

# UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA  
UNIDAD IZTAPALAPA



CASA ABIERTA AL TIEMPO

ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES  
PERIODICOS Y RESONANCIA PARAMETRICA

TESIS DE MAESTRIA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

**CUTBERTO SALVADOR ROMERO MELENDEZ**

DIRECTORES: DR. ERNESTO PEREZ CHAVELA

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

MEXICO, D. F.

ABRIL DE 1995

**A mi Madre.  
A la memoria de mi Padre.**

### **Agradecimientos**

Agradezco ampliamente a Joaquín Delgado Fernández y a Ernesto Pérez Chavela, directores de la tesis, todas sus atenciones, su paciencia y sus consejos, los cuales hicieron posible la realización de este trabajo.

Agradezco a Ernesto Lacomba Zamora, a Peter Seibert Kopp y a Federico Sánchez Bringas su labor de revisión de la tesis y sus valiosos consejos.

Finalmente, agradezco a Marina, Alaide e Hiram su comprensión por el tiempo que no les dediqué, elaborando este trabajo.

# Índice de Contenido

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Motivación y ejemplos</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Introducción . . . . .   | 1         |
| 1.2 Oscilaciones mecánicas: vibraciones en una membrana elíptica . . . . . | 2         |
| 1.3 Sistemas eléctricos oscilantes . . . . .                               | 6         |
| <b>2 Estabilidad</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1 Introducción . . . . .   | 9         |
| 2.2 Ejemplos . . . . .   | 12        |
| 2.3 Teoría de Floquet . . . . .  | 12        |
| 2.4 Estabilidad de órbitas periódicas . . . . .                            | 20        |
| 2.5 La ecuación variacional . . . . .                                      | 20        |
| <b>3 La Ecuación de Hill</b>   | <b>23</b> |
| 3.1 Enunciado del teorema principal . . . . .                              | 23        |
| 3.2 Demostración del teorema principal . . . . .                           | 24        |
| <b>4 La Ecuación de Mathieu</b>  | <b>39</b> |
| 4.1 Introducción . . . . .   | 39        |
| 4.2 Propiedades de las soluciones . . . . .                                | 40        |
| 4.3 Las funciones de Mathieu . . . . .                                     | 41        |
| 4.4 Coexistencia . . . . .   | 44        |
| 4.5 Cálculo de las regiones de estabilidad . . . . .                       | 46        |
| 4.6 Regiones de estabilidad y fracciones continuadas . . . . .             | 52        |
| 4.7 La ecuación de Mathieu amortiguada . . . . .                           | 54        |
| 4.8 Pulsos periódicos. El péndulo paraméricamente perturbado . . . . .     | 56        |
| <b>5 Un caso no-lineal de la ecuación de Mathieu</b>                       | <b>65</b> |
| 5.1 Introducción . . . . .   | 65        |
| 5.2 El mapeo de avance a un período . . . . .                              | 66        |
| 5.3 Estabilidad y mapeos que preservan área . . . . .                      | 67        |
| 5.4 El caso integrable . . . . .   | 68        |
| 5.4.1 Integrales Elípticas Completas . . . . .                             | 70        |
| 5.5 El caso no integrable . . . . .  | 74        |
| 5.5.1 El teorema Twist de Moser . . . . .                                  | 75        |
| 5.5.2 El teorema de Poincaré- Birkhoff . . . . .                           | 77        |

## INTRODUCCION

En el presente trabajo se estudian dos aspectos relevantes de las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos: estabilidad y resonancia paramétrica. Este último es un fenómeno que aparece en la clase de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos denominada *ecuación de Hill*, y por lo tanto, en una subclase llamada *ecuación de Mathieu*.

La ecuación de Mathieu tiene sus orígenes en el trabajo de E. Mathieu acerca de los modos de vibración de una membrana estrecha con frontera elíptica, publicado en 1868. En 1886, G. W. Hill publicó una memoria sobre el movimiento medio del perigeo lunar, mediante una ecuación de Mathieu generalizada. Desde entonces, estas ecuaciones han aparecido en una gran variedad de fenómenos físicos oscilatorios de mecánica, teoría de circuitos, astronomía, conductividad eléctrica en metales, etc.

En el capítulo 1 de este trabajo se presentan ejemplos de ecuaciones de Mathieu. El capítulo 2 está dedicado a los aspectos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos: en el marco de la teoría de Floquet se estudia la estabilidad de las órbitas periódicas. En el capítulo 3 se demuestra que los valores del parámetro de la ecuación de Hill dividen al eje real en intervalos alternantes de estabilidad e inestabilidad. El capítulo 4 trata de la ecuación de Mathieu. Ahí se analizan algunas propiedades de las soluciones de esta ecuación, tales como periodicidad y coexistencia. Se prueba que el plano formado por los dos parámetros que aparecen en la ecuación de Mathieu está dividido en regiones alternantes de estabilidad e inestabilidad y se realiza el cálculo de estas regiones por los métodos de Parámetros Restringidos y de Fracciones Continuadas. También se efectúan estos mismos cálculos para la ecuación de Mathieu amortiguada y para la ecuación de Mathieu que describe el comportamiento de un péndulo cuyo punto de soporte está sometido a una serie de pulsos periódicos. Se obtienen además los valores de resonancia paramétrica de la ecuación de Mathieu. Finalmente, en el capítulo 5 se analiza la estabilidad del origen de un caso no-lineal de la ecuación de Mathieu. Mediante el teorema de la forma normal de Birkhoff se dan condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del origen. Utilizando este teorema y el Teorema Twist de Moser se describe la dinámica alrededor de los puntos fijos elípticos de las curvas invariantes, cuya existencia asegura la teoría KAM. También en este capítulo se obtienen los valores de resonancia paramétrica para la ecuación mencionada.

A una ecuación como ésta se le conoce como *Ecuación de Hill*.

Investigaremos los valores de  $\omega$  para los cuales la solución de esta ecuación son estables o inestables. Las condiciones de estabilidad e inestabilidad estarán determinadas por relaciones entre los parámetros. Las regiones en el plano  $\omega - \epsilon$  que determinan esas relaciones se denominan *regiones de estabilidad e inestabilidad*. Conviene observar que en la ecuación de Hill ocurre el fenómeno de *resonancia paramétrica*, que puede describirse de la siguiente manera: cuando una fuerza que varía periódicamente con el tiempo actúa sobre una masa, en forma tal que tiende a regresarla a una posición de equilibrio, proporcionalmente a la separación de la masa de esa posición de equilibrio, se espera que eventualmente la masa permanezca en una vecindad de la posición de equilibrio. Cuando esto sucede, podría pensarse que aumentando la fuerza, más rápidamente la masa permanecerá en una vecindad de la posición de equilibrio, sin embargo, esto no sucede necesariamente. Un incremento de la fuerza puede ocasionar que la masa oscile con una amplitud cada vez más grande, alejándose irremediablemente de la posición de equilibrio. La resonancia paramétrica aparece cuando se establece una relación entre los parámetros de la ecuación de Hill, que ocasiona la pérdida de la estabilidad. En el capítulo 3 daremos una descripción precisa de este fenómeno.

## 1.2 Oscilaciones mecánicas: vibraciones en una membrana elíptica

Consideremos una membrana uniforme, elipsoidal y con frontera rígida de la forma:

$$\Gamma = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

El movimiento vibratorio que describe la membrana es un movimiento sinusoidal en dos dimensiones. Sea  $m$  la masa de la membrana por unidad de área,  $\tau$  su tensión radial por unidad de arco suponiendo la tensión uniforme y  $\zeta$  su desplazamiento normal respecto al plano que define su posición de equilibrio; el desplazamiento  $\zeta = \zeta(t, x, y)$ , para pequeñas oscilaciones, satisface la ecuación de onda en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{m}{\tau} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.1)$$

con la condición a la frontera

$$\zeta(t, x, y) = 0, \quad \text{si } (x, y) \in \Gamma,$$

y condiciones iniciales

$$\zeta(0, x, y) = u_0(x, y) \quad \frac{\partial \zeta(0, x, y)}{\partial t} = u_1(x, y).$$

Suponiendo que la vibración se realiza con frecuencia  $p$ , los *modos normales de vibración* son las soluciones de la forma

$$\zeta_p(t, x, y) = u(x, y)e^{ipt}, \quad (1.2.2)$$

donde  $u(x, y)$  satisface la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{m}{\tau} p^2 u = 0 \quad (1.2.3)$$

Sea  $\xi_0 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} a &= h \cosh \xi_0 \\ b &= h \sinh \xi_0, \end{aligned}$$

así, para  $\xi \in (-\xi_0, \xi_0)$ , tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} \cos^2 \eta + \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh^2 \xi_0} \sin^2 \eta < 1,$$

puesto que

$$\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh^2 \xi_0} < 1;$$

esto significa que  $(x, y)$  está en el interior de la elipse. Si  $\xi = \pm \xi_0$ , entonces  $(x, y)$  es un punto en la elipse, por lo tanto, debemos imponer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} F(-\xi_0) &= F(\xi_0) = 0, \\ F'(-\xi_0) &= F'(\xi_0) = 0, \end{aligned}$$

y las condiciones para los modos normales con simetría radial

$$\begin{aligned} G(0) &= G(\pi), \\ G'(0) &= G'(\pi), \end{aligned}$$

o, en general, las condiciones

$$\begin{aligned} G(0) &= G(2\pi), \\ G'(0) &= G'(2\pi). \end{aligned}$$

De las ecuaciones (1.2.4) notamos que

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta + \pi) &= -x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta + \pi) &= -y(\xi, \eta), \end{aligned}$$

es decir, la transformación  $\eta \mapsto \eta + \pi$  lleva a la transformación  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ , la cual es una simetría radial, así las soluciones  $G(\eta)$  de período  $\pi$  corresponden a los modos normales con simetría radial. Además debido a la  $2\pi$ -periodicidad del seno y del coseno, sólo las soluciones del período  $2\pi$  dan soluciones consistentes  $u(x, y)$ .

Haciendo la sustitución indicada en (1.2.6), la ecuación (1.2.5) se transforma en

$$G(\eta) \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} + F(\xi) \frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} + \frac{h^2 m p^2}{\tau} (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) F(\xi) G(\eta) = 0,$$

o equivalentemente, en

$$G(\eta) \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} + F(\xi) G(\eta) \frac{h^2 m p^2}{\tau} \cosh^2 \xi = - \left[ F(\xi) \frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} - F(\xi) G(\eta) \frac{h^2 m p^2}{\tau} \cos^2 \eta \right],$$

es decir,

$$\frac{1}{F(\xi)} \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} + \frac{h^2 m p^2}{\tau} \cosh^2 \xi = - \left[ \frac{1}{G(\eta)} \frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} - \frac{h^2 m p^2}{\tau} \cos^2 \eta \right].$$

la cual tiene soluciones para un conjunto discreto de valores de  $\bar{\lambda}$ , es decir, de  $p$ .

La ecuación (1.2.8) puede escribirse en la forma de una *ecuación de Mathieu*:

$$\frac{d^2 G}{d\eta^2} + (\lambda - \mu \cos 2\eta)G = 0.$$

### 1.3 Sistemas eléctricos oscilantes

Como segundo ejemplo, consideremos un circuito eléctrico que consta de una resistencia  $R$ , una autoinductancia  $L$  y un capacitor cuya capacitancia  $C$  varía periódicamente con el tiempo en la forma

$$C = \frac{C_0}{1 + m \cos \omega t},$$

en donde  $0 < m < 1$ ,  $C_0$  es constante y  $\omega$  es la frecuencia de cambio del circuito. Un circuito con estas características se llama *oscilante*.

Según la Ley de Kirchoff, la carga  $q(t)$  satisface la ecuación

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0,$$

es decir

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC_0} (1 + m \cos \omega t) q = 0 \quad (1.3.1)$$

En el caso  $m = 0$ , si  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC_0}$ , existen soluciones de la forma

$$q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega_1 t + \varphi),$$

o bien,

$$q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} \text{sen}(\omega_1 t + \varphi),$$

en donde

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{L} \right)^2 = \frac{1}{LC_0} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{L} \right)^2$$

y  $\omega_0$  es la frecuencia natural de oscilación, es decir, cuando no hay amortiguamiento ni forzamiento. Lo anterior sugiere la búsqueda de soluciones de la forma

$$q(t) = x(t) e^{-\frac{R}{2L} t},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \left( \frac{dx}{dt} - \frac{R}{2L} x \right) e^{-\frac{R}{2L} t}, \\ \frac{d^2 q}{dt^2} &= \left( \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{R^2}{4L^2} x \right) e^{-\frac{R}{2L} t} \end{aligned}$$

sustituyendo en (1.3.1) y cancelando el factor exponencial, tenemos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{R^2}{4L^2} x + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} - \frac{R^2}{2L^2} x + \frac{1}{LC_0} (1 + m \cos \omega_1 t) x = 0$$





**Teorema 2.2** (*Existencia global de soluciones de sistemas no-autónomos*). Sea  $f : I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $I \subset \mathbf{R}$  intervalo abierto, una función Lipchitziana uniformemente en  $I$ . Entonces existe una única solución  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de la ecuación (2.1.1)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x})$$

tal que  $t \in I$ .

Vayamos ahora a las definiciones de estabilidad:

i) **Estabilidad de Liapunov.**

Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto crítico del sistema (2.1.1), es decir, un punto que satisface, para cierto  $\tau$ ,

$$f(t, \mathbf{x}_0) = 0, \quad \text{para } t \geq \tau.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathbf{x}_0(t) \equiv 0$ .

Decimos que la solución trivial  $\mathbf{x}_0 : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de la ecuación (2.1.1) es *estable* si se cumple la siguiente condición:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon, \tau) > 0 : \forall \mathbf{x}(t) \text{ solución de (2.1) : } |\mathbf{x}(\tau)| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t)| < \epsilon, \quad \forall t \geq \tau \quad (2.1.3).$$

en donde  $|\cdot|$  es una norma apropiada. Si  $\mathbf{x}_0$  no cumple la condición (2.1.3), se dice que es *inestable*.

