ec. (7.10), gracias a la contribución V^{ring} , no hay discontinuidades debido a que los valores de las masas son siempre positivos. El campo magnético rompe la simetría y la temperatura no la restaura.

Con el fin de obtener información acerca de la transición de fase y ser capaces de construir un diagrama de fase efectivo, en la Fig. 7.11 podemos ver como se comporta el mínimo del potencial efectivo respecto de la temperatura, esto para distintos valores de la intensidad del campo magnético.

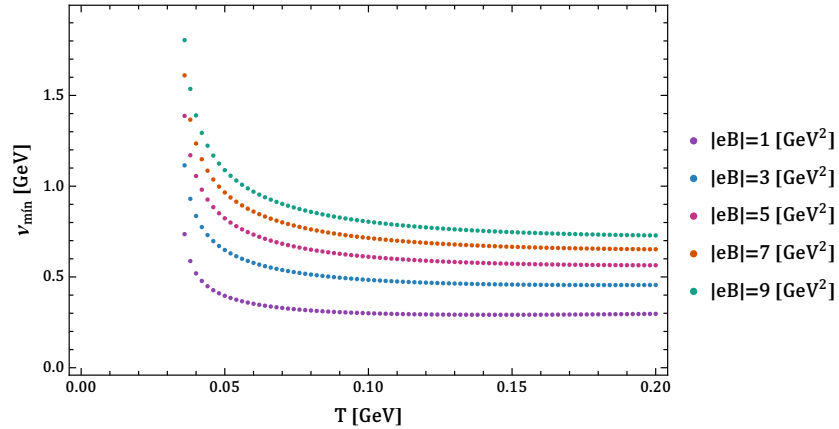


Fig. 7.11: Mínimo del potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura como función de la temperatura, para distintos valores fijos del campo magnético $|eB| = 1, 3, 5, 7, 9$ GeV². Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.

En esta gráfica vemos al mínimo del potencial como el parámetro de orden de la transición, lo más cercano a su comportamiento es un crossover dado que no hay ninguna discontinuidad y a pesar de que v_{min} no tienda al valor de f_π , como sería lo esperado.

A simple vista, el comportamiento de $v_{min}(T)$ en la Fig. 7.11, no es consistente con ningún tipo de transición. Veamos en la Fig. 7.12 que el comportamiento del mínimo del potencial como función de T para $|eB| = 1$ GeV², discrepa del comportamiento del mínimo del potencial obtenido de un crossover.

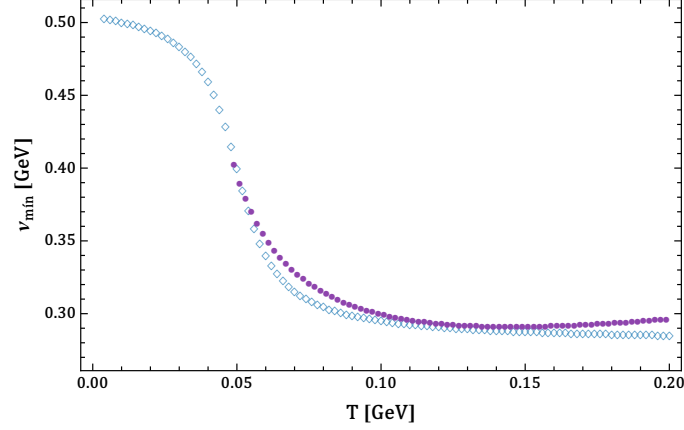


Fig. 7.12: Mínimo del potencial como función de la temperatura (rombos sin relleno azules), comparado con el resultado obtenido en la Fig. 7.11 con $|eB| = 1 \text{ GeV}$ (puntos morados). Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

Notemos que con el resultado del potencial aproximado, no podemos encontrar todo el comportamiento del mínimo del potencial, ya que no tenemos acceso a la región de bajas temperaturas, esto nos impide hacer un análisis para determinar la temperatura de transición. Por lo cual tampoco es posible construir un diagrama de fase efectivo a partir del potencial de la ec. (7.10), al menos no para el conjunto de parámetros usado.

Recordando que con los parámetros dados por la ec. (7.5), la aproximación a alta temperatura es mucho más consistente con la solución numérica, entonces repetimos el análisis del potencial efectivo aproximado para este segundo conjunto de parámetros. Comenzando por observar como varía el potencial efectivo con el cambio de la temperatura, dejando fijo el campo magnético a $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, esto lo mostramos en la Fig. 7.13.

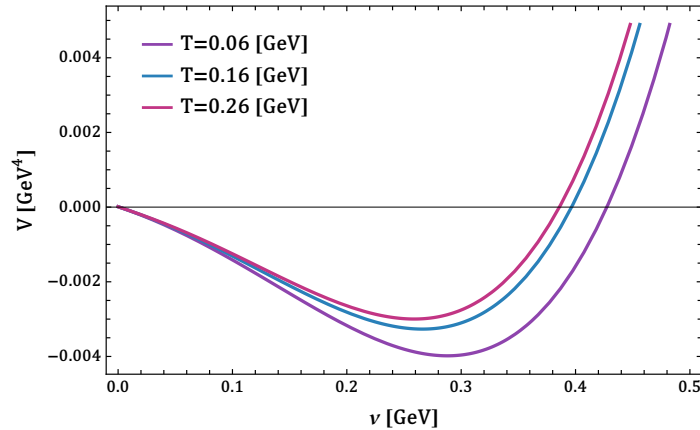


Fig. 7.13: Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura como función de v , para distintas temperaturas a un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15 \text{ GeV}$.

Es notable que en este caso, la temperatura está desplazando el mínimo hacia valores más pequeños y disminuyendo la profundidad del potencial, resultado que es completamente consistente con la idea de la restauración de la simetría.

En la Fig. 7.14, graficamos el potencial efectivo aproximado como función de v para $T = 0.1$ GeV, y observamos como el aumento de la intensidad del campo magnético rompe cada vez más la simetría, mostrando consistencia con el fenómeno de la catálisis magnética.

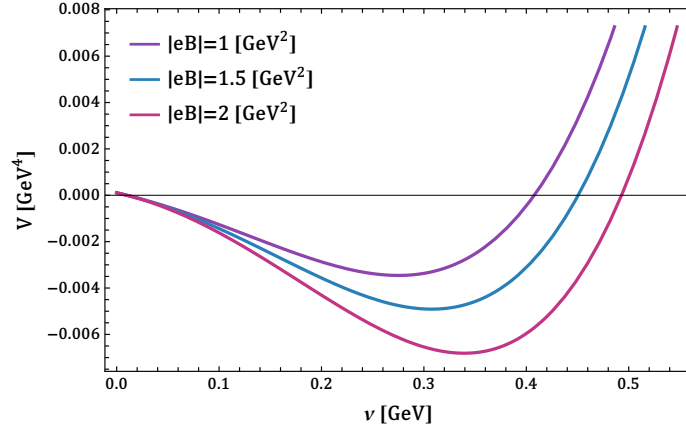


Fig. 7.14: Potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura como función de v , para distintos valores del campo magnético $|eB| = 1, 1.5, 2$ GeV², a una temperatura fija $T = 0.1$ GeV. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.

Para comparar con el caso anterior de la Fig. 7.12, en la Fig. 7.15, tenemos a $v_{min}(T)$ para un campo fijo en $|eB| = 1$ GeV², el cual ahora sí luce como un crossover.

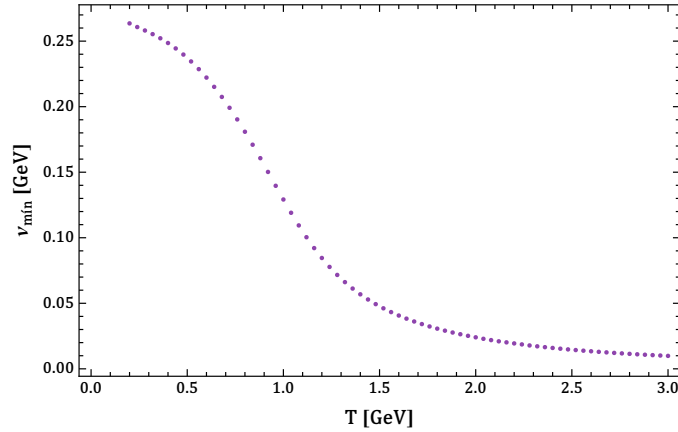


Fig. 7.15: Mínimo del potencial respecto de la temperatura cuando la intensidad del campo magnético es $|eB| = 1$ GeV². Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.

Podemos observar en la Fig. 7.16 el mínimo del potencial como función de la temperatura para distintos valores fijos de la intensidad del campo magnético. Si lo pensamos como el parámetro de orden, tiene un comportamiento que puede identificar un crossover para todos los valores del campo.

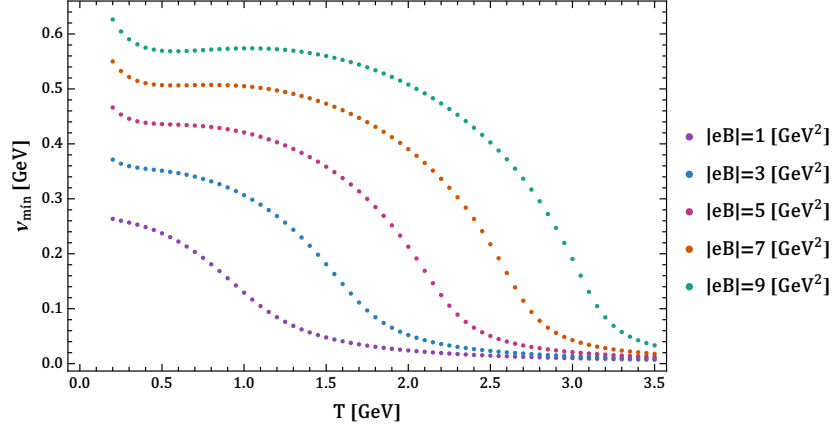


Fig. 7.16: Mínimo del potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura como función de la temperatura, para distintos valores fijos del campo magnético. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.

En principio, para mostrar que en efecto, la temperatura está restaurando la simetría, es decir, que el valor del mínimo tiende hacia f_π , observamos en la Fig. 7.17 el potencial efectivo para tres valores distintos del campo magnético y cada caso para tres temperaturas, una mayor, una menor y una temperatura del orden de la T_c .

