Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMPA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

Cocientes de Prerradicales Sobre Anillos Locales Uniseriales

Tesis que presenta

Edgar García Meneses

Matrícula: 2183802380

hedgarciam@gmail.com

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Director

Dr. Rogelio Fernández Alonso González

Jurado

Presidente: Dr. José Ríos Montes

Secretaria: Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

Vocal: Dr. Rogelio Fernández Alonso González

Iztapalapa, Ciudad de México, 18 de marzo de 2021

Cocientes de prerradicales sobre anillos locales uniseriales

Edgar García Meneses

Universidad Autónoma Metropolitana

Esperé meses preparándome para el día
en que te enfrentaría en tu forma perfecta.

Gokú

Agradecimientos

Agradezco a la Doctora Lizbeth Sandoval y al Doctor José Ríos por sus valiosos comentarios en la revisión de esta tesis.

Al Doctor Rogelio Fernández Alonso, por su guía, por introducirme al estudio de los prerradicales en aquel curso de teoría de módulos y por todo lo que de él he aprendido.

Debo agradecer de forma particular a la Doctora Silvia Gavito, quien me inspiró profundamente.

A mis compañeros de posgrado, Edgar, Magdiel, Chino y Roberto y a todos los involucrados en la realización de este trabajo.

A la maestra Iseo por su apoyo y paciencia en la labores administrativas.

A mi madre y a toda mi familia.

Al Conacyt, por el sustento económico.

A la UAM.

Introducción

Describir por completo la retícula de prerradicales ${}_R\mathsf{P}$ para anillos particulares es una tarea en general difícil. En el extremo se encuentran los campos, ya que únicamente cuentan con dos prerradicales. Otros casos, entre ellos los anillos semisimples artinianos, han sido tratados en [5] y [24]. Un caso importante se estudia en [13] por Fernández Alonso y Gavito Ticozzi, donde para cada anillo local uniserial R con cualquier longitud de composición $n \geq 1$, se establece un isomorfismo entre ${}_R\mathsf{P}$ y la retícula de sucesiones binarias B_n (con un orden adecuado). A su vez, B_n resulta isomorfo a dos retículas diferentes, lo que completa el panorama. En este artículo, además, se da una caracterización completa del producto y coproducto de prerradicales, lo que describe también a los monoides $\langle {}_R\mathsf{P}, \circ \rangle$ y $\langle {}_R\mathsf{P}, : \rangle$.

En el año 2011, Teply y van den Berg ([32]) retoman una idea de Golan ([17]) y definen el concepto de cociente de prerradicales. Entre otras cosas, ellos prueban que la colección de todas las clases de equivalencia (bajo cierta relación) de cocientes de prerradicales es un monoide, gracias a la introducción de una operación terciaria en ${}_R\mathsf{P}$, que al restringir a prerradicales hereditarios también forma un monoide. Por otro lado, caracterizan anillos que satisfacen cierta condición sobre cocientes de prerradicales hereditarios, que incluye el caso de los anillos locales uniseriales.

En este trabajo de tesis se describe por completo el monoide de cocientes de prerradicales asociado a un anillo local uniserial con cualquier longitud de composición $n \geq 1$ mediante un isomorfismo con ciertas retículas de sucesiones con entradas en $\{-1, 0, 1\}$, a las que se les llamará W_n, en un paralelismo natural al trabajo de Fernandez Alonso y Gavito Ticozzi. De hecho, se generalizan varios resultados ahí establecidos.

En el Capítulo 1 se presentan los preliminares de anillos, módulos y prerradicales, necesarios en el desarrollo general de la tesis. El Capítulo 2 es un punto intermedio entre [15] y [13], mientras que los capítulos 3 y 4 son tomados de [32], escritos a detalle y con algunos resultados añadidos. En el Capítulo 5 se encuentra la parte central de la tesis. Dos apéndices se añaden, el primero contiene información de utilidad para un ejemplo del Capítulo 3 y el segundo aborda los números de Motzkin, importantes para los principales resultados del Capítulo 5.

Índice

Índice de figuras

Índice de Tablas

Capítulo 1

Preliminares

Se presenta la teoría necesaria para el desarrollo principal del texto. La mayoría de los resultados se dejan sin demostrar. Definiciones y conceptos básicos se suponen conocidos.

1.1. Generalidades

1.1.1. Monoides

Un semigrupo es una estructura $\langle M, \circ \rangle$ donde M es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación binaria asociativa en M. Un monoide es un semigrupo con elemento identidad.

Un semigrupo puede tener a lo más un elemento identidad. Subsemigrupos y morfismos entre semigrupos se definen de manera habitual. Dado $f : G \to S$ un morfismo de semigrupos, se define

$$Kerf = \{(x, y) \in G \times G \mid f(x) = f(y)\},$$

el núcleo de f.

1.1.2. Retículas

Las nociones de orden parcial, morfismo (anti-morfismo) de orden, máximo, mínimo, supremo e ínfimo se definen como es habitual. Dado un orden parcial $\langle P, \leq \rangle$ con elemento menor 0, un elemento $a \in P$ se llama átomo si $a \neq 0$ y para todo $p \in P$, $0 < p \leq a$ implica $p = a$. P es atómico si para cada $p \in P$ existe un átomo $a \leq p$. Dualmente, si 1 es el mayor de $\langle P, \leq \rangle$, un coátomo es un elemento $b \neq 1$ tal que para todo $p \in P$, $0 < b \leq p$ implica $p = b$. Así, P es coatómico si para cada $p \in P$ existe un coátomo $p \leq b$.

Un orden parcial es plano si en su diagrama de Hasse ningún par de aristas se cruzan en otro punto que no sean sus vértices.

Definición 1.1.1. *Un orden parcial* $\langle L, \leq \rangle$ *es una retícula si para cada par de elementos* $a, b \in L$ *existe supremo e ínfimo, denotados* $a \vee b$ *y* $a \wedge b$ *respectivamente. Una retícula se dice completa si existe supremo e ínfimo para cualquier subconjunto. Si* $P \subseteq L$ *es cerrada bajo supremos e ínfimos, entonces es una subretícula.*

Definición 1.1.2. *Sea* $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ *una retícula.*

1. L *es distributiva si* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *para cada* $a, b, c \in L$.
2. L *es modular si para cada* $a, b, c \in L$ *con* $b \leq a$ *se tiene que* $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.
3. L *es autodual si existe un anti-isomorfismo de orden* $f : L \to L$.

Si $a \leq b$ en un orden parcial P, se dice que b cubre a a siempre que $a \leq c \leq b$ implica $a = c$ o $c = d$ para todo $c \in P$.

Proposición 1.1.3 ([19, Ejercicio II.1.45])**.** *Una retícula distributiva finita es plana si y sólo si no existe ningún elemento cubierto por otros tres.* ■

Corolario 1.1.4. *Ninguna retícula booleana es plana.* ■

Diferentes retículas se definirán a lo largo del texto, para evitar demasiada notación, el orden en ellas siempre estará marcado por $\leq$ y el elemento mayor y menor por $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ respectivamente, a menos que se especifique lo contrario. En el caso que se defina un orden parcial sobre una clase (no necesariamente un conjunto) para la cual existan supremos e ínfimos para cada par de elementos, entonces se le dirá una (gran) retícula; si existen supremos e ínfimos arbitrarios será una (gran) retícula completa.

Un morfismo entre retículas es un morfismo de orden que preserva supremos e ínfimos.

Proposición 1.1.5. *Si* L *y* L' *son retículas y* $f : L \to L'$ *es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de orden, entonces* f *es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de retículas.* ■

1.1.3. Módulos

Todo anillo a considerar en cualquier parte del texto será asociativo con elemento unidad. La categoría de R-módulos izquierdos se escribe R-Mod y la de R-módulos derechos por Mod-R. Cuando el contexto lo permita, se escribirá simplemente "módulo" en vez de R-módulo izquierdo. Los símbolos del producto y coproducto (suma directa externa) usuales en R-Mod se denotan por $\prod$ y $\bigoplus$ respectivamente.

El conjunto de morfismos entre dos R-módulos N y M se escribe $Hom_R(M, N)$ o simplemente $Hom(M, N)$ cuando el anillo se sobreentienda. Para $M \in R$-Mod, $End_R(M) = End(M) := Hom_R(M, M)$. Si $f \in$

$Hom_R(M,N)$, $Kerf \leq M$ es el núcleo de f e $Imf \leq N$ su imagen. Si $x \in M$ se define el morfismo $d_x : R \to M$ por $d_x(r) = rx$ para todo r en R. Se cumple la igualdad $Hom(R,M) = \{d_x \mid x \in M\}$. Las definiciones de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo se consideran conocidas, así como las nociones de módulo artiniano, noetheriano, simple y semisimple. Una sucesión

$$N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L$$

se llama exacta en M siempre que $Imf = Kerg$. En general, una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

se llama exacta corta si es exacta en M, f es monomorfismo y g es epimorfismo.

Un funtor $\mathbf{F} : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ se dice exacto si dada una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

se cumple que

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}N \longrightarrow \mathbf{F}M \longrightarrow \mathbf{F}L \longrightarrow 0$$

es exacta.

Para un módulo derecho M y un módulo izquierdo N, el producto tensorial $M \otimes N$ se define de la forma habitual.

Proposición 1.1.6. *(a) Si $M \in R\text{-}Mod$, $Hom(M, \bullet)$ es un funtor exacto izquierdo.*

(b) Si $M \in Mod\text{-}R$, $M \otimes \bullet$ es un funtor exacto derecho.

■

Si $K \leq M \in R\text{-}Mod$, se dice que K es esencial en M ($K \trianglelefteq M$) en caso que

$$\forall L \leq M \quad K \cap L = 0 \Rightarrow L = 0.$$

En caso que

$$\forall L \leq M \quad K + L = M \Rightarrow L = M,$$

se dice que K es superfluo en M ($K \ll M$). Un monomorfismo $f : N \to M$ es esencial si $Im\, f \trianglelefteq M$, por tanto, un submódulo K de M esencial si y sólo si la inclusión natural $\iota_K : K \to M$ es esencial. Un epimorfismo $g : M \to L$ es superfluo si $Kerg \ll M$, por tanto, $K \leq M$ es superfluo en M si y sólo si el epimorfismo $\pi_L : M \to M/L$ es superfluo.

Sea N cualquier submódulo de M. Por el Lema de Zorn existe un $K \leq M$ máximo tal que $N \cap K \trianglelefteq M$. Se dice entonces que K es un M-complemento de N.

Proposición 1.1.7. *Si K es un M-complemento de N entonces*

(a) $N \oplus K \trianglelefteq M$;

(b) $(N \oplus K)/K \trianglelefteq M/K$.

■

Un módulo se llama uniserial si su retícula de submódulos es una cadena. Una serie de composición de un módulo no cero M es una cadena de $n+1$ submódulos

$$M = M_0 > M_1 > ... > M_n = 0$$

tales que M_{i-1}/M_i es simple para $i = 1, 2..., n$. Claramente, un módulo artiniano uniserial tiene una única serie de composición.

Proposición 1.1.8. *Un módulo M tiene una serie de composición si y sólo si es artiniano y noetheriano.* ■

Dos series de composición $M = M_0 > M_1 > M_2 > ... > M_n = 0$ y $M = N_0 > N_1 > N_2 > ... > N_m = 0$ son equivalentes si $n = m$ y existe una permutación σ del conjunto $\{1, ...n\}$ tal que

$$M_i/M_{i+1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)+1} \qquad i = 1, ...n.$$

Si M tiene una serie de composición de longitud n, el teorema de Jordan-Hölder nos dice que cualquier otra serie de composición tiene la misma longitud, por tanto, se define $\mathcal{L}(M) := n$, la longitud de M. En caso que M no posea longitud finita $\mathcal{L}(M) := \infty$.

Teorema 1.1.9 (Jordan-Hölder)**.** *Si un módulo M tiene una serie de composición, entonces cualesquiera dos series de composición de M son equivalentes.* ■

Un módulo es inescindible si es no cero y no tiene sumandos directos no triviales. Una descomposición

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

de un módulo M es inescindible si cada M_α es inescindible. Los módulos semisimples tienen siempre descomposiciones inescindibles.

Dos descomposiciones

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigoplus_{\beta \in B} M_\alpha.$$

de un módulo M se dicen equivalentes en caso que exista una biyección $\sigma : A \to B$ tal que $M_\alpha \cong N_{\sigma(\alpha)}$ para cada $\alpha \in A$.

Teorema 1.1.10 (Krull-Schmidt)**.** *Sea M un módulo no cero de longitud finita. Entonces M tiene una descomposición inescindible finita que es única salvo equivalencia.* ■

Proposición 1.1.11. *Sea $M \in R\text{-}Mod$.*

(a) *$R \otimes M \cong M$ como grupos abelianos;*

(b) *$R/I \otimes M \cong M/IM$ si I es un ideal derecho de R e IM es el subgrupo de M generado por los elementos rx con $r \in I, x \in M$.*

■

Definición 1.1.12. 1. *$M \in R\text{-}Mod$ es proyectivo si $Hom(M, \bullet)$ es un funtor exacto.*

2. *$M \in R\text{-}Mod$ es inyectivo si $Hom(\bullet, M)$ es un funtor exacto.*

3. *$M \in Mod\text{-}R$ es plano si $M \otimes \bullet$ es un funtor exacto.*

Teorema 1.1.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.*

(a) *R es noetheriano izquierdo;*

(b) *Toda suma directa de módulos inyectivos es inyectiva.*

■

Si $M \in R\text{-}Mod$ siempre existe un módulo inyectivo E para el cual M se sumerge en E. Una cápsula inyectiva de M es un módulo inyectivo E junto con un monomorfismo esencial $\iota : M \to E$.

