UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Iztapalapa
Departamento de Filosofía

Maestría en Filosofía de la Ciencia

# Reflexiones sobre Forcing: metamatemática y aplicaciones.

Jerónimo Zamora Carrillo

Asesor:
Dr. José Alfredo Amor Montaño

# Reflexiones sobre Forcing: metamatemática y aplicaciones

Jerónimo Zamora Carrillo

# Contenido

# Introducción

El surgimiento de sistemas axiomáticos para teorías de conjuntos de modo natural da origen a preguntas acerca de la fortaleza y debilidad de tales sistemas, sobre todo si van a ser considerados como fundamentación de las matemáticas. Por ejemplo, preguntas referentes a la potencia del continuo y al estatus del axioma de elección son asuntos importantes en Matemáticas que han dado impulso al trabajo de los teórico-conjuntistas. El fracaso para responder esas preguntas y otras más dentro de ZF, junto con la prueba de Gödel acerca de enunciados formalmente indecidibles, trajeron a primer plano la cuestión de la independencia de enunciados.

Un modelo para una teoría T es una interpretación para su lenguaje en la cual los enunciados o teoremas de T son verdaderos. Así, en el caso de la teoría de conjuntos, una interpretación consta de un universo de individuos, los conjuntos, y una relación binaria entre ellos que interpreta al predicado $\in$ del lenguaje; esta intepretación puede o no ser la relación de pertenencia entre conjuntos. La teoría de Zermelo-Fraenkel con Elección (abreviado ZFC) se ha convertido en la formalización de la teoría de conjuntos mas ampliamente aceptada.

Si $\sigma$ es un enunciado del lenguaje de teoría de conjuntos, se dice que $\sigma$ es *independiente* o *indecidible* de ZFC si ni $\sigma$ ni $\neg\sigma$ se prueban a partir de ZFC (denotado por : ZFC $\nvdash \sigma$ y ZFC $\nvdash \neg\sigma$, respectivamente). Es imposible dar una prueba absoluta de que algún enunciado es independiente de ZFC, pues la sola existencia de un enunciado que no se prueba a partir de ZFC es equivalente a la consistencia absoluta de ZFC; lo cual es indemostrable, debido a un teorema de Gödel.

Se dice que una teoría es *consistente* si no se deduce de ella ninguna contradicción. Aunque no es posible demostrar la independencia absoluta de un enunciado, sí es posible dar pruebas de *independencia relativa*; relativa a la consistencia de la teoría, de la siguiente forma: *Si* ZFC *es consistente entonces* $\sigma$ *es independiente de* ZFC.

Un resultado fundamental de la lógica matemática es el Teorema de Completud de Gödel: *Una teoría* T *es consistente si, y sólo si,* T *tiene un modelo.* Se abreviará 'ZFC es consistente' como $Cons(\mathrm{ZFC})$. Si T es una teoría se escribirá $\mathrm{T} + \sigma$ en lugar de $\mathrm{T} \cup \{\sigma\}$. De manera elemental se obtiene lo siguiente:

$$\mathrm{T} \nvdash \sigma \textit{ si, y sólo si, } \mathrm{T} + \neg\sigma \textit{ es consistente};$$

y por el Teorema de Completud:

$$\mathrm{T} \nvdash \sigma \textit{ si, y sólo si, } \mathrm{T} + \neg\sigma \textit{ tiene un modelo.}$$

De lo anterior se sigue que la afirmación de independencia relativa de un enunciado $\sigma$, en la teoría ZFC, tiene las siguientes formas equivalentes:

a) Si ZFC es consistente entonces $\mathrm{ZFC} \nvdash \sigma$ y $\mathrm{ZFC} \nvdash \neg\sigma$.

b) Si $Cons(\mathrm{ZFC})$ entonces $Cons(\mathrm{ZFC} + \neg\sigma)$ y $Cons(\mathrm{ZFC} + \sigma)$.

c) Si ZFC tiene modelo entonces $\mathrm{ZFC} + \neg\sigma$ tiene modelo y $\mathrm{ZFC} + \sigma$ tiene modelo.

Y para tener una prueba de independencia relativa de un enunciado $\sigma$, respecto a la teoría ZFC, basta con probar cualquiera de las afirmaciones anteriores lo cual requiere dos demostraciones.

1. Probar la *consistencia relativa de* $\neg\sigma$ *respecto a* ZFC; o sea: $Cons(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow Cons(\mathrm{ZFC} + \neg\sigma)$.

2. Probar la *consistencia relativa de* $\sigma$ *respecto a* ZFC; o sea: $Cons(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow Cons(\mathrm{ZFC} + \sigma)$.

Lo cual quiere decir que agregar $\sigma$ o $\neg\sigma$ a la teoría ZFC no lleva a contradicciones a menos que ZFC fuera ya contradictoria.

Un ejemplo muy conocido de consistencia relativa, obtenido por Gödel, es la consistencia relativa del Axioma de Elección (AE) respecto de ZF : $Cons(\text{ZF}) \Rightarrow Cons(\text{ZFC})$. La prueba de este resultado involucra al Universo Constructible $L$ de Gödel. Este es el universo de todos los conjuntos *definibles* con el lenguaje de la teoría de conjuntos. En principio, no hay ninguna razón para considerar que el universo $L$ es igual al universo de todos los conjuntos, denotado este por $V$. La demostración de la consistencia relativa de AE se hace mostrando, desde la teoría ZF, que el universo $L$ es modelo de ZFC, lo cual quiere decir que $Cons(\text{ZFC})$ se sigue de $Cons(\text{ZF})$. Esta técnica, llamada de *modelos internos* de ZF, sirve para probar la consistencia relativa del Axioma de Elección, de la Hipótesis del Continuo(HC), de la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC) y del Axioma de Constructibilidad (V = L).

Cuando se consideran las negaciones de los enunciados anteriores la técnica de modelos internos ya no funciona, debido a que en el universo L todos los enunciados: AE, HC, HGC, V = L, son verdaderos y además L es minimal entre todos los modelos internos que son subclases de V. El método de Forcing, creado por Cohen en 1963, proporciona las pruebas de consistencia relativa de las mencionadas negaciones y proporciona por lo tanto la prueba de la segunda parte de su independencia relativa; es conveniente tener en cuenta que también el método de Forcing proporciona las pruebas de consistencia relativa para las afirmaciones de HC, HGC, V=L, etc. y no solo sirve para las negaciones, es pues un método mas general que el método de modelos internos.

Cuando un modelo de ZF interpreta el símbolo de pertenencia el resultado puede ser un modelo *estándar*, o *natural*, en el cual la relación de pertenencia interpretada sigue siendo la misma relación, pero puede suceder que el resultado sea una relación distinta a la relación de pertenencia, en este caso se llama un modelo no-estándar. Una clase $M$ es *transitiva* si todo elemento de $M$ es un subconjunto de $M$; es decir, si los elementos de los elementos de $M$ son elementos de $M$: $\forall x \in M\, (\forall w(w \in x \rightarrow w \in M))$. El hecho de que un modelo estándar de ZF ó de ZFC sea transitivo facilita los conceptos y las demostraciones, además de tener propiedades muy convenientes.

La idea general del método de forcing para pruebas de consistencia relativa , con el enfoque de modelos estándar, transitivos y numerables, a grandes rasgos, es como sigue:

1 Se parte de la suposición de que se tiene un modelo (modelo base) $M$ estándar, transitivo y numerable de ZFC.

2 Sea $\sigma$ el enunciado en cuestión, del cual se quiere probar su consistencia relativa.

3 Mediante un procedimiento general bien definido, con un determinado orden parcial $\mathbf{P} \in M$, se construye a partir de un especial subconjunto $G \subseteq \mathbf{P}$, $G \notin M$ - llamado *filtro genérico*- una extensión de $M$ - llamada la *extensión genérica*- denotada por $M[G]$, que satisface: $M \subset M[G]$, $G \in M[G]$ y los ordinales de $M$ y de $M[G]$ son los mismos.

4 $M[G]$ es modelo estándar, transitivo y numerable de ZFC + $\sigma$. La extensión genérica puede pensarse intuitivamente como el conjunto $M \cup \{G\}$ cerrado bajo las operaciones de teoría de conjuntos. Esto se logra definiendo $M[G]$ de tal modo que sus propiedades estén completamente determinadas por las propiedades del modelo base $M$, del orden parcial $\mathbf{P}$ y del filtro genérico $G$.

5 La definición de la extensión genérica $M[G]$ se hace a partir de $M$ utilizando *nombres* de los que serán los objetos de $M[G]$. Tales nombres son objetos de $M$ definidos por recursión a partir del orden parcial $\mathbf{P}$.

La definición del orden parcial $\mathbf{P}$ es determinante para que $M[G]$ sea modelo o no de $\sigma$, a excepción de esto, el resto del procedimiento es general. El método de forcing proporciona una prueba de:*si* ZFC *tiene un modelo estándar, transitivo y numerable entonces* ZFC + $\sigma$ *tiene un modelo estándar, transitivo y numerable*. A partir de esto no es inmediata la consistencia relativa de $\sigma$ respecto a ZFC, pues $Cons$(ZFC) no implica que exista un modelo estándar, transitivo y numerable de ZFC. Se ve así que el método de Forcing proporciona una técnica para construir modelos con determinadas características matemáticas.

Usando el Teorema de Reflexión, se puede transformar la implicación que proporciona el método de forcing en una prueba de consistencia relativa en la forma: $Cons$(ZFC) $\Rightarrow$ Cons(ZFC + $\sigma$). Por otro lado, usando además el Teorema de Compacidad de la lógica de primer orden se puede hacer la transformación anterior de modo semántico. El teorema de Compacidad afirma que: cualquier conjunto de enunciados de un lenguaje de primer orden tiene un modelo si todos sus subconjuntos finitos tienen un modelo.

# Capítulo 1

# Prerrequisitos

En todo lo que sigue se adoptarán la notación y las definiciones siguientes . ZF denota la teoría de Zermelo-Fraenkel comunmente adoptada {ver p. ej. [14]}, con los axiomas: Extensionalidad, Vacío, Par, Unión, Separación, Potencia, Infinito, Reemplazo, Regularidad.
ZFC = ZF+ {Axioma de Elección}.
$\text{ZF}^- = \text{ZF} \setminus$ {Axioma de Regularidad}.
$\text{ZFC}^- = \text{ZFC} \setminus$ {Axioma de Regularidad}.

Un *Relacional* es una clase $R$ tal que:

$$\forall x[x \in R \to \exists y, z\,(x = \langle y, z\rangle)].$$

Una *Relación* es un relacional que es un conjunto.
Un *Funcional* es un relacional $F$ tal que:

$$\forall x, y, z\,[\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in F \to y = z].$$

Una *función* es un funcional que es conjunto.
Si R es un relacional,

$$\begin{array}{rcll} Dom(R) & = & \{y : \exists z\,\langle y, z\rangle \in R\} & \textit{dominio de R.} \\ Ran(R) & = & \{z : \exists y\,\langle y, z\rangle \in R\} & \textit{rango de R.} \\ Cam(R) & = & Dom(R) \cup Ran(R) & \textit{campo de R.} \end{array}$$

Un relacional $R$ es *bien fundado* si

$$\forall x\,[x \neq \emptyset \wedge x \subseteq Cam(R) \to$$

$$\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to \langle z, y\rangle \notin R))].$$

La clase de los *R-predecesores* de $x$, $x_R$ , se define como:

$$x_R = \{y : \langle y, x\rangle \in R\}.$$

Un relacional $R$ es *limitado por la izquierda* si para cualquier conjunto $x$, $x_R$ es conjunto.Es decir:

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall x \exists w \forall z(z \in w \leftrightarrow \langle z, x\rangle \in R).$$

## 1.1 Colapso de Mostowski.

Sea $M$ una clase y $E$ un relacional. Se define recursivamente la noción de $\langle M, E\rangle \models \varphi$:

$$\begin{array}{lll}
\langle M, E\rangle \models \; x \approx y & si & x = y \\
\langle M, E\rangle \models \; x \in y & si & xEy \\
\langle M, E\rangle \models \; \neg\alpha & si & \langle M, E\rangle \not\models \alpha \\
\langle M, E\rangle \models \; \alpha \wedge \beta & si & \langle M, E\rangle \models \alpha \text{ y } \langle M, E\rangle \models \beta \\
\langle M, E\rangle \models \; \forall x\, \alpha & si & \forall x\, (x \in M \to \langle M, E\rangle \models \alpha) \\
\langle M, E\rangle \models \; \exists x\, \alpha & si & \exists x\, (x \in M \wedge \langle M, E\rangle \models \alpha).
\end{array}$$

Se define por recursión la *relativización* de $\varphi$ a $\langle M, E\rangle$, $\varphi^{\langle M,E\rangle}$, como

$$\begin{array}{rcl}
(x \approx y)^{\langle M,E\rangle} & = & (x \approx y) \\
(x \in y)^{\langle M,E\rangle} & = & xEy \\
(\neg\alpha)^{\langle M,E\rangle} & = & \neg\,(\alpha^{\langle M,E\rangle}) \\
(\alpha \wedge \beta)^{\langle M,E\rangle} & = & \alpha^{\langle M,E\rangle} \wedge \beta^{\langle M,E\rangle} \\
(\forall x\, \alpha)^{\langle M,E\rangle} & = & \forall x\, (x \in M \to \alpha^{\langle M,E\rangle}) \\
(\exists x\, \alpha)^{\langle M,E\rangle} & = & \exists x\, (x \in M \wedge \alpha^{\langle M,E\rangle}).
\end{array}$$

Cuando $E = \in$, la relativización de $\varphi$ a $\langle M, \in\rangle$ se denota mediante $\varphi^M$ y es llamada *relativización natural* o *estándar*.

**Teorema 1.1** Teorema Fundamental de Modelos Internos.

*Si* $\Gamma,\ \Sigma$ *son conjuntos de enunciados y* $M$ *una clase (fórmula) tales que*

$$\begin{array}{ll} (1) & \Gamma \vdash \exists x\,(x \in M) \\ (2) & \Gamma \vdash \sigma^M \text{ , } \textit{para todo } \sigma \in \Sigma, \end{array}$$

*entonces:* $Cons(\Gamma) \Rightarrow Cons(\Sigma)$.

*Si, junto con (1) y (2),* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi^M$.

El enunciado de este teorema intuitivamente dice que: si desde $\Gamma$ se prueba que $M \neq \emptyset$ y $M$ es modelo de $\Sigma$ entonces se tiene que $\Sigma$ es consistente si $\Gamma$ lo es. Si además $\varphi$ se deduce de $\Sigma$ entonces, desde $\Gamma$ , se prueba que $M$ es modelo de $\varphi$.

*Demostración.*Si $Cons(\Gamma)$ entonces existe $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon \rangle$ tal que $\mathcal{A} \models \Gamma$. Así :

$$\begin{array}{ll} (1') & \mathcal{A} \models \exists x\,(x \in M) \\ (2') & \mathcal{A} \models \sigma^M \ \textit{para todo}\, \sigma \in \Sigma. \end{array}$$

Sea $\mathcal{B} = \langle B, \varepsilon|_B \rangle$, donde $B = \{a \in A : \mathcal{A} \models x \in M\,[a]\} \subseteq A$. Por (1'), $B \neq \emptyset$. A continuación se prueba que $\mathcal{B} \models \Sigma$. Sea $\sigma \in \Sigma$, por (2') $\mathcal{A} \models \sigma^M$ entonces, si se cumple el Lema(*):

$$\mathcal{A} \models \sigma^M \Longleftrightarrow \mathcal{B} \models \sigma,$$

se tiene que $\mathcal{B} \models \sigma$ y así $\mathcal{B} \models \Sigma$ y $Cons(\Sigma)$.

Ahora considérese $\Sigma \vdash \varphi$. Entonces $\Sigma \models \varphi$ . Sea $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \Gamma$ entonces, por la prueba anterior, $\mathcal{B} \models \Sigma$, por la suposición se tiene que $\mathcal{B} \models \varphi$ y por el Lema(*) resulta que $\mathcal{A} \models \varphi^M$. En consecuencia $\Gamma \models \varphi^M$, de donde $\Gamma \vdash \varphi^M$.

□

<u>Observación</u>: Se puede generalizar el teorema a $\langle M, E \rangle$, no necesariamente estándar, defininiendo $\in^{\mathcal{B}}$ como: $\in^{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{A}} \cap B^2$; es decir,

$$\in^{\mathcal{B}} = \{\langle b_1, b_2 \rangle \in B^2 | \mathcal{A} \models (v_0 E v_1)\,[b_1, b_2]\}$$

y $\mathcal{B} = \langle B, \in^{\mathcal{B}} \rangle$ cumple el Lema(*).

**Lema 1.2** Lema (*)

*Sea* $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ *una fórmula y* $a_1, \cdots, a_n \in B \subseteq A$*, entonces* $\mathcal{A} \models \varphi^M\,[a_1, \cdots, a_n]$ *si, y sólo si,* $\mathcal{B} \models \varphi\,[a_1, \cdots, a_n]$

*Demostración.* Prueba por inducción sobre la formación de $\varphi$
(i). $\varphi = x \approx y = \varphi^M$ ó $\varphi = x \in y = \varphi^M$.

Sean $a_1, a_2 \in B \subseteq A$: $\mathcal{A} \models x \approx y\,[a_1, a_2]$ *sii* $a_1 = a_2$ *sii* $\mathcal{B} \models x \approx y\,[a_1, a_2]$. $\mathcal{A} \models x \in y\,[a_1, a_2]$ *sii* $(a_1, a_2) \in \varepsilon^{\mathcal{A}}|_B = \varepsilon|_B = \varepsilon^{\mathcal{B}}$ *sii* $\mathcal{B} \models x \in y\,[a_1, a_2]$.

Hipótesis de inducción para $\psi, \chi$:
(ii) $\varphi = \neg\psi$.

$\mathcal{A} \models (\neg\psi)^M \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg(\psi^M) \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi^M \Leftrightarrow \mathcal{B} \not\models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \neg\psi$.
(iii) $\varphi = \psi \vee \chi$.

$\mathcal{A} \models (\psi \vee \xi)^M \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\psi^M \vee \chi^M) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi^M$ ó $\mathcal{A} \models \chi^M$
$\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi$ ó $\mathcal{B} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models (\psi \vee \chi)$.
(iv) $\varphi = \exists x\, \psi$.

$\mathcal{A} \models (\exists x\, \psi)^M\,[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists x(x \in M \wedge \psi^M)[a_1, \cdots, a_n]$
$\Leftrightarrow$ *hay un* $a \in A$ *tal que* $\mathcal{A} \models x \in M \wedge \psi^M\,[a, a_1, \ldots, a_n]$
$\Leftrightarrow$ *hay un* $a \in A$ *tal que* $(\mathcal{A} \models x \in M\,[a, a_1, \ldots, a_n]$ *y*
$\mathcal{A} \models \psi^M\,[a, a_1, \ldots, a_n])$
$\Leftrightarrow$ *hay un* $a \in B$ *tal que* $\mathcal{A} \models \psi^M\,[a, a_1, \ldots, a_n]$
$\Leftrightarrow$ *hay un* $a \in B$ *tal que* $\mathcal{B} \models \psi\,[a, a_1, \cdots, a_n]$
$\mathcal{B} \models \exists x\psi\,[a_1, \ldots, a_n]$.

$\square$

**Definición 1.3**
(1) *Un Relacional $E$ es* extensional *sobre una clase $M$ si $\langle M, E\rangle$ es modelo de Extensionalidad.*
(2) *Una clase $M$ es* extensional *si $M$ es, con $E = \in$, modelo de Extensionalidad.*

**Teorema 1.4** Esquema General de Recursión.

*Sea $R$ un relacional bien fundado y limitado por la izquierda. Sea $G$ un funcional. Entonces se puede definir un funcional $F$ tal que*

*i.* $Dom(F) = Cam(R)$

*ii.* $\forall x \in Cam(R),\ F(x) = G(F|_{x_R})$

*iii. Si $F'$ es otro funcional que satisface i y ii entonces $F = F'$.*

El esquema general de recursión puede reescribirse completamente en el lenguaje de ZF. Puede expresarse para un relacional $R$ sobre una clase $A$ (es decir: $R \subset A \times A$) y $DomR = A$.

**Teorema 1.5** Teorema del Isomorfismo.

*Dos clases transitivas isomorfas son iguales. Es decir, si $M_1$, $M_2$ son clases transitivas y $\pi : \langle M_1, \in \rangle \cong \langle M_2, \in \rangle$ entonces $M_1 = M_2$ y $\pi(u) = u, \quad \forall u \in M_1$.*

*Demostración.* Se verá por $\in$-inducción que $\forall x \in M_1(\pi(x) = x)$. Sea $x \in M_1$ y, por hipótesis de inducción, $\forall z \in x(\pi(z) = z)$. Por demostrar que $\pi(x) = x$.

Sea $z \in x$, entonces $z = \pi(z) \in \pi(x)$; pues $\pi$ es morfismo. Esto prueba que $x \subseteq \pi(x)$.

Para probar $\pi(x) \subseteq x$, sea $t \in \pi(x)$. Como $\pi(x) \in M_2$ y $M_2$ es transitiva, $t \in M_2$; entonces, puesto que $\pi$ es sobre, existe $z \in M_1$ tal que $\pi(z) = t$, por lo tanto $\pi(z) \in \pi(x)$ luego, como $\pi$ es morfismo, $z = \pi(z) = t \in x$

Así que $\pi(x) = x \ \forall x \in M_1$ y entonces $M_2 = M_1$.

□

Obsérvese que sólo basta pedir que $M_2$ sea transitiva y $\pi$ un morfismo sobre $M_2$, para que siga siendo válido el teorema.

**Teorema 1.6** Colapso de Mostowski

*Si $R$ es un relacional bien fundado, limitado por la izquierda y extensional en una clase $A$ entonces:*
*i.- Hay una clase transitiva $M$ y un isomorfismo $\pi$ tal que $\langle A, R \rangle \overset{\pi}{\cong} \langle M, \in \rangle$. Además $\pi$ y $M$ son únicos.*
*ii.- En particular, cualquier clase extensional (con $\in$) es isomorfa a una única clase transitiva.*
*iii.- En el caso ii, si $B \subset A$ y $B$ transitiva, entonces $\forall x \in B, \ \pi(x) = x$.*

*Demostración.*
i.- Sea $G$ el relacional definido como:

$$\langle u, v \rangle \in G \Leftrightarrow Func(u) \wedge \exists x(dom(u) = x_R) \wedge v = u[x_R]$$

donde $u[x_R] = \{u(y) : y \in x_R\}$. Como se puede ver, $G$ es funcional y como $R$ es bien fundado y limitado por la izquierda, se puede definir por recursión un único funcional $\pi$ tal que:

$$\begin{aligned} dom(\pi) &= A \supseteq Cam(R) \\ \forall x \in A,\ \pi(x) &= G(\pi|_{x_R}) = \{\pi(z) : z \in x_R\} = \pi[x_R] \end{aligned}$$

Sea $M = \{\pi(x) : x \in A\} = \pi[A]$.
$\pi$ y $M$ son llamados *función de Mostowski* y *Colapso de Mostowski*, respectivamente . Veamos que $M$ es transitiva, $\pi$ es biyectivo , es morfismo y único, y por consiguiente $M$ es única.
<u>$M$ es transitiva</u>.
Sea $y \in w \in M$, entonces $w = \pi(x)$ para algún $x \in A$. Entonces $w = \{\pi(z) : z \in x_R\}$. Si $y \in w$ se tiene que $y = \pi(z)$, para algún $z \in x_R$, por consiguiente $zRx$; de donde $z \in Cam(R) \subseteq A$. Es decir $y \in M$.
<u>$\pi$ es sobre</u>.
Inmediato de la definición de $M$: $M = \pi[A]$.
<u>$\pi$ es inyectiva</u>.
Aquí se usa la extensionalidad de $R$ en $A$. Supóngase que $\pi$ no es 1-1. Sea $z \in M$ de rango mínimo tal que $z = \pi(x) = \pi(y)$ con $x \neq y$. Como $R$ es extensional, $x_R \neq y_R$. Sin pérdida de generalidad, sea $u \in A$ tal que $u \in x_R - y_R$. Entonces, $uRx$ y $\langle u, y\rangle \notin R$. Así , por definición de $\pi$, $\pi(u) \in \pi(x) = \pi(y) = z$; luego $\pi(u) \in \pi(y)$ de donde $\pi(u) = \pi(v)$ para algún $v \in y_R$, por lo que $u \neq v$. Pero $\pi(u) \in \pi(y) = z$ por lo que $rango(\pi(u)) < rango(z)$ !.
<u>$\pi$ es morfismo</u>.
Por demostrar: $xRy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)$.
$\rightarrow$. Si $xRy$ entonces, por definición de $\pi$, $\pi(x) \in \pi(y) = \{\pi(z) : z \in y_R\}$.
$\leftarrow$. Si $\pi(x) \in \pi(y)$ entonces $\pi(x) = \pi(z)$ para algún $z \in y_R$; pero como $\pi$ es inyectivo $x = z$, de donde $x \in y_R$; o sea $xRy$.
<u>Unicidad</u>.
Sean $\pi_1$, $\pi_2$ dos isomorfismos de $\langle A, E\rangle$ sobre $\langle M_1, \in\rangle$ y $\langle M_2, \in\rangle$ respectivamente; entonces $M_1 \cong M_2$ y, como $M_1$ y $M_2$ son transitivas , por el Teorema del Isomorfismo $M_1 = M_2$ y $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} = id$; de donde $\pi_1 = \pi_2$ (pues $\pi_1(x) = id \circ \pi_1(x) = (\pi_2 \circ \pi_1^{-1}) \circ \pi_1(x) = \pi_2(x)$).

ii.- Caso particular con $R = \in$ que es bien fundada, por Regularidad, y limitada por la izquierda y si $M$ es extensional (con $\in$). Entonces toda clase extensional es isomorfa a una única clase transitiva.

iii.- En el caso ii. si $B \subseteq A$, con $B$ transitiva, entonces $\forall x \in B,\ x \subseteq B \subseteq A$ y así $x \cap A = x$, de donde $\pi(x) = \pi[x \cap A] = \pi[x]$.

Veamos , por $\in$-inducción, que $\forall x \in B,\ \pi(x) = x$. Si $\forall z \in x,\ \pi(z) = z$ entonces $\pi(x) = \pi[x] = \{\pi(z) : z \in x\} = \{z : z \in x\} = x$.

□

*Observación.* Nótese que este teorema generaliza el teorema de enumeración: *todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

**Corolario 1.7**
*Si* ZF *tiene un modelo bien fundado con E limitada por la izquierda, entonces* ZF *tiene un modelo estándar transitivo.*

## 1.2 Absolutez y Relativización.

Sea $\varphi$ una fórmula con a lo mas $x_1, \cdots, x_n$ variables libres. Sean $M,\ N$ dos clases no vacías. $\varphi$ es $M$-$N$- absoluta sii $M \subseteq N$ y

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in M[\varphi^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \cdots, x_n)].$$

Para el caso $N = V$, se dice que $\varphi$ es *absoluta para M* ó *M-absoluta* sii

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in M[\varphi^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n)]$$

$\varphi$ es *absoluta* sii $\varphi$ es $M$-absoluta para toda clase $M$ no vacía.

La idea es que $\varphi$ significa lo mismo en M que en el Universo. Todo lo anterior se dice y se hace desde un conjunto de enunciados $\Gamma$ que puede ser, por ejemplo, $\mathrm{ZF}, \mathrm{ZF}^-, \mathrm{ZF} \setminus Potencia, \mathrm{ZF} \setminus Infinito$, etc.

Las fórmulas $x \in y,\ \ x = y$ son absolutas.

**Lema 1.8**
*Si $\varphi, \psi$ son M-absolutas entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ son M-absolutas.*

**Corolario 1.9**
*Si $\varphi$* no *tiene cuantificadores (booleana), $\varphi$ es absoluta.*

**Lema 1.10**
*Si $\varphi$ es absoluta para $M$ y $M$ es transitiva entonces $\exists x \in y\, \varphi$ es absoluta para M.*

*Demostración.* Sea $y \in M$.

$$\begin{aligned}(\exists x \in y \varphi)^M &\Leftrightarrow \exists x \in M(x \in y \wedge \varphi^M)\\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in y \wedge \varphi^M)\\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in y \wedge \varphi)\\ &\Leftrightarrow \exists x \in y\, \varphi.\end{aligned}$$

La segunda equivalencia se debe a que $M$ es transitiva y la tercera a que $\varphi$ es M-absoluta.

□

**Definición 1.11**
*i). Una fórmula del tipo $\exists x \in y\, \varphi \equiv \exists x(x \in y \wedge \varphi)$ se dice que es de* cuantificador acotado.

*ii). Si $\varphi$ es una fórmula donde* todo *cuantificador es acotado, se dice que $\varphi$ es una $\Delta_0$-*fórmula *o simplemente es $\Delta_0$ .*

*Definición Recursiva de Fórmula $\Delta_0$.*

*a)* $x \approx y,\ x \in y$ *son* $\Delta_0$.
*b)* *Si* $\varphi, \psi$ *son* $\Delta_0$, *entonces* $\neg\varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \exists x(x \in y \wedge \varphi)$ *son* $\Delta_0$.

**Corolario 1.12**
*Si $M$ es transitiva,* toda *fórmula $\Delta_0$ es M-absoluta, y* toda *fórmula lógicamente equivalente a una $\Delta_0$ es absoluta.*

Ejemplos.
(1). $x \subset y$ es (lógicamente equivalente a) una $\Delta_0$:

$$\begin{aligned}x \subset y &\leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)\\ &\leftrightarrow \neg\exists z\neg(z \in x \rightarrow z \in y)\\ &\leftrightarrow \neg\exists z(z \in x \wedge \neg(z \in y))\\ &\leftrightarrow \neg(\exists z \in x)(\neg(z \in y))\end{aligned}$$

(2) $\forall x \in y\, \varphi$ es cuantificación acotada y es $\Delta_0$ si $\varphi$ lo es.

En efecto: $\forall x \in y\, \varphi \equiv \forall x(x \in y \rightarrow \varphi) \equiv \neg\exists x\neg(x \in y \rightarrow \varphi) \equiv \neg\exists x(x \in y \wedge \neg\varphi) \equiv \neg\exists x \in y\, \neg\varphi$.

**Lema 1.13**
*Sea $\Sigma$, conjunto de teoremas de $L_{\mathrm{ZF}}$, y $M$ clase no vacía tales que*

$$\begin{array}{ll} (i) & \sigma^M \text{ para todo } \sigma \in \Sigma \\ (ii) & \Sigma \vdash \forall x_1, \cdots, x_n(\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \cdots, x_n), \end{array}$$

*entonces $\varphi$ es $M$-absoluta sii $\psi$ es $M$-absoluta.*

*Demostración.* Sean $x_1, \cdots, x_n \in M$. Por $(i)$ y $(ii)$ : $\psi^M(x_1, \cdots, x_n)$ $\leftrightarrow \varphi^M(x_1, \cdots, x_n)$. Por hipótesis $\varphi^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ y por (ii) se tiene que $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \cdots, x_n)$, por lo tanto se tiene: $\psi^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \cdots, x_2)$.

La implicación inversa es análoga a lo anterior.

□

**Corolario 1.14**
*Si $\varphi$, $\psi$ son equivalentes en* ZF*, ó módulo* ZF*, entonces para todo $M$, modelo de* ZF*, $\varphi$ es $M$-absoluta sii $\psi$ es $M$-absoluta.*

**Lema 1.15**
*Si $\varphi$ es $M$-absoluta entonces*

$$\begin{array}{lll} (i) & (\forall x\, \varphi)^M \Leftarrow \forall x\, \varphi & \text{los universales bajan} \\ (ii) & (\exists x\, \varphi)^M \Rightarrow \exists x\, \varphi & \text{los existenciales suben} \end{array}$$

*Demostración.*

(i). $\forall x\, \varphi \Rightarrow \forall x\, (x \in M \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \forall x\, (x \in M \rightarrow \varphi^M) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi)^M$.

(ii). $(\exists x\, \varphi)^M \Leftrightarrow \exists x\, (x \in M \wedge \varphi^M) \Rightarrow \exists x\, \varphi^M \Leftrightarrow \exists x\, \varphi$.

□

**Lema 1.16**
*Las siguientes relaciones y funciones se pueden definir en* $\mathrm{ZF}^-$-Pot-Inf *y son absolutas para modelos transitivos de* $\mathrm{ZF}^-$-Pot-Inf.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(a)$ | $x \in y$ | $(b)$ | $x \approx y$ | $(c)$ | $x \subset y$ |
| $(d)$ | $\{x, y\}$ | $(e)$ | $\{x\}$ | $(f)$ | $\langle x, y\rangle$ |
| $(g)$ | $0$ | $(h)$ | $x \cup y$ | $(i)$ | $x \cap y$ |
| $(j)$ | $x \setminus y$ | $(k)$ | $S(x)(= x \cup \{x\})$ | $(l)$ | *$x$ es transitivo* |
| $(m)$ | $\bigcup x$ | $(n)$ | $\bigcap x(\text{con } x \neq \emptyset)$ | $(o)$ | *$z$ es par ordenado* |
| $(p)$ | $A \times B$ | $(q)$ | *$R$ es una relación* | $(r)$ | $dom(R)$ |
| $(s)$ | $ran(R)$ | $(t)$ | *$R$ es una función.* | | |

**Lema 1.17**
*Las siguientes relaciones y funciones se definen en* ZF-Pot*, y son absolutas para modelos transitivos de* ZF-Pot.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | *x es un ordinal* | $(b)$ | *x es un ordinal límite* |
| $(c)$ | *x es ordinal sucesor* | $(d)$ | *x es ordinal finito* |
| $(e)$ | *el tipo de orden de* $(A, r)$ | $(f)$ | $\alpha^\beta$ *(exponenciación ordinal)* |
| $(g)$ | *r bien ordena A* | $(h)$ | $Cltr(x)$ *(clausura transitiva de x)* |
| $(i)$ | $\alpha + \beta$ *(suma ordinal)* | $(j)$ | $\alpha\beta$ *(producto ordinal)* |
| $(k)$ | $0, 1, 2, \cdots$ | $(l)$ | $\rho(x)$ *(el rango de x)* |
| $(m)$ | $\omega$ | $(n)$ | ${}^nA$ *(funciones de n en A)* |
| $(o)$ | *x es finito* | $(p)$ | $A^{<\omega}(=\bigcup\{{}^nA : n\in\omega\})$. |

**Lema 1.18**
*Funciones y relaciones no absolutas para modelos transitivos.*

$(i)$ *Potencia de un conjunto x.*
$(ii)$ *Tener el mismo número cardinal.*
$(iii)$ *Ser un cardinal.*
$(iv)$ *La cofinalidad de* $\alpha$.
$(v)$ *Ser cardinal regular.*

## 1.3 El teorema de Reflexión.

Se entiende por *subfórmula* cualquier parte de una fórmula que a su vez sea fórmula. Por ejemplo $P(x) \wedge Q(x, y)$ y $Q(x, y)$ son subfórmulas de la fórmula $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x, y)$.

**Definición 1.19**
*Una lista de fórmulas* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ *se llama* cerrada por subfórmulas *si toda subfórmula de una fórmula de la lista pertenece a la lista.*

**Lema 1.20** Criterio de Tarski-Vaught.
*Sean* $M$, $N$ *clases, con* $M \subseteq N$, *y* $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ *una lista finita de fórmulas, cerrada por subfórmulas, entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*
*a)* $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ *son* $M-N$*-absolutas*

*b) Para toda $\varphi_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ de la forma $\exists x\, \varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$ se cumple:*

$$\forall y_1, \cdots, y_m \in M \quad [\exists x \in N\, \varphi_j^N(x, y_1, \cdots, y_m) \rightarrow \exists x \in M\, \varphi_j^N(x, y_1, \cdots, y_m)].$$

*Demostración.*
$a) \Rightarrow b)$. Sean $\varphi_i = \exists x\, \varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$ y $\overline{y} = y_1, \cdots, y_m \in M$. Si $\exists x \in N\, \varphi_j^N(x, \overline{y})$, como $\exists x \in N\, \varphi_j^N(x, \overline{y}) = (\exists x \varphi_j(x, \overline{y}))^N = \varphi_i^N$ entonces por la M-N-absolutez de $\varphi_i$ se tiene que $\varphi_i^M$ o sea $\exists x \in M\, \varphi_j^M(x, \overline{y})$ y por la M-N-absolutez de $\varphi_j$ se concluye que $\exists x \in M\, \varphi_j^N(x, \overline{y})$.

$b) \Rightarrow a)$. Sea $\varphi_i$ cualquiera. Por inducción sobre la formación de $\varphi_i$, se verá que $\varphi_i$ es M-N-absoluta. Si $\varphi_i$ es atómica, es trivial que es M-N-absoluta. Si $\varphi_i$, $\varphi_j$ son M-N-absolutas también lo son $\neg\varphi_j$, $\varphi_i \wedge \varphi_j$. Supóngase que $\varphi_i = \exists x\, \varphi_j(x, \overline{y})$ y considérese $\overline{y} \in M$ fijo, entonces $\varphi_i^M(\overline{y}) = \exists x \in M\, \varphi_j^M(x, \overline{y}) \Leftrightarrow \exists x \in M\, \varphi_j^N(x, \overline{y})$. Puesto que $M \subseteq N$ $\exists x \in N\, \varphi_j^N(x, \overline{y})$.Por otro lado, por la suposición b), $\exists x \in M\, \varphi_j^N(x, \overline{y}) \Leftrightarrow \exists x \in N\, \varphi_j^N(x, \overline{y}) = \varphi_i^N(\overline{y})$.

□

**Teorema 1.21** Teorema General de Reflexión.
*Sean $Z$ una clase no vacía y, para todo ordinal $\alpha$, $Z_\alpha$ un conjunto, tales que:*

*A)* $\alpha < \beta \rightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta$.

*B)* $\lim(\gamma) \rightarrow Z_\gamma = \cup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha$.

*C)* $Z = \cup_{\alpha \in Or} Z_\alpha$ [1].

*Entonces, para cualquier lista finita de fórmulas $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ se tiene que:*

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha(\varphi_1, \cdots, \varphi_n \; son \, Z_\beta - Z \, - \, absolutas).$$

*Demostración.* La idea es aplicar el Criterio de Tarski-Vaught con $N = Z$ y encontrar $M = Z_\beta$, para alguna $\beta > \alpha$ y para el $\alpha$ dado, y que cumpla (b) del Lema anterior.

[1] Con las condiciones A, B, C se define una *Jerarquía Acumulativa.*

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la lista $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ es cerrada por subfórmulas. Para cada $i = 1, \cdots, n$, sea $m_i$ el número de variables libres de $\varphi_i$ y sean $G_i : V^{m_i} \to Or$ y $F_i : Or \to Or$ funcionales definidas por:

$$G_i(y_1, \cdots, y_{m_i}) = \begin{cases} \min\{\eta : \exists x \in Z_\eta \, \varphi_j^Z(x, \overline{y})\} & si\, \varphi_i = \exists x \, \varphi_j(x, \overline{y}) \\ & y\ \exists x \in Z \, \varphi_j^Z(x, \overline{y}) \\ 0 & en\, otro\, caso. \end{cases}$$

$$F_i(\xi) = \sup\{G_i(y_1, \cdots, y_{m_i}) : y_1, \cdots, y_{m_i} \in Z_\xi\} = \sup\, G_i[Z_\xi^{m_i}].$$

Obsérvese que, $\forall \xi \in Or$, $Z_\xi$ es conjunto y entonces, por el axioma de Reemplazo, $\{G_i(\overline{y}) : \overline{y} \in Z_\xi\}$ es conjunto de ordinales; así que $F_i(\xi)$ existe para cada $\xi \in Or$.

I . Si $\varphi_i$ no es existencial, $F_i(\xi) = 0$ para todo $\xi \in OR$.

II . $F_i$ es monótona; en efecto: si $\xi < \xi'$, $\{G_i(\overline{y}) : \overline{y} \in Z_\xi\} \subseteq \{G_i(\overline{y}) : \overline{y} \in Z_{\xi'}\}$ por lo que

$$F_i(\xi) = \sup\{G_i(\overline{y}) : \overline{y} \in Z_\xi\} \leq \sup\{G_i(\overline{y}) : \overline{y} \in Z_{\xi'}\} = F_i(\xi').$$

III Si $\lim(\beta)$ y $\forall i \in \{1, \cdots, n\} \forall \xi < \beta \, (F_i(\xi) < \beta)$ entonces para cualquier $\varphi_i = \exists x \, \varphi_j(x, \overline{y})$ se cumple que:

$$\forall y_1, \cdots, y_{m_i} \in Z_\beta[\exists x \in Z \, \varphi_j^Z(x, \overline{y}) \to \exists x \in Z_\beta \, \varphi_j^Z(x, \overline{y})].$$

Sea $\varphi_i = \exists x \, \varphi_j(x, \overline{y})$. Sean $y_1, \cdots, y_{m_i} \in Z_\beta$ y se supone que $\exists x \in Z \, \varphi_j^Z(x, \overline{y})$, entonces, $\exists x \in Z_{G_i(\overline{y})} \, \varphi_j^Z(x, \overline{y})$. Como $\lim(\beta)$ y $\overline{y} \in Z_\beta$ entonces, por B, $\exists \xi < \beta$ tal que $\overline{y} \in Z_\xi$, de donde $G_i(\overline{y}) \leq F_i(\xi) < \beta$. Así , por A, $Z_{G_i(\overline{y}} \subseteq Z_\beta$ y por lo tanto $\exists x \in Z_\beta \, \varphi_j^Z(x, \overline{y})$.

IV . Por el lema anterior (b) $\to$ a)), si $\lim(\beta)$ y $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \forall \xi < \beta(F_i(\xi) < \beta)$, entonces $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ son $Z_\beta - Z-$absolutas.

Veamos que, dado $\alpha$, podemos encontrar $\beta > \alpha$ tal que

$$\lim(\beta) \wedge \forall i \in \{1, \cdots, n\} \, \forall \xi < \beta \, (F_i(\xi) < \beta)$$

Se define, por recursión sobre $\omega$:

$$\begin{aligned} \beta_0 = & \ \alpha \\ \beta_{k+1} = & \ \max\{\beta_{k+1}, \ F_1(\beta_k), \cdots, F_n(\beta_k)\}. \end{aligned}$$

Sea $\beta = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Como $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \cdots$, $\beta$ es límite $> \alpha$. Sea $\xi < \beta$, entonces $\xi < \beta_n$ para algún $n \in \omega$, por la observación II,

$$F_i(\xi) \leq F_i(\beta_n) \leq \beta_{n+1} < \beta$$

Así, $\forall \xi < \beta$ , $F_i(\xi) < \beta$ y esto para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$.