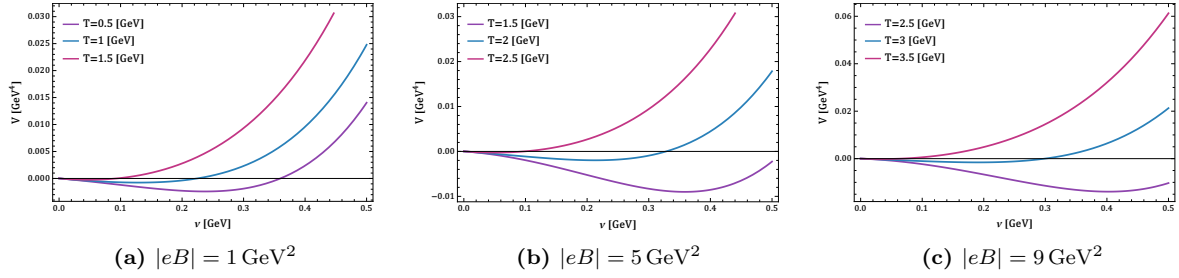


Fig. 7.17: Comparación entre el potencial efectivo como función de v en la aproximación a alta temperatura en los casos donde el campo magnético está fijo, a la izquierda en $|eB| = 1$ GeV², al centro en $|eB| = 5$ GeV² y a la derecha en $|eB| = 9$ GeV², para distintas temperaturas cercanas a la temperatura de transición asociada a cada campo. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 1.5$, $g = 0.33$ y $a = 0.15$ GeV.

Si bien, es cierto que el aumento de la temperatura disminuye el valor v_{min} , encontramos algunos problemas. En primer lugar, a pesar de que hemos encontrado un crossover, estas curvas no tienden asintóticamente hacia el valor del mínimo en el vacío f_π , sino hacia cero, debido a que en el potencial efectivo incluimos un término de rompimiento explícito de la simetría, no es el comportamiento esperado. Puede verse también que este análisis nos arroja temperaturas de transición sumamente grandes, del orden de 1 GeV y la temperatura de transición aumenta conforme aumenta la temperatura, ninguno de estos comportamientos nos conduce a construir un diagrama de fase efectivo que se comporte como el de la Fig. 2.7.

La inconsistencia del comportamiento del potencial efectivo en la aproximación a alta temperatura nos motiva a hacer el mismo análisis, esta vez donde el potencial efectivo sera dado a partir de la solución numérica de la contribución térmica para los bosones neutros de la ec.(6.62), que antes se tomaron como aproximados. Sin embargo, para los

bosones cargados y los fermiones no hacemos ningún cambio. También la contribución de los anillos se incluye en la solución numérica de la contribución de los bosones neutros, ya que la obtenida en la ec. (6.108) es solo una aproximación a alta temperatura. Cabe aclarar que vamos a trabajar con el conjunto de parámetros de la ec. (7.4).

Con estos cambios el potencial efectivo numérico es

$$\begin{aligned}
V^{num} = & V^{vac} + V_{0,T}(3\lambda v^2 - a^2 + \Pi_\sigma, T) + V_{0,T}(\lambda v^2 - a^2 + \Pi_{\pi_0}, T) \\
& + V_{b,vac}(\lambda v^2 - a^2, B) + V_{b,T}(\lambda v^2 - a^2, T, B, n_b) \\
& + V_{f,vac}(gv, B) + V_{f,T}(gv, T, B, n_f),
\end{aligned} \tag{7.14}$$

donde la corrección a las masas con la autoenergía es resultado de incluir la contribución de los diagramas de anillo. Las contribuciones térmicas para bosones neutros son solución a la expresión dada en la ec. (6.35) y para los bosones cargados y fermiones las dadas en las ecs. (6.81) y (6.99), donde n es el número de términos de la suma infinita que se toman en cuenta para cada caso, recordando que para el conjunto de parámetros de la ec. (7.4), estas expresiones son muy cercanas a la solución numérica.

En la Fig. 7.18, podemos ver el potencial efectivo con soluciones numéricas, como en el análisis previo para el potencial de la ec. (7.10), para un valor fijo de la intensidad del campo magnético, al variar la temperatura. Notamos cómo el mínimo se desplaza a la izquierda cuando la temperatura aumenta, lo cual se puede interpretar como que la temperatura está restaurando la simetría.

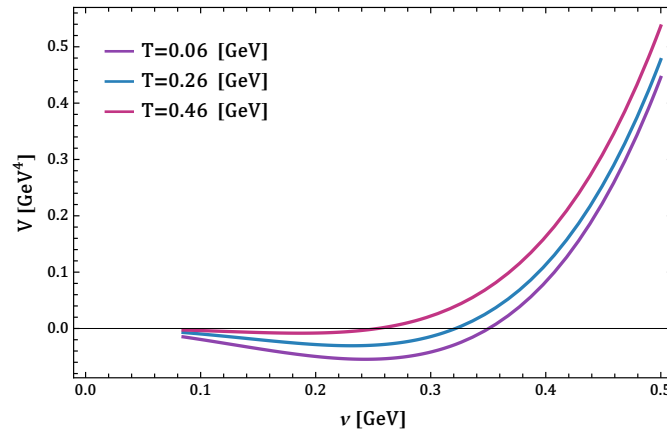


Fig. 7.18: Potencial efectivo numérico V^{num} como función de v , para distintas temperaturas a un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Tomamos $n_b = 10$ y $n_f = 15$, para la cantidad de términos de las contribuciones térmicas de bosones y fermiones, respectivamente. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

De forma similar, para una temperatura fija y campos distintos, en la Fig. 7.19, el campo magnético propicia el rompimiento de la simetría, al aumentar el valor del mínimo conforme aumenta el campo.

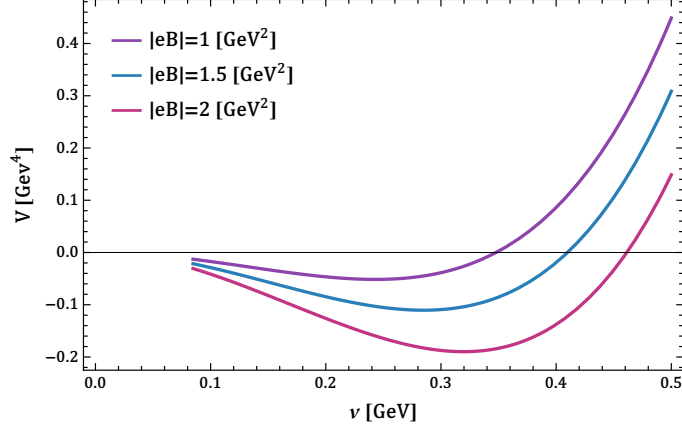


Fig. 7.19: Potencial efectivo numérico V^{num} como función de v a una temperatura fija $T = 0.1$ GeV para distintos valores del campo magnético $|eB| = 1, 1.5, 2$ GeV². Tomando $n_b = 10$ y $n_f = 15$, la cantidad de términos de las contribuciones térmicas de bosones y fermiones, respectivamente. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.

Algo que notar del potencial efectivo de las Figs. 7.18 y 7.19, es que no es finito en valores de v cercanos al origen. Esto se debe a que a pesar de haber incluido la autoenergía en la parte térmica en el caso de los bosones neutros, en el vacío del potencial de la ec. (7.6) dentro del logaritmo hay masas dinámicas al cuadrado que podrían ser negativas y esta vez no se anulan con la contribución térmica puesto que esta es calculada numéricamente.

A pesar de comportarse como el caso donde se consideró la aproximación a alta temperatura, la principal diferencia radica en que ahora la transición de fase ocurre a valores de temperatura más pequeños, así para este caso en la Fig. 7.20 podemos ver gráficamente el comportamiento de v_{min} como función de la temperatura, para distintos valores de B .

Puesto que vemos a v_{min} como el parámetro de orden, ahora podemos identificar casi claramente dos tipos distintos de transiciones: por un lado para valores del campo menores tenemos un crossover, mientras que para valores más altos, la transición presenta una discontinuidad, asociada a una transición de primer orden.

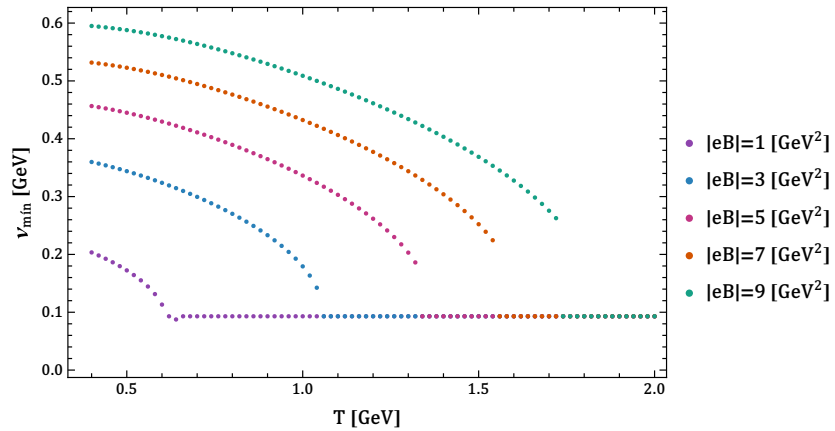


Fig. 7.20: Mínimo del potencial efectivo numérico V^{num} como función de la temperatura, para distintos valores fijos del campo magnético. Tomando $n_b = 10$ y $n_f = 15$, la cantidad de términos de las contribuciones térmicas de bosones y fermiones, respectivamente. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.

Para probar que se trata de uno u otro tipo de transición, en la Fig. 7.21 tenemos el potencial efectivo para tres valores distintos del campo magnético y cada caso para tres temperaturas, una mayor, una menor y la temperatura de transición. En la Fig. 7.21a donde esperamos un crossover para un campo de $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, podemos identificar que en efecto, para T_c y temperaturas por encima de esta el mínimo tiende a un valor cercano a f_π , mientras que a una menor temperatura, el valor del mínimo es mayor. Por otro lado, en las Figs. 7.21b y 7.21c, donde el potencial efectivo corresponde a $|eB| = 5 \text{ GeV}^2$ y $|eB| = 9 \text{ GeV}^2$, respectivamente, identificamos un comportamiento como el descrito en la Fig. 5.2a, donde aparecen dos mínimos, de forma que encontramos transiciones de primer orden.