Teorema 1.1.14. *Todo módulo M tiene una cápsula inyectiva que es única salvo isomorfismo y se escribe EM.* ■

Proposición 1.1.15 ([1, Proposición 18.12])**.** *Si $K \trianglelefteq M$ entonces $EK = EM$.* ■

Proposición 1.1.16 ([1, Proposición 17.10])**.** *Sea R un anillo con radical de Jacobson $J(R) = J$. Si P es un módulo proyectivo, entonces*

$$rad(P) = JP.$$

■

Proposición 1.1.17 ([1, Proposición 17.14]). *Todo módulo proyectivo no cero, contiene un submódulo máximo.* ■

Para cualquier módulo M existe un módulo proyectivo P y un epimorfismo $\pi : P \twoheadrightarrow M$. Si dicho epimorfismo es superfluo, se dice que P es una cubierta proyectiva de M.

Proposición 1.1.18 ([1, Proposición 17.19]). *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo proyectivo P:*

(a) *P es la cubierta proyectiva de un módulo simple;*

(b) *JP es un submódulo superfluo máximo de P.*

■

Corolario 1.1.19. *Si P es cubierta proyectiva de un módulo simple, entonces tiene un único módulo máximo.*

Demostración. Todo submódulo superfluo está contenido en cada submódulo máximo. ■

1.2. Prerradicales y Teorías de Torsión

Sea R un anillo asociativo con uno. Un prerradical sobre R es un funtor $\sigma : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$ tal que:

i) $\sigma(M) \leq M$ para cada módulo M;

ii) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sigma(M) & \xrightarrow{\sigma(f)} & \sigma(N) \end{array}$$

${}_R\mathsf{P}$ denota la colección de todos los prerradicales en R-Mod. El funtor identidad $\mathbf{1}$ y el funtor cero $\mathbf{0}$ son prerradicales.

Ejemplo 1.2.1. Sea K un campo, entonces ${}_K\mathsf{P} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Lema 1.2.2. (a) *Todo prerradical preserva isomorfismos;*

(b) *Para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma(R)$ es un ideal (bilateral).*

■

Si $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$ son tales que $\tau(M) \leq \sigma(M)$ para cualquier $M \in R\text{-}Mod$, decimos que τ es menor que σ y lo escribimos por $\tau \leq \sigma$. Por supuesto, $\langle {}_R\mathsf{P}, \leq \rangle$ es un (gran) orden parcial.

Definición 1.2.3. *Sean $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$, $M \in R\text{-}Mod$ y Λ cualquier clase (no necesariamente un conjunto) de índices y $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathbf{PR}$.*

1. $(\sigma \wedge \tau)(M) \coloneqq \sigma(M) \cap \tau(M)$;
2. $(\sigma \vee \tau)(M) \coloneqq \sigma(M) \cup \tau(M)$;
3. $(\sigma \circ \tau)(M) = \sigma\tau(M) \coloneqq \sigma(\tau(M))$;
4. $(\tau : \sigma)(M)$ *es tal que* $(\tau : \sigma)(M)/\tau(M) = \sigma(M/\tau(M))$;
5. $\left(\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha\right)(M) \coloneqq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha(M)$;
6. $\left(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha\right)(M) \coloneqq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha(M)$.

Lo anterior define prerradicales en $R\text{-}Mod$. Como consecuencia $\langle {}_R\mathsf{P}, \vee, \wedge, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ es una retícula completa.

Proposición 1.2.4. *Dada una clase Λ y una familia $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de prerradicales, se cumple para todo prerradical $\tau \in {}_R\mathsf{P}$:*

1. $\left(\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha\right)\tau = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} (\sigma_\alpha \tau)$;
2. $\left(\bigvee_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha\right)\tau = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} (\sigma_\alpha \tau)$;
3. $\left(\tau : \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha\right) = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} (\tau : \sigma_\alpha)$;
4. $\left(\tau : \bigvee_{\alpha \in \Lambda} \sigma_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} (\tau : \sigma_\alpha)$.

■

Definición 1.2.5. *Un prerradical σ se dice:*

1. *Idempotente, si $\sigma \circ \sigma = \sigma$;*
2. *Radical, si $(\sigma : \sigma) = \sigma$ (es decir $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ para cada módulo M);*
3. *Hereditario (o exacto izquierdo), si dados $N \leq M$, $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$ para cada módulo M;*

4. *t-radical, si* $\sigma(M) = \sigma(R)M$ *para cada módulo* M*;*

5. *Primo, si* $\sigma \neq \mathbf{1}$ *y*

$$\tau\eta \leq \sigma \Rightarrow \tau \leq \sigma \text{ o } \eta \leq \sigma;$$

6. *Coprimo, si* $\sigma \neq \mathbf{0}$ *y*

$$\sigma \leq (\tau : \eta) \Rightarrow \sigma \leq \tau \text{ o } \sigma \leq \eta;$$

7. *Irreducible, si*

$$\tau \wedge \eta = \sigma \Rightarrow \tau = \sigma \text{ o } \eta = \sigma;$$

8. *Coirreducible, si*

$$\tau \vee \eta = \sigma \Rightarrow \tau = \sigma \text{ o } \eta = \sigma.$$

Notación:

${}_R\mathsf{P}$	La colección de todos los prerradicales en R-Mod.
${}_R\mathsf{Id}$	Prerradicales idempotentes.
${}_R\mathsf{HP}$	Preradicales hereditarios.
${}_R\mathsf{Rad}$	Radicales.
${}_R\mathsf{tRad}$	t-radicales.
${}_R\mathsf{HR}$	Radicales hereditarios.

Una clase $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod es llamada clase de pretorsión si es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas y es pre-libre de torsión si es cerrada bajo monomorfismos y productos directos. Asociadas a cada prerradical σ en R-Mod se tienen dos importantes clases:

$$\mathbb{T}_\sigma \coloneqq \{M \in R\text{-}Mod \mid \sigma(M) = M\};$$
$$\mathbb{F}_\sigma \coloneqq \{M \in R\text{-}Mod \mid \sigma(M) = 0\},$$

de pretorsión y pre-libre de torsión respectivamente. Si $\mathcal{C}$ es cualquier clase de módulos, el funtor que asocia a cada $M \in R$-Mod el submódulo

$$tr_{\mathcal{C}}(M) = \sum_{N \in \mathcal{C}} \{f[N] \mid f \in Hom(N, M)\}$$

es un prerradical idempotente. A su vez,

$$rej_{\mathcal{C}}(M) = \bigcap_{N \in \mathcal{C}} \{kerf \mid f \in Hom(M, N)\}$$

es un radical. Existe una correspondencia biunívoca entre prerradicales idempotentes (radicales) y clases de pretorsión (pre-libres de torsión). En particular, si $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\hat{\sigma} = tr_{\mathbb{T}_\sigma}$ es el prerradical idempotente asociado a $\mathbb{T}_\sigma$, el mayor idempotente por debajo de σ. Dualmente, $\bar{\sigma} = rej_{\mathbb{F}_\sigma}$ es el radical asociado a $\mathbb{F}_\sigma$, el menor radical por encima de σ. Es posible construir $\hat{\sigma}$ y $\bar{\sigma}$ por recursión:

$$\begin{aligned} \sigma^1 &:= \sigma; \\ \sigma^{\alpha+1} &:= \sigma\sigma^{\alpha}; \\ \sigma^{\beta} &:= \bigwedge_{\alpha<\beta} \sigma^{\alpha} \text{ si } \beta \text{ es límite}; \\ \hat{\sigma} &:= \bigwedge_{\alpha \in Or} \sigma^{\alpha}. \end{aligned} \tag{✳}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &:= \sigma; \\ \sigma^{(\alpha+1)} &:= (\sigma^{(\alpha)} : \sigma); \\ \sigma^{(\beta)} &:= \bigvee_{\alpha<\beta} \sigma^{(\alpha)} \text{ si } \beta \text{ es límite}; \\ \overline{\sigma} &:= \bigvee_{\alpha \in Or} \sigma^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{✪}$$

Una teoría de torsión sobre R-Mod es una pareja $\langle \mathcal{T}, \mathcal{F} \rangle$ de clases de módulos tales que

1. $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$;
2. $\mathcal{T}$ es cerrada bajo epimorfismos;
3. $\mathcal{F}$ es cerrrada bajo monomorfismos;
4. $\forall M \in R$-Mod, existe una sucesión exacta

$$0 \to N \to M \to L \to 0,$$

con $N \in \mathcal{T}$ y $L \in \mathcal{F}$.

Si $\langle \mathcal{T}, \mathcal{F} \rangle$ es una teoría de torsión resulta que $\mathcal{T}$ es de pretorsión y $\mathcal{F}$ es pre-libre de torsión, ambas cerrada bajo extensiones. $\mathcal{T}$ se llama clase de torsión y $\mathcal{F}$, libre de torsión. Existe una correspondencia biunívoca entre teorías de torsión y radicales idempotentes.

Proposición 1.2.6. *Para $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$ son equivalentes:*

(a) *σ es exacto izquierdo;*

(b) *Para todo $N \leq M \in R\text{-}Mod$, $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$;*

(c) *σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrado bajo monomorfismos.*

■

Proposición 1.2.7. *Para $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$ son equivalentes:*

(a) *σ preserva epimorfismos;*

(b) *Para todo $M \in R\text{-}mod$, $\sigma(M) = \sigma(R)M$;*

(c) *σ es radical y $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrado bajo epimorfismos.*

■

Observación 1.2.8. Todo prerradical hereditario es idempotente y todo t-radical es radical.

Lema 1.2.9. (a) *La colección de prerradicales hereditarios ${}_R\mathsf{HP}$ es cerrada bajo $\circ$, $\wedge$ y $:$, donde $\circ$ coincide con $\wedge$.*

(b) *La colección de t-radicales es cerrada bajo $:$, $\vee$ y $\circ$, donde $:$ coincide con $\vee$.*

Demostración. (a) Sean $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{HP}$ y $N \leq M \in R\text{-}Mod$. Notar primero que $(\sigma \circ \tau)(M) = \sigma(\tau(M)) = \sigma(M) \cap \tau(M)$. Así, $\sigma \circ \tau(N) = \sigma(N) \cap \tau(N) = \sigma(M) \cap \tau(M) \cap N = (\sigma \circ \tau)(M) \cap N$.

■

Corolario 1.2.10. *Si σ es hereditario, entonces $\bar{\sigma}$ es hereditario.* ■

Proposición 1.2.11. *Sea σ un t-radical y sea $I = \sigma(R)$ (ideal bilateral). Entonces σ es hereditario si y sólo sí el bimódulo R/I es plano como módulo derecho.*

Demostración. Se sigue del hecho que $\frac{N+IM}{IM} \cong \frac{N}{IM \cap N}$ y $R/I \otimes N \cong N/IN$ para cada $N \leq M \in R\text{-}Mod$. ■

Un submódulo N de un módulo M se dice totalmente invariante si para cada $f \in End(M)$, $f[N] \subseteq N$. De hecho, considerando $\sigma(M) \leq M$ con $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, se cumple que $\sigma(M)$ es totalmente invariante. El conjunto $\mathcal{L}_{f.i.}(M)$ de submódulos invariantes de $\mathcal{L}(M)$ es una retícula, ya que si $N, L \in \mathcal{L}_{f.i.}(M)$, claramente $N+L$ y $N \cap L$ pertenecen a $\mathcal{L}_{f.i.}(M)$. Además, es sencillo probar que $\mathcal{L}_{f.i.}(M)$ es una retícula completa.

Dado $M \in R\text{-}Mod$ y $N \leq M$, se definen para cada módulo K:

$$\begin{array}{ll} \alpha_N^M(K) & := \sum\{f[N] \mid f \in Hom(M,K)\}; \\ \omega_N^M(K) & := \bigcap\{g^{-1}[N] \mid g \in Hom(K,M)\} \end{array}$$

Es fácil ver que α_N^M y ω_N^M son prerradicales para cualesquiera $N \leq M$. En particular, si $N = 0$, $\omega_0^M = Rej_M$ y si $N = M$ entonces $\alpha_M^M = Tr_M$. Más aún, si $\mathcal{C} \subseteq R\text{-}Mod$, $\bigvee\limits_{M \in \mathcal{C}} \alpha_M^M = Tr_{\mathcal{C}}$ y $\bigwedge\limits_{M \in \mathcal{C}} \omega_0^M = Rej_{\mathcal{C}}$.

Proposición 1.2.12. *Dado un módulo M y $N \leq M$, son equivalentes:*

(*a*) *N es totalmente invariante;*

(*b*) $\alpha_N^M(M) = N$;

(*c*) $\omega_N^M(M) = N$.

■

Lema 1.2.13. *Para $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$ y $N \leq M \in R\text{-}Mod$ son equivalentes:*

(*a*) $\sigma(M) = N$;

(*b*) $\alpha_N^M \leq \sigma \leq \omega_N^M$.

■

En el contexto del lema previo, α_N^M es el mínimo prerradical σ tal que $\sigma(M) = N$ y a dicha condición la llamaremos *propiedad alfa*; similarmente se tiene la *propiedad omega*. Ambas serán muy útiles en los capítulos 2 y 6.

Proposición 1.2.14. *Para cualquier $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$ se cumple*

$$\sigma = \bigvee_{M \in R-Mod} \alpha_{\sigma(M)}^M = \bigwedge_{M \in R-Mod} \omega_{\sigma(M)}^M.$$

■

Por $\mathcal{E}$ se entiende una clase de representantes de clases de isomorfismo de módulos inyectivos en $R\text{-}Mod$.