□

# Capítulo 2

# Forcing

## 2.1 Descripción del Método.

**Definición 2.1**
*$\sigma$ es refutable a partir de $\Sigma$ si $\neg\sigma$ es demostrable a partir de $\Sigma$. Es decir $\Sigma \vdash \neg\sigma$.*

**Definición 2.2**
*Un enunciado $\sigma$ es* independiente de un conjunto de enunciados $\Sigma$
*si $\sigma$ no es ni refutable ni demostrable a partir de $\Sigma$,*
*si $\Sigma \cup \{\sigma\}$ y $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ son ambos conjuntos consistentes de enunciados,*
*si $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} y \Sigma \cup \{\sigma\}$ ambos tienen modelo.*

**Definición 2.3**
*Un enunciado $\sigma$ es independiente de un conjunto de enunciados $\Sigma$ relativo a $Cons(\Sigma)$*
*si $Cons(\Sigma) \Rightarrow Cons(\Sigma \cup \{\sigma\}) \wedge Cons(\Sigma \cup \{\neg\sigma\})$*
*si $Cons(\Sigma) \Rightarrow \Sigma \cup \{\sigma\}$ tiene modelo y $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ tiene modelo,*
*si $Cons(\sigma) \Rightarrow \Sigma \nvdash \neg\sigma \ \wedge \ \Sigma \nvdash \sigma$.*

El teorema siguiente nos da condiciones suficientes para tener modelos estándar.

**Teorema 2.4**
*Sea $M$ un conjunto transitivo que satisface las siguientes condiciones,*

*i.* $\omega \in M$, *(Infinito*$^M$*, pues* $\omega$ *es el mínimo inductivo).*

*ii.* *Todo subconjunto de* $M$ *definido por una fórmula de* $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ *relativizada a* $M$ *que está contenido en un conjunto que pertenece a* $M$ *es él mismo un conjunto que pertenece a* $M$*, (Separación*$^M$*).*

*iii.* *Para toda fórmula* $\varphi$ *cuya restricción a* $M$ *es una relación funcional en* $M$*, la imagen bajo* $\varphi^M$ *de cualquier conjunto que pertenece a* $M$ *y que esté en el dominio de* $\varphi^M$*, es ella misma un conjunto que pertenece a* $M$*, (Reemplazo*$^M$*).*

*iv.* *Para todo conjunto* $a \in M$, $\mathcal{P}(a) \cap M$ *está contenido en un conjunto que pertenece a* $M$*, (Potencia*$^M$*, con ii. se ve que* $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$*).*

*v.* $\forall x \in M, \bigcup x \in M$ *ó* $\bigcup x$ *está contenido en un conjunto que pertenece a* $M$*, (Unión*$^M$*).*

*Entonces* $(M, \in)$ *es un modelo de* ZF*.*

*Demostración.* Lo anterior se cumple pues:
a) $M$ es transitivo $\Rightarrow$ Extensionalidad$^M$.
b) $(M, \in)$ estándar $\Rightarrow$ Regularidad$^M$. Pues:
Sea $x \in M$, supóngase que $\exists y \in M(y \in x)$, es decir $x \neq \emptyset$. Sea $x^M = \{y \in M : y \in x\} \subseteq M$, $x^M \neq \emptyset$; y sea $y \in x^M$ tal que $\forall z \in x^M(z \notin y)$. Por lo tanto, $\exists y[y \in M \wedge y \in x \wedge \forall z(z \in M \wedge z \in x \rightarrow z \notin y)]$ (es decir Regularidad$^M$).
c) Los axiomas Vacío y Par se pueden demostrar a partir de los otros. □

Comentarios acerca de Modelos en ZF.

1. Si ZF tiene un modelo estándar entonces ZF tiene un modelo transitivo, contable y estándar (abreviado: modelo contable, transitivo y estándar). Sea $(M, \in) \models$ ZF. Por Löwenheim-Skolem Fuerte (descendente) existe $M'$ numerable tal que $(M', \in) \models$ ZF, pues $(M', \in) \preceq (M, \in)$ es subestructura elemental. Ahora, por el colapso de Mostowski, ya que $(M', \in)$ es un conjunto bien fundado y limitado por la izquierda (por ser $M'$ estándar con $\in$), existe

un conjunto $M''$ transitivo tal que $(M', \in) \cong (M'', \in)$ y entonces $(M'', \in)$ es modelo contable, transitivo y estándar de ZF.

Obsérvese que no se puede invertir el orden de aplicación de los teoremas, pues si $(M, \in)$ es transitivo y $(M', \in) \preceq (M, \in)$ no necesariamente $M'$ es transitivo.

2. Si ZF tiene modelo entonces tiene modelo numerable. Se aplica Löwenheim-Skolem. Pero no se puede decir que tal modelo sea bien fundado ni que sea estándar.

3. Si ZF tiene modelo bien fundado (es decir $(M, E) \models$ ZF y $E$ bien fundada sobre $M$) entonces ZF tiene modelo estándar transitivo. Se aplica Colapso de Mostowski. Entonces, aplicando Löwenheim-Skolem junto con Colapso de Mostowski, se puede tener un modelo contable, transitivo y.

4. Supóngase que se quiere probar (desde ZFC) la consistencia relativa de ZF + V $\neq$ L. Recuérdese que ZF $\vdash$ (V = L)$^{\mathrm{L}}$. Si hay un modelo clase estándar $N$ de ZF + V $\neq$ L, por la minimalidad de L, se tendría L $\subset N$ pero L $\neq N$ (pues V = L es cierto en L y falso en $N$); así pues habría una extensión propia de L. Argumentando desde ZFC se concluye que ZFC $\vdash$ V $\neq$ L ! (suponiendo $Cons$(ZFC) pues ZFC + V = L es consistente relativo a ZFC).

   La solución será trabajar con conjuntos modelo $N$ para ZF + V $\neq$ L. El argumento anterior aplicado a $N$ usando minimalidad de L para modelos conjunto lleva a que:

$$\mathrm{L}_{o(N)} \subset N \text{ y } \mathrm{L}_{o(N)} \neq N$$

   que no contradice V = L, (V = L no se puede contradecir). Así si $x \in N \setminus \mathrm{L}_{o(N)}$ entonces x todavía puede estar en L en cuyo caso $\rho_{\mathrm{L}}(x) > o(N)$.

Ideas del método de Forcing.

1.- Ingenua. A partir de un modelo contable, transitivo y estándar $M$ de ZFC (el modelo base) dar un procedimiento general para expandir $M$ a un modelo contable, transitivo y estándar $N$ de ZFC tal que

$M \subset N$ y $o(M) = o(N)$, ($N$ es la extensión genérica de $M$). Si sucede que $M \neq N$, $N$ satisfará $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$, ya que por resultados anteriores:

$$\mathrm{L}^N = \mathrm{L}_{o(N)} = \mathrm{L}_{o(M)} = \mathrm{L}^M \subset M \subset N$$

y por consiguiente $\mathrm{L}^N \subset N$; de donde $(\mathrm{V} \neq \mathrm{L})^N$ o sea que $N$ satisface $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$.

Obsérvese que esto no prueba que $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$ (de hecho esto no se puede probar pues si $x \in N \setminus \mathrm{L}_{o(N)}$, $x$ puede aun estar en L solo si $\rho_{\mathrm{L}}(x) > o(N)$.

Si se supone $Cons(\mathrm{ZFC})$, se quiere probar $Cons(\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L})$. Pero bajo la suposición de la consistencia de ZFC no se puede asegurar que haya un modelo contable, transitivo y estándar de ZFC. Lo único que se tiene es que hay un modelo conjunto de ZFC, esto por el Teorema de Completud de Gödel, el cual, por el Teorema de Löwenheim - Skolem, es numerable.

2.- Ingenua-Realista. No se necesita un modelo contable, transitivo y estándar de *todo* ZFC; basta que el modelo lo sea de un pedazo finito; esto *sí* se tiene por el Teorema de Reflexión, el Colapso de Mostowski y el Axioma de Elección. Lo que se hace es partir de un modelo contable, transitivo y estándar para un conjunto *finito* de axiomas de ZFC, digamos $M$, el cual es el modelo base. Se da un procedimiento general para expandirlo a un modelo contable, transitivo y estándar de ese conjunto finito de axiomas de ZFC, digamos $N$, con $M \subseteq N$ y $o(M) = o(N)$, ($N \equiv$ extensión genérica de$M$ ó $N \equiv M[G]$) y si $M \neq N$, $N$ satisface $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$. Con lo cual se tiene un método para dar pruebas de consistencia relativa.

**Teorema 2.5**

*Sea $\sigma$ un enunciado de $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$. Sea $M$ un* modelo contable, transitivo y *estándar de* ZFC *y supóngase que se puede construir una extensión genérica $M[G] \supset M$ tal que $M[G]$ es modelo de $\sigma$ y de* ZFC*. Entonces*

$$Cons\mathrm{ZFC} \Rightarrow Cons(\mathrm{ZFC} + \sigma)$$

*Demostración.*. Si ZFC + $\sigma$ es inconsistente, hay un conjunto de axiomas $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ de ZFC y un enunciado $\alpha$ tal que

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \sigma \vdash \alpha \wedge \neg\alpha.$$

Como una prueba es un objeto metamatemático finito, es fácil ver (de manera recursiva) que hay un subconjunto finito $\Sigma$ de axiomas de ZFC tal que para todo modelo contable, transitivo y estándar $M$ de $\Sigma$ hay una extensión genérica $M[G]$ de $M$ la cual es un modelo contable, transitivo y estándar de $\Sigma$ y de $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \sigma\}$. Del Teorema de Reflexión se tiene que

$$\text{ZFC} \vdash \exists M(M \text{ es modelo contable, transitivo y estándar de } \Sigma \cup \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\});$$

entonces

$$\text{ZFC} \vdash \exists N(N, \text{ es modelo contable, transitivo y estándar de } \Sigma \cup \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \sigma\}),$$

donde $N = M[G]$. Así por la suposición,

$$\text{ZFC} \vdash \exists N(N \text{ es modelo contable, transitivo y estándar y } (\alpha \wedge \neg\alpha)^N),$$

de donde

$$\text{ZFC} \vdash \alpha^N \wedge (\neg\alpha)^N$$

y ZFC es inconsistente.

□

**Definición 2.6**
*Un* orden parcial *es un par* $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$, *donde* $\leq$ *es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva sobre* $\mathbf{P}$.

En todo lo que sigue se supondrá que si $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ es un orden parcial entonces existe un elemento $1_{\mathbf{P}}$ tal que $\forall p \in \mathbf{P}(p \leq 1_{\mathbf{P}})$. Como es común, $\mathbf{P}$ denota a $\langle \mathbf{P}, \leq, 1_{\mathbf{P}} \rangle$. Los elementos de $\mathbf{P}$ serán llamados *condiciones*, y si $p \leq q$ entonces se dirá que $p$ *extiende* a $q$.

**Definición 2.7**
*$G$ es un* filtro sobre $\mathbf{P}$ *si* $G \subseteq \mathbf{P}$ *y*

$$\begin{array}{rl} i) & \forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q) \\ ii) & \forall p \in G \forall q \in \mathbf{P}(p \leq q \rightarrow q \in G) \end{array}$$

**Definición 2.8**
*Sea* $\mathbf{P}$ *un orden parcial.*

*a. Una* cadena en $\mathbf{P}$ *es un conjunto* $C \subseteq \mathbf{P}$ *tal que* $\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$.

*b.* $p$ *y* $q$ *son* compatibles en $\mathbf{P}$ *si* $\exists r \in \mathbf{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$. *Si* $p$ *y* $q$ *no son compatibles se denotará como* $p \perp q$.

*c. Una* anticadena en $\mathbf{P}$ *es un conjunto* $A \subseteq \mathbf{P}$ *tal que* $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$. *Obsérvese que si* $p$, $q$ *son distintos elementos de* $A$, *son incomparables.*

*d.* $D$ *es* denso en $\mathbf{P}$ *si* $D \subseteq \mathbf{P}$ *y* $\forall p \in \mathbf{P} \exists q \in D(q \leq p)$.

**Definición 2.9**
*Sea* $\mathbf{P} \in M$ *un orden parcial.* $G$ *es* $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, *si*

$$\begin{array}{ll} 1) & G\; es\, un\, filtro\, sobre\; \mathbf{P}, \\ 2) & \forall D(D\; es\, denso\, en\; \mathbf{P}\; y\; D \in M \rightarrow G \cap D \neq \emptyset). \end{array}$$

**Lema 2.10**
*Sean* $M$ *a lo más numerable,* $\mathbf{P} \in M$ *un orden parcial y* $p_0 \in \mathbf{P}$. *Hay un* $G$ *que es* $\mathbf{P}$*-genérico sobre* $M$ *tal que* $p_0 \in G$.

*Demostración..* Como $M$ es a lo más numerable, podemos considerar una enumeración de todos los subconjuntos densos de $\mathbf{P}$ que pertenecen a $M$ : $\{D_n : n \in \omega\}$, $(\{D_n : n \in \omega\}$ puede ser finito o vacío). Recursivamente se elige una sucesión:

$$q_0 = p_0 \quad y \quad \forall n < \omega,\, q_{n+1} \leq q_n \;con\; q_{n+1} \in D_n;$$

esto es posible pues $D_n$ es denso en $\mathbf{P}$ para todo $n < \omega$; así $p_0 = q_0 \geq q_1 \geq q_2 \geq \cdots$.

Sea $G = \{p \in \mathbf{P} : \exists n < \omega(q_n \leq p)\}$. $G$ es un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ y $p_0 \in G$, pues:

1. Dados $p, p' \in G$ existen $q_p$ y $q_{p'}$ tales que $q_p \leq p$ y $q_{p'} \leq p'$; como los $q$'s están en una cadena: $q_p \leq q_{p'}$ ó $q_{p'} \leq q_p$; por consiguiente, existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq p'$, $(r = q_p$ ó $r = q_{p'})$.

2. Si $p \in G$ y $p \geq q_i$ para algún $i$ y si $q \geq p$, por transitividad se tiene que $q \geq q_i$, de donde $q \in G$.

3. Sea $D$ denso en $\mathbf{P}$ tal que $D \in M$, es decir $D = D_n$ para algún $n \in \omega$, de donde $q_{n+1} \in D_n \cap G \neq \emptyset$.

$\square$

Observaciones.
1. En las aplicaciones $M$ será un modelo contable, transitivo y estándar de ZFC y $\langle \mathbf{P}, \leq \rangle \in M$. Las nociones de orden parcial y denso son absolutas para tales modelos.
2. $\{D \in M : D \text{ es denso en } \mathbf{P}\} = \{D : D \text{ es denso en } \mathbf{P}\}^M$, pero que sea contable tal colección no es absoluto. Usualmente este conjunto no será contable en $M$.

**Lema 2.11**
*Sean $M$, modelo estándar y transitivo de ZF, $\mathbf{P} \in M$ un orden parcial tal que*

$$\forall p \in \mathbf{P} \exists q, r \in \mathbf{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$$

*y $G$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, entonces $G \notin M$.*

*Demostración..* Supóngase que $G \in M$, entonces $D = \mathbf{P} \setminus G \in M$; ya que la diferencia conjuntista es absoluta. Además, $D$ es denso pues: si $p \in \mathbf{P}$ y $q, r$ satisfacen la condición del lema entonces $q, r$ no pueden ambos estar en $G$, pues este es filtro. Así $p$ tiene una extensión en $D$, es decir $\exists t \in D(t \leq p)$, ($t$ es $q$ ó $r$). Sin embargo $G \cap D = \emptyset$ contradiciendo la definición de genérico.

$\square$

Si $\mathbf{P}$ satisface la condición del lema, se dirá que es *frondoso*.

**Corolario 2.12**
*Si $\mathbf{P}$ no es frondoso entonces hay un filtro $G$ sobre $\mathbf{P}$ que intersecta a todos los densos de $\mathbf{P}$, y si $\mathbf{P} \in M$, $G \in M$.*

*Demostración..* Como $\mathbf{P}$ no es frondoso, existe $p_0 \in \mathbf{P}$ tal que:

$$\forall q, r \in \mathbf{P}(q \leq p_0 \wedge r \leq p_0 \rightarrow q \text{ compatible con } r). \qquad (1)$$

Sean $Q = \{q \in \mathbf{P} : q \leq p_0\} \subseteq \mathbf{P} \in M$ y $G = \{r \in \mathbf{P} : \exists q \in Q(q \leq r)\} \in M$. $G$ es $\mathbf{P}$-genérico y $G \in M$. Por (1) y de la construcción se ve que $G$ es filtro. Sea $D$ denso en $\mathbf{P}$y $D \in M$. Entonces existe $d \in D$ tal que $d \leq p_0$, por consiguiente $d \in Q \subseteq G$, es decir $d \in G \cap D \neq \emptyset$. Ahora, como $\mathbf{P} \in M$ y $Q = \{q \in \mathbf{P} : \varphi(q)\}$ donde $\varphi(q) = q \leq p_0$ y $G = \{r \in \mathbf{P} : \psi(r)\}$ donde $\psi(r) = \exists q \in Q(q \leq r)$, $\varphi$ y $\psi$ son absolutas, por el Axioma de Comprensión: $Q \in M$ y $G \in M$.

□

**Corolario 2.13**
*Sea $M$ un modelo estándar y transitivo de* ZFC *y $\mathbf{P} \in M$. Entonces $\mathbf{P}$ es frondoso si, y sólo si, para todo filtro $G \subseteq \mathbf{P}$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, $G \notin M$.*

**Corolario 2.14**
*Sea $M$ un modelo transitivo de* ZFC*, $\mathbf{P} \in M$ y $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. Entonces $G$ es un filtro maximal, o sea si $p \in \mathbf{P} \setminus G$ entonces existe $q \in G(p \perp q)$.*

*Demostración..* Sea $p \in \mathbf{P} \setminus G$ y $D_p = \{q \in \mathbf{P} : q \perp p \vee q \leq p\} \in M$ (Axioma de Separación). $D_p$ es denso en $\mathbf{P}$: sea $r \in \mathbf{P}$, si $r \perp p$ entonces $r \in D_p$ y $r \leq r$. Si $r \not\perp p$, sea $s \leq r, p$, entonces $s \in D_p$ y $s \leq r$. Así $D_p \cap G \neq \emptyset$. Por consiguiente $\exists q \in G(p \perp q)$ (pues si $q \leq p$ entonces $p \in G$!).

□

La idea para definir $M[G]$ es la siguiente:
$M[G] = \{x : x$ puede definirse a partir de $G$ aplicando procedimientos teórico-conjuntistas definibles en$M\}$.
Para cada $x \in M[G]$ existirá un *nombre* de $x$, digamos $\tau$, en $M$; el cual dice como construir $x$ a partir de $G$. El nombre $\tau$ nombra a $\tau_G \in M[G]$. $\tau$ es conocido en $M$, pero $\tau_G$ no es conocido en $M$, aunque $\tau$ dice cómo construirlo con operaciones de $M$, a partir de $G$. Pero $G$ no es conocido en $M$. En general $G \notin M$.

**Definición 2.15**
*Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial, $\tau$ es un* $\mathbf{P}$-nombre *si $\tau$ es una relación y*

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau(\sigma\, es\, un \mathbf{P} - nombre \wedge p \in \mathbf{P})$$

Esta definición nos dice que $\tau$ es $\mathbf{P}$-nombre si $\tau$ es una relación cuyo dominio es un conjunto de $\mathbf{P}$-nombres y cuyo rango es un conjunto de condiciones de $\mathbf{P}$. La definición es recursiva.

Ejemplos

1. $\emptyset$ es un $\mathbf{P}$-nombre.

2. Si $p, q \in \mathbf{P}$ entonces $\{\langle\emptyset, p\rangle\}$ es un $\mathbf{P}$-nombre. También $\{\langle\emptyset, p\rangle, \langle\emptyset, q\rangle\}$ es un $\mathbf{P}$-nombre.

3. Si $A \subseteq \mathbf{P},\ \{\langle\emptyset, p\rangle : p \in A\}$ es un $\mathbf{P}$-nombre.

Siguiendo el esquema de recursión , la clase de los $\mathbf{P}$-nombres se define rigurosamente como:

$$\begin{array}{rcl} V_0^{\mathbf{P}} & = & \emptyset \\ V_{\alpha+1}^{\mathbf{P}} & = & \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbf{P}} \times \mathbf{P}) = \{x : x \subseteq V^{\mathbf{P}} \times \mathbf{P}\} \\ V_\gamma^{\mathbf{P}} & = & \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta^{\mathbf{P}} \text{ si } \gamma \text{ es un ordinal límite} \end{array}$$

$V^{\mathbf{P}} = \bigcup_{\alpha\in OR} V_\alpha^{\mathbf{P}}$ es la clase de los $\mathbf{P}$-nombres.

Ser $\mathbf{P}$-nombre es absoluto para modelos transitivos. También $V_\alpha^{\mathbf{P}}$ es absoluto.

Si $M$ es modelo transitivo de ZFC y $\mathbf{P} \in M,\ M^{\mathbf{P}} = V^{\mathbf{P}} \cap M$ o bien por absolutez:

$$M^{\mathbf{P}} = \{\tau \in M : (\tau \text{es } \mathbf{P}\text{-nombre})^M\} = V^{\mathbf{P}} \cap M.$$

**Definición 2.16**
*Sea* $\mathbf{P}$ *un orden parcial y* $G \subseteq \mathbf{P}$. *Se define, para cada* $\mathbf{P}$*-nombre* $\tau,\ \tau_G = i_G(\tau) = \phi_G(\tau) = \{i_G(\sigma) : \exists p \in G(\langle\sigma, p\rangle \in \tau)\}$.

La definición recursiva explícita de $i_G$ sobre la definición de los $V^{\mathbf{P}}$ es:

i. $i_G(\emptyset) = \emptyset$.

ii. Supóngase que para todo $\mathbf{P}$-nombre $\tau \in V_\beta^{\mathbf{P}}$, $\beta < \alpha$, $i_G(\tau)$ está definida
Si $\alpha$ es límite, no hay nada que definir.
Si $\alpha = \beta + 1$ y $\tau \in V_\alpha^{\mathbf{P}}$, entonces

$$i_G(\tau) = \{i_G(\sigma) : \exists p \in G(\langle \sigma, p \rangle \in \tau) \wedge \sigma \in V_\beta^{\mathbf{P}}\}.$$

Por ejemplo: $i_G(\{\langle \emptyset, 1_{\mathbf{P}} \rangle\}) = \{\emptyset\}$, pues $1_{\mathbf{P}} \in G$ para todo $G$. En general:

$$i_G(\{\langle \emptyset, p \rangle\}) = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si } p \in G \\ \emptyset & \text{si } p \notin G. \end{cases}$$

$i_G(\tau)$ es absoluto para transitivos que tengan a $G$, por las mismas razones que ser $\mathbf{P}$-nombre. Pero no significa nada para el modelo $M$ a menos que $G$ esté en el modelo $M$, lo cual en general es falso.

**Definición 2.17**
*Si $M$ es modelo transitivo estándar de* ZFC. $\mathbf{P} \in M$ *y* $G \subseteq \mathbf{P}$, *entonces*

$$M[G] = \{i_G(\tau) : \tau \in M^{\mathbf{P}}\} = i_G[M^{\mathbf{P}}].$$

**Lema 2.18** Minimalidad de $M[G]$.
*Sea $M$ un modelo transitivo de* ZFC, $\mathbf{P} \in M$, *y* $G \subseteq \mathbf{P}$. *Si $N$ es modelo transitivo de* ZFC *con $M \subseteq N$ y $G \in N$ entonces $M[G] \subseteq N$.*

*Demostración.*. Para cada $\tau \in M^{\mathbf{P}}$, $\tau \in N$ (pues $M^{\mathbf{P}} \subseteq M \subseteq N$) y $G \in N$; por lo tanto $i_G(\tau) = (i_G(\tau))^N \in N$.

□

Si $M[G]$ es realmente una extensión de $M$, es un modelo transitivo de ZFC y $G \in M[G]$, entonces $M[G]$ será la mínima extensión genérica de $M$ que contiene a $G$. En este sentido se puede ver a $M[G]$ como la cerradura de $M \cup \{G\}$ bajo las operaciones teórico-conjuntistas definidas en $M$ a partir de $G$.

Observación. Para cada $p \in G$ siempre se puede encontrar un $\mathbf{P}$-genérico $G$, esto por el lema(2.10). Si $\mathbf{P}$ es frondoso, $G \notin M$ y como $\mathbf{P} \in M$ entonces $G \subset \mathbf{P}$. Si existe $q \in \mathbf{P} \setminus G$ tal que $q \perp p$, habrá un genérico $G'$ para el cual $q \in G'$ y $p \notin G'$. Así para algún $p \in \mathbf{P}$ puede haber un genérico en el cual está y otro genérico para el cual no está. Entonces $i_G(\tau)$ puede depender de $G$; sin embargo en algunos casos $i_G(\tau)$ no depende de $G$. Por ejemplo,

$$i_G(\{\langle 0, 1_{\mathbf{P}}\rangle\}) = \{i_G(0)\} = \{0\},$$

para todo genérico $G$, ya que $1_{\mathbf{P}}$ pertenece a todo filtro.

**Definición 2.19**
*Sea* $\mathbf{P}$ *un orden parcial, se define el* $\mathbf{P}$*-nombre* canónico *de x, denotado* $\check{x}$*, recursivamente como:*

$$\check{x} = \{\langle \check{y}, 1_{\mathbf{P}}\rangle : y \in x\}$$

La definición recursiva explícita es:

i. $\emptyset\check{} = \emptyset$.

ii. Si $\check{}y$ está definido para todo $y$ con $\rho(y) < \alpha$ y si $\rho(x) = \alpha$ entonces $\check{}x = \{\langle \check{}y, 1_{\mathbf{P}}\rangle : y \in x\}$.

$\check{x}$ es absoluto para transitivos y si $x \in M$ entonces $\check{x} \in M$.

Ejemplos.

$\check{0} = 0$; $\quad \check{1} = \{\emptyset\}\check{} = \{\ \langle 0, 1_{\mathbf{P}}\rangle\}$;

$\check{2} = \{0{,}1\}\check{} = \{\ \langle\ \check{0},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle,\ \langle\ \check{1},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle\ \} = \{\ \langle 0, 1_{\mathbf{P}}\rangle, \langle\{\langle 0, 1_{\mathbf{P}}\rangle\}, 1_{\mathbf{P}}\rangle\}$;

$\check{3} = \{\ \langle\ \check{0},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle,\ \langle\ \check{1},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle,\ \langle\ \check{2},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle\}$.

$i_G(\check{0}) = i_G(0) = 0$;

$i_G(\check{1}) = i_G(\{\langle 0, 1_{\mathbf{P}}\rangle\}) = \{0\} = 1$;

$i_G(\check{2}) = i_G(\{\langle\ \check{0},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle,\ \langle\ \check{1},\ 1_{\mathbf{P}}\rangle\}) = \{0, 1\} = 2$.

Para ver que $G \in M[G]$, se necesita diseñar un nombre $\Gamma$ para $G$ en $M$ de tal manera que $i_G(\Gamma) = G$.

**Definición 2.20**
*Si* $\mathbf{P}$ *es un orden parcial, sea* $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in \mathbf{P}\}$.

Es claro que el $\mathbf{P}$-nombre $\Gamma$ depende de $\mathbf{P}$ y, al contrario de los nombres canónicos, el objeto nombrado por $\Gamma$ depende de $G$. Además, si $\mathbf{P} \in M$, por la absolutez, $\Gamma \in M$.

**Lema 2.21**
*Si $M$ es modelo transitivo de ZFC, $\mathbf{P}$ orden parcial en $M$ y $G \subseteq \mathbf{P}$ es filtro, entonces*

*a.* $\forall x \in M[\check{x} \in M^{\mathbf{P}} \wedge i_G(\check{x}) = x]$
*b.* $i_G(\Gamma) = G$ *y por lo tanto* $G \in M[G] = i_G[M^{\mathbf{P}}]$
*c.* $M \subset M[G]$
*d.* $M[G]$ *es transitivo.*
*e.* $\forall \tau \in M^{\mathbf{P}}[\rho(i_G(\tau) \leq \rho(\tau)]$.
*f.* $o(M[G]) = o(M)$.

*Demostración.*
*a.* Sea $x \in M$, por la absolutez del nombre canónico $\check{x} \in M^{\mathbf{P}}$. Se prueba por $\in$-inducción sobre $x$ que $i_G(\check{x}) = x$:
$i_G(\emptyset^{\check{}}) = i_G(\emptyset) = \emptyset$
Supongamos que si $\rho(y) < \alpha$ entonces $i_G(\check{y}) = y$. Sea $x$ tal que $\rho(x) = \alpha$. Sabemos que $\check{x} = \{\langle \check{y}, 1_{\mathbf{P}} \rangle : y \in x\}$ entonces, por la definición de $\check{x}$ y $1_{\mathbf{P}}$,

$$\begin{aligned} i_G(\check{x}) &= \{i_G(\sigma) : \exists p \in G(\langle \sigma, p \rangle \in \check{x})\} \\ &= \{i_G(\check{y}) : y \in x\} \text{ pues} 1_{\mathbf{P}} \in G \\ &= \{y : y \in x\} \text{ por hipótesis de inducción.} \end{aligned}$$

*b.* Se obtiene a partir de *i.*, pues si $x \in M$ entonces $\check{x} \in M^{\mathbf{P}}$ y $x = i_G(\check{x}) \in i_G[M^{\mathbf{P}}] = M[G]$.

*c.* $i_G(\Gamma) = \{i_G(\sigma) : \exists p \in i_G(\langle \sigma, p \rangle \in \Gamma\} = \{i_G(\check{p}) : p \in G\}$
$= \{p : p \in G\} = G$.

*d.* Como $M[G] = i_G[M^{\mathbf{P}}]$ y $M^{\mathbf{P}} = V^{\mathbf{P}} \cap M$,

$$i_G(\tau) = \{i_G(\sigma) : \exists p \in G(\langle \sigma, p \rangle \in \tau\}.$$

Si $x \in y \in M[G]$ entonces $y = i_G(\tau)$ para algún $\tau \in M^{\mathbf{P}}$, por lo tanto $\tau \in M$ y $\tau \in V^{\mathbf{P}}$ y $x = i_G(\sigma)$ para algún $p \in G$ tal que $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$, por consiguiente $\sigma \in V^{\mathbf{P}}$ y $\sigma \in M$, luego $\sigma \in M^{\mathbf{P}}$. Por lo tanto $x = i_G(\sigma) \in M[G] = i_G[M^{\mathbf{P}}]$.

*e.* Sea $\tau \in M^{\mathbf{P}}$. Considérese inductivamente que si $\langle \sigma, p\rangle \in \tau$ entonces $\rho(i_G(\sigma)) \leq \rho(\sigma)$, donde $\rho(i_G(\tau)) = sup\{\rho(i_G(\sigma)) + 1 : \exists p \in G(\langle \sigma, p\rangle \in \tau)\}$. Sabemos que $\sigma \in \{\sigma\} \in \{\{\sigma\}, \{\sigma, p\}\} = \langle \sigma, p\rangle$. Luego, si $\langle \sigma, p\rangle \in \tau$ entonces $\rho(i_G(\sigma)) \leq \rho(\sigma) < \rho(\{\sigma\}) < \rho(\tau)$; así que $\rho(i_G(\sigma)) + 1 < \rho(\tau)$, por lo tanto $\rho(i_G(\tau)) \leq \rho(\tau)$.

*f.* Por definición, $o(M) = M \cap OR =$ el menor ordinal $\alpha$ tal que $\alpha \notin M$; así que $o(M) \leq o(M[G])$ pues $M \subseteq M[G]$. Si $x \in M$ entonces $\rho(x) = (\rho(x))^M \in M$. Si $o(M) < o(M[G])$ entonces $\exists \tau \in M^{\mathbf{P}} = V^{\mathbf{P}} \cap M$ tal que $i_G(\tau) = o(M)$, luego, por v., se tiene: $o(M) = \rho(i_G(\tau)) \leq \rho(\tau) \in M$, es decir $o(M) \in M$ !. Por lo tanto $o(M) = o(M[G])$.

$\square$

**Definición 2.22**

$$\begin{array}{rcl} up(\sigma, \tau) & = & \{\langle \sigma, 1_{\mathbf{P}}\rangle,\ \langle \tau, 1_{\mathbf{P}}\rangle\}. \\ op(\sigma, \tau) & = & up(up(\sigma, \sigma),\ up(\sigma, \tau)). \end{array}$$

<u>Observaciones</u>.
1. El nombre de la pareja $\{i_G(\sigma), i_G(\tau)\}$ está dado por $up(\sigma, \tau) \in M^{\mathbf{P}}$ donde $\sigma, \tau \in M^{\mathbf{P}}$; es decir, $i_G(up(\sigma, \tau)) = \{i_G(\sigma), i_G(\tau)\}$.

2. El nombre del par ordenado $\langle i_G(\sigma), i_G(\tau)\rangle$ está dado por $op(\sigma, \tau) \in M^{\mathbf{P}}$. Pues $i_G(op(\sigma, \tau)) = i_G(up(up(\sigma, \sigma),\ up(\sigma, \tau)))$
$= i_G(\{\langle up(\sigma, \sigma), 1_{\mathbf{P}}\rangle,\ \langle up(\sigma, \tau), 1_{\mathbf{P}}\rangle\}) = \{i_G(up(\sigma, \sigma)), i_G(up(\sigma, \tau))\}$
$= \{\{i_G(\sigma)\}, \{i_G(\sigma), i_G(\tau)\}\} = \langle i_G(\sigma), i_G(\tau)\rangle$.

**Lema 2.23**
*Si M es modelo transitivo de* ZFC, $\mathbf{P}$ *orden parcial en M, G filtro sobre* $\mathbf{P}$ *, entonces*
$M[G] \models$ *Extensionalidad* $\wedge$ *Regularidad* $\wedge$ *Par* $\wedge$ *Unión* $\wedge$ *Infinito.*

*Demostración.*.
<u>Extensionalidad</u>. Por ser $M[G]$ transitivo.
<u>Regularidad</u>. Por ser $M[G]$ estándar.
<u>Par</u>. Sean $x, y \in M[G]$; se pueden encontrar $\sigma, \tau \in M^{\mathbf{P}}$ tales que $x = i_G(\sigma)$, $y = i_G(\tau)$. Entonces $up(\sigma,\ \tau) \in M^{\mathbf{P}}$ y $i_G(up(\sigma,\ \tau)) = \{i_G(\sigma),\ i_G(\tau)\} \in M[G]$.

Unión. Sean $a \in M[G]$ y $\tau \in M^{\mathbf{P}}$ tales que $a = i_G(\tau)$. Sea $\pi = \cup dom(\tau)$, entonces $\pi \in M^{\mathbf{P}}$, por tanto $i_G(\pi) \in M[G]$. Veamos que $\cup a \subseteq i_G(\pi)$. Si $c \in a = i_G(\tau),\ c = i_G(\sigma)$ para algún $\sigma \in dom(\tau)$. Como $\sigma \subset \pi$, entonces $c = i_G(\sigma) \subseteq i_G(\pi)$ (por definición de $i_G(\sigma)$ y $i_G(\pi)$). Así $\cup a \subseteq i_G(\pi)$. Para ver que $\cup a \in M[G]$ falta el Axioma de Comprensión en $M[G]$.
Infinito. Como $M$ es modelo de ZFC, $\omega \in M$. Así $\omega\check{} = \{\langle n\check{}, 1_{\mathbf{P}}\rangle : n \in \omega\} \in M$, lo cual se prueba con inducción simple. Por Lema 2.21, $i_G(\omega\check{}) = \omega \in M[G]$. $M[G]$ es transitivo y como ser inductivo es absoluto para transitivos, $\omega$ es inductivo en $M[G]$; así que $M[G]$ satisface el Axioma del Infinito.

$\square$

Comprensión, Reemplazo y Potencia se probarán en $M[G]$ usando forcing.

**Definición 2.24**
*Si* $E \subset \mathbf{P}$ *y* $p \in \mathbf{P}$ *entonces* $E$ *es* denso bajo $p$ *si* $\forall q \leq p \exists r \in E (r \leq q)$.

$D$ es denso en $\mathbf{P}$ si, y sólo si, $D$ es denso bajo $p$, para todo $p \in \mathbf{P}$.

**Lema 2.25**
*Sea* $M$ *modelo transitivo de* ZFC, $\mathbf{P} \in M$, $E \subset \mathbf{P}$, $E \in M$ *y* $G$ $\mathbf{P}$*-genérico sobre* $M$*, entonces:*

(a) $G \cap E \neq \emptyset$ *ó* $\exists q \in G \forall r \in E (r \perp q)$.
(b) *Si* $p \in G$ *y* $E$ *es denso bajo* $p$ *entonces* $G \cap E \neq \emptyset$.

*Demostración..* (a) Sea

$$D = \{p \in \mathbf{P} : \exists r \in E (p \leq r)\} \cup \{q \in \mathbf{P} : \forall r \in E (r \perp q)\}.$$

Obsérvese que $D \in M$ pues $D \subseteq \mathbf{P} \in M$ y por (Ax. Comprensión)$^M$.
$D$ es denso, pues si $q \in \mathbf{P}$ y $q \notin D$, fijamos $r \in E$ tal que $r \not\perp q$ y sea $p \leq r$; como $p \leq q$ entonces $p \in D$ es una extensión de $q$. Por consiguiente $G \cap D \neq \emptyset$ lo cual implica $(a)$ pues: ó $\exists p \in G$ tal que $\exists q \in E$ con $p \leq q$ por consiguiente $q \in G$ y se obtiene así que $q \in G \cap E \neq \emptyset$, o bien $\exists q \in G$ tal que $\forall r \in E (r \perp q)$.

(b). Supóngase que $p \in G$ y $E$ es denso bajo $p$. Si $G \cap E = \emptyset$, por $(a)$ existe $q \in G$ tal que $\forall r \in E(r \perp q)$. Como $p \in G$, sea $q' \in G$ tal que $q' \leq q$ y $q' \leq p$ (por ser $G$ un filtro) entonces, por la densidad de $E$ bajo $p$, sea $r \in E$ tal que $r \leq q'$; entonces $r \leq q$ contradiciendo $r \perp q$. Así $G \cap E \neq \emptyset$.

□

Un ejemplo de forcing, antes de la definición.

Sean $M$, un modelo contable, transitivo y estándar de ZFC, $\mathbf{P} = \langle {}^{\underset{\smile}{\omega}}2, \supseteq\rangle$, $1_{\mathbf{P}} = \emptyset$, donde ${}^{\underset{\smile}{\omega}}2 = \bigcup_{n\in\omega} {}^n2$, designa a todas las sucesiones de tamaño $n$ de 0's y 1's. $\langle \mathbf{P}, \leq, 1_{\mathbf{P}}\rangle \in M$ pues $2, \omega \in M$ y la definición del orden parcial es absoluta para $M$. Sea $G$ un filtro sobre $\mathbf{P}$, entonces $f_G = \bigcup G$ es una función con dominio contenido en $\omega$. Para todo $n \in \omega$ sea $D_n = \{p \in \mathbf{P} : n \in dom(p)\}$. $D_n$ es denso en $\mathbf{P}$ y $D_n \in M$. Entonces, si $G$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, $G \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n$ y $dom(f_G) = \omega$.

$f_G \in M[G]$ pues: sea $\sigma = \{\langle (n, m)\check{}, p\rangle : p \in \mathbf{P} \wedge n \in dom(p) \wedge p(n) = m\} \in M^{\mathbf{P}}$, como $i_G(\langle n, m\rangle\check{}) = \langle n, m\rangle$ entonces

$$i_G(\sigma) = \{\langle n, m\rangle : \exists p \in G(n \in dom(p) \wedge p(n) = m\} = \bigcup G = f_G.$$

Así $f_G = i_G(\sigma) \in M[G] = i_G[M^{\mathbf{P}}]$.

Obsérvese que $\mathbf{P} = \langle {}^{\underset{\smile}{\omega}}2, \supseteq\rangle$ es frondoso, por consiguiente $G \notin M$ para cualquier $G$ que sea $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. También $f_G \notin M$; pues si $f_G \in M$ entonces $E = \{p \in \mathbf{P} : p \not\subset f_G\} \subseteq \mathbf{P}$ pertenecería a $M$, pero tal $E$ es denso en $\mathbf{P}$; en efecto, sea $q \in \mathbf{P}$: si $q \not\subset f_G$ entonces $q \leq q$ y $q \in E$; si $q \subset f_G$ se considera $q\widehat{o}\langle 0\rangle$ o bien $q\widehat{o}\langle 1\rangle$ , el que no esté contenido en $f_G$. Además $G \cap E = \emptyset$ (pues $p \in G$ implica que $p \subseteq \cup G = f_G$) contradiciendo la definición de genérico.

La "gente" de $M$ no puede construir un $G$ que sea $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ (aunque conoce a $\mathbf{P}$ y sabe qué es ser denso en $\mathbf{P}$ y conoce a los densos en $\mathbf{P}$ de $M$); ellos pueden creer que existe un ser para el cual su universo $M$ es contable. Tal ser tendrá un genérico $G$ y una función $f_G = \bigcup G$. La gente de $M$ no sabe qué son $G$ y $f_G$ pero tienen nombres para ellos: $\Gamma$ y $\sigma$, respectivamente. Comprenden ciertas propiedades de $G$ y $f_G$; por ejemplo: $f_G$ es una función de $\omega$ en 2, no saben qué es $f_G(0)$, ya que depende de $G$, pero pueden ver que $f_G(0)$ será 0 si $\{\langle 0, 0\rangle\} \in G$ y será 1 si $\{\langle 0, 1\rangle\} \in G$. Más generalmente, ellos pueden construir todo un ″ lenguaje de forcing ″ para afirmar algo acerca de $M[G]$. Un ejemplo de enunciado $\psi$ es : $\sigma(\check{0}) = \check{1}$. La gente de $M$ puede no saber si una tal $\psi$ dada es verdad en $M[G]$ o no lo es. La verdad o falsedad de $\psi$ en $M[G]$ depende en general de $G$.

Se denota con $p \Vdash \psi \qquad (p\ fuerza\ a\ \psi)$, con $p \in \mathbf{P}$ y $\psi$ enunciado del lenguaje de forcing, para decir que: *para todo $G$, que sea filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, si $p \in G$ entonces $\psi$ es verdad en $M[G]$.*

<u>Ejemplos</u>

$$\begin{array}{ccc} \{\langle 0,\, 0\rangle\} \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{0} & y & \{\langle 0,\, 1\rangle\} \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{1} \\ 1_{\mathbf{P}} \Vdash \sigma \in \overset{\omega}{\smile}\check{2} & y & 1_{\mathbf{P}} \Vdash \sigma = \bigcup \Gamma. \end{array}$$

A diferencia de los dos primeros enunciados, los dos últimos son ciertos para cualquier genérico. La gente de $M$ puede comprender todos los hechos anteriores de forcing sin siquiera ver un genérico $G$; por ejemplo:

<u>Hecho 1</u>. Puede decidirse dentro de $M$ si $p \Vdash \psi$ o no, para cualquier $p \in \mathbf{P} \in M$ y $\psi$ en el lenguaje de forcing.