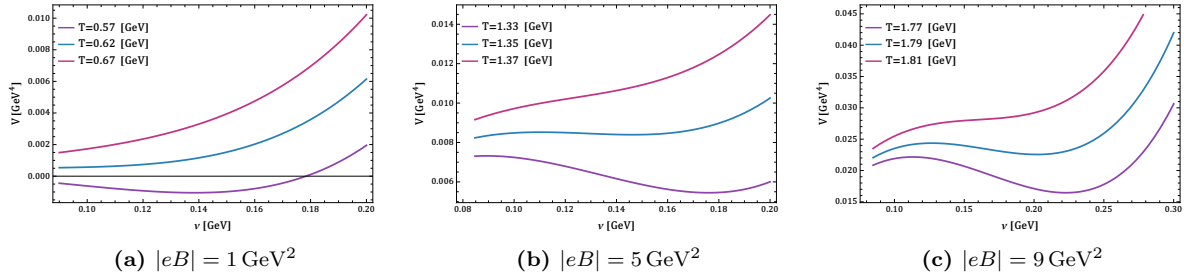


Fig. 7.21: Comparación entre el potencial efectivo numérico V^{num} como función de v en los casos donde el campo magnético está fijo, a la izquierda en $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, al centro en $|eB| = 5 \text{ GeV}^2$ y a la derecha en $|eB| = 9 \text{ GeV}^2$, para distintas temperaturas cercanas a la temperatura de transición de asociada a cada campo. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

En la Fig. 7.20 es posible identificar fácilmente a la temperatura de transición asociada a cada campo. Es claro como al igual que en el caso aproximado, T_c aumenta con el campo, sin embargo, a diferencia de éste, las temperaturas aunque aún altas, son de menor magnitud. Además encontramos transiciones de tipo crossover y primer orden como era esperado, de esta forma, podemos construir el diagrama de fase asociado a este potencial efectivo, visto como en la Fig. 7.22.

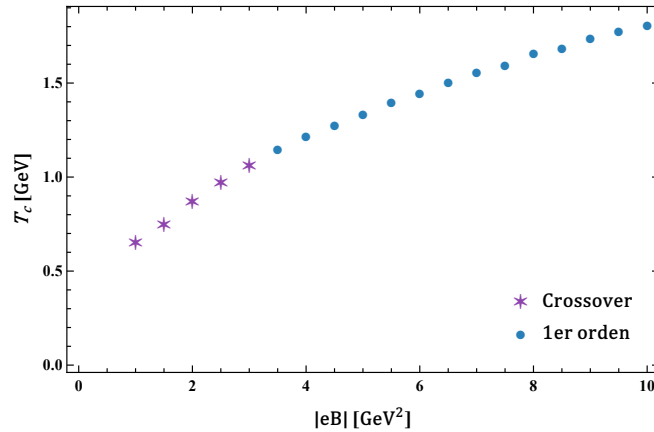


Fig. 7.22: Diagrama de fase efectivo en el plano $T - |eB|$, asociado al potencial efectivo numérico. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

En principio el sistema que buscamos describir con este potencial es uno en el que además

de tender al equilibrio térmico, el espacio está permeado por intensos campos magnéticos, en ese sentido lo que esperamos es que alrededor de la temperatura de transición, el campo magnético catalice la restauración, no así la ruptura de la simetría. Desde que en ambos casos, con el potencial aproximado y con el potencial numérico, la temperatura de transición aumenta con el campo magnético, lo que vemos es en realidad algo más cercano a la MC que a la IMC, siendo la última lo que se esperaba. Además al comparar con los diagramas de fase de las interacciones fuertes reportados, como los de las Fig. 2.6 y 2.7, el que hemos obtenido tiene un comportamiento opuesto.

7.5. Consistencia del modelo

De los análisis anteriores y específicamente del comportamiento del mínimo del potencial como función de la temperatura, surgen algunas cuestiones por lo cual ha sido de interés observar como modifica por separado cada uno de los términos del potencial efectivo al vacío del potencial V^{vac} .

En la Fig. 7.11 se observó que para valores más altos de la temperatura de transición, el mínimo tiende hacia cero y no a f_π , este último el mínimo impuesto por el rompimiento explícito de la simetría. Para entender este problema queremos analizar cómo modifica la parte térmica del potencial de los fermiones $V_{f,T}$, al vacío del potencial V^{vac} . Esto lo mostramos en la Fig. 7.23, donde observamos como al aumentar el valor de la intensidad del campo magnético en el término $V_{f,T}$, el mínimo se desplaza más cerca del origen, incluso más allá del valor de f_π .

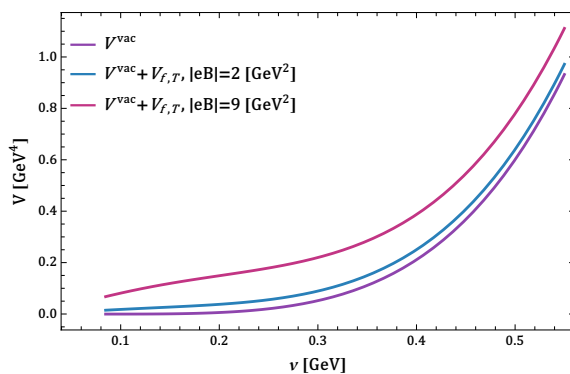


Fig. 7.23: Comparación del vacío del potencial V^{vac} y el vacío del potencial más la contribución de materia de los fermiones $V^{vac} + V_{f,T}$, para una temperatura fija $T = 0.1$ GeV y valores del campo magnético $|eB| = 2, 9$ GeV². Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 2.58$ y $a = 0.309$ GeV.

Este comportamiento es interpretado al observar la expresión de $V_{f,T}$ de la ec. (6.99), esta contribución es proporcional a v y crece tanto con el campo como con la temperatura. Pensamos que este término compite con la contribución del rompimiento explícito, cuando es mayor y es el término responsable de que observemos una transición de primer orden y que el mínimo del potencial tienda al origen. Esto último aunado a lo que observamos en la Fig. 7.20, donde el valor del mínimo se corta abruptamente cerca de f_π puesto que a este nivel el potencial cerca del origen es inaccesible, hace evidente que es una limitante para el análisis no poder observar el potencial efectivo en todo el espacio.

Por otro lado, llama la atención como el campo magnético rompe la simetría y este efecto domina por sobre el de la restauración de la simetría inducida por el aumento de la temperatura. Es así como podemos observar en la Fig. 7.24 como el vacío de los fermiones $V_{f,vac}$, donde la intensidad del campo magnético es $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, por sí solo promueve que el mínimo se traslade a valores mayores. Digamos que se rompa la simetría, esto para los dos valores de la constante de acoplamiento g usados anteriormente. Hay que prestar especial atención al hecho de que si bien en ambos casos aumenta, cuando g toma su valor asintótico (y es menor que 1), esta contribución es mucho menor.

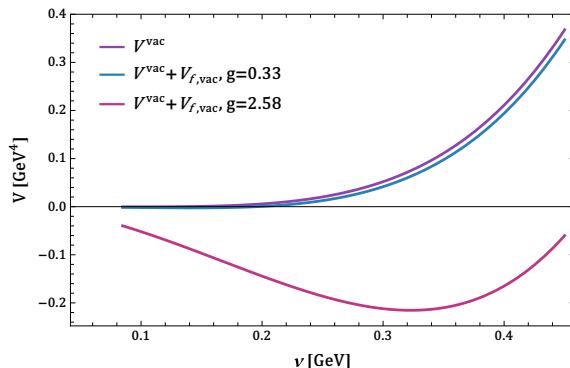


Fig. 7.24: Comparación del vacío del potencial V^{vac} y el vacío del potencial más la contribución de vacío de los fermiones $V^{vac} + V_{f,vac}$, para una temperatura fija $T = 0.1 \text{ GeV}$ y valor del campo magnético $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$, para distintos valores de la constante de acoplamiento $g = 0.33, 2.58$. Donde la constante de acoplamiento y el parámetro de masa tienen valores $\lambda = 13.32$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

Análogo a lo anterior, este comportamiento puede explicarse desde observar como $V_{f,vac}$ es proporcional a $-v^2$, por lo cual, mientras este crezca con el campo, la simetría del potencial estará cada vez más rota.

Teniendo en mente que los factores dominantes, para cada uno de los comportamientos observados anteriormente, vienen dados por las contribuciones de fermiones, se nos permite modificar el valor de la constante de acoplamiento g independientemente de λ debido a su relación en la ec. (6.109).

Vamos a probar con una nueva configuración de parámetros, donde se toman los valores desde la ec. (7.4) a excepción de g , la cual tomamos un valor cercano al que tiende asintóticamente para altos campos magnéticos desde la ec. (7.5), como $g = 0.36$. La razón es como vimos en la Fig. 7.24, usando ese valor de la constante aunque aún promueve el rompimiento, esto ocurre en menor medida, de forma que el siguiente paso a seguir es probar si entonces las demás contribuciones que favorecen la restauración son ahora dominantes.

Con esta nueva configuración en los parámetros podemos observar el potencial efectivo, con soluciones numéricas. En la Fig. 7.25, podemos ver al potencial efectivo para un campo magnético fijo y a distintas temperaturas. Al igual que los análisis anteriores, el aumento de la temperatura promueve el incremento en el valor del mínimo, con la diferencia que en el rango de temperaturas en el que fue probado, parece que ya no hay rompimiento ni siquiera para los valores más bajos de T .

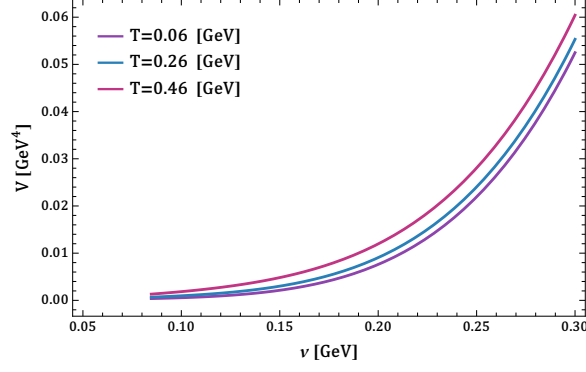


Fig. 7.25: Potencial efectivo numérico V^{num} como función de v , para distintas temperaturas a un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

Por otro lado, cuando graficamos el potencial efectivo a una temperatura fija y varios valores del campo, vemos por primera vez en la Fig. 7.26 como conforme aumentamos el valor del campo, el potencial efectivo se comporta como si se estuviera restaurando la simetría.