Proposición 1.2.15. *Sea $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$. Entonces*

1. α_M^M *es idempotente para cada* $M \in R$*-mod. Más aún,* σ *es idempotente si y sólo si* $\sigma = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M$*;*

2. ω_0^M *es radical para cada* $M \in R$*-mod. Más aún,* σ *es radical si y sólo si* $\sigma = \bigwedge_{M \in \mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M$*;*

3. σ *es hereditario si y sólo si* $\sigma = \bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma(Q)}^Q$*;*

4. σ *es radical hereditario si y solo si* $\sigma = \bigwedge_{Q \in \mathcal{E} \wedge \mathbb{F}_\sigma} \omega_0^Q$*;*

5. σ *es t-radical si y sólo si* $\sigma = \alpha_{\sigma(R)}^R$*.*

■

Definición 1.2.16. *Sea* $M \in R$*-Mod y* K, L *submódulos totalmente invariantes de* M*. El producto de* K *y* L *en* M *se define como* $KL := \alpha_K^M(L)$*.*

Definición 1.2.17. *Sea* $M \in R$*-Mod y* $N \neq M$ *un submódulo totalmente invariante de* M*.* N *es primo en* M *si para cualesquiera submódulos totalmente invariantes* K *y* L *de* M*, se cumple que* $KL \leq N$ *implica que* $K \leq N$ *o* $L \leq N$*.*

Proposición 1.2.18 ([25, Lema 2.8])**.** *Sea* $M \in R$*-Mod y* N *un submódulo totalmente invariante propio de* M*. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) N es primo en M.

(b) ω_N^M es un prerradical primo.

■

Proposición 1.2.19. *Si* $S \in R$*-Mod es simple entonces* ω_0^S *es un prerradical primo mínimo.* ■

Lema 1.2.20. *Sea* $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$*.*

(a) $\sigma = 0$ *si y sólo si* $\forall S \in R$*-Simp* $\sigma(ES) = 0$*;*

(b) $\sigma = 1$ *si y sólo si* $\sigma(R) = R$*.*

■

Lema 1.2.21. *Sea* $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$*.*

(a) *Si* $\sigma \neq 0$ *existe* $S \in R$*-Simp tal que* $\alpha_0^{ES} \leq \sigma$*;*

(*b*) *Si* $\sigma \neq 1$ *existe un ideal máximo* ${}_RI$ *tal que* $\sigma \leq \omega_I^R$.

■

Proposición 1.2.22.

(*a*) $\{\alpha^{ES_0} \mid S \in R\text{-}Simp\}$ *es el conjunto de átomos de* ${}_R\mathsf{P}$*;*

(*b*) $\{\omega_{{}_RI}^R \mid {}_RI \leq R$ *es máximo* $\}$ *es el conjunto de coátomos de* ${}_R\mathsf{P}$.

■

En el Apéndice A se presentan los prerradicales Jansianos, los cuales son exactos izquierdos y su clase de pretorsión hereditaria es cerrada bajo productos.

1.3. Anillos importantes y longitud de Loewy

Teorema 1.3.1 (Hopkins)**.** *Todo anillo artiniano izquierdo es noetheriano izquierdo.* ■

Un anillo R es semiperfecto si todo módulo simple tiene cubierta proyectiva y es perfecto si esto ocurre para cualquier módulo. Un ideal I se dice T-nilpotente izquierdo si para cada sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe un n tal que $a_0a_1...a_n = 0$.

Teorema 1.3.2 (Bass)**.** *Para un anillo* R *con radical de Jacobson* $J = J(R)$ *las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) R *es perfecto;*

(*b*) R/J *es semisimple y* J *es T-nilpotente izquierdo;*

(*c*) R/J *es semisimple y todo módulo no cero contiene un submódulo máximo;*

(*d*) *Todo módulo plano es proyectivo.*

■

Un anillo R es semiprimario si $J(R)$ es nilpotente y $R/J(R)$ es semisimple. Luego, todo anillo semiprimario es perfecto. Además, todo anillo artiniano es semiprimario. Un anillo se dice QF si es artiniano y todo ideal izquierdo y derecho es un ideal anulador.

1.3.1. Módulos y anillos semisimples

Un módulo M es simple si 0 y M son sus únicos submódulos. Dado un anillo R, un módulo T es simple si y sólo si $T \cong R/I$, para algún ideal izquierdo máximo de R. R-$Simp$ denota algún conjunto completo e irredundante de módulos simples, es decir, cualquier módulo simple es isomorfo a algún elemento de R-$Simp$ y no existen dos elementos distintos isomorfos en R-$Simp$.

Se definen ahora dos importantes prerradicales, el zoclo y el radical. Para todo $M \in R$-Mod:

$$soc(M) := \sum\{T \leq M \mid \text{ es mínimo en } M\};$$
$$rad(M) := \bigcap\{K \leq M \mid \text{ es máximo en } M\}.$$

Un módulo es semisimple si es suma directa de módulos simples, o bien $soc(M) = M$. Todo módulo simple es semisimple.

Lema 1.3.3. *Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un conjunto de submódulos simples de un R-módulo M tales que $M = \sum\limits_{\alpha\in A} S_\alpha$ entonces para cada submódulo N de M existe un $B \subseteq A$ tal que $\{S_\beta\}_{\beta\in B}$ es independiente y $M = K \oplus (\bigoplus\limits_{\beta\in B} S_\beta)$.* ■

Corolario 1.3.4. *Si un módulo M es generado por una familia $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de módulos simples, entonces $M = \bigoplus\limits_{\beta\in B} S_\beta$ para cierto $B \subseteq A$.* ■

Proposición 1.3.5. *Sea $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in B} S_\alpha$ semisimple. Si*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces se escinde. Además existe un $B \subseteq A$ tal que

$$L \cong \bigoplus_{\beta\in B} S_\beta \quad y \quad N \cong \bigoplus_{\beta\in A\setminus B} S_\beta.$$

■

Si R es un anillo y $_RR$ es semisimple (izquierdo) se dice que R es semisimple (izquierdo). Es fácil probar que en tal situación R es artiniano izquierdo finitamente generado por una famila de ideales izquierdos mínimos $T_1, ...T_n$. Como $soc_{T_i}(R) \supseteq T_i$ es un ideal para cara i, entonces R es suma directa de $soc_{T_1}(R), ..., soc_{T_n}(R)$ y por tanto R_R es un módulo semisimple derecho. Más aún, R es artiniano derecho, es decir, todo anillo semisimple es artiniano.

Teorema 1.3.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.*

1. *R es artiniano izquierdo y $Rad(R) = 0$;*

2. *${}_RR$ es semisimple;*

3. *R es isomorfo a una suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos de división.*

■

A lo largo del texto, a un anillo R que satisfaga cualquiera de las condiciones anteriores se le llamará semisimple artiniano.

Teorema 1.3.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.*

1. *Todo R-módulo es semisimple.*

2. *Todo R-módulo es inyectvo.*

3. *Todo R-módulo es proyectivo.*

4. *Toda sucesión exacta corta (en R-Mod) se escinde.*

■

Teorema 1.3.8 ([24, Teorema 11])**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.*

1. *R es semisimple artiniano;*

2. *${}_R\mathsf{P}$ es una retícula booleana finita;*

3. *Para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma = \bigvee\{\alpha_S^{ES} \mid \alpha_0^{ES} \leq \sigma\}$;*

4. *$1 = \bigvee\{\alpha_S^{ES} \mid S \in R\text{-}Simp\}$;*

5. *Para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$ existe una familia $\mathcal{A} \subseteq R\text{-}Simp$ tal que $\sigma = soc_{\mathcal{A}}$;*

6. *Para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma = \{\omega_I^R \mid I$ es un ideal mínimo, $\omega_I^R \geq \sigma\}$;*

7. *$0 = \bigwedge\{\omega_I^R \mid {}_RI \leq {}_RR$ es máximo $\}$.*

■

Proposición 1.3.9. *Son equivalentes:*

(a) *R es un anillo semisimple artiniano;*

(b) *Para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, σ es t-radical.*

(c) *Para todo ideal $I \subseteq R$, $\alpha_I^R = \omega_I^R$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Como R es semisimple artiniano entonces ${}_R\mathsf{P}$ es una retícula boooleana finita y por tanto, complementada. Es decir, para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$ existe $\sigma^c \in {}_R\mathsf{P}$ tal que

$$\sigma \vee \sigma^c = 1,$$
$$\sigma \wedge \sigma^c = 0.$$

Si $M \in R\text{-}Mod$, $M = (\sigma \wedge \sigma^c)(M) = \sigma(M) \oplus \sigma^c(M)$. En particular $R = \sigma(R) \oplus \sigma^c(R)$. Así,

$$M = RM = (\sigma(R) \oplus \sigma^c(R))M = \sigma(R)M \oplus \sigma^c(R)M.$$

Considerando los homomorfismos $\{d_x \mid x \in M\}$ se tiene que $d_x(\sigma(R)) \leq \sigma M$ y por tanto, $\sigma(R)M = \sigma(M)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Para un ideal I de R se cumple

$$\omega_I^R(M) = \omega_I^R(R)M = IM = \alpha_I^R(M).$$

$(c) \Rightarrow (a)$ [24, Teorema 13].

■

Un anillo R es V-anillo si cada módulo simple es inyectivo.

Teorema 1.3.10. *Un anillo R es semisimple si y sólo sí es artiniano y V-anillo.* ■

Proposición 1.3.11. *Si R es un anillo artiniano y M es un R-módulo, $soc(M)$ es esencial en M.* ■

1.3.2. Longitud de Loewy

Si en la construcción (✪) aplicada al zoclo se define $soc_0 = \mathbf{0}$, para cada módulo M existe una sucesión creciente de la forma

$$0 = soc^{(0)}(M) \subseteq soc^{(1)}(M) \subseteq soc^{(2)}(M) \subseteq \ldots \subseteq soc^{(\alpha(M))} \subseteq \ldots$$

la cual se conoce como serie de Loewy de M. En general, tal serie siempre debe estacionarse, es decir, existe un mínimo ordinal α tal que $soc_\beta(M) = soc_\alpha(M)$ para todo $\beta \geq \alpha$. En tal caso se define $\delta(M) = soc_\alpha(M)$. Si $M = \delta(M)$, se dice que M es un módulo de Loewy. Nótese que $M/\delta(M)$ tiene zoclo cero, de lo cual, si M es un módulo artiniano entonces $\delta(M) = M$.

Proposición 1.3.12. *Un módulo M es de Loewy si y sólo si toda imagen homomórfica de M tiene zoclo no cero.*

Demostración. Si M es de Loewy y $N \leq M$ es un submódulo, sea $\beta \in Or$ el mayor ordinal α tal que $soc^{\alpha}M \leq N$. Al considerar el epimorfismo $\pi : M/soc^{\beta}M \to M/N$, la imagen de $soc^{\beta+1}/soc^{\beta}$ en M/N es no cero.

Recíprocamente, si M no es de Loewy el cociente $M/\delta(M)$ tiene zoclo cero. ■

Como cada módulo artiniano no cero tiene zoclo no cero, cada módulo artiniano es de Loewy. Además cada módulo de Loewy contiene zoclo esencial.

Lema 1.3.13. *[1, Lema 32.1] Si M es un módulo sobre un anillo semiprimario con radical de Jacobson J, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es un módulo artiniano uniserial;*

(b) *M tiene una única serie de composición;*

(c) *La serie de Loewy*

$$0 < soc(M) < soc^{(2)}(M) < ... < soc^{(n)}(M) = M$$

es una serie de composición de M.

(d) *La serie*

$$M = J^0 > JM > ... > J^nM = 0$$

es una serie de composición de M.

■

En el contexto del lema previo, se verifica fácilmente que $soc^nM = (0 :^M J) := \{x \in M \mid Jx = 0\}$. En particular, todo $M \in R\text{-}Mod$ tiene longitud de Loewy finita.

Un módulo M es serial si es suma directa de módulos uniseriales. Un anillo R es serial si $_RR$ y R_R son módulos seriales.

Teorema 1.3.14. *[1, Teorema 32.3] Si R es un anillo artiniano, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es un anillo serial;*

(b) *Cada R-módulo es suma directa de módulos cuya retícula de submódulos es una cadena finita;*

(c) *La cubierta proyectiva y la cápsula inyectiva de cada R-módulo simple son uniseriales.*

■

La dimensión de Goldie de un módulo es el ínfimo de aquellos cardinales κ tales que para cualquier familia independiente de submódulos no cero $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ se tenga que $|A| \leq \kappa$. Un módulo M tiene dimensión de Goldie $dim(M)$ finita si y sólo si M no posee familias independientes de submódulos no cero infinitas. Si α es un ordinal ($\alpha \in Or$), el α-ésimo invariante de Loewy $\delta_\alpha(M)$ se define como la dimensión de Goldie de $soc^{\alpha+1}/soc^{\alpha}(M)$.

1.3.3. La categoría $\sigma[M]$

Dados M y N módulos, se dice que N es subgenerado por M si N se sumerge en un módulo generado por M. Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de R-Mod tal que cada elemento es subgenerado por M entonces $\mathcal{C}$ es subgenerada por M. Se define $\sigma[M]$ como la máxima categoría plena de R-Mod subgenerada por M.

Proposición 1.3.15. *Para un R-módulo M se tiene:*

1. *$\sigma[M]$ es cerrada bajo epimorfismos y monomorfismos.*
2. *La suma directa de una familia de módulos en $\sigma[M]$ pertenece a $\sigma[M]$ y es el coproducto de dicha familia en $\sigma[M]$.*

■

Lema 1.3.16. *Para dos módulos N y M las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *N es subgenerador de $\sigma[M]$;*

(b) *$\sigma[M] = \sigma[N]$;*

(c) *$N \in \sigma[M]$ y $M \in \sigma[N]$.*

De tal forma, $\sigma[M]$ es una clase de pretorsión hereditaria, a la cual le corresponde un único prerradical exacto izquierdo ρ en ${}_R\mathsf{P}$ y así $\sigma[N] = \{N \mid \rho(N) = N\}$. ■

De hecho, es posible hablar de prerradicales sobre la categoría $\sigma[M]$, simplemente como un endofuntor en $\sigma[M]$ que satisface un diagrama similar al de la definición de prerradical sobre R-Mod.