Esto es aparentemente sorprendente ya que decidir $\Vdash$ requiere conocer a todo genérico, pero en los anteriores ejemplos se ve que es posible. De la definición de forcing se tiene de inmediato que : si $p \Vdash \psi$ para algún $p \in G$ entonces $M[G]$ es modelo de $\psi$.

<u>Hecho 2</u>. Si $G$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ y $\psi$ es verdad en $M[G]$ entonces hay un $p \in G$ tal que $p \Vdash \psi$.

Ejemplo: si $\psi \equiv \sigma(\check{0}) = \check{0}$ y $\psi$ es verdadero en $M[G]$, es decir $f_G(0) = 0$, entonces $p(0) = 0$ para algún $p \in G$. Ahora, si $p \in H$, con $H$ otro filtro $\mathbf{P}$-genérico, entonces $f_H(0) = 0$ necesariamente, es decir $\psi$ será verdad en $M[H]$, o sea que $p \Vdash \psi$.

La formalización de los hechos 1 y 2 será el Lema de Verdad.

y

## 2.2 Definición y Resultados Principales.

**Definición 2.26**
*Sean* $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ *una fórmula con variables libres* $x_1, \cdots, x_n$, *M un modelo contable, transitivo estándar de* ZFC*,* **P** *un orden parcial en M,* $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M^{\mathbf{P}}$ *y* $p \in \mathbf{P}$*, entonces:* $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ *si* $\forall G (G\, es\, \mathbf{P} - genérico\, sobre\, M \wedge p \in G \rightarrow [\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))]^{M[G]})$

Observaciones. $\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ es un enunciado del lenguaje de forcing; éste es un lenguaje de primer orden, con símbolo de relación $\in$ y con $M^{\mathbf{P}}$ como conjunto de constantes.

$p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ está definido en $V$ no en $M$, es una definición externa a $M$. Siguiendo el Hecho 1, de la sección anterior, se puede dar una definición diferente, $\Vdash^*$, dentro de $M$ que decida lo correspondiente fuera de $M$, es decir:

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \; sii \; (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$$

Ejemplos.

Sea $M$ un modelo contable, transitivo estándar de ZFC, **P** un orden parcial en $M$.
(i). Para $a, b \in M$, $1_{\mathbf{P}} \Vdash \check{a} \in \check{b}$ si, y sólo si, $\forall G$, $\mathbf{P}$ − genérico *sobre* $M$, $M[G] \models a \in b$.
(ii). $1_{\mathbf{P}} \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ si, y sólo si, $\forall G$, $\mathbf{P}$ − genérico *sobre* $M$ $M[G] \models \varphi(i_g(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))$.
(iii). Sean $p, q \in \mathbf{P}$. Si $p \leq q$ entonces $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$. Pues si $G \subseteq \mathbf{P}$ es **P**-genérico sobre $M$, y $p \in G$ entonces $M[G] \models q \in G$, además $i_G(\Gamma) = G$.
(iv). Si $p \perp q$ entonces $p \Vdash \check{q} \notin \Gamma$. Pues $p \in G$ implica, por ser $G$ un filtro, $q \notin G$ y así $M[G] \models q \notin G$.

**Lema 2.27**
*Sea M un modelo contable, transitivo estándar de* ZFC*,* $p \in M$ *un orden parcial,* $p, q \in \mathbf{P}$*,* $a \in M$ *y* $\varphi$*,* $\psi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ *fórmulas de forcing,*

*entonces:*
$(i)$. *Si* $p \Vdash \varphi_1$, $p \Vdash \varphi_2, \cdots, p \Vdash \varphi_n$ *y* ZFC $\vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$ *entonces* $p \Vdash \varphi$. *Si* $p \Vdash \varphi$ *y* ZFC $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *entonces* $p \Vdash \psi$.
$(ii)$. *Si* $p \leq q$ *y* $q \Vdash \varphi$ *entonces* $p \Vdash \varphi$.
$(iii)$. $p \Vdash \varphi$ *y* $p \Vdash \psi$ *si, y sólo si,* $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)$
$(iv)$. *Es falso que* $p \Vdash \varphi$ *y* $p \nVdash \neg\varphi$.
$(v)$. *Si* $p \Vdash \varphi$ *y* $q \Vdash \neg\varphi$ *entonces* $p \perp q$.
$(vi)$. $p \Vdash \forall x \in \check{a}(\varphi(x))$ *si, y sólo si,* $\forall b \in a(p \Vdash \varphi(\check{b})$.

En la definición de $p \Vdash^* \varphi$, para el caso de $\varphi \equiv \tau_1 = \tau_2$, se tendrá en cuenta la siguiente idea:

$$\begin{aligned} p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2 \quad &\Rightarrow \quad p \in \{p : p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\} \subseteq \mathbf{P} \\ &\Rightarrow \quad p \in F(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle); \end{aligned}$$

donde la idea para definir a $F : V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{P})$ es

$$F(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = \{p \in \mathbf{P} : p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\}$$

Sea $R \subseteq (V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}}) \times (V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}})$ tal que $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle R \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ si, y sólo si, $\pi_1 \in dom(\tau_1)$ y $\pi_2 \in dom(\tau_2)$.

$R$ es relacional bien fundado y limitado por la izquierda. Así para cada $G$ que sea $\mathbf{P}-$genérico, por el Esquema General de Recursión, se puede definir un único funcional $F$ tal que:
i). $dom(\sigma) = cam(R) = V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}}$
ii). $\forall \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \in V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}}$, $F(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = G(F \mid_{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle_R})$. De donde se tiene que: $F(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = \{p \in \mathbf{P} : \forall \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \{q \leq p : q \leq s_1 \rightarrow q \Vdash^* \varphi\}$es denso en$p\} \cap \{p \in \mathbf{P} : \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \{q \leq p : q \leq s_2 \rightarrow q \Vdash^* \varphi\}$es denso en$p\}$.

**Definición 2.28**
*Sea* $\mathbf{P}$ *un orden parcial. Se define* $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, *donde* $p \in \mathbf{P}$ *y* $\tau_1, \cdots, \tau_n \in V^{\mathbf{P}}$, *con* $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ *una fórmula con n variables libres.*

1. $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ *si*

   $\alpha$. *Para toda* $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$,

   $$\{q \leq p : q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

   *es denso bajo p.*

*β. Para toda* $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$,

$$\{q \leq p : q \leq s_2 \rightarrow \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 (q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

*es denso bajo* $p$.

2. $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ *si*

$$\{q : \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2 (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)\}$$

*es denso bajo* $p$.

3. $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ *si*

$$p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \text{ y } p \Vdash^* \psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$$

4. $p \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ *si no existe* $q \leq p$ *tal que* $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ *si* $\forall q \leq p, \;\; q \not\Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots \tau_n)$

5. $p \Vdash^* \exists x \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n)$ *si*

$$\{r : \exists \sigma \in V^{\mathbf{P}} (r \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$$

*es denso bajo* $p$, *es decir si*

$$\forall q \leq p \; \exists r \leq q \; \exists \sigma \in V^{\mathbf{P}} (r \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))$$

<u>Observaciones.</u>

a. $p \Vdash^* \neg\varphi \Rightarrow p \not\Vdash^* \varphi$ pero $p \not\Vdash^* \varphi \not\Rightarrow p \Vdash^* \neg\varphi$

   $p \Vdash^* \exists x \varphi(x) \Rightarrow \exists r \leq p \exists \sigma \in V^{\mathbf{P}} (r \Vdash^* \varphi(\sigma))$ pero $\exists r \leq p \exists \sigma \in V^{\mathbf{P}} (r \Vdash^* \varphi(\sigma)) \not\Rightarrow p \Vdash^* \exists x \varphi(x)$

b. 3, 4, 5, se cumplen para $\Vdash$ usando el Lema de Definibilidad y el Lema de Verdad.

c. La definición en a es por recursión sobre el relacional $R$ definido como: $R \subseteq (V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}}) \times (V^{\mathbf{P}} \times V^{\mathbf{P}})$ donde $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle R \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ si $\pi_1 \in dom(\tau_1)$ y $\pi_2 \in dom(\tau_2)$.

1. $R$ es bien fundado, pues si $\langle\pi_1,\pi_2\rangle R\langle\tau_1,\tau_2\rangle \Rightarrow \rho(\pi_1) < \rho(\tau_1)$ y $\rho(\pi_2) < \rho(\tau_2)$.
2. $R$ es limitado por la izquierda, pues $\forall\langle\tau_1,\tau_2\rangle$, $\langle\tau_1,\tau_2\rangle_R = \{\langle\pi_1,\pi_2\rangle : \langle\pi_1,\pi_2\rangle R\langle\tau_1,\tau_2\rangle\}$ es conjunto.

**Lema 2.29**
*Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial, $p \in \mathbf{P}$ y $\tau_1,\cdots,\tau_n \in V^{\mathbf{P}}$. Sea $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ una fórmula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll}(1) & p \Vdash^* \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)\\ (2) & \forall r \leq p(r \Vdash^* \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n))\\ (3) & \{r : r \Vdash^* \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)\} \textit{es denso bajo } p\end{array}$$

*Demostración.*. Las implicaciones (2) $\Rightarrow$ (1) y (2) $\Rightarrow$ (3) son obvias.

(1) $\Rightarrow$ (2).

Sea $\varphi(\tau_1,\tau_2) \equiv \tau_1 = \tau_2$ y supongamos $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ por lo tanto se satisfacen $\alpha$ y $\beta$ de la definición de $\Vdash^*$. Sea $r \leq p$. Si $D$ es denso bajo $p$, D es denso bajo $r$. Así que también $r \Vdash^* \varphi(\tau_1,\tau_2)$.

Sea $\varphi(\tau_1,\tau_2) \equiv \tau_1 \in \tau_2$ y supóngase $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$. Sea $r \leq p$, como cualquier denso bajo $p$ es denso bajo $r$, por definición se tiene que $r \Vdash^* \varphi(\tau_1,\tau_2)$.

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$ y supóngase que para $\psi$ es válido que (1) $\Rightarrow$ (2). Si $p \Vdash^* \neg\psi$ entonces $\forall q \leq p\; q \not\Vdash^* \psi$. Sea $r \leq p$. Por demostrar que $r \Vdash^* \neg\psi$. Sea $q \leq r$ entonces $q \leq p$, por consiguiente $q \not\Vdash^* \psi$. Así $\forall q \leq r\; q \not\Vdash^* \varphi$, por lo tanto $r \Vdash^* \neg\psi$.

Sea $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$. Si $p \Vdash^* \psi \wedge \chi$ entonces $p \Vdash^* \psi$ y $p \Vdash^* \chi$ así , por hipótesis de inducción, $\forall r \leq p(r \Vdash^* \psi$ y $r \Vdash^* \chi)$; por lo tanto $\forall r \leq p,\ r \Vdash^* \psi \wedge \chi$.

Sea $\varphi \equiv \exists x\psi(x)$. Por hipótesis $p \Vdash^* \exists x\psi(x)$ entonces $\forall q \leq p\,\exists r \leq q\,\exists\sigma \in V^{\mathbf{P}}\ (r \Vdash^* \psi(\sigma))$. Sea $r \leq p$, por demostrar que $r \Vdash^* \exists x\psi(x)$. Si $q \leq r$ entonces $q \leq p$, y así $\exists s \leq q\ \exists\sigma \in V^{\mathbf{P}}\ (s \Vdash^* \psi(\sigma))$ es decir $\{q : \exists\sigma \in V^{\mathbf{P}}\ q \Vdash^* \psi(\sigma)\}$ es denso bajo $p$.

(3) $\Rightarrow$ (1).

Sea $\varphi(\tau_1,\tau_2) \equiv \tau_1 = \tau_2$. Por hipótesis se tiene que $\{r : r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\}$ es denso bajo $p$. El resultado se sigue mediante la siguiente observación: para cualquier $D \subseteq \mathbf{P}$, si $\{r : D\,\text{es denso bajo}\,r\}$ es denso bajo $p$ entonces $D$ es denso bajo $p$. En efecto, si $q \leq p$ implica que existe $r \leq q$ tal que $D$ es denso bajo $r$, así que $\exists s \leq r$ tal que $s \in D$, pero $s \leq r \leq q$; luego $\exists s \leq q(s \in D)$. Por lo tanto, $D$ es denso bajo $p$. Con esta observación y considerando la definición de forzar$^*$ a $\tau_1 = \tau_2$ (Definición 2.28) con $D$ como el subconjunto mencionado en $\alpha$. y $\beta$. se concluye que $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

Sea $\varphi(\tau_1, \tau_2) \equiv \tau_1 \in \tau_2$. La observación del caso anterior se aplica en éste para ver que $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$.

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$ y, por hipótesis de inducción, la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) es válida para $\psi$. Supóngase que $\{r : r \Vdash^* \neg\psi\}$ es denso bajo $p$. Por demostrar que $p \Vdash^* \neg\psi$. Sea $q \leq p$ entonces $\exists r_0 \leq q$ tal que $r_0 \Vdash^* \neg\psi$ así que $r_0 \nVdash^* \psi$. Si $q \Vdash^* \psi$ entonces, por la implicación (1) $\Rightarrow$ (2), $\forall r \leq q \; r \Vdash^* \psi$; de donde $r_0 \Vdash^* \psi$ !. Por lo tanto $q \nVdash^* \psi$.

Sea $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$. Supóngase que $\{r : r \Vdash \psi \wedge \chi\}$ es denso bajo $p$. Por demostrar que $p \Vdash^* \psi$ y $p \Vdash^* \chi$. Se afirma que $\{r : r \Vdash^* \psi\}$ y $\{r : r \Vdash^* \chi\}$ son ambos densos bajo $p$. Sea $q \leq p$, entonces $\exists r \leq q$ tal que $r \Vdash^* (\psi \wedge \chi)$; luego $r \Vdash^* \psi$ y $r \Vdash^* \chi$, de donde se obtiene la afirmación. Por consiguiente, por hipótesis de inducción, $p \Vdash^* \psi$ y $p \Vdash^* \chi$.

Sea $\varphi \equiv \exists x \, \psi(x)$. Supóngase que $\{r : r \Vdash^* \exists x \, \psi(x)\}$ es denso bajo $p$. Por demostrar que $p \Vdash^* \exists x \, \psi(x)$. Sea $q \leq p$, entonces $\exists r \leq q$ tal que $r \Vdash^* \exists x \, \psi(x)$; es decir, $\forall s \leq r \, \exists t \leq s \, \exists \sigma \in V^{\mathbf{P}}$ tal que $t \Vdash^* \psi(\sigma)$. Por lo tanto $\exists t \leq r \leq q \, \exists \sigma \in V^{\mathbf{P}}$ tal que $t \Vdash^* \psi(\sigma)$. Así , $p \Vdash^* \exists x \, \psi(x)$.

$\square$

**Teorema 2.30**

*Sea $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ una fórmula con $x_1, \cdots, x_n$ variables libres. Sean $M$ un modelo transitivo de* ZFC, $\mathbf{P}$ *un orden parcial en $M$, $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M^{\mathbf{P}}$ y $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, entonces:*

- $(i)$ *Para cualquier $p$, si $p \in G$ y $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$ entonces $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$*
- $(ii)$ *si $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$ entonces $\exists p \in G[(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M]$.*

*Demostración.*. Observaciones

1.) Si $(i)$ se escribe en formalogicamente equivalente a: Si $\exists p \in G[p \Vdash^*$

$\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]^M$ entonces $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$; entonces se ve que $(i)$ y $(ii)$ son inversos el uno del otro.
2.)En el caso de fórmulas atómicas, $|\!\vdash^*$ es absoluto para $M$; así que no se considera la relativización a $M$ de $|\!\vdash^*$ para fórmulas atómicas.

Caso I. Sea $\varphi(\tau_1, \tau_2) \equiv \tau_1 = \tau_2$. La prueba es por inducción sobre la $R$-complejidad de los nombres.

(1) Sea $p$ tal que $p \in G$ y $p \,|\!\vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Por demostrar que $i_G(\tau_1) = i_G(\tau_2)$.

Sea $i_G(\pi_1) \in i_G(\tau_1)$ donde $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ para algún $s_1 \in G$. Sea $r \in G$ con $r \leq p$, $s_1$. Entonces $r \,|\!\vdash^* \tau_1 = \tau_2$ (ver lema 2.29), entonces por el lema 2.25, existe $q \in G$ tal que $q \leq r$ y

$$q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \,|\!\vdash^* \pi_1 = \pi_2). \tag{2.1}$$

Puesto que $q \leq r \leq s_2$, se considera fijo $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$, como en 2.1; entonces $s_2 \in G$ (pues $q \leq s_2$ y $q \in G$), así $i_G(\pi_2) \in i_G(\tau_2)$. Por hipótesis de inducción, como $q \,|\!\vdash^* \pi_1 = \pi_2$, entonces $i_G(\pi_1) = i_G(\pi_2)$. Por consiguiente $i_G(\pi_1) \in i_G(\tau_2)$. Por lo tanto $i_G(\tau_1) \subseteq i_G(\tau_2)$. La contención $i_G(\tau_2) \subseteq i_G(\tau_1)$ se prueba de la misma manera.

(2) Ahora se considera que $i_G(\tau_1) = i_G(\tau_2)$. Por demostrar que $\exists r \in G(r \,|\!\vdash^* \tau_1 = \tau_2)$ es válida. Sea

$$D = \{r \in P : r \,|\!\vdash^* \tau_1 = \tau_2 \text{ o } \alpha' \text{ o } \beta'\}$$

donde

$$\begin{array}{ll} \alpha') & \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 [r \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \, \forall q \in \mathbf{P} \\ & ((q \leq s_2 \wedge q \,|\!\vdash^* \pi_1 = \pi_2) \rightarrow q \perp r)] \\ \beta') & \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 [r \leq s_2 \wedge \forall \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \, \forall q \in \mathbf{P} \\ & ((q \leq s_1 \wedge q \,|\!\vdash^* \pi_1 = \pi_2) \rightarrow q \perp r)] \end{array}$$

Afirmación: ningún $r \in G$ puede satisfacer $\alpha'$ ó $\beta'$. En efecto, sea $r \in G$ y $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ como en $\alpha'$, entonces $s_1 \in G$ por lo que $i_G(\pi_1) \in i_G(\tau_1) = i_G(\tau_2)$; se puede fijar $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ con $s_2 \in G$ y $i_G(\pi_1) = i_G(\pi_2)$; por hipótesis de inducción, para la fórmula $\pi_1 = \pi_2$, se fija $q_0 \in G$ tal que $q_0 \,|\!\vdash^* \pi_1 = \pi_2$; ahora sea $q \in G$ tal que $q \leq q_0, s_0$, así $q \leq s_2$ y $q \,|\!\vdash^* \pi_1 = \pi_2$, (ver lema 2.29), de donde por $\alpha'$ se tiene que $q \perp r$ para $q, r \in G$!. De manera análoga, si $r \in G$, $r$ no cumple $\beta'$.

Debido a la absolutez de $\Vdash^*$ para fórmulas atómicas, $D \in M$. Entonces, si se prueba que $D$ es denso en $\mathbf{P}$ se tiene que necesariamente $G \cap D \neq \emptyset$ de donde se infiere que $\exists r \in G$ tal que $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

Prueba de que $D$ es denso. Sea $p \in \mathbf{P}$, entonces o $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ y así finaliza la prueba o falla $\alpha$ o falla $\beta$ de la definición de $\Vdash^*$. Si $\alpha$ falla entonces, aplicando la definición de denso bajo $p$, se fija $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ y $r \leq p$ tal que

$$\forall q \leq r[q \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2(\neg(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))] \qquad (2.2)$$

En particular, $r \leq s_1$. Ahora, sean $\pi_2$, $s_2$, $q$ tales que $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$, $q \leq s_2$ y $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, entonces $q \perp r$ pues si no es así , una extensión común $q' \leq q$, $r$ contradiría 2.2, (pues $q' \leq r$, $q' \leq s_2$ y $q' \Vdash^* \pi_1 = \pi_2\,!$). Así $r \leq p$ y $r$ satisface $\alpha'$, por lo tanto $r \in D$. De modo análogo, si $\beta$ falla hay un $r \leq p$ que satisface $\beta'$ y $r \in D$. Luego, $D$ es denso en $\mathbf{P}$.

Caso II. $\varphi(\tau_1, \tau_2) \equiv \tau_1 \in \tau_2$.

(1) Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$. Por definición

$$D = \{q : \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1\}$$

es denso bajo $p$. Por el lema 2.25 se fijan $q \in D \cap G \neq \emptyset$ y $\langle \pi, s \rangle \in \tau_2$ tales que $q \leq s$ y $q \Vdash^* \pi = \tau_1$; entonces $s \in G$ de donde $i_G(\pi) \in i_G(\tau_2)$.‘ ahora, como $q \in G$ y $q \Vdash^* \pi = \tau_1$, por (i) aplicado a la fórmula $\pi = \tau_1$ se tiene que $i_G(\pi) = i_G(\tau_1)$. Así $i_G(\tau_1) \in \tau_2)$.

(2) Ahora, supóngase que $i_G(\tau_1) \in i_G(\tau_2)$. Existe un $\langle \pi, s \rangle \in \tau_2$ con $s \in G$ tal que $i_G(\pi) = i_G(\tau_1)$. Por (ii) aplicado a la fórmula $\pi = \tau_1$ se obtiene que existe un $r \in G$ tal que $r \Vdash^* \pi = \tau_1$. Sea $p \in G$ tal que $p \leq s, r$; entonces, por el lema 2.29, $\forall q \leq p(q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)$. Así se ha probado algo que es más fuerte que lo requerido por la definición de $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ con $p \in G$.

Con esto se concluye la prueba de (i) y (ii) para fórmulas atómicas, a continuación se prueban para fórmulas compuestas. La hipótesis de inducción: “para $\varphi$ y $\psi$ se cumplen $(i)$ y $(ii)$”. Para esto sí es necesaria la relativización a $M$ pues $\Vdash^*$ no es absoluto para fórmulas con cuantificadores.

Caso III. $\neg\varphi$.

(1) Sea $p \in G$ y $(p \Vdash^* \neg\varphi)^M$. Si $\varphi^M$ entonces, por hipótesis de inducción para $\varphi$, hay $q \in G$ tal que $(q \Vdash^* \varphi)^M$. Sea $r \in G$ con $r \leq p$, $q$; entonces $(r \Vdash^* \varphi)^M!$, en contradicción con la definición de $p \Vdash^* \neg\varphi$ dentro de $M$. Así pues $(\neg\varphi)^{M[G]}$.

(2) Supóngase que $(\neg\varphi)^{M[G]}$. Sea

$$D = \{p : (p \Vdash^* \varphi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\varphi)^M\}$$

$D$ es denso: sea $q \in \mathbf{P}$,
a) si $\exists r \leq q$ tal que $(r \Vdash^* \varphi)^M$ entonces $r \in D$ y así $D$ es denso en $\mathbf{P}$.
b) si no $\exists r \leq q$ tal que $(r \Vdash^* \varphi)^M$ entonces, por definición, $(q \Vdash^* \neg\varphi)^M$ y $q \in D$ y así $D$ es denso en $\mathbf{P}$.
Entonces, sea $p \in D \cap G \neq \emptyset$. Si $(p \Vdash^* \neg\varphi)^M$, aquí termina la prueba. Si $(p \Vdash^* \varphi)^M$, por hipótesis de inducción para $\varphi$ se tiene que $\varphi^{M[G]}$ !, lo cual contradice la hipótesis inicial.

Caso IV. $\varphi \wedge \psi$.

(1) Sea $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \varphi \wedge \psi)^M$, entonces $(p \Vdash^* \varphi)^M$ y $(p \Vdash^* \psi)^M$; por hipótesis de inducción $\varphi^{M[G]}$ y $\psi^{M[G]}$, así que $(\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$.

(2) Ahora supóngase que $(\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$, entonces $\varphi^{M[G]}$ y $\psi^{M[G]}$. Por hipótesis de inducció$\exists p, q \in G$ tal que $(p \Vdash^* \varphi)^M$ y $(q \Vdash^* \psi)^M$, de donde si $r \in G$, $r \leq p, q$ entonces $(r \Vdash^* \varphi)^M$ y $(r \Vdash^* \psi)^M$ y por lo tanto $(r \Vdash^* \varphi \wedge \psi)^M$, por definición de $\Vdash^*$ en $M$.

Caso V. $\exists x\, \varphi(x)$.

(1) Sea $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \exists x\, \varphi(x))^M$, entonces

$$D = \{r : \exists \sigma \in M^{\mathbf{P}} (r \Vdash \varphi(\sigma))^M\}$$

es denso bajo $p$ y $D \in M$. Por el lema 2.25, sean $r \in G \cap D \neq \emptyset$ y $\sigma \in M^{\mathbf{P}}$, fijos y tales que $(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$. Por hipótesis de inducción para $\varphi$, se tiene que $[\varphi(i_G(\sigma))]^{M[G]}$ de donde $[\exists x\, \varphi(x)]^{M[G]}$.

(2) Supóngase que $[\exists x\, \varphi(x)]^{M[G]}$. Se fija un $\sigma \in M^{\mathbf{P}}$ tal que $[\varphi(i_G(\sigma))]^{M[G]}$. Por hipótesis de inducción se puede hallar $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$, entonces por el lema 2.29, $\forall r \leq p(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$. Se ha probado algo mas fuerte que la definición de que $(p \Vdash^* \exists x\, \varphi(x))^M$

$\square$

**Teorema 2.31**
*Sea $M$ un modelo contable, transitivo de* ZFC*, $\mathbf{P}$ un orden parcial en*

*$M$, $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ fórmula con $n$ variables libres y $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M^{\mathbf{P}}$. Entonces*
(A) **Lema de Definibilidad**. *Para todo $p \in \mathbf{P}$,*

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \iff (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots \tau_n))^M$$

(B) **Lema de Verdad**. *Para todo $G$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$,*

$$\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]} \iff \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$$

*Demostración..*
(A) Lema de Definibilidad. Sea $p \in \mathbf{P}$.
$\Leftarrow$) Sea $G$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ tal que $p \in G$. entonces por el Teorema 2.30.($i$), $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$; de donde se tiene que $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$.
$\Rightarrow$) Para probar que $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$ es suficiente, por el lema 2.29, probar que $D = \{r : (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M\}$ es denso bajo $p$: si no fuera así sea $q \leq p$ tal que $\forall r \leq q(r \notin D)$ , es decir $\forall r \leq q(r \nVdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$; por definición de $\Vdash^*$ en $M$ se tiene que $(q \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$, así, por la parte $\Leftarrow$, se obtiene que $q \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$. Sea $G$ $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ y $q \in G$ entonces $\neg\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$ pero como $q \leq p$, para cada $p \in G$, de donde, por la suposición inicial $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$!.
(B) Lema de Verdad.
($\Leftarrow$) Supóngase que $\exists p \in G$ tal que $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, por la definición de $\Vdash$ se tiene que $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$. Sin usar la definición también se puede dar una prueba: si $\exists p \in G$ tal que $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ entonces por (A)$\Rightarrow$, $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$, entonces por el Teorema 2.30$i$, $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_N))^{M[G]}$.
($\Rightarrow$) Supóngase que $\varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}$, por el Teorema 2.30$ii$, $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$, entonces por (A)$\Leftarrow$, $\exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$.

$\square$

**Corolario 2.32**
*Sea $M$ un* modelo contable, transitivo *de* ZFC*,* **P** *un orden parcial en*

*$M$, $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M^{\mathbf{P}}$ entonces:*

*a)* $\{p \in \mathbf{P} : (p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)) \vee (p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))\}$ *es denso.*
*b)* $p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \iff \forall q \leq p (q \nVdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$.
*c)* $p \Vdash \exists x\, \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n) \iff \{r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbf{P}} (r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$ *es denso bajo $p$.*
*d)* *Si* $p \Vdash \exists x (x \in \sigma \wedge \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n))$ *entonces* $\exists q \leq p \exists \pi \in dom(\sigma)$ $(q \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \cdots, \tau_n))$.

*Demostración..*
a) Sea $q \in \mathbf{P}$, por el lema 2.10, se puede considerar un $G$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ con $q \in G$. Se tiene una extensión genérica $M[G]$ tal que $M[G] \models \varphi$ ó $M[G] \models \neg\varphi$. Por el Lema de Verdad, $\exists r \in G(r \Vdash \varphi)$ ó $\exists s \in G(s \Vdash \neg\varphi)$ entonces $\exists t \in G(t \leq q \wedge t \leq r \wedge t \leq s))$ y $(t \Vdash \varphi$ ó $t \Vdash \neg\varphi)$.

b) $\Rightarrow$) Supóngase que $p \Vdash \neg\varphi$. Sea $q \leq p$, por consiguiente $q \Vdash \neg\varphi$; si $q \Vdash \varphi$ entonces se contradice el lema 2.27. Por lo tanto $q \nVdash \varphi$.

$\Leftarrow$) Sea $G$, $\mathbf{P}$-genérico con $p \in G$. Supóngase que $M[G] \models \varphi$ entonces, por el Lema de Verdad, $\exists q \in G(q \Vdash \varphi)$. Como $p, q \in G$, entonces $\exists r \in G(r \leq p, r \leq q)$ y por lo tanto $r \Vdash \varphi$ y $r \leq p$!. (contradice la hipótesis).

c) $\Rightarrow$) Sea $q \leq p$, entonces $q \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n)$. Sea $G$ tal que $q \in G$, por consiguiente existe $a \in M[G]$ tal que $M[G] \models \varphi(a, \tau_1, \cdots, \tau_n)$; luego hay un $\sigma \in M^{\mathbf{P}}$ tal que $i_G(\sigma) = a$ y, por el Lema de Verdad, hay un $s \in G$ tal que $s \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n)$. Sea $r \leq q, s$, así $r \leq q$ y $r \leq p$ y $r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n)$ y $\{r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbf{P}} (r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$ es denso bajo $p$.

$\Leftarrow$) Supóngase que

$$D = \{r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbf{P}} (r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$$

es denso bajo $p$. Por el Lema de Definibilidad y el Axioma de Separación, $D \in M$. Entonces por el lema 2.25,para todo $G$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ con $p \in G$, $G \cap D \neq \emptyset$. Así hay un $r \in G \cap D$ y un $\sigma \in M^{\mathbf{P}}$ tales que $r \Vdash \varphi(\sigma)$ de donde $(\varphi(\sigma))^{M[G]}$ y entonces $(\exists x\, \varphi(x))^{M[G]}$. Como $G$ era cualquier $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ con $p \in G$, se tiene que $p \Vdash \exists x\, \varphi(x)$.

d) Supóngase que $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x))$. Sea $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico con $p \in G$, por lo tanto hay un $a \in i_G(\sigma)$ tal que $\varphi(a)^{M[G]}$ (por definición de $\Vdash$) y $a = i_G(\pi)$ para algún $\pi \in dom(\sigma)$. Por el Lema de Verdad hay un $r \in G$ tal que $r \Vdash \varphi(\pi)$. Sea $q \leq p, r$, por lo tanto $q \leq p$ y $q \Vdash \varphi(\pi)$ para algún $\pi \in dom(\sigma)$.

$\square$

## 2.3 Demostraciones de Independencia.

**Teorema 2.33**
*Sean $M$ un* modelo contable, transitivo *para* ZFC*,* $\mathbf{P}$ *un orden parcial en $M$, $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. Entonces $M[G] \models$* ZFC*.*

*Demostración.*. Ya se probaron: Extensionalidad, Fundación, Par, Unión e Infinito; restan probar: Comprensión, Potencia, Reemplazo y Elección.

Esquema de Comprensión.

Sean $i_G(\sigma), i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n) \in M[G]$ y sea $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ fórmula del lenguaje de ZFC. Por demostrar que

$$\{a \in i_G(\sigma) : \varphi(a, i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n))^{M[G]}\} \in M[G].$$

Sea $\rho = \{\langle \pi, p \rangle \in dom(\sigma) \times \mathbf{P} : p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$. Como $dom(\sigma) \times \mathbf{P} \in M$, por el Lema de Definibilidad y el axioma de Comprensión en $M$, $\rho \in M$ y $\rho$ es un $\mathbf{P}$-nombre, $\rho \in M^{\mathbf{P}}$. En lo que sigue se omitirá mencionar $i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n)$ en la fórmula $\varphi$.

A continuación se prueba que $i_G(\rho) = \{a \in i_G(\sigma) : \varphi(a)^{M[G]}\}$. En primer lugar se tiene que $i_G(\rho) = \{i_G(\pi) : \exists p \in G(\langle \pi, p \rangle \in \rho)\}$. Por definición de $\rho$, $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi))$ si $\langle \pi, p \rangle \in \rho$. Así por definición de $\Vdash$, $i_G(\pi) \in i_G(\sigma)$ y $\varphi(i_G(\pi))^{M[G]}$. Entonces $i_G(\rho) \subseteq \{a \in i_G(\sigma) : \varphi(a)^{M[G]}\}$. Ahora, sea $a \in \sigma_G$ tal que $\varphi(a)^{M[G]}$ y por consiguiente $a = \pi_G$ para algún $\pi \in dom(\sigma)$ (y para algún $p \in G$ tal que $\langle \pi, p \rangle \in \sigma$). Entonces $[\pi_G \in \sigma_G \wedge \varphi(\pi_G)]^{M[G]}$ pero como todo enunciado verdadero en $M[G]$ es forzado por algún $p \in G$ (Lema de Verdad), hay un $p \in G$ tal que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi))$; de donde $\langle \pi, p \rangle \in \rho$ y entonces $a = \pi_G \in i_G(\rho)$. Así $i_G(\rho) \supseteq \{a \in \sigma_G : \varphi(a)^{M[G]}\}$.

Reemplazo.

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula y sea $i_G(\sigma) \in M[G]$, $(\sigma \in M^P)$. Supóngase que :

$$\forall x \in i_G(\sigma) \exists! y\, \varphi(x, y)^{M[G]}. \tag{2.3}$$

Se debe verificar que $\exists \rho \in M^{\mathbf{P}}$ tal que : "la imagen de $i_G(\sigma)$ bajo $\varphi^{M[G]}$ está contenida en $i_G(\rho)$". Por Comprensión en $M[G]$, esto es suficiente. Es decir, se debe probar que

$$\forall x \in i_G(\sigma)\, \exists y \in i_G(\rho)\, \varphi(x, y)^{M[G]}. \tag{2.4}$$

Sea $\sigma = \{\langle \sigma_i, p_i \rangle : i \in I\}$. Entonces, para cualquier $i \in I$, por el Lema de Definibilidad, el conjunto $A_i = \{q \leq p_i : q \Vdash \exists x \varphi(\sigma_i, x)\}$ está en $M$; además

$$A_i = \{q \leq p_i : \exists \tau_q^i \in M^{\mathbf{P}} (q \Vdash \varphi(\sigma_i, \tau_q^i))\}$$

Sea $T_i^q = \{\tau \in M^{\mathbf{P}} : q \in A_i \wedge q \Vdash \varphi(\sigma_i, \tau)\}$. Sea $\rho = \bigcup_{i \in I} \{(\tau, q) : q \in A_i \wedge \tau \in T_i^q\} \in M^{\mathbf{P}}$. Por demostrar que $\rho$ satisface la condición expresada en (2.4). Sea $i_G(\sigma_i) \in i_G(\sigma)$, entonces $p_i \in G$. Por la condición(2.3), como $y \in M[G]$, existe $\tau \in M^{\mathbf{P}}$ tal que $i_G(\tau) = y$. Del Lema de Verdad, $\exists q \in G$ tal que $q \Vdash \varphi(\sigma_i, \sigma)$. Luego $q \in A_i$ y por consiguiente $\tau \in dom(\rho)$. Por consiguiente $i_G(\tau) \in i_G(\rho)$, pues $q \in G$. Ahora, por la definición de forcing $\varphi(i_G(\sigma_i), i_G(\tau))^{M[G]}$

<u>Potencia</u>.

Sea $i_G(\sigma) \in M[G]$, con $\sigma \in M^{\mathbf{P}}$. Se va a construir un $\rho \in M^{\mathbf{P}}$ tal que

$$\forall x \in M[G](x \subseteq i_G(\sigma) \rightarrow x \in i_G(\rho))$$

Es decir, $i_G(\rho)$ incluye a la potencia de $i_G(\sigma)$ en $M[G]$. Sea $s = \{\tau \in M^{\mathbf{P}} : dom(\tau) \subseteq dom(\sigma)\} = \mathcal{P}(dom(\sigma) \times \mathbf{P}) \cap M$. Sea $\rho = s \times \{1_{\mathbf{P}}\} = \{\langle \sigma, 1_{\mathbf{P}} \rangle : \sigma \in s\}$. Sea $\mu \in M^{\mathbf{P}}$ tal que $i_G(\mu) \subseteq i_G(\sigma)$. Por demostrar que $i_G(\mu) \in i_G(\rho)$. Sea $\tau = \{\langle \pi, p \rangle : \pi \in dom(\sigma) \wedge p \Vdash \pi \in \mu\}$ entonces $\tau \in s$ y $\langle \tau, 1_{\mathbf{P}} \rangle \in \rho$, por lo tanto

$$i_G(\tau) \in i_G(\rho)$$

Pero $i_G(\mu) = i_G(\tau)$ (posiblemente $\mu \neq \tau$), en efecto:

$\subseteq$). Si $i_G(\pi) \in i_G(\mu)$ entonces $\exists p \in G$ tal que $p \Vdash \pi \in \mu$ (Lema de

Verdad) y como $i_G(\mu) \subseteq i_G(\sigma)$ se tiene $\pi \in dom(\sigma)$, así $\langle \pi, p\rangle \in \tau$ por lo cual $i_G(\pi) \in i_G(\tau)$ y por lo tanto $i_G(\mu) \subseteq i_G(\tau)$.
$\supseteq$. Si $i_G(\pi) \in i_G(\tau)$ entonces $\exists p \in G$ tal que $\langle \pi, p\rangle \in \tau$, de donde, por la definición de *tau*, $\pi \in dom(\sigma)$ y $p \Vdash \pi \in \mu$; ahora, por el Lema de Verdad, $i_G(\pi) \in i_G(\mu)$ y $i_G(\tau) \subseteq i_G(\mu)$. Por lo tanto $i_G(\mu) = i_G(\tau)$ y así $i_G(\mu) \in i_G(\rho)$ debido a 2.3.

Elección.

Antes de la demostración, una versión equivalente:

**Lema 2.34**
*AE si, y sólo si,* $\forall x \exists \alpha \in Or \exists f[f\ \textit{función} \wedge dom(f) = \alpha \wedge x \subseteq rang(f)]$. *Es decir, el Axioma de Elección es equivalente a "todo conjunto está contenido en la imagen de algún ordinal bajo alguna función".*

*Demostración.*.

$\Rightarrow$) Usando el Teorema del Buen Orden, $x$ es bien ordenable, entonces es isomorfo a un único ordinal $\alpha$ y $\langle \alpha, \in\rangle \overset{f}{\cong} \langle x, <\rangle$, donde $<$ es el buen orden en $x$, y en tal caso $x = rang(f)$.

$\Leftarrow$) Sea $x$ un conjunto. Sea $\alpha \in Or$, $f$ como se enuncia en el lema. Sea $g(z) = min(f^{-1}(z))$, $z \in x$, entonces $g : x \overset{1-1}{\rightarrow} \alpha$. Ahora se define un orden $<_x$ en $x : y <_x z$ si $g(y) <_\alpha g(z)$, el cual es un buen orden.

□

Sea $x = i_G(\sigma) \in M[G]$. Como $M \models AE$, $dom(\sigma)$ es bien ordenable en $M$; es decir hay una $h : \alpha \rightarrow dom(\sigma)$, biyectiva y tal que $h(\gamma) = \pi_\gamma \in dom(\sigma)$. Así , sea $dom(\sigma) = \{\pi_\gamma : \gamma < \alpha\}$, donde $\alpha$ es ordinal y la $\alpha$-enumeración está en $M$. Sea $\tau = \{op(\check{\gamma}, \pi_\gamma) : \gamma < \alpha\} \times \{1_{\mathbf{P}}\}$, entonces $\tau \in M^{\mathbf{P}}$. Ahora, $i_G(\tau) = \{\langle \gamma, i_G(\pi_\gamma)\rangle : \gamma < \alpha\}$. Por tanto $i_G(\tau)$ es una función con $dom(i_G(\tau)) = \alpha$ y con $x = i_G(\sigma) = \{i_G(\pi_\gamma) : \exists p \in G(\langle \pi_\gamma, p\rangle \in \sigma)\} \subseteq ran(i_G(\tau))$. Así $M[G]$ cumple AE.

□

**Corolario 2.35**
*Sea $M$ un* modelo contable, transitivo *de* ZFC*. Entonces hay un* modelo contable, transitivo *$N$ tal que $M \subset N$ y satisface* ZFC + V $\neq$ L

*Demostración.*. Por los Lemas 2.11 y 2.21 se puede elegir un orden parcial $\mathbf{P}$ de modo que $G \notin M$ si, y sólo si, $\mathbf{P}$ es frondoso. Sea $N =$

$M[G]$. Por el Lema 2.21 $o(N) = o(M)$ . Entonces $\mathrm{L}^N = \mathrm{L}^M \subset M \subset N$, es decir $\mathrm{L} \subset N$ y $N$ cumple $\mathrm{L} \neq \mathrm{V}$; pues $\mathrm{L}^N \subset N$, o sea $\exists x \in N$ tal que $x \notin \mathrm{L}^N \equiv (x \notin \mathrm{L})^N$, así que $N \models \exists x(x \in \mathrm{V} \wedge x \notin \mathrm{L}) \equiv \mathrm{V} \neq \mathrm{L}$.

□

**Corolario 2.36**

$$\begin{array}{rcl} Con(\mathrm{ZFC}) & \Rightarrow & Con(\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L}) \\ Con(\mathrm{ZF}) & \Rightarrow & Con(\mathrm{ZF} + \mathrm{AE} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L}) \\ Con(\mathrm{ZF}) & \Rightarrow & Con(\mathrm{ZF} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L}) \end{array}$$

## 2.3.1 Forcing con funciones parciales finitas.

En todo lo que sigue $M$ es modelo contable, transitivo y estándar.

**Definición 2.37**
*Una familia $A$ de conjuntos se llama un* $\Delta$-sistema *si hay un conjunto fijo $r$ (llamado la raíz del $\Delta$-sistema) tal que para cualesquiera $a, b \in A$, $a \neq b$, $a \cap b = r$*

**Lema 2.38** Lema del $\Delta$-sistema.
*Si $B$ es una familia no numerable de conjuntos finitos, hay una familia no numerable $A \subseteq B$ que forma un $\Delta$-sistema.*

*Demostración..* Como $B$ es no numerable, hay una colección no numerable de elementos de $B$ que tienen el mismo cardinal $n$, para algún $n \in \omega$. Así podemos quedarnos con tal subconjunto no numerable $B' \subseteq B$ el cual si tiene un $\Delta$-sistema no numerable, será un $\Delta$-sistema no numerable de $B$.