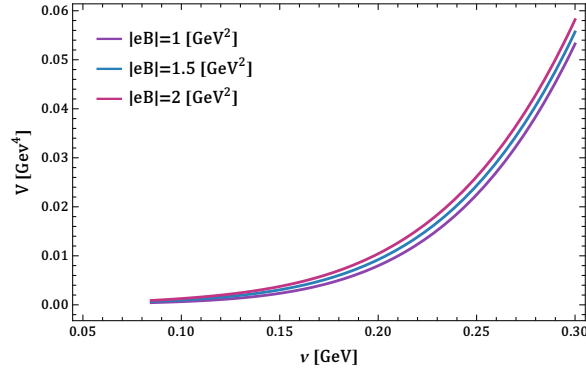


Fig. 7.26: Potencial efectivo numérico V^{num} como función de v a una temperatura fija $T = 0.06 \text{ GeV}$ para distintos valores del campo magnético $|eB| = 1, 1.5, 2 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

Al igual que cuando aumenta la temperatura la simetría ya ha sido restaurada, esto indica que la temperatura de transición es baja a comparación de las que se encontraron para los demás casos, aunque es un resultado favorable. Suponiendo que da señales del fenómeno de la ICM y en un régimen de la temperatura más aceptable, hay algunos inconvenientes, el mayor problema radica en que el mínimo se encuentra en la región del potencial que es inaccesible para nosotros a este punto.

Aunque no conocer el potencial efectivo en todo su dominio ya representaba un inconveniente desde los análisis anteriores, en este caso es de mayor importancia. En principio, el potencial efectivo cerca del origen no puede ser graficado puesto que en los términos de los logaritmos, donde para esos valores de v , las masas dinámicas al cuadrado son negativas, esto resulta en valores complejos del potencial. Como una solución, al igual que para la parte térmica de los bosones neutros, en la contribución del vacío las masas también están apantalladas solo magnéticamente, debido a los diagramas de anillo, desde la ec. (6.103). En general es como introducir una masa efectiva para los bosones neutros. Recordemos

que en el vacío no hay correcciones térmicas. Sin embargo, como hemos mencionado antes, el campo magnético externo sí permea todo el espacio, incluyendo el vacío, permitiendo una autoenergía con correcciones debido al campo magnético. En específico, la contribución posible es la que corresponde a su interacción con los bosones cargados, dada en la ec. (6.134), obteniendo así las masas efectivas de los bosones neutros en el vacío como

$$m_{eff,\sigma}^2 = 3\lambda v^2 - a^2 + 2\Pi_{b,vac}(\mathbf{m}_\pi^2, B), \quad m_{eff,0}^2 = \lambda v^2 - a^2 + 2\Pi_{b,vac}(\mathbf{m}_\pi^2, B), \quad (7.15)$$

con \mathbf{m}_π^2 la masa física del pión al cuadrado. Estas masas efectivas toman siempre valores positivos, evitando que el potencial en el vacío se vuelva complejo. Para evitar que las correcciones del vacío modifiquen el mínimo, es necesario aplicar nuevamente las condiciones de estabilidad en el vacío. Redefinimos el vacío del potencial como

$$V_{\Pi}^{vac} = -\frac{a^2 + \delta a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{4}v^4 - hv \quad (7.16)$$

$$- \frac{(3\lambda v^2 - a^2 + 2\Pi_{b,vac}(\mathbf{m}_\pi^2, B))^2}{64\pi^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{2B}{3\lambda v^2 - a^2 + 2\Pi_{b,vac}(\mathbf{m}_\pi^2, B)} \right) \right)$$

$$- \frac{(\lambda v^2 - a^2 + 2\Pi_{b,vac}(\mathbf{m}_\pi^2, B))^2}{64\pi^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{2B}{\lambda v^2 - a^2 + 2\Pi_{b,vac}(\mathbf{m}_\pi^2, B)} \right) \right),$$

donde

$$\delta a^2 = \frac{1}{32f_\pi\pi^4} \left(-Bf_\pi\lambda^2 \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + B} \right) \left(4 + \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + \frac{\lambda B}{2\pi^2} \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + B} \right)} \right) \right) \right. \quad (7.17)$$

$$+ 3 \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + \frac{\lambda B}{2\pi^2} \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + B} \right)} \right) \left. + 2\pi^2 \left(2f_\pi^3(12\pi^2 - 5\lambda)\lambda \right. \right.$$

$$- 24h\pi^2 + 4a^2f_\pi(\lambda - 6\pi^2) + a^2\lambda f_\pi \left(\ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + \frac{\lambda B}{2\pi^2} \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + B} \right)} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + \frac{\lambda B}{2\pi^2} \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + B} \right)} \right) \right) \right),$$

y

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{h + a^2 f_\pi}{f_\pi^3} \right) + \frac{5\lambda^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\sigma^2 + \frac{\lambda B}{2\pi^2} \ln \left(\frac{2B}{\mathbf{m}_\pi^2 + B} \right)} \right), \quad (7.18)$$

donde las contribuciones térmicas son solución numérica a las expresiones dadas en las ecs. (6.35), (6.77) y (6.94), para bosones neutros, bosones cargados y fermiones, respectivamente.

Es así como definimos un potencial efectivo con corrección en el vacío

$$V_{\Pi}^{num} = V_{\Pi}^{vac} + V_{0,T}(3\lambda v^2 - a^2 + \Pi_\sigma, T) + V_{0,T}(\lambda v^2 - a^2 + \Pi_{\pi_0}, T)$$

$$+ V_{b,vac}(\lambda v^2 - a^2, B) + V_{b,T}(\lambda v^2 - a^2, T, B)$$

$$+ V_{f,vac}(gv, B) + V_{f,T}(gv, T, B). \quad (7.19)$$

Encontramos un potencial efectivo que es finito incluso en el origen. Podemos probar como se comporta para distintas temperaturas en en la Fig. 7.27, donde además de que vemos el potencial efectivo completo, notamos como el mínimo se acerca cada vez más al origen cuando la temperatura aumenta. Además, las temperaturas en las que la simetría está rota son pequeñas comparadas con análisis anteriores.

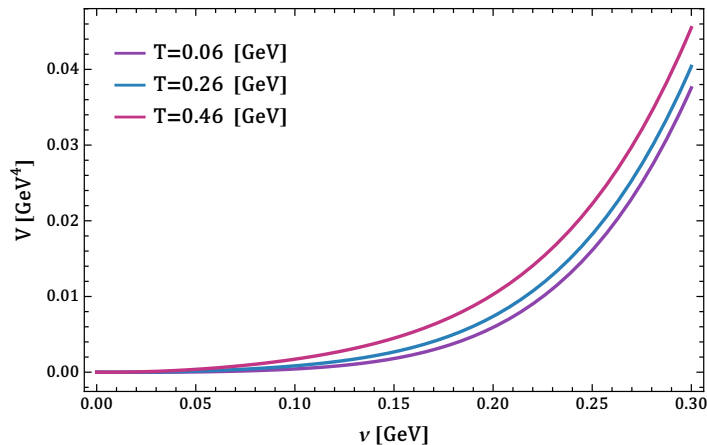


Fig. 7.27: Potencial efectivo numérico con corrección en el vacío V_{Π}^{num} como función de v , para distintas temperaturas a un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

En la Fig. 7.28 se grafica el potencial efectivo a una temperatura fija y con valores del campo magnético distintos, mostrando el comportamiento ya visto en la Fig. 7.26, donde el aumento del campo induce que el valor del mínimo se reduzca. La diferencia es que podemos ver el potencial cerca del origen, esto nos permitirá estudiar el comportamiento del mínimo de forma más precisa.

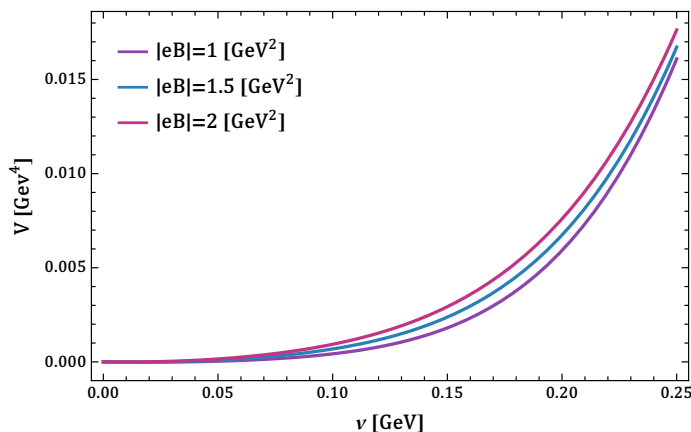


Fig. 7.28: Potencial efectivo numérico con corrección en el vacío V_{Π}^{num} como función de v a una temperatura fija $T = 0.1 \text{ GeV}$ para distintos valores del campo magnético $|eB| = 1, 1.5, 2 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

Luego de conocer el potencial efectivo con la nueva elección de parámetros, aunque el comportamiento del mínimo respecto de la temperatura tiende a la restauración más rápidamente conforme el campo magnético aumenta, el valor del mínimo tiende a cero. Esto ocurre para temperaturas bajas, por lo cual, ahora que el potencial efectivo cercano

al origen es accesible, podemos observar el mínimo del potencial como en la Fig. 7.29.

Todas las curvas parecen comportarse como un crossover que tiende hacia el origen. Esto podría deberse a que el término que contribuye para suceda una transición de primer orden no es dominante debido al valor de la constante de acoplamiento g .