Se dice que el origen  $\mathbf{x}_0$  es *asintóticamente estable*, si  $\mathbf{x}_0$  es estable y si además se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = 0, \quad (2.1.4)$$

para toda solución  $\mathbf{x}(t)$  que satisfaga la condición (2.1.3).

Si en la condición (2.1.3) ocurre que  $\delta$  es función únicamente de  $\epsilon$  se dice que el origen es *uniformemente estable*.

Para sistemas autónomos la *estabilidad del origen implica la estabilidad uniforme*, ya que  $\tau$  puede trasladarse al origen, porque si  $\mathbf{x}(t)$  es una solución, entonces  $\mathbf{x}(t + \tau)$  es también una solución, debido a la invariancia de soluciones bajo translaciones.

ii) **Estabilidad Orbital.**

En los sistemas autónomos, los cuales son invariantes con respecto a translaciones del tiempo, existe un tipo de estabilidad relativa a las órbitas de las soluciones:

Considérese el sistema autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) \quad (2.1.5)$$

Dada una solución  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación (2.1.5), denotemos por  $\gamma$  a la semitrayectoria a partir de un tiempo  $t_0$  fijo.

## 2.2 Ejemplos

Veamos algunos ejemplos.

1. Considérese el sistema lineal

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= 0,\end{aligned}$$

el cual tiene como matriz fundamental de soluciones a

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Debido a que  $\mathbf{X}(t)$  no es acotada, por la proposición 2.2, el origen del sistema es inestable, sin embargo, el sistema es orbitalmente estable, pues las órbitas en el plano  $XY$  son rectas horizontales.

2. Sea el sistema

$$\begin{aligned}x' &= -y(x^2 + y^2) \\y' &= x(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Las trayectorias en el plano fase son círculos con centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = c,$$

y por lo tanto el sistema es orbitalmente estable, sin embargo, la única solución Liapunov-estable es el origen. Nótese que haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= r \cos(r^2 t + \phi) \\y &= r \operatorname{sen}(r^2 t + \phi)\end{aligned}$$

el sistema se transforma en

$$\begin{aligned}r' &= 0 \\ \phi' &= 0\end{aligned}$$

cuyo retrato fase en el plano  $r\phi$  está formado por puntos críticos, teniéndose estabilidad de Liapunov para todas las soluciones. Este ejemplo también ilustra la no-invariancia de la estabilidad de Liapunov bajo transformación de coordenadas.

## 2.3 Teoría de Floquet

En este apartado expondremos los resultados básicos relativos a sistemas lineales con coeficientes periódicos, dirigidos al estudio de la estabilidad del origen.

Consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (2.3.1)$$

en donde  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  y  $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$  es una matriz  $\tau$ -periódica:

$$\mathbf{A}(t + \tau) = \mathbf{A}(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(\mathbf{X}(t)) &= \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \cdots & x'_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}(t)x_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}(t)x_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}(t)x_{i1} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}(t)x_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}(t)x_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}(t)x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
&+ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}(t)x_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{ni}(t)x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}(t)x_{in} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\det(\mathbf{X}(t)) = a_{11}\det(\mathbf{X}(t)) + a_{22}\det(\mathbf{X}(t)) + \cdots + a_{nn}\det(\mathbf{X}(t)) = \operatorname{tr}[\mathbf{A}(t)]\det(\mathbf{X}(t))$$

Finalmente, integrando la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tr}[\mathbf{A}(t)]x$$

en el intervalo  $[0, \tau]$ , obtenemos (2.3.3).

Observemos que cualesquiera dos operadores de monodromía del sistema (2.3.1) son similares:

En efecto, si  $\mathbf{Y}(t)$  es otra matriz fundamental de soluciones de (2.3.1), tal que

$$\mathbf{Y}(t + \tau) = \mathbf{Y}(t)\mathcal{N},$$

en donde  $\mathcal{N}$  es no-singular, entonces existe una matriz  $\mathbf{D}$  no-singular, tal que

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{D},$$

**Demostración.** Supóngase que  $\mathbf{C}$  está en su forma canónica de Jordán:

$$\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_p),$$

en donde

$$\mathbf{C}_j = \lambda_j \mathbf{I} + \mathbf{R}_j$$

con  $\lambda_j \neq 0$ ,  $\mathbf{I}$  la identidad, y

$$\mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ para } 1 \leq j \leq p.$$

Sea  $m$  el índice de nilpotencia de  $\mathbf{R}_j$ , es decir, el mínimo entero, tal que

$$\mathbf{R}_j^k = 0, \quad \forall k \geq m$$

Por la forma de la matriz  $\mathbf{C}$ , basta probar que para todo  $j \in \{1, \dots, p\}$  existe una matriz constante  $\mathbf{B}_j$ , tal que

$$\mathbf{C}_j = e^{\mathbf{B}_j}.$$

Para cada  $j \in \{1, \dots, p\}$ , escribamos

$$\mathbf{C}_j = \lambda_j(\mathbf{I} + \mathbf{R}_j/\lambda_j)$$

y definamos

$$\mathbf{B}_j := (\log \lambda_j)\mathbf{I} + \mathbf{S}_j,$$

en donde

$$\mathbf{S}_j = - \sum_{k=1}^{m-1} (-\mathbf{R}_j)^k / k \lambda_j^k$$

Obsérvese que a partir del desarrollo de  $\log(1+t)$  cerca de  $t=0$ :

$$\log(1+t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k},$$

podemos escribir

$$\mathbf{S}_j = \log(\mathbf{I} + \mathbf{R}_j/\lambda_j),$$

entonces

$$e^{\mathbf{B}_j} = e^{\log(\lambda_j)} e^{\mathbf{S}_j} = \lambda_j(\mathbf{I} + \mathbf{R}_j/\lambda_j) = \mathbf{C}_j$$

como se quería. Si  $\mathbf{C}$  no está en su forma canónica de Jordán, existen una matriz no-singular  $\mathbf{C}$  y una matriz  $\mathbf{C}'$  en su forma canónica de Jordán, tales que

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P};$$

**Proposición 2.6** *El número  $\lambda$  es un exponente característico del sistema (2.3.1) si y sólo si existe una solución no nula de (2.3.1) de la forma  $e^{\lambda t}\mathbf{p}(t)$ , en donde  $\mathbf{p}(t)$  es  $\tau$ -periódica (o bien  $2\tau$ -periódica, pero no  $\tau$ -periódica). Por lo tanto el sistema (2.3.1) tiene una solución  $\tau$ -periódica (o bien  $2\tau$ -periódica, pero no  $\tau$ -periódica) si y sólo si tiene un multiplicador característico  $\rho = 1$  (o bien  $\rho = -1$ ).*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{p}(t)$ , con  $\mathbf{p}(t + \tau) = \mathbf{p}(t)$ , una solución del sistema (2.3.1).

Por el teorema de Floquet, existe  $\mathbf{x}_0$  tal que

$$e^{\lambda t}\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}\mathbf{x}_0,$$

en donde  $\mathbf{B}$  es una matriz constante que satisface  $\mathcal{M} = e^{\mathbf{B}}$  y  $\mathbf{P}(t)$  es una matriz  $\tau$ -periódica. De esta igualdad para  $t + \tau$  obtenemos

$$e^{\lambda t}\mathbf{p}(t)e^{\lambda\tau}\mathbf{I} = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{B}\tau}\mathbf{x}_0,$$

es decir,

$$\mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}\mathbf{x}_0e^{\lambda\tau}\mathbf{I} = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{B}\tau}\mathbf{x}_0,$$

o sea

$$\mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}[e^{\mathbf{B}\tau} - e^{\lambda\tau}\mathbf{I}]\mathbf{x}_0 = 0$$

de donde

$$\det(e^{\mathbf{B}\tau} - e^{\lambda\tau}\mathbf{I}) = 0,$$

lo cual prueba que  $\lambda$  es un exponente característico de (2.3.1).

Por otro lado, sea  $\lambda$  un valor propio de  $\mathbf{B}$ , tal que  $\lambda$  sea un exponente característico del sistema (2.3.1). Tenemos

$$\det(\mathbf{X}(\tau) - e^{\lambda\tau}\mathbf{I}) = 0,$$

y por la proposición 2.3, ésto equivale a

$$\det(e^{\mathbf{B}\tau} - e^{\lambda\tau}\mathbf{I}) = 0.$$

Sea  $\mathbf{x}_0 \neq 0$ , tal que

$$(e^{\mathbf{B}\tau} - e^{\lambda\tau}\mathbf{I})\mathbf{x}_0 = 0.$$

Por el teorema de Floquet, existe una matriz  $\tau$ -periódica  $\mathbf{P}(t)$ , tal que  $\mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}\mathbf{x}_0$  es solución de (2.3.1); esto significa que  $\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_0e^{\lambda t}$  es solución de (2.3.1). Por lo anterior, el multiplicador característico  $\rho = 1$  corresponde a las soluciones de período  $\tau$  y el multiplicador  $\rho = -1$  corresponde a las soluciones del período  $2\tau$ . En efecto,

$$\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda\tau} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{P}(t + \tau)\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t)$$

$$\rho = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda\tau} = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t + 2\tau) = \mathbf{P}(t + 2\tau)\mathbf{x}_0(e^{\lambda\tau})^2 = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_0(-1)^2 = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t).$$

Esto demuestra la proposición. ■

Obsérvese que si  $\rho$  es una de las raíces  $\kappa$ -ésimas de la unidad, existen soluciones periódicas de período  $\kappa\tau$  para el sistema (2.3.1).

## 2.4 Estabilidad de órbitas periódicas

En el presente apartado aplicaremos los resultados anteriores al estudio de la estabilidad de una solución periódica  $\mathbf{p}(t)$  de un sistema general

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.4.1)$$

en donde  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  y  $\mathbf{f}$  es una función de clase  $C^\infty$  en un dominio  $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ .

Obsérvese que *una condición necesaria para que el sistema (2.4.1) tenga soluciones periódicas de período  $\tau$ , es que la función  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  sea periódica de período  $\tau$  en  $t$* . En efecto, sea  $\mathbf{p}(t)$  una solución  $\tau$ -periódica de (2.4.1), entonces  $\mathbf{p}'(t)$  es también  $\tau$ -periódica y

$$\mathbf{p}'(t + \tau) = \mathbf{f}(t + \tau, \mathbf{p}(t + \tau)) = \mathbf{f}(t + \tau, \mathbf{p}(t)) = \mathbf{p}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{p}(t)),$$

por lo tanto,

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{p}(t)) = \mathbf{f}(t + \tau, \mathbf{p}(t));$$

sin embargo, la condición anterior no es suficiente, como se observa en el sistema

$$\frac{dx}{dt} = (1 + \sin t)\mathbf{x},$$

el cual no tiene soluciones no trivialmente periódicas (este sistema es elementalmente integrable). Por lo anterior, supondremos en lo sucesivo que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es  $\tau$ -periódica en  $t$ .

## 2.5 La ecuación variacional

Con el fin de reducir el estudio de la estabilidad de una solución periódica  $\mathbf{p}(t)$  de la ecuación (2.4.1) al estudio de la estabilidad de la solución  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$  de un sistema lineal, consideremos la siguiente transformación de coordenadas

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t), \quad (2.5.1)$$

supondremos que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \mathbf{p})$  puede desarrollarse en serie de potencias de  $\mathbf{y}$ , para  $|\mathbf{y}(t)|$  suficientemente pequeña y arbitraria. Sustituyendo las nuevas coordenadas en (2.4.1) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \mathbf{p})$$

y por ser  $\mathbf{p}(t)$  solución de (2.4.1) resulta

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \mathbf{p}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{p})$$

Al desarrollar obtenemos

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{p}(t)} \mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2). \quad (2.5.2)$$

**Teorema 2.11** *Sea  $\mathbf{p}(t)$  una solución  $\tau$ -periódica del sistema autónomo (2.5.5). Si el multiplicador característico  $\rho = 1$  de la ecuación de primera variación del sistema (2.4.1), con respecto a esa solución tiene multiplicidad 1, y todos los demás multiplicadores característicos tienen módulo menor que 1, entonces el origen del sistema (2.4.1) es orbitalmente asintóticamente estable.*

en donde

$$C(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\phi(t) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Sea

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbf{X}(0) = I$$

una matriz fundamental de soluciones de (3.1.1). Como sabemos, los multiplicadores característicos de  $\mathbf{X}(t)$  son las raíces de la ecuación

$$\det(\mathbf{X}(\tau) - \rho I) = 0,$$

es decir, de la ecuación

$$(y_1(\tau)\dot{y}_2(\tau) - \dot{y}_1(\tau)y_2(\tau)) - \rho(y_1(\tau) + \dot{y}_2(\tau)) + \rho^2 = 0,$$

la cual, en vista de (2.3.4) y de que  $\text{tr}(C(a) + \mathbf{A}(t)) = 0$ , es equivalente a

$$\rho^2 - ((y_1(\tau) + \dot{y}_2(\tau))\rho + 1) = 0.$$

Definiendo la función

$$\mathbf{B}(a) := \frac{y_1(\tau) + \dot{y}_2(\tau)}{2} = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{X}(\tau)),$$

la ecuación característica es

$$\rho^2 - 2\mathbf{B}(a)\rho + 1 = 0,$$

cuyas raíces son

$$\rho_{1,2} = \mathbf{B}(a) \pm \sqrt{\mathbf{B}^2(a) - 1} \tag{3.1.3}$$

Por (2.3.4), considerando como  $\mathbf{A}$  a la matriz  $(\mathbf{A}+C)$ , tenemos  $\rho_1\rho_2 = 1$  y por el teorema 2.7 el sistema (3.1.1) es estable sólo si

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1 \tag{3.1.4}$$

## 3.2 Demostración del teorema principal

En lo que sigue presentaremos los resultados necesarios para demostrar el teorema principal referente a la existencia de intervalos alternantes de estabilidad e inestabilidad de la ecuación (3.1.1).

**Lema 3.1** *Si  $\text{Im}(a) \neq 0$ , entonces el sistema (3.1.1) es inestable*

**Demostración.** Por (3.1.3), basta probar que si  $\text{Im}(a) \neq 0$ , entonces ningún multiplicador característico tiene módulo 1.