Suponiendo que cada elemento de $B$ tiene $n$ elementos, el lema se probará por inducción sobre $n < \omega$.

($n = 1$) Toda familia no numerable de conjuntos de cardinalidad 1 es ella misma un $\Delta$-sistema con raíz $\emptyset$, ya que es una familia ajena dos a dos.

Hipótesis de Inducción. El lema es cierto para $n \in \omega$. Sea $B$ una familia no numerable tal que $\forall x \in B\ |x| = n + 1$.

Caso 1. Hay un $a \in \bigcup B$ tal que $|\{x \in B : a \in x\}| > \aleph_0$. Aplicando la hipótesis de inducción a la familia $B' = \{x \setminus \{a\} : x \in B, a \in x\}$ ya que $B'$ es familia incontable de conjuntos de cardinal $n$ y sea $A' \subseteq B'$, un $\Delta$- sistema incontable con raíz $r$. Entonces $A = \{y \cup \{a\} : y \in A'\} \subseteq B$ es un $\Delta$- sistema no numerable en $B$ con raíz $r \cup \{a\}$.

Caso 2. Todo $a \in \bigcup B$ partenece a lo más a una colección numerable de elementos de $B$. Se define $A = \{x_\alpha \in B : \alpha < \omega_1\} \subseteq B$ recursivamente como: sea $x_0 \in B$ para $\beta < \alpha$ si se tiene definido $x_\beta$ entonces se define $x_\alpha \in B$ como cualquier disjunto de $x_\beta$ $\forall \beta < \alpha$. Para ver que tal $x_\alpha$ existe se define, para $a \in \bigcup B$, $C^a = \{x \in B : a \in x\}$; por la hipótesis (caso 2), cada $C^a$ es contable. Sea $D_\alpha = \bigcup_{a \in \bigcup_{\beta<\alpha} x_\beta} C^a$; como $\bigcup_{\beta<\alpha} x_\beta$ es uni 'on contable de conjuntos finitos, es contable entonces $D_\alpha$ es contable, por ser unión contable de conjuntos contables. Como $B$ es no numerable y $D_\alpha$ es numerable, $B \setminus D_\alpha \neq \emptyset$ entonces sea $x_\alpha \in B \setminus D_\alpha$. Ahora, $x_\alpha \cap x_\beta = \emptyset$ $\forall \beta < \alpha$: pues si $a \in x_\alpha \cap x_\beta$ para algún $\beta < \alpha$ entonces $a \in \bigcup_{\beta<\alpha} x_\beta$ y $x_\alpha \in D_\alpha$!. Por consiguiente $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un $\Delta$-sistema en $B$.

$\square$

En todo lo que sigue $M$ es modelo contable, transitivo y estándar.

**Definición 2.39**
*Sea I, J dos conjuntos. Se define el conjunto de todas las funciones parciales finitas como:*
$Fin(I, J) = \{p : |p| < \omega \wedge p \text{ es función} \wedge dom(p) \subseteq I \wedge ran(p) \subseteq J\}$

$Fin(I, J)$ se ordena mediante: $p \leq q \iff p \supseteq q$. De eśta manera $\mathbf{P} = \langle Fin(I, J), \supseteq \rangle$ es un orden parcial con elemento máximo $1_{\mathbf{P}} = \emptyset$. Como ser finito es absoluto para $M$ transitivo, Si $I, J \in M$ entonces $Fin(I, J) = (Fin(I, J))^M \in M$. Si $p \in Fin(I, J)$, $|dom(p)| = |p|$ y $|ran(p)| \leq |p|$ y si $p$ es 1-1 entonces $|ran(p)| = |p| = |dom(p)|$. Para el caso $I = \omega$ y $J = 2$ se tiene $Fin(\omega, 2) = \langle \overset{\omega}{\smile}_2, \supseteq \rangle$ el cual es un orden parcial frondoso, ver página 37.

**Lema 2.40**
*Si $I, J \in M$, $I$ infinito, $J \neq \emptyset$ y $G$ es $Fin(I, J)$- genérico sobre $M$, entonces $\bigcup G$ es una función de $I$ sobre $J$.*

*Demostración.*. Como $G \subseteq Fin(I, J)$ es filtro, $\bigcup G$ es una función con dominio contenido en $I$ y rango contenido en $J$.

Como $J \neq \emptyset$, $D_i = \{p \in Fin(I,J) : i \in dom(p)\}$ es denso para toda $i \in I$, (si $J = \emptyset$, $D_i = \emptyset$ si $I \neq \emptyset$ y si $I = \emptyset$, $D_i = \{\emptyset\}$ y no son densos); entonces debido a que $D_i \in M$, por la absolutez y porque $G$ es $Fin(I,J)$-genérico sobre $M$ se tiene que $G \cap D_i \neq \emptyset\ \forall i \in I$; de donde $dom(\bigcup G) = I$.

Si $I$ es infinito, $H_j = \{p \in Fin(I,J) : j \in ran(p)\}$ es denso en $M$ (si $I$ es finito, se puede considerar un $g \in Fin(I,J)$ y $g \perp p\ \forall p \in H_i$ es decir, un $g$ tal que existe $j_0 \in J$ tal que $I = dom(g)$ y $j_0 \notin ran(g)$). Así , como $H_j \in M$ y $G$ es $Fin(I,J)$-genérico sobre $M$ se tiene que $G \cap H_j \neq \emptyset$, $\forall j \in J$; por lo tanto $ran(\bigcup G) = J$

□

**Ejemplo 0**

Sea $\kappa \in M$ tal que ($\kappa$ incontable y $\kappa$ cardinal)$^M$. Sea $\mathbf{P} = Fin(\omega,\kappa)$ y $G$ un $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. Entonces $\bigcup G \in M[G]$, pues $M[G]$ es modelo para ZFC y la unión es absoluta, y además $\bigcup G$ es una función de $\omega$ sobre $\kappa$ por lo tanto ($\kappa$ es contable)$^{M[G]}$. Como $\kappa$ es ordinal en $M$ es también ordinal en $M[G]$, pero no es $\omega$ pues $\omega$ es absoluto; es decir, $\kappa$ es un ordinal mas grande que $\omega$ pero numerable. En este caso se dice que $\mathbf{P}$ *colapsa a* $\kappa$.

**Ejemplo 1**

Sea $\kappa \in M$ tal que ($\kappa$ cardinal incontable)$^M$. Sea $\mathbf{P}$= $Fin(\kappa \times \omega, 2)$. Sea $G$ $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$; se tiene que $\bigcup G : \kappa \times \omega \to 2$. La función $\bigcup G$ puede ser considerada como una "codificación" de una $\kappa$- sucesión de funciones de $\omega$ en 2; un "archivo" de una $\kappa$- sucesión de $f_\alpha : \omega \to 2$ con $\alpha < \kappa$; $\kappa$ funciones de $\omega$ en 2. A saber, $f_\alpha(n) = \bigcup G(\langle,\alpha,n\rangle)$ para $\alpha < \kappa$, $n < \omega$. Por absolutez, la sucesión $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa\rangle \in M[G]$ y además $\forall \alpha \neq \beta < \kappa$, $f_\alpha \neq f_\beta$; en efecto, sea

$$D_{\alpha\beta} = \{p \in \mathbf{P} : \exists n \in \omega(\langle\alpha,n\rangle \in dom(p) \wedge \langle\beta,n\rangle \in dom(p) \wedge p(\alpha,n) \neq p(\beta,n))\}.$$

$D_{\alpha\beta}$ es denso y $D_{\alpha\beta} \in M$, por lo tanto $G \cap D_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ lo que implica que $\forall \alpha$, $\beta$, $\alpha \neq \beta$, $f_\alpha(n) = \bigcup G(\langle\alpha,n\rangle) = p(\alpha,n) \neq p(\beta,n) = \bigcup G(\langle\beta,n\rangle) = f_\beta(n)$ con $p \in G \cap D_{\alpha\beta}$ para algún $n \in \omega$, el cual existe con esa propiedad pues $p \in D_{\alpha\beta}$; se obtiene que $f_\alpha \neq f_\beta$. Entonces $M[G]$ tiene una $\kappa$-sucesión de funciones de $\omega$ en 2, distintas todas entre sí .

El resultado puede establecerse como un lema.

**Lema 2.41**
*Si $\kappa \in M$ es cardinal, $G$ es un filtro $Fin(\kappa \times \omega, 2)$-genérico sobre $M$ entonces* $(2^\omega \geq |\kappa|)^{M[G]}$ .

Tomando $\kappa = (\aleph_2)^M$ ($\kappa$ es cardinal según $M$), parecería que en $M[G]$ tendríamos $2^\omega \geq \aleph_2$ lo cual nos daría $\neg$HC en $M[G]$!; pero en realidad lo que se tiene es que $(2^\omega \geq |\aleph_2^M|)$ en $M[G]$.

**Definición 2.42**
*Un orden parcial cumple la* Condición de Cadena Contable, ccc, *si toda anticadena es contable.*

**Ejemplo 2**
Sea $\mathbf{P} = (\omega_1, \in)$. Todo segmento inicial propio es cadena contable y el total es cadena incontable, pero toda anticadena tiene cardinal a lo mas 1; por lo tanto $\mathbf{P}$ tiene ccc.

**Ejemplo 3**
Sea $B \neq \emptyset$ y $\mathbf{P} = \langle \mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq \rangle$ entonces $p \perp q$ si, y sólo si, $p \cap q = \emptyset$. $A \subseteq \mathbf{P}$ es una anticadena si, y sólo si, los elementos de $A$ son disjuntos 2 a 2; por lo tanto $\mathbf{P}$ tiene ccc si, y sólo si, $|B| \leq \aleph_0$.

**Ejemplo 4**
Sea $X$ un espacio topológico y $\mathbf{P} = \langle \{p \subset X : p \text{ es abierto y } p \neq \emptyset\}, \subseteq \rangle$. $p \perp q$ si, y sólo si, $p \cap q = \emptyset$ por lo tanto $\mathbf{P}$ tiene ccc si, y sólo si, toda colección de abiertos no vacíos disjuntos 2 a 2 es contable.

**Ejemplo 5**
Sea $\langle \mathcal{B}, \leq \rangle$ una álgebra Booleana y $\mathbf{P} = \langle \mathcal{B} \setminus \{0\}, \leq \rangle$ entonces $p \perp q$ si, y sólo si, $p \wedge q = 0$.

**Ejemplo 6**
Un espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$ cumple ccc si, y sólo si, $\mathbf{P} = \langle \tau \setminus \{\emptyset\}, \ , \subseteq \rangle$ cumple ccc; es decir, si toda familia de subconjuntos abiertos de $X$, no vacíos y ajenos 2 a 2 es contable.

**Lema 2.43**
*Si I es arbitrario y J es contable entonces Fin(I, J) cumple ccc.*

*Demostración.*. Sea $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq Fin(I, J)$ (una familia de condiciones de cardinal $\omega_1$) y sea $a_\alpha = dom(p_\alpha)$ (conjunto finito para toda

$\alpha < \omega_1$). Por el Lema del $\Delta$-sistema existe $X \subseteq \omega_1$ incontable tal que $\{a_\alpha : \alpha \in X\}$ [1] forma un $\Delta$-sistema con alguna raíz $r$ (finito). Como $J$ es contable entonces ${}^rJ = \{f : r \to J\}$ es contable; así , solo hay un número contable de posibilidades para $p_\alpha|_r$ con $\alpha \in X$. Como $X$ es incontable existe $Y \subseteq X$ incontable tal que $\forall \alpha, \beta \in Y,\ p_\alpha|_r = p_\beta|_r$. Pero entonces los $p_\alpha$, para toda $\alpha \in Y$, son compatibles (la intersección de sus dominios es $r$ solamente); es decir, nunca podrá haber una familia $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de condiciones incompatibles.

$\square$

**Corolario 2.44**
*Si $M$ es* modelo contable, transitivo *de* ZFC *y $Fin(I,J) \in M$ y $(Jcontable)^M$ entonces*
*$(Fin(I,J)$ cumple ccc$)^M$.*

**Definición 2.45**
*Sea $\mathbf{P} \in M$.*

*i.* $\mathbf{P}$ preserva cofinalidades *si para todo filtro $\mathbf{P}$-genérico $G$ sobre $M$ y todo $\gamma \in M$ ordinal límite,*

$$(cf(\gamma))^M = (cf(\gamma))^{M[G]}.$$

*Es decir $cf$ es $M - M[G]$ absoluta.* [2]

*ii.* $\mathbf{P}$ preserva cardinales *si para todo filtro $\mathbf{P}$-genérico $G$ sobre $M$,*

$$\forall \beta \in o(M)[(\beta\, es\, un\, cardinal)^M \iff (\beta\, es\, un\, cardinal)^{M[G]}]$$

La preservación de cardinales solo es problemática para $\beta > \omega$. Si $(\beta\,\text{es cardinal})^{M[G]}$ entonces automáticamente $(\beta\,\text{es cardinal})^M$, ya que toda función en $M$ de un ordinal menor sobre $\beta$ estará en $M[G]$ también. De acuerdo con esto se podría decir:

$\mathbf{P}$ *preserva cardinales* si, y sólo si, para todo $G$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$,

$$\forall \beta \in o(M)[\beta > \omega \wedge (\beta\,\text{es cardinal})^M \to (\beta\,\text{es cardinal})^{M[G]}].$$

[1] $\{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es incontable, pues si $|\{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}| \leq \aleph_0$ entonces, como $J$ es contable, $|\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}| < \aleph_1$!

[2] De manera equivalente, $\mathbf{P}$ preserva cofinalidades si: $\forall G$ $\mathbf{P}$-genérico sobre $M\, \forall \gamma \in M$, ordinal límite, $(cf(\gamma))^M \leq (cf(\gamma))^{M[G]}$, pues $M \subseteq M[G]$.

**Lema 2.46**
**P** *preserva cofinalidades* $\Longrightarrow$ **P** *preserva cardinales.*

*Demostración.*. Sea $\alpha$ cardinal, $\alpha$ es regular ó límite.

Si $\alpha \geq \omega$ es cardinal regular de $M$ entonces $cf(\alpha)^{M[G]} = cf(\alpha)^M = \alpha$, entonces $\alpha$ es cardinal regular de $M[G]$.

Si $\alpha > \omega$ es cardinal límite de $M$ entonces los cardinales regulares de $M$ (de hecho sucesores) menores que $\alpha$ son *no* acotados en $\alpha$. Como éstos siguen siendo regulares en $M[G]$, por $i$, $\alpha$ es un cardinal límite en $M[G]$ porque es límite de cardinales regulares no acotados en $M[G]$; así , todo cardinal infinito en $M$ es un cardinal en $M[G]$, pues todo cardinal es regular o límite.

□

**Lema 2.47**
*Sea* **P** *un orden parcial en* $M$ *y para todo* $\kappa$ *y todo* $G$ **P***-genérico, supóngase que* $(\kappa\, es\, regular)^M \Rightarrow (\kappa\, es\, regular)^{M[G]}$*. Entonces* **P** *preserva cofinalidades.*

*Demostración.*. Sea $\gamma$ ordinal límite en $M$ y $\kappa = cf(\gamma)^M$ entonces existe $f \in M \subseteq M[G]$ tal que $f : \kappa \to \gamma$ cofinal y $f$ estrictamente creciente (ver por ejemplo [15] p. 33, Lema 10.31) . Como $(\kappa\,\text{es regular})^M$, pues $cf(cf(\gamma)) = cf(\gamma)$, entonces $(\kappa\,\text{es regular})^{M[G]}$. Como $f \in M[G]$, $(\kappa = cf(\kappa) = cf(\gamma))^{M[G]}$ es decir $\kappa = cf(\gamma)^{M[G]}$, de donde $cf(\gamma)^M = cf(\gamma)^{M[G]}$ (ver, por ejemplo, [15] p. 38, Lema 10.32).

□

**Lema 2.48**
*Sean* **P** *un orden parcial en* $M$ *tal que* $(\mathbf{P}\, es\, ccc)^M$*,* $A, B \in M$*,* $G$ *un filtro* **P***-genérico sobre* $M$ *y* $f \in M[G]$ *tal que* $f : A \to B$*. Entonces existe* $g : A \to \mathcal{P}(B)$ *con* $g \in M$ *tal que* $\forall a \in A[f(a) \in g(a)]$ *y* $\forall a \in A[|g(a)| \leq \omega]^M$*.*

*Demostración.*. Sea $\tau \in M^{\mathbf{P}}$ tal que $f = i_G(\tau)$. Por el Lema de Verdad, hay $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau$ es función de $\check{\text{A}}$ en $\check{\text{B}}$. "$\tau$ es función de $\check{\text{A}}$ en $\check{\text{B}}$" es una fórmula $\varphi(\tau, \check{\text{A}}, \check{\text{B}})$. Para todo $a \in A$ se define

$g(a) = \{b \in B : \exists q \leq p(q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})\} \subseteq B$. Por el Lema de Definibilidad $g \in M$. Sea $a \in A$. Sea $b = f(a)$, por el Lema de Verdad hay $r \in G$ tal que $r \Vdash \tau(\check{a}) = b$. Sea $q \leq r, p$, entonces $q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$, por lo tanto $b \in g(a)$. Para ver que $(g(a) \leq \omega)^M$, se usa Axioma de Elección en $M$ para definir una función $h \in M$ tal que $h : g(a) \to \mathbf{P}$ y $\forall b \in g(a)$, $h(b) \leq p$ y $h(b) \Vdash \tau(\check{}\,a) = \check{}\,b$ es decir: si $b \in g(a)$, $h(b) = \mathit{algun}\, q \leq p\ \mathit{tal\,que}\ q \Vdash \tau(\check{}\,a) = \mathrm{b}$. Si $b \neq b' \in g(a)$ entonces $h(b) \perp h(b')$ y $h(b) \neq h(b')$ por lo que $h$ es inyectiva ya que se fuerzan afirmaciones inconsistentes. Dicho de otro modo, si $h(b)$ fuera compatible con $h(b')$ habría un genérico $H$ que tendría a ambos y en $M[H]$ para $i_H(\tau) : A \to B$, $i_H(a) = b$ y $i_H(a) = b'!$. Así , $\{h(b) : b \in g(a)\} = h[g(a)]$ es una anticadena en $\mathbf{P}$; como $h \in M$ y $(\mathbf{P}\,\text{es ccc})^M$ entonces $(|g(a)| \leq \omega)^M$ pues $(|h[g(a)]| \leq \omega)^M$ y $g(a)$ es isomorfo a $h[g(a)]$.

$\square$

**Teorema 2.49**
*Si* $\mathbf{P}$ *es un orden parcial en* $M$ *y* $(\mathbf{P}\,\mathit{es\,ccc})^M$ *entonces* $\mathbf{P}$ *preserva cofinalidades (y por lo tanto cardinales).*

*Demostración..* Si $\mathbf{P}$ no preserva cofinalidades, por el lema 2.47 hay un $\kappa \in M$, $\kappa > \omega$, tal que $(\kappa\,\text{regular})^M$ y $(\kappa\,\text{no regular})^{M[G]}$; hay así un $\alpha < \kappa$ y $f \in M[G]$ tal que $f : \alpha \to \kappa$ cofinal. Por el lema 2.48, sea $g \in M$ con $g : \alpha \to \mathcal{P}(\kappa_))$; además $\forall \beta < \alpha(f(\beta \in g(\beta))$ y $\forall \beta < \alpha(|g(\beta)| \leq \omega)^M$. Sea $S = \bigcup_{\beta<\alpha} g(\beta)$, por lo tanto $S \in M$ y $S$ es un subconjunto no acotado de $\kappa$ (pues si $\gamma < \kappa$ existe $\beta < \alpha$ tal que $f(\beta) > \gamma$ pero $f(\beta) \in g(\beta) \subseteq S$ y por lo tanto $\exists \beta < \alpha[f(\beta) \in S \wedge f(\beta) > \gamma])$ y es la unión de la imagen de $g$. Aplicando dentro de $M$ que la unión de $|\alpha|$ conjuntos contables tienen cardinal $|\alpha|$, se obtiene $(|S| = |\alpha| < \kappa)^M$ y por consiguiente $(\kappa\,\text{no es regular})^M!$.

$\square$

**Teorema 2.50**
$Con(\text{ZFC}) \Longrightarrow Con(\text{ZFC} + \neg\text{HC})$

*Demostración..* Sea $M$ un modelo contable, transitivo estándar de ZFC. Sea $\mathbf{P} = Fin(\omega_2^M \times \omega, 2) \in M$, por el lema 2.43 $\mathbf{P}$ cumple ccc. Así , por el teorema 2.49, $\mathbf{P}$ preserva cofinalidades y por tanto cardinales de lo cual se tiene que $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$; por el lema 2.41 $2^\omega \geq \omega_2)^{M[G]}$, es decir $M[G]$ es modelo de $2^\omega \geq \omega_2$ y $2^\omega \geq \omega_2 \longrightarrow \neg\mathrm{HC}$, es decir $M[G] \models \neg\mathrm{HC}$. Por los teoremas 2.5 y 2.33 se tiene que $Con(\mathrm{ZFC}) \Longrightarrow Con(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{HC})$

□

**Corolario 2.51**
$Con(\mathrm{ZFC}) \Longrightarrow Con(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{HGC})$

**Definición 2.52**
*Sea* $\sigma \in V^{\mathbf{P}}$. *Un* nombre elegante para un subconjunto de $\sigma$ *es un* $\tau \in V^{\mathbf{P}}$ *de la forma*

$$\tau = \bigcup\{\{\pi\} \times A_\pi : \pi \in dom(\sigma)\} = \bigcup_{\pi \in dom(\sigma)} \{\pi\} \times A_\pi$$

*donde cada* $A_\pi$ *es una anticadena en* $\mathbf{P}$.

La propiedad de ser un nombre elegante es absoluta. La idea de nombre elegante para un subconjunto de $\sigma$ es que todo subconjunto de $\sigma$ puede ser representado por un nombre elegante, en el siguiente sentido: si $\mu \subseteq \sigma$ ($\mu$ es un nombre) entonces hay $\tau$, nombre elegante para un subconjunto de $\sigma\check{}$ tal que $i_G(\tau) = \mu = i_G(\mu\check{})$. Así $\tau$ representa a $\mu$ al igual que $\mu\check{}$, pero $\tau$ es elegante y $\mu\check{}$ es canónico. En particular, si $y \subseteq x$ entonces hay un $\tau$ nombre elegante para un subconjunto de $\check{x}$ tal que $i_G(\tau) = y$. Mas aun, si $y \subseteq x$ en $M[G]$ entonces hay un $\tau$ nombre elegante para un subconjunto del nombre de $x$, que representa a $y$, de tal suerte que

$$\mathcal{P}(x)^{M[G]} \subseteq \{i_G(\tau) : \tau \text{ es nombre elegante para un subconjunto de un nombre de } x\}.$$

Esto se formaliza en el siguiente lema.

**Lema 2.53**
*Si* $\mathbf{P} \in M$ *y* $\sigma, \mu \in M^{\mathbf{P}}$ *entonces hay un nombre elegante* $\tau \in M^{\mathbf{P}}$ *para un subconjunto de* $\sigma$ *tal que*

$$1_{\mathbf{P}} \Vdash (\mu \subseteq \sigma \rightarrow \mu = \tau)$$

*Demostración..* Para cada $\pi \in dom(\sigma)$ sea $A_\pi \subseteq \mathbf{P}$ tal que:
(1) $A_\pi \subset \{p \in \mathbf{P} : p \Vdash \pi \in \mu\}$, es decir $\forall p \in A_\pi(p \Vdash \pi \in \mu)$.
(2) $A_\pi$ es una anticadena en $\mathbf{P}$, es decir $\forall p, q \in A_\pi(p \perp q)$.
(3) $A_\pi$ es maximal respecto a (1) y (2), es decir: si $A_\pi \subseteq B$ y $B$ cumple (1) y (2) entonces $A_\pi = B$.
Como $\sigma \in M$, $dom(\sigma) \in M$. Por la definibilidad de $\Vdash$ en $M$, la absolutez de $\perp$ y el Lema de Zorn en $M$ se pueden definir los $A_\pi$ en $M$ y entonces, por Reemplazo, $\{A_\pi : \pi \in dom(\sigma)\} \in M$.

Sea $\tau = \bigcup\{\{\pi\} \times A_\pi : \pi \in dom(\sigma)\} \in M^{\mathbf{P}}$. Se probará que $1_{\mathbf{P}} \Vdash (\mu \subset \sigma \to \mu = \tau)$. Sea $G$, $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. Supóngase que $i_G(\mu) \subseteq i_G(\sigma)$, por demostrar $i_G(\mu) = i_G(\tau)$.
($\subseteq$) Sea $a \in i_G(\mu)$. Como $I_G(\mu) \subseteq i_G(\sigma)$, $a = i_G(\pi)$ para algún $\pi \in dom(\sigma)$. Si Sea $p \in A_\pi \cap G$ [3] entonces $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ (por definición de $\tau$) y $p \in G$ por lo que $a = i_G(\pi) \in i_G(\tau)$, es decir $i_G(\mu) \subseteq i_G(\tau)$.
($\supseteq$) Sea $a \in i_G(\tau)$, entonces $a = i_G(\pi)$ donde $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ para algún $p \in G$. Entonces, por definición de $\tau$ y (1), $p \Vdash \pi \in \mu$ de donde $a = i_G(\pi) \in i_G(\mu)$. Así $i_G(\tau) \subseteq i_G(\mu)$.

Ahora bien, si $\mu \subseteq \sigma$ son nombres, por la parte anterior aplicada a $\mu\check{}$, $\sigma\check{} \in M^{\mathbf{P}}$ se puede considerar $\tau$ nombre elegante para un subconjunto de $\sigma\check{}$ tal que

$$1_{\mathbf{P}} \Vdash (\mu\check{} \subseteq \sigma\check{} \to \mu\check{} = \tau).$$

Entonces, como $i_G(\mu\check{}) = \mu \subseteq \sigma = i_G(\sigma\check{})$ se tiene que $\mu = i_G(\mu\check{}) = i_G(\tau)$. Así , hay un nombre elegante $\tau$ para un subconjunto de $\sigma\check{}$ tal que $i_G(\tau) = \mu$.

En particular, si $y \subseteq x$, aplicando la primera parte a $\check{x}$, $\check{y}$ nombres canónicos en $M$, se tiene que hay un $\tau$ nombre elegante para un subconjunto de $\check{x}$ tal que:

$$1_{\mathbf{P}} \Vdash (\check{y} \subseteq \check{x} \to \check{y} = \tau).$$

Como $i_G(\check{y}) = y \subseteq x = i_G(\check{x})$ entonces $y = i_G(\check{y}) = i_G(\tau)$; o sea que $\tau$ representa a $y$ y $\tau$ es nombre elegante.

[3]Si $A_\pi \cap G = \emptyset$, por el lema 2.25 hay $q \in G$ tal que $\forall p \in A_\pi(p \perp q)$. Ahora, como $i_G(\pi) = a \in i_G(\mu)$, por el Lema de Verdad se puede considerar $q' \in G$ tal que $q' \Vdash \pi \in \mu$; sea $r$ una extensión común de $q$ y $q'$ entonces $\forall p \in A_\pi(r \perp p)$ y $r \notin A_\pi$, por lo que $A_\pi \cup \{r\}$ cumple (1) y (2) contradiciendo la maximalidad de $A_\pi$!

Además, si $y \subseteq x$ en $M[G]$ entonces $y = i_G(\gamma) \subseteq i_G(\sigma) = x$ para algunos $\gamma, \sigma \in M^{\mathbf{P}}$, se tiene que hay un $\tau$ nombre elegante para subconjuntos de $\sigma$ tal que $1_{\mathbf{P}} \Vdash (\gamma \subseteq \sigma \to \gamma = \tau)$ y así : $y = i_G(\gamma) = i_G(\tau)$ y $\tau$ representa a $y$ o es un nombre elegante para $y$. Es decir, para cada $y \subseteq x$ en $M[G]$ hay un $\tau$ nombre elegante para un subconjunto del nombre de $x$ que representa a $y$ $(i_G(\tau) = y)$. En consecuencia $\mathcal{P}(x)^{M[G]} \subseteq \{i_G(\tau) : \tau \,\text{es nombre elegante para un subconjunto de}\, \sigma\}$ en donde $x = i_G(\tau)$.

□

Si $\lambda = |\{A : A \,\text{anticadena en}\, \mathbf{P}\}|$ entonces $|\{\tau : \tau = \bigcup_{\pi \in dom(\sigma)} \{\pi\} \times A_\pi\}| \leq \lambda^{|dom(\sigma)|}$. Pues para cada $\pi \in dom(\sigma)$ hay a lo mas $\lambda$ posibles anticadenas para que sean el $A_\pi$ correspondiente.

**Lema 2.54**
*Sean $\mathbf{P} \in M$ que cumple ccc en M, $|\mathbf{P}| = \kappa \geq \omega$ en M, $\lambda$ un cardinal infinito en $M$ , $\theta = (\kappa^\lambda)^M$ y $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre M. Entonces $(2^\lambda \leq \theta)^{M[G]}$.*

*Demostración.*. En $M$, toda anticadena de $\mathbf{P}$ es contable por tanto hay a lo mas $\kappa^\omega = |\mathbf{P}|^\omega$ de tales anticadenas. Como $dom(\lambda\check{}) = \{\alpha\check{} : \alpha < \lambda\}$ tiene cardinal $\lambda$ hay a lo mas $(\kappa^\omega)^\lambda = \kappa^\lambda = \theta$ nombres elegantes para subconjuntos de $\lambda\check{}$. Sea $\{\tau_\alpha : \alpha < \theta\}$ una enumeración en $M$ de todos los nombres elegantes para subconjuntos de $\lambda\check{}$.

Así en $M[G]$ hay una función $f$ con dominio $\theta$ tal que $f(\alpha) = i_G(\tau_\alpha)$ para cada $\alpha < \theta$; a saber $f = i_G(\{\langle op(\alpha\check{}, \tau_\alpha), 1_{\mathbf{P}}\rangle : \alpha < \theta\})$ . De esta manera, $f = \{i_G(op(\alpha\check{}, \tau_\alpha)) : \alpha < \theta\} = \{\langle \alpha, i_G(\tau_\alpha)\rangle : \alpha < \theta\}$ de donde $dom(f) = \theta$ y para cada $\alpha < \theta$ $f(\alpha) = i_G(\tau_\alpha)$ . Por el lema anterior $\mathcal{P}(\lambda)^{M[G]} \subseteq \{i_G(\tau) : \tau \,\text{es nombre elegante para subconjuntos de}\, \lambda\check{}\} = \{i_G(\tau_\alpha) : \alpha < \theta\} = ran(f)$. Por lo tanto $(2^\lambda \leq \theta)^{M[G]}$.

□

**Lema 2.55**
*Sea $\kappa$ un cardinal infinito de M tal que $(\kappa^\omega = \kappa)^M$ y sea $\mathbf{P} = Fin(\kappa \times \omega, 2)$. Sea G un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre M. Entonces $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$*

*Demostración.*. Por el lema 2.54, con $\lambda = \omega$, se tiene $2^{\aleph_0} \leq \kappa$ ya que $|\mathbf{P}| = \kappa$, $\mathbf{P}$ es ccc y $\theta = \kappa^\omega = \kappa$. Por otro lado, por el lema 2.41

$(2^{\aleph_0} \geq \kappa)^{M[G]}$ ya que $\mathbf{P}$ preserva cardinales y $\kappa$ es el mismo cardinal en $M[G]$. Así $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$.

□

Obsérvese que si $(\kappa^\omega = \kappa)^M$, por el lema de Köning $(\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa)^M$, se obtiene que $(cf(\kappa) > \omega)^M$. El inverso no necesariamente es cierto: $cf(\kappa) > \omega \not\Rightarrow \kappa^\omega = \kappa$; pero sí es válido cuando se supone HGC. En particular, si $M$ cumple HGC entonces en $M: \kappa^\omega = \kappa$ siempre que $cf(\kappa) > \omega$

**Corolario 2.56**
$Con(\text{ZFC}) \Longrightarrow Con(\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \kappa)$ *donde $\kappa$ es cualquier cardinal tal que $cf(\kappa) > \omega$.*

*Demostración..* El método de forcing de extensiones genéricas proporciona pruebas de consistencia relativa, esto está justificado con el Teorema 2.5. Se puede empezar con $M$ un modelo contable, transitivo de ZFC + HGC, la razón es que en ZFC se puede demostrar la existencia de un modelo contable, transitivo para cualquier lista finita de axiomas de ZFC + V=L. Pero como V=L $\Rightarrow$ HGC, al comenzar con un modelo contable, transitivo de ZFC + V=L en tal $M$ se cumple HGC.

Sea $M$ un modelo contable, transitivo de ZFC + V=L (por lo tanto modelo de HGC y $\forall\kappa$ tal que $cf(\kappa) > \omega$ se cumple $\kappa^\omega = \kappa$). Sea $\kappa$ tal que $cf(\kappa) > \omega$. Sea $\mathbf{P} = Fin(\kappa \times \omega, 2) \in M$. Sea $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. Entonces $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$. Así por el Teorema 2.5 se tiene que $Con(\text{ZFC}) \Rightarrow Con(\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \kappa)$

□

**Corolario 2.57**
$Con(\text{ZFC}) \Rightarrow Con(\text{ZFC} + \text{HGC} + \text{V} \neq \text{L})$

*Demostración..* Empezamos con $M$ un modelo contable, transitivo de ZFC + V=L, y como V=L $\Rightarrow$ HGC entonces $M$ es modelo de HGC. Sea $\mathbf{P} = Fin(\omega, 2)$, por consiguiente $|\mathbf{P}| = \omega$ y $\mathbf{P}$ es ccc. Por el corolario 2.36 , $M[G]$ es modelo de V $\neq$ L. Sea $\lambda$ un cardinal infinito de $M$. Sea $\theta = (\lambda^+)^M = (\omega^\lambda)^M$ (ya que $\omega \leq \lambda$ entonces $\omega^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$). Entonces por el lema 2.54 se tiene que $(2^\lambda \leq \theta)^{M[G]}$, lo cual vale para toda $\lambda \geq \omega$ y así $\forall\lambda \geq \omega(2^\lambda \leq \lambda^+)^{M[G]}$ por lo que la HGC se cumple en

$M[G]$. entonces por el Teorema 2.5, $Con(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZFC} + \mathrm{HGC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L})$.

$\square$

**Corolario 2.58**
*Suponiendo* $Con(\mathrm{ZFC})$ *entonces* $\mathrm{HGC} \not\Rightarrow \mathrm{V{=}L}$.

### 2.3.2 Forcing con funciones parciales de cardinalidad grande.

Ahora se considerarán órdenes parciales que permitirán violar HGC sin violar HC. Es decir, se construirán modelos donde no valga HGC para cardinales grandes y donde siga valiendo HC. En todo lo que sigue $M$ es modelo contable, transitivo de ZFC.

**Definición 2.59**
*Sea* $\lambda \geq \aleph_0$.

$$Fn(I,\, J,\, \lambda) = \{p : |p| < \lambda \wedge p \textit{ es función} \wedge dom(p) \subset I \wedge ran(p) \subset J\}$$

Con el orden $p \leq q \iff q \subseteq p$ definido en $Fn(I,\, J,\, \lambda)$ se tiene a $1_F = 1_{Fn(I,\, J,\, \lambda)} = \emptyset$ como elemento máximo.

- Si $\lambda = \omega,\ Fn(I,\, J) = Fn(I,\, J,\, \omega)$.
- Si $\lambda > \omega$, $Fn(I,\, J,\, \lambda)$ no es absoluto para $M$. Además se usará $Fn(I,\, J,\, \lambda)^M$ donde $(\lambda\,\text{es un cardinal})^M$.
- Los resultados interesantes se obtienen cuando $(\lambda\,\text{es regular})^M$.

**Lema 2.60**
*Si* $I,\, J,\, \lambda \in M,\ (\lambda\, \textit{es cardinal})^M,\ J \neq \emptyset,\ (|I| \geq \lambda)^M$ *y* $G$ *es* $(Fn(I,\, J,\, \lambda))^M$*-genérico sobre* $M$*, entonces* $\bigcup G$ *es función de* $I$ *sobre* $J$.

*Demostración.*. Es función porque $G$ es filtro.

$dom(\bigcup G) = I$, pues $D_\mu = \{p \in Fn(I,\, J,\, \lambda) : \mu \in dom(p)\}$ es denso para toda $\mu < \lambda$ y entonces $G \cap D_\mu \neq \emptyset$.

$rang(\bigcup) = J$, pues $H_\mu = \{p \in Fn(I,\, J,\, \lambda) : \mu \in ran(p)\}$ es denso para toda $\mu < \lambda$ y entonces $G \cap H_\mu \neq \emptyset$.

$\square$

Si $I = \kappa \times \lambda$ y $J = 2$, $\bigcup G$ puede ser considerado como una *codificación* de $\kappa$ funciones de $\lambda$ en 2, como en el ejemplo 2.3.1 de la página 54. Y siguiendo la analogía se tiene que $\forall \alpha < \kappa,\ f_\alpha : \lambda \to 2$ tal que $f_\alpha(\mu) = \bigcup G(\langle \alpha,\, \mu\rangle)$ para todo $\mu < \lambda$. Además, si $\alpha \neq \beta < \kappa,\ f_\alpha \neq f_\beta$ pues,
$D_{\alpha,\beta} = \{p \in Fn(\kappa \times \lambda, 2, \lambda) : \exists \mu < \lambda[\langle \alpha,\, \mu\rangle \in dom(p) \wedge \langle \beta, \mu\rangle \in dom(p) \wedge p(\alpha, \mu) \neq p(\beta, \mu)]\}$
es denso y pertenece a $M$. La densidad de $D_{\alpha,\beta}$ es como sigue: sean $\alpha \neq \beta$ dados, si $q(\alpha, \mu) \neq q(\beta, \mu)$ entonces se termina la demostración; supóngase que $q(\alpha, \mu) = q(\beta, \mu)$, por demostrar que existe $p \in D_{\alpha,\beta}$ tal que $p \leq q$. Sea $\mu' < \lambda$ tal que $(\alpha,\, \mu',\, (\beta,\, \mu') \notin dom(q)$, donde $q \in Fn(\kappa \times \lambda,\, 2,\, \lambda)$. Sea $p = \{\langle(\alpha,\, \mu'),\, 0\rangle,\, \langle(\beta,\, \mu'),\, 1\rangle\} \cup q \in D_{\alpha,\,\beta}$ que satisface las condicones. El caso es análogo al lema 2.41; se establece así el siguiente lema.

**Lema 2.61**
*Si* $(\lambda\, es\, cardinal)^M$, $\kappa \in M$, $G\ es\, Fn(\kappa \times \lambda, 2\,,\, \lambda)$*-genérico sobre* $M$*, entonces* $(2^{|\lambda|} \geq |\kappa|)^{M[G]}$.

## 2.4 El Axioma de Elección.

Las extensiones genéricas satisfacen todos los axiomas de teoría de conjuntos, incluyendo el Axioma de Elección; aun así pueden usarse para establecer la consistencia relativa de ¬AE considerando ciertos submodelos de los modelos genéricos. Los automorfismos de nombres de elementos de $M[G]$ se pueden usar para construir submodelos de $M[G]$ en los que AE falle.

### 2.4.1 Algebras de Boole, órdenes parciales, topologías, inmersiones e isomorfismos.

**Definición 2.62**
*Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Boole.*

- $\mathcal{B}$ *es* completa *si todo subconjunto $S \subseteq \mathcal{B}$ tiene ínfimo y supremo, denotados respectivamente como $\bigwedge S$ y $\bigvee S$.*

- *Una* anticadena *en $B$ es un $A \subseteq \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que $\forall a, b \in A(a \neq b \rightarrow a \wedge b = 0)$*

**Lema 2.63**
*En toda álgebra de Boole se cumple: $x \leq y \iff x \wedge y' = 0 \iff x' \vee y = 1$ donde $x'$, $y'$ denotan al complemento de $x$, $y$ en la álgebra de Boole.*

*Demostración.*. $\Rightarrow$) Si $x \leq y$ entonces $x \wedge y = x$; luego, $x \wedge y' = (x \wedge y) \wedge y' = x \wedge (y \wedge y') = x \wedge 0 = 0$.

$\Leftarrow$) Si $x \wedge y' = 0$ entonces: $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y$ por consiguiente $x \leq y$

□

**Definición 2.64**
*Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico.*

- *Un $b \subset X$ es un* abierto regular *si $b$ es igual al interior de la cerradura topológica de $b$; en símbolos $b = \overline{b}^0$.*

- *Se define el álgebra de Boole de los abiertos regulares, denotada por $ar(X)$, cuyos elementos son los abiertos regulares de $X$ y sus operaciones son:* $a \wedge b = a \cap b$; $a \vee b = \overline{a \cup b}^0$; $a' = (X \setminus a)^0$

$ar(X)$ es un álgebra de Boole completa.

**Definición 2.65**
*Sea* $\mathbf{P}$ *un orden parcial.* $\mathbf{P}$ *es* separativo *si* $\forall p, q \in \mathbf{P}\ (p \not\leq q \rightarrow \exists r(r \leq p \wedge r \perp q))$

**Teorema 2.66**
*Sea* $\mathbf{P}$ *un orden parcial. Existe una álgebra de Boole* $\mathcal{B}$ *completa y una función* $i : \mathbf{P} \longrightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$ *tal que*

(1) $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \leq q \rightarrow i(p) \leq i(q))$
(2) $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \perp q \leftrightarrow i(p) \wedge i(q) = 0)$
(3) $i[\mathbf{P}]$ *es denso en* $\mathcal{B} \setminus \{0\}$
(4) $\mathbf{P}$ *es separativo* $\Longleftrightarrow$ *la función* $i : \mathbf{P} \rightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$ *es inyectiva y* $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \leq q \leftrightarrow i(p) \leq i(q))$.

*Demostración..* Se define una topología $\tau_p$ sobre $\mathbf{P}$ como sigue: si $p \in \mathbf{P}$, sea $N_p = \{q \in \mathbf{P} : q \leq p\}$; la colección $\{N_p : p \in \mathbf{P}\}$ es una base para una topología en $\mathbf{P}$. Los $N_p$ forman una base pues si $q \in N_p$ entonces $N_q \subset N_p$. Para cada $p \in \mathbf{P}$, $N_p$ es el menor abierto que tiene a $p$.

Sea $\mathcal{B} = ar(\mathbf{P})$ y sea $i : \mathbf{P} \rightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$ definida como $i(p) = \overline{N_p}^0$.

(1). $p \leq q \Rightarrow N_p \subseteq N_q$ y como las operaciones de clausura e interior preservan contención entonces $i(p) = \overline{N_p}^0 \subseteq \overline{N_q}^0 = i(q)$.