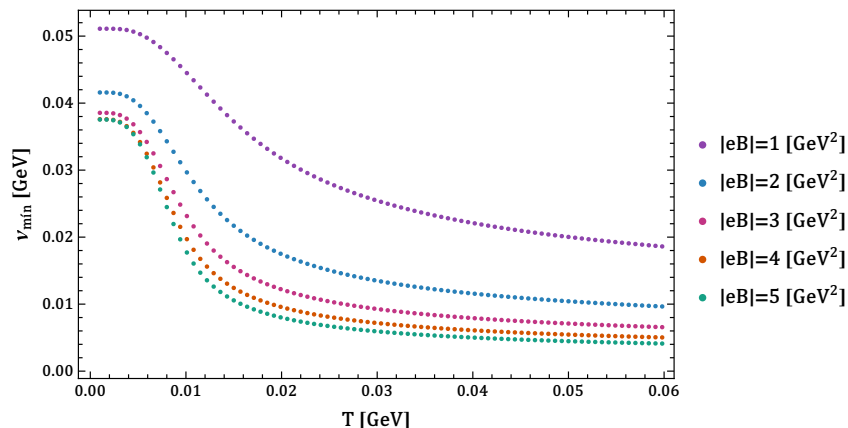


Fig. 7.29: Mínimo del potencial efectivo numérico con corrección en el vacío V_{Π}^{num} como función de la temperatura, para distintos valores fijos del campo magnético $|eB| = 1, 3, 5, 7, 9 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$.

De la Fig. 7.29 es más claro el comportamiento que habíamos notado desde el potencial. El campo magnético favorece la restauración de la simetría y la región de temperatura en la que ocurre la transición es a temperaturas bajas.

7.6. Masas autoconsistentes

La autoenergía es resultado de la contribución de las interacciones entre campos, que ocurren en la propagación de alguno de estos. Cumple la función de modificar la relación de dispersión, al incluir los efectos colectivos, esto se observa porque la autoenergía modifica a la masa dinámica al cuadrado del campo que se esté propagando. Para el análisis en este trabajo, esto resulta muy útil, porque en el LSMq, las masas dinámicas al cuadrado de los bosones pueden tomar valores negativos, lo cual nos impide tener acceso a todo el potencial efectivo parametrizado por v . Sin embargo, en cada uno de los casos antes abordados la autoenergía de las partículas es una función que va a depender de parámetros como la temperatura, en algunos casos del campo magnético, ciertas contribuciones del momento externo, pero para todos los casos siempre va a depender de las masas de los campos, como se lee en las ecs. (7.12) y (7.13). Esto quiere decir que en realidad tenemos un conjunto de ecuaciones autoconsistentes para la masa, del tipo

$$M^2 = m^2 + \Pi(M^2) \quad (7.20)$$

Para el caso de los bosones, tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones autoconsistentes de sus masas

$$M_\sigma^2(T, B) = 3\lambda v^2 - a^2 + \frac{3}{2}\Pi_0(M_\sigma^2, T) + \Pi_0(M_{\pi_0}^2, T) + 2\Pi_{b,vac}(M_{\pi_\pm}^2, B) \\ + 2\Pi_b(M_{\pi_\pm}^2, T, B) + 6\Pi_f(M_f, T, B), \quad (7.21)$$

$$M_{\pi_0}^2(T, B) = \lambda v^2 - a^2 + \Pi_0(M_\sigma^2, T) + \frac{3}{2}\Pi_0(M_{\pi_0}^2, T) + 2\Pi_{b,vac}(M_{\pi_\pm}^2, B) \\ + 2\Pi_b(M_{\pi_\pm}^2, T, B) + 6\Pi_f(M_f, T, B), \quad (7.22)$$

y

$$M_{\pi_\pm}^2(T, B) = \lambda v^2 - a^2 + \Pi_0(M_\sigma^2, T) + \Pi_0(M_{\pi_0}^2, T) + 2\Pi_{b,vac}(M_{\pi_\pm}^2, B) \\ + 2\Pi_b(M_{\pi_\pm}^2, T, B). \quad (7.23)$$

Para el caso de los fermiones, el cálculo de las correspondientes contribuciones a su autoenergía es altamente sofisticado y sale de la planeación de este trabajo. Sin embargo, proponemos un comportamiento fenomenológico para la que sería la masa efectiva de los fermiones de un factor η proporcional al campo magnético, de la siguiente forma

$$M_f = gv + \eta B. \quad (7.24)$$

Con esto en mente, definimos el potencial efectivo con masas autoconsistentes V_{sc} , escribiéndolo como

$$V_{sc} = V_{sc}^{vac} + V_{0,T}(M_\sigma^2(T, B), T) + V_{0,T}(M_{\pi_0}^2(T, B), T) \\ + V_{b,vac}(M_{\pi_\pm}^2(0, B), B) + V_{b,T}(M_{\pi_\pm}^2(T, B), T, B) \\ + V_{f,vac}(gv + \eta_0 B, B) + V_{f,T}(gv + \eta B, T, B), \quad (7.25)$$

a diferencia de la ec. (7.19), el vacío está corregido tanto para los bosones neutros, donde volvemos a aplicar las condiciones de estabilidad en el vacío usando las funciones obtenidas de las ecs. (7.21) y (7.22) a temperatura cero y encontrar V_{sc}^{vac} , como para los bosones cargados con la masa autoconsistente de los piones cargados de la ec.(7.23) a temperatura cero. Para los fermiones en el caso del vacío consideramos η_0 que corresponde simula a la contribución puramente magnética de la masa efectiva, a diferencia de η que simula la contribución termo-magnética. En la Fig. 7.30 graficamos el potencial efectivo para distintas temperaturas para confirmar como la temperatura sigue promoviendo que el valor del mínimo del potencial tienda a un menor valor y por tanto se esté restaurando la simetría.

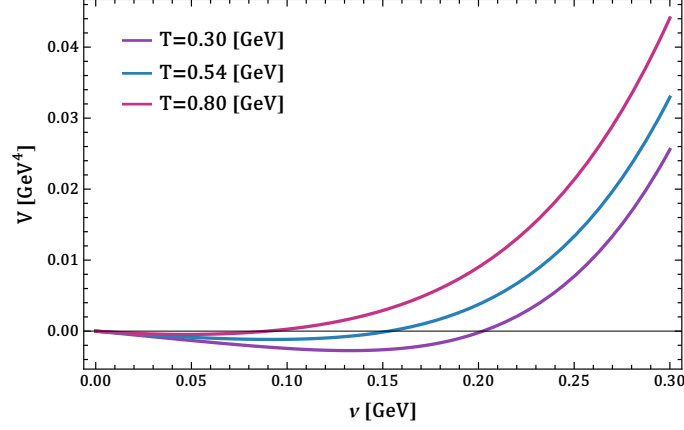


Fig. 7.30: Potencial efectivo numérico V_{sc} como función de v usando masas autoconsistentes, para distintas temperaturas a un campo magnético fijo $|eB| = 1 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$ y $\eta=0.1$.

En la Fig. 7.31, se muestra el potencial efectivo graficado para una temperatura alta de $T = 0.78 \text{ GeV}$ con tres valores distintos de campo magnético. Véase que si el campo magnético aumenta la curva del potencial crece más rápido, lo cual sugiere que la simetría se restaura a una menor temperatura.

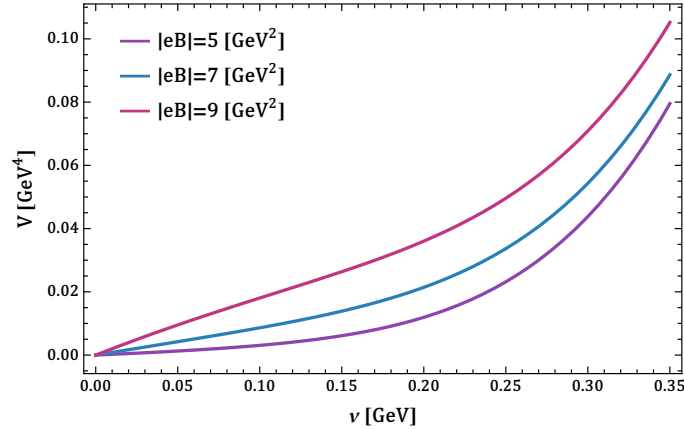


Fig. 7.31: Potencial efectivo numérico V_{sc} como función de v usando masas autoconsistentes, a una temperatura fija $T = 0.78 \text{ GeV}$ para distintos valores del campo magnético $|eB| = 5, 7, 9 \text{ GeV}^2$. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.33$ y $a = 0.309 \text{ GeV}$ y $\eta=0.1$.

Para analizar el mínimo del potencial, lo graficamos respecto de la temperatura para distintos valores fijos del campo magnético en la Fig. 7.32. Notamos que conforme el campo magnético aumenta la temperatura a la que el mínimo tiende a cero es menor y además para valores superiores de $|eB| = 5 \text{ GeV}^2$. El mínimo no cae suavemente sino que es discontinuo, encontrando un punto crítico terminal, es decir, que la transición pasa de ser un crossover a un primer orden.

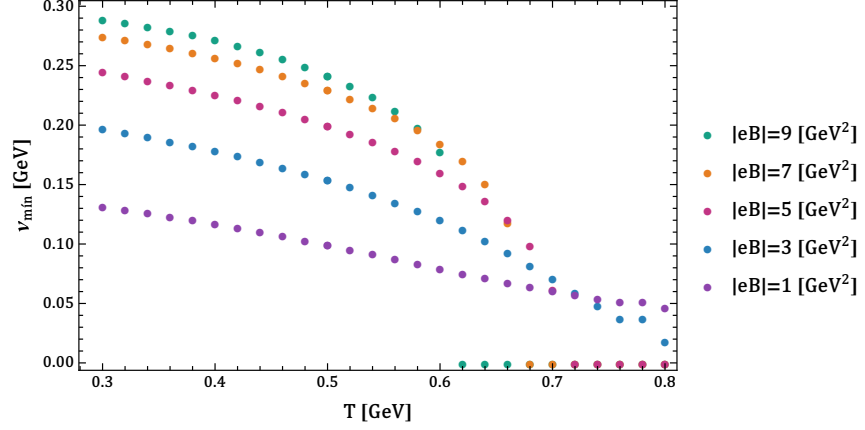


Fig. 7.32: Mínimo del potencial efectivo numèric con corrección en el vacío V_{Π}^{num} usando masas autoconsistentes, como función de la temperatura, para distintos valores fijos del campo magnético. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$ y $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$.