Sea  $a = \alpha + i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ . Sea  $\rho$  un multiplicador característico de (3.1.1) cuyo módulo sea 1. Por la proposición (2.5), la solución correspondiente es  $\mathbf{y}(t) = e^{i\lambda t}\mathbf{p}(t)$ , con  $\mathbf{p}(t) \neq 0$  y  $\tau$ -periódica. Escribamos

$$e^{i\lambda t}\mathbf{p}(t) = u + iv$$



Por la proposición 2.5, por cada exponente característico correspondiente a cada multiplicador característico tenemos una solución de la forma

$$e^{\lambda t} \mathbf{p}(t), \quad \text{con} \quad \mathbf{p}(t + \tau) = \mathbf{p}(t),$$

la cual es periódica. Estas soluciones son linealmente independientes como puede verificarse fácilmente, luego, cualquier solución de (3.1.1) es cuasi-periódica, probando así (b).

Si  $a \in \mathbf{R}$  y  $\mathbf{B}^2(a) > 1$ , entonces  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son reales y,  $\rho_1 < 1$ ,  $\rho_2 > 1$ , por lo tanto, el sistema tiene una solución estable y otra inestable, es decir, tiene una solución no acotada. Esto completa la demostración. ■

Un intervalo  $I \subset \mathbf{R}$  es llamado un *a-intervalo de estabilidad (resp. inestabilidad) de la ecuación* (3.1.1), si para todo  $a \in I$ , la ecuación (3.1.1) es estable (resp. inestable).

Del Lema 3.3 se sigue que la transición de un *a-intervalo de estabilidad* a un *a-intervalo de inestabilidad* está determinada por la ecuación  $\mathbf{B}^2(a) = 1$ .

El problema básico de la estabilidad de la ecuación de Hill consiste en encontrar los valores de  $a$  para los cuales  $\mathbf{B}^2(a) = 1$ , y estudiar el comportamiento de la función  $\mathbf{B}(a)$  en una vecindad de tales valores.

**Lema 3.4** *Si  $a + \phi(t) \leq 0 \forall t \in [0, \tau]$ , entonces existe una solución no acotada de la ecuación (3.1.1). Si además,  $a + \phi(t) \not\equiv 0$ , entonces  $\mathbf{B}(a) > 1$ .*

**Demostración.** Sea  $a_0 = \min\{a \in \mathbf{R} | a + \phi(t) \leq 0, \forall t \in [0, \tau]\}$ . ( $a_0$  está bien definida, pues  $\phi(t)$  es periódica y continua, por lo tanto, es acotada). Probaremos que si  $a < a_0$ , entonces  $\mathbf{y}_1(t, a)$  es no-acotada para  $t \rightarrow +\infty$ . Sea  $a < a_0$ . Sea  $\psi(t) = -(a + \phi(t))$ ,  $\forall t \in [0, \tau]$ . Así,  $\psi(t) > 0 \forall t \in [0, \tau]$ . Reescribamos la ecuación (3.1.1):

$$\ddot{\mathbf{y}} = \psi(t)\mathbf{y} \tag{3.2.1}$$

Sea  $\mathbf{y}_1(t)$  solución de (3.1.1), tal que  $\mathbf{y}_1(0) = 1$  y  $\dot{\mathbf{y}}_1(0) = 0$ . De (3.2.1) y  $\mathbf{y}_1(0) = 1$  obtenemos  $\ddot{\mathbf{y}}_1(0) > 0$ , con lo cual tenemos, por la continuidad de  $\dot{\mathbf{y}}_2$ , que  $\dot{\mathbf{y}}_1(t) > 0$ , para toda  $t$  suficientemente pequeña y positiva. Sea  $\epsilon > 0$  el ínfimo del conjunto  $S$  de ceros positivos de  $\dot{\mathbf{y}}_1(t)$ . Veamos que  $\epsilon$  no existe y que por lo tanto,  $\dot{\mathbf{y}}_1(t) > 0, \forall t \in [0, \tau]$ .

Puesto que  $\epsilon = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ ,  $s_n \in S$ , de la continuidad de  $\dot{\mathbf{y}}_1(t)$  resulta que

$$\dot{\mathbf{y}}_1(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{\mathbf{y}}_1(s_n) = 0.$$

Ahora bien, de (3.2.1) obtenemos

$$[\dot{\mathbf{y}}_1(t)]^2 = 2 \int_0^t \psi(t)\mathbf{y}_1(t)\dot{\mathbf{y}}_1(t)dt. \tag{3.2.2}$$

En particular, para  $t = \epsilon$ ,

$$[\dot{\mathbf{y}}_1(\epsilon)]^2 = 2 \int_0^\epsilon \psi(t)\mathbf{y}_1(t)\dot{\mathbf{y}}_1(t)dt. \tag{3.2.3}$$

Observemos que  $\dot{\mathbf{y}}_1(t) \geq 0, \forall t \in [0, \epsilon]$ , y puesto que  $\mathbf{y}_1(0) = 1$ , tenemos  $\mathbf{y}_1(t) > 0, \forall t \in (0, \epsilon)$ . Además  $\psi(t) > 0, \forall t \in (0, \epsilon)$  y, por definición de  $\epsilon$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_1(t) > 0, \forall t \in (0, \epsilon)$ , por lo tanto, el integrando en (3.2.2) es positivo y, por consiguiente, el lado derecho de la ecuación (3.2.3) es positivo, mientras

El siguiente lema nos muestra que el intervalo de inestabilidad  $(-\infty, a^*)$  es acotado superiormente. Utilizaremos en su demostración el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [10]:

*Toda función entera de orden fraccional tiene una infinidad de ceros.*

**Lema 3.6** *Las funciones  $\mathbf{B}(a) - 1$  y  $\mathbf{B}(a) + 1$  tienen un número infinito de ceros reales:*

$$\{a_0 < a_1 < \dots\} \quad y \quad \{a_1^* < a_2^* < \dots\},$$

respectivamente, los cuales satisfacen  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^* = \infty$

**Demostración.** Probemos que  $\mathbf{B}(a)$  es una función entera de orden  $\frac{1}{2}$  utilizando el Método de Picard.

Sea  $\mathbf{X}(t)$  una matriz fundamental de soluciones de (3.1.2) tal que  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ .  $\mathbf{X}(t)$  satisface entonces la ecuación integral

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{I} + \int_0^t [C(a) + \mathbf{A}(s)]\mathbf{X}(s)ds$$

Definimos la sucesión  $\{\mathbf{X}^{(k)}(t)\}_{k \in \mathbf{Z}^+}$  como sigue:

$$\mathbf{X}^{(0)}(t) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)}(t) = \mathbf{I} + \int_0^t [C(a) + \mathbf{A}(s)]\mathbf{X}^{(k)}(s)ds$$

Puede probarse por inducción en  $k$ :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}^{(k)}(t) = [C(a) + \mathbf{A}(t)]^k$$

y, al desarrollar  $\mathbf{X}^{(k)}(t)$  en serie de potencias en  $t = 0$ , obtenemos

$$\mathbf{X}^{(k)}(t) = \mathbf{I} + [C(a) + \mathbf{A}(0)]t + \frac{1}{2!}[C(a) + \mathbf{A}(0)]^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!}[C(a) + \mathbf{A}(0)]^k t^k.$$

Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{U}$  compactos de  $\mathbf{R}$ , tales que  $a \in \mathcal{V}$  y  $t \in \mathcal{U}$ . Sea  $\alpha = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \{ |C(a) + \mathbf{A}(t)| : a \in \mathcal{V} \text{ y } t \in \mathcal{U} \}$ .

Veamos que la sucesión  $\{\mathbf{X}^{(k)}(t)\}_{k \in \mathbf{N}} = \{\mathbf{X}^{(k)}(t, a)\}_{k \in \mathbf{N}}$  converge uniformemente  $\forall t \in \mathcal{U}$  y  $a \in \mathcal{V}$ . Existe  $\beta > 0$ , que no depende de  $k$ , tal que

$$\beta |\mathbf{X}_{ij}^{(k)}(t)| \leq \|\mathbf{X}^{(k)}(t)\|;$$

de donde tenemos, utilizando el desarrollo anterior para  $\mathbf{X}^{(k)}(t)$ ,

$$\beta |\mathbf{X}_{ij}^{(k)}(t, a)| \leq 1 + \alpha t + \dots + \frac{1}{k!} \alpha^k t^k \leq e^{\alpha t}$$

Se sigue también de la primera desigualdad

$$\beta |\mathbf{X}_{ij}^{(k+1)}(t, a) - \mathbf{X}_{ij}^{(k)}(t, a)| \leq \|\mathbf{X}^{(k+1)}(t, a) - \mathbf{X}^{(k)}(t, a)\| \leq \frac{1}{(k+1)!} \alpha^{k+1} t^{k+1}, \leq e^{\alpha t}$$

luego, de (3.2.3)

$$|y_1(t, a)| \leq |\cos \omega t| + \int_0^t \frac{1}{|\omega|} |\operatorname{sen} \omega(t-s)| |\phi(s)| |y_1(s, a)| ds,$$

por lo tanto

$$|y_1(t, a)| \leq e^{|\omega|t} + K \int_0^t e^{|\omega|(t-s)} |y_1(s, a)| ds, \quad \text{con } t \in [0, \tau], \quad (3.2.9)$$

en donde  $|\phi(t)| \leq K, \forall t \in \mathbf{R}$ . Definiendo  $z(t) := e^{-|\omega|t} |y_1(t, a)|$ , por (3.2.5) tenemos

$$z(t) \leq 1 + K \int_0^t z(s) ds$$

Por la desigualdad de Gronwall [1], resulta

$$z(t) \leq e^{Kt} \leq e^{K\tau}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \tau,$$

es decir,

$$|y_1(t, a)| \leq e^{K\tau} e^{|\omega|t}, \quad \text{con } 0 \leq t \leq \tau.$$

Análogamente se demuestra para la segunda solución

$$|y_2(t, a)| \leq e^{K\tau} e^{|\omega|t}, \quad \text{con } 0 \leq t \leq \tau.$$

De (3.2.6), procediendo como se hizo anteriormente, se demuestra

$$|\dot{y}_2(t, a)| \leq e^{K\tau} e^{|\omega|t}, \quad \text{con } 0 \leq t \leq \tau,$$

por lo tanto, ya que  $\mathbf{B}(a) = \frac{1}{2} (y_1(\tau, a) + \dot{y}_2(\tau, a))$ , tenemos

$$|\mathbf{B}(a)| \leq e^{K\tau} e^{|\omega|t},$$

es decir,

$$|\mathbf{B}(a)| e^{-|a|^{\frac{1}{2}} t} \leq e^{K\tau},$$

para  $|a|$  suficientemente grande, por lo tanto, se satisface la primera condición de la definición 3.5. para  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Probemos la segunda condición de la definición 3.5. Para tal efecto, supongamos que

$$\phi(t) \leq -1, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Si esta desigualdad no se cumpliera, se reemplaza  $\phi(t)$  por  $\phi(t) - M - 1$ , en donde  $M$  es una cota para  $\phi(t)$ , y se reemplaza  $a$  por  $a + M + 1$  en la ecuación (3.1.1). Elegimos  $a < 0$  y escribimos  $\sqrt{a} = i\mu$ , con  $\mu > 0$ . Nótese que  $\omega^2 = -\mu^2$ . Hemos probado en el lema 3.4 que

$$y_1(t, a) > 1 \quad \text{y} \quad \dot{y}_2(t, a) > 1 \quad \text{para } t > 0$$

Definamos ahora

$$\mathbf{B}'(a) := \frac{d}{da} \mathbf{B}(a)$$

y utilicemos la siguiente notación para las componentes al tiempo  $t = \tau$  de la matriz fundamental  $\mathbf{X}(t)$  del sistema (3.1.1):

$$\alpha = \alpha(a) = \mathbf{y}_1(\tau, a); \beta = \beta(a) = \mathbf{y}_2(\tau, a); \dot{\alpha} = \dot{\alpha}(a) = \dot{\mathbf{y}}_1(\tau, a) \text{ y } \dot{\beta} = \dot{\beta}(a) = \dot{\mathbf{y}}_2(\tau, a)$$

Tenemos el siguiente resultado

**Lema 3.7** *La función  $\mathbf{B}(a)$  satisface la ecuación*

$$4[\mathbf{B}^2(a) - 1] = (\alpha - \beta)^2 + 4\dot{\alpha}\dot{\beta}$$

**Demostración.** Empecemos por observar que dado el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda), \quad \text{con } \lambda \text{ parámetro} \tag{3.2.10}$$

la matriz  $\frac{\partial \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \lambda)}{\partial \lambda}$ , satisfaciendo la condición

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

es solución de la siguiente ecuación llamada *ecuación variacional*

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t_0, t_0, \lambda), \lambda)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \lambda))}{\partial \lambda}$$

lo cual puede verificarse directamente derivando la ecuación (3.2.10) implícitamente con respecto a  $\lambda$  y haciendo  $\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}$ . Sea  $\mathbf{X}(t, a) = \mathbf{X}(t)$  una matriz fundamental de soluciones del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{C}(a)]\mathbf{x}$ . Puesto que  $\det \mathbf{X}(t) = 1$ , tenemos

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_2(t) & -\mathbf{y}_2(t) \\ -\dot{\mathbf{y}}_1(t) & \mathbf{y}_1(t) \end{pmatrix}$$

Escribiendo el sistema en (3.1.2) en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, a),$$

en donde  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, a) = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{C}(a)]\mathbf{x}$ , tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(0, 0, a), a)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) + \mathbf{C}(a)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0), a)}{\partial a} = \frac{\partial \mathbf{C}(a)}{\partial a} \mathbf{x}$$

En forma similar, de la ecuación (3.2.13), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{y}_1}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{y}_2}{\partial a^2} \\ \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{y}}_1}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{y}}_2}{\partial a^2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(\tau) & \mathbf{y}_2(\tau) \\ \dot{\mathbf{y}}_1(\tau) & \dot{\mathbf{y}}_2(\tau) \end{pmatrix} \cdot \int_0^\tau \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_2(s) & -\mathbf{y}_2(s) \\ -\dot{\mathbf{y}}_1(s) & \mathbf{y}_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial a} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}_1}{\partial a} & \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}_2}{\partial a} \end{pmatrix} ds$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}_1(\tau, a)}{\partial a^2} = 2\mathbf{y}_1(\tau, a) \int_0^\tau \mathbf{y}_2(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_1(s, a)}{\partial a} ds - 2\mathbf{y}_2(\tau, a) \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_1(s, a)}{\partial a} ds \quad (3.2.18)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{y}}_2(\tau, a)}{\partial a^2} = 2\dot{\mathbf{y}}_1(\tau, a) \int_0^\tau \mathbf{y}_2(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_2(s, a)}{\partial a} ds - 2\dot{\mathbf{y}}_2(\tau, a) \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_2(s, a)}{\partial a} ds \quad (3.2.19)$$