Lema 1.3.17 ([4, Lema 2.8])**.** *Si P es un módulo que es proyectivo en $\sigma[P]$ y si N y L son submódulos totalmente invariantes de P tales que $\sigma[P/N] = \sigma[P/L]$, entonces $N = L$.* ■

Capítulo 2

La retícula de prerradicales sobre anillos locales uniseriales

En este capítulo se ofrece una descripción completa de la retícula de prerradicales asociada a un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$ a través de un isomorfismo entre la misma y cierta retícula de sucesiones binarias. Se incluye también un tratamiento “más visual", ya que a cada prerradical se le asocia un único camino en la cuadrícula $\{0, 1, ..., n+1\}^2$ que comienza en el punto $(0, 0)$ y termina en algún otro del tipo (n, i), variando i desde 0 hasta n.

Los resultados aquí presentados pueden encontrarse en [13, 15] y buena parte de ellos serán extendidos en el Capítulo 6.

2.1. Anillos locales uniseriales

Un anillo R se dice uniserial izquierdo (derecho) si el módulo regular ${}_RR$ (R_R) es uniserial. Si R es uniserial izquierdo y derecho se le llama uniserial. Un anillo R se llama serial izquierdo (derecho) ${}_RR$ (R_R) es un módulo serial. R es serial si es serial izquierdo y derecho. Claramente un anillo serial local es uniserial.

En [21], bajo el nombre de anillos uniseriales generalizados, Nakayama inicia el estudio de los anillos artinianos seriales basado en la noción de anillo uniserial en el sentido de Köthe ([18]).

Definición 2.1.1 (Köthe). *1. Un anillo artiniano R es uniserial en el sentido de Köthe si R es artiniano serial y es producto finito de anillos de matrices sobre anillos seriales locales (uniseriales).*

2. Un anillo R es de Köthe si cada módulo izquierdo o derecho es suma directa de submódulos cíclicos.

Todo anillo uniserial en el sentido de Köthe es de Köthe ([18, Teorema

1.1]) y además artiniano serial. Un anillo local uniserial en el sentido de Köthe es simplemente un tipo de anillo artiniano uniserial. En tal caso, por 1.3.13, su serie de composición debe ser (para algún n)

$$0 = J^n < J^{n-1} < ... < J < R. \tag{❋}$$

Es decir, la serie de *Loewy* de R es

$$0 < socR < soc^{(2)}R < ... < soc^{(n)}R = R.$$

En un afán de consistencia con [13], a los anillos uniseriales locales en el sentido de Köthe se les llamará simplemente anillos locales uniseriales. Ejemplos típicos de anillos locales uniseriales son los anillos $\mathbb{Z}_{p^n}$ para cada número primo p y cada $n \geq 1$.

Proposición 2.1.2. *Todo anillo uniserial (en el sentido de Köthe) es QF.*

Demostración. Es bien sabido que el producto finito de anillos QF es QF, así que basta probar el enunciado para anillos locales uniseriales. Si R es un tal anillo y su serie de composición es como en (❋) entonces el anulador de J^i es J^{n-i} con $i = 1, ..., n$, donde $J^0 = R$. Luego R es QF. ■

El Teorema 2.1.3 puede encontrarse en [9] y contiene a 2.1.2.

Teorema 2.1.3. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es uniserial (en el sentido de Köthe);*

(b) *R es un anillo artiniano de ideales principales;*

(c) *R es un anillo de ideales principales izquierdos y QF;*

(d) *R es uniserial izquierdo (en el sentido de Köthe) y QF.*

■

Corolario 2.1.4. *Sea R un anillo local uniserial. Entonces cada R-módulo es isomorfo a una suma directa de ideales de R.*

Demostración. Por el teorema previo basta probar que cada R-módulo cíclico es isomorfo a un ideal de R. Sea Rx un tal módulo. Entonces $(0 : x) = J^s$ para algún $0 \leq s \leq n$. Como R es un anillo de ideales principales se puede asumir que para algún y, $J^{n-s} = Ry$. Luego, $J^s = (0 : J^{n-s}) = (0 : y)$, así que $Rx \cong Ry = J^{n-s}$. ■

Se denota a partir de ahora por I_s al ideal J^{n-s} para $0 \leq s \leq n$. Por simplicidad, si $0 \leq r \leq m \leq n$, los prerradicales $\alpha_{I_r}^{I_m}$ y $\omega_{I_r}^{I_m}$ se denotan por α_r^m y ω_r^m respectivamente.

En el siguiente resultado descansa buena parte de este texto.

Proposición 2.1.5. *Sea R un anillo local uniserial y sea $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$. Sea $k \in \{0, ..., n-1\}$. Si $\sigma(I_k) = I_r$ para algún $r \in \{0, ..., k\}$ entonces $\sigma(I_{k+1}) = I_r$ o $\sigma(I_{k+1}) = I_{r+1}$.*

Demostración. Suponer que $\sigma(I_k) = I_r$ y $\sigma(I_{k+1}) = I_s$. Entonces $I_r \leq I_s$. Como R es un anillo de ideales principales puede asumirse que $I_{n-1} = J = Rz$, donde J es el radical de Jacobson de R. Ahora, para el morfismo $f : I_{k+1} \to I_k$ definido por $f(x) = xz$, se verifica que si $n - k - 1 \leq i < n$, $f[J^i] = J^{i+1}$. Así, $I_{s-1} = f[I_s] = f[\sigma(I_{k+1})] \leq \sigma(I_k) = I_r$. Se concluye que $I_s = I_r$ o $I_s = I_{k+1}$. ∎

2.2. Dos retículas isomorfas

Dado un número natural $n \geq 1$, se denota al conjunto $\{0, 1, ..., n+1\}$ por $\mathbf{n+1}$. Un n-camino es una sucesión finita $(v_0, v_1, ..., v_r)$ tal que las entradas $v_i \in (\mathbf{n+1})^2$ para cualquier $i = 0, 1, ..., r$. Un n-camino funcional es un n-camino de la forma $c = ((0, c_0), (1, c_1), ..., (n, c_n))$, que generalmente se identifica por $(c_0, c_1, ..., c_n)$. F_n representa al conjunto de caminos n-funcionales. Si $c = (c_0, c_1, ..., c_n) \in F_n$ cumple que $c_0 = 0$ y $0 \leq c_{i+1} - c_i \leq 1$ para todo $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, se llamará 1-ascendente. $C_n \subset F_n$ es el subconjunto de caminos 1-ascendentes para cada número natural n.

Definición 2.2.1. *Dados dos caminos n-funcionales $c = (c_0, c_1, ..., c_n)$ y $d = (d_0, d_1, ..., d_n)$, se definen:*

1. *$c \vee d = (t_0, ..., t_n)$ con $t_i = máx\{c_i, d_i\}$;*
2. *$c \wedge d = (s_0, ..., s_n)$ con $s_i = mín\{c_i, d_i\}$.*

Con la definición anterior se observa que F_n es una retícula completa ([15, Teorema 4.23]). Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n es una subretícula de F_n.

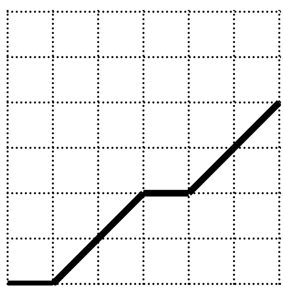

Figura 2.1: Un elemento de C_6.

Para cada número natural $n \geq 1$, se define el conjunto B_n de todas las sucesiones binarias de longitud n. El objetivo es dotar a B_n de estructura reticular (isomorfa a C_n) para después identificarla con la retícula de prerradicales sobre anillos locales uniseriales de longitud n.

Definición 2.2.2. *Dados $n \geq 1$ y $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ elementos de B_n:*

1. *$a \leq b$ si para toda $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \leq \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$.*
2. *$a \vee b := (c_1, ..., c_n)$, donde $c_1 := máx\{a_1, b_1\}$ y para cada $k \in \{2, ..., n\}$*

$$c_k := \begin{cases} 0, & si \;\; máx\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\} = máx\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\}; \\ 1, & si \; máx\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\} > máx\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\}. \end{cases}$$

3. *$a \wedge b := (d_1, ..., d_n)$, donde $d_1 := mín\{a_1, b_1\}$ y para cada $k \in \{2, ..., n\}$*

$$d_k := \begin{cases} 0, & si \; mín\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\} = mín\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\}; \\ 1, & si \; mín\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\} > mín\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\}. \end{cases}$$

Si a y b son como en la definición previa y $c = (c_1, ..., c_n)$, bajo un argumento inductivo se prueba que $\sum_{i=1}^{k} c_i = máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Similarmente $\sum_{i=1}^{k} d_i = mín\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$, donde $d = (d_1, ..., d_n)$. Luego, B_n es una retícula completa con máximo $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$ y mínimo $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$.

Definición 2.2.3. *Sea $n \geq 1$. El hemisferio sur de B_n es el conjunto*

$$H_0^n := \{(a_1, ..., a_n) \in B_n \mid a_1 = 0\}$$

y el hemisferio norte es

$$H_1^n := \{(a_1, ..., a_n) \in B_n \mid a_1 = 1\}.$$

Para cada $n \geq 1$ puede considerarse a B_n como subretícula de B_{n+1} debido a las funciones $\iota_n : B_n \to B_{n+1}$ e $\iota'_n : B_n \to B_{n+1}$, dadas por

$$\iota_n(a_1, ..., a_n) = (0, a_1, ..., a_n)$$

y

$$\iota'_n(a_1, ..., a_n) = (1, a_1, ..., a_n).$$

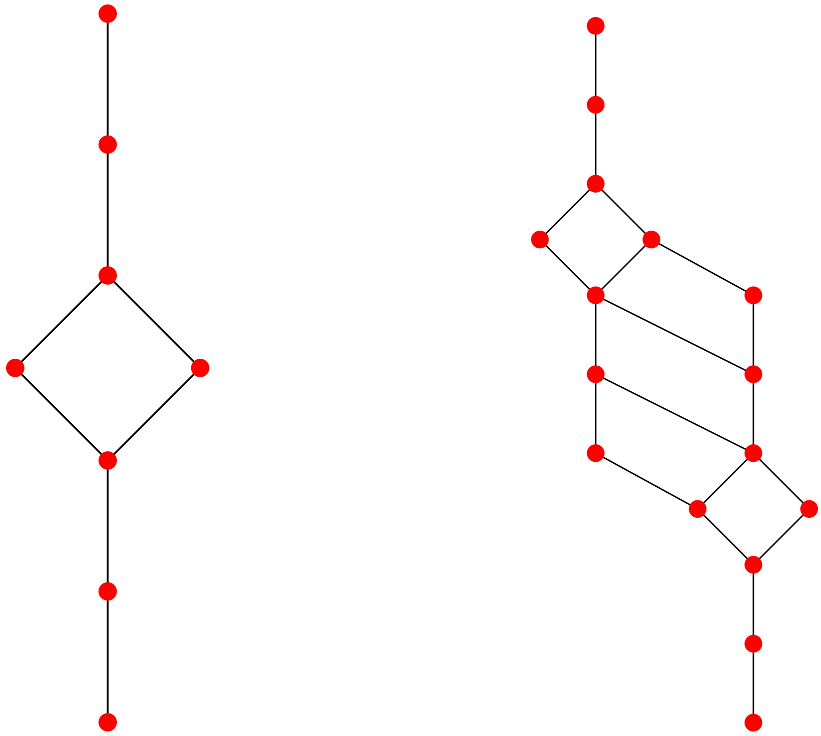

Figura 2.2: Diagramas de Hasse para B_3 y B_4.

Teorema 2.2.4. *Para cada número natural $n \geq 1$, C_n y B_n son retículas isomorfas.*

Demostración. Las funciones $\kappa_n : C_n \to B_n$ y $\theta_n : B_n \to C_n$ se definen como sigue. Para $c = (c_0, c_1, ..., c_n) \in C_n$ $\kappa_n(c) = (b_1, ..., b_n)$, donde

$$b_k := \begin{cases} 0, & \text{si } c_k = c_{k-1}; \\ 1, & \text{si } c_k \neq c_{k-1}. \end{cases}$$

Para $b = (b_1, ..., b_n)$ $\theta_n(b) = (c_1, ..., c_n)$, donde

$$c_k := \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0; \\ \sum_{i=0}^{k} b_i, & \text{si } k \in \{1, ..., n\}. \end{cases}$$

Entonces κ_n y θ_n son morfismos de orden inversos uno del otro. Por tanto C_n y B_n son retículas isomorfas. ■

Lema 2.2.5. *Sea $n \geq 1$ y sean $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in B_n$, entonces b cubre a a si y sólo si existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que:*

1) *$a_i = b_i$ para $i \neq k, k+1$;*

2) *$a_k = 0$ y $b_k = 1$;*

3) *Si $k < n$ entonces $a_{k+1} = 1$ y $b_{k+1} = 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponer que b cubre a a. Sea $k := \text{mín}\{i \in \{1, ..., n\} \mid a_i < b_i\}$. Entonces $a_i = b_i$ para todo $i < k$, $a_k = 0$ y $b_k = 1$ (puesto que $a < b$). Si $k = n$ las condiciones $1-3$ se satisfacen. Si $k < n$ y $a_{k+1} = 0$ o $b_{k+1} = 1$, entonces existiría un $c \in B_n$ con $a < c < b$, contradiciendo el hecho que b cubre a a. En efecto, si $a_{k+1} = 0$ se considera $c = (c_1, ...c_n)$, donde

$$c_i := \begin{cases} a_i, & \text{para } i \in \{1, ..., k\}; \\ 1, & \text{para } i = k+1; \\ b_i & \text{para } i \in \{k+2..., n\}. \end{cases}$$

Por otro lado, si $b_{k+1} = 1$, se escoge $c = (c_1, ...c_n)$ de forma que

$$c_i := \begin{cases} a_i & \text{para } i \in \{1, ..., k-1\}; \\ b_i, & \text{para } i = k; \\ 0, & \text{para } i = k+1; \\ b_i, & \text{para } i \in \{k+2..., n\}. \end{cases}$$

En ambos casos se obtiene una contradicción. Finalmente, si para algún $j > k+1$ ocurre que $a_j < b_j$, entonces $a_j = 0$ y $b_j = 1$. Se toma $c = (c_1, ..., c_n)$ para el cual

$$c_i := \begin{cases} a_i, & \text{para } i \in \{1, ..., j-1\}; \\ b_i, & \text{para } i \in \{j, ..., n\}. \end{cases}$$

Claramente $a < c < b$, nuevamente una contradicción. Por tanto todas las condiciones se cumplen.