Graficamos el potencial efectivo para distintos valores de la intensidad del campo magnético, esta vez para tres distintas temperaturas. En la Fig. 7.33a a una temperatura por debajo de la temperatura de transición correspondiente a cada campo, vemos como el campo magnético está favoreciendo que se rompa la simetría. En la Fig. 7.33b a una temperatura cercana a la crítica, vemos un cruce entre las curvas del potencial, esto se puede interpretar como si el valor del mínimo crece conforme el campo crece hasta cierto valor y después comienza a decrecer. Finalmente, en la Fig. 7.33c, a una temperatura superior a la temperatura de transición, vemos como el valor del mínimo decrece conforme el campo magnético crece. El comportamiento del mínimo respecto del campo magnético es lo que vemos en la Fig. 4.2b, el cual describe el fenómeno de la IMC.

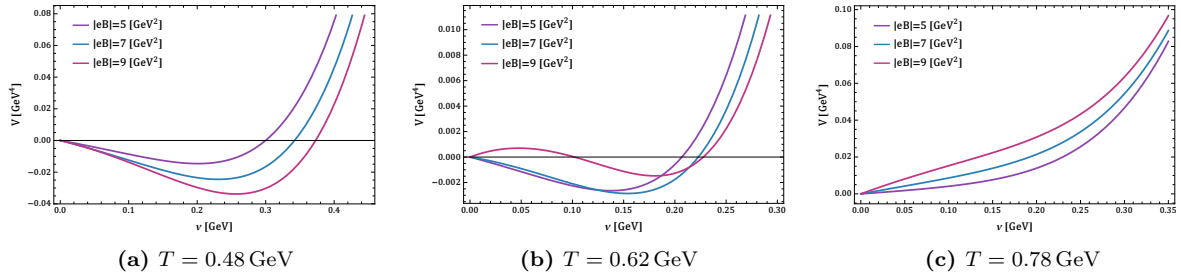


Fig. 7.33: Comparación entre el potencial efectivo V_{sc} como función de v usando masas autoconsistentes, en los casos donde la temperatura está fija, a la izquierda en $T = 0.48$ GeV, al centro en $T = 0.62$ GeV y a la derecha en $T = 0.78$ GeV, para distintos valores del campo magnético. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$, $a = 0.309$ GeV y $\eta=0.1$.

Para observar que en efecto cambia el tipo de transición, en la Fig. 7.30, observamos el potencial efectivo graficado para distintas temperaturas, cercanas a la temperatura de transición asociada a cada uno de los campos magnéticos fijos que tomamos. Para $|eB| = 1$ y 9 GeV², es fácil ver como corresponden a un crossover y un primer orden, respectivamente.

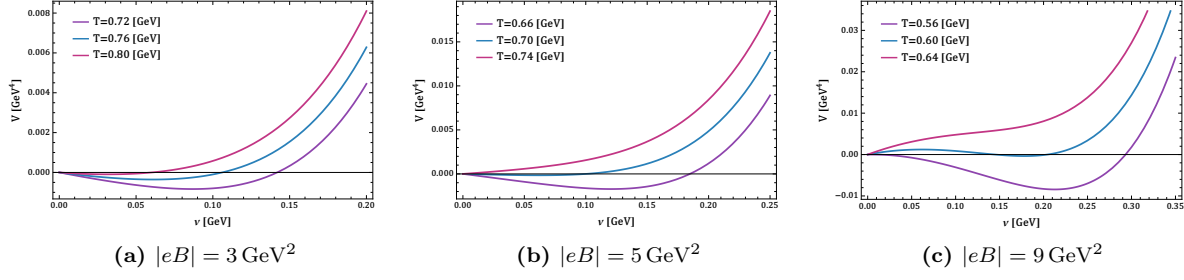


Fig. 7.34: Comparación entre el potencial efectivo V_{sc} como función de v usando masas autoconsistentes, en los casos donde el campo magnético está fijo, a la izquierda en $|eB| = 3 \text{ GeV}^2$, al centro en $|eB| = 5 \text{ GeV}^2$ y a la derecha en $|eB| = 9 \text{ GeV}^2$, para distintas temperaturas cercanas a la temperatura de transición de asociada a cada valor del campo magnético. Las constantes de acoplamiento y el parámetro de masa tienen los valores $\lambda = 13.32$, $g = 0.36$, $a = 0.309 \text{ GeV}$ y $\eta = 0.1$.

Como último y conclusivo paso, contruimos el diagrama de fase en el plano $T - |eB|$ y lo mostramos en la Fig. 7.35, donde graficamos la temperatura de transición como función de la intensidad del campo magnético.

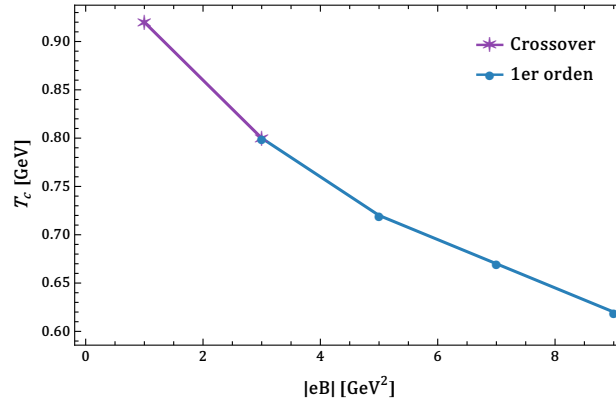


Fig. 7.35: Diagrama de fase efectivo en el plano $T - |eB|$, asociado al potencial efectivo con soluciones numéricas con masas autoconsistentes.

Este análisis, donde usamos el valor de la constante de acoplamiento g , con el cual por primer vez el campo promueve la restauración, la corrección de las masas en el vacío debido a efectos magnéticos y la implementación de las masas autoconsistentes, nos permitió encontrar un diagrama de fase en el plano $T - |eB|$ en el cual observamos como la temperatura de transición decrece conforme el campo magnético crece, donde la transición se da en temperaturas menores a $T = 1 \text{ GeV}$ y que hay un cambio de fase de crossover a un primer orden, todas estas características, son cercanas al comportamiento de los diagramas de fase en este plano que se han reportado en la literatura de LQCD. Es importante recalcar que este es el primer resultado exitoso con un modelo efectivo para reproducir todas las características de los diagramas de fase en el plano $T - |eB|$ que han reportado las distintas colaboraciones de LQCD.

poco confiables. Por este motivo, consideramos una mejor opción, generar el potencial efectivo directamente con soluciones numéricas, sin aproximaciones debido a las escalas energéticas. En este caso obtuvimos un diagrama de fase efectivo donde la temperatura de transición incrementa conforme crece el campo magnético y más importante, observamos por primera un cambio de un crossover a una transición de fase de primer orden para valores al rededor de $|eB|=5 \text{ GeV}^2$. Estos análisis nos motivaron a estudiar sistemáticamente como cada término del potencial modifica al comportamiento del potencial clásico. Encontramos dos hallazgos importantes, el término de vacío de los fermiones es responsable de encontrar una transición de primer orden y este término compite con el rompimiento explícito, de manera que el mínimo del potencial tiende a cero. El término térmico de los fermiones contribuye a romper la simetría, comportamiento que es más dominante que los términos que la restauran, explicando porqué la temperatura de transición crece. Este descubrimiento abre la posibilidad de probar distintas configuraciones en el conjunto de parámetros de la teoría, mostramos por primera vez como para algunos valores de la constante de acoplamiento g , la cual consideramos independiente de λ , el aumento en el campo magnético favorece la restauración de la simetría. Para tratar de remediar la limitante que conlleva que el potencial efectivo sea complejo para valores de v cercanos al origen, surge una solución la cual es considerar masas efectivas en el vacío, resultado del apantallamiento generado por el campo magnético. No obstante, un tratamiento más adecuado es incluir todas las correcciones cuánticas a los campos incluyendo el vacío, que es a través de trabajar con masas autoconsistentes. El diagrama de fase efectivo construido haciendo uso de estas últimas ideas dio resultados favorables, encontrando que su comportamiento es cualitativamente consistente con los resultados que reporta LQCD. La temperatura de transición decrece como función del campo, comenzando con un crossover y terminando con una transición de primer orden; esto nos indica que hay catálisis magnética inversa y existe un punto crítico terminal en el diagrama.

El diagrama de fase efectivo resultante del tratamiento autoconsistente, se basa en la idea de considerar correcciones cuánticas tanto térmicas como magnéticas en las masas de cada uno de los campos, para el caso de los fermiones la autoenergía no es conocida por lo cual se pensó sólo como un valor proporcional al campo magnético aunque en realidad este sea una función más compleja. Además se realizó el análisis con la configuración de parámetros con la cual probamos anteriormente que se favorecía la restauración de la simetría. Es así como encontramos una ruta abierta para trabajos futuros, por un lado el estudio del espacio de parámetros libres de la teoría, es decir, encontrar alguna configuración de λ , g y a que nos permitan encontrar un mejor resultado y por otro lado el cálculo explícito de la autoenergía de los fermiones y de esta forma obtener un diagrama de fase efectivo de la interacción fuerte más consistente en el marco del LSMq.

APÉNDICE A

FÓRMULAS DE REFERENCIA

Este apéndice recopila algunas de las fórmulas y conceptos que se usan con frecuencia en este trabajo.

A.1. Métrica de Minkowski

Cuando en este trabajo mencionemos que estamos trabajando con la métrica de Minkowski, esta es la convención que usamos

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A.2. Integración de loops

Para darle solución a las integrales de los loops se hace uso de algunos métodos, principalmente dos: la rotación de Wick y las integrales maestras, en d-dimensiones, en el espacio de Euclides de integrandos tipo propagadores de Feynman.

A.2.1. Rotación de Wick

Una herramienta para simplificar la integración es cambiar del espacio de Minkowski al espacio de Euclides, muy útil en el formalismo de Matsubara, esto se hace mediante la sustitución

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \ell^2 = -\ell_E^2, \quad (\text{A.2})$$

donde ℓ está en el espacio de momentos.

A.2.2. Fórmulas de integración

Las integrales d-dimensionales en el espacio de Euclides, tienen la solución general

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \quad (\text{A.4})$$

Cabe mencionar que las integrales d-dimensionales de potencias impares de ℓ son cero debido a que son funciones antisimétricas integradas sobre un dominio simétrico.