Por la definición de  $\mathbf{B}(a)$ , con la notación introducida en la pág.32, tenemos  $2\mathbf{B}(a) = \alpha + \dot{\beta}$ , y por la definición de  $\mathbf{B}(A)$ ,  $2\mathbf{B}'(a) = \frac{\partial \mathbf{y}_1(\tau, a)}{\partial a} + \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}_2(\tau, a)}{\partial a}$ . Por (3.2.14) y (3.2.17)

$$2\mathbf{B}'(a) = (\alpha - \dot{\beta}) \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, a) \mathbf{y}_2(s, a) ds - \beta \int_0^\tau \mathbf{y}_1^2(s, a) ds + \dot{\alpha} \int_0^\tau \mathbf{y}_2^2(s, a) ds \quad (3.2.20)$$

y por (3.2.18) y (3.2.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}''(a) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{y}_1(\tau, a)}{\partial a^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{y}}_2(\tau, a)}{\partial a^2} = \alpha \int_0^\tau \mathbf{y}_2(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_1(\tau, a)}{\partial a} ds - \beta \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_1(\tau, a)}{\partial a} ds \\ &\quad + \dot{\alpha} \int_0^\tau \mathbf{y}_2(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_2(\tau, a)}{\partial a} ds - \dot{\beta} \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, a) \frac{\partial \mathbf{y}_2(\tau, a)}{\partial a} ds \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbf{B}''(a) = \alpha \int_0^\tau \mathbf{y}_2 \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial a} ds - \beta \int_0^\tau \mathbf{y}_1 \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial a} ds + \dot{\alpha} \int_0^\tau \mathbf{y}_2 \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial a} ds - \dot{\beta} \int_0^\tau \mathbf{y}_1 \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial a} ds. \quad (3.2.21)$$

Por otro lado, puesto que  $\det \mathbf{X}(t) = \alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\beta = 1$ , resulta

$$4(\mathbf{B}^2(a) - 1) = 4 \left[ \left( \frac{\alpha + \dot{\beta}}{2} \right)^2 - 1 \right] = 4 \left[ \left( \frac{\alpha + \dot{\beta}}{2} \right)^2 - (\alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\beta) \right],$$

es decir,

$$4(\mathbf{B}^2(a) - 1) = (\alpha - \dot{\beta})^2 + 4\dot{\alpha}\dot{\beta}. \quad (3.2.22)$$

■

**Lema 3.8** a) Sea  $b$  una raíz de  $\mathbf{B}(a) - 1 = 0$ , tal que  $\mathbf{B}'(b) \leq 0$ , entonces existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $\mathbf{B}'(a) < 0$  en  $(b, b + \delta_1)$ . Además si existe  $c_1 > b$  tal que  $\mathbf{B}'(c_1) = 0$  y  $\mathbf{B}'(a) < 0$  en  $(b, c_1)$ , entonces existe  $c^*$  en  $(b, c_1)$  tal que  $\mathbf{B}(c^*) \leq -1$ .

b) Sea  $b^*$  una raíz de  $\mathbf{B}(a) + 1 = 0$ , tal que  $\mathbf{B}'(b^*) \geq 0$ , entonces existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $\mathbf{B}'(a) > 0$  en  $(b^*, b^* + \delta)$ . Además, si existe  $c_2 > b^*$  tal que  $\mathbf{B}'(c_2) = 0$  y  $\mathbf{B}'(a) > 0$  en  $(b^*, c_2)$ , entonces existe  $c$  en  $(b^*, c_2)$  tal que  $\mathbf{B}(c) \geq 1$ .

Por lo tanto

$$\mathbf{B}'(b) = \left( \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, b) \mathbf{y}_2(s, b) ds \right)^2 - \left( \int_0^\tau \mathbf{y}_1^2(s, b) ds \right) \left( \int_0^\tau \mathbf{y}_2^2(s, b) ds \right).$$

Por ser  $\mathbf{y}_1$  y  $\mathbf{y}_2$  linealmente independientes y por la desigualdad de Schwartz,  $\mathbf{B}'(b) < 0$ , lo cual significa que la función  $\mathbf{B}(a)$  alcanza un máximo en  $b$ , luego debe existir  $\delta_1 > 0$  tal que  $\mathbf{B}'(a) < 0 \forall a \in (b, b + \delta_1)$ , probando la primera parte de (a). Demostremos la segunda parte por reducción al absurdo. Supóngase que existe  $c^* \in \mathbf{R}$ , tal que  $\mathbf{B}'(a) < 0 \forall a \in (b, c^*)$  y tal que

$$\mathbf{B}'(c^*) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(c^*) > -1;$$

entonces  $\mathbf{B}^2(c^*) - 1 < 0$ , y por (3.2.22)

$$4\dot{\alpha}(c^*)\beta(c^*) < 0,$$

por lo tanto,  $\dot{\alpha}(c^*) \neq 0$ . También de (3.2.22)

$$\dot{\alpha}\beta = (\mathbf{B}^2 - 1) - \frac{1}{4}(\alpha - \dot{\beta})^2$$

y multiplicando la ecuación (3.2.20) por  $\dot{\alpha}$  obtenemos

$$\begin{aligned} 2\dot{\alpha}\mathbf{B}'(a) &= \alpha\dot{\alpha} \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, b) \mathbf{y}_2(s, b) ds - \dot{\alpha}\dot{\beta} \int_0^\tau \mathbf{y}_1(s, b) \mathbf{y}_2(s, b) ds \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha - \dot{\beta})^2 \int_0^\tau \mathbf{y}_1^2(s, b) ds - (\mathbf{B}^2 - 1) \int_0^\tau \mathbf{y}_1^2(s, b) ds + (\dot{\alpha})^2 \int_0^\tau \mathbf{y}_2^2(s, b) ds, \end{aligned}$$

es decir, si  $a$  es tal que  $\dot{\alpha}(a) \neq 0$ , entonces

$$2\dot{\alpha}\mathbf{B}'(a) = \int_0^\tau \left[ \dot{\alpha}\mathbf{y}_2(s, b) + \frac{1}{2}(\alpha - \dot{\beta})\mathbf{y}_1(s, b) \right]^2 ds - (\mathbf{B}^2 - 1) \int_0^\tau \mathbf{y}_1^2(s, b) ds.$$

Puesto que  $\mathbf{B}^2(c^*) - 1 < 0$ , se tiene que  $2\dot{\alpha}\mathbf{B}'(a) > 0$ . Y ya que  $\dot{\alpha}(c^*) \neq 0$ , resulta  $\mathbf{B}'(c^*) \neq 0$ , lo cual contradice nuestra suposición. Esto concluye la prueba de (a). La parte (b) se demuestra en forma análoga. ■

En la demostración de este último Lema hemos probado también el siguiente resultado

**Lema 3.9** *Sea  $b \in \mathbf{R}$ . Si  $\mathbf{B}'(b) = 0$  y  $\mathbf{B}(b) = 1$ , entonces  $\mathbf{B}''(b) < 0$  ( la función  $\mathbf{B}(a)$  alcanza un valor máximo en  $b$ ). Si  $\mathbf{B}'(b) = 0$  y  $\mathbf{B}(b) = -1$ , entonces  $\mathbf{B}''(b) > 0$  ( $\mathbf{B}(a)$  alcanza un valor mínimo en  $b$ ). Así, una raíz de  $\mathbf{B}^2(b) = 1$  puede ser, a lo más, raíz doble, y una condición necesaria y suficiente para que  $b$  sea una raíz doble es*

$$\mathbf{y}_1(\tau, b) = \dot{\mathbf{y}}_2(\tau, b) = 1, \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{y}}_1(\tau, b) = \mathbf{y}_2(\tau, b) = 0.$$

Esta condición se sigue de las definiciones de  $\alpha$  y  $\beta$  de la pág. 32 y de la equivalencia para  $2\mathbf{B}(b)$  de la pág. 35.

El lema siguiente nos dice que la gráfica de  $\mathbf{B}(a)$  cruza siempre las rectas  $y = \pm 1$  de arriba a abajo, para  $a$  creciente.

1. El intervalo de inestabilidad  $(-\infty, a_0]$  siempre estará presente.
2. Ningún intervalo de estabilidad o inestabilidad pueden contraerse en un punto.
3. Los intervalos de estabilidad nunca pueden desaparecer, pero dos de ellos pueden combinarse en uno solo, si  $a_{2n+1} = a_{2n+2}$  o  $a_{2n+1}^* = a_{2n+2}^*$ .
4. Los intervalos de inestabilidad (con la excepción de  $(-\infty, a_0]$ ) pueden desaparecer completamente. Esto sucede si y sólo si  $\phi(t)$  es constante [3].
5. En los extremos de los intervalos

$$(a_0, a_1^*), (a_2^*, a_1), (a_2, a_3^*), (a_4^*, a_3), \dots$$

las soluciones de la ecuación (3.1.1) son en general inestables. Esto siempre es cierto para  $a = a_0$ . Las soluciones son estables para  $a = a_{2n+1}$  o  $a = a_{2n+2}$  si y sólo si  $a_{2n+1} = a_{2n+2}$  y las soluciones son estables para  $a = a_{2n+1}^*$  o  $a = a_{2n+2}^*$  si y sólo si  $a_{2n+1}^* = a_{2n+2}^*$ .

## 4.2 Propiedades de las soluciones

Las soluciones de la ecuación

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\delta + \epsilon \cos t)\mathbf{x} = 0, \quad \delta > 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (4.2.1)$$

son llamadas *funciones de Mathieu*, sin embargo, frecuentemente se reserva este nombre para aquellas soluciones que tienen período  $\pi$  ó  $2\pi$  y que son pares o impares.

Cabe aquí observar que una ecuación diferencial cuyos coeficientes son funciones periódicas, no necesariamente tiene soluciones periódicas, por ejemplo

$$\frac{dx}{dt} + (a + b \cos 2t)x = 0$$

no tiene soluciones periódicas, a menos que  $a = 0$ .

Si una ecuación tiene soluciones periódicas, el período de éstas no tiene porqué coincidir con el período de los coeficientes.

La ecuación (4.2.1) no puede tener dos soluciones linealmente independientes que sean pares ó impares.

En efecto, consideremos la matriz fundamental de soluciones

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_1(t) & \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$$

Tenemos que  $\mathbf{x}_1(t + 2\pi)$  y  $\mathbf{x}_2(t + 2\pi)$  son también soluciones de (4.2.1), por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t + 2\pi) &= A\mathbf{x}_1(t) + B\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t + 2\pi) &= C\mathbf{x}_1(t) + D\mathbf{x}_2(t) \end{aligned}$$

Ya que  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ , resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t + 2\pi) &= \mathbf{x}_1(2\pi)\mathbf{x}_1(t) + \dot{\mathbf{x}}_1(2\pi)\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t + 2\pi) &= \mathbf{x}_2(2\pi)\mathbf{x}_1(t) + \dot{\mathbf{x}}_2(2\pi)\mathbf{x}_2(t) \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\mathbf{x}_1(-t)$  y  $\mathbf{x}_2(-t)$  son también soluciones de (4.2.1), pues  $\cos t$  es una función par. así,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(-t) &= E\mathbf{x}_1(t) + F\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(-t) &= G\mathbf{x}_1(t) + H\mathbf{x}_2(t) \end{aligned}$$

De nuevo, por la condición inicial, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(-t) &= \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(-t) &= -\mathbf{x}_2(t), \end{aligned}$$

probando lo afirmado.



siones siguientes:

$$ce_0(t, \epsilon) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^r 2^{2r+1} \epsilon^r}{(r!)^2} - \frac{(-1)^{r+2} 2^{2r+5} r(3r+4) \epsilon^{r+2}}{[(r+1)!]^2} + O(\epsilon^{r+4}) \right\} \cos rt$$

$$ce_1(t, \epsilon) = \cos \frac{t}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^r 2^{2r} \epsilon^r}{(r+1)! r!} - \frac{(-1)^{r+1} 2^{2r+2} r \epsilon^{r+1}}{[(r+1)!]^2} + \frac{(-1)^{r+2} 2^{2r+2} \epsilon^{r+2}}{(r-1)!(r+2)!} + O(\epsilon^{r+3}) \right\} \cos(2r+1) \frac{t}{2}.$$

$$se_1(t, \epsilon) = \operatorname{sen} \frac{t}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^r 2^{2r} \epsilon^r}{(r+1)! r!} - \frac{(-1)^{r+1} 2^{2r+2} r \epsilon^{r+1}}{[(r+1)!]^2} + \frac{(-1)^{r+2} 2^{2r} \epsilon^{r+2}}{(r-1)!(r+2)!} + O(\epsilon^{r+3}) \right\} \operatorname{sen}(2r+1) \frac{t}{2}.$$

$$ce_2(t, \epsilon) = \left\{ 4\epsilon - \frac{320}{3} \epsilon^3 + O(\epsilon^5) \right\} + \cos t + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^r 2^{2r+1} \epsilon^r}{r!(r+2)!} + \frac{(-1)^{r+2} 2^{2r+3} r(47r^2 + 222r + 247) \epsilon^{r+2}}{3^2(r+2)!(r+3)!} + O(\epsilon^{r+4}) \right\} \cos(r+1)t.$$

etc.

Las series anteriores convergen si  $\epsilon$  es pequeño, y divergen si  $\epsilon$  es bastante grande. Por ejemplo,  $ce_0(t, \epsilon)$  converge si  $|4\epsilon^2| < 1$ , [12].