($\Leftarrow$) Si se cumplen $1-3$, entonces $a < b$. Suponiendo que existe $c \in B_n$ con $a < c < b$, la condición 1 obliga que $a_i = c_i = b_i$ para $i \neq k, k+1$ y no es posible tener $c_k = c_{k+1} = 0$ o $c_k = c_{k+1} = 1$, por tanto $c = a$ o $c = b$. Luego, b cubre a a. ■

Teorema 2.2.6. *Sea R un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$. Entonces B_n y ${}_R\mathsf{P}$ son retículas isomorfas.*

Demostración. Se define $\phi_n : {}_R\mathsf{P} \to B_n$ tal que para todo $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\phi_n(\sigma) = (a_1, ..., a_n)$, donde

$$a_k := \begin{cases} 0, & \text{si } \sigma(I_k) = \sigma(I_{k-1}); \\ 1, & \text{si } \sigma(I_k) > \sigma(I_{k-1}). \end{cases}$$

Se define también $\psi_n : B_n \to {}_R\mathsf{P}$ tal que para $(a_1, ..., a_n) \in B_n$

$$\psi_n(a_1, ..., a_n) := \bigvee_{k=1}^{n} \alpha^k_{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i}.$$

Ambos son morfismos de orden, uno inverso del otro y por tanto B_n es isomorfo a ${}_R\mathsf{P}$. ■

De ahora en adelante se identifica a cada prerradical σ por su imagen bajo $\phi_n(\sigma)$ gracias al Teorema 2.2.6. Así, si $\sigma = (a_1, ..., a_n)$, por el Teorema 2.2.4 le corresponde un único camino 1-ascendente de longitud n. A continuación se describe el producto en ${}_R\mathsf{P}$.

Proposición 2.2.7. *Sea R un anillo local uniserial con longitud de composición n. Sean $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$ donde $\sigma = (a_1, ..., a_n)$, $\tau = (b_1, ..., b_n)$, $\sigma\tau = (p_1, ..., p_n)$ y $(\tau : \sigma) = (q_1, ..., q_n)$. Sea $k \in \{1, ..., n\}$ y supongamos que $\tau(I_k) = I_{r_k}$, es decir $r_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

$P1$ Si $b_k = 0$ entonces $p_k = 0$;

$P2$ Si $b_k = 1$ y $a_{r_k} = 0$ entonces $p_k = 0$;

$P3$ Si $b_k = 1$ y $a_{r_k} = 1$ entonces $p_k = 1$.

$C1$ Si $b_k = 1$ entonces $q_k = 1$;

$C2$ Si $b_k = 0$ y $a_{k-r_k} = 1$ entonces $q_k = 1$;

$C3$ Si $b_k = 0$ y $a_{k-r_k} = 0$ entonces $q_k = 0$.

Demostración. Sean σ y τ como en las hipótesis. $(P1-P3)$. Si $b_k=0$ entonces $\tau(I_{k-1})=I_{r_k}$, entonces $\sigma\tau(I_k)=\sigma\tau(I_{k-1})$, con lo cual $p_k=0$. Ahora, si $b_k=1$ se tiene que $\tau(I_k)>\tau(I_{k-1})$. Por la Proposición 2.1.5 $\tau(I_{k-1})=I_{r_k-1}$. Si $a_{r_k}=0$ entonces $\sigma(I_{r_k})=\sigma(I_{r_k-1})$, por tanto $\sigma\tau(I_k)=\sigma\tau(I_{k-1})$ y así $p_k=0$. Si en cambio $a_{r_k}=1$ entonces $\sigma(I_{r_k})>\sigma(I_{r_k-1})$, luego $\sigma\tau(I_k)>\sigma\tau(I_{k-1})$, con lo cual $p_k=1$.

$(C1-C3)$ Si $b_k=1$ entonces $\tau(I_k)>\tau(I_{k-1})$ y por tanto $\tau(I_{k-1})=I_{r_k-1}$. Luego, debe cumplirse que $(\tau:\sigma)(I_k)/\tau(I_k)=\sigma\left(I_k/\tau(I_k)\right)\cong\sigma(I_{k-r_k})\cong\sigma\left(I_{k-1}/\tau(I_{k-1})\right)=(\tau:\sigma)(I_{k-1})/\tau(I_{k-1})$, lo que implica $(\tau:\sigma)(I_k)>(\tau:\sigma)(I_{k-1})$ y así $q_k=1$. Si se supone ahora que $b_k=0$ entonces $\tau(I_k)=\tau(I_{k-1})=I_{r_k}$, con lo cual $(\tau:\sigma)(I_k)/\tau(I_k)=\sigma\left(I_k/\tau(I_k)\right)\cong\sigma(I_{k-r_k})$ y $(\tau:\sigma)(I_{k-1})/\tau(I_{k-1})=\sigma\left(I_{k-1}/\tau(I_{k-1})\right)\cong\sigma(I_{k-r_k-1})$. Además, si $a_{k-r_k}=1$ entonces $\sigma(I_{k-r_k})>\sigma(I_{k-r_k-1})$, luego $(\tau:\sigma)(I_k)>(\tau:\sigma)(I_{k-1})$ y así $q_k=1$. Por otro lado, si $a_{k-r_k}=0$, entonces $\sigma(I_{k-r_k})>\sigma(I_{k-r_k-1})$. Se sigue que $(\tau:\sigma)(I_k)=(\tau:\sigma)(I_{k-1})$ y así $q_k=0$.

■

2.3. Propiedades de ${}_R\mathsf{P}$ para un anillo local uniserial

Nuevamente, $\mathbf{n{+}1}$ denota al conjunto $\{1,...,n\}$. Es fácil ver que el producto cartesiano de n copias $(\mathbf{n{+}1})^n$ es una retícula distributiva, con el orden:

1. $(k_1,...,k_n)\preceq(l_1,...,l_n)\Leftrightarrow k_i\leq l_i\ \forall i\in\mathbf{n{+}1}$.
2. $(k_1,...,k_n)\vee(l_1,...,l_n)=(m_1,...,m_n)$, donde $m_i=máx\{k_i,l_i\}$.
3. $(k_1,...,k_n)\wedge(l_1,...,l_n)=(m'_1,...,m'_n)$, donde $m'_i=mín\{k_i,l_i\}$.

Teorema 2.3.1. *Para cualquier anillo local uniserial R con longitud de composición n, ${}_R\mathsf{P}$ es una retícula distributiva finita de cardinalidad 2^n.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.6 es obvio que $|{}_R\mathsf{P}|=2^n$. Se define la función $\nu:B_n\to(\mathbf{n{+}1})^n$ como

$$\nu(a_1,...,a_n):=\left(a_1,...,\sum_{i=1}^{k}a_i,...,\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

Claramente ν es inyectiva. Sean $a=(a_1,...,a_n),b=(b_1,...,b_n)$ en B_n, entonces $a\leq b$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{k}a_i\leq\sum_{i=1}^{k}b_i$ para cada $k\in\{1,...,n\}$, si y sólo si $\nu(a)\leq\nu(b)$. Por tanto ν es un morfismo de orden. Se sigue que B_n es isomorfo a una subretícula de $(\mathbf{n{+}1})^n$. Como $(\mathbf{n{+}1})^n$ es distributiva y ${}_R\mathsf{P}\cong B_n$, se concluye que ${}_R\mathsf{P}$ es distributiva. ■

Proposición 2.3.2. *Para cualquier anillo local uniserial con longitud de composición $n\geq 5$, ${}_R\mathsf{P}$ no es una retícula plana.*

Demostración. Los siguientes son elementos en B_5: $x = (0,1,0,1,0)$, $u = (1,0,0,1,0), v = (0,1,1,0,0)$ y $w = (0,1,0,1,1)$. Usando el Lema 2.2.5, x es cubierto por u, v y w, así que por el Teorema 1.1.3 B_5 no es plana. Como para cada $n \geq 5$ B_5 es una subretícula de $B_n \cong {}_R\mathsf{P}$, se sigue que ${}_R\mathsf{P}$ no puede ser plana. ■

Dado $x \in \{0,1\}$ se define

$$x^* := \begin{cases} 0, & \text{si } x = 1; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Similarmente, si $\sigma = (a_1, ..., a_n) \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma^* := (a_1^*, ..., a_n^*)$. Evidentemente $(\sigma^*)^* = \sigma$, es decir, σ^* es el prerradical dual de σ.

Teorema 2.3.3. *Para cualquier anillo local uniserial R con longitud de composición $n \geq 1$, ${}_R\mathsf{P}$ es una retícula autodual. Más aún, existe un anti-isomorfismo de retículas $\lambda : {}_R\mathsf{P} \to {}_R\mathsf{P}$ tal que para cada $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$*

$$\lambda(\sigma\tau) = (\lambda(\tau) : \lambda(\sigma)).$$

Demostración. Se define $\mu : {}_R\mathsf{P} \to {}_R\mathsf{P}$ tal que $\mu(\sigma) := \sigma^*$. Claramente μ es una función biyectiva. Además para $\sigma = (a_1, ..., a_n)$ y $\tau = (b_1, ..., b_n)$, $\sigma \leq \tau$ si y sólo si $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$, si y sólo si $\sum_{i=1}^k a_i^* \geq \sum_{i=1}^k b_i^*$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$, si y sólo si $\mu(\sigma) \geq \mu(\tau)$. Se sigue que μ es un anti-isomorfismo de orden y por el Lema 1.1.5 es también un anti-isomorfismo de retículas.
Sean σ y τ como en el párrafo previo, entonces $\sigma\tau = (p_1, ..., p_n)$ está descrito por $P1 - P3$ por la Proposición 2.2.7 como sigue. Para $k \in \{1, ..., n\}$.

$P1$ Si $b_k = 0$ entonces $p_k = 0$;

$P2$ Si $b_k = 1$ y $a_{r_k} = 0$ entonces $p_k = 0$;

$P3$ Si $b_k = 1$ y $a_{r_k} = 1$ entonces $p_k = 1$.

Por otro lado, sea $(\lambda(\tau) : \lambda(\sigma)) = (q_1, ..., q_n)$.

C^*1 Si $b_k^* = 1$ entonces $q_k^* = 1$;

C^*2 Si $b_k^* = 0$ y $a_{k-r_k} = 1$ entonces $q_k^* = 1$;

C^*3 Si $b_k^* = 0$ y $a_{k-r_k} = 0$ entonces $q_k^* = 0$.

Nótese que C^*1 ocurre si y sólo si ocurre $P1$ y los otros dos casos son similares.
Se concluye que $q_k = 1$ si y sólo si $p_k = 0$, así que

$$\lambda(\sigma\tau) = (\lambda(\tau) : \lambda(\sigma)).$$

■

2.4. Idempotentes y radicales

En las secciones siguientes se dará una descripción detallada de algunos subconjuntos de ${}_R\mathsf{P}$. Se asume a partir de ahora que R es un anillo local uniserial con longitud de composición n.

Proposición 2.4.1. *Sean* $0 \leq r \leq m \leq n$. *Entonces:*

1. $\alpha_r^m = (a_1, ..., a_n)$, *donde*

$$a_k = \begin{cases} 0, & si\ 1 \leq k \leq m-r; \\ 1, & si\ m-r < k \leq m; \\ 0, & si\ m < k \leq n. \end{cases}$$

2. $\omega_r^m = (b_1, ..., b_n)$, *donde*

$$b_k = \begin{cases} 1, & si\ 1 \leq k \leq r; \\ 0, & si\ r < k \leq m; \\ 1, & si\ m < k \leq n. \end{cases}$$

Demostración. El prerradical $\sigma = (a_1, ..., a_n)$ tal como se define en *1* es el menor tal que $\sigma(I_m) = I_r$. En efecto, si existe $\eta = (c_1, ..., c_n)$ tal que $\eta < \sigma$ y $\sum_{i=1}^m c_i = r$, entonces necesariamente $c_k = 0$ para $1 \leq k \leq m-r$ y $\sum_{i=1}^l c_i < \sum_{i=1}^l a_i$ para alguna $l \in \{m-r+1, ..., m-1\}$. Se sigue que

$$r = \sum_{i=1}^{m} c_i < \sum_{i=1}^{m} a_i = r,$$

una contradicción. Por la propiedad alfa se cumple entonces que $\alpha_r^m = (a_1, ..., a_n)$.

Suponer ahora que $\tau = (b_1, ..., b_n)$, definido como en *2*. Entonces τ es el mayor prerradical tal que $\tau(I_m) = I_r$ ya que de lo contrario existiría $\eta = (c_1, ..., c_n)$ tal que $\tau < \eta$ y $r = \sum_{i=1}^m c_i$, de donde $c_k = 1$ para $1 \leq k \leq m-r$ y $\sum_{i=1}^l c_i > \sum_{i=1}^l b_i$ para alguna $l \in \{m-r+1, ..., m-1\}$. Entones $c_l = 1$ y

$$r = \sum_{i=1}^{m} c_i > \sum_{i=1}^{m} b_i = r.$$

Por la propiedad omega se concluye que $\omega_r^m = (b_1, ..., b_n)$.

■

Corolario 2.4.2. *Sean* $0 \leq r \leq m \leq n$. *Entonces* $\lambda(\alpha_r^m) = \omega_{m-r}^m$.