(2). $\Leftarrow$) Sea $p$ compatible con $q$ y sea $r \leq p, q$. Por (1) $i(r) \leq i(p), i(q)$, así que $i(p) \wedge i(q) \neq 0$ (pues $\forall r$, $N_r \neq \emptyset \Rightarrow i(r) = \overline{N_r}^0 \neq \emptyset$).

$\Rightarrow$) $p \perp q$ implica que $N_p \cap N_q = \emptyset$. Como $N_q$ es abierto entonces $\overline{N_p} \cap N_q = \emptyset$, por lo tanto $i(p) \cap N_q = \overline{N_p} \cap N_q = \emptyset$. Puesto que $i(p)$ es abierto, el mismo argumento aplicado a $q$ produce $i(p) \wedge i(q) = i(p) \cap i(q) = \emptyset$.

(3). Sea $b$ un abierto regular distinto del vacío. Si $p \in b$, $N_p \subseteq b$. Entonces $i(p) = \overline{N_p}^0 \subseteq \overline{b}^0 = b$.

(4). $\Rightarrow$) Supóngase que $i(p) = i(q)$, por demostrar que $p = q$. Sea $r \leq p$, por (2) del teorema anterior, $i(r) \leq i(p) = i(q)$, asíque $i(r) \wedge i(q) = i(r) \neq 0$ lo cual, por (2) del teorema anterior, asegura que $r$ es compatible con $q$. En consecuencia, para todo $r \leq p$, $r$ es compatible con $q$; en particular, como $\mathbf{P}$ es separativo, por contraposición se obtiene que $p \leq q$. Para ver la otra desigualdad, sea $r \leq q$, por (1), $i(r) \leq i(q) = i(p)$, o sea $i(r) \wedge i(p) = i(r) \neq 0$ lo cual, por (2), asegura que $r$ es compatible con $q$. En consecuencia, para todo $r \leq q$, $r$ es compatible con $q$; en particular, como $\mathbf{P}$ es separativo, por contraposición se obtiene que $q \leq p$.

Para ver la segunda parte, basta probar que : $\forall p, q \in \mathbf{P}(i(p) \leq i(q) \rightarrow p \leq q)$. Supóngase que $i(p) \leq i(q)$ y que $p \not\leq q$,como $\mathbf{P}$ es separativo $\exists r \in \mathbf{P}(r \leq p \wedge r \perp q)$; usando (1), $i(r) \leq i(p)$ y por (2) se obtiene que $i(r) \wedge i(q) = 0$. Pero como $i(p) \leq i(q)$ implica que $i(r) \leq i(q)$ se obtiene un absurdo. Por lo tanto $p \leq q$.

$\Leftarrow$) Sean $p, q$ tales que $p \not\leq q$, por hipótesis se tiene que $i(p) \not\leq i(q)$ y por el lema 2.63 $i(p) \wedge i(q)' \neq 0$ y por lo tanto $i(p) \wedge i(q)' \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$. Como $i[\mathbf{P}]$ es denso en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$, $\exists r \in \mathbf{P}$ tal que $i(r) \leq i(p) \wedge i(q)'$ y en consecuencia $i(r) \leq i(p)$ y por hipótesis $r \leq p$ y $i(r) \leq i(q)'$, usando otra vez el lema 2.63 $i(r) \wedge i(q) = 0$ lo cual implica que, por (2), $r \perp q$. Así se ha probado que $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \not\leq q \rightarrow \exists r(r \leq p \wedge r \perp q))$.

□

La función $i$ es una inmersión densa de $\mathbf{P}$ en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ (la definición se da más adelante). $\mathcal{B}$ se llama la *completación de* $\mathbf{P}$ y $\mathcal{B}$ e $i$ son únicas salvo isomorfismo. Además las extensiones genéricas sobre $M$, es decir las $M[G]$, se pueden obtener con $G$ que sea $\mathbf{P}$-genérico/$M$ o bien con un $G$ que sea $\mathcal{B}$-genérico /$M$; la $M[G]$ resultará la misma.

**Definición 2.67**
*Sean* $\langle \mathbf{P}, \leq_{\mathbf{P}}, 1_{\mathbf{P}} \rangle$ *y* $\langle \mathbf{Q}, \leq_{\mathbf{Q}}, 1_{\mathbf{Q}} \rangle$ *órdenes parciales. Una función* $i : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ *es* inmersión completa *si*

*1*). $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \leq q \rightarrow i(p) \leq i(q))$.

*2*). $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \perp q \leftrightarrow i(p) \perp i(q))$.

*3*). $\forall q \in \mathbf{Q} \exists p \in \mathbf{P} \forall p' \in \mathbf{P}(p' \leq p \rightarrow i(p') \not\perp q)$. *En este caso se dice que* $p$ *es una* reducción *de* $q$ *a* $\mathbf{P}$.

En general una inmersión completa no es inyectiva, ni $i(1_{\mathbf{P}}) = 1_{\mathbf{Q}}$, ni se cumple la implicación inversa en 1) y 3). Pero estas tres condiciones se satisfacen si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son separativos.

Con $\mathbf{P} \subset_c \mathbf{Q}$ se denota que $\mathbf{P}$ es suborden de $\mathbf{Q}$ (es decir $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ y $\leq_{\mathbf{P}} = \leq_{\mathbf{Q}} \cap(\mathbf{P} \times \mathbf{P})$) y la inclusión de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{Q}$ es una inmersión completa.

**Lema 2.68**

*(a). Si $i : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ es un isomorfismo entonces $i$ es inmersión completa.*

*(b). Si $I \subseteq I'$ entonces $Fin(I, J, \kappa) \subset_c Fin(I', J, \kappa)$.*

*Demostración..* $(a)$. Se probarán las condiciones de la definición de inmersión completa. La condición 1) es inmediata pues por hipótesis $i$ es isomorfismo; de hecho se tiene algo mas fuerte con $\leftrightarrow$.

Si $p \not\perp q$ o sea si $\exists r \leq p, q$ entonces, como $i$ es isomorfismo $i(r) \leq i(p), i(q)$ y por consiguiente $i(p) \not\perp i(q)$. Si $i(p) \not\perp i(q)$ entonces hay un $r$ tal que $i(r) \leq i(p), i(q)$ de donde $r \leq p, q$, es decir $p \not\perp q$. esto prueba la condición 2).

Sea $q \in \mathbf{Q}$; para algún $p \in \mathbf{P}$, $q = i(p)$. Sea $p' \leq p$, entonces $i(p') \leq i(p) = q$; así $i(p')$ y $q$ son compatibles.

$(b)$. Las condiciones 1) y 2) de la definición de inmersión completa son satisfechas para el caso de $\subset_c$. Para 3), sea $q \in Fin(I', J, \kappa)$ entonces $q|_I$ es una reducción de $q$ a $Fin(I, J, \kappa)$; pues si $q|_I \subseteq p' \in Fin(I, J, \kappa)$ entonces $p'$ y $q$ son compatibles en $Fin(I', J, \kappa)$

$\square$

Las nociones de inmersión completa y $\subset_c$ son absolutas para $M$ mtc de ZFC.

**Lema 2.69**
*Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial en $M$, $G \subseteq \mathbf{P}$. Entonces $G$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ si, y solo si,*

1). $\forall p, q \in G \exists r \in \mathbf{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$

2). $\forall p \in G \forall q \in \mathbf{P}(p \leq q \rightarrow q \in G)$

3). $\forall D \subseteq \mathbf{P}(D \in M \wedge D\ denso\ en\, \mathbf{P}) \rightarrow G \cap D \neq \emptyset$.

*Demostración.*. Sólo se probará la implicación $\Leftarrow$. Así supóngase que $G$ cumple la condiciones enunciadas. Sean $p, q \in G$. Sea $D = \{r \in \mathbf{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p, q)\}$. $D$ es denso en $\mathbf{P}$ y está en $M$. Por la condición 3) sea $r \in G \cap D$, por consiguiente $r \leq p, q$ y $r \in G$.

$D$ es denso en $\mathbf{P}$, pues sea $s \in P$. Si $s \perp p$ ó $s \perp q$ entonces $s \in D$. Si existe $r_1 \leq s, p$ y si $r_1 \perp q$ entonces $r_1 \in D$ y $r_1 \leq s$. Si existe $r_2 \leq r_1, q$ entonces $r_2 \leq s, p, q$ y por lo tanto $r_2 \in D$.

□

**Teorema 2.70**
*Sean* $i$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q} \in M$, $i : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ *inmersión completa. Sea* $H$ $\mathbf{Q}$*-genérico sobre* $M$*. Entonces* $i^{-1}(H) = \{p \in \mathbf{P} : i(p) \in H\}$ *es* $\mathbf{P}$*-genérico sobre* $M$ *y* $M[i^{-1}(H)] \subseteq M[H]$.

*Demostración.*. Primero se muestra que $i^{-1}(H)$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. La cláusula (1) del lema anterior se cumple debido a la cláusula (2) de la definición de inmersión completa: si $p, q \in i^{-1}(H)$, $i(p), i(q) \in H$ y por lo tanto son compatibles en $\mathbf{Q}$ y se tiene que $p \not\perp q$ en $\mathbf{P}$. La cláusula (2) del lema anterior se cumple debido a la cláusula (1) de la definición de inmersión completa: si $p \in i^{-1}(H)$, $p \leq q \in \mathbf{P}$ entonces $i(p) \in H$ y $i(q) \in \mathbf{Q}$ y $i(p) \leq i(q)$, luego, como $H$ es filtro, $i(q) \in H$ y se tiene que $q \in i^{-1}(H)$. Ahora se prueba que la cláusula (3) se cumple por: sea $D \subseteq \mathbf{P}$, denso en $\mathbf{P}$ y $D \in M$, se probará que $i^{-1}(H) \cap D \neq \emptyset$; si $i^{-1}(H) \cap D = \emptyset$ entonces $H \cap i[D] = \emptyset$, pues si $i(d) \in i[D]$ se tiene que $d \in D \setminus i^{-1}(H)$ y por lo tanto $i(d) \notin H$. Por el lema 2.25 hay un $q \in H$ tal que $\forall q' \in i[D](q' \perp q)$ y por lo tanto $\forall p' \in D(i(p') \perp q)$; ahora bien, si $p$ es una reducción de $q$ a $p$ entonces $\forall p' \leq p(i(p') \not\perp q)$ y así $\forall p' \leq p$, $p' \notin D$! pues $D$ es denso en $\mathbf{P}$; luego $i^{-1}(H) \cap D \neq \emptyset$ y $i^{-1}(H)$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$.

Ahora se verá que $M[i^{-1}(H)] \subseteq M[H]$. Como $i, \mathbf{P} \in M$ y $M \subseteq M[H]$ se tiene que $i, \mathbf{P} \in M[H]$ y $H \in M[H]$ y por lo tanto $i^{-1}(H) = \{p \in \mathbf{P} : i(p) \in H\} \in M[H]$ por el Axioma de Comprensión en $M[H]$, el cual es modelo de ZF. Así $M \subseteq M[H]$ y $i^{-1}(H) \in M[H]$ y $M(H)$ es mtc de ZFC, pero $M[i^{-1}(H)]$ es el mínimo con esas propiedades (ver lema 2.18) y por lo tanto $M[i^{-1}(H)] \subseteq M[H]$.

□

**Corolario 2.71**
*Si* $i, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in M$, $i : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ *isomorfismo sobreyectivo. Sea* $G \subseteq \mathbf{P}$. *Entonces* $G$ *es* $\mathbf{P}$*-genérico sobre* $M$ *si, y sólo si,* $i[G]$ *es* $\mathbf{Q}$*-genérico sobre* $M$ *y en tal caso* $M[G] = M[i[G]]$.

*Demostración..* Sean $p, q \in i[G]$ entonces $p = i(s)$ y $q = i(s')$ con $s, s' \in G$. Si $p \perp q$ entonces, por (2) del teorema, $s \perp s'$!. Sean $i(g) \in i[G]$ y $q \in \mathbf{Q}$ tales que $i(g) \leq q$, por consiguiente $p \in G$ y como $q = i(r)$ para algún $r \in \mathbf{P}$ entonces $i(g) \leq i(r) = q$ lo cual implica que $g \leq r$ y así $r \in G$ de donde $q = i(r) \in i[G]$. Sea $D$ denso en $\mathbf{Q}$ y $D \in M$. Si $i[G] \cap D = \emptyset$ entonces $G \cap i^{-1}(D) = \emptyset$ y por consiguiente $\exists q \in G$ tal que $\forall q' \in i^{-1}(D)(q' \perp q)$ por lo cual $\forall p' \in D(i^{-1}(p') \perp q)$.

□

**Definición 2.72**
*Sean* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *órdenes parciales. Sea* $i : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$. *Se dice que* $i$ *es una* inmersión densa *si*

1). $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \leq q \to i(p) \leq i(q))$

2). $\forall p, q \in \mathbf{P}(p \perp q \to i(p) \perp i(q))$

3). $i[\mathbf{P}]$ *es denso en* $\mathbf{Q}$.

La función mencionada en el teorema 2.66 es una inmersión densa de $\mathbf{P}$ en el álgebra de Boole $ar(\mathbf{P})$.

**Lema 2.73**
*Toda inmersión densa es una inmersión completa.*

*Demostración..* Sólo se probará (3) de la definición de inmersión completa. Sea $q \in \mathbf{Q}$ entonces $\exists p \in \mathbf{P}(i(p) \leq q)$; por tanto $p$ es una reducción de $q$ a $\mathbf{P}$, pues si $p' \leq p$ entonces $i(p') \leq i(p) \leq q$ y se tiene que $i(p') \leq q$ y son compatibles.

□

**Corolario 2.74**
*Si* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ *y* $\mathbf{P}$*es denso en* $\mathbf{Q}$ *entonces la identidad en* $\mathbf{P}$(*o inclusión*) *es una inmersión densa en* $\mathbf{Q}$.

**Lema 2.75**

*Sea* $\mathbf{P}$*un orden parcial en M; sean* $G_1$, $G_2$ $\mathbf{P}$*-genéricos sobre* $M$ *y* $G_1 \subseteq G_2$ *entonces* $G_1 = G_2$.

*Demostración..* Sea $p \in G_2$. Si $p \notin G_1$ entonces $G_1 \cap \{p\} = \emptyset$, y por el lema 2.25 $\exists q \in G_1$ tal que $q \perp p$; pero $q \in G_1 \subseteq G_2$, es decir $q \in G_2$ y como $p \in G_2$ y $G_2$ es filtro, se tiene una contradicción con la definición de filtro; entonces $p \in G_1$.

□

**Teorema 2.76**

*Sean* $\mathbf{P}$, *y* $\mathbf{Q}$ *ordenes parciales en M,* $i : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ *una inmersión densa. Para* $G \subseteq \mathbf{P}$ *sea* $j(G) = \{q \in \mathbf{Q} : \exists p \in G(i(p) \leq q)\} \subseteq \mathbf{Q}$. *Para* $H \subseteq \mathbf{Q}$ *sea* $f(H) = \{p \in \mathbf{P} : i(p) \in H\} = i^{-1}(H) \subseteq \mathbf{P}$.

- *a*). *Si* $G$ *es* $\mathbf{P}$*-genérico sobre* $M$ *entonces* $j(G)$ *es* $\mathbf{Q}$*- genérico sobre* $M$.
- *b*). *Si* $H$ *es* $\mathbf{Q}$*-genérico sobre* $M$ *entonces* $f(H)$ *es* $\mathbf{P}$*-genérico sobre* $M$ *y* $H = j(f(H))$. *Si* $G \subseteq \mathbf{P}$ *es* $\mathbf{P}$*-genérico,* $G = f(j(G))$.
- *c*). *Si* $G = f(H)$ *ó* $H = j(G)$ *entonces* $M[G] = M[H]$.

*Demostración..*

*a*). Aquí se usará el lema 2.69.

1) Si $q$, $q' \in j(G)$ sean $p, p' \in G$ tales que $i(p) \leq q$, $i(p') \leq q'$ entonces hay un $r \in G$ tal que $r \leq p, p'$ de donde $i(r) \leq i(p), i(p')$ y por lo tantto $i(r) \leq q, q'$.

2) Si $q \in j(G)$ y $q \leq q'$ entonces $\exists p \in G$ tal que $i(p) \leq q \leq q'$ y así $q' \in j(G)$.

3) Sea $D \in M$ denso en $\mathbf{Q}$. Sea $D^* = \{p \in \mathbf{P} : \exists q \in D(i(p) \leq q)\}$. Si $D^* \cap G \neq \emptyset$ entonces $D \cap j(G) \neq \emptyset$ (pues si $p \in D^* \cap G$ se tiene que $\exists q \in D$ tal que $i(p) \leq q$ y $p \in G$, de donde $q \in j(G)$ y por lo tanto $q \in D \cap j(G) \neq \emptyset$). Ahora, si $D^*$ es denso en $\mathbf{P}$ entonces $D^* \cap G \neq \emptyset$. En efecto, sea $p \in \mathbf{P}$ fijo y $q \in D$ tal que $q \leq i(p)$ y, como $i[\mathbf{P}]$ es denso, sea $p' \in \mathbf{P}$ tal que $i(p') \leq q$ entonces $i(p') \leq i(p)$; por lo tanto $i(p')$

y $i(p)$ son compatibles y $p'$ y $p$ son compatibles. Sea $p'' \in \mathbf{P}$ tal que $p'' \leq p$ y $p'' \leq p'$ entonces $p'' \in D^*$, ya que $i(p'') \leq q$ y $q \in D$, y $p'' \leq p$. Así que $D^*$ es denso en $\mathbf{P}$.

b). Como toda inmersión densa es inmersión completa, la genericidad de $f(H)$ se sigue del teorema 2.70 ya que $f = i^{-1}$.

Ahora se verá que $G = f(j(G))$. Por $a$), $j(G)$ es $\mathbf{Q}$-genérico sobre $M$ y así $f(j(G))$ es $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$. De las definiciones se tiene que $G \subseteq f(j(G))$ y por el lema 2.75 se tiene la igualdad. Usando los mismos argumentos se obtiene que $H = j(f(H))$.

c). Por el teorema 2.70, si $G = i^{-1}(H)$ o si $H = j(G)$, se tiene $M[G] \subseteq M[H]$ y la misma prueba muestra que $M[H] \subseteq M[G]$, pues: $M \subseteq M[H]$, $H \subseteq M[H]$ y $M[H]$ es un mtc de ZFC y es minimal con tal propiedad; como $M \subseteq M[G]$, $H = j(G) = \{q \in \mathbf{Q} : \exists p \in G(i(p) \leq q)\} \in M[G]$ y $M[G]$ es mtc de ZFC, por lo tanto $M[H] \subseteq M[G]$

□

**Corolario 2.77**
*Dados $i, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in M$, $i : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ inmersión densa, hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los filtros $\mathbf{P}$-genéricos y el conjunto de los filtros $\mathbf{Q}$-genéricos dada por $j$ y $f$.*

El corolario afirma que $j$ y $f$ son inversa una de otra y son una biyección entre los genéricos de $\mathbf{P}$y $\mathbf{Q}$.

A continuación se asociará a cada $\mathbf{P}$-nombre un $\mathbf{Q}$-nombre.

**Definición 2.78**
*Si $i : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$, se define por recursión sobre $\tau \in V^{\mathbf{P}}$:*
$i_*(\tau) = \{\langle i_*(\sigma), i(p)\rangle : \langle \sigma, p\rangle \in \tau\}$.

$i_*(\tau) \in V^{\mathbf{Q}}$ pues es una relación cuyo rango es un conjunto de elementos de $\mathbf{Q}$ y cuyo dominio es un conjunto de $\mathbf{Q}$-nombres. $i_*$ es absoluta para M, por lo que, si $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, i \in M$ entonces $i_* : M^{\mathbf{P}} \to M^{\mathbf{Q}}$.

**Lema 2.79**
*Sean $i, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in M$, $i : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ inmersión completa, entonces:*

*a). Si $H$ es $\mathbf{Q}$-genérico sobre $M$, entonces $\forall \tau \in M^{\mathbf{P}}(i_{i^{-1}(H)}(\tau) = i_H(i_*(\tau)))$*

*b). Si $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ es fórmula absoluta para modelos transitivos de* ZFC*, entonces*

$$p \Vdash_{\mathbf{P}} \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \Longleftrightarrow i(p) \Vdash_{\mathbf{Q}} \varphi(i_*(\tau_1), \cdots, i_*(\tau_n))$$

*c). Si $i$ es inmersión densa y $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ es cualquier fórmula, entonces*

$$p \Vdash_{\mathbf{P}} \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \Longleftrightarrow i(p) \Vdash_{\mathbf{Q}} \varphi(i_*(\tau_1), \cdots, i_*(\tau_n))$$

*Demostración.*.

a). ($\subseteq$) Sea $i_{i^{-1}(H)}(\sigma) \in i_{i^{-1}(H)}(\tau)$. Por definición de $i_G(\tau)$, $\exists p \in i^{-1}(H)(\langle \sigma, p\rangle \in \tau)$, y así $\exists i(p) \in H(\langle i_*(\sigma), i(p)\rangle \in i_*(\tau)$, por definición de $i_*$, luego $i_H(i_*(\sigma)) \in i_H(i_*(\tau))$ pero como $\langle \sigma, p\rangle \in \tau$ por hipótesis de inducción se tiene que $i_{i^{-1}(H)}(\sigma) = i_H(i_*(\sigma))$ y por lo tanto $i_{i^{-1}(H)}(\sigma) \in i_H(i_*(\tau))$.

($\supseteq$) Sea $i_H(i_*(\sigma)) \in i_H(i_*(\tau))$. $\exists i(p) \in H(\langle i_*(\sigma), i(p)\rangle \in i_*(\tau)$, entonces $\exists p \in i^{-1}(H)(\langle \sigma, p\rangle \in \tau$ luego $i_{i^{-1}(H)}(\sigma) \in i_{i^{-1}(H)}(\tau)$ pero como $i_{i^{-1}(H)}(\sigma) = i_H(i_*(\sigma))$ por hipótesis de inducción $i_H(i_*(\sigma)) \in i_{i^{-1}(H)}(\tau)$.

b) y c). $\Rightarrow$) Supóngase que $p \Vdash_{\mathbf{P}} \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$. Sea $H \subseteq \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}$-genérico sobre $M$ tal que $i(p) \in H$, es decir $p \in i^{-1}(H)$; por definición de $\Vdash_{\mathbf{P}}$ se tiene que $\varphi(i_{i^{-1}(H)}(\tau_1), \cdots, i_{i^{-1}(H)}(\tau_n))^{M[i^{-1}(H)]}$ pero como $i_{i^{-1}(H)}(\tau_k) = i_H(i_*(\tau_k))$ y $M[i^{-1}(H)] \subseteq M[H]$ se tiene que $\varphi(i_H(i_*(\tau_1)), \cdots, i_H(i_*(\tau_n)))^{M[H]}$ ( en (b) por la absolutez de $\varphi$, en (c) porque $M[i^{-1}(H)] = M[H]$ ya que $i$ es inmersión densa) así por definición de $\Vdash_{\mathbf{Q}}$ se tiene que $i(p) \Vdash_{\mathbf{Q}} \varphi(i_*(\tau_1), \cdots, i_*(\tau_n))$.

b) y c) $\Leftarrow$). Supóngase que $p \nVdash_{\mathbf{P}} \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ entonces, por definición de $p \Vdash \neg\varphi$, hay un $p' \leq p$ tal que $p' \Vdash_{\mathbf{P}} \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ por la parte $\Rightarrow$ se tiene que $i(p') \Vdash_{\mathbf{Q}} \neg\varphi(i_*(\tau_1), \cdots, i_*(\tau_n))$. Ahora como $i(p') \leq i(p)$ entonces $i(p) \nVdash_{\mathbf{Q}} \varphi(i_*(\tau_1), \cdots, i_*(\tau_n))$.

$\square$

### 2.4.2 Modelos de valuación Booleana.

**Definición 2.80**
*Un* filtro en una álgebra de Boole $\mathcal{B}$ *es un* $F \subseteq \mathcal{B}$ *tal que*

$$\begin{array}{rl} i) & F \neq \mathcal{B}, \emptyset \\ ii) & \forall x, y \in F,\, x \wedge y \in F \\ iii) & \forall x \in F,\, \forall y \in \mathcal{B}(x \leq y \rightarrow y \in F). \end{array}$$

**Lema 2.81**
*$F$ es un filtro en el álgebra de Boole $\mathcal{B}$ si, y sólo si, $F$ es un filtro en el orden parcial $\mathcal{B}/setminus\{0\}$.*

*Demostración..* $(\Rightarrow)$, $F \subseteq \mathcal{B} \setminus \{0\}$ entonces $\forall x, y \in F \exists z = x \wedge y \in F(z \leq x, y)$. La propiedad $(iii)$ es idéntica a la definición de filtro en un orden parcial.

$(\Leftarrow)$, Sean $x, y \in F$ y $r \in F$ tales que $r \leq x \wedge r \leq y$ (obsérvese que $r \neq 0$), entonces $r \leq x \wedge y$ y $x \wedge y \in F$.

□

**Definición 2.82**
*Un subconjunto $G$ de $\mathcal{B}$ tiene la* propiedad de la intersección finita *si para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq G$, $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$.*

Todo filtro en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

**Definición 2.83**
*Sean $\mathcal{B}$ álgebra de Boole y $F \subset \mathcal{B}$ un filtro. $F$ es un* ultrafiltro *si $F$ es un filtro maximal.*

**Lema 2.84** *(a). Si $F$ es una familia de filtros sobre $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un filtro sobre $\mathcal{B} \setminus \{0\}$.*

*(b). Si $C$ es una $\subset$-cadena de filtros sobre $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ entonces $\cup \mathcal{C}$ es un filtro sobre $\mathcal{B} \setminus \{0\}$.*

*(c). Si $G \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$ tiene la propiedad de la intersección finita, hay un filtro $F$ sobre $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que $G \subset F$.*

*Demostración.*. Las demostraciones de (a) y (b) son inmediatas; para (c) considérese el conjunto

$$F = \{a \in \mathcal{B} \setminus \{0\} : hay\, un\, H = \{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq G\, y\, a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq a\}$$

□

**Lema 2.85**
*Sea $F$ un filtro sobre $\mathcal{B}$. Entonces $F$ es ultrafiltro sobre $\mathcal{B}$ si, y sólo si, $\forall a \in \mathcal{B}(a \in F$ o $a' \in F)$*

*Demostración.*. $\Leftarrow$ Sea F un filtro y supóngase que $\forall a \in \mathcal{B}(a \in F$ ó $a' \in F)$. Sea $a \notin F$ y $F'$ el filtro generado por $F \cup \{a\}$. Si $F \subset F'$ entonces $a \in F' \setminus F$ y así $a' \in F \subset F'$ y por lo tanto $a \in F'$ y $a' \in F'$, es decir $a \wedge a' = 0 \in F'$ y como $F'$ es filtro $F' = \mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ Sea $a \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que $a \notin F$ y $a' \notin F$. Sea $G = F \cup \{a\}$. $G$ tiene la propiedad de la intersección finita. Si $b \in F$ entonces $a \wedge b \neq 0$ pues si $a \wedge b = 0$ implica que $b \leq a'$ y como $F$ es filtro $a' \in F$!. Así , si $a_1, \cdots, a_n \in F$ entonces $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in F$ y $a \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \neq 0$. Luego $G$ tiene la propiedad de la intersección finita y por el lema 2.84 hay un filtro $F' \supseteq G$. Como $a \in F' \setminus F$ se tiene que $F \subset F'$!.

□

**Definición 2.86**
*Sea $F$ filtro en una álgebra de Boole completa $\mathcal{B} \in M$, con $M$ un mtc de* ZFC, *$F$ es $M$-*completo *si para todo $S \subseteq \mathcal{B}$, $S \in M$, si $\bigvee S \in F$ entonces $F \cap S \neq \emptyset$. Es decir, $F$ intersecta no vacuamente a todos los subconjuntos de $\mathcal{B}$ que están en $M$ y cuyo supremo está en $F$.*

**Teorema 2.87**
*Sea $\mathcal{B}$ álgebra de Boole completa, $\mathcal{B} \in M$ con $M$ un mtc de* ZFC*. Sea $G \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $G$ es ultrafiltro $M$-completo en $B$ si, y sólo si, $G$ es filtro $\mathcal{B} \setminus \{0\}$-genérico sobre $M$.*

*Demostración.*. $(\Rightarrow)$ Sea $G$ un ultrafiltro $M$-completo en B. Por el lema anterior, $G$ es filtro en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$. Sea $D \in M$ denso en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$. Se probará que $\bigvee D = 1$. Es claro que 1 es cota superior de $D$. Sea $b$ cota superior de $D$; si $1 \nleq b$ por el lema 2.63 $1 \wedge b' \neq 0$, por lo tanto $1 \wedge b' \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, y así $\exists q \in D$ tal que $q \leq 1 \wedge b'$ y como $b$ es cota superior de $D$, $q \leq b$.

Por consiguiente $q \leq (1 \wedge b') \wedge b = 1 \wedge (b' \wedge b) = 1 \wedge 0 = 0$ y en consecuencia $q = 0$! (pues $D \subseteq \mathcal{B} \setminus \{0\}$). Así , $b = 1$ y $\bigvee D = 1 \in G$, Por hipótesis, $D \cap G \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sea $G$ un filtro $\mathcal{B} \setminus \{0\}$-genérico sobre $M$.

Primero se prueba que $G$ es ultrafiltro. Sea $a \in \mathcal{B}$ tal que $a \notin G$; sea $D = \{p \in \mathcal{B} : p \leq q \text{ ó } p \wedge a = 0\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{0\}$ y definible en $M$. A continuación se prueba que $D$ es denso: sea $q \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$; si $q \wedge a = 0$ entonces $q \in D$ y $q \leq q$; si $q \wedge a \neq 0$ como $q \wedge a \leq q$ entonces $q \wedge a \in D$ y $q \wedge a \leq q$. Como $D$ es denso en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ entonces $G \cap D \neq \emptyset$ y sea $r \in G \cap D$, $r \not\leq a$ (pues si $r \leq a$ entonces $a \in G$) y así $r \wedge a = 0$ pero, por el lema 2.63, $r \leq a'$ y en consecuencia $a' \in G$ pues $r \in G$.

Ahora se prueba que $G$ es $M$-completo. Sea $S \subseteq \mathcal{B}$, $S \in M$ tal que $\bigvee S \in G$; por demostrar que $G \cap S \neq \emptyset$. Sea $D = \{b \in \mathcal{B} \setminus \{0\} : b \wedge \bigvee S = 0 \text{ ó } \exists s \in S(b \leq s)\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{0\}$ y $D \in M$, pues es definible en $M$. $D$ es denso pues si $p \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ entonces: si $p \wedge \bigvee S = 0$ entonces $p \in D$ y $p \leq p$, si $p \wedge \bigvee S \neq 0$ entonces $\bigvee_{s \in S} (p \wedge s) \neq 0$ luego $\exists s \in S(p \wedge s \neq 0)$ pero $p \wedge s \leq s$ de donde $p \wedge s \in D$ y $p \wedge s \leq p$, es decir $D$ es denso; entonces, por hipótesis, sea $q \in G \cap D \neq \emptyset$ es decir $q \wedge \bigvee S \neq 0$ pues $q, \bigvee S \in G$ y como $q \in D$, $\exists s \in S(q \leq s)$ o sea que $s \in G$ y $s \in S$ y así $G \cap S \neq \emptyset$.

$\square$

**Definición 2.88** *Sea $\mathcal{B} \in M$ tal que $(\mathcal{B}$ es álgebra de Boole completa$)^M$ y sean $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M$, se define el* valor de verdad *de $\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, denotado por $|[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]|$, como*

$$|[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]| = \bigvee\{p \in \mathcal{B} : p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)\}$$

Que $\mathcal{B}$ sea completa no es absoluto para $M$ ya que se habla de *todos* los subconjuntos $S \subseteq \mathcal{B}$ y de hecho $\mathcal{B}$ puede no ser completa en $V$ y sí serlo en $M$ (si es completa en $V$ lo es en $M$). Sin embargo la definición de $|[\varphi]|$ tiene sentido por la definibilidad de $\Vdash$ en $M$, así $\{p \in \mathcal{B} : p \Vdash \varphi\}$ está en $M$ y su supremo existe en $M$. Es decir, la gente de $M$ puede definir el valor booleano de $\varphi$.

Si $|[\varphi]| = 1$ se dice que $\varphi$ es verdadera, lo cual quiere decir que es verdadera en cualquier extensión genérica. Como se probará, $\varphi$ es verdad en todo $M[G]$ si, y sólo si, $|[\varphi]| = 1$ si, y sólo si, $1 \Vdash \varphi$; así todos los axiomas ZFC tienen valor booleano 1 y cualquier condición los forza.

Si $|[\varphi]| = 0$ se dice que $\varphi$ es falsa en toda extensión genérica y que $p \nVdash \varphi \ \forall p \neq 0$.

Si $\varphi$ es verdad en algunas extensiones genéricas y falsa en otras entonces $0 < |[\varphi]| < 1$.

**Lema 2.89** *Sea $\mathcal{B} \in M$ tal que ($\mathcal{B}$ es álgebra de Boole completa $)^M$ y $(\tau_1, \cdots, \tau_n) \in M$. Entonces:*

*a*). $\forall p \in \mathcal{B}(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \iff p \leq |[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]|)$. *Esto quiere decir que $|[\varphi]|$ es la máxima condición que forza a $\varphi$. En particular $|[\varphi]| \Vdash \varphi$.*

*b*). $|[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]| = |[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]| \wedge |[\psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]|$.

*b′*). $|[\varphi \vee \psi]| = |[\varphi]| \vee |[\psi]|$.

*c*). $|[\neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]| = |[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]|'$

*d*). $|[\exists x \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n)]| = \bigvee\{|[\varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n)]| : \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$

*Demostración.*

*a*). Sea $p \in \mathcal{B}$. Si $p \Vdash \varphi$ entonces $p \leq |[\varphi]|$, por definición de $|[\varphi]|$. Supóngase que $p \leq |[\varphi]|$. Si $p \Vdash \varphi$ se concluye la demostración. Si $p \nVdash \varphi$ entonces $\exists q (0 < q \leq p)$ tal que $q \Vdash \neg\varphi$ (pues $p \nVdash \varphi \iff p \nVdash \neg\neg\varphi \iff \exists q \leq p (q \Vdash \neg\varphi)$). Pero para tal $q : \forall r (r \Vdash \varphi \Rightarrow q \wedge r = 0)$ así $q \wedge |[\varphi]| = 0$ contradiciendo que $0 < q \leq p \leq |[\varphi]|$.

*b*). Como $|[\varphi]| \wedge |[\psi]| \leq |[\varphi]|$, por a) implica que $|[\varphi]| \wedge |[\psi]| \Vdash \varphi$ y análogamente también se tiene que $|[\varphi]| \wedge |[\psi]| \Vdash \psi$ entonces $|[\varphi]| \wedge |[\psi]| \Vdash \varphi \wedge \psi$ de donde , por a), $|[\varphi]| \wedge |[\psi]| \leq |[\varphi \wedge \psi]|$. Ahora, $|[\varphi \wedge \psi]| \Vdash \varphi \wedge \psi$ y ZFC $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$, de donde se obtiene que $|[\varphi \wedge \psi]| \Vdash \varphi$. Por lo tanto, por a), $|[\varphi \wedge \psi]| \leq |[\varphi]|$, analogamente $|[\varphi \wedge \psi]| \leq |[\psi]|$; entonces se tiene que $|[\varphi \wedge \psi]| \leq |[\varphi]| \wedge |[\psi]|$.

*b′*). Se prueba de manera análoga.

*c*). Como $|[\neg\varphi]| \wedge |[\varphi]| \leq |[\neg\varphi]|$ y $|[\neg\varphi]| \wedge |[\varphi]| \leq |[\varphi]|$ se tiene que $|[\neg\varphi]| \wedge |[\varphi]| \Vdash \neg\varphi$ y $|[\neg\varphi]| \wedge |[\varphi]| \Vdash \varphi$ y por lo tanto $|[\neg\varphi]| \wedge |[\varphi]| = 0$ de donde, por el lema 2.63, $|[\neg\varphi]| \leq |[\varphi]|'$. Como $|[\varphi \vee \neg\varphi]| = 1$, pues

$1 \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$, usando b') se tiene que $|[\varphi]| \vee |[\neg\varphi]| = |[\varphi \vee \neg\varphi]| = 1$; por lo tanto, $(|[\varphi]| \vee |[\neg\varphi]|)' = |[\varphi]|' \wedge |[\neg\varphi]|' = 0$ de lo cual se tiene que $|[\varphi]|' \leq |[\neg\varphi]|$.

d). Como $\sigma \in M^{\mathcal{B}}$, $|[\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)]| \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, para cualquier $\sigma \in M^{\mathcal{B}}$, entonces

$$|[\varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n)]| \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$

luego, para toda $\sigma \in M^{\mathcal{B}}$, por a):

$$|[\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)]| \leq |[\exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)]|.$$

Así que $|[\exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)]|$ es cota superior de $\{|[\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)]| : \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$

Por otro lado

$$\text{ZFC} \vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \to \bigvee\{\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n) : \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$$

implica que

$$\begin{aligned} |[\exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)]| &\leq |[\bigvee\{\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n) : \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}]| \\ &= \bigvee\{|[\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)]| : \sigma \in \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.90** *Sean $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ una fórmula y $G$ un ultrafiltro $M$-completo en $\mathcal{B}$, entonces*

$$M[G] \models \varphi(i_G(\tau_1), \ldots, i_G(\tau_n)) \Longleftrightarrow |[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]| \in G$$

*Demostración.*. En primer lugar

$$\begin{aligned} M[G] \models \varphi(i_G(\tau_1), \ldots, i_G(\tau_n)) &\Longleftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)) \\ &\Longleftrightarrow \exists p \in G(p \leq |[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]|) \end{aligned}$$

y por definición del valor de verdad se tiene que $|[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]| \in G$. La implicación inversa se obtiene del hecho de que $G$ es $M$-completo y de la hipótesis $|[\varphi]| \in G$.

□

**Corolario 2.91** *Sean $\varphi$ una fórmula, $G$ un filtro $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$ y $i : \mathbf{P} \to \mathcal{B}$ inmersión densa, entonces*

$$M[G] \models \varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n)) \Longleftrightarrow \exists p \in G(i(p) \leq |[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]|)$$

*Demostración.*Como $M[G] = M[j(G)]$ con $j(G) = \{q \in \mathcal{B} : \exists p \in G(i(p) \leq q)\}$ entonces $M[G] \models \varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n)) \Longleftrightarrow M[j(G)] \models \varphi(i_G(\tau_1), \cdots, i_G(\tau_n)) \Longleftrightarrow \exists p \in G(i(p) \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)) \Longleftrightarrow \exists p \in G(i(p) \leq |[\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)]|)$.

□

### 2.4.3 Submodelos simétricos de modelos genéricos.

**Definición 2.92** *Un automorfismo $\pi$ de un álgebra de Boole $\mathcal{B}$ es una función biyectiva de $\mathcal{B}$ en si mismo que preserva las operaciones de álgebra: $\pi(u \wedge v) = \pi(u) \wedge \pi(v)$, $\pi(u \vee v) = \pi(u) \vee \pi(v)$, $\pi(u') = \pi(u)'$, $u \leq v \Longleftrightarrow \pi(u) \leq \pi(v)$, $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = 1$.*

Si $\mathcal{B}$ es álgebra de Boole completa y $\pi$ es automorfismo de $\mathcal{B}$ entonces $\pi$ preserva supremos e ínfimos infinitos. En efecto: si $S \subseteq \mathcal{B}$, como para todo $p \in S$ se tiene que $p \leq \bigvee S$ entonces $\pi(p) \leq \pi(\bigvee S)$ para todo $p \in S$; por otro lado, si $\forall p \in S(\pi(p) \leq q = \pi(r))$ entonces $\forall p \in S(p \leq r)$ y por lo tanto $\bigvee S \leq r$ es decir $\pi(\bigvee S) \leq q$. De donde $\pi(\bigvee S)$ es la mínima cota superior de $\pi[S]$, o sea $\pi(\bigvee S) = \bigvee \pi[S]$.

Si $\pi$ es automorfismo de $\mathcal{B}$, $\pi$ es inmersión densa de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$ y por tanto inmersión completa.

Sea $M$ un modelo transitivo de ZF + AE. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Boole completa en $M$ y sea $M^{\mathcal{B}}$ el modelo booleano valuado (los $\mathcal{B}$-nombres de $M$). Sea $\pi$ automorfismo de $\mathcal{B}$, se extiende recursivamente $\pi$ a $M^{\mathcal{B}}$ como sigue:

$$\pi_*(0) = 0$$

$$\pi_*(\tau) = \{\langle \pi_*(\sigma), \pi(p) \rangle : \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}$$

$\pi_* : M^{\mathcal{B}} \to M^{\mathcal{B}}$ es biyección y $\forall x \in M$, $\pi_*(\check{x}) = \check{x}$. Que es biyección se prueba usando inducción, lo cual es inmediato, y $\pi_*(\check{x}) = \{\langle \pi_*(\check{y}), 1 \rangle : y \in x\} = \{\langle \check{y}, 1 \rangle : y \in x\} = \check{x}$.

**Lema 2.93** (Lema de Simetría) *Sea $\varphi$ una fórmula entonces*

$$|[\varphi(\pi_*(\tau_1),\cdots,\pi_*(\tau_n))]| = \pi|[\varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)]|$$

*Demostración.*Como $\pi$ preserva supremos infinitos entonces

$$\begin{aligned}
\pi|[\varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)]| &= \pi(\bigvee\{p\in\mathcal{B} : p \Vdash \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)\}) \\
&= \bigvee\pi(\{p\in\mathcal{B} : p \Vdash \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)\}) \\
&= \bigvee\{\pi(p)\in\mathcal{B} : \pi(p) \Vdash \varphi(\pi_*(\tau_1),\cdots,\pi_*(\tau_n))\} \\
&= |[\varphi(\pi_*(\tau_1),\cdots,\pi_*(\tau_n))]|
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se debe al lema 2.79 con $i=\pi$.

□

Sea $\mathcal{G}$ un grupo de automorfismos de $\mathcal{B}$.

**Definición 2.94** *Para toda $\tau\in M^{\mathcal{B}}$ sea $sim_{\mathcal{G}}(\tau)=\{\pi\in\mathcal{G} : \pi_*(\tau)=\tau\}$*

Es claro que $sim_{\mathcal{G}}(\tau)$ es un subgrupo de $\mathcal{G}$: $Id\in sim_{\mathcal{G}}(\tau)$ pues $Id_*(\tau)=\tau$; si $\pi$, $\pi'\in sim_{\mathcal{G}}(\tau)$ entonces $\pi\circ\pi'\in sim_{\mathcal{G}}(\tau)$.