Las funciones  $ce_{2n}(t)$  y  $se_{2n+2}(t)$  son de período  $2\pi$  y las funciones  $ce_{2n+1}(t)$  y  $se_{2n+1}(t)$  son de período  $\pi$ . Así:

*Las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu pueden clasificarse en cuatro tipos: las de período  $2\pi$  de tipo coseno,  $ce_{2n}(t)$ ; las de período  $2\pi$  de tipo seno,  $se_{2n+2}(t)$ ; las de período  $\pi$  de tipo coseno,  $ce_{2n+1}(t)$  y las de período  $\pi$  de tipo seno,  $se_{2n+1}(t)$ .*

Otra forma de obtener las expresiones anteriores se expone a continuación:

Los parámetros  $\delta$ ,  $\epsilon$  de la ecuación de Mathieu deberán estar relacionados de tal modo que las soluciones tengan período  $\pi$  o  $2\pi$ . Obtenamos la solución periódica de primera clase de tipo coseno,  $ce_1(t, \epsilon)$ . Escribamos

$$\delta = n^2 + \delta_1 \epsilon + \delta_2 \epsilon^2 + \delta_3 \epsilon^3 + \dots \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Elegimos  $n^2 = 1$  y tenemos

$$\delta = 1 + \delta_1 \epsilon + \delta_2 \epsilon^2 + \delta_3 \epsilon^3 + \dots \quad (4.3.3)$$

en donde  $\delta_1, \delta_2, \dots$  son constantes por determinarse. Cuando  $\epsilon = 0$ , la solución de la ecuación de Mathieu se reduce a  $\cos t$ , escribamos entonces

$$\mathbf{x}(t) = \cos t + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3(t) + \dots, \quad (4.3.4)$$

en donde  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , son funciones por determinarse.

Sustituyendo (4.3.3) y (4.3.4) en (4.2.1) e igualando coeficientes se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : & \quad \cos t - \cos t \equiv 0 \\ \epsilon^1 : & \quad \ddot{x}_1(t) + x_1(t) - \cos 3t + (\delta_1 - 1) \cos t = 0 \\ \epsilon^2 : & \quad \ddot{x}_2(t) + x_2(t) + \delta_1 x_1(t) - 2x_1(t) \cos 2t + \delta_2 \cos t = 0, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

## 4.4 Coexistencia

Se dice que *dos soluciones de una ecuación de Hill coexisten* si son linealmente independientes y ambas tienen período  $\pi$  ó  $2\pi$ . Debido a la proposición 2.5, la cual es consecuencia del Teorema de Floquet, las soluciones de la ecuación de Hill no coexisten, ya que ésta tiene únicamente una solución periódica (y sus múltiplos). Además, por los lemas 3.9 y 3.7, la coexistencia de soluciones periódicas de período  $\pi$  o  $2\pi$  de la ecuación de Hill equivale, en términos del capítulo 3, a la existencia de una raíz doble de la ecuación

$$B^2(a) - 1 = 0.$$

Así por ejemplo, si la  $k$ -ésima raíz de la ecuación  $B(a) = 1$  es doble, lo cual implica que  $a_{2k-1} = a_{2k}$ , entonces se dice que el  $2k$ -ésimo intervalo de inestabilidad  $(a_{2k}^*, a_{2k+1}^*)$  desaparece. También, si  $a_{2k-1}^* = a_{2k}^*$ , se dice que el  $(2k-1)$ -ésimo intervalo de inestabilidad desaparece. Por lo tanto, *la coexistencia de soluciones de la ecuación de Hill equivale a la desaparición de intervalos de inestabilidad de la propia ecuación*. (Observemos que el intervalo de inestabilidad  $(-\infty, a_0]$  nunca puede desaparecer, pues  $a_0$  no puede ser una raíz doble de la ecuación  $B(a) - 1 = 0$ ).

La ecuación de Ince

$$(1 + a \cos 2x)y'' + b(\sin 2x)y' + (c + d \cos 2x)y = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad |a| < 1$$

nos proporciona un ejemplo en donde todas las soluciones coexisten [3].

En este apartado abordaremos el problema de la coexistencia de soluciones en la ecuación de Mathieu y demostraremos que

**Proposición 4.1** 1) Salvo para  $\epsilon = 0$ , las funciones de Mathieu  $ce_{2n+1}(t, \epsilon)$  y  $se_{2n+1}(t, \epsilon)$  no coexisten.

2) Salvo para  $\epsilon = 0$ , las funciones de Mathieu  $ce_{2n}(t, \epsilon)$  y  $se_{2n+2}(t, \epsilon)$  no coexisten.

**Demostración.**

Para demostrar que las funciones  $ce_{2n+1}(t, \epsilon)$  y  $se_{2n+1}(t, \epsilon)$  no coexisten, sea  $\epsilon \neq 0$  fijo y

$$\begin{aligned} x_1(t) &= ce_{2n+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cos(2n+1)t \\ x_2(t) &= se_{2n+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin(2n+1)t. \end{aligned}$$

Por ser ambas soluciones de (4.2.1), se cumplen las siguientes relaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (\delta + \epsilon \cos t)x_1 &= 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (\delta + \epsilon \cos t)x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

de donde se obtiene

$$x_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} \right) = 0$$

lo cual es falso. De la misma forma se prueba que  $B_1 \neq 0$ . Finalmente, de ésto y de (4.4.5) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n+1} \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n+1} \neq 0$$

lo cual contradice la convergencia de  $ce_{2n+1}(t)$  y  $se_{2n+1}(t)$ . En forma similar se prueba el inciso 2) de la proposición. ■

Finalmente, observemos que el problema de la coexistencia de las soluciones de la ecuación de Mathieu es equivalente a la intersección de las fronteras de las regiones de estabilidad e inestabilidad, que se calculan en la siguiente sección. Tal intersección no puede ocurrir, por la proposición 4.1.

## 4.5 Cálculo de las regiones de estabilidad

En esta sección aplicaremos el Método de Parámetros Restringidos o de Linsted-Poincaré para determinar las regiones de estabilidad de las soluciones de la ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos t)x = 0, \quad \delta > 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (4.5.1)$$

Este método consiste en expandir la solución  $\mathbf{x}(t)$  y el parámetro  $\delta$ , en términos del parámetro  $\epsilon$ ; se obtiene así, una expresión para  $\delta$  en función de  $\epsilon$ , la cual determina una región en el plano  $\delta - \epsilon$ , dentro de la cual las soluciones de la ecuación (4.5.1) y a lo largo de cuya frontera éstas soluciones están expresadas como series de potencias de  $\epsilon$ .

Hemos visto en el capítulo anterior que las curvas de transición que separan las regiones de estabilidad e inestabilidad corresponden a las soluciones determinadas por el exponente característico  $\lambda = 0$ , en cuyo caso tenemos soluciones  $\pi$ -periódicas, y a las soluciones determinadas por el exponente característico  $\lambda = \pm 1$ , para las cuales tenemos soluciones  $2\pi$ -periódicas.

Sea  $\mathbf{x}(t)$  una solución de (4.5.1); supondremos para esta solución y para  $\delta$  un desarrollo en potencias de  $\epsilon$  de la forma

$$\mathbf{x}(t) = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (4.5.2)$$

$$\delta = \delta_0 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (4.5.3)$$

en donde  $x_i = x_i(t)$  y  $\delta_i$  es constante, para  $i = 0, 1, 2, \dots$

Sustituyendo (4.5.2) y (4.5.3) en (4.5.1) tenemos:

$$(\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots) + [(\delta_0 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots) + \epsilon \cos t](x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) = 0$$

Esta ecuación se satisface sólo si los coeficientes de todas las potencias de  $\epsilon$  se anulan. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de  $\epsilon$  obtenemos

$$\ddot{x}_0 + \delta_0 x_0 = 0 \quad (4.5.4)$$

$$\ddot{x}_1 + \delta_0 x_1 = -\delta_1 x_0 - x_0 \cos t \quad (4.5.5)$$

$$\ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 = -\delta_1 x_1 - \delta_2 x_0 - x_1 \cos t \quad (4.5.6)$$

La solución de la ecuación (4.5.4) es

$$x_0(t) = a_0 \cos \sqrt{\delta_0} t + b_0 \operatorname{sen} \sqrt{\delta_0} t,$$

Por lo tanto, tenemos para  $\delta$  el siguiente desarrollo, si  $n = 0$ :

$$\delta = -\frac{1}{2}\epsilon^2 + \dots \quad (4.5.10)$$

el cual define la curva de transición de la estabilidad a la inestabilidad para este caso. Además, a lo largo de esta curva tenemos la solución  $2\pi$ -periódica

$$\mathbf{x}(t) = 1 + \epsilon(-1 + \cos t) + \epsilon^2\left(\frac{7}{8} - \cos t + \frac{1}{8}\cos 2t\right) + \dots \quad (4.5.11)$$

### Caso $n=1$

Para este valor de  $n$  obtenemos, mediante la ecuación (4.5.7),  $\delta_0 = \frac{1}{4}$ . Primeramente consideremos las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = 1$  y  $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ . Tenemos:

$$\mathbf{x}_0(t) = \cos \frac{t}{2}.$$

Sustituyendo en (4.5.5) obtenemos la ecuación para  $x_1$ :

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -\delta_1 \cos \frac{1}{2}t - \cos \frac{1}{2}t \cos t,$$

es decir,

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = \left(-\delta_1 - \frac{1}{2}\right) \cos \frac{1}{2}t - \cos \frac{3}{2}t.$$

Ya que  $\cos \frac{1}{2}t$  es solución de la correspondiente ecuación homogénea, en la solución aparecerá un término de la forma  $t \cos \frac{1}{2}t$ , el cual es un término secular, de manera que debemos evitar su aparición a fin de obtener soluciones periódicas, imponiendo la condición

$$-\delta_1 - \frac{1}{2} = 0,$$

de donde obtenemos  $\delta_1 = -\frac{1}{2}$ . Así,  $x_1$  satisface

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -\frac{1}{2} \cos \frac{3}{2}t,$$

cuya solución es, tomando en cuenta las condiciones iniciales,

$$\mathbf{x}_1(t) = -\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2}t.$$

Sustituyendo en la ecuación (4.5.6) tenemos:

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{4}x_2 = -\left(-\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2}t\right) \cos t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2}t\right) - \delta_2 \cos \frac{1}{2}t,$$

Para eliminar los términos que producen términos seculares hacemos  $\delta_2 = -\frac{1}{8}$ . La solución de la ecuación diferencial en cuestión es

$$x_2(t) = \frac{13}{48} \operatorname{sen} \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} \frac{3}{2}t + \frac{1}{48} \operatorname{sen} \frac{5}{2}t.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente desarrollo para  $\delta$  :

$$\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \dots \quad (4.5.13)$$

el cual define la curva de transición de la estabilidad a la inestabilidad que emana de  $\delta = \frac{1}{4}$ . Sobre esta curva tenemos la solución  $4\pi$ -periódica:

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}t + \epsilon \left( -\frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{3}{2}t \right) + \epsilon^2 \left( \frac{13}{48} \operatorname{sen} \frac{1}{2}t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} \frac{3}{2}t + \frac{1}{48} \operatorname{sen} \frac{5}{2}t \right) + \dots$$

### Caso n=2

Consideremos primeramente las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = 1$  y  $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ . Para este valor de  $n$  obtenemos, de la ecuación (4.5.7),  $\delta_0 = 1$ , y de la ecuación (4.5.8)

$$x_0(t) = \cos t$$

La ecuación para  $x_1$  es

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\delta_1 \cos t - \cos t \cos t$$

es decir,

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\delta_1 \cos t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$$

Para eliminar los términos que generan términos seculares se requiere que  $\delta_1 = 0$ , obteniéndose

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$$

cuya solución es

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos t + \frac{1}{6} \cos 2t.$$

Sustituyendo esta expresión en (4.5.8) se obtiene la ecuación para  $x_2$ , la cual una vez reducida es:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\frac{1}{6} + \left( \frac{5}{12} - \delta_2 \right) \cos t - \frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{12} \cos 3t.$$

La eliminación de los términos seculares requiere que se cumpla

$$\delta_2 = \frac{5}{12}$$

Así, el desarrollo para  $\delta$  es

$$\delta = 1 - \frac{1}{12}\epsilon^2 + \dots \quad (4.5.15)$$

que define la curva de transición que emana de  $\delta = 1$ . La solución a lo largo de esta curva es

$$\mathbf{x}(t) = \text{sent} + \epsilon \left( \frac{2}{3}\text{sent} + \frac{1}{6}\text{sen}2t \right) + \epsilon^2 \left( \frac{215}{288}\text{sent} + \frac{1}{9}\text{sen}2t + \frac{1}{96}\text{sen}3t \right) + \dots$$

la cual es  $2\pi$ -periódica.

Las gráficas de las regiones de estabilidad e inestabilidad obtenidas en esta sección se presentan en la figura 1, al final de este capítulo.

## 4.6 Regiones de estabilidad y fracciones continuadas

Existe otra forma de calcular los números característicos de las funciones de Mathieu, y por lo tanto de obtener las regiones de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Mathieu, mediante fracciones continuadas infinitas. Este método tiene una ventaja sobre el método de Parámetros Restringidos: permite calcular las regiones de estabilidad e inestabilidad para valores grandes de  $\epsilon$ , por ejemplo, para  $\epsilon = 9$ , lo cual sería imposible de realizar por el método de la sección anterior, debido a la divergencia de las series involucradas para ese valor de  $\epsilon$ , ver [2]. Puede demostrarse que la serie  $ce_0(t, \epsilon)$  converge para  $|4\epsilon^2| < 1$ , ver [12]. Indicaremos la forma de obtener  $\delta = \delta(\epsilon)$  para la función  $ce_{2n}(t, \epsilon)$ .

Sustituyamos las expresiones ya obtenidas en la sección 4.1:

$$\begin{aligned} ce_{2n+1}(t, \epsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1} \cos(2r+1)t \\ se_{2n+1}(t, \epsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} \text{sen}(2r+1)t \\ ce_{2n}(t, \epsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos(2r)t \\ se_{2n+2}(t, \epsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2} \text{sen}(2r+2)t \end{aligned}$$

en la ecuación de Mathieu

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\delta + \epsilon \cos t)\mathbf{x} = 0.$$

Obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia.