Proposición 2.4.3. *Sea* $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

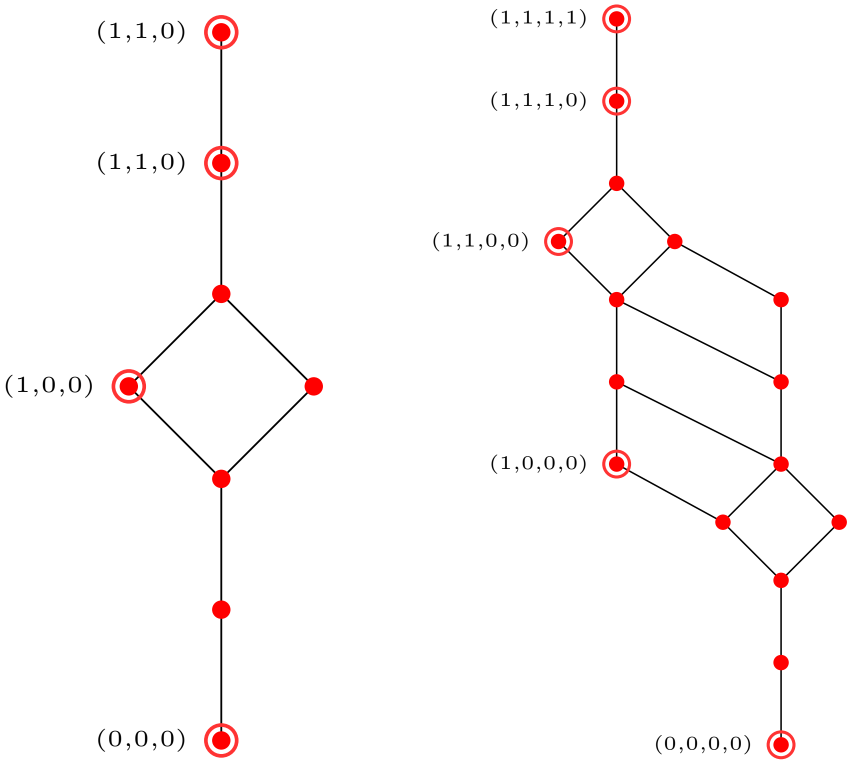

Figura 2.3: Prerradicales idempotentes sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 3 y 4.

(a) $\sigma = \alpha_m^m$ *para algún* $0 \leq m \leq n$*;*

(b) σ *es exacto izquierdo;*

(c) σ *es idempotente.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por la Proposición 2.4.1 es claro que $\alpha_m^m = \omega_m^n$. Como R es un anillo uniserial, por 2.1.2 es cuasi-Frobenius, así que $I_n = R$ es un módulo inyectivo. La implicación se sigue de la Proposición 1.2.15.

$(b) \Rightarrow (c)$ Esto ocurre para cualquier anillo.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea $\sigma = (a_1, ..., a_n)$ y $\sigma \neq \alpha_m^m$ para cualquier $0 \leq m \leq n$. Existe $0 \leq i < j \leq n$ tal que $a_i = 0$ y $a_j = 1$. Sean $s := \text{mín}\{i \mid a_i = 0\}$ y $t := \text{mín}\{j \mid j > s, a_j = 1\}$. Entonces $r_t = \sum_{i=1}^{t} a_i = s$, así que $a_{r_t} = 0$. Si se supone ahora que $\sigma\sigma = (p_1, ..., p_n)$, por la condición $P2$ sobre el producto en ${}_R\mathsf{P}$, como $a_t = 1$ y $a_{r_t} = 0$, entonces $p_t = 0$ y así σ no es idempotente.

■

Proposición 2.4.4. *Sea* $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\sigma = \omega_0^m$ *para algún* $0 \leq m \leq n$*.*

(b) σ *es un t-radical*

(c) σ *es radical.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Es claro que $\omega_0^m = \alpha_{n-m}^n$, el cual es un t-radical por la Proposición 1.2.15.

$(b) \Rightarrow (c)$ Esto ocurre para cualquier anillo.

$(c) \Rightarrow (a)$ Si σ es un radical, entonces $\lambda(\sigma) = \alpha_m^m$, para algún $0 \leq m \leq n$. En efecto, se cumple

$$\lambda(\lambda(\sigma)\lambda(\sigma)) = (\lambda\lambda(\sigma) : \lambda\lambda(\sigma)) = (\sigma : \sigma) = \sigma.$$

Es decir, $\lambda(\sigma)$ es idempotente. Por el Corolario 2.4.2 $\sigma = \lambda(\alpha_m^m) = \omega_0^m$. ■

Corolario 2.4.5. $\langle {}_R\mathsf{Id}, \leq \rangle$ *y* $\langle {}_R\mathsf{Rad}, \leq \rangle$ *son cadenas.* ■

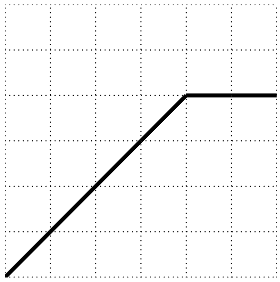

Figura 2.4: Un idempotente sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 6.

2.5. Irreducibles y coirreducibles

Ahora se caracterizan los elementos irreducibles y coirreducibles en ${}_R\mathsf{P}$ (ver 1.2.5).

Proposición 2.5.1. *Sea $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma \neq \mathbf{1}$. Entonces σ es irreducible si y sólo si $\sigma = \omega_r^m$ para m y r tales que $0 \leq r < m \leq n$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Para $\sigma \neq \mathbf{1}$ irreducible y $\sigma = (a_1, ..., a_n)$ se define $r := 0$ si $a_1 = 0$, en otro caso $r := \textit{máx}\{i \mid a_1 = ... = a_i = 1\}$. Como $\sigma \neq \mathbf{1}$ entonces $r < n$, donde $a_{r+1} = 0$. Ahora se define $m := \textit{máx}\{i \mid a_{r+1} = ... = a_i = 0\}$. se cumple que $r < m$. Si $m = n$ se tiene $\sigma = \omega_r^n$. Si $m < n$, $a_{m+1} = 1$. Sea $j := \textit{máx}\{i \mid a_{m+1} = ... = a_i = 1\}$ y supóngase que $j < n$, entonces $a_{j+1} = 0$. Sea $\eta = (c_1, ..., c_n)$ tal que

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq k \leq r + j - m; \\ 0, & \text{si } r + j - m < k \leq j; \\ a_k, & \text{si } j < k \leq n. \end{cases}$$

Luego $\sigma = \omega_r^m \wedge \eta$, con $\omega_r^m, \eta > \sigma$, lo cual contradice el hecho que σ sea irreducible. Por lo tanto $j = n$ y $\sigma = \omega_r^m$.

($\Leftarrow$) Ahora sea $\sigma = \omega_r^m$ con $0 \leq r < m \leq n$. Claramente $\sigma \neq \mathbf{1}$. Sean $\tau = (c_1, ..., c_n), \eta = (d_1, ..., d_n) \in {}_R\mathsf{P}$ tales que $\omega_r^m = \tau \wedge \eta$. Como $\tau \wedge \eta(I_m) = I_r$ entonces $r = \textit{mín}\{\sum_{i=1}^m c_i, \sum_{i=1}^m d_i\}$, es decir, $\tau(I_m) = I_r$ o $\eta(I_m) = I_r$. Por la propiedad omega $\tau \leq \omega_r^m$ o $\eta \leq \omega_r^m$, así que $\tau = \omega_r^m$ o $\eta = \omega_r^m$. Luego ω_r^m es irreducible. ■

Corolario 2.5.2. *Sea $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma \neq \mathbf{1}$. Entonces σ es coirreducible si y sólo si $\sigma = \alpha_r^m$ para algún r tal que $0 \leq r \leq m \leq n$.*

Demostración. Para $\sigma \neq \mathbf{0}$ coirreducible, $\lambda(\sigma)$ es irreducible. Por el Corolario 2.4.2 $\lambda(\sigma) = \omega_r^m$. Se sigue que $\sigma = \lambda^{-1}(\omega_r^m) = \alpha_{m-r}^m$, donde $0 < m - r \leq m \leq n$. Recíprocamente, si $\sigma = \alpha_r^m$ para $0 < r \leq m \leq n$, como $\lambda(\sigma) = \omega_{m-r}^m$ se sigue de la Proposición previa que $\lambda(\sigma)$ es irreducible y así, σ es coirreducible. ■

Lema 2.5.3. *Sean $m, r, l, s \in \{1, ..., n\}$.*

1. *Si $0 < r \leq m$ y $0 < s \leq l$ entonces $\alpha_r^m \leq \alpha_s^l$ si y sólo si $r \leq s$ y $l - s \leq m - r$.*

2. *Si $r < m$ y $s < l$ entonces $\omega_r^m \leq \omega_s^l$ si y sólo si $r \leq s$ y $l - s \leq m - r$.*

Demostración. Para *1*, si $0 < r \leq m$ y $0 < s \leq l$, sean $\alpha_r^m = (a_1, ..., a_n)$ y $\alpha_s^l = (a'_1, ..., a'_n)$ de acuerdo a la Proposición 2.4.1.

($\Rightarrow$) Si $\alpha_r^m \leq \alpha_s^l$, entonces $r = \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n a'_i = s$. Ahora se supone $l - s > m - r$, esto es, existe un entero positivo t tal que $l - s = m - r + t$. Entonces $t = \sum_{i=1}^{m-r+t} a_i \leq \sum_{i=1}^{m-r+t} a'_i = \sum_{i=1}^{l-s} a'_i = 0$, lo cual es una contradicción y por tanto $l - s \leq m - r$.

($\Leftarrow$) Si $r \leq s$ y $l - s \leq m - r$ se verifica fácilmente que para cada $j \in \{1, ..., n\}$

$$\sum_{i=1}^{j} a_i \leq \sum_{i=1}^{j} a'_i.$$

Se concluye que $\alpha_r^m \leq \alpha_s^l$.

La demostración de *2* es similar. ■

Si $n \geq 1$, el conjunto $T_n := \{(i, j) \mid 0 < i \leq j \leq n\}$ es una subretícula de $\mathbf{n{+}1}^2$, sean $Irr({}_R\mathsf{P})$ y $Coirr({}_R\mathsf{P})$ los conjuntos de prerradicales irreducibles distintos de $\mathbf{1}$ y coirreducibles no cero respectivamente. La siguiente Proposición caracteriza a $Irr({}_R\mathsf{P})$ y $Coirr({}_R\mathsf{P})$.

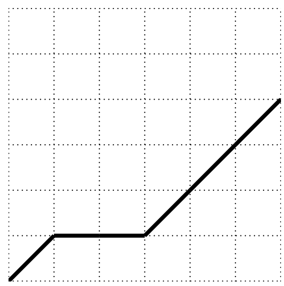

Figura 2.5: Un irreducible sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 6.

Proposición 2.5.4. *Existen isomorfismos de orden:*

1. $\varphi_n : Irr({}_R\mathsf{P}) \to T_n$*;*

2. $\gamma_n : Coirr({}_R\mathsf{P}) \to T_n$*.*

Demostración. *1* Por la Proposición 2.5.1 cada elemento de $Irr({}_R\mathsf{P})$ es de la forma ω_r^m, para m, r tales que $0 \leq r < m \leq n$. Sea $\varphi_n(\omega_r^m) := (r + 1, n - m + r + 1)$. φ_n es una función bien definida entre $Irr({}_R\mathsf{P})$ y T_n. Si $(i, j) \in T_n$,

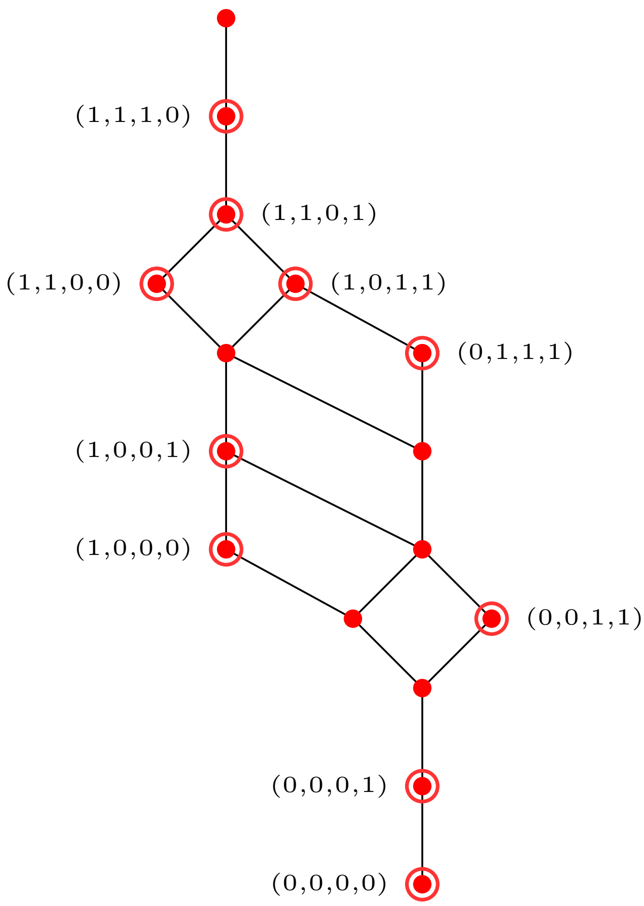

Figura 2.6: Prerradicales irreducibles sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 3 y 4.

entonces $\varphi(\omega_{i-1}^{n-j+i}) = (i, j)$, con $0 \leq i-1 < n-j+i \leq n$ pues $0 < i \leq j \leq n$. Por tanto φ_n es sobreyectiva. Ahora, si $\omega_r^m, \omega_s^l \in Irr({}_R\mathsf{P})$, por el Lema 2.5.3 se tiene que $\omega_r^m \leq \omega_s^l$ si y sólo si $r \leq s$ y $l - s \leq m - r$, que por definición de orden en T_n significa que $\varphi(\omega_r^m) \leq \varphi(\omega_s^l)$.