A.3. Matrices Gamma

Las matrices gamma, $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, son un conjunto de matrices que surgen de la ecuación de Dirac por lo cual también son conocidas como matrices de Dirac. Aparecen en las interacciones de QCD o de cualquier teoría que involucre campos fermiónicos de espín 1/2.

La matriz γ^5 se define como el producto de las cuatro matrices gamma donde además $(\gamma^5)^2 = \mathcal{I}$.

En la base de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otra elección común es la base de Weyl o quirial, en la que las γ^k tienen la misma forma pero no γ^0 , y γ^5 es diagonal

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0\sigma^k & \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

o en notación más compacta

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu \equiv (1, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma^i). \quad (\text{A.7})$$

Explícitamente, γ^0 y γ^5 en la base de Weyl toman la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Las matrices de Dirac obedecen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

Con las matrices de Dirac, aparece la notación slash de Feynman, que se define como

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu \quad (\text{A.10})$$

Las matrices gamma obedecen las siguientes identidades de traza

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots) &= 0 \text{ número impar de matrices} \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \\ \text{Tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Además, la matriz identidad en cuatro dimensiones y las $n \times n$ matrices de dimensión A y B , satisfacen

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A + B) &= \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \\ \text{Tr}(cA) &= c \text{Tr}(A) \\ \text{Tr}(\mathbf{I}_4) &= 4 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde c es una constante.

Para vectores arbitrarios de Lorentz a , b , tenemos

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3), \quad a_\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}.$$

Introducimos la notación

$$a^2 = a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2, \quad (\text{A.13})$$

donde

$$a_{\parallel} = (a^0, 0, 0, a^3) \quad , \quad a_{\perp} = (0, a^1, a^2, 0) , \quad (\text{A.14})$$

$$(ab)_{\parallel} = a^0 b^0 - a^3 b^3 \quad , \quad (ab)_{\perp} = a^1 b^1 + a^2 b^2, \quad (\text{A.15})$$

APÉNDICE B

EXPANSIÓN A ALTA TEMPERATURA

B.1. Bosones

Para calcular la corrección del potencial a 1-loop para bosones neutros en la aproximación a alta temperatura, se usa un método bien establecido en la literatura [64]. Vamos a partir con la expresión general

$$h_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}. \quad (\text{B.1})$$

Estas integrales satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dh_{n+1}}{dy} = -\frac{yh_{n-1}}{n}. \quad (\text{B.2})$$

La expansión a alta temperatura es obtenida usando la identidad

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2\pi\ell)^2}. \quad (\text{B.3})$$

Para $n = 1$, entonces tenemos una integral como

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} \\ &= \int_0^\infty dx \left(\frac{-1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \sum_{\ell} \frac{1}{x^2 + y^2 + (2\pi\ell)^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dado que la integral en la ec. (B.4) diverge, vamos a regular la expresión agregando en el numerador $x^{-\epsilon}$, donde $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(y) &= \frac{1}{2} \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sum_\ell \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + y^2 + (2\pi\ell)^2} \\
&= \frac{1}{2y} \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{1 + x^2/y^2}} - \sum_\ell \frac{1}{y^2 + (2\pi\ell)^2} \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{1 + x^2/(y^2 + (2\pi\ell)^2)} \\
&= I_\epsilon^1(y) - I_\epsilon^2(y),
\end{aligned} \tag{B.5}$$

sustituimos $x' = x/y$ en I_ϵ^1 y $x' = x/(y^2 + (2\pi\ell)^2)^{1/2}$ en $I_\epsilon^2(y)$, así

$$I_\epsilon^1(y) = \frac{1}{2} \int dx' \frac{(yx')^{-\epsilon}}{\sqrt{1 + x'^2}} = \frac{y^{-\epsilon}}{2} \int dx' \frac{x'^{-\epsilon}}{\sqrt{1 + x'^2}} = \frac{y^{-\epsilon} \Gamma(1/2 - \epsilon/2) \Gamma(\epsilon/2)}{4\sqrt{\pi}}, \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^2(y) &= \sum_\ell \frac{(y^2 + (2\pi\ell)^2)^{-1/2}}{y^2 + (2\pi\ell)^2} \int dx' \frac{((y^2 + (2\pi\ell)^2)^{1/2})^{-\epsilon}}{1 + x'^2} \\
&= \sum_\ell \frac{1}{(y^2 + (2\pi\ell)^2)^{1/2 + \epsilon/2}} \int dx' \frac{x'^{-\epsilon}}{1 + x'^2} = \sum_\ell \frac{\pi}{2(y^2 + (2\pi\ell)^2)^{1/2 + \epsilon/2}} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(y^2 + (2\pi\ell)^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} + \frac{1}{y^{1+\epsilon}} \right) \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2\pi\ell)^{1+\epsilon}} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\pi\ell)^2}\right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} + \frac{2}{(2\pi\ell)^{1+\epsilon}} - \frac{2}{(2\pi\ell)^{1+\epsilon}} \right) + \frac{1}{y^{1+\epsilon}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi\ell)^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\pi\ell)^2}\right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} - 1 \right) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\ell)^{1+\epsilon}} + \frac{1}{y^{1+\epsilon}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi\ell)^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\pi\ell)^2}\right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} - 1 \right) + \frac{2}{(2\pi)^{1+\epsilon}} \zeta(1 + \epsilon) + \frac{1}{y^{1+\epsilon}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$

$$I_\epsilon^1(y) = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{4} (\gamma_E + \ln(y^2) + \psi^{(0)}(1/2)), \tag{B.8}$$

$$I_\epsilon^2(y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \left(\frac{1}{\left(1 + y^2/(2\pi\ell)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln(4\pi^2) + \frac{\pi}{2y}. \tag{B.9}$$

Uniendo todo tenemos

$$I_\epsilon(y) = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{4} (\gamma_E + \ln(y^2) - \gamma_E - \ln(4)) - \frac{1}{2\epsilon} - \frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{4} \ln(4\pi^2)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi}{2y} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \left(\frac{1}{(1 + y^2/(2\pi\ell)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \\
& = -\frac{\pi}{2y} - \frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \left(\frac{1}{(1 + y^2/(2\pi\ell)^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

tomando que $y^2 \ll 1$, es decir una expansión en series de la suma

$$I_\epsilon(y) = -\frac{\pi}{2y} - \frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{y^2}{4(2\pi)^2\ell^3} - \frac{3y^4}{16(2\pi)^4\ell^5} + \mathcal{O}(y^6) \right), \tag{B.11}$$

y al sumar

$$I_\epsilon(y) = -\frac{\pi}{2y} - \frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{y^2}{16\pi^2} \right) + \frac{\zeta(3)}{4} \left(\frac{y}{2\pi} \right)^2 - \frac{3\zeta(5)}{16} \left(\frac{y}{2\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(y^6), \tag{B.12}$$

donde γ_E es la constante de Euler-Mascheroni y $\zeta(n)$ son valores de la función zeta de Riemann y $I_\epsilon(y) = -h_1(y)$.

B.2. Fermiones

Para fermiones existe un conjunto de ecuaciones completamente análogas al caso bosónico, lo único que cambia es que en lugar de tener las distribuciones de Bose-Einstein, ahora tenemos las distribuciones de Fermi-Dirac. Las integrales generales se expresan de la siguiente forma

$$f_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1}, \tag{B.13}$$

las cuales satisfacen de igual forma la ecuación diferencial la ec. (B.2), en este caso usando

$$\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2\ell\pi + \pi)^2}, \tag{B.14}$$

tenemos para $n = 1$

$$\begin{aligned}
f_1(y) &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1} \\
&= \int_0^\infty dx \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \sum_{\ell} \frac{1}{x^2 + y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2} \right).
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Regularizamos la integral incluyendo un término $x^{-\epsilon}$ en el denominador, resultando en

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(y) &= \frac{1}{2} \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sum_\ell \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2} \\
&= \frac{1}{2y} \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{1 + x^2/y^2}} - \sum_\ell \frac{1}{y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2} \int dx \frac{x^{-\epsilon}}{1 + \frac{x^2}{y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2}} \\
&= I_\epsilon^1(y) - I_\epsilon^2(y),
\end{aligned} \tag{B.16}$$

donde I_ϵ^1 es igual que en la ec. (B.8) y sustituimos $x' = x/(y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2)^{1/2}$ en $I_\epsilon^2(y)$, así

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^2(y) &= \sum_\ell \frac{(y^2 + (2\ell + 1)^2\pi^2)^{-1/2}}{y^2 + (2\ell + 1)^2\pi^2} \int dx' \frac{((y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2)^{1/2})^{-\epsilon}}{1 + x'^2} \\
&= \sum_\ell \frac{1}{(y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \int dx' \frac{x'^{-\epsilon}}{1 + x'^2} = \sum_\ell \frac{\pi}{2(y^2 + (2\ell\pi + \pi)^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(y^2 + (2\pi\ell + \pi)^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} + \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2\pi\ell + \pi)^{1+\epsilon}} \frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\ell\pi + \pi)^2}\right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} + \frac{2}{(2\ell\pi + \pi)^{1+\epsilon}} - \frac{2}{(2\ell\pi + \pi)^{1+\epsilon}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(2\ell\pi + \pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\ell\pi + \pi)^2}\right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} - 1 \right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(2\ell\pi + \pi)^{1+\epsilon}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \\
&= \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{(2\ell\pi + \pi)^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\ell\pi + \pi)^2}\right)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} - 1 \right) + \frac{2}{(2\pi)^{1+\epsilon}} \zeta\left(1 + \epsilon, \frac{3}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}}} \right\} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

Tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$

$$I_\epsilon^2(y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell + 1)} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{y^2}{(2\ell\pi + \pi)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{2\epsilon} - 1 + \frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{\pi}{2(y^2 + \pi^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{B.18}$$

Uniendo todo tenemos

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(y) &= \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{4} (\gamma_E + \ln(y^2) - \gamma_E - \ln(4)) - \frac{1}{2\epsilon} - \frac{\gamma_E}{2} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + 1 \\
&\quad - \frac{\pi}{2\sqrt{y^2 + \pi^2}} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \left(\frac{1}{(1 + y^2/(2\ell + 1)^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \\
&= -\frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{y^2}{\pi^2}\right) + 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{y^2 + \pi^2}} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1} \left(\frac{1}{(1 + \frac{y^2}{(2\ell + \pi)^2})^{\frac{1}{2}}} - 1 \right),
\end{aligned} \tag{B.19}$$

y finalmente obtenemos

$$I_\epsilon(y) = -\frac{\gamma_E}{2} - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{y^2}{\pi^2}\right) + \mathcal{O}(y^2). \tag{B.20}$$