Para  $ce_{2n}(t, \epsilon)$

$$\left. \begin{aligned} \delta A_0 - \epsilon A_2 &= 0 \\ (\delta - 4)A_2 - \epsilon(A_4 + 2A_0) &= 0 \\ (\delta - 4r^2)A_{2r} - \epsilon(A_{2r+2} + A_{2r-2}) &= 0, \quad r \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.1)$$

Para  $ce_{2n+1}(t, \epsilon)$ :

$$\left. \begin{aligned} (\delta - 1 - \epsilon)A_1 - \epsilon A_3 &= 0 \\ \{\delta - (2r+1)^2\}A_{2r+1} - \epsilon(A_{2r+3} + A_{2r-1}) &= 0, \quad r \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.2)$$

y al sustituir en (4.6.7) obtenemos

$$-v_0 = \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{4}\delta - \frac{\frac{1}{64}\epsilon^2}{1 - \frac{1}{16}\delta - \frac{\frac{1}{32}\epsilon^2}{1 - \frac{1}{32}\delta - \dots}}}$$

cuyo término general es

$$\frac{\frac{\epsilon^2}{16r^2(r-1)^2}}{1 - \frac{\delta}{4r^2} - \dots}$$

Por (4.6.1),  $v_0 = \frac{\delta}{\epsilon}$ , por lo tanto la penúltima expresión es equivalente a

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}\epsilon^2}{1 - \frac{1}{4}\delta - \frac{\frac{1}{64}\epsilon^2}{1 - \frac{1}{16}\delta - \frac{\frac{1}{32}\epsilon^2}{1 - \frac{1}{32}\delta - \dots}}} \quad (4.6.8)$$

la cual es una fracción continuada infinita. Dado que  $\epsilon$  y  $\delta$  son finitos, el denominador del término general

$$\frac{\frac{\epsilon^2}{16r^2(r-1)^2}}{1 - \frac{\delta}{4r^2} - \dots}$$

tiende a 1, cuando  $r$  tiende a  $+\infty$ , mientras que el numerador tiende a 0. Así, la fracción (4.6.8) es convergente [11].

## 4.7 La ecuación de Mathieu amortiguada

En las secciones anteriores hemos considerado la ecuación de Mathieu para un sistema físico que no presenta disipación de energía debido a la resistencia que ofrece el medio al movimiento del cuerpo. La disipación de energía está presente en casi todos los sistemas físicos, por lo cual es útil investigar el efecto que produce en el diagrama de las regiones de estabilidad e inestabilidad, la introducción de un término relativo a la fricción,  $\beta\dot{\mathbf{x}}$ , en donde  $\beta = O(\epsilon)$ :

$$\ddot{\mathbf{x}} + \beta\dot{\mathbf{x}} + (\delta + \epsilon \cos t)\mathbf{x} = 0 \quad (4.7.1)$$

Iniciemos el presente análisis considerando los desarrollos

$$\mathbf{x}(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$\delta = \delta_0 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \dots$$

Recordemos (Sección 4.4) que para  $\epsilon = 0$ , la consideración de soluciones  $\pi$ -periódicas y  $2\pi$ -periódicas lleva a la condición

$$\delta_0 = \frac{n^2}{4}, \quad n \in \mathbf{N},$$

con la cual tenemos

$$x_0(t) = a \cos \frac{n}{2}t + b \operatorname{sen} \frac{n}{2}t, \quad n \in \mathbf{N}.$$

es decir,

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\delta_1 a_0^2 \cos t - \delta_1 b_0^2 \sin t - \frac{1}{2} b_0^2 \sin 2t - \frac{1}{2} b_0^2 - \frac{1}{2} a_0^2 \cos 2t$$

Como antes, debemos tener  $\delta_1 = 0$ . La solución de la ecuación anterior es

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} a_0^2 + a_1^2 \cos t + b_1^2 \sin t + \frac{1}{6} a_0^2 \cos 2t + \frac{1}{6} b_0^2 \sin 2t.$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (4.7.6) y tomando en cuenta  $\beta = \beta_2 \epsilon^2$  y  $\delta_1 = 0$  tenemos:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = (-\delta_2 b_0^2 + \beta_2 a_0^2 - \frac{1}{12} b_0^2) \sin t + (-\delta_2 a_0^2 + \frac{1}{2} a_0^2 - \beta_2 b_0^2 - \frac{1}{12} a_0^2) \cos t + \dots$$

Deben cumplirse entonces

$$-(\delta_2 + \frac{1}{12}) b_0^2 + \beta_2 a_0^2 = 0$$

$$-\beta_2 b_0^2 + (-\delta_2 + \frac{5}{12}) a_0^2 = 0$$

es decir,

$$(\frac{1}{12} + \delta_2)(\frac{5}{12} - \delta_2) - \beta_2^2 = 0$$

la cual es una ecuación cuadrática en  $\delta_2$ :

$$\delta_2^2 - \frac{1}{3} \delta_2 - \frac{5}{144} - \beta_2^2 = 0$$

cuya solución es

$$\delta_2 = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} + 4(\frac{5}{144} - \beta_2^2)}$$

Tomando en cuenta que  $\beta = \beta_2 \epsilon^2$ , considerando el desarrollo para  $\delta$  hasta segundo orden,  $\delta = 1 + \epsilon^2 \delta_2$  y haciendo reducciones se tiene:

$$\delta - 1 = \frac{\epsilon^2}{6} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon^4}{4} - 4\beta^2}$$

Las gráficas de las regiones determinadas por las ecuaciones obtenidas anteriormente, para diferentes valores de  $\beta$ , se presentan en las figuras 2 y 3 al final de este capítulo, las cuales se comparan con las correspondientes gráficas de la ecuación de Mathieu no-amortiguada. Observemos que el efecto del término  $\beta$ , relativo a la disipación de energía, propicia la “elevación” de las regiones inestables sobre el eje  $\delta$ , la “redondez” de los vértices de estas regiones y el “estrechamiento” de las mismas, por lo que podemos concluir que la disipación de energía tiene, en este ejemplo, efectos estabilizadores.



cuya solución es

$$\theta(t) = A_n \cos(\omega(t - n\tau) + \delta_n), \quad \text{para } n\tau < t < (n+1)\tau \quad (4.8.4)$$

y

$$\theta(t) = A_{n+1} \cos[\omega(t - (n+1)\tau) + \delta_{n+1}], \quad \text{para } (n+1)\tau < t < (n+2)\tau. \quad (4.8.5)$$

Empalmamos ambas soluciones en  $t = (n+1)\tau$ :

$$A_n \cos(\omega\tau + \delta_n) = A_{n+1} \cos \delta_{n+1}. \quad (4.8.6)$$

Derivamos (4.8.4) y (4.8.5) y evaluamos en  $t = (n+1)\tau$ :

$$\dot{\theta}((n+1)\tau) = -\omega A_n \text{sen}(\omega\tau + \delta_n)$$

$$\dot{\theta}((n+1)\tau) = -\omega A_{n+1} \text{sen} \delta_{n+1}$$

Sustituamos ambas expresiones en (4.8.2). Empleando (4.8.4) tenemos

$$-\omega A_{n+1} \text{sen} \delta_{n+1} + \omega A_n \text{sen}(\omega\tau + \delta_n) = -\kappa_0 A_n \cos(\omega\tau + \delta_n)$$

es decir,

$$A_{n+1} \text{sen} \delta_{n+1} = A_n \left[ \text{sen}(\omega\tau + \delta_n) + \frac{\kappa_0}{\omega} \cos(\omega\tau + \delta_n) \right]$$

dividiendo esta expresión por  $\theta(t)$  en (4.8.4) obtenemos

$$\tan \delta_{n+1} = \tan(\omega\tau + \delta_n) + \frac{\kappa_0}{\omega}$$

es decir,

$$\tan_{n+1} = \frac{\kappa_0}{\omega} + \frac{\tan \omega\tau + \tan \delta_n}{1 - \tan \omega\tau \tan \delta_n} \quad (4.8.7)$$

La ecuación anterior es una relación de recursión para el ángulo fase  $\delta_n$  de la solución, el cual es independiente de la amplitud  $A_n$ . Si hacemos

$$\frac{\kappa_0}{\omega} = 2 \tan \Delta$$

y definimos

$$z_n = \text{sen } \omega\tau \tan \delta_n - \cos \omega\tau,$$

entonces

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \text{sen } \omega\tau \tan \delta_{n+1} - \cos \omega\tau \\ &= 2 \tan \Delta \text{sen } \omega\tau + \frac{\tan \omega\tau + \tan \delta_n}{1 - \tan \omega\tau \tan \delta_n} \text{sen } \omega\tau - \cos \omega\tau \\ &= \frac{2(\text{sen} \Delta \text{sen} \omega\tau - \cos \delta_n \cos \omega\tau)}{\cos \Delta} + \cos \omega\tau + \frac{\text{sen } \omega\tau \tan \delta_n + \tan \omega\tau \text{sen } \omega\tau}{1 - \tan \omega\tau \tan \delta_n} \\ &= -\frac{2 \cos(\omega\tau + \Delta)}{\cos \Delta} + \frac{\cos \omega\tau + \tan \omega\tau \text{sen } \omega\tau}{1 - \tan \omega\tau \tan \delta_n}. \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= 2a - \frac{1}{z_n} = \frac{2az_n - z_n}{z_n} \\
 &= \frac{2az_0 \operatorname{sen}(n+1)\phi - 2a \operatorname{sen} n\phi - z_0 \operatorname{sen} n\phi + \operatorname{sen}(n-1)\phi}{z_0 \operatorname{sen}(n+1)\phi - \operatorname{sen} n\phi} \\
 &= \frac{z_0 [2 \cos \phi \operatorname{sen}(n+1)\phi - \operatorname{sen} n\phi] - [2 \cos \phi \operatorname{sen} n\phi - \operatorname{sen}(n+1)\phi]}{z_0 \operatorname{sen}(n+1)\phi - \operatorname{sen} n\phi} \\
 &= \frac{z_0 \operatorname{sen}(n+2)\phi - \operatorname{sen}(n+1)\phi}{z_0 \operatorname{sen}(n+1)\phi - \operatorname{sen} n\phi},
 \end{aligned}$$

probando lo requerido.

La expresión (4.8.9) nos indica que  $z_n$  no se estabiliza en ningún punto.

Cuando  $|a| > 1$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 A_n \cos(\omega\tau - \delta_n) &= A_n (\cos \omega\tau \cos \delta_n + \operatorname{sen} \omega\tau \operatorname{sen} \delta_n) \\
 &= A_n \cos \delta_n (\cos \omega\tau + \operatorname{sen} \omega\tau \tan \delta_n) \\
 &= z_n A_n \cos \delta_n \\
 &= z_n A_{n-1} \cos(\delta_{n-1} - \omega\tau) \\
 &= z_n z_{n-1} A_{n-2} \cos(\delta_{n-2} - \omega\tau) \\
 &= z_n z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0 \cos(\delta_0 - \omega\tau).
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\prod_{j=0}^n z_j = \frac{A_n \cos(\omega\tau - \delta_n)}{\cos(\delta_0 - \omega\tau)}.$$

de donde resulta

$$\lim_{z \rightarrow e^k} A_n = e^{nk}.$$

lo cual significa que las soluciones presentan un crecimiento exponencial.

Por lo anterior, el comportamiento de las soluciones depende de  $|a|$ :

$|a| < 1 \Rightarrow |z| < \infty$  (estabilidad)

$|a| > 1 \Rightarrow |z| \rightarrow \infty$  (inestabilidad)

$|a| = 1$  es el caso crítico, el cual nos determina la frontera entre estabilidad e inestabilidad. Por lo tanto, la ecuación

$$\pm 1 = -\frac{\cos(\omega\tau - \Delta)}{\cos \Delta}$$

o bien

$$\pm 1 = \cos \omega\tau - \operatorname{sen} \omega\tau \tan \Delta \tag{4.8.10}$$

determina tal frontera.

Recordemos que

$$2 \tan \Delta = \frac{k_0}{\omega},$$

La ecuación anterior se cumple si y solamente si

$$2\pi^2\omega_1^2 + \frac{\pi}{2}\omega_1 = 0$$

y

$$4\pi^2\omega_1\omega_2 + \frac{\pi}{2}\omega_2 + \pi\omega_1^2 = 0,$$

es decir, si y solamente si

$$\omega_1 = 0, \quad \text{ó bien} \quad \omega_1 = -\frac{1}{4\pi},$$

de donde

$$\omega_2 = 0, \quad \text{ó bien} \quad \omega_2 = \frac{1}{8\pi^2}.$$

Puede probarse del mismo modo

$$\omega_3 = \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{192\pi} \quad \text{y} \quad \omega_4 = \frac{-1 + \frac{3}{\pi^2}}{96\pi^2}.$$

Por lo tanto, para  $n = 1$

$$\omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi}\epsilon + \frac{1}{8\pi^2}\epsilon^2 + \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{192\pi}\epsilon^3 + \frac{-1 + \frac{3}{\pi^2}}{96\pi^2}\epsilon^4 + O(5)$$

Para  $n = 2$ ,

$$1 = \cos 2\pi\omega - \frac{1}{2}\epsilon\omega \operatorname{sen} 2\pi\omega.$$

Proponemos el siguiente desarrollo para la solución

$$\omega = 1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \omega_3\epsilon^3 + \omega_4\epsilon^4 + O(5)$$

así,

$$2\pi\omega = 2\pi + 2\pi\omega_1\epsilon + 2\pi\omega_2\epsilon^2 + 2\pi\omega_3\epsilon^3 + 2\pi\omega_4\epsilon^4 + O(5)$$

y

$$\cos 2\pi\omega = 1 - 2\pi^2\omega_1^2\epsilon^2 - 4\pi^2\omega_1\omega_2\epsilon^3 - \left(2\pi^2\omega_2^2 + 4\pi^2\omega_1\omega_3 - \frac{2}{3}\pi^4\omega_1^4\right)\epsilon^4 + O(5).$$