La prueba de *2* es similar. ■

2.6. Primos y coprimos

Si R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 2$ entonces R/I_1 es un anillo local uniserial con longitud de composición $n-1$.

Lema 2.6.1. *Sean $n \geq 2$ y $\sigma = (1, a_2, ..., a_n) \in {}_R\mathsf{P}$ en el hemisferio norte. Si σ es primo entonces $\tau = (a_2, ..., a_n)$ es primo en ${}_{R/I_1}\mathsf{P}$.*

Demostración. Para $n \geq 2$ y σ, τ como en la hipótesis, sean $\rho, \eta \in {}_{R/I_1}\mathsf{P}$

con $\rho\eta \leq \tau$. Si $\rho = (b_2, ..., b_n)$ y $\eta = (c_2, ..., c_n)$, se verifica fácilmente que $\rho^+\eta^+ \leq \sigma$, entonces $\rho^+ \leq \sigma$ o $\eta^+ \leq \sigma$. Luego, $\rho_1 \leq \tau$ o $\eta_1 \leq \tau$. ■

Proposición 2.6.2. *Sea $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma \neq \mathbf{1}$. Entonces σ es primo si y sólo si $\sigma = \omega_{m-1}^m$ para algún m tal que $0 < m \leq n$.*

Demostración. Por inducción sobre n. La afirmación se cumple si $n = 1$. Si el conjunto de prerradicales primos en ${}_{R/I_1}\mathsf{P}$ es $\{\omega_{m-1}^m \mid 0 < m \leq n-1\}$, por 1.2.19 ω_0^1 es un prerradical primo mínimo que a su vez es elemento de H_0^n. Sea ahora $\sigma = (1, a_2, ..., a_n)$, por el Lema 2.6.1 $\tau = (a_2, ..., a_n)$ es primo en ${}_{R/I_1}\mathsf{P}$ y por hipótesis inductiva $\tau = \omega_{m-1}^m$ para algún m tal que $0 < m \leq n$. Así, $\sigma = \omega_m^{m+1}$. Recíprocamente, si $0 < m \leq n$ entonces I_{m-1} es primo en I_m. Por la Proposición 1.2.18, ω_{m-1}^m es primo en ${}_R\mathsf{P}$. ■

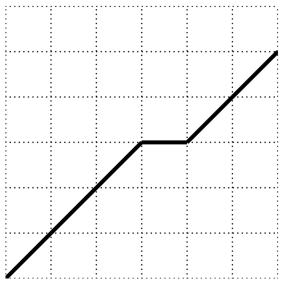

Figura 2.7: Un prerradical primo sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 6.

Corolario 2.6.3. *Sea $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, $\sigma \neq \mathbf{0}$. Entonces σ es coprimo si y sólo si $\sigma = \alpha_1^m$ para algún para algún m tal que $0 < m \leq n$.*

Demostración. Se sigue de 2.4.1 y 2.6.2. ■

Corolario 2.6.4. *Las colecciones de prerradicales primos y coprimos son cadenas en $\langle {}_R\mathsf{P}, \leq \rangle$.* ■

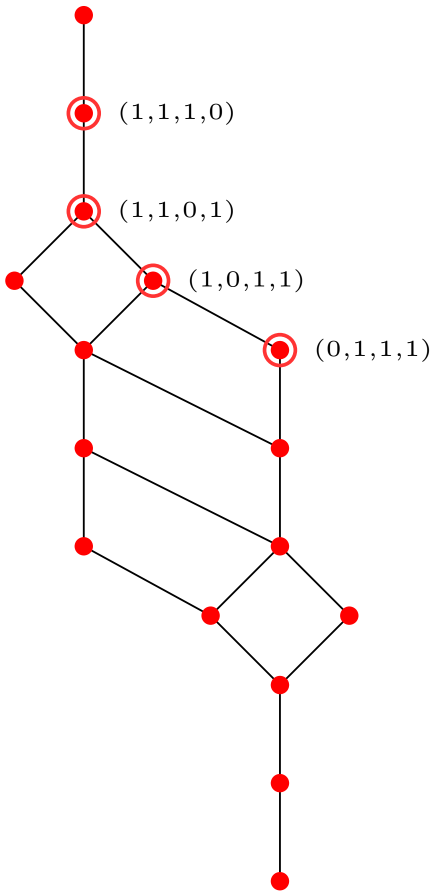

Figura 2.8: Prerradicales primos sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 4.

Capítulo 3

Cocientes de prerradicales

En este capítulo se introduce la sencilla noción de cociente de prerradicales junto con sus propiedades básicas como funtor. Se definirá una relación de equivalencia $\approx$ entre todos los endofuntores de la categoría R-Mod para cualquier anillo R, donde la colección de clases de equivalencia de cocientes de prerradicales forma un monoide (posiblemente no un conjunto) bajo la composición usual, denotado $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$. Se prueba que ${}_R\mathsf{P}$ se sumerge en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ de al menos dos formas, al considerar el producto $\circ$ y el coproducto $:$ de ${}_R\mathsf{P}$. Además se describe un submonoide muy particular.

El desarrollo de la teoría se encuentra en [32], que como se mencionó en la introducción, es la única referencia disponible en el tema. Se añaden aquí algunos resultados.

3.1. El endofuntor $\frac{\sigma}{\tau}$

Sea R un anillo asociativo con elemento unidad. Para cualesquiera dos prerradicales σ y τ en R-Mod con $\sigma \leq \tau$ y para cualquier R-módulo M, por definición del orden en R-pr se tiene que $\tau(M) \leq \sigma(M)$, de aquí que tenga sentido tomar el cociente $\sigma(M)/\tau(M)$. De hecho, lo anterior establece una asignación funtorial $\frac{\sigma}{\tau} : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$, que en elementos está dada por $\frac{\sigma}{\tau}\ (M) := \frac{\sigma(M)}{\tau(M)}$ y si $f \in Hom_R(M, N)$, se define $\frac{\sigma}{\tau}(f)$ se toma como

$$\begin{array}{ccc} \sigma(M)/\tau(M) & \xrightarrow{\frac{\sigma}{\tau}(f)} & \sigma(N)/\tau(N) \\ \\ x + \tau(M) & \longmapsto & f(x) + \tau(N) \end{array}$$

Es fácil notar que la asignación en morfismos está bien definida y que $\frac{\sigma}{\tau}$ cumple todos los requisitos para ser funtor. Ahora bien, es posible prescindir de la condición $\tau \leq \sigma$ (ya que en general el orden en R-pr no es lineal) al definir simplemente $\frac{\sigma}{\tau}(M) := \frac{\sigma \vee \tau(M)}{\tau(M)}$, donde el cociente ahora tiene sentido ya que $\sigma \vee \tau \geq \tau$. Aún si σ y τ fueran comparables, esta definición concuerda con la establecida anteriormente. Se usará la primera de ellas a lo largo del texto, a menos que se especifique lo contrario.

Antes de describir el monoide $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$, se establecen las propiedades básicas del funtor $\frac{\sigma}{\tau}$.

Proposición 3.1.1. *Sean σ y τ prerradicales en R-Mod con $\tau \leq \sigma$. Entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ conmuta con sumas directas. Es decir, si $\{M_i\}_{i\in\Gamma}$ es una familia de R-módulos, entonces $\frac{\sigma}{\tau}\left(\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i\right) \cong \bigoplus_{i\in\Gamma} \frac{\sigma}{\tau}(M_i)$.*

Demostración. $\frac{\sigma}{\tau}\left(\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i\right) := \dfrac{\sigma\left(\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i\right)}{\tau\left(\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i\right)} = \dfrac{\bigoplus_{i\in\Gamma}\sigma(M_i)}{\bigoplus_{i\in\Gamma}\tau(M_i)}$ y por tanto la asignación

$$\langle x_i\rangle_{i\in\Gamma} + \bigoplus_{i\in\Gamma} \tau\left(M_i\right) \mapsto \langle x_i + \tau(M_i)\rangle_{i\in\Gamma} \in \bigoplus_{i\in\Gamma} \frac{\sigma}{\tau}(M_i)$$

con $x \in \sigma\left(\bigoplus_{i\in\Gamma} M_i\right) = \bigoplus_{i\in\Gamma} \sigma\left(M_i\right)$, es el isomorfismo buscado.

■

Proposición 3.1.2. *Sean σ y τ prerradicales en R-Mod con $\tau \leq \sigma$. Entonces*

(a) $\left(\frac{1}{\tau}\right) \circ \sigma = \frac{\sigma}{\tau\circ\sigma}$;

(b) $\left(\frac{1}{\sigma}\right) \circ \sigma = 0$ *si y sólo si σ es idempotente;*

(c) $\sigma \circ \left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\tau:\sigma}{\tau}$;

(d) $\sigma \circ \left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0$ *si y sólo si σ es radical.*

Demostración. Sea $M \in R$-Mod.
(a) Por definición, $\frac{1}{\tau} \circ \sigma(M) := \frac{\sigma(M)}{\tau(\sigma(M))} = \frac{\sigma}{\tau\circ\sigma}(M)$.
(b) Del inciso anterior $\frac{1}{\sigma} \circ \sigma = \frac{\sigma}{\sigma\circ\sigma}$ y así

$$\frac{1}{\sigma} \circ \sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma = \sigma \circ \sigma \Leftrightarrow \sigma \text{ es idempotente.}$$

(c) $\sigma \circ \frac{1}{\tau} = \sigma(\frac{1}{\tau}) = \frac{(\tau:\sigma)}{\tau}$.
(d) $\sigma \circ \left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{(\sigma:\sigma)}{\sigma} = 0 \Leftrightarrow (\sigma:\sigma) = \sigma \Leftrightarrow \sigma$ es radical.

■

Proposición 3.1.3. *Para σ y τ prerradicales en R-Mod con $\tau \leq \sigma$:*

(*a*) *Si σ preserva epimorfismos, entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ preserva epimorfismos;*

(*b*) *Si $\frac{\sigma}{\tau}$ preserva epimorfismos y τ preserva epimorfismos entonces σ preserva epimorfismos.*

Demostración. (*a*) Sean $M, L \in R\text{-}Mod$ y $f \in Hom(M, L)$ un epimorfismo. Entonces $\sigma(f) : \sigma(M) \to \sigma(L)$ es un epimorfismo. Sea $0 \neq y + \tau(L) \in \sigma(L)/\tau(L)$, existe $x \in \sigma(M)$ tal que $f(x) = y$. Si $x \in \tau(M)$, como τ es un prerradical, $y = f(x) \in \tau(L)$, una contradicción. Por tanto $0 \neq x + \tau(M)$.

(*b*) Si $f \in Hom(M, L)$ es epimorfismo entonces $\tau(f) : \tau(M) \to \tau(L)$ y $\frac{\sigma}{\tau}(f) : \frac{\sigma(M)}{\tau(M)} \to \frac{\sigma(L)}{\tau(L)}$ son epimorfismos. Sea $y \in \sigma(L)$.

1. Si $y \in \tau(L)$ existe $x \in \tau(M) \subset \sigma(M)$ tal que $f(x) = y$.

2 Si $y \in \sigma(M)\backslash\tau(L)$ entonces $0 \neq y + \tau(L)$, así existe $x + \tau(M) \in \sigma(M)/\tau(M)$ con $\frac{\sigma}{\tau}(f)(x + \tau(M)) = f(x) + \tau(L) = y + \tau(M)$. Luego $y - f(x) \in \tau(L)$, con lo cual existe $z \in \tau(L)$ tal que $f(z) = y - f(x)$, entonces $f(x + z) = y$ con $x + z \in \sigma(M)$.

Se ha probado que $\sigma(f) : \sigma(M) \to \tau(M)$ es un epimorfismo.

■

Corolario 3.1.4. *Supongamos que τ preserva epimorfismos. Entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ preserva epimorfismos si y sólo sí σ preserva epimorfismos.* ■

Proposición 3.1.5. *Si $\frac{\sigma}{\tau}$ es exacto izquierdo y τ es exacto izquierdo entonces σ es exacto izquierdo.*

Demostración. Se supone exacta la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0.$$

Como $\frac{\sigma}{\tau}$ y τ son funtores exactos izquierdos, las sucesiones

$$0 \longrightarrow \frac{\sigma}{\tau}(N) \xrightarrow{\hat{f}} \frac{\sigma}{\tau}(M) \xrightarrow{\hat{g}} \frac{\sigma}{\tau}(L);$$

$$0 \longrightarrow \tau(N) \xrightarrow{f''} \tau(M) \xrightarrow{g''} \tau(L).$$

son exactas, donde $\hat{f} = \frac{\sigma}{\tau}(f)$, $\hat{g} = \frac{\sigma}{\tau}(g)$ y f'', g'' son las restricciones usuales. Basta averiguar que

$$0 \longrightarrow \sigma(N) \xrightarrow{f'} \sigma(M) \xrightarrow{g'} \sigma(L)$$

es exacta en $\sigma(M)$ (ya que la preservación del monomorfismo se cumple pues σ es prerradical), donde f', g' son las restricciones usuales. Sea $m \in Kerg' \subseteq Kerg \subseteq \sigma(M)$.

1. Si $m \in \tau(M)$ entonces $x \in Kerg'' = Imf'' \subseteq Imf'$.

2. Si $m \in \sigma(M) \setminus \tau(M)$ entonces $m + \tau(M) \neq 0$ y $\hat{g}(m + \tau(M)) = g(x) + \tau(L) = 0$. Luego existe $0 \neq n + \tau(N) \in \frac{\sigma}{\tau}(N)$ tal que $f(n) + \tau(M) = \hat{f}(n + \tau(N)) = m + \tau(M)$, es decir, existe $x \in \tau(M)$ tal que $m - f(n) = x$, así

$$0 = g(m) - gf(n) = g(m - f(n)) = g(x).$$

Entonces $x \in Kerg \cap \tau(M) = Kerg'' = Imf''$ y por tanto existe $y \in \tau(N) \subseteq \sigma(N)$ tal que $f(y) = f''(y) = x$. Se sigue que $m - f(n) = f(y)$, lo cual implica que $m = f(y - n) \in Imf'$.