**Definición 2.95** *Un conjunto no vacío $\mathcal{F}$ de subgrupos de $\mathcal{G}$ es un* filtro normal sobre $\mathcal{G}$ *si para cualesquiera subgrupos $H$, $K$ de $\mathcal{G}$*

*i). Si $K\in\mathcal{F}$ y $K\subseteq H$ entonces $H\in\mathcal{F}$.*

*ii). Si $H,K\in\mathcal{F}$ entonces $H\cap K\in\mathcal{F}$.*

*iii). Si $\pi\in\mathcal{G}$ y $H\in\mathcal{F}$ entonces $\pi H\pi^{-1}\in\mathcal{F}$.*

**Definición 2.96** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro normal. $\tau\in M^{\mathcal{B}}$ es* simétrico$_{\mathcal{F}}$ *si $sim_{\mathcal{G}}(\tau)\in\mathcal{F}$.*

**Definición 2.97** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro normal sobre $\mathcal{G}$ y $\tau$ simétrico$_{\mathcal{F}}$. Se define por recursión el conjunto* $\mathrm{HS}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}\subseteq M^{\mathcal{B}}$ *de todos los* nombres hereditariamente simétricos *determinados por $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ como:*

*i*). $\emptyset \in \mathrm{HS}_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$.

*ii*). *Si* $dom(\tau) \subseteq \mathrm{HS}$ *y* $\tau$ *es simétrico*$_{\mathcal{F}}$ *entonces* $\tau \in \mathrm{HS}$.

*iii*). *Los elementos de* HS *son únicamente los caracterizados con i) y ii).*

Como $\pi_*(\check{x}) = \check{x}$ para toda $\pi \in \mathcal{G}$ y para todo $x \in M$, se tiene que $sim_{\mathcal{G}}(\check{x}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$ y $\forall \check{y} \in dom(\check{x})\ sim_{\mathcal{G}}(\check{y}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$; también se sigue que $\forall x \in M,\ \check{x} \in \mathrm{HS} \subseteq M^{\mathcal{B}}$.

**Definición 2.98** *Sea $G$ un ultrafiltro $M$-completo sobre $\mathcal{B}$. Sea $i_G$ la interpretación de $M^{\mathcal{B}}$ dada por $G$, se define la* extensión simétrica *de $M$ como*

$$N = \{i_G(\tau) : \tau \in \mathrm{HS}\}$$

Así $N = i_G[\mathrm{HS}]$. Es inmediato que $M \subseteq N \subseteq M[G]$, pues: $\forall x \in M$, $\check{x} \in \mathrm{HS}$ y así $i_G(\check{x}) = x \in N$ y $\mathrm{HS} \subseteq M^{\mathcal{B}}$ y por lo tanto $N = i_G[\mathrm{HS}] \subseteq i_G[M^{\mathcal{B}}] = M[G]$.

**Teorema 2.99** *$N$ es modelo estándar transitivo de* ZF*.*

*Demostración.*<u>N es transitivo</u>. Sea $i_G(\sigma) \in i_G(\tau) \in N$. Así $\tau \in \mathrm{HS}$ y $\sigma \in dom(\tau) \subseteq \mathrm{HS}$ y entonces $\sigma \in \mathrm{HS}$ de donde $i_G(\sigma) \in N$.

$N$ es modelo de ZF.

<u>Extensionalidad</u>, por ser transitivo.

<u>Infinito</u>, porque $\omega \in M \subseteq N$.

<u>Unión</u>. $\forall x \in N,\ \bigcup x \in N$. Sean $\mathcal{G}$, el grupo de automorfismos de $\mathcal{B}$, y $\mathcal{F}$, un filtro normal, que determinan HS. Sea $x \in N$, entonces $\exists \tau \in \mathrm{HS}$ tal que $i_G(\tau) = x$. Sean $S = \bigcup_{\alpha \in dom(\tau)} dom(\alpha)$ y $\xi = \{\langle \sigma, 1\rangle : \sigma \in S\}$. Por construcción, $\xi$ es $\mathcal{B}$-nombre y $\xi \in M$. Por demostrar que $\xi \in \mathrm{HS}$ y $\bigcup x \subseteq i_G(\xi) \in N$

($i$). Para probar que $\xi \in \mathrm{HS}$ basta con probar que ($a$) $dom(\xi) \subseteq \mathrm{HS}$ y ($b$) $sim_{\mathcal{G}}(\xi) \in \mathcal{F}$. ($\xi$ es simétrico).

($a$). Sea $\sigma \in dom(\xi)$ entonces $\sigma \in S$, luego existe $\alpha \in dom(\tau)$ tal que $\sigma \in dom(\alpha)$ y como $\tau \in \mathrm{HS}$ entonces $\alpha \in \mathrm{HS}$, así $\sigma \in dom(\alpha) \subseteq \mathrm{HS}$, o sea $\sigma \in \mathrm{HS}$ y por lo tanto $dom(\xi) \subseteq \mathrm{HS}$.

($b$). Basta con ver que $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \subseteq sim_{\mathcal{G}}(\xi)$. Sea $\pi \in sim_{\mathcal{G}}(\tau)$ entonces $\pi_*(\tau) = \tau$ lo cual implica que $\pi_*(\alpha) = \alpha$ para toda $\alpha \in dom(\tau)$

pues $\tau \in \mathrm{HS}$, luego $\pi_*(\sigma) = \sigma$ para toda $\sigma \in dom(\alpha)$, en consecuencia $\pi_*(\xi) = \{\langle \pi_*(\sigma), 1\rangle : \sigma \in S\} = \{\langle \sigma, 1\rangle : \sigma \in S\} = \xi$, de donde $\pi \in sim_{\mathcal{G}}(\xi)$. Como $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \in \mathcal{F}$ se tiene que $sim_{\mathcal{G}}(\xi) \in \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F}$ es filtro.

$(ii)$. Sea $z \in \bigcup x$ entonces $\exists y \in x = i_G(\tau)$ tal que $z \in y$ pero $y \in i_G(\tau)$ es decir $y = i_G(\alpha_1)$ tal que $\exists p_1 \in G(\langle \alpha_1, p_1\rangle \in \tau)$ de donde $z = i_G(\sigma)$ tal que $\exists p_2 \in G(\langle \sigma, p_2\rangle \in \alpha_1)$ así $\sigma \in dom(\alpha_1)$ y $\alpha_1 \in dom(\tau)$, por lo tanto $\sigma \in S$. Además $i_G(\xi) = \{i_G(\sigma) : \sigma \in dom(\xi)\} = \{i_G(\sigma) : \sigma \in S\} = \{i_G(\sigma) : \sigma \in dom(\alpha)$, para algún $\alpha \in dom(\tau)\}$, entonces $\sigma \in S$ implica que $i_G(\sigma) \in i_G(\xi)$ y por lo tanto $z \in i_G(\xi)$.

Así $\bigcup x \subseteq i_G(\xi) \in N$ y $\bigcup x = \{y \in i_G(\xi) : \exists \omega \in x(y \in \omega)\}$. Por el Axioma de Separación en $N$, $\bigcup x \in N$.

<u>Potencia</u>. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ que determinan a HS y sea $x \in N = i_G[\mathrm{HS}]$. Se probará que $\mathcal{P}(x) \in N$. Como $x \in N$ entonces $\exists \tau \in \mathrm{HS}$ tal que $i_G(\tau) = x$. Sea $S = \mathcal{P}(dom(\tau))$. Sea $\xi_s = s \times \{1\}$ para cada $s \in S$, $s \subseteq dom(\tau)$.

Si $\alpha \in dom(\xi_s)$ entonces $\alpha \in s$, luego $\alpha \in dom(\tau)$, y como $\tau \in \mathrm{HS}$, entonces $\alpha \in \mathrm{HS}$ es decir: $dom(\xi_s) \subseteq \mathrm{HS}\ \forall s \in S$.

Ahora se verá que $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \subseteq sim_{\mathcal{G}}(\xi_s)$, $\forall s \in S$. Sea $\pi \in sim_{\mathcal{G}}(\tau)$, es decir $\pi(\tau) = \tau$ y por consiguiente $\pi(\alpha) = \alpha\ \forall \alpha \in dom(\tau)$, luego $\pi(\xi_s) = \{\langle \pi(\alpha), 1\rangle : \alpha \in s\} = \{\langle \alpha, 1\rangle : \alpha \in s\} = \xi_s$. Así que $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \subseteq sim_{\mathcal{G}}(\xi_s)$ y como $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \in \mathcal{F}$ se tiene que $sim_{\mathcal{G}}(\xi_s) \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $\xi_s \in \mathrm{HS}\ \forall s \in S$.

Sea $\nu = \{\langle \xi_s, 1\rangle : s \in S\}$; $dom(\nu) \subseteq HS$ pues $\xi_s \in HS$, $\forall s \in S$. Como $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \subseteq sim_{\mathcal{G}}(\xi_s)$, $\forall s \in S$ entonces $sim_{\mathcal{G}}(\tau) \subseteq \bigcap\{sim_{\mathcal{G}}(\xi_s) : s \in S\} \in \mathcal{F}$ y $\bigcap\{sim_{\mathcal{G}}(\xi_s) : s \in S\} \subseteq sim_{\mathcal{G}}(\nu) \in \mathcal{F}$; por lo tanto $\nu \in HS$.

Ahora se prueba que $\mathcal{P}(x) \subseteq i_G(\nu) \in N$. Sea $z \in \mathcal{P}(x)$ entonces $z \subseteq x = i_G(\tau) = \{i_G(\alpha) : \exists p \in G(\langle \alpha, p\rangle \in \tau)\}$. Sea $s_0 = \{\alpha : i_G(\alpha) \in z\}$, luego $s_0 \subseteq dom(\tau)$ es decir $s_0 \in \mathcal{P}(dom(\tau))$; por lo tanto $z = \{i_G(\alpha) : \alpha \in s_0\}$ con $s_0 \subseteq dom(\tau)$. Entonces $i_G(\xi_{s_0}) = z$.

$(\subseteq)$ Sea $i_G(\alpha) \in i_G(\xi_{s_0})$ entonces $\alpha \in s_0$, lo cual implica que $i_G(\alpha) \in z$.

$(\supseteq)$ Seas $i_G(\alpha) \in z$, entonces $\alpha \in s_0$ lo cual implica que $\langle \alpha, 1\rangle \in \xi_{s_0}$, de donde $i_G(\alpha) \in i_g(\xi_{s_0})$.

Así $z = i_G(\xi_{s_0}) \in i_G(\nu)$; por lo tanto $\mathcal{P}(x) \subseteq i_G(\nu) \in N$. Por Axioma de comprensión en N: $\mathcal{P}(x) \in N$.

□

### 2.4.4 El modelo básico de Cohen.

Sea $M$ modelo transitivo de ZF + AE. Sea $\mathbf{P} = \langle Fin(\omega\times\omega, 2), \supseteq\rangle \in M$. Sea $\mathcal{B} = ar(\mathbf{P}, \tau_{\mathbf{P}})$ en $M$. Como $\mathbf{P}$ es separativo la inmersión de $\mathbf{P}$ en $\mathcal{B}$ es un isomorfismo sobre su imagen, por lo que se identificará a $\mathbf{P}$ con su imagen en $\mathcal{B}$ y $\mathbf{P} \subset \mathcal{B}$.

La idea general será la siguiente: se definirá un grupo $\mathcal{G}$, de automorfismos de $\mathcal{B}$, y $\mathcal{F}$ un filtro normal sobre $\mathcal{G}$ de modo que AE sea falso en la extensión simétrica $N$ determinada por los hereditarios simétricos, definidos a partir de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$.

Sea $G \subseteq \mathcal{B}$ un ultrafiltro $M$-completo sobre $\mathcal{B}$ (ó filtro $\mathcal{B}$-genérico sobre $M$). Para cada $n \in \omega$, sea

$$x_n = \{m \in \omega : \exists p \in G(p(n, m) = 1)\}$$

o bien $x_n = \{m \in \omega : \bigcup G(n, m) = 1\}$. $x_n$ es llamado un *real de Cohen* sobre $M$. La extensión simétrica $N$ se construirá de tal modo que el conjunto $A = \{x_n : n \in \omega\} \in N$ pero para cualquier enumeración $f : \omega \to A,\ \ f \notin N$; es decir se quiere que

$$N \models \text{“}A \text{ no es bien ordenable}''.$$

Cada real de Cohen $x_n$ tiene un nombre en $M^{\mathcal{B}}$ el cual se denota con $\underline{x}_n$:

$$\underline{x}_n = \{\langle \check{\ } m\ , \vee\{p \in \mathbf{P} : p(n, m) = 1\}\rangle : m \in \omega\}$$

Así

$$\begin{aligned} i_G(\underline{x}_n) &= \{i_G(\check{\ } m) : \exists p \in G(\langle \check{\ } m, p\rangle \in \underline{x}_n),\ m \in \omega\} \\ &= \{m \in \omega : \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(n, m) = 1\} \in G\} \\ &= \{m \in \omega : \exists p \in G(p(n, m) = 1)\} = x_n. \end{aligned}$$

La segunda igualdad es cierta pues $i_G(\check{\ } m) = m$. La segunda igualdad igualdad se debe al hechop de que $G$ es $M$-completo y si $S = \{p \in \mathbf{P} : p(n,\, m) = 1\}$ entonces $\bigvee S \in G \Longleftrightarrow S \cap G \neq \emptyset$.

Después se verá que $\underline{x}_n \in HS$ y por lo tanto $x_n \in N$

También $A = \{x_n : n \in \omega\}$ tiene un nombre $\underline{A} \in M^{\mathcal{B}}$:

$$\underline{A} = \{\langle \underline{x}_n, 1\rangle : n \in \omega\}$$

y luego: $i_G(\underline{A}) = \{i_G(\underline{x}_n) : n \in \omega\} = \{x_n : n \in \omega\} = A$.

Sea $\pi$ una permutación de $\omega$. $\pi$ induce un automorfismo de $\mathbf{P}$ de la siguiente manera: $\forall p \in \mathbf{P}$ sea $\pi p \in \mathbf{P}$ tal que

$$\begin{array}{rcl} dom(\pi p) & = & \{\langle \pi n, m\rangle : \langle n, m\rangle \in dom(p)\} \\ \pi p(\pi n, m) & = & p(n, m). \end{array}$$

$\pi$ es inyectivo. Si $\pi p = \pi q$ entonces $\forall (\pi n, m) \in dom(\pi p) = dom(\pi q)$ es decir $\forall \langle n, m\rangle \in dom(p)$ se tiene que: $p(n, m) = \pi p(\pi n, m) = \pi q(\pi n, m) = q(n, m)$, por lo tanto $p = q$.

$\pi$ es sobreyectivo. Sea $p \in \mathbf{P}$ . Sea $q \in \mathbf{P}$ tal que $dom(q) = \{\langle \pi^{-1} n, m\rangle : \langle n, m\rangle \in dom(p)\}$ y $q(\pi^{-1} n, m) = p(n, m)$. Entonces $\pi q \in \mathbf{P}$ satisface $dom(\pi q) = dom(p)$ y $\pi q(\pi \pi^{-1} n, m) = q(\pi^{-1} n, m) = p(n, m)$, por consiguiente $\pi q = p$.

$\pi$ es homomorfismo. Si $q \supseteq p$ entonces $dom(p) \subseteq dom(q)$; así que $dom(\pi p) \subseteq dom(\pi q)$ y $\pi p \subset \pi q$.

Ahora, se induce un automorfismo de $\mathcal{B}$:

$$\forall u \in \mathcal{B} \;\; \pi(u) = \bigvee \{\pi p : p \leq u\}$$

Como se considera que $\mathbf{P} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathbf{P}$ es denso en $\mathcal{B}$, la extensión está bien definida. Es inmediato que $\pi(0) = 0$ y $\pi(1) = 1$; además $\pi(p \vee q) = \pi p \vee \pi q$ y $\pi(p') = (\pi p)'$. En efecto, como $p, q \in \{\pi r : r \leq p \vee q\}$ es inmediato que $\pi p \vee \pi q \leq \pi(p \vee q)$; si $r \leq p \vee q$ como $\pi$ es un homomorfismo en $\mathbf{P}$ entonces $\pi r \leq \pi p \vee \pi q$; así que $\pi p \vee \pi q$ es cota superior del conjunto $\{\pi r : r \leq p \vee q\}$, luego $\pi p \vee \pi q \geq \bigvee \{\pi r : r \leq p \vee q\} = \pi(p \vee q)$. Y también $\pi(p') = \bigvee \{\pi r : r \leq p'\}$ pero $r \leq p' \iff r \wedge p = 0$ así que $\pi(p') = \bigvee \{\pi r : r \perp p\}$ pero $\bigvee \{\pi r : r \perp p\} \wedge \pi p = 0$ y $\bigvee \{\pi r : r \perp p\} \vee \pi p = 1$ por lo tanto $\bigvee \{\pi r : r \perp p\} = (\pi p)'$.

Ahora, sea $\mathcal{G}$ el grupo de todos los automorfismos de $\mathcal{B}$ que se pueden inducir por todas las permutaciones de $\omega$ como se acaba de describir.

**Definición 2.100** *Para cada $e \subseteq \omega$, finito, sea*

$$fix(e) = \{\pi \in \mathcal{G} : \pi(n) = n \;\; \forall n \in e\}$$

Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado sobre $\mathcal{G}$ por $fix(e)$ es decir:

$$\mathcal{F} = \{H\, subgrupo\, de\, \mathcal{G} : \exists e \subseteq \omega[fix(e) \subseteq H],\, e\, finito\}$$

$\mathcal{F}$ es un filtro normal sobre $\mathcal{G}$.

i). Si $H \in \mathcal{F}$ y $H \subseteq K$ entonces $\exists e \subseteq \omega$ tal que $fix(e) \subseteq H \subseteq K$, por lo tanto $K \in \mathcal{F}$.

ii). Sean $H, K \in \mathcal{F}$ y $e_H, e_K \subseteq \omega$ finitos tales que $fix(e_H) \subseteq H$ y $fix(e_K) \subseteq K$; entonces, $e_H \cup e_K \subseteq \omega$, $e_H \cup e_K$ es finito y $fix(e_H \cup e_K) \subseteq fix(e_H) \cap fix(e_K) \subseteq H \cap K$, así $H \cap K \in \mathcal{F}$.

iii). Sean $\pi \in \mathcal{G}$, $H \in \mathcal{F}$ y $e \subseteq \omega$ tal que $fix(e) \subseteq H$. Como $H$ es subgrupo de $\mathcal{G}$, $\pi H \pi^{-1}$ también lo es. Como $fix(e) \subseteq H$ entonces $\pi fix(e)\pi^{-1} \subseteq \pi H \pi^{-1}$. Sea $e' = \pi[e] \subseteq \omega$. $\pi[e]$ es finito. A continuación se prueba que $fix(e) \subseteq \pi H \pi^{-1}$. Sea $\pi_0 \in fix(e')$. Sea $n \in e$ entonces $(\pi^{-1}\pi_0\pi)(n) = \pi^{-1}(\pi_0(\pi(n))) = \pi^{-1})\pi(n)) = n$; así que $\pi^{-1}\pi_0\pi \in fix(e) = \pi^{-1}\pi fix(e)\pi^{-1}\pi$, es decir $\pi_0 \in \pi fix(e)\pi^{-1} \subseteq \pi H \pi^{-1}$.

$\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ determinan el conjunto HS de los nombres hereditariamente simétricos y si $G$ es un ultrafiltro $M$-completo sobre $\mathcal{B}$, $i_G[HS] = N$ es el modelo simétrico de ZF determinado por $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$. A continuación se prueba que $N$ no es modelo del AE, pero ya se sabe que sí es modelo de ZF. Dentro de la prueba se verá que los $x_n$ y $A$ están en $N$.

**Lema 2.101** *En el modelo $N = i_G[HS]$ el conjunto $A$ de los reales de Cohen no puede ser bien ordenado.*

*Demostración.*Para empezar, todos los $x_n$ así como el conjunto $A$ están en $N$ ya que sus nombres son hereditariamente simétricos.

Para todo $\pi \in \mathcal{G}$ y cualesquiera $n, m$ se tiene que $\pi(\bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(n,m) = 1\}) = \bigvee \pi\{p \in \mathbf{P} : p(n,m) = 1\} = \bigvee\{\pi p \in \mathbf{P} : \pi p(\pi n, m) = 1\} = \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(\pi n, m) = 1\}$. Además $\pi(\underline{x}_n) = \{\langle \pi(\check{}m), \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(\pi n, m) = 1\}\rangle : m \in \omega\} = \{\langle \check{}m, \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(\pi n, m) = 1\}\rangle : m \in \omega\} = \underline{x}_{\pi n}$. De donde, $\pi(\underline{x}_n) = \underline{x}_{\pi n}$ y consecuentemente $sim_{\mathcal{G}}(\underline{x}_n) = fix(\{n\}) \in \mathcal{F}$. Así $\underline{x}_n$ es simétrico y hereditariamente simétrico pues

$dom(\underline{x}_n) = \{\check{}v : m \in \omega\}$ y $\pi(\check{}m) = \check{}m,\ \forall\pi$; por lo tanto $sim_{\mathcal{G}}(\check{}m) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$, entonces $\underline{x}_n \in HS$ y $x_n = i_G(\underline{x}_n) \in i_G[HS] = N$.

También $\pi(\underline{A}) = \underline{A},\ \forall\pi \in \mathcal{G}$ pues $\pi(1) = 1$ y como $\pi(\underline{x}_n) = \underline{x}_{\pi n}$ entonces $\pi(\underline{A}) = \{\langle\pi\underline{x}_n, \pi 1\rangle : n \in \omega\} = \{\langle\underline{x}_{\pi n}, 1\rangle : n \in \omega\} = \{\langle\underline{x}_n, 1\rangle : n \in \omega\} = A$; así $sim_{\mathcal{G}}(\underline{A}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$ y $\underline{A} \in HS$ y $A = i_G(\underline{A}) \in N$.

Ahora, $\forall n \neq m |[\underline{x}_n = \underline{x}_m]| = 0$. Si $|[\underline{x}_n = \underline{x}_m]| \neq 0$ para $n \neq m$, entonces hay un $p \in \mathbf{P}$ tal que $p \Vdash \underline{x}_n = \underline{x}_m$. Pero existe $l \in \omega$ tal que ni $\langle n, l\rangle$, ni $\langle m, l\rangle$ pertenecen a $dom(p)$ por la finitud de $p \in Fn(\omega \times \omega, 2)$. Sea pues $q \supseteq p$ tal que $q(n, l) = 1$ y $q(m, l) = 0$, entonces $q \Vdash l \in \underline{x}_n$ y $q \Vdash l \notin x_m$, pues $q \in G$ implica que $l \in \{m \in \omega : \exists p \in G(p(n, m) = 1)\} = x_n$, por lo tanto $q \Vdash \underline{x}_n \neq \underline{x}_m$; pero como $q \leq p$ entonces $q \Vdash \underline{x}_n = \underline{x}_m$!.

Ahora se muestra que en $N$ no hay funciones uno a uno de $\omega$ sobre $A = \{x_n : n \in \omega\}$. Supóngase que hay una tal $f \in N$ y sea $\underline{f} \in HS$ su nombre simétrico. Por el Lema de Verdad hay un $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash$ ($\underline{f}$ es inyectiva de $\omega\check{}$ sobre $\underline{A}$). Como $\underline{f} \in HS$ se puede considerar $e \subset \omega$ finito tal que $sim_{\mathcal{G}}(\underline{f}) \supseteq fix(e)$, o sea $sim_{\mathcal{G}}(\underline{f}) \in \mathcal{F}$. Como $p_0 \Vdash \exists i(i \in \check{}\omega \wedge \underline{f}(i) = x_n)$ existe $i \in \omega$ , $p \leq p_0$ y $n \notin e$ tal que $p \Vdash \underline{f}(\check{}i) = \underline{x}_n$.

Ahora se obtendrá $\pi \in \mathcal{G}$ tal que:

$$\begin{array}{rl} (i) & \pi p \text{ es compatible con } p. \\ (ii) & \pi \in fix(e). \\ (iii) & \pi n \neq n. \end{array}$$

A partir de $(iii)$ se obtiene que $n \notin e$. Por $(ii)$ y porque $fix(e) \subset sim_{\mathcal{G}}(\underline{f})$, con tal $\pi$ se obtiene que $\pi\underline{f} = \underline{f}$. Puesto que $\pi\check{}i = \check{}i$ y $\pi p \Vdash (\pi\underline{f})(\pi\check{}i) = \pi\underline{x}_n$, se obtiene que

$$q = p \cup \pi p \Vdash \underline{f}(\check{}i) = \underline{x}_n \wedge \underline{f}(\check{}i) = \underline{x}_{\pi n}.$$

Usando $(ii)$, el hecho de que $p \cup \pi p \leq p$, $\pi p$ y $|[\underline{x}_n = \underline{x}_{\pi n}]| = 0$ se tiene que $q \Vdash$ ($\underline{f}$ no es función)!.

Para obtener $\pi$ que cumpla $(i), (ii), (iii)$, sea $n' \neq n$ tal que $n' \notin e$ y $\langle n', m\rangle \notin dom(p)$ para cualquier $M$. Sea $\pi$ la permutación de $\omega$ que intercambia $n$ y $n'$ y $\pi(k) = k\ \forall k \neq n, n'$. Esta permutación $\pi$ satisface $(i)$ ya que $\langle n', m\rangle \notin dom(p)$ para toda $M$, de donde el caso $\langle n', m\rangle \in dom(p) \cap dom(\pi p)$ no se dá y entonces $p$ y $\pi p$ tienen una extensión común. $(ii)$ se satisface pues $\pi$ cambia solo a $n$ y a $n'$ los cuales no pertenecen a $e$, es decir $\forall k \in e(\pi(k) = k)$. $(iii)$ es simple, pues $\pi n = n' \neq n$.

$\square$

**Corolario 2.102**

$$Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{AE})$$

$$Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow \mathrm{ZF} \nvdash \mathrm{AE}$$

### 2.4.5 El segundo modelo de Cohen

Sea $M$ modelo transitivo de ZF + AE. SE construirá un extensión simétrica $N$ de $M$ en la cual hay una familia numerable de pares que no tienen función de elección; es decir, tal $N$ es modelo de la negación de AEN, Axioma de Elección Numerable. En el modelo básico de Cohen el conjunto no bien ordenable consiste de lo que se llama *números reales de Cohen*. Obviamente ahora no es posible usarlos para construir los pares, ya que los parres de reales sí tienen una función de elección (por ser bien ordenables), sin embargo sí funcionará si los elementos intensionales de los pares son conjuntos de "reales".

Sea $\mathbf{P} = \langle Fn((\omega \times \{0,1\} \times \omega) \times \omega,\ 2),\ \supseteq \rangle$. Sea $\mathcal{B} = ar(\mathbf{P})$ en $M$. Sea $G$ un ultrafiltro $M$-genérico sobre $\mathcal{B}$. Se definen los siguientes cuatro elementos de $M[G]$ junto con sus nombres.

$x_{n\varepsilon i} = \{j \in \omega : \exists p \in G(p(n, e, i, j) = 1)\}$ con $n, i, j \in \omega$ y $\varepsilon \in \{0, 1\}$, (estos son los "reales").
$\underline{x}_{n\varepsilon i} = \{\langle \check{j},\ u_{n\varepsilon i,j}\rangle : j \in \omega\}$ donde $u_{n\varepsilon i,j} = \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(n\varepsilon i, j) = 1\}$.

$x_{n\varepsilon} = \{x_{n\varepsilon i} : i \in \omega\}$.
$\underline{x_{n\varepsilon}} = \{\langle \underline{x}_{n\varepsilon i}, 1\rangle : i \in \omega\}$.

$p_n = \{x_{n0},\ x_{n1}\}$ con $n \in \omega$.
$\underline{p}_n = \{\langle \underline{x}_{n0},\ 1\rangle,\ \langle \underline{x}_{n1}, 1\rangle\}$

$A = \{p_n : n \in \omega\}$
$\underline{A} = \{\langle \underline{p}_n,\ 1\rangle : n \in \omega\}$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} i_G(\underline{x}_{n\varepsilon i}) &= \{i_G(\check{j}) : \exists p \in G(\langle \check{j}, p\rangle \in \underline{x}_{n\varepsilon i}),\ j \in \omega\} \\ &= \{j \in \omega : \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(n\varepsilon i, j) = 1\} \in G\} \\ &= \{j \in \omega : \exists p \in G(p(n\varepsilon i, j) = 1)\} = x_{n\varepsilon i}. \end{aligned}$$

$$i_G(\underline{x_{n\varepsilon}}) = \{i_G(\underline{x}_{n\varepsilon i}) : i \in \omega\} = \{x_{n\varepsilon i} : i \in \omega\} = x_{n\varepsilon}.$$

$$i_G(\underline{p}_n) = \{i_G(\underline{x}_{n0}),\ i_G(\underline{x}_{n1})\} = \{x_{n0},\ x_{n1}\} = p_n.$$

$$i_G(\underline{A}) = A.$$

Los reales $x_{n\varepsilon i}$ son todos distintos dos a dos: si $\langle n, e, i\rangle \neq \langle n', \varepsilon', i'\rangle$ entonces $\|[x_{n\varepsilon i} = x_{n'\varepsilon' i'}]\| = 0$. En efecto, si $\|[\underline{x}_{n\varepsilon i} = \underline{x}_{n'\varepsilon' i'}]\| \neq 0$ entonces $\exists p \in \mathbf{P}(p \Vdash \underline{x}_{n\varepsilon i} = \underline{x}_{n'\varepsilon' i'})$; por finitud de $p$ hay un $l \in \omega$ tal que $\langle (n, \varepsilon, i), l\rangle$, $\langle (n', \varepsilon', i'), l\rangle \notin dom(p)$. Sea $q \leq p$ tal que $q(n\varepsilon i, l) = 1$ y $q(n'\varepsilon' i', l) = 0$, entonces $q \Vdash \check{l} \in \underline{x}_{n\varepsilon i}$ y $q \Vdash \check{l} \notin \underline{x}_{n'\varepsilon' i'}$; por lo tanto $q \Vdash \underline{x}_{n\varepsilon i} \neq \underline{x}_{n'\varepsilon' i'}$ pero $q \leq p$ !.

Cada permutación $\pi$ de $\omega \times \{0,1\} \times \omega$ induce un automorfismo de $\mathbf{P}$, como en el modelo básico. Para cualquier $p \in \mathbf{P}$ se define $\pi p$ como:

$$\begin{aligned} dom(\pi p) &= \{\langle \pi(n\varepsilon i), j\rangle : \langle n\varepsilon i, j\rangle \in dom(p)\} \\ \pi p(\pi(n\varepsilon i), j) &= p(n\varepsilon i, j) \end{aligned}$$

el cual a su vez induce un automorfismo de $\mathcal{B}$:

$$\forall u \in \mathcal{B}\ \pi(u) = \bigvee\{\pi p : p \leq u\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \pi(u_{n\varepsilon i, j}) &= \pi(\bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(n\varepsilon i, j) = 1\}) = \bigvee\{\pi p \in \mathbf{P} : p(n\varepsilon i, j) = 1\} \\ &= \bigvee\{\pi p \in \mathbf{P} : \pi p(\pi(n\varepsilon i), j) = 1\} \\ &= \bigvee\{p \in \mathbf{P} : p(\pi(n\varepsilon i), j) = 1\} = u_{\pi(n\varepsilon i), j}. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$\pi(\underline{x}_{n\varepsilon i}) = \{\langle \check{j}, u_{\pi(n\varepsilon i), j}\rangle : j \in \omega\} = \underline{x}_{\pi(n\varepsilon i)}.$$

Se define el grupo de automorfismos $\mathcal{G}$ y el filtro $\mathcal{F}$ de modo que los nombres $\underline{x}_{n\varepsilon i}$, $\underline{x}_{n\varepsilon}$, $\underline{p}_n$ y $\underline{A}$ sean simétricos y hereditariamente simétricos para que estén en HS y $x_{n\varepsilon i}$, $x_{n\varepsilon}$, $p_n$ y $A$ estén en $N$.

Sea $\mathcal{G}$ el grupo de todos los automorfismos de $\mathcal{B}$ inducidos por aquellas permutaciones $\pi$ de $\omega \times \{0,1\} \times \omega$ que satisfacen las siguientes condiciones: si $\pi(n\varepsilon i) = (\overline{n}\,\overline{\varepsilon}\,\overline{i})$, entonces i). $\overline{n} = n$

ii). Para cada $n \in \omega$, $\forall i(\overline{\varepsilon} = \varepsilon)$ ó $\forall i(\overline{\varepsilon} \neq \varepsilon)$

Así $\mathcal{G}$ es el grupo de todos los automorfismos de $\mathcal{B}$ inducidos por las permutaciones $\pi$ de $\omega \times \{0,1\} \times \omega$ tales que $\forall(n\varepsilon i) \in \omega \times \{0,1\} \times \omega$,

$$\pi(n\varepsilon i) = \begin{cases} (n\,1\,\overline{i}) & si\,\varepsilon = 0,\ \overline{i} \in \omega \\ (n\,0\,\overline{i} & si\,\varepsilon = 1,\ \overline{i} \in \omega. \end{cases} \quad \text{ó} \quad \pi(n\varepsilon i) = (n\varepsilon\overline{i})$$

Para cada $\pi \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \pi(\underline{x}_{n\varepsilon}) &= \{\langle \pi\underline{x}_{n\varepsilon i},\, \pi 1\rangle : i \in \omega\} = \{\langle \underline{x}_{\pi(n\varepsilon i}, 1\rangle : i \in \omega\} \\ &= \{\langle \underline{x}_{n\,\overline{\varepsilon}\,\overline{i}},\, 1\rangle : i{\in}\omega\} = \{\langle \underline{x_{n\,\overline{\varepsilon}\,i}}, 1\rangle : i{\in}\omega\} = \begin{cases} \underline{x}_{n0} & si\,\varepsilon = 1 \\ \underline{x}_{n1} & si\,\varepsilon = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ó $\quad \pi(\underline{x}_{n\varepsilon}) = \underline{x}_{n\varepsilon}$

Es decir, $\pi(\underline{x}_{n\varepsilon}) = \underline{x}_{n\varepsilon}$ ó $\underline{x}_{n\,1-e}$. Además $\pi(\underline{p}_n) = \underline{p}_n$ y $\pi(\underline{A}) = \underline{A}$. Para cada $e \subseteq \omega \times \{0,1\} \times \omega$, finito, sea:

$$fix(e) = \{\pi \in \mathcal{G} : \forall s \in e(\pi s = s)\}.$$

Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado sobre $\mathcal{G}$ por $\{fix(e) : e \subseteq \omega \times \{0,1\} \times \omega,\ finito\}$. $\mathcal{F}$ es un filtro normal, pues si $H$, $K$ son subgrupos de $\mathcal{G}$ entonces

i). $H \in \mathcal{F}$ y $H \subseteq K$ implica que hay un $fix(e) \subseteq H \subseteq K$ y por lo tanto $K \in \mathcal{F}$.

ii). $H, K \in \mathcal{F}$, $fix(e_H) \subseteq H$ y $fix(e_K) \subseteq K$, entonces $fix(e_H \cup e_K) \subseteq fix(e_H) \cap fix(e_K) \subseteq H \cap K$.

iii). Análogo al modelo básico de Cohen, con $s \in e \subseteq \omega \times \{0,1\} \times \omega$.

Sea HS el conjunto de los nombres de $M^{\mathcal{B}}$ hereditariamente simétricos, determinado por $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$. Sea $N$ la extensión simétrica de $M$ dada por $N = i_G[HS]$.

**Lema 2.103** *Los conjuntos $x_{n\varepsilon i}$, $x_{n\varepsilon}$, $p_n$, $A$ pertenecen al modelo $N$ para todo $n, i \in \omega$, $\varepsilon \in \{0,1\}$*

*Demostración.*.

$$sim_{\mathcal{G}}(\underline{x}_{n\varepsilon i}) = fix(\{n\varepsilon i\}) \in \mathcal{F}$$

$$sim_{\mathcal{G}}(\underline{x}_{n\varepsilon}) = fix(\{n\varepsilon i\}) \in \mathcal{F}, \text{ donde } i \in \omega.$$

$$sim_{\mathcal{G}}(\underline{p}_n) = \mathcal{G} \in \mathcal{F} \text{ y } sim_{\mathcal{G}}(\underline{A}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}.$$

□

**Lema 2.104** *El conjunto $A$ es contable en $N$.*

*Demostración.*Es suficiente con encontrar un nombre simétrico para la función $g : n \mapsto p_n$. Tal $g$ en principio no tiene por qué ser inyectiva. Sea $\underline{g} = \{\langle\{\langle\check{}n, 1\rangle, \langle\underline{p}_n, 1\rangle\}, 1\rangle : n \in \omega\}$. Como para cualquier $\pi \in \mathcal{G}$ se tiene $\pi(\check{}n) = \check{}n$, $\pi(\underline{p}_n) = \underline{p}_n$ y $\pi(1) = 1$ entonces $\pi(\underline{g}) = \underline{g}\ \forall\pi \in \mathcal{G}$. Y así $sim_{\mathcal{G}}(\underline{g}) = \mathcal{G} \in \mathcal{F}$, por lo tanto $\underline{g} \in HS$; y $dom(\underline{g}) = \{\{\langle\check{}n, 1\rangle, \langle p_n, 1\rangle\} : n \in \omega\} \subseteq HS$. En consecuencia, $i_G(g) = g \in H$ y $(A\, \text{es contable})^M$.

□

**Lema 2.105** *No hay función $f \in N$ tal que $dom(f) = A$ y para toda $n \in \omega$, $f(p_n) \in p_n$. Es decir, en $N$ no hay función de elección para $A$.*

*Demostración.*Supóngase que hay tal $f \in N$ y sea $\underline{f} \in HS$ un nombre simétrico para $f$ y, por el Lema de Verdad, sea $p_0 \in G$ tal que:

$$p_0 \Vdash \underline{f}\, \text{es función definida en}\, \underline{A} \wedge \forall n \in \omega\check{}(\underline{f}(\underline{p}_n) \in \underline{p}_n)$$

Se determinará $q \leq p_0$ tal que $q \Vdash \underline{f}$ no es función, lo cual será una contradicción. Sea $e \subseteq \omega \times \{0, 1\} \times \omega$, finito tal que $fix(e) \subseteq sim_{\mathcal{G}}(\underline{f}) \in \mathcal{F}$. Entonces existe $n$ tal que $(n, \varepsilon, i) \notin e$ (sin pérdida de generalidad se supone que $\varepsilon_0 = 0$) y $p \leq p_0$ tal que $p \Vdash \underline{f}(\underline{p}_n) = \underline{x}_{n0}$.

Si hay un $\pi \in \mathcal{G}$ tal que:

(1) $\pi p$ compatible con $p$.
(2) $\pi \in fix(e)$.
(3) $\pi(\underline{x}_{n0}) = \underline{x}_{n1}$

Entonces, por (2) se tiene que $\pi(\underline{f}) = \underline{f}$, $\pi(\underline{p}_n) = \underline{p}_n$ y como $\pi p \Vdash \pi\underline{f}(\pi\underline{p}_n) = \pi\underline{x}_{n0}$ usando (1) y (3), se tiene que $q = p \cup \pi p \Vdash (\underline{f}(\underline{p}_n) = \underline{x}_{n0} \wedge \underline{f}(\underline{p}_n) = \underline{x}_{n1})$. Además $|[\underline{x}_{n0} = \underline{x}_{n1}]| = 0$; pues si $|[\underline{x}_{n0} = \underline{x}_{n1}]| \neq 0$ entonces $\exists p \in \mathbf{P}$ tal que $p \Vdash \underline{x}_{n0} = \underline{x}_{n1}$, es decir $p \Vdash \forall i \exists j(\underline{x}_{n0i} = \underline{x}_{n1j}$, luego $\exists i, j \in \omega$ tal que $p \Vdash (\underline{x}_{n0i} = \underline{x}_{n1j})$ lo cual implica que $|[\underline{x}_{n0i} = \underline{x}_{n1j}]| \neq 0$ pero $(n0i) \neq (n1j)$!. En consecuencia $q \Vdash (\underline{f}$ no es función) !.

A continuación se encuentra $\pi$ que cumple las condiciones (1), (2), (3). Sea $k \in \omega$ tal que $\forall i \geq k \forall \varepsilon[(n\varepsilon i) \notin dom(p)]$ donde $n$ y $p$ son como antes y $k$ necesariamente existe dada la finitud de $p$. Sea $\pi$ la permutación de $\omega \times \{0,1\} \times \omega$ definida como sigue:

$$\pi(n0i) = \begin{cases} (n,1,i+k) & si \quad i < k \\ (n,1,i-k) & si \quad k \leq i < 2k \\ (n,1,i) & si \quad 2k \leq i \end{cases}$$

$$\pi(n1i) = \begin{cases} (n,0,i+k) & si \quad i < k \\ (n,0,i-k) & si \quad k \leq i < 2k \\ (n,0,i) & si \quad 2k \leq i \end{cases}$$

$$\pi(n'\varepsilon i) = n'\varepsilon i \ \forall n' \neq n.$$

Esta permutación cumple las condiciones (1), (2), (3), y también induce los automorfismos considerados en $G$.

(1). Si $(n,0,i,j) \in dom(p) \wedge dom(\pi p)$ ó $(n,1,i,j) \in dom(p) \wedge dom(\pi p)$, entonces $\langle n0i, j\rangle = \pi(n'\varepsilon' i', j)$. por consiguiente $n' = n$, $\varepsilon' = 1$, $i < k$ y $i = i' + k$ !, $(i' = i - k < 0$ !). $\pi$ cambia a la componente $i$ de tal modo que $p$ y $\pi p$ no pueden tener elementos en común en su dominio, es decir $dom(p) \cap dom(\pi p) = \emptyset$.
(2). Como $\forall (n\varepsilon i) \notin e$ entonces $\pi(n'\varepsilon i) = n'\varepsilon i$
(3). Claramente $\pi(\underline{x}_{n0}) = \{\langle \underline{x}_{\pi(n0i)}, 1\rangle : i \in \omega\} = \{\langle \underline{x}_{n1\bar{i}}, 1\rangle : i \in \omega\} = \underline{x}_{n1}$.

□

**Corolario 2.106**

$$Con(\text{ZF}) \Rightarrow Con(\text{ZF} + \neg\text{AEN})$$

$$Con(\text{ZF}) \Rightarrow \text{ZF} \nvdash \text{AEN}$$

# Capítulo 3

# Metamatemática del Forcing.

Forcing es un método para construir modelos en teoría de conjuntos. Con tal método se ha dado solución a problemas que se refieren a la consistencia o independencia de proposiciones tales como: la Hipótesis del Continuo (HC), el Axioma de Elección (AE), el Axioma de Martin(MA), el Axioma de Constructibilidad (V = L), la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), etc; y no sólo eso, las ideas de forcing, que pertenecen a la lógica matemática, permean otras ramas de la matemática como el álgebra y la topología. Forcing lleva implícito un cierto punto de vista filosófico, su manejo frecuentemente permite 'ver' por qué una prueba no 'funciona' y cómo puede ser corregida para que realice su propósito.