Análogamente,

$$\operatorname{sen} 2\pi\omega = 2\pi\omega_1\epsilon + 2\pi\omega_2\epsilon + 2\pi\omega_2\epsilon^2 + \left(2\pi\omega_3 - \frac{4}{3}\pi^3\omega_1^3\right)\epsilon^3 + \left(2\pi\omega_4 - 4\omega_1^2\omega_2\right)\epsilon^4 + O(5),$$

de donde

$$-\frac{1}{2}\epsilon\omega \operatorname{sen} 2\pi\omega = -\pi\omega_1\epsilon^2 - (\pi\omega_2 + \pi\omega_1^2)\epsilon^3 - \left(\pi\omega_3 - \frac{2}{3}\pi^3\omega_1^3 + 2\pi\omega_1\omega_2\right)\epsilon^4 + O(5).$$

Sustituyendo en (4.8.11) e igualando las mismas potencias de  $\epsilon$  se obtiene:

$$2\pi\omega_1^2 + \frac{3}{2}\pi\omega_1 = 0$$

$$4\pi^2\omega_1\omega_2 + \pi\omega_1^2 + \frac{3}{2}\pi\omega = 0$$

y

$$4\pi\omega_1\omega_3 + 2\pi^2\omega_2^2 - \frac{2}{3}\pi^4\omega_1^4 - \pi^3\omega_1^3 + 2\pi\omega_1\omega_2 + \frac{3}{2}\pi\omega_3 = 0$$

Resolviendo el sistema anterior resulta

$$\omega_1 = -\frac{3}{4\pi}$$

$$\omega_2 = \frac{3}{8\pi^2}$$

$$\omega_3 = \frac{9 - \frac{12}{\pi^2}}{64\pi}$$

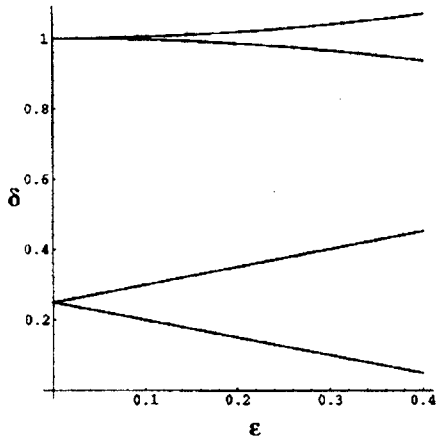
Aumentando la precisión puede obtenerse

$$\omega_4 = \frac{-9 + \frac{3}{\pi^2}}{32\pi^2}$$

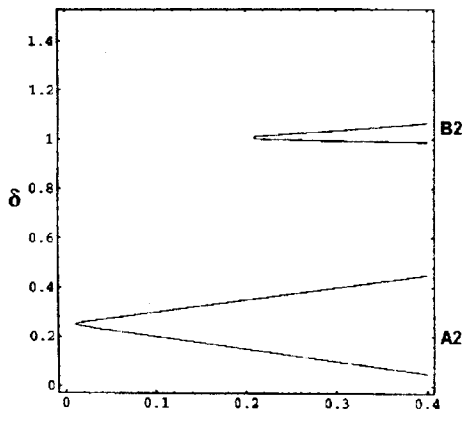
Por lo tanto, para  $n = 3$

$$\omega = \frac{3}{2} - \frac{3}{4\pi}\epsilon + \frac{3}{8\pi^2}\epsilon^2 + \frac{9 - \frac{12}{\pi^2}}{64\pi}\epsilon^3 + \frac{-9 + \frac{3}{\pi^2}}{32\pi^2}\epsilon^4 + O(5)$$

En la figura 5, al final de este capítulo, se presenta la gráfica de las regiones de estabilidad correspondientes a la ecuación (4.8.1).



Regiones de estabilidad para la ecuación de Mathieu no amortiguada:  $\beta = 0$



Gráfica de la ecuación de Mathieu amortiguada, sección 4.7  $\beta = 0.01$   
 $\ddot{x} + \beta \dot{x} + (\delta + \epsilon \cos t)x = 0$

Figura 2

$$A2: n = 1; \beta = \beta_1 \epsilon : \left( \delta - \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{4} (\epsilon^2 - \beta^2)$$

$$B2: n = 2; \beta = \beta_2 \epsilon^2 : \delta - 1 = \frac{\epsilon^2}{6} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^4}{4} - 4\beta^2}$$

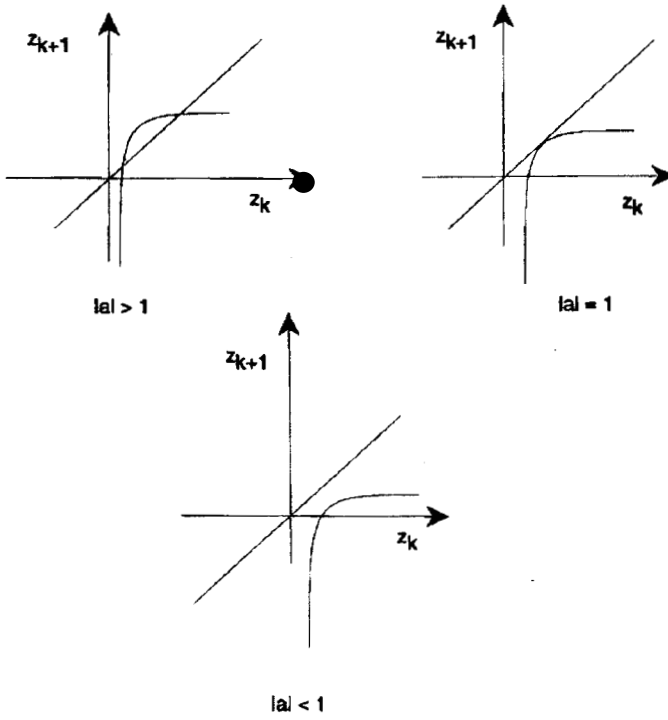


Figura4

Gráficas de la función  $z_{k+1} = 2a - \frac{1}{z_k}$ , del problema del péndulo paraméricamente perturbado, sección 4.8

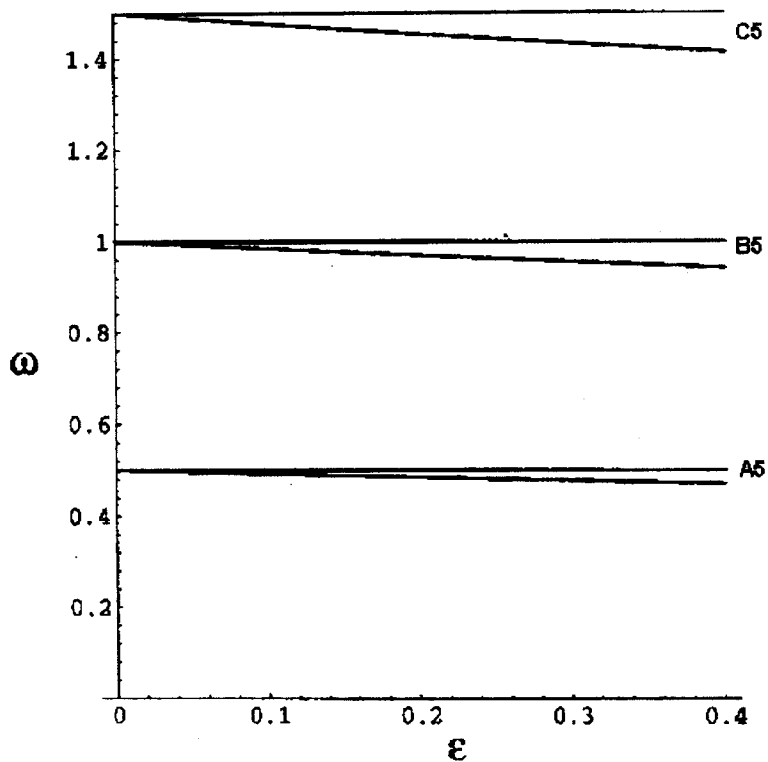


Figura5

$$A5: \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \varepsilon + \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^2 + \frac{1 - \frac{12}{\pi^2}}{192\pi} \varepsilon^3 + \frac{-1 + \frac{3}{\pi^2}}{96\pi^2} \varepsilon^4 + \dots$$

$$B5: \omega = 1 - \frac{1}{2\pi} \varepsilon + \frac{1}{4\pi^2} \varepsilon^2 + \frac{1 - \frac{3}{\pi^2}}{24\pi} \varepsilon^3 + \frac{-4 + \frac{3}{\pi^2}}{48\pi^2} \varepsilon^4 + \dots$$

$$C5: \omega = \frac{3}{2} - \frac{3}{4\pi} \varepsilon + \frac{3}{8\pi^2} \varepsilon^2 + \frac{9 - \frac{12}{\pi^2}}{64\pi} \varepsilon^3 + \frac{-9 + \frac{3}{\pi^2}}{32\pi^2} \varepsilon^4 + \dots$$

El péndulo paraméricamente perturbado.

la ecuación resulta ser una ecuación de Hill con dos parámetros  $\omega, \epsilon$ . En general, el espacio de parámetros está formado por regiones de estabilidad y de inestabilidad, estas últimas empiezan en  $\epsilon = 0$  para ciertos valores  $\omega_{0i}$ , llamados *valores de resonancia*. Para un valor distinto de estos valores, el sistema lineal es estable, si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño; en cambio, para un valor crítico  $\omega_{0i}$  y  $\epsilon \neq 0$  arbitrariamente pequeño el origen es linealmente inestable, y debido al teorema de Hartman, inestable para la ecuación no-lineal perturbada. ¿Qué conclusión puede obtenerse del teorema Twist al respecto?

## 5.2 El mapeo de avance a un período

El sistema (5.1.1) puede escribirse como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2(t) \operatorname{sen} q, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

en donde  $\omega^2(t) = \alpha^2 + \beta \cos t$ . Debido a la periodicidad del sistema anterior respecto de  $t$  y de  $q$ , podemos identificar la superficie  $t = 0$  con  $t = 2m\pi$ ,  $m \in \mathbf{Z}$  y la superficie  $q = 0$  con  $q = 2m\pi$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ , considerando de este modo al sistema (5.2.1) en el espacio

$$\mathbf{R} \times S^1 \times S^1 = \{p, q \bmod 2\pi, t \bmod 2\pi\}$$

Observemos que si  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de (5.2.1), entonces  $\mathbf{x}(t+2\pi)$  también es solución de (5.2.1), es decir, avanzando una solución por un período en el campo vectorial obtenemos también una solución. Sea  $\Sigma = \{(p, q, t) \in \mathbf{R} \times S^1 \times S^1 | t = 0\}$ . Se define la función  $\mathbf{T} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  por:

$$\mathbf{T}(p_0, q_0) = (p(2\pi), q(2\pi)),$$

en donde  $p_0 = p(0)$  y  $q_0 = q(0)$ . La función  $\mathbf{T}$  se llama *el mapeo de avance a un período*. Notemos lo siguiente

- 1) Las soluciones  $2\pi$ -periódicas del sistema (5.2.1) corresponden a los puntos fijos de  $\mathbf{T}$ .
- 2) Las soluciones periódicas Liapunov-estables corresponden a los puntos periódicos de  $\mathbf{T}$  Liapunov-estables.
- 3) El estudio de las trayectorias  $(p(t), q(t))$  para  $t \rightarrow \infty$  equivale al estudio de las iteraciones de  $\mathbf{T}$ , pues

$$\mathbf{T}^m(p_0, q_0) = (p(2m\pi), q(2m\pi)), \quad m \in \mathbf{Z}$$

4) Debido a que la divergencia del campo vectorial definido por (5.2.1) es cero, el mapeo  $\mathbf{T}$  preserva áreas.

5) Las posiciones de equilibrio  $p = 0, q = k\pi (k = 0, 1)$  son soluciones del sistema, por lo tanto son puntos fijos de  $\mathbf{T}$ .



**Lema 5.3.1 (Forma Normal de Birkhoff)** Sea  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  un mapeo de clase  $C^n$  que preserva área y que tiene un punto fijo cuyos valores propios complejos  $\mu$  y  $\bar{\mu}$  están sobre el círculo unitario. Si existe algún entero  $q$ , tal que  $4 \leq q \leq n + 1$  y los valores propios de  $f$  satisfacen la condición  $\mu^k \neq 1$ , para  $k = 1, 2, \dots, q$ , entonces existe un sistema de coordenadas complejo, en el cual el mapeo  $f$  puede escribirse en la forma normal

$$z \rightarrow f(z, \bar{z}) = \mu z e^{ia(z\bar{z})} + h(z, \bar{z}),$$

en donde

$$a(z\bar{z}) = a_1|z|^2 + \dots + a_s|z|^{2s}, \quad s = \left[\frac{q}{2}\right] - 1,$$

es un polinomio real en  $|z|^2$  y la función  $h$  y todas sus derivadas hasta orden  $q - 1$  se anulan en  $z = \bar{z} = 0$ .

En base al lema anterior se establece el siguiente resultado relativo a estabilidad, [6] [7]:

**Teorema 5.3.1 (Estabilidad de un punto fijo elíptico)** Sea  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  un mapeo que preserva área, que tiene un punto fijo elíptico en el origen y satisface las condiciones del lema anterior. Si el polinomio  $a(|z|^2)$  no se anula idénticamente, entonces el origen es un punto fijo estable.

Para el estudio de la estabilidad del origen del sistema (5.2.1) utilicemos los resultados anteriores y analicemos dos casos: el caso integrable,  $\omega$  constante y el caso no integrable,  $\omega$  variando periódicamente con el tiempo.

## 5.4 El caso integrable

En este caso  $\omega^2$  es constante. La ecuación (5.1.1) describe el movimiento de un péndulo simple

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 \text{sen } q, \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

en donde  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ , con  $l$  la longitud del péndulo y  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $q$  es el ángulo que forma el péndulo medido desde la vertical y  $p$  es el momento angular conjugado a  $q$ , que satisface las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

El sistema (5.4.1) tiene una primera integral de movimiento, el Hamiltoniano, que es la suma de las energías cinética  $\frac{1}{2}p^2$  y potencial  $U(q) - \omega^2 \cos q$ :

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \omega^2 \cos q \tag{5.4.2}$$

Puesto que la energía potencial tiene un mínimo en  $q = 0$ , de valor  $-\omega^2$ , la curva de nivel  $H = -\omega^2$  consta de un centro localizado en  $q = 0$  (punto elíptico, el cual corresponde a la posición de equilibrio estable para el movimiento del péndulo).