BIBLIOGRAFÍA



- [1] S. Navas et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 110(3):030001, 2024.
- [2] Adam Miklos Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, Misha A. Stephanov, and J. J. M. Verbaarschot. On the phase diagram of QCD. *Phys. Rev. D*, 58:096007, 1998.
- [3] Dirk H. Rischke. The quark gluon plasma in equilibrium. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 52:197–296, 2004.
- [4] Y. Aoki, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabo. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature*, 443:675–678, 2006.
- [5] Kenji Fukushima and Tetsuo Hatsuda. The phase diagram of dense QCD. *Rept. Prog. Phys.*, 74:014001, 2011.
- [6] A. Bazavov et al. The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition. *Phys. Rev. D*, 85:054503, 2012.
- [7] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, A. Schäfer, and K. K. Szabo. The QCD phase diagram for external magnetic fields. *JHEP*, 02:044, 2012.
- [8] Edward Witten. Cosmic Separation of Phases. *Phys. Rev. D*, 30:272–285, 1984.
- [9] Edward V. Shuryak. Quantum Chromodynamics and the Theory of Superdense Matter. *Phys. Rept.*, 61:71–158, 1980.
- [10] E. R. Most, L. J. Papenfort, V. Dexheimer, M. Hanauske, S. Schramm, Horst Stöcker, and Luciano Rezzolla. Signatures of quark-hadron phase transitions in general-relativistic neutron-star mergers. *Phys. Rev. Lett.*, 122(6):061101, 2019.
- [11] Wit Busza, Krishna Rajagopal, and Wilke van der Schee. Heavy Ion Collisions: The Big Picture, and the Big Questions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 68:339–376, 2018.
- [12] Peter Braun-Munzinger, Volker Koch, Thomas Schäfer, and Johanna Stachel. Properties of hot and dense matter from relativistic heavy ion collisions. *Phys. Rept.*, 621:76–126, 2016.

- [13] Dmitri E. Kharzeev, Larry D. McLerran, and Harmen J. Warringa. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: 'Event by event P and CP violation'. *Nucl. Phys. A*, 803:227–253, 2008.
- [14] L. McLerran and V. Skokov. Comments about the electromagnetic field in heavy-ion collisions. *Nucl. Phys. A*, 929:184–190, 2014.
- [15] T. Vachaspati. Magnetic fields from cosmological phase transitions. *Phys. Lett. B*, 265:258–261, 1991.
- [16] Angel Sanchez, Alejandro Ayala, and Gabriella Piccinelli. Effective potential at finite temperature in a constant hypermagnetic field: Ring diagrams in the standard model. *Phys. Rev. D*, 75:043004, 2007.
- [17] Victoria M. Kaspi and Andrei Beloborodov. Magnetars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 55:261–301, 2017.
- [18] Sandro Mereghetti, José Pons, and Andrew Melatos. Magnetars: properties, origin and evolution. *Space Sci. Rev.*, 191(1-4):315–338, 2015.
- [19] P. Esposito, N. Rea, and G. L. Israel. Magnetars: a short review and some sparse considerations. *Astrophys. Space Sci. Libr.*, 461:97–142, 2020.
- [20] Roel Aaij et al. Centrality determination in heavy-ion collisions with the LHCb detector. *JINST*, 17(05):P05009, 2022.
- [21] Adam Bzdak and Vladimir Skokov. Event-by-event fluctuations of magnetic and electric fields in heavy ion collisions. *Phys. Lett. B*, 710:171–174, 2012.
- [22] V. Skokov, A. Yu. Illarionov, and V. Toneev. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions. *Int. J. Mod. Phys. A*, 24:5925–5932, 2009.
- [23] Julian S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, 1951.
- [24] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy. Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field. *Nucl. Phys. B*, 462:249–290, 1996.
- [25] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, and A. Schäfer. QCD quark condensate in external magnetic fields. *Phys. Rev. D*, 86:071502, 2012.
- [26] M. Ferreira, P. Costa, O. Lourenço, T. Frederico, and C. Providência. Inverse magnetic catalysis in the (2+1)-flavor Nambu-Jona-Lasinio and Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio models. *Phys. Rev. D*, 89(11):116011, 2014.
- [27] Alejandro Ayala, M. Loewe, and R. Zamora. Inverse magnetic catalysis in the linear sigma model with quarks. *Phys. Rev. D*, 91(1):016002, 2015.
- [28] Alejandro Ayala, M. Loewe, Ana Julia Mizher, and R. Zamora. Inverse magnetic catalysis for the chiral transition induced by thermo-magnetic effects on the coupling constant. *Phys. Rev. D*, 90(3):036001, 2014.

- [29] Aritra Bandyopadhyay and Ricardo L. S. Farias. Inverse magnetic catalysis: how much do we know about? *Eur. Phys. J. ST*, 230(3):719–728, 2021.
- [30] W. Dittrich and M. Reuter. *Effective Lagrangians in quantum electrodynamics*, volume 220. 1985.
- [31] Hideki Yukawa. On the Interaction of Elementary Particles I. *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, 17:48–57, 1935.
- [32] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [33] Murray Gell-Mann. The Eightfold Way: A theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [34] Yuval Ne’eman. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nucl. Phys.*, 26:222–229, 1961.
- [35] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, 8:214–215, 1964.
- [36] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. 1964.
- [37] Martin Breidenbach, Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall, Elliott D. Bloom, D. H. Coward, H. C. DeStaebler, J. Drees, Luke W. Mo, and Richard E. Taylor. Observed behavior of highly inelastic electron-proton scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, 1969.
- [38] Elliott D. Bloom et al. High-Energy Inelastic e p Scattering at 6-Degrees and 10-Degrees. *Phys. Rev. Lett.*, 23:930–934, 1969.
- [39] G. Hanson et al. Evidence for jet structure in hadron production by e+ e- annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1609–1612, 1975.
- [40] D. P. Barber et al. Discovery of three jet events and a test of Quantum Chromodynamics at PETRA energies. *Phys. Rev. Lett.*, 43:830, 1979.
- [41] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [42] H. Fritzsche, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture. *Phys. Lett. B*, 47:365–368, 1973.
- [43] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 98(3):030001, 2018.
- [44] Mattia Bruno, Mattia Dalla Brida, Patrick Fritzsche, Tomasz Korzec, Alberto Ramos, Stefan Schaefer, Hubert Simma, Stefan Sint, and Rainer Sommer. QCD Coupling from a Nonperturbative Determination of the Three-Flavor Λ Parameter. *Phys. Rev. Lett.*, 119(10):102001, 2017.
- [45] Massimo D’Elia, Lorenzo Maio, Francesco Sanfilippo, and Alfredo Stanzione. Phase diagram of QCD in a magnetic background. *Phys. Rev. D*, 105(3):034511, 2022.

- [46] K. Nagata. Finite-density lattice QCD and sign problem: Current status and open problems. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 127:103991, 2022.
- [47] G. Aarts et al. Phase transitions in particle physics: results and perspectives from Lattice Quantum Chromo-Dynamics. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 133:104070, 2023.
- [48] J. S. Schwinger. A theory of the fundamental interactions. *Annals Phys.*, 2:407–434, 1957.
- [49] Murray Gell-Mann and M Levy. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, 16:705, 1960.
- [50] Yoichiro Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. 1. *Phys. Rev.*, 122:345–358, 1961.
- [51] Yoichiro Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. *Phys. Rev.*, 124:246–254, 1961.
- [52] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in (2+1)-dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3499–3502, 1994. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 76, 1005 (1996)].
- [53] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy. Dimensional reduction and dynamical chiral symmetry breaking by a magnetic field in (3+1)-dimensions. *Phys. Lett. B*, 349:477–483, 1995.
- [54] V. Voronyuk, V. D. Toneev, W. Cassing, E. L. Bratkovskaya, V. P. Konchakovski, and S. A. Voloshin. (Electro-)Magnetic field evolution in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev. C*, 83:054911, 2011.
- [55] James Daniel Brandenburg, Wangmei Zha, and Zhangbu Xu. Mapping the electromagnetic fields of heavy-ion collisions with the Breit-Wheeler process. *Eur. Phys. J. A*, 57(10):299, 2021.
- [56] M. I. Abdulhamid et al. Observation of the electromagnetic field effect via charge-dependent directed flow in heavy-ion collisions at the Relativistic Heavy Ion Collider. *Phys. Rev. X*, 14(1):011028, 2024.
- [57] Ashok K. Das. *Finite temperature field theory*. World Scientific, New York, 1997.
- [58] M. Strickland. *Relativistic Quantum Field Theory, Volume 3*. IOP, 11 2019.
- [59] Joseph I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [60] J. C. Collins. *Renormalization : An introduction to renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, volume 26 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [61] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

- [62] W. H. Furry. A symmetry theorem in the positron theory. *Phys. Rev.*, 51:125–129, 1937.
- [63] Alejandro Ayala, Ricardo L. S. Farias, L. A. Hernández, Ana Julia Mizher, Javier Rendón, Cristian Villavicencio, and R. Zamora. Magnetic field dependence of the neutral pion longitudinal screening mass in the linear sigma model with quarks. *Phys. Rev. D*, 109(7):074019, 2024.
- [64] L. Dolan and R. Jackiw. Symmetry Behavior at Finite Temperature. *Phys. Rev. D*, 9:3320–3341, 1974.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00152

Matrícula: 2223804753

Diagrama de fase efectivo de la interacción fuerte en presencia de campos magnéticos extremos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 28 del mes de mayo del año 2025 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA MAGNANI
DR. WOLFGANG PETER BIETENHOLZ
DR. LUIS ALBERTO HERNANDEZ ROSAS



ANA GABRIELA VARGAS FERNANDEZ
ALUMNA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: ANA GABRIELA VARGAS FERNANDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA
MAGNANI

VOCAL

DR. WOLFGANG PÉTER BIETENHOLZ

SECRETARIO

DR. LUIS ALBERTO HERNANDEZ ROSAS