Para manejar forcing se necesita una hábil manipulación de órdenes parciales, conjuntos densos y filtros. Esta es, digamos, la dificultad matemática. Por otro lado hay una dificultad metamatemática que se refiere a: para probar la consistencia de, por ejemplo, ZF + V $\neq$ L o ZFC + $\neg$ CH o cualquier otra teoría, no se puede trabajar simplemente con ZF ó ZFC y definir un modelo transitivo para los axiomas deseados, parece que no basta con estipular un modelo para las reglas sino que es necesario que las reglas sean las adecuadas dentro del modelo.

## 3.1 La metamatemática

Para mostrar que $\sigma$ es independiente de $\Sigma$ es suficiente con mostrar que tanto $\Sigma \cup \{\sigma\}$ como $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ son ambos conjuntos consistentes de enunciados. Por el Teorema de Completud de Gödel para teorías de primer orden, esto es equivalente a la existencia de un modelo para los conjuntos mencionados. Sin embargo, por el Teorema de Incompletud de Gödel, se sabe que en ninguna extensión recursivamente axiomatizable de ZF se puede probar la existencia de un modelo de la teoría extendida; en particular, ZF no puede probar su propia consistencia. A manera de ejemplo se prueba el siguiente teorema.

**Teorema 3.1**
*Si* ZF $\vdash \exists x(x$ *es transitivo* $\wedge$ $x$ *es modelo de* ZF$)$ *entonces* ZF *es inconsistente.*

*Demostración.*. Sea $x_0$ una $x$ que satisface el enunciado del teorema, con rango mínimo. Como $\langle x_0, \in|_{x_0\times x_0}\rangle$ es modelo de ZF entonces también $\langle x_0, \in|_{x_0\times x_0}\rangle$ es modelo de $\exists y(y\,\text{es transitivo} \wedge y \models \text{ZF})$. Sea $y_0 \in x_0$ tal que $\langle x_0, \in|_{x_0\times x_0}\rangle$ es modelo de $''y_0\,\text{es transitivo} \wedge y_0 \models \text{ZF}''$. Como $''z\,\text{es transitivo} \wedge z \models \text{ZF}''$ es una fórmula $\Delta_1^{\text{ZF}}$, es absoluta y entonces $''y_0\,\text{es transitivo} \wedge y_0 \models \text{ZF}''$ se cumple. Con esto se tiene que

$$\text{ZF} \vdash \forall x(x\,\text{es transitivo} \wedge x \models \text{ZF})$$

$$\rightarrow \exists y \in x(y\,\text{es transitivo} \wedge y \models \text{ZF}).$$

Pero $x_0$ es de rango mínimo y $y_0 \in x_0$, en consecuencia $\rho(y_0) < \rho(x_0)$ y $''y_0\,\text{es transitivo} \wedge y_0 \models \text{ZF}''$. Esto es una contradicción.

Es claro que si ZF no puede probar su propia consistencia entonces no puede probar la consistencia de ningún sistema más fuerte. Con esto parece que se está en algún callejón sin salida. Aquí es donde intervienen las pruebas de consistencia relativa. Como se menciona en la introducción, en una prueba de consistencia relativa se prueba que si $\Sigma$ tiene modelo entonces, para una teoría $T$, $\Sigma \cup T$ también tiene modelo. Con respecto a ZF, Gödel demostró que ZF + HC, ZFC y ZF + HGC son consistentes relativos de ZF. En estas pruebas de consistencia relativa Gödel usó modelos internos. Intuitivamente, se empieza considerando la extensión de algún predicado monádico en el lenguaje teórico conjuntista y se muestra que esta extensión es una clase propia "modelo" de ZF junto con algunos axiomas adicionales. Por ejemplo, Gödel definió la noción de contructibilidad en ZF y mostró que los conjuntos constructibles constituyen un "modelo" para ZF + V = L, es decir ZF + "todo conjunto es constructible"; a partir de ZF + V = L se obtiene AE, HC y HGC. En ZF, desde luego no se pueden manejar directamente las clases propias. La explicación intuitiva es una heurística para el procedimiento formal que se describe en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2**
*Sea $\varphi(x)$ una fórmula con exactamente una variable libre $x$ tal que:*

$$\begin{array}{rl} i) & \Sigma \vdash \exists x\ \varphi(x) \\ ii) & \Sigma \vdash \sigma^{\varphi} \textit{ para toda } \sigma \in \Sigma \\ iii) & \Sigma \vdash \tau^{\varphi}. \end{array}$$

*Entonces $\tau$ es consistente relativo a $\Sigma$.*

*Demostración.*. Suponga que $\Sigma \cup \{\tau\}$ es inconsistente, entonces existen $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$, tales que $(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \to \neg\tau)$ es lógicamente válida.

Como $\Sigma \vdash \exists x\ \varphi(x)$,

$$\Sigma \vdash (\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \to \neg\tau)^{\varphi}$$

(por inducción); por consiguiente

$$\Sigma \vdash \sigma_1^{\varphi} \wedge \cdots \wedge \sigma_n^{\varphi} \to \neg\tau^{\varphi}.$$

De *ii)* obtenemos $\Sigma \vdash \neg\tau^{\varphi}$ lo cual contradice *iii)*.

□

Nota. La prueba de que $\vdash (\exists x\ \varphi(x) \to \alpha^{\varphi})$, para todo enunciado universalmente válido $\alpha$, requiere inducción.

Sabemos que ZF $\vdash$ V=L $\to$ HC; por tanto si fuéramos a usar el método de modelos internos para mostrar la independencia de HC, la cosa más natural sería encontrar un modelo interno en el cual V=L falle. Desafortunadamente esto es imposible.

**Lema 3.3**
*Si $A = A(x)$ es un predicado monádico en el lenguaje de teoría de conjuntos que define un modelo interno transitivo $M$ de* ZF*, entonces $L = L^A \subseteq M$ y $A^L = L \subset M$. Además $(\varphi^M)^L \longleftrightarrow \varphi^{(M^L)}$.*

**Teorema 3.4**
*No hay modelo interno transitivo de* ZF + V $\neq$ L*.*

*Demostración.*. Supóngase que $A$ es un modelo interno transitivo de ZF+ V $\neq$ L, entonces ZFC $\vdash$ $(\mathrm{V} \neq \mathrm{L})^A$ . Como L es modelo de ZFC, ZFC $\vdash$ $((\mathrm{V} \neq \mathrm{L})^A)^{\mathbf{L}}$ de donde ZFC $\vdash$ $(\mathrm{V} \neq \mathrm{L})^{A^{\mathbf{L}}}$. Por el lema tenemos que ZFC $\vdash$ $(\mathrm{V} \neq \mathrm{L})^{\mathbf{L}}$, lo que contradice el resultado de Gödel de la consistencia de V = L suponiendo que ZFC es consistente. La extensión de este resultado al caso donde $A$ es un modelo interno no-transitivo, se sigue inmediatamente del Teorema del Colapso de Mostowski aplicado a clases propias.

□

Cualquier modelo de Teoría de Conjuntos asigna una interpretación al símbolo de pertenencia $\in$. En la definición de modelo interno, $\in$ se interpreta como la restricción al dominio, o universo del modelo, de la relación de pertenencia en V, el universo de la Teoría de Conjuntos; donde el dominio o universo es la extensión de algún predicado del lenguaje de Teoría de Conjuntos. Un modelo en el cual $\in$ se interpreta así se llama un modelo estándar o natural. El resultado de imposibilidad acabado de demostrar (no hay modelo interno de ZFC + V $\neq$L) se aplica sólo a modelos internos estándar. Cuando se vean modelos booleano-valuados, podemos tener un modelo interno no estándar en el cual V $\neq$ L es verdad.

Cohen decidió concentrarse en encontrar *modelos transitivos estándar* en los cuales V = L falle. La ventaja de considerar modelos transitivos estándar es que uno puede utilizar los muchos resultados de absolutez para determinar sus propiedades. Por ejemplo, la absolutez de los ordinales (es decir, la propiedad de ser un ordinal) hace inmediata la verificación del axioma de infinito. A diferencia del método de modelos internos, Cohen intentó expandir el universo.

Claramente, no se puede esperar comenzar con V y expandirlo pues V contiene ya todo. La estrategia es como sigue: como se trata de una prueba de consistencia relativa, se tiene derecho a suponer que hay un modelo de ZFC, de hecho de ZFC + V=L; la decisión de trabajar con un modelo estándar transitivo lleva a la suposición *más fuerte* de que hay un modelo de ZFC + V=L de tal tipo; luego, se expande este modelo de ZFC + V≠L. [Que esto es una suposición más fuerte se demostrará mas adelante, aunque esta suposición más fuerte no es de hecho necesaria, como se verá después, se hace en este punto porque haciéndola se va ganando penetración en la heurística del forcing].

Por la forma fuerte del Teorema de Lowenheim-Skolem Descendente y el Teorema del Colapso de Mostowski, se obtiene un modelo estándar transitivo numerable de ZFC + V=L. Se debe tomar como punto de partida un modelo "base" estándar transitivo numerable porque:

**Teorema 3.5**
*A partir de cualquier extensión de* ZF *que sea consistente con* V=L*, no se puede probar la existencia de un modelo estándar no numerable en el cual* ZF + AE + V ≠L *se cumple*

*Demostración..* Ver Cohen pp 108-109.

□

Así este teorema muestra que ambos modelos, el de base y su expansión, tienen que ser numerables. Además, el siguiente teorema nos dice por qué debemos expandir el modelo base a un modelo que contenga los mismos ordinales.

**Teorema 3.6**
*Sea $\alpha_0$ la mínima cota superior de los ordinales en el modelo base, por tanto el modelo base tiene rango $\alpha_0$ (por absolutez de la función rango). Es consistente suponer que no hay modelo estándar transitivo de rango mayor que $\alpha_0$.*

*Demostración..* Si no hay tal modelo, ya terminamos. Si hay un modelo tal, sea $\alpha_1$ el mínimo ordinal mayor que $\alpha_0$ para el cual hay un modelo tal. Por consideraciones de absolutez, cualquier modelo tal de rango $\alpha_1$ satisface

$$\forall\alpha > \alpha_0 \neg\exists x(x \,\text{es transitivo} \wedge x \models \text{ZF} \wedge \rho(x) = \alpha)$$

□

Dado un modelo base $M$, la construcción de forcing proporciona un método para expandir $M$ a un modelo estándar transitivo numerable (una extension genérica de M) que contenga exactamente los mismos ordinales. Sea $N$ la extensión genérica de $M$. Por la absolutez de los ordinales y de los conjuntos constructibles:

$$\begin{aligned} L^M &= \{x \in N : L(x)\} = \{x : \exists\alpha \in N, \text{ tal que} L_\alpha(x)\} \\ &= \{x : \exists\alpha \in M^{L_\alpha(x)}\} = L^M \subseteq M \subseteq N \end{aligned}$$

Claramente $M \neq N$ ( y afortunadamente este es el caso general) de donde $N$ satisfara V $\neq$ L ya que se tendrá $L^N \subset N$ ó $(L \subset V)^N$. En lo anterior hemos supuesto la existencia de un modelo estándar transitivo de ZFC. Ahora probaremos que esto es algo más de lo que se permite en una prueba relativa de consistencia en ZF. Sea $M$ un enunciado del lenguaje de teoría de conjuntos que establece que ZF tiene un modelo estándar y transitivo (en lo sucesivo este hecho se denotará con MET). Dado el Teorema de Completud, $M$ es equivalente a *Cons*(ZF). Para probar que

**Lema 3.7**
*ZF + M $\nvdash$ MET,*

se usa el siguiente resultado debido a Cohen y otros (Wilmers & Suzuki p. 15): *Todo modelo estándar y transitivo de* ZF *contiene un elemento que es un modelo de* ZF.

*Demostración.*. Sea A un modelo estándar transitivo de rango mínimo. Claramente se tiene que A $\models$ ZF + M + $\neg$ MET.

□

A pesar de este resultado, un platonista no tendrá escrúpulos para aceptar MET. Platónicamente él podrá "probar" el Teorema de Reflexión para todos los axiomas de ZF simultaneamente. Esto desde luego no puede formalizarse dentro de ZF. Por el Principio de Reflexión, demostrable en ZF, todo conjunto finito de axiomas de ZF satisface MET. Parecería que aplicando el Teorema de Compacidad se debe obtener un modelo de ZF; pero si se introduce la Teoría de Modelos dentro de ZF se introduce la posibilidad de axiomas no estándar, es decir, axiomas que corresponden en nuestra codificación a enteros no estándar, mientras que el Principio de Reflexión se cumple solo para axiomas estándar.(Nuestra codificación puede de hecho “portarse mal” hasta el grado de darnos “pruebas” no estándar de inconsistencia [cf. Drake p.96]).

Habiendo formalizado la Teoría de Modelos, se obtiene lo siguiente como un teorema de ZFC:

$$\begin{aligned}\forall x[(trans(x) \quad & \wedge x \models \mathrm{ZFC} \wedge |x| = \omega) \to \\ & \exists y(x \subseteq y \wedge trans(y) \wedge y \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L} \wedge |y| = \omega)].\end{aligned}$$

La prueba del teorema es facilitada por la construcción de forcing. No ha habido éxito en el intento de probar en ZF que *Cons*(ZFC) $\to$ *Cons*(ZFC + V$\neq$L) ya que se necesita agregar MET a ZFC para obtener

$$\exists x(Trans(x) \wedge x \models \mathrm{ZFC} \wedge |x| = \omega).$$

Obviamente para lograr este propósito, se debe evitar apelar a MET. Shoenfield propuso una versión formal de la pretensión platónica respecto al Principio de Reflexión. Se agrega un símbolo constante ‘c’ al lenguaje de teoría de conjuntos. Se forma la teoría $T$ al agregar a ZFC (en el lenguaje original) el enunciado “c es transitivo $\wedge$ $|\mathrm{c}| = \omega$ ” y la relativización a ‘c’ de cada axioma de ZFC.

**Teorema 3.8**
*$T$ es una extensión conservadora de* ZFC.

*Demostración.*. Sea $T$ tal que $T \vdash \sigma$ donde $\sigma$ es en el lenguaje original. Así

$$\vdash \tau_1 \wedge \tau_2^{(\mathrm{c})} \wedge \mathrm{c\ es\ transitivo} \wedge |\mathrm{c}| = \omega \to \sigma$$

(donde $\tau_1, \tau_2 \in$ ZFC) por tanto

$$\vdash \forall x(\tau_1 \wedge \tau_2^{(x)} \wedge x\,\text{es transitivo } \wedge |x| = \omega \to \sigma)$$

(porque c no ocurre en $\sigma$) y $\vdash \forall x(\tau_1 \wedge \tau_2^{(x)} \wedge x\,\text{es transitivo} \wedge |x| = \omega \to \sigma) \to (\exists x(\tau_1 \wedge \tau_2^{(x)} \wedge x\,\text{es transitivo } \wedge |x| = \omega) \to \sigma)$,
de donde

$$\vdash \exists x(\tau_1 \wedge \tau_2^{(x)} \wedge x\,\text{es transitivo } \wedge |x| = \omega) \to \sigma.$$

ZFC $\vdash \tau_1$ y por el Principio de Reflexión

$$\text{ZFC} \vdash \exists x(\tau_2^{(x)} \wedge x \,\text{es transitivo} \wedge |x| = \omega)$$

Así

$$\text{ZFC} \vdash \exists x(\tau_1 \wedge_2^{(x)} \wedge x \,\text{es transitivo} \wedge |x| = \omega).$$

Por tanto ZFC $\vdash \sigma$.

□

Es decir, *Cons*(ZFC) $\rightarrow$ *Cons*($T$).

Dentro de T podemos aplicar la construcción de forcing para expandir c a un modelo de ZFC + V $\neq$ L; de donde Con($T$) $\rightarrow$ (ZFC + V $\neq$ L). Teniendo, por transitividad, *Cons*(ZFC) $\rightarrow$ *Cons*(ZFC + V $\neq$ L).

El enfoque de Shoenfield es tal vez el más elegante de los que permiten retener la heurística de la construcción de forcing, por ejemplo expandiendo un modelo dado de ZFC, evitando el recurso de MET.

La propuesta de Cohen para evitar MET es que dentro de ZFC se puede aplicar la técnica de forcing para conseguir un modelo de cualquier conjunto *finito* de axiomas de ZFC + V $\neq$ L. Para mostrar que un conjunto finito de axiomas de ZFC + V $\neq$ L se cumplen en una extensión genérica $N$ de un modelo de base $M$, se requiere solo un conjunto finito de axiomas $\Sigma'$ de ZFC que se cumpla en $M$. Un análisis de la construcción de forcing indicará qué axiomas deben estar en $\Sigma'$. En ZFC, el Principio de Reflexión garantiza la existencia de un modelo de $\Sigma'$. Claramente no se pierde nada al tomar tal modelo y expandirlo, ya que todos los axiomas de ZFC, requeridos en la construcción de forcing para mostrar que $\Sigma$ se cumple en la expansión, se tienen en el modelo. Si *Con*(ZFC + V $\neq$ L) *no* se cumpliera entonces un subconjunto finito de ZFC + V $\neq$ L sería inconsistente y tendría un modelo en ZFC !.

## 3.2 La Heurística.

En esta sección se da una exposición heurística de lo que se conoce como "la expansión del modelo base". El modelo base (ground model) es un modelo de ZF + V=L. El asunto es: de qué manera expandir el modelo base a un modelo en el cual V=L falle; es decir, un modelo que contenga un conjunto no constructible y que satisfaga los axiomas de ZFC.

Matemáticamente se puede ver esto como agregar un conjunto no constructible al modelo base, seguido de la cerradura bajo las operaciones de teoría de conjuntos. El problema es que las operaciones teórico-conjuntistas se entenderán relativizadas al modelo que se está tratando de obtener. El siguiente teorema proporciona una caracterización de un conjunto transitivo cerrado bajo las operaciones teórico-conjuntistas

**Teorema 3.9**
*Un conjunto transitivo M que satisface las siguientes condiciones es un modelo de ZF.*

*a) $\omega \in M$ (Axioma del Infinito).*

*b). Toda clase en M, es decir todo subconjunto de M definido por una fórmula de ZF relativizada a M, el cual está incluido en un conjunto de M, es él mismo un conjunto en M (Axioma de separación).*

*c). Para toda fórmula $\varphi$ cuya restricción a M es una relación funcional en M; la imagen bajo $\varphi^{\mathrm{M}}$ de cualquier conjunto en M el cual está en el dominio de $\varphi^{\mathrm{M}}$ es él mismo un conjunto en M (Axioma de Reemplazo).*

*d). Para todo conjunto $a \in M$, $P(a) \cap M$ está incluido en un conjunto en M (Axioma de Potencia).*

Obsérvese que por ser M transitivo se cumple el Axioma de Extensionalidad y por ser estándar ó natural se cumple el Axioma de Regularidad ó Buena Fundación. Ya que ZFC $\vdash$ "Todo conjunto finito de enteros es constructible", lo mejor que podemos esperar es encontrar un subconjunto infinito de $\omega$ no constructible. Esto es inmediato por medio de un filtro genérico.

Podemos identificar todo subconjunto de $\omega$ con una función de $\omega$ en 2 (su función característica) e inversamente. Por absolutez, $\omega$ y 2 pertenecen a cualquier extensión estándar transitiva del modelo base. Como se mostró antes, si el modelo base y la extensión genérica tiene los mismos ordinales, tienen los mismos conjuntos constructibles. Si, en tal caso, hay una función de $\omega$ en 2 en la extensión genérica, que no está en el modelo base, entonces claramente ella proporciona un subconjunto de $\omega$ no constructible. Si la función $f$ va a ser no constructible, necesariamente no puede ser la función característica de ningún conjunto finito de enteros de $\omega$, ni $\omega$ mismo. Entonces

$$\forall n \in \omega \exists m \in \omega (m > n \wedge f(m) = 1 - f(n))$$

debe ser satisfecha. Mas aún, $f$ debe además diferir de la función característica de cualquier subconjunto de $\omega$ especificable de antemano, es decir, cualquier subconjunto constructible de $\omega$ en M.

Cualquier función de $\omega$ a 2 puede aproximarse por funciones parciales finitas, es decir: funciones en 2 cuyo dominio es un número natural. Si $f \in 2^{\omega}$ entonces para todo $n \in \omega$ $f|_n$ es una aproximación tal; $f|_n \in 2^{<\omega}$ ( $2^{<\omega} = \bigcup\limits_{n<\omega} 2^n$). Sea $F_n(\omega, 2) = 2^{<\omega}$ el conjunto de todas las funciones parciales finitas de $\omega$ en 2. Por absolutez $F_n(\omega, 2) \in M$. $F_n(\omega, 2)$ puede ordenarse parcialmente por el reverso de la inclusión y el correspondiente conjunto parcialmente ordenado $P = \langle F_n(\omega, 2), \supseteq \rangle$ pertenece a $M$. Es fácil verificar que la unión de cualquier filtro $F$ sobre $P$ es una función de un subconjunto de $\omega$ en 2. Si la función $f$ que buscamos va a ser la unión de un filtro $F$, este filtro debe satisfacer las siguientes condiciones:

(1) Sea $D_n = \{p \in F_n(\omega, 2) : n \in dom(p)\}$, para $n \in \omega_0$ y $\forall n \in \omega \; F \cap D_n \neq \emptyset$

(2) Sea $R_0 = \{p \in F_n(\omega, 2) : 0 \in ran(p)\}$, $R_1 = \{p \in F_n(\omega, 2) : 1 \in ran(p)\}$, $F \cap R_0 \neq \emptyset \neq F \cap R_1$.

(3) Sea $h$ una función constructible (en $M$) de $\omega$ a 2 y sea $E_h = \{p \in F_n(\omega, 2) : \exists n \in \omega \, p(n) \neq h(n)\}$.

Para toda tal $h$ se cumple que $E_h \cap F \neq \emptyset$. Los conjuntos $D_n$, $R_0$, $R_1$, $E_h$ a los cuales se requiere que $F$ intersecte, tienen en común la propiedad de ser densos en $P$. Al probar que la extensión genérica de $M$ es en verdad un modelo de ZFC, se necesita que $F$ intersecte nuevos subconjuntos densos de $P$ en $M$. Uno podría, en principio, enlistar todos los subconjuntos densos (en $M$) de $P$ que se requiere que se intersecten nuevamente con $F$, pero a la luz del siguiente teorema esto es innecesario.

**Teorema 3.10**

*Si $M$ es numerable y $p \in F_n(\omega, 2)$ entonces hay un filtro $F$ sobre $P$ el cual intersecta a todo subconjunto denso de $P$ en $M$.*

Tal filtro se dice que es $P$-genérico sobre $M$. Este último teorema puede generalizarse al caso donde $P$ es un orden parcial arbitrario en $M$. Sin embargo sólo si $P$ no tiene átomos podemos garantizar que el filtro genérico no pertenezca a $M$. Este teorema es entonces un caso especial del siguiente teorema.

**Teorema 3.11**
*Sea $P$ un orden parcial arbitrario, $p \in dom(P)$ y $D = \{D_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de subconjuntos densos de $P$. Entonces hay un filtro $F$ sobre $P$ tal que $p \in F$ y $F \cap D_n \neq \emptyset, \quad \forall n \in \omega$.*

*Demostración.*. Sea $p_0 = p$ y para todo $n$ sea $p_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$ y $p_{n+1} \in D_{n_0}$ entonces el conjunto $G = \{q \in$P: $q \geq p_n$ para algun $n \in \omega\}$ es un filtro $P$-genérico con $p \in G$ y $G \cap D_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \omega$.

□

Nota. De aquí en adelante se usará $G$ para referir cualquier filtro $P$-genérico sobre $M$.

## 3.3 La Mecánica.

En los términos de la heurística, el siguiente paso después de haber obtenido un filtro genérico $G$, sobre la base de $M$ y $P$, es producir un modelo de ZFC + V≠L, cerrando $M \cup \{G\}$ bajo operaciones teórico-conjuntistas. El problema es probar la existencia de tal modelo; es decir, probar la existencia de una "extensión genérica" transitiva $M[G]$ de $M$ tal que $M[G] \models$ ZFC, $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$ donde $M$ y $M[G]$ tienen los mismos ordinales. El modo en que esto se logra en pruebas de forcing es "construir" $M[G]$ de tal manera que sus propiedades están completamente determinadas por las propiedades de $M$, $P$ y $G$.

Es en este punto que la técnica de forcing entra en juego. Y aquí también está el salto creativo en el trabajo de Cohen. Desde su presentación en sus artículos de '63, '64, y '66, la técnica ha sido grandemente mejorada [Kunen p.235], algunas veces hasta el punto de que la definición de la relación de forcing surge aparentemente por la única razón de que funciona. Desde luego, ya que el forcing es una técnica matemática para producir pruebas de independencia uno no puede esperar derivarla de los principios teórico-conjuntistas ni se piensa que pueda surgir de alguna manera completamente natural de una descripción heurística. Sin embargo, se esbozará la estrategia y luego se indicará cómo se realiza.

Se sabe que el dominio de la extensión genérica tiene que ser numerable y por tanto se requiere sólo un conjunto numerable de nombres para referirnos a sus miembros. Se denota a tal conjunto de términos constantes $T = \{\tau_n : n \in \omega\}$. Podemos codificar en $M$ del modo familiar expresiones del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} \cup T$. Forcing es una relación que se cumple entre elementos de $P$ y enunciados codificados. Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ con exactamente n variables libres, y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$, entonces: "$p \in P$ *forza* $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)''$ es comunmente escrito como $p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. La relación de forcing se define como sigue.

**Definición 3.12**
*$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sii $\forall G$ ($G$ es $P$-genérico sobre $M$ y $p \in G \Rightarrow M[G]$ $\models \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$).*

Esta definición se debe a Shoenfield y es una simplificación para propósitos de exposición de la relación de forcing al llevar a cabo los detalles de pruebas de independencia. Donde la designación de $\tau_1, \ldots, \tau_n$ depende esencialmente de $G$, de un modo que se discute a continuación.

Ya que en general no todos los filtros genéricos sobre un orden parcial $P$ en $M$ pertenecen a $M$, la relación de forcing dada antes no se puede definir en $M$. Pero para probar que ciertos axiomas de ZFC se cumplen en $M[G]$ requerimos una relación de forcing modificada $\Vdash^*$ ("forcing estrella"), definible en $M$. De acuerdo a Kunen, "hay tantas definiciones diferentes (equivalentes) a $\Vdash^*$ como textos sobre teoría de conjuntos". El punto importante es que:

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \textit{ sii } p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

La definición de $\Vdash^*$ refleja la definición semántica de verdad en un modelo, sin embargo, ya que en general $G$ no está definido en $M$, no puede proporcionar una definición de verdad en $M[G]$ para cualquier filtro genérico particular $G$. Más bien proporciona todo lo necesario para determinar las propiedades de *todas* las extensiones genéricas simultaneamente. De hecho podemos probar el crucial Lema de Verdad.

**Lema 3.13**
$M[G] \models \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *sii* $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$

Hasta aquí se ha hablado libremente de $M[G]$, tanto como una extensión de $M$, de la cual se debe probar que es un modelo de ZFC, así como un modelo existente de ZFC. También se ha dicho que el diseño de los nombres T depende de $G$ y se ha considerado a los nombres en relación a un modelo particular $M[G]$. Un aspecto importante de la técnica de forcing es la relación entre el método de codificar T y la determinación del dominio de una extensión genérica. Se usan diversos métodos para producir los nombres codificados (a los cuales se denotará de aquí en adelante como elementos del espacio de etiquetas en $M$) e igualmente para producir el dominio de $M[G]$. Mas adelante se describirán algunos ejemplos. Primero se discutiran algunas consideraciones generales que motivan todos los métodos.

i) Sea $L$ el espacio de etiquetas en $M$. Podemos ver al dominio de $M[G]$ como la imagen de $L$ bajo una función biyectiva $\phi_G$, es decir $\phi_G[L] = dom\mathrm{M}[G]$. Como la extensión genérica es un modelo estándar

$$\phi_G(l) \in \phi_G(m) \Longleftrightarrow M[G] \models (\tau_l \in \tau_m)$$

Considérese la relación binaria inducida en $L$ por la relación $\in$ en $M[G]$: $\{\langle l, m\rangle : \phi_G(l) \in \phi_G(m), l, m \in L\}$ Llamemos $\in_G$ a esta relación. Claramente $\in_G$ es una relación bien fundada. Así si se pudiera de alguna manera definir $\in_G$ independientemente de $M[G]$ se podría obtener $M[G]$ como el colapso de Mostowski de la estructura $\langle L, \in_G\rangle$.

ii) Ya que $M \subseteq M[G]$ para toda extensión genérica $M[G]$, $\langle \phi_G^{-1}[M], \in_G\rangle$ es un modelo de Teoría de Conjuntos, isomorfo a $M$, cuyo dominio es un subconjunto de $L$. Para filtros genéricos $G$, $G'$, se tiene

$$\langle \phi_G^{-1}[M], \in_G\rangle \cong \langle \phi_{G'}^{-1}[M], \in_{G'}\rangle.$$

Por consideraciones de simplicidad se pueden identificar estas estructuras, obteniendo así un subconjunto $L_M \subseteq L$ que sirve como un conjunto de nombres estándar para los elementos de $M$ en toda extensión genérica.

iii) es importante notar que aunque la designación de los nombres $T$ depende de $G$, la codificación de $T$ en $M$ puede no depender de $G$. Esto es porque en general $G \notin M$, pero $\Vdash^*$ tiene que ser definible en $M$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \phi_G & & M[G] \\
 & & \nearrow & & \uparrow i \\
T & \xrightarrow{\#} & L & \longleftarrow & M \\
 & & \searrow & & \downarrow i \\
 & & \phi_G & & M[G']
\end{array}
$$

iv) Como $G \subseteq P$, todos sus miembros pertenecen a $M$ y por lo tanto tienen nombres estándar. El nombre de $G$ tiene que ser definible en $M$ y por tanto no puede depender de $G$ mismo. Podríamos fijar un elemento $\Gamma$ de $L$ tal que $\forall G\, \phi_G(\Gamma) = G$. Si $\Gamma$ se escoge de este modo está de algúna manera compuesto a partir de los nombres estándar de todos sus miembros "potenciales" es decir, aquellos nombres $\check{p}$ (donde $\check{p}$ es el nombre estándar de p) tales que $\exists G,\ \phi_G(\check{p}) \in G$, luego ya que $\forall G,\ G \subseteq P$ y $\forall p \in P,\ \exists G$tal que $p \in G$, entonces $\Gamma = \{\varphi(\check{p}) : p \in P\}$ donde $\varphi(\check{p})$ es alguna función de $\check{p}$. Supongamos $p \in G$, entonces $\phi_g^{-1}(p) = \check{p} \in_G \Gamma = \phi_G^{-1}(G)$. Entonces $\phi_G(\check{p}) \in G$, por lo tanto $G = \phi_G(\Gamma) = \{\phi_G(\check{p} : p \in G\}$. Nótese que $\phi_G(\check{p})$ es independiente de $G$.

Para enfatizar la relación con la función potencial del Colapso de Mostowski en el conjunto apropiado $\langle L, \in_G \rangle$ podemos reescribir así : $\phi_G(\Gamma) = \{\phi_G(\check{p}) : \check{p} \in_G \Gamma\}$.

Idealmente nos gustaría una definición uniforme de los $\phi_G$'s sobre L con propiedades similares a las del caso particular anterior. Nuestro primer ejemplo ilustra cómo lograr esto.

Nota. Usaremos $i_G$ como notación alternativa para la función $\phi_G$. Usaremos $V^P$ como notación alternativa para L el espacio etiquetas ó nombres.

**Ejemplo 7**(Kunen 1980).

El espacio de etiquetas es definido por recursión transfinita:

$$l \in L \quad \text{sii } l \text{ es una relación y} \quad \forall \langle m, p \rangle \in l \rightarrow (m \in L \wedge p \in P)$$

La definición del espacio de etiquetas (ó de nombres) tiene a $P$ como un parámetro y es claramente una clase definible en $M$. Para cada $G$,

$P$-genérico sobre $M$, se define $\phi_G$ mediante:

$$(i_G(l) =)\phi_G(l) = \{\phi_G(m) : \exists p \in G(\langle m, p\rangle \in l)\}$$

$\phi_G$ también se define por recursión transfinita. $M[G] = \phi_G[L]$.

Definamos las siguientes funciones, donde suponemos que $P$ tiene un elemento maximal $1_P$, con dominio en $M$ y valores en $L$, por recursión transfinita en $M$:

$$m^* = \{\langle n^*, 1_P\rangle : n \in m\} \qquad \check{m} = \{\langle \check{n}, 1_p\rangle : n \in m,\ p \in P\}.$$

Se muestra fácilmente que $\phi_G(m^*) = \phi_G(\check{m}) = m$ y así ambas funciones pueden servir para producir una clase de nombres estándar en $M$. Claramente, en este ejemplo $\phi_G$ *no* es una biyección. De esta manera, tenemos más nombres de los que necesitamos. La relación inducida $\in_G$ está dada por:

$$m \in_G l \quad \text{sii} \quad \exists p \in G(\langle m, p\rangle \in l) \text{ sii } \phi_G(m) \in \phi_G(l).$$

Esta relación es bien fundada y limitada por la izquierda (es como conjunto) sobre L (y de aquí podemos obtener el Colapso de Mostowski) pero ya que $\in_G$ no es extensional, la estructura $\langle L, \in_G\rangle$ no es isomorfa a $M[G]$.

Tomando $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}$ entonces $\forall G, \phi_G(\Gamma) = G$. Sin hacer uso de forcing, se puede mostrar que $M[G]$ satisface los axiomas de: Extensionalidad ( por ser transitivo), Fundación (por ser estándar), Paridad, Infinitud, y Unión. $|\vdash^*$ se usa para obtener Reemplazo, Conjunto Potencia y los enunciados particulares que se investigan (por ejemplo V$\neq$L). Dada la técnica general de forcing descrita anteriormente, el problema de producir resultados de consistencia particulares se reduce a la construcción de un orden parcial adecuado en $M$.

El siguiente teorema muestra el sentido en el cual $M[G]$ es la cerradura de $M \cup \{G\}$ bajo las operaciones teórico-conjuntistas.

**Teorema 3.14** *(de Minimalidad)*
$\forall N((M \subset N \wedge G \in N \wedge N \models ZFC) \to (M[G] \subseteq N))$.

**Ejemplo 8**(Cohen 1966).

El enfoque de Cohen es tomar la Jerarquía Constructible como primitiva en lugar de la Jerarquía Acumulativa. El toma como su modelo base a la intersección de todos los modelos estándar, transitivos y numerables. Por absolutez de constructibilidad éste es un segmento inicial de la Jerarquía Constructible, es decir $M = \bigcup\{L_\beta : \beta < \alpha\}$ para algún ordinal límite numerable $\alpha$. Sea $a = ran(\bigcup G)$, donde $G$ es $P$-genérico sobre $M$ y $G \notin M$. Cohen define $M[G]$ por "constructibilidad relativa". Sabemos que $a \subseteq \omega$ y $a$ es no acotado en $\omega$, de donde $cltr(a) = \omega$ (la clausura transitiva de $a$). Sean $L(0, a) = \omega \cup \{a\}$, $\quad L(\gamma, a) = D(\bigcup_{\beta<\gamma} L(\beta, a)) \quad (\gamma > 0)$ donde $D(x)$ es el conjunto de subconjuntos de $X$ que son definibles por fórmulas relativizadas a $X$ usando parámetros en $X$. $M[G] = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} L(\beta, a)$. La prueba de que $M[G] \models \mathrm{ZFC}$ es muy parecida a la prueba de Gödel de que la Jerarquía Constructible es un modelo para la Teoría de Conjuntos. Que $M[G]$ satisface el Teorema de Minimalidad se sigue inmediatamente de estas consideraciones.

Agregamos una nueva constante $\bar{a}$ al lenguaje de ZF, la cual sirve como un nombre para $a$. A cada elemento de $M[G]$ le corresponde una fórmula de este lenguaje extendido y un conjunto de parámetros que define esos elementos. Cohen hace uso de este hecho cuando define inductivamente el espacio de etiquetas ó nombres. Aunque el enfoque de Cohen, particularmente en lo relacionado con los detalles del lenguaje ramificado, carece de la fluidez de los desarrollos de explicaciones posteriores, está más relacionado con la heurística de la técnica del forcing y es por tanto, sentimos, digno de estudio por otras razones que las puramente históricas.

Cuando definimos forcing, definimos lo que algunas veces es llamado *forcing débil*. La definición original de Cohen es del forcing fuerte ($\Vdash_c$). Los dos conceptos están relacionados así :

$$p \Vdash \phi \leftrightarrow p \Vdash_c \neg\neg\phi$$

La lógica del forcing fuerte (de Cohen) es intuicionista, es decir $p \Vdash_c \neg\neg\phi \not\Rightarrow p \Vdash_c \phi$. La lógica del forcing débil es clásica. Kunen atribuye la invención del forcing débil a Shoenfield, mientras que Shoenfield le acredita su presentación a Feferman.

**Ejemplo 9**(Shoenfield 1971)

Shoenfield define la estructura $\langle M, \in_G \rangle$ donde $M$ es el dominio de nuestro modelo base y $\in_G$ está definido por:

$$x \in_G y \quad \text{sii} \quad \exists p \in G(\langle x, p \rangle \in y), \quad \text{para todo}\, x, y \in M.$$

$M[G]$ es el colapso de Mostowski de ésta estructura.

Habiendo definido el modelo primero, Shoenfield introduce entonces el *lenguaje de forcing*. El toma como espacio de etiquetas la totalidad de $M$, es decir $\mathrm{L} = M$. Este es un error técnico, sin embargo a consecuencia de eso, el forcing no es definido en $M$. Para permitir la definibilidad del forcing, debemos de restringir L de modo de que se pueda codificar el lenguaje.

El enfoque de Shoenfield es instructivo, porque trae al caso el hecho de que $M[G]$ puede construirse independientemente de L. Su error (facilmente rectificado) consiste en no permitir la codificación de las fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} \cup T$ no en el hecho de que tenga demasiados nombres en su espacio de etiquetas. Por ejemplo, Burges(1977) define un espacio de etiquetas que es una extensión propia del de Kunen. Inversamente, podemos restringir la definición de Kunen al requerir que L sea una función.

Con respecto a $M$, pero visto desde fuera (ya que $\in_G$ no es definible en $M$), L es una clase con una relación $\in$ no estándar definida ahí . La estructura $\langle L, \in_G \rangle$ no es un modelo para la Teoría de Conjuntos ya que $\in_G$ no es extensional. Si en vez de $M$ se considera el universo teórico-conjuntista V (el cual es el que "la gente de $M$" toma como $M$) y hacemos nuestras definiciones en consecuencia, entonces $\langle L, \in_G \rangle$ es similar a un modelo interno con una relación $\in$ no estándar: de hecho $\langle L, \in_G \rangle$ satisface cada axioma de ZF excepto Extensionalidad. Tomando clases de equivalencia se puede obtener Extensionalidad: $l \sim m \quad \text{sii} \quad \phi_G(l) = \phi_G(m),\ l, m \in L$. Sea $L' = \{[l] : l \in L\}$ y definamos $\in'_G$ como:

$$[l] \in'_G [m] \quad \text{sii} \quad \phi_G(l) \in \phi_G(m), \quad l, m \in L$$

La estructura $\langle L', G' \rangle$ satisface ZF + V$\neq$L. Desafortunadamente las clases de equivalencia son clases propias. No podemos aplicar el lema de Colapso de Mostowki a $\langle L, \in_G \rangle$ en V porque $\in_G$ no es como conjunto (limitado por la izquierda) sobre L. Alternativamente, se puede obtener

Extensionalidad si se define una relación de equivalencia nueva, $=_G$, sobre L:

$$l =_G m \quad \text{sii} \quad \phi_G(l) = \phi_G(m) \quad \text{sii} l \sim m$$

La estructura $\langle L, \in_G, =_G \rangle$ satisface ZF + V$\neq$L. La definición de esta estructura en V, conocido como el enfoque del modelo sintáctico, corre paralela a la definición de $V^B$, el universo booleano-valuado para alguna álgebra booleana completa $B$ en $M$. Históricamente, este último enfoque fue desarrollado primero. La definición de $\Vdash$ se debe en mucho a Shoenfield quien se dió cuenta que se podía hacer la construcción de Scott-Solovay (universo booleano-valuado) directamente con un orden parcial. La última sección menciona brevemente algunos paralelismos entre forcing, como se describió antes, y el enfonque de modelos booleano-valuados para las pruebas de independencia.

## 3.4 Modelos Booleanos.

Si, trabajando en V, se define L, el espacio de etiquetas o nombres, usando la versión restringida de la definición de Kunen, de tal manera que cada miembro de L es una función y además se pide que el orden parcial sea una álgebra de Boole completa $\mathcal{B}$, entonces el espacio de prueba consiste de las funciones hereditariamente $\mathcal{B}$-valuadas, es decir: las funciones $f : x \to \mathcal{B}$, donde $x$, el dominio, es un conjunto de funciones hereditariamente $\mathcal{B}$-valuadas; ésta clase es el es conocida como el universo Booleano V$^{\mathcal{B}}$.

Por medio de un mapeo inductivo, $||[\cdot]||$, cada proposición $\sigma$ en el lenguaje de forcing tiene asignada un "valor de verdad", a saber $||[\sigma]||$ el cual es elemento de $\mathcal{B}$. Esta definición de verdad no puede ser dada en la teoría de conjuntos aaunque el valor de verdad de cualquier $\sigma$ en particular puede ser determinado dentro de la teoría de conjuntos (ver [16] Cap. 10). Se puede mostrar que cualquier proposición que sea un teorema de ZFC tiene valor de verdad $1_{\mathcal{B}}$. Así si se puede encontrar una álgebra booleana completa $\mathcal{B}$ tal que $0_{\mathcal{B}} < ||[\sigma]||^{\mathcal{B}} < 1_{\mathcal{B}}$ entonces $\sigma$ es independiente de ZFC. De otra forma: puede ser mas práctico encontrar dos álgebras de Boole $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, tales que $||[\sigma]||^{\mathcal{B}_\infty} < 1_{\mathcal{B}_2}$ y $||[\neg\sigma]||^{\mathcal{B}_\in} < 1_{\mathcal{B}_2}$ para obtener resultados de independencia.