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{q^+} \frac{dq}{\sqrt{H + w^2 \cos q}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^{q^+} \frac{dq}{\sqrt{\cos q + \frac{H}{\omega^2}}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^{q^+} \frac{dq}{\sqrt{\cos q - \cos q^+}} \\
&= \frac{4}{\omega} \int_0^{q^+} \frac{dq}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{q^+}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{q}{2}\right)}}.
\end{aligned}$$

Introduciendo la variable  $\phi$  mediante

$$\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \left( \frac{q^+}{2} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{q}{2} \right)$$

obtenemos

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (5.4.3)$$

en donde  $\kappa = \operatorname{sen}\left(\frac{q^+}{2}\right)$ . Es posible calcular la integral anterior en términos de *integrales elípticas*[9].

### 5.4.1 Integrales Elípticas Completas

**Definición 5.1** La integral elíptica completa de primera clase,  $\mathbf{K}$ , está definida como

$$\mathbf{K}(\kappa) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

La expansión de  $\mathbf{K}$  en serie de potencias de  $\kappa^2$ , para  $\kappa < 1$  es

$$\mathbf{K}(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\kappa^2}{4} + \frac{9\kappa^4}{64} + \dots \right) \quad (5.4.4)$$

**Definición 5.2** La integral elíptica completa de segunda clase,  $\mathbf{E}$ , se define como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\kappa) &= \int_0^1 \frac{(1 - \kappa^2 t^2)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \kappa^2 t^2}{1 - t^2}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi.
\end{aligned}$$

La correspondiente expansión para  $\mathbf{E}$  es

$$\mathbf{E}(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\kappa^2}{4} - \frac{3\kappa^4}{64} - \dots \right) \quad (5.4.5)$$

$$\phi = \phi_0 + 2\pi\Omega(I_0) \quad (5.4.11)$$

De aquí, que la curva  $\Gamma_I$  rota un ángulo de  $2\pi\Omega(I_0)$ , que es constante a lo largo de cada curva  $\Gamma_I$ . Escribamos la frecuencia  $\Omega$  como función de  $H$  (a través de  $\kappa$ ), utilizando la expresión (5.4.8):

$$\Omega = \frac{\omega\pi}{2} \frac{1}{\mathbf{K}(\kappa)} \quad (5.4.12)$$

de donde observamos lo siguiente:

a)  $\Omega \rightarrow 0$  cuando  $\Gamma_I \rightarrow$  la separatriz  $H = \omega^2$ . En efecto, Cuando  $H \rightarrow \omega^2$ ,  $\kappa \rightarrow 1$  de donde  $\mathbf{K} \rightarrow \infty$  y  $\Omega \rightarrow 0$ .

b)  $\Omega \rightarrow \omega$  cuando  $\Gamma_I \rightarrow (0, 0)$ . Esto es claro, puesto que  $\mathbf{K}(0) = \frac{\pi}{2}$ .

Puesto que  $\Omega(I)$  varía continuamente con  $I$ , de estos incisos se deduce que algunas curvas  $\Gamma_I$  son rotadas bajo  $\mathbf{T}$  en un ángulo conmensurable con  $2\pi$  y otras lo hacen en un ángulo inconmensurable con  $2\pi$ .

Un mapeo de la forma (5.4.11), para el cual  $\frac{d\Omega}{dI} \neq 0$  se llama *mapeo twist* y el número  $\Omega(I)/2\pi$  se llama *número de rotación*, más precisamente:

**Definición 5.3** Dado un anillo, definido en coordenadas polares por  $A = \{(\theta, r) | a \leq r \leq b, \text{ con } 0 < a < b\}$ , un mapeo  $\mathbf{T}: A \rightarrow A$  de la forma

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} r \\ \theta + \gamma(r) \end{pmatrix}$$

y para el cual se cumple la condición

$$\frac{d\gamma}{dr} \neq 0$$

se llama un mapeo twist. Al número  $\gamma(r)/2\pi$  se le conoce como número de rotación.

Al igual que en una rotación, las órbitas de un mapeo twist se localizan sobre círculos centrados en el origen, sin embargo, una característica adicional es que el número de rotación depende de la coordenada radial. Un mapeo twist  $\mathbf{T}$  tiene las siguientes propiedades:

(P0) Deja invariantes los círculos.

(P1) Sobre cada círculo para el cual el número de rotación es racional, digamos  $p/q$ , las órbitas son periódicas, es decir, todos los puntos de esos círculos son puntos fijos del mapeo  $\mathbf{T}^q$ . Esto se debe a que el mapeo  $\mathbf{T}^q$  es la identidad.

(P2) Sobre cada círculo para el cual el número de rotación es irracional las órbitas son densas en ese círculo.

Finalmente, utilizando 2 veces la regla de L'Hospital para obtener

$$\frac{d\Omega}{dI}(0) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{d\Omega}{dI}(\kappa)$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dI}(0) &= -\frac{\pi^2[\mathbf{E}''(0) + 2\mathbf{K}(0) - \mathbf{K}''(0)]}{32\mathbf{K}^3(0)} \\ &= -\frac{\pi^2 2(\frac{\pi}{2})}{32(\frac{\pi}{2})^3} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

por lo tanto  $\frac{d\Omega}{dI}(0) \neq 0$  y el mapeo  $\mathbf{T}$  es un mapeo twist.

## 5.5 El caso no integrable

Consideremos la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\text{sen}x = 0, \quad (5.5.1)$$

en donde  $\omega^2(t)$  varía periódicamente con  $t$  y difiere ligeramente de un valor constante:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \epsilon \cos t), \quad \epsilon \ll 1$$

La ecuación (5.5.1) corresponde al movimiento de un columpio.

Sea  $\mathbf{T}_\epsilon$  el mapeo de avance a un período, correspondiente a la ecuación (5.5.1). Este mapeo es "cercano" al mapeo  $\mathbf{T}$  respectivo, el cual, como vimos en la sección anterior, está dado por

$$I = I_0$$

$$\phi = \phi_0 + 2\pi\Omega(I_0) \quad (5.5.2)$$

El mapeo  $\mathbf{T}_\epsilon$  es de la forma

$$I = I_0 + \epsilon f(I_0, \phi_0, \epsilon)$$

$$\phi = \phi_0 + 2\pi\Omega(I_0) + \epsilon g(I_0, \phi_0, \epsilon), \quad (5.5.3)$$

en donde  $f$  y  $g$  son analíticas en un entorno  $0 < I_0 < \delta_1$ ,  $|\text{Im}\phi| < \delta_2$  y  $|\epsilon| < \delta_3$ , para algunos  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$  y preservan el área  $dId\phi$ , debido a que el sistema es Hamiltoniano.

- ¿Qué cambios sufren las curvas invariantes  $\Gamma_I$  cuyo número de rotación es racional, y aquellas cuyo número de rotación es irracional, al perturbarse con  $\mathbf{T}_\epsilon$ ?
- ¿Qué se puede decir acerca de la estabilidad del origen, bajo el mapeo  $\mathbf{T}_\epsilon$ ?

3. El teorema implica que un círculo invariante para el mapeo Twist no-perturbado:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} I_0 \\ \phi + 2\pi\Omega(I_0) \end{pmatrix}$$

sobrevive a pequeñas perturbaciones que preservan área, deformándose quizá sólo un poco.

4. Existe una infinidad de curvas cerradas concéntricas invariantes que sobreviven al mapeo perturbado  $\mathbf{T}_\epsilon$ . Nótese además que la órbita de cualquier punto, bajo el mapeo perturbado, que se encuentre entre dos toros invariantes, nunca abandonará esta región, teniéndose así, estabilidad orbital.

5. El teorema twist de Moser no garantiza la existencia de curvas invariantes arbitrariamente cercanas al origen, por lo cual no asegura la estabilidad del origen bajo el mapeo perturbado.

No obstante la observación 5, puede utilizarse el lema de la forma normal de Birkhoff y el teorema (5.3.1), para demostrar la estabilidad del origen del sistema (5.5.1). Hagamos el cambio de variable  $z = I \exp(i\Phi)$  en (5.5.3). Obtenemos:

$$\mathbf{T}(z) = (I_0 + \epsilon f) \exp[i(\Phi_0 + 2\pi\Omega(I_0) + \epsilon g)] = I_0 \exp[i\Phi_0] \exp[2\pi i\Omega(I_0)] \exp[i\epsilon g] + O(\epsilon)$$

es decir,

$$\mathbf{T}(z) = z_0 \exp[2\pi i\Omega(I_0)] \left( 1 + i\epsilon g + \frac{(i\epsilon g)^2}{2!} + \frac{(i\epsilon g)^3}{3!} + \dots \right) + O(\epsilon) \quad (5.5.6)$$

Desarrollando  $\Omega(I_0)$  en serie de potencias de  $I^2$ , alrededor de  $I = 0$  :

$$\Omega(I^2) = \Omega(I) = \Omega(0) = I^2\Omega'(0) + \frac{I^4}{2!}\Omega''(0) + \dots,$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5.5.6) sin subíndices y recordando que  $I^2 = z\bar{z}$  y  $\Omega(0) = \omega_0$ , tenemos

$$\mathbf{T}(z, \bar{z}) = z \exp(2\pi\omega_0) \exp 2\pi i \left( z\bar{z}\Omega'(0) + \frac{(z\bar{z})^2}{2!}\Omega''(0) + \dots \right) \left( 1 + (i\epsilon g + \frac{(i\epsilon g)^2}{2!} + \dots) \right) + O(\epsilon)$$

Haciendo  $\mu := \exp(2\pi\omega_0)$  y

$$a(z, \bar{z}) := a_1|z|^2 + a_2|z|^4 + \dots + a_s|z|^{2s},$$

en donde

$$a_1 = \frac{\Omega'(0)}{2\pi}, a_2 = \frac{\Omega''(0)}{2!2\pi}, \dots, a_s = \frac{\Omega^{(s)}(0)}{s!2\pi}.$$

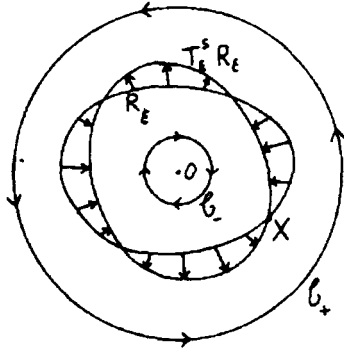
$\mathbf{T}$  adopta la forma

$$\mathbf{T}(z, \bar{z}) = z\mu \exp(ia(z, \bar{z})) + h(z, \bar{z}), \quad (5.5.7)$$

en donde

$$h(z, \bar{z}) = O(\epsilon)$$

mapeados radialmente.  $R_\epsilon$  es cercana a  $C$ .



Todos los puntos fijos de  $T_\epsilon^q$  pertenecen a  $R_\epsilon$ , por la construcción de  $R_\epsilon$ , y  $T_\epsilon^q(R_\epsilon) \cap R_\epsilon \neq \emptyset$ , puesto que  $T_\epsilon^q(R_\epsilon)$  tiene la misma área que  $R_\epsilon$  y encierra al origen. Esta intersección debe contener un número par de puntos, ya que  $\Omega(I) \neq 0$ , lo cual garantiza que  $R_\epsilon$  sea transversal a  $T_\epsilon^q(R_\epsilon)$ . Si  $x$  es un punto fijo de  $T_\epsilon^q$ , entonces la órbita de  $x$  bajo  $T_\epsilon^q$  consta de los puntos  $x, T_\epsilon x, T_\epsilon^2 x, \dots, T_\epsilon^{q-1} x$ , los cuales son puntos fijos de  $T_\epsilon^q$ . Así, la órbita de  $x$  tiene  $q$  distintos puntos fijos, luego el número de intersecciones debe ser un múltiplo par de  $q$ , los cuales son puntos fijos de  $T_\epsilon^q$ . ■

De la demostración del teorema anterior, observando el sentido de las flechas, podemos afirmar que la mitad de los puntos fijos de  $T_\epsilon^q$  son elípticos y la otra mitad son hiperbólicos, formando una sucesión alternante. Examinemos en detalle el efecto del mapeo twist perturbado en la vecindad de los puntos fijos arriba mencionados.

Aplicando simultáneamente el teorema twist y el teorema de Poincaré-Birkhoff, resulta que en una vecindad de cada punto fijo elíptico hay curvas cerradas invariantes irracionales, y las curvas racionales que lo rodean se usan como una nueva estructura de puntos fijos, la mitad de los cuales son elípticos y en cuya vecindad hay curvas cerradas irracionales invariantes, rodeadas por más puntos fijos elípticos, y así sucesivamente *ad infinitum*. Cada punto fijo elíptico es un microcosmos del total, para escalas infinitamente pequeñas. ¿Qué sucede alrededor de los puntos fijos hiperbólicos? Para entender cómo se comporta un mapeo en la cercanía de un punto fijo hiperbólico utilizaremos resultados generales acerca de teoría de mapeos. Un oscilador con un grado de libertad, como el péndulo, tiene una separatriz que une suavemente las órbitas que salen y que entran de los puntos singulares. Hemos visto que el péndulo tiene un punto hiperbólico (mod  $2\pi$ ), pero en general, tenemos una cadena de  $kn$  puntos hiperbólicos, los cuales, en un sistema integrable, tienen una separatriz suave que une a los puntos hiperbólicos con sus vecinos cercanos. Para el caso de un sistema "cercano" a uno integrable con dos o más grados de libertad la situación es más complicada. En cualquier punto hiperbólico  $H$  se intersectan cuatro curvas invariantes, las dos trayectorias de entrada de la separatriz  $H^+$ , y las dos trayectorias de salida de la separatriz  $H^-$ . Un punto  $x$  está en  $H^+$ , si llega a  $H$  después

propio movimiento caótico, intersectándose repetidamente uno a otro y a la separatriz de primer orden en puntos heteroclínicos. Estas órbitas llenan densamente el espacio disponible por ellas. Las intersecciones de las órbitas en puntos homoclínicos demuestran que no puede existir un toro invariante (KAM) en tales puntos [8]. Como puede vislumbrarse a partir de la explicación anterior, la dinámica del sistema (5.5.1) en el interior de la separatriz es muy compleja.