Para probar que $M[\mathrm{G}] \models$ ZFC se necesita considerar $|\vdash^*$. Es claro que se puede probar que $\mathrm{V}^{\mathcal{B}} \models$ZFC sin hacer uso de forcing (donde $\mathrm{V}^{\mathcal{B}} \models \sigma$ ssi $|[\sigma]|^{\mathcal{B}} = 1$). Sin embargo la definición inductiva del mapeo $|[\cdot]|^{\mathcal{B}}$ refleja la definición de $|\vdash^*$ con lo cual se obtiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.15**
$|[\sigma]|^{\mathcal{B}} = \bigvee\{p \in \mathcal{B} : p \mid\vdash^* \sigma\}$ *y además* $p \mid\vdash^* \sigma$ *ssi* $p \leq |[\sigma]|^{\mathcal{B}}$.

De hecho, si se define $|\vdash^*$ mediante $p \mid\vdash^* \sigma$ ssi $p \leq |[\sigma]|^{\mathcal{B}}$ entonces $|\vdash^*$ satisface las condiciones usuales de forcing.

Al elegir la álgebra Booleana correcta $\mathcal{B}$ se puede mostrar, por ejemplo, que $\mathrm{V}^{\mathcal{B}} \models$ ZFC + V $\neq$ L. Esta prueba formal de independencia en ningún lugar menciona un filtro genérico sobre $\mathcal{B}$. Analogamente, dado un orden parcial $\mathbf{P}$ tal que existe un G $\mathbf{P}$-genérico tal que G $\notin$ $M$ se podría mostrar que $\exists p \in \mathbf{P}(p \mid\vdash^*$ V $\neq$ L sin mencionar a G o su nombre $\Gamma$. Sólo se requiere a G cuando se produce un modelo estándar transitivo de ZFC + V $\neq$ L.

Para construir un modelo Booleano-valuado se comienza, como antes, con un modelo base $M$ y el álgebra Booleana $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \in M$ y $M \models$ '$\mathcal{B}$ es un álgebra de Boole completa'. Entonces se relativiza la discusión a $M$ y se forma L, el espacio de etiquetas, $\mathrm{L} = \mathrm{V}^{\mathcal{B}} \cap M$. Así se obtiene un universo valuado Booleano dentro de $M$.

Se puede probar que para cualquier G $\mathbf{P}$-genérico sobre $M$, si $p \notin$ G entonces $\exists q \in$ G tal que $p \perp q(p \in \mathbf{P}$. En el caso de que $\mathbf{P}$ sea una álgebra Booleana completa se prueba que G es un ultrafiltro. De hecho se prueba el siguiente teorema:

**Teorema 3.16**
*Sea* G $\subseteq \mathcal{B}$ *donde* $\mathcal{B}$ *es un álgebra de Boole completa en M.* G *es* $\mathcal{B}$-*genérico sobre M si, y sólo si,* G *es un ultrafiltro y el homomorfismo canónico* $h_{\mathrm{G}} : \mathcal{B} \to 2$, *preserva todos los supremos en M, i.e. es tal que* $\forall x \in M(x \subseteq \mathcal{B} \to h_{\mathrm{G}}(\vee x) = \vee\{h_{\mathrm{G}}(y) : y \in x\})$.

Ahora, el Teorema de Rasiowa-Sikorski dice que si $\{s_n : n \in \omega\}$ es una familia contable de subconjuntos de algun álgebra de Boole $\mathcal{B}$ (no necesariamente completa) tal que para cada $n \in \omega$ el supremo de $s_n$ existe en $\mathcal{B}$ entonces hay un homomorfismo $h : \mathcal{B} \to 2$ tal que $h(\vee s_n) = \vee\{h(s) : s \in s_n\}$. Por lo tanto el Teorema de Rasiowa-Sikorski es el teorema de existencia de filtros genéricos para modelos Booleano-valuados.

El método de modelos Booleano-valuado y el método de forcing producen ambos las mismas pruebas de independencia pues

**Teorema 3.17**
*Cada orden parcial puede ser densamente inmerso en un álgebra de Boole completa.*

# Capítulo 4

# Una aplicación.

En esta parte se presentan algunos ejemplos de los usos de forcing en problemas topológicos. Se desarrollan principalmente cuestiones sobre la consistencia de la hipótesis de Souslin y algunas breves observaciones alrededor de numeros cardinales relacionados con el problema de Souslin. Se trata en todo caso de hacer un sumario de problemas que se hayan dispersos en varias publicaciones especializadas. Quizá algun mérito tenga detallar las demostraciones y contextualizar algunas cuestiones al respecto.

En el primer volumen de *Fundamenta Mathematicae*, 1920, en la sección de problemas, apareció una conjetura de un joven matemático ruso, M. Souslin. La conjetura suena simple y al parecer fue establecida sin considerar su dificultad o su significado. Souslin muere a los 25 años de edad y aunque sólo publicó un artículo hizo contribuciones básicas a la teoría de conjuntos. La conjetura que lleva su nombre es su mayor contribución a las Matemáticas y sólo por eso merece un lugar destacado en el medio matemático. Arbol de Souslin es un término estándar para un cierto tipo de conjunto parcialmente ordenado.

Sea $\mathbf{P} = \langle \mathbf{P}, \leq \rangle$ un orden parcial

0. $\mathbf{P}$ es *densamente ordenado* si

$$\forall p, q \in \mathbf{P}(p < q \to \exists r \in \mathbf{P}(p < r < q)).$$

1. Un subconjunto $A$ de $\mathbf{P}$ es *cofinal* en $\mathbf{P}$ si

$$\forall p \in \mathbf{P} \exists q \in A(p \leq q).$$

2. $A \subseteq \mathbf{P}$ es una *sección final* de $\mathbf{P}$ si

$$\forall p \in A \forall q \in \mathbf{P}(p \leq q \to q \in A).$$

   Análogamente se define *sección inicial*: $\forall p \in A \forall q \in \mathbf{P}(q \leq p \to q \in A)$.

3. Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial $p, q \in \mathbf{P}$ son *comparables* si $p \leq q$ o $q \leq p$; en caso contrario son *incomparables*, lo cual se denota por $p \mid q$.

   En las definiciones siguientes $\mathbf{P}$ es orden lineal densamente ordenado.

4. $\mathbf{P}$ es *completo* si es conexo en la topología inducida por el orden. Equivalentemente, $\mathbf{P}$ es completo si cada subconjunto $A$ de $\mathbf{P}$, el cual tiene cota superior en $\mathbf{P}$, tiene una mínima cota superior (denotada $lub(A)$) en $\mathbf{P}$.

5. $\mathbf{P}$ es un *continuo ordenado* si es completo y sin puntos extremos.

6. $I \subseteq \mathbf{P}$ es un intervalo si $I \neq \emptyset$ y $\forall x, y \in I \forall p \in \mathbf{P}(x < p < y \to p \in I)$.

   6.1 Un intervalo $I$ es abierto si no tiene puntos extremos.

   6.2 Un intervalo $I$ es cerrado si cada punto de $\mathbf{P} \setminus I$ está contenido en un intervalo abierto ajeno con $I$.

7. Un subconjunto $D$ de $\mathbf{P}$ es *denso en* $\mathbf{P}$ si cualquier intervalo abierto de $\mathbf{P}$ intersecta a $\mathbf{P}$.

8. $\mathbf{P}$ es *separable* si tiene un subconjunto denso numerable.

**Teorema 4.1**
*Cada continuo ordenado y separable* $\mathbf{P}$ *es isomorfo a* $\mathbf{R}$

Se prueba este teorema al mostrar que el subconjunto denso numerable $D$ de $\mathbf{P}$ debe ser isomorfo a los racionales $\mathbf{Q}$ y que la completación de Dedekind es $\mathbf{P}$ mismo. La completación de Dedekind se obtiene al añadir una mínima cota superior a cada cortadura en $D$ sin mínima cota superior. Una cortadura de $D$ es un segmento inicial propio.

Propiedad de Souslin.(PS).

*Cualquier familia de intervalos abiertos y ajenos en* $\mathbf{P}$ *es numerable.* Esto quiere decir que la celularidad de $\mathbf{P}$ es numerable: $c(\mathbf{P}) = \aleph_0$.

El problema de Souslin consiste en tratar de dar respuesta, negativa o afirmativa, a la pregunta: ¿cualquier continuo ordenado con la propiedad de Souslin es isomorfo a $\mathbf{R}$?. Es claro que $\mathbf{R}$ tiene la propiedad de Souslin. El problema puede ser establecido en forma equivalente como: ¿Cualquier continuo ordenado con la PS contiene un subconjunto denso numerable?.

Hipótesis de Souslin. (HS)

*Cualquier continuo ordenado* $\mathbf{P}$ *con la propiedad de Souslin es isomorfo a* $\mathbf{R}$.

**Teorema 4.2**

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*i. La hipótesis de Souslin.*

*ii. Cualquier conjunto densamente ordenado con la propiedad de Souslin puede ser inmerso en* $\mathbf{R}$*.*

*iii. Cualquier conjunto densamente ordenado con la propiedad de Souslin tiene un subconjunto denso numerable.*

*Demostración..* $(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $\mathbf{P}$ un conjunto densamente ordenado con la propiedad de Souslin, $f : \mathbf{P} \to \mathbf{R}$ una inmersión dada por $(ii)$. Sea $\{q_i : i \in \omega\}$ una enumeración de $\mathbf{Q}$. Para cada par $i, j \in \omega$, sea $d_{ij} \in \mathbf{P}$ tal que $q_i < f(d_{ij}) < q_j$ si es posible y si no $d_{ij}$ es elegido arbitrariamente, entonces $D = \{d_{ij} : i, j \in \omega\}$ es un subconjunto denso numerable de $\mathbf{P}$.

□

Una *línea de Souslin* es un continuo ordenado que tiene la propiedad de Souslin pero no es separable. Esto quiere decir que una línea de Souslin existe si la hipótesis de Souslin es falsa.

Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $(T, \leq)$ tal que para cada $x \in T$ el conjunto $\{y \in T : y < x\}$ está bien ordenado por $\leq$.

Un *sub-árbol* de un árbol $T$ es un subconjunto $T' \subseteq T$ con el orden inducido, tal que

$$\forall x \in T' \forall y \in T(y < x \to y \in T').$$

Una *cadena* de un conjunto parcialmente ordenado es un subconjunto linealmente ordenado.

Una *rama* $b$ de un árbol $T$ es una cadena tal que $\forall x \in b(y \leq x \to y \in b)$.

La *altura* de $x \in T$ se define como

$$h(x) = o(\{y \in T : y < x\}) = sup\{h(y) : y < x\}.$$

En ocasiones se escribirá $h(x, T)$ si es necesario enfatizar el árbol con respecto del cual se toma la altura.

Si $X \subseteq T$, se define la *altura* de $X$ como $h(X) = \sup\{h(x) : x \in X\}$. $h(T)$ indica la altura de $T$.

Una rama $b$ es *cofinal* en $T$ si para cualquier nivel $\alpha \in h(T)$ hay un $y \in b$ tal que $\alpha \leq h(y)$.

$y$ es *sucesor* de $x$ si: $h(y) = h(x) + 1$.

Para $\alpha \in On$, el *$\alpha$-ésimo nivel* se define como:

$$T_\alpha = \{x \in T : h(x) = \alpha\}.$$

*Arbol restringido* a $\alpha$ : $T|_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$.

$T$ es un *árbol de Souslin* si $|T| = \omega_1$ y cada cadena y cada anticadena en $T$ son numerables. Un árbol es llamado *árbol de Aronszajn* si $|T| = \omega_1$ y cada cadena en $T$ y cada nivel $T_\alpha$ son numerables.

Es claro que si $T$ es un árbol de Souslin o de Aronszajn entonces $h(T) = \omega_1$. Puesto que cada $T_\alpha$ es una anticadena, cada árbol de Souslin es de Aronszajn.

**Teorema 4.3** *(*E. W. Miller*)*
*La hipótesis de Souslin es equivalente a la no existencia de un árbol de Souslin , i. e. hay una línea de Souslin si, y sólo si, hay un árbol de Souslin. Además cada línea de Souslin tiene un subconjunto denso de cardinalidad $\omega_1$.*

*Demostración..*

$(a)$. Sea $T$ un árbol de Souslin. Sea $\mathbf{Q}$ el conjunto de todas las ramas de $T$. Como $T$ está ordenado parcialmente, cada nivel $T_\alpha$ es anticadena numerable. Así que se ordena linealmente cada nivel de $T$ y para $b_1$, $b_2 \in \mathbf{Q}$, sea $b_1 < b_2$ si $U_\alpha$ es el menor nivel donde $b_1$ y $b_2$ difieren y si el $\alpha$-ésimo elemento de $b_1$ precede al $\alpha$-ésimo elemento de $b_2$ en el orden de $T_\alpha$. Este orden define un orden lineal en $\mathbf{Q}$

Cada intervalo en $\mathbf{Q}$ contiene un subintervalo de la forma $\{b \in \mathbf{Q} : x \in b\}$ para algún $x \in T$; dos de tales intervalos son ajenos si, y sólo si, los $x$ que los definen son incompatibles. Pues si $x$, $y$ son incompatibles entonces no están en la misma rama $b$. Por consiguiente cada familia de intervalos ajenos dos a dos es a lo más numerable, pues cada rama de $T$ es a lo más numerable.

$\mathbf{Q}$ no contiene un subconjunto denso numerable. Sea $S \subseteq \mathbf{Q}$ numerable y denso y sea $\alpha$ una cota superior de las longitudes de todo $b \in S$. Sea $x \in T$ de altura $> \alpha$ tal que hay al menos tres diferentes $b_1 < b_2 < b_3$ que contienen a x. Como $b_2$ es una rama de longitud $> \alpha$, pues $x \in b_2$, entonces $b_2 \notin S$, así que el intervalo $(b_1, b_3)$ es ajeno de $S$!.

$(b)$. Sea $\mathbf{Q}$ una l´ inea de Souslin, $\mathbf{Q}$ es un cont´ inuo ordenado para el cual cualquier familia de intervalos ajenos dos a dos es numerable y no tiene un subconjunto denso numerable. Construimos por recursión un árbol de Souslin: Sea $I = \{\mathbf{Q}\}$ y sea $D_0 = \{x\}$ con $x \in \mathbf{Q}$. Obseérvese que: si $D \subseteq Q$, $D$ contable, entonces $D$ *no* es denso en $\mathbf{Q}$ y entonces $\overline{D} \neq \mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q} \setminus \overline{D} = \emptyset$ y $\mathbf{Q} \setminus \overline{D}$ es abierto, por lo tanto $\mathbf{Q} \setminus \overline{D}$ es unión de una colección no vacía de intervalos abiertos ajenos por pares, digamos $I\{D\}$, que es contable porque $\mathbf{Q}$ tiene la propiedad de Souslin. Ahora, si $D_\beta$ está definido para $\beta \leq \alpha$ (con $\alpha \leq \omega_1$) y $D_\beta$ contable $\forall \beta \leq \alpha$, sea, $I_\alpha = I(\bigcup_{\beta \leq \alpha} D_\beta)$ y sea $D_\alpha$ un conjunto que tiene un punto de cada intervalo abierto de $I_\alpha$. Es claro que $D_\alpha$ es contable pues $I_\alpha$ es contable.

Sea $T = \bigcup_{\alpha \leq \omega_1} I_\alpha$ y $\langle T, \supseteq \rangle$ es el árbol de Souslin, pues es inmediato que es un árbol de cardinal $\aleph_1$ y como para cada nodo (intervalo de $I_\alpha$ ) hay al menos dos sucesores inmediatos, es suficiente probar que toda anticadena en $T$ es contable (pues una cadena incontable proporciona una anticadena incontable). Pero una anticadena en $T$ es justamente una familia de intervalos abiertos ajenos por pares en $\mathbf{Q}$, que es contable por la propiedad de Souslin.

$\square$

Un $\alpha$-árbol *normal* $T$ es un árbol tal que

(i) $h(T) = \alpha$.

(ii) $T$ tiene un único punto mínimo (la raíz).

(iii) Cada nivel es a lo más numerable.

(iv) Cada punto no maximal $x \in T$ tiene al menos dos sucesores inmediatos; $\exists y_1 y_2 \in T$ tales que $h(y_1) = h(y_2) = h(x) + 1, \quad x \leq y_1,\ x \leq y_2$.

(v) Para cada $x \in T$ hay algún $y > x$ en cada nivel siguiente $< \alpha$.

(vi) Si $\beta < \alpha$ es un ordinal límite entonces cada $\beta$-rama tiene a lo más un sucesor inmediato. Es decir, si $x, y$ están en el nivel $\beta$ y si $\{z : z < x\} = \{z : z < y\}$ entonces $x = y$.

Si $T$ es normal entonces $h(T) \leq \omega_1$, pues de otra manera por $(iv)$ y $(v)$, el nivel $T_{\omega_1}$ sería no numerable. Un árbol de Souslin normal es un $\omega_1$-árbol sin anticadenas no numerables. Un árbol de Souslin normal es un árbol de Souslin. En efecto, si $T$ es un $\omega_1$-árbol normal y si $T$ tiene una rama de longitud $\omega_1$ entonces $T$ tiene una anticadena no numerable. Pues si $b$ es una rama no numerable para cada $x \in b$ se elige un sucesor $z_x$ de $x$ tal que $z_x \notin b$; luego, $A = \{z_x : x \in b\}$ es una anticadena no numerable.

**Teorema 4.4**
*Cada árbol de Souslin $T$ puede ser normalizado (contiene un árbol de Souslin normal $T^*$).*

*Demostración.*. Sea $T$ un árbol de Souslin, $h(T) = \omega_1$ y cada nivel es numerable. Se quitan de $T$ todos los puntos $x \in T$ tales que

$$T_x = \{y \in T : x \leq y\},$$

es numerable (se le quitan las rama finitas). Sea

$$T_1 = \{x \in T : T_x \text{ es no numerable}\}.$$

Si $x \in T_1$ y $\alpha > o(x)$ entonces $|T_y| = \aleph_1$ para algún $y > x$ en el nivel $\alpha$. Así que $T_1$ satisface la condición $v$. Un punto es de ramificación si tiene dos sucesores inmediatos. Para cada $x \in T_1$ hay una colección no numerable de puntos de ramificación $z > x$ en $T_1$ ( de otra forma todos los puntos de ramificación $z > x$ estarían bajo un cierto nivel y entonces existiría una rama no numerable). Así que

$$T_2 = \{\text{puntos de ramificación de } T_1\},$$

es un árbol de Souslin con las propiedades *i, iii, iv* y *v.*

Sea $C \subseteq T_2$ una cadena cualquiera y considérese $a_C$ tal que $\forall z \in C(z < a_C)$ y $\forall x \forall z \in C(x > z \rightarrow a_C < x)$. Así que

$$T_3 = T_2 \cup \{a_C : C \text{es una cadena en} \, T_2\}$$

satisface las propiedades *i, iii, iv, v* y *vi.* Se elige de $T_3$ un subconjunto que sea un árbol y satisfaga la propiedad *ii.*

□

El siguiente teorema, debido a R. B. Jensen, muestra que $L$ es un modelo de la negación de la hipótesis de Souslin.

**Teorema 4.5**
*Si $V = L$, hay un árbol de Souslin.*

*Demostración.*. Se va a definir un árbol normal $T$ de altura $\omega_1$ tal que $T_\alpha \subseteq 2^\alpha$ para $\alpha < \omega_1$. Por inducción sobre $\alpha$.

$T_0$ consiste de la sucesión vacía $\emptyset$.

$T_{\alpha+1}$ consiste de las sucesiones $s \frown \langle i \rangle$ para $s \in T_\alpha$, $i \in 2$.

$\frown$ significa concatenación de sucesiones. Sea $\alpha$ un ordinal límite $< \omega_1$. Sea $\delta_\alpha$ el mínimo $\delta$ tal que

$$\begin{array}{l} T|_\alpha \in L_\delta \\ L_\delta \models \mathrm{ZF}^- \\ L_\delta \models \alpha \text{ es numerable} \end{array}$$

($\mathrm{ZF}^-$ significa ZF menos el axioma del conjunto potencia).

$\delta_\alpha < \omega_1$, así que $L_{\delta_\alpha}$ contiene sólo una colección numerable de cadenas maximales $A_n,\ n \in \omega$, de $T|_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$. Por lo tanto, para cada $s \in T|_\alpha$ hay una $\alpha$-rama $b$ que pasa por $s$ y toca a cada $A_n$. En efecto, sea $\langle \alpha_n | n \in \omega \rangle$ una sucesión estrictamente creciente tal que $\sup_{n\in\omega} \alpha_n = \alpha$. Se define por inducción una sucesión $\langle s_n | n \in \omega \rangle$ tal que $s_0 \geq_T s$ y para cada $n$, $s_n$ se encuentra sobre un punto de $A_n$, $h(s_n) \geq \alpha_n$ y $s_{n+1} \geq_T s_n$. Entonces $b = \{t \mid \exists n(s_n \geq_T t)\}$.

Sea $b_s$ la mínima rama con la propiedad descrita, definida en el buen orden canónico de $L$. $T_\alpha$ consiste de las sucesiones $\bigcup b_s$ para $s \in T|_\alpha$. Queda así definido $T$.

$T$ es obviamente un árbol normal de altura $\omega_1$, así que sólo resta probar que toda anticadena de $T$ es numerable. Sea $A$ una anticadena maximal de $T$. $T$, $A \in L_{\omega_1}$, luego $T$, $A \in L_{\omega_2}$. Sea $M$ un submodelo numerable de $\langle L_{\omega_2}, \in \rangle$ tal que $A \in M$. Puesto que $T$ y $\omega_1$ son definibles en $L_{\omega_2}$ entonces $T, \omega_1 \in M$. Usando en Lema de Condensación (ver [9] p. 38), se obtiene que $\omega_1 \cap M$ es transitivo, así que $\alpha = \omega_1 \cap M < \omega_1$. Sean $\pi$, $\beta$ tales que $\pi : M \cong \langle L_\beta, \in \rangle$. $\pi$, el isomorfismo colapsante, está definido por $\pi(x) = \pi''(x \cap M) = \{\pi(u) : u \in x \cap M\}$ para $x \in M$. Por lo tanto, si $x \in L_{\omega_1} \cap M$ entonces $x \subseteq M$, y así $\pi(x) = x$. Luego $\pi(\omega_1) = \alpha$. Ahora, $T_\gamma$ es definible en $L_{\omega_1}$ en el parámetro $\gamma$, para $\gamma < \omega_1$. Así que $T_\gamma \in M$ para $\gamma < \alpha$. Entonces $\pi(T_\gamma) = T_\gamma$. Por consiguiente

$$\pi(T) = \pi(\bigcup_{\gamma<\omega_1} T_\gamma) = \bigcup_{\gamma<\pi(\omega_1)} \pi(T_\gamma) = T|\alpha,$$

pues $T$ se define como la unión de los $T_\gamma$. Como $A \subset T$, $\pi(A) \subset T|\alpha$, y así

$$\pi(A) = \pi''(A \cap M) = A \cap M = A \cap T|\alpha.$$

Ahora bien, puesto que $\omega_1$ es no numerable en $L_{\omega_2}$ y en $M$ entonces $\alpha = \pi(\omega_1)$ es no numerable en $L_\beta$. Pero $\alpha$ es numerable en $L_{\delta_\alpha}$. Por lo tanto $\beta < \delta_\alpha$. Además, como $A$ es una anticadena maximal de $T$ se tiene que $A \cap T|\alpha$ es una anticadena maximal de $T|\alpha$. Pero debido a $A \cap T|\alpha \in L_\beta \subseteq L_{\delta_\alpha}$, por la construcción de $T_\alpha$, cada punto de $T_\alpha$ se encuentra arriba de cada punto de $A \cap T|\alpha$. Así $A \cap T|\alpha$ es también maximal en $T$. Por lo tanto $A = A \cap T|\alpha$, y por consiguiente $A$ es numerable.

$\square$

**Corolario 4.6**
V = L $\rightarrow \neg$ HS.

**Corolario 4.7**
*Si* ZF *es consistente, también* ZF + HGC + $\neg$HS *lo es.*

Sea $M$ un mtc de ZFC y $T = \langle T, \leq \rangle$ un árbol de Souslin en $M$. Sea

$$P = \langle P, \leq_P \rangle = \langle T, \geq_T \rangle,$$

es decir $x \leq_P y \iff x \geq_T y, \quad \forall x, y \in P = T$. En este caso las nociones de comparable y compatible coinciden. En efecto, sean $x, y \in P$ comparables: $x \leq_P y$ o $y \leq_P x$, entonces $x$, $y$ están en la misma rama, es decir $x \not\perp y$. Si $x$, $y$ son compatibles, $\exists r \in P(r \leq_P x \wedge r \leq_P y)$ entonces $r \geq_T x \wedge r \geq_T y$, es decir $x$, $y$ están en la rama de $r$ o sea $x \leq_P y$ o $y \leq_P x$.

Así que los elementos incompatibles por pares de $P$ forman una anticadena en $T$. Como $T$ es un árbol de Souslin, todas las anticadenas son numerables es decir: $P$ cumple ccc y por consiguiente las extensiones genéricas son cardinal-absolutas. Se dirá que un conjunto es $M$-genérico para T si es $M$-genérico para $P$.

**Teorema 4.8**
*Sea $M$ un mtc de* ZFC *y $T$ un árbol de Souslin en $M$. Sea $b \subseteq T$. $b$ es una rama cofinal de $T$ si, y sólo si, $b$ es $M$-genérico para $T$.*

*Demostración.*. Sea $b$ $M$-genérico en $P$. Por definición, $b$ es una sección final de $P$, compatible por pares tal que para cualquier $D \in M$, sección final de $P$, se tiene $D \cap b \neq \emptyset$. $b$ es una cadena pues sus elementos son compatibles. Como $b$ es sección final de $P$, es sección inicial de $T$; es decir, $b$ es una rama de $T$.

Para cada $\alpha < \omega_1^M$, $D_\alpha = \bigcup_{\beta \geq \alpha} T_\beta$ es una sección inicial densa de $P$ en $M$. Pues, sea $p \in D_\alpha$ con $h(p) = \beta \geq \alpha$. Sea $q \in P$ tal que $q \leq_P p$, entonces $h(q) \geq h(p)$ ya que $q \geq_T p$, así que $q \in D_\alpha$; esto dice que $D_\alpha$ es sección final en $T$ y por lo tanto sección inicial en $P$. Claramente es denso en $P$. Por lo tanto $D_\alpha \cap b \neq \emptyset$ para $\alpha < \omega_1^M$. Esto nos dice que $b$ es una rama de longitud $\omega_1^M$ en $T$ y cofinal por consiguiente.

Se supone ahora que $b$ es una rama cofinal de $T$. Entonces $b$ es una sección final de $\mathbf{P}$, compatible por pares. Es suficiente con probar que si $D$ es una sección inicial densa de $\mathbf{P}$ entonces $D \supseteq D_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1^M$. Sea

$$A = \{x \in D | \neg \exists y \in D(y <_T x)\},$$

$A \in M$ y $A$ es una anticadena maximal en $T$, por consiguiente es contable en $M$. Sea $\alpha = h(A) = \sup\{h(x) | x \in A\}$, se tiene así que $D \supseteq D_\alpha$.

□

Este es un método para matar árboles de Souslin. Pues en la extensión genérica el árbol contiene una $\omega_1$-rama y ni siquiera es de Aronszajn (pero sigue siendo un $\omega_1$-árbol normal).

En ciertas construccciones de forcing todos los árboles de Souslin se preservan. A continuación se prueba que si se destruye CH en una forma usual todos los árboles de Souslin se preservan.

**Teorema 4.9**
*Sea $M$ un mtc de* ZFC *y $T = \langle T, \leq_T \rangle$ es un árbolde Souslin en $M$. Sea $\kappa > (2^\omega)^M$ regular. Sea $\mathbf{P}$ las condiciones de forcing para hacer $2^\omega = \kappa$ en la extensión (i.e. $\mathbf{P}$ es el conjunto de todas las funciones finitas de un subconjunto finito de $\kappa \times \omega$ a 2, ordenado por inclusión inversa). Sea $G$ $M$-genérico para $\mathbf{P}$, entonces $T$ también es de Souslin en $M$*[G].

*Demostración.*. $\mathbf{P}$ satisface ccc en $M$ y por consiguiente los cardinales son absolutos en la extensión. A continuación se muestra que cada subconjunto no numerable de $\mathbf{P}$ contiene un conjunto no numerable cuyos elementos son compatibles por pares; es decir, cualquier subconjunto no numerable de $\mathbf{P}$ contiene una cadena no numerable.

Sea $A \subseteq \mathbf{P}$ tal que $|A| \geq \aleph_1$.

Supongamos que la colección de todas las cadenas en $A$ es numerable. Si todas las cadenas son numerables entonces el complemento de la unión de todas las cadenas en $A$ es una anticadena la cual es no numerable !.

Supongamos ahora que la colección de todas las cadenas es no numerable y que las cadenas son numerables. Sean $B_1$ y $B_2$ cadenas diferentes que no forman una cadena; es decir, hay al menos dos puntos $x \in B_1$ y $y \in B_2$ tales que $x \perp y$, pues en caso contrario $B_1$ y $B_2$ formarían una sola cadena. Entonces para cada cadena se puede elegir un punto que es incompatible con algun punto elegido de otra cadena diferente. Se forma de esta manera una anticadena no numerable !.

Sin pérdida de generalidad supóngase que $T$ es un árbol de Souslin normal en $M$. Sea $A \in M[G]$ una anticadena en $T$; por demostrar que $A$ es numerable en $M[G]$.

Sea $\check{A}$ un nombre para $A$ y $p^* \in G$ tal que
$p^* \Vdash$ "$\check{A}$ *es una anticadena de* $\check{T}$". Sea

$$B = \{t \in T : \exists p \leq p^*(p \Vdash \check{t} \in \check{A})\}$$

Entonces $B \in M$ y $A \subseteq B$; así que es suficiente con probar que $B$ es numerable.

Trabajaremos en $M$. Para cada $t \in B$ sea $p_t \leq p^*$ tal que $p_t \Vdash \check{t} \in \check{A}$. Si $t \neq t'$ y $p_t \not\perp p_{t'}$ entonces $t \perp t'$, (pues si $p \leq p_t, p_{t'}$ entonces $p \Vdash$ "$\check{t} \neq \check{t}'$, $\check{t}, \check{t}' \in \check{A}$ *y* $\check{A}$ *es una anticadena*", es decir $p \Vdash \check{t} \perp \check{t}'$.)

Supóngase que $B$ es no numerable. Sea $C = \{p_t : t \in B\}$. Si $C$ es numerable entonces para algún $p_t \in C$ el conjunto $\{t' : p_t \Vdash \check{t}' \in \check{A}\}$ es una anticadena no numerable de $T$, lo cual es imposible. Así que $C$ contiene un subconjunto no numerable $D$ de condiciones compatibles por pares; entonces $\{t : p_t \in D\}$ es una anticadena no numerable de $T$, lo cual es una contradicción.

□

**Corolario 4.10**
$Con\{\mathrm{ZF}\} \Rightarrow Con\{\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{HC} + \neg\mathrm{HS}\}$

*Demostración..* $\bigcup G$ es una función de $\kappa \times \omega$ a 2 y da lugar a $\kappa > \omega_1^{M[G]}$ diferentes subconjuntos de $\omega$. Por lo tanto $M[G] \models$ ZFC+¬HC+¬HS.

□

Para probar la consistencia relativa de la Hipóteis de Souslin se hará uso del Axioma de Martin. Bajo el supuesto de que AM es consistente, se presentan a continuación dos formas de probar la consistencia de HS.

**Definición 4.11** *Axioma de Martin.*
MA($\kappa$) *es la afirmación:*

*Sean $P$ un orden parcial con ccc, $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de $P$, $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, densos. Entonces hay un filtro $G$ en $P$ tal que*
$\forall D \in \mathcal{D}(G \cap D) \neq \emptyset)$.

MA *es la afirmación:* $\forall \kappa < 2^\omega(\mathrm{MA}(\kappa))$.

Una versión topológica de MA es la siguiente:

Ningún espacio de Hausdorff compacto con ccc es la unión de menos de $2^\omega$ conjuntos cerrados densos en ninguna parte.

**Lema 4.12**
*Se supone* MA($\kappa$). *Sea $X$ que tiene ccc y $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $X$, entonces hay un $A \subset \omega_1$ no numerable tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.*

*Demostración..* Sea $V_\alpha = \bigcup_{\gamma > \alpha} U_\gamma$. Si $\alpha < \beta,\ V_\beta \subset V_\alpha$.

Probemos la siguiente afirmación:

$$\exists \alpha \forall \beta (\beta > \alpha \to (\overline{V}_\beta = \overline{V}_\alpha)) \qquad (*)$$

Si no fuera así se podría encontrar una sucesión creciente de ordinales $a_\xi$, con $\xi < \omega_1$, tales que para cada $\xi$, $\overline{V}_{a_\xi+1} \neq \overline{V}_{a_\xi}$, o sea $V_{a_\xi} \setminus \overline{V}_{a_\xi+1} \neq \emptyset$; se forma así una colección no numerable de conjuntos abiertos, ajenos por pares, lo cual contradice que $X$ tiene ccc.

Sea $\alpha$ fijo que cumple (*) y sea

$$\mathcal{P} = \{p \subset V_\alpha : p \,\text{es abierto no vacío}\}.$$

$\mathcal{P}$ satisface ccc pues $X$ lo satisface. Si $G$ es un filtro en $\mathcal{P}$ entonces $G$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea

$$A = \{\gamma < \omega_1 : \exists p \in G(p \subset U_\gamma)\},$$

entonces $\{U_\gamma : \gamma \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Si $G$ es genérico $A$ será no acotado en $\omega_1$, y por consiguiente no numerable. Más exactamente, para cada $\beta$ sea

$$D_\beta = \{p \in \mathcal{P} : \exists \gamma > \beta (p \subset U_\gamma)\}.$$

Por (*), $\overline{V}_\alpha \subset \overline{V}_\beta$ así que si $p \in \mathcal{P}$ entonces $p \cap V_\beta \neq \emptyset$, luego $p \cap U_\gamma \neq 0$ para algún $\gamma > \beta$; por lo tanto $p \cap U_\gamma$ es una extensión de $p$ en $D_\beta$. Así que $D_\beta$ es denso en $\mathcal{P}$. Ahora, si $G \cap D_\beta \neq \emptyset$, $A$ contendrá un $\gamma > \beta$; por consiguiente si $G \cap D_\beta \neq \emptyset \quad \forall \beta$, entonces $A$ es no acotado en $\omega_1$.

□

**Lema 4.13**

*Suponer* MA($\omega_1$)*; entonces el producto de espacios ccc es ccc.*

*Demostración.*. Sean $X$, $Y$ espacios con ccc y supóngase que $X \times Y$ no es ccc. Sea $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares de $X \times Y$. Para cada $\alpha$ se elige un rectángulo $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Usando el lema 4.12, sea $A \subset \omega_1$ no numerable tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Si $\alpha$, $\beta \in A$ y $\alpha \neq \beta$ entonces $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ pero $(U_\alpha \times V_\alpha) \times (U_\beta \times V_\beta) = \emptyset$ así que $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. entonces $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ contradice el hecho de que $Y$ tiene ccc. Por inducción el resultado es cierto para cualquier $n$.

□

**Lema 4.14**

*Si $X$ es una línea de Souslin, $X^2$ no es ccc.*

*Demostración.*. Si $a$, $b \in X$ y $a < b$, sea $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. si $a$, $b$ fueran adyacentes entonces $(a,\, b)$ sería vacío.

Sea $W$ el conjunto de puntos aislados de $X$. En la topología del orden un punto aislado es abierto. Puesto que $X$ tiene ccc entonces $|W| \leq \omega$, debido a que $W$ es una anticadena. Sean $a_\xi$, $b_\xi$, $c_\xi$, $\xi < \alpha$. Como $X$ es separable $X \setminus \overline{(W \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\})}$ es un abierto no vacío y por consiguiente contiene un intervalo abierto no vacío $(a_\alpha,\, c_\alpha)$. Puesto que $(a_\alpha,\, c_\alpha)$ no contiene puntos aislados, es infinito, así que se puede elegir $b_\alpha \in (a_\alpha,\, c_\alpha)$ tal que $(a_\alpha,\, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha,\, c_\alpha) \neq \emptyset$.

Sean $a_\alpha$, $b_\alpha$, $c_\alpha$ tales que

(1) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.

(2) $(a_\alpha,\, b_\alpha) \neq \emptyset, \quad (b_\alpha,\, c_\alpha) \neq \emptyset$.

(3) $(a_\alpha,\, c_\alpha) \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

Sea $U_\alpha = (a_\alpha,\, b_\alpha) \times (b_\alpha,\, c_\alpha)$. Por (2) $U_\alpha \neq \emptyset$. Si $\xi < \alpha$ entonces $U_\xi \cap U_\alpha = \emptyset$; pues por (3) $b_\xi \leq a_\alpha$ y así $(a_\xi,\, b_\xi) \cap (a_\alpha,\, b_\alpha) = \emptyset$; o $b_\xi \geq c_\alpha$ y así $(b_\xi,\, c_\xi) \cap (b_\alpha,\, c_\alpha) = \emptyset$. Así que $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ refuta ccc en $X^2$.
□

**Teorema 4.15**
MA($\omega_1$) $\rightarrow$ HS

*Demostración.*. Se obtiene inmediatamente de los lemas 4.13 y 4.14.
□

**Definición 4.16**
*Un $\kappa$-árbol* bien podado *es un $\kappa$-árbol $T$ tal que*
$|T_0| = 1$ *y*

$$\forall x \in T \forall \alpha (h(x) < \alpha < \kappa \rightarrow \exists y \in T_\alpha (x < y)).$$

Recuérdese que

$$h(T) = \sup\{h(x) + 1 : x \in T\} = min\{\alpha : T_\alpha = \emptyset\}.$$

**Lema 4.17**
*Si $\kappa$ es regular y $T$ es un $\kappa$-árbol entonces $T$ tiene un sub-$\kappa$-árbol bien podado.*

*Demostración.*. Sea

$$T' = \{x \in T : |\{z \in T : z > x\}| = \kappa\}.$$

Como $T$ tiene altura $\kappa$, si $y > x$ con $x \in T'$ entonces, debido a $|\{z \in T : z > y\}| = \kappa$, se tiene $y \in T'$. Es decir, $T'$ es un sub-árbol de $T$. Se va a probar que $T'$ es bien podado.

Sean $x \in T'$ y $\alpha$ un ordinal, tales que $h(x, T') < \alpha < \kappa$. Sea $Y = \{y \in T_\alpha : x < y\}$. Por definición de $T'$ y del hecho de que

$|T_\beta| < \kappa$, para cada $\beta$, se tiene $\{z \in T : z > x \vee h(z,T) > \alpha\}$ tiene cardinalidad $\kappa$ y cada elemento de este conjunto está por encima de algún elemento de $Y$. Puesto que $|Y| < \kappa$, hay un $y \in T'$ tal que $|z \in T : z > y\}| = \kappa$ y $y \in T'$. Un argumento similar muestra que $T_0(T') \neq \emptyset$ y así$T' \neq \emptyset$. Ahora, para cada $x \in T_0(T')$ $\{y \in T' : y \geq x\}$ es un sub-árbol de $T$ bien podado.

□

**Teorema 4.18**
MA($\omega_1$) *implica que no hay un* $\omega_1$*-árbol de Souslin.*

*Demostración.*. Sea $(T, \leq)$ un $\omega_1$-árbol de Souslin y sea $P = (T, \geq)$ Puesto que $T$ no tiene anticadenas no numerables, $P$ tiene ccc; todas las anticadenas en $P$ son numerables. Sea $D_\alpha = \{x \in T : h(x,T) > \alpha\}$, el cual es denso en $P$. En efecto, sea $p \in P$; por el lema 4.17 para $p$ y $\alpha + 1$, $\exists y \in T_{\alpha+1}(p <_T y)$, de donde $h(y) = \alpha + 1 > \alpha$ y $y \in D_\alpha$; luego $p <_T y$ o sea $y <_P p$.

MA($\omega_1$) implica que hay un filtro $G$ en $P$ que intersecta a cada $D_\alpha$. Entonces $G$ es una cadena no numerable en $T$ lo cual contradice el hecho de que $T$ es de Souslin. $G$ es una cadena en $T$ pues $\forall x, y \in G \exists r \in P(r <_P x \wedge r <_P y)$ luego $r >_T x$ y $r >_T y$ y entonces $x$, $y$ están en la misma rama que $r$ ( las ramas de $T$ no se juntan por arriba) y por lo tanto $x <_T y$ o $y <_T x$. Como $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ entonces $h(G) = \omega_1$, es decir $G$ es no numerable.

□

**Corolario 4.19**
MA($\omega_1$) $\rightarrow$ HS.

**Corolario 4.20**
MA+$\neg$ HC $\rightarrow$ HS.

# Bibliografía


[1] Amor Montaño, J. A.
*La Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC) y su relación con el Axioma de Elección (AE)*
Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol XXI, No. 62 (agosto 1989): 55-66.

[2] Amor Montaño, J. A.
*Forcing y Pruebas de Independencia*
Aportaciones Matemáticas. Comunicaciones 9. XXIII Congreso-SMM (1990).

[3] Bell, J.L.
*Boolean-valued models and independence proofs in set theory*
Clarendon Press, Oxford. 1977.

[4] Bell, J.L. Machover, M.
*A course in Mathematical Logic*
1977

[5] Burgess, J. P.
*Forcing* en Handbook of Mathematical Logic
J. Barwise (1977).

[6] Cohen, P.J.
*Set Theory and the continuum hypotesis*
Benjamin, New York. 1966.

[7] Cortez Rodríguez, M. A.
*Algunas notas sobre la indecibilidad de la Hipótesis del Continuo*

Tesis de Licenciatura en Filosofía. U. M. de San Nicolas de Hgo. (1988)

[8] Devlin, K. J.
*Fundamentals of Contemporary Set Theory*
Springer-Verlag, NY (1979).

[9] Devlin, K. J.
*Aspects of Constructibility*
Lecture Notes in Mathematics 354, Springer-Verlag. 1973.

[10] Drake, F.R.
*Set Theory: an introduction to large cardinals*
North-Holland, Amsterdam. 1974.

[11] Frendrick, S., Milne, P.
*A guide to Forcing*
Notas manuscritas (1990).

[12] Jech, T.
*Lectures in Set Theory with particular emphasis on the method of Forcing*
Springer-Verlag (1971).

[13] Jech, T.
*The Axiom of Choice*
North-Holland, Amsterdam (1973).

[14] Jech, T.
*Set Theory*
Academic Press, NY (1978).

[15] Kunen, K.
*Set Theory, an introduction to independence proofs*
North Holland, Amsterdam (1980).

[16] Rosser, J.B.
*Simplified independence proofs: Boolean-valued models of set theory*
Academic Press, New York. 1969.

[17] Shoenfield, J.R.
*Unramified forcing* Proceedings of symposia in pure mathematics, Vol XIII, Part I
D.S. Scott

[18] Takeuti, G.
*Proof Theory*
North Holland, NY (1975).

[19] Wilmers, G. Suzuky, Y.
*Nonstandard Models of Set Theory*