Como la contención $Imf'' \subseteq Kerg''$ siempre se cumple, se concluye que en realidad es una igualdad y así la sucesión

$$0 \longrightarrow \sigma(N) \xrightarrow{f'} \sigma(M) \xrightarrow{g'} \sigma(L)$$

es exacta. ■

Ejemplo 3.1.6. En la categoría de grupos abelianos $\mathbb{Z}$-Mod, dado un entero positivo n se define el prerradical An_n por

$$An_n(M) = \{x \in M \mid nx = 0 \ \ \forall M \in \mathbb{Z}\text{-}Mod\}.$$

En [20, Proposición 4.30,4.31] se prueba que para cada $n \geq 1$, An_n es un prerradical exacto izquierdo que nos es radical. Es sencillo observar que $An_m \leq An_n$ si y sólo si $m|n$ y que la torsión usual τ es mayor que An_n para cualquier n.

Si $f : N \to M$ es un monomorfismo de grupos abelianos, entonces $\frac{1}{An_m}(f)$, $\frac{\tau}{An_m}(f)$, $\frac{An_n}{An_m}(f)$ (para $n \geq m$) son todos monomorfismos. En el caso de $\frac{1}{An_m}(f)$, si $\frac{1}{An_m}(f)(x + An_m(N)) = 0$, se tiene que $f(x) \in An_m(M)$, con lo cual $f(mx) = mf(x) = 0$. Como f es mono, $x \in An_m(N)$ y $x + An_m(N) = 0$. Al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0,$$

aplicando $\frac{1}{An_2}$ se tiene

$$0 \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_2}{An_2(\mathbb{Z}_2)} \xrightarrow{\hat{f}} \frac{\mathbb{Z}_8}{An_2(\mathbb{Z}_8)} \xrightarrow{\hat{g}} \frac{\mathbb{Z}_4}{An_2(\mathbb{Z}_4)} \longrightarrow 0,$$

que puede verse como

$$0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\hat{f}} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\hat{g}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

La última sucesión no es exacta en $\mathbb{Z}_4$. Luego, cocientes de prerradicales exactos izquierdos no son necesariamente funtores exactos (izquierdos).

3.2. El prerradical $\diamond$

Como se anunció en la introducción al capítulo, es de particular interés estudiar la estructura de la colección de clases de equivalencia de elementos del tipo $\frac{\sigma}{\tau}$ con $\tau \leq \sigma$ (módulo alguna relación $\approx$). Para tal propósito se introduce un nuevo y muy útil prerradical.

Para cualesquiera $\rho, \sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$ se define $\diamond(\rho, \sigma, \tau)$ como:

$$\diamond(\rho, \sigma, \tau)(M)\big/\tau(M) := \rho(\sigma(M)\big/\tau(M)).$$

La siguiente proposición dice que $\diamond$ es una operación terciaria en *R-pr*.

Proposición 3.2.1. *El funtor $\diamond(\rho, \sigma, \tau)$ es un prerradical en R-Mod para cualesquiera prerradicales ρ, σ, τ en ${}_R\mathsf{P}$.*

Demostración. Sea $\lambda = \diamond(\rho, \sigma, \tau)$, por tanto $\lambda(M)/\tau(M) = \rho\left(\frac{\sigma(M)}{\tau(M)}\right)$ para todo $M \in R\text{-}Mod$. Sean entonces $M, N \in R\text{-}Mod$ y $f \in Hom(M, N)$. Como ρ es un prerradical:

$$\begin{array}{ccc} \lambda(M)/\tau(M) & \overset{\rho\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)(f)}{\longrightarrow} & \lambda(N)/\tau(N) \\ x + \tau(M) & \longmapsto & f(x) + \tau(N) \end{array}$$

para cada $x \in \lambda(M)$, con lo cual

$$\begin{array}{rcl} x \in \lambda(M) & \Leftrightarrow & x + \tau(M) \in \rho\left(\sigma(M)/\tau(M)\right) \\ & \Rightarrow & f(x) + \tau(N) \in \rho\left(\sigma(N)\tau(N)\right) = \lambda(M)/\tau(M) \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in \lambda(N). \end{array}$$

Así, la imagen de $\lambda(M)$ bajo f está contenida en $\lambda(N)$. Se concluye que λ es un prerradical. ∎

De lo anterior se deduce que $\diamond(\rho, \sigma, \tau)$ es el único prerradical λ tal que $\frac{\lambda}{\tau} = \rho\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)$. Por otra parte, en la definición de $\diamond$ no se requiere $\tau \leq \sigma$, así que este es el caso $\frac{\sigma}{\tau} := \frac{\sigma \vee \tau}{\tau}$. Sin embargo, desde la sección siguiente y todo lo que resta del texto se asume que σ es mayor que τ.

Proposición 3.2.2. *Si $\rho, \sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$, se cumplen las siguientes condiciones*

(*a*) $\diamond(\rho, \sigma, \tau) = \diamond(\rho, \sigma \vee \tau, \tau) = \diamond(\rho, \sigma, \tau \wedge \sigma) \vee \tau$;

(*b*) $\diamond(\rho, \sigma, \tau \circ \sigma) = \diamond(\rho, 1, \tau) \circ \sigma = (\tau : \rho) \circ \sigma$.

Demostración. (*a*) La primer igualdad se sigue del hecho que $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma \vee \tau}{\tau}$. Para probar $\diamond(\rho, \sigma \vee \tau, \tau) = \diamond(\rho, \sigma, \tau \wedge \sigma) \vee \tau$, sea $M \in R\text{-}Mod$; por el segundo teorema de isomorfismo, se tiene el isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \dfrac{\sigma(M)}{\tau(M)\cap\sigma(M)} & \longrightarrow & \dfrac{\sigma(M)+\tau(M)}{\tau(M)} \\ \\ x+\tau(M)\cap\sigma(M) & \longmapsto & x+\tau(M)\ . \end{array}$$

Si $\tau(M)\cap\sigma(M)\leq L\leq\sigma(M)$ para algún submódulo de $\sigma(M)$, entonces

$$\varphi\left[\frac{L}{\tau(M)\cap\sigma(M)}\right]=\frac{L+\tau(M)}{\tau(N)}\leq\frac{\sigma(M)+\tau(M)}{\tau(N)}.$$

Como ρ es un prerradical, preserva isomorfismos, por tanto

$$\varphi\left[\rho\left(\frac{\sigma(M)}{\tau(M)\cap\sigma(M)}\right)\right]=\rho\left(\frac{\sigma(M)+\tau(M)}{\tau(M))}\right).$$

Por definición

$$\rho\left(\frac{\sigma(M)}{\tau(M)\cap\sigma(M)}\right)=\frac{\diamond(\rho,\sigma,\tau\wedge\sigma)(M)}{\tau(M)\cap\sigma(M)}$$

y

$$\rho\left(\frac{\sigma(M)+\tau(M)}{\tau(M)}\right)=\frac{\diamond(\rho,\sigma\vee\tau,\tau)(M)}{\tau(M)}.$$

Por tanto

$$\varphi\left(\frac{\diamond(\rho,\sigma,\tau\wedge\sigma)(M)}{\tau(M)\cap\sigma(M)}\right)=\frac{\diamond(\rho,\sigma\vee\tau,\tau)(M)}{\tau(M)}.$$

Con lo cual se cumple que $\diamond(\rho,\sigma,\tau\wedge\sigma)(M)+\tau(M)=\diamond(\rho,\sigma\vee\tau,\tau)(M)$ para cada $M\in R\text{-}Mod$, así

$$\diamond(\rho,\sigma,\tau\wedge\sigma)(M)\vee\tau=\diamond(\rho,\sigma\vee\tau,\tau).$$

(b) Como $\dfrac{\diamond(\rho,1,\tau)}{\tau}=\rho\left(\dfrac{1}{\tau}\right)=\dfrac{(\tau:\rho)}{\tau}$, entonces $\diamond(\rho,1,\tau)=(\tau:\rho)$. Sea $M\in R\text{-}Mod$. Se cumple

$$\frac{\diamond(\rho,\sigma,\tau\circ\sigma)(M)}{\tau\circ\sigma(M)}=\rho\left(\frac{\sigma(M)}{\tau\left(\sigma(M)\right)}\right)=\frac{(\tau:\rho)\left(\sigma(M)\right)}{\tau\left(\sigma(M)\right)}=\frac{\left[(\tau:\rho)\circ\sigma\right](M)}{\tau\circ\sigma(M)}.$$

Por unicidad de $\diamond$, $\diamond(\rho,\sigma,\tau\circ\sigma)=(\tau:\rho)\circ\sigma$. ■

Si en el inciso (b) de la proposición anterior $\tau=0$, se obtiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\diamond(\rho,\sigma,0)=\diamond(\rho,\sigma,0\circ\sigma)=\diamond(\rho,1,0)\circ\sigma=(0:\rho)\circ\sigma=\rho\circ\sigma.$$

Es decir $\diamond(\rho,\sigma,0)=\rho\circ\sigma$. En cambio, si $\sigma=1$ se mostró que

$$\diamond(\rho,1,\tau)=(\tau:\rho)\circ 1=(\tau:\rho).$$

Puede decirse que el prerradical $\diamond$ encierra las definiciones del producto y coproducto en ${}_R\mathsf{P}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \diamond(\rho,\sigma,\tau) \arrow[dl, "\tau=0"'] \arrow[dr, "\sigma=1"] & \\
\rho\circ\sigma & & (\tau:\rho)
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, el cambio de orden en la escritura de $\diamond(\sigma,1,\tau)$ y $(\tau:\rho)$ se debe únicamente a la forma en la que está definido el producto y aunque dicho cambio no tiene mayor trascendencia, será importante un poco más adelante. Se define entonces $(\sigma:^{\mathbf{op}}\tau):=(\tau:\sigma)$, el coproducto opuesto en ${}_R\mathsf{P}$ para cualesquiera σ y τ prerradicales.

Observación 3.2.3. Sean ρ,σ,τ prerradicales en R-Mod y τ hereditario, entonces

$$\begin{aligned}
\diamond(\rho,\sigma,\tau) &= \diamond(\rho,\sigma,\tau\wedge\sigma)\vee\tau && \text{(Proposición 3.2.2)}\\
&= \diamond(\rho,\sigma,\tau\circ\sigma)\vee\tau && (\wedge \text{ y } \circ \text{ coinciden pues } \tau\in {}_R\mathsf{HP})\\
&= [(\tau:\rho)\circ\sigma]\vee\tau && \text{(Proposición 3.2.2).}
\end{aligned}$$

Si además ρ es hereditario entonces (por 1.2.9) $(\tau:\rho)\in {}_R\mathsf{HP}$, así $(\tau:\rho)\circ\sigma=(\tau:\rho)\wedge\sigma$. De tal forma se tiene que

$$\diamond(\rho,\sigma,\tau)=[(\tau:\rho)\wedge\sigma]\vee\tau \quad \forall\rho,\sigma,\tau\in {}_R\mathsf{HP}. \tag{❀}$$

Proposición 3.2.4. *Para $\sigma,\tau\in {}_R\mathsf{P}$ y $\{\rho_i\mid i\in\Gamma\}\subseteq {}_R\mathsf{P}$ se cumplen las siguientes condiciones*

a) $\diamond(\bigvee\rho_i,\sigma,\tau)=\bigvee\diamond(\rho_i,\sigma,\tau)$.

b) $\diamond(\bigwedge\rho_i,\sigma,\tau)=\bigwedge\diamond(\rho_i,\sigma,\tau)$.

Demostración. (a) Sea $M\in R$-mod.

$$\begin{aligned}
\frac{\diamond(\bigvee\rho_i,\sigma,\tau)(M)}{\tau(M)} = \bigvee\rho_i\left(\frac{\sigma(M)}{\tau(M)}\right) = \sum\rho_i\left(\frac{\sigma(M)}{\tau(M)}\right) &= \sum\frac{\diamond(\rho_i,\sigma,\tau)(M)}{\tau(M)}\\
=\frac{\sum\diamond(\rho_i,\sigma,\tau)(M)}{\tau(M)} &= \frac{\bigvee\diamond(\rho_i,\sigma,\tau)(M)}{\tau(M)}.
\end{aligned}$$

La prueba de (b) es similar.

$\blacksquare$

3.3. El monoide $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$

Si ${}_R\mathsf{E}$ denota la colección de todos los endofuntores en R-Mod, para cualesquiera ϵ y δ elementos de ${}_R\mathsf{E}$ se define

$$\epsilon \approx \delta \Leftrightarrow \epsilon(M) \cong \delta(M) \qquad \forall M \in R\text{-}Mod.$$

Claramente $\approx$ es una relación de equivalencia. Más aún, para $\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_1, \delta_2 \in {}_R\mathsf{E}$ con $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ y $\delta_1 \approx \delta_2$

$$\delta_1(M) \cong \delta_2(M) \Rightarrow \epsilon_1(\delta_1(M)) \cong \epsilon_2(\delta_2(M)) \Rightarrow \epsilon_1 \circ \delta_1 \approx \epsilon_1 \circ \delta.$$

Entonces $\approx$ es compatible con el producto usual de funtores y por tanto se encuentra bien definida en ${}^{R}\mathsf{E}/\approx$ la operación

$$[\epsilon] \circ [\delta] \coloneqq [\epsilon \circ \delta].$$

Se define ahora

$$\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) \coloneqq \left\{ \left[\frac{\sigma}{\tau}\right] \,\middle|\, \sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}, \tau \leq \sigma \right\}.$$

Teorema 3.3.1. *$\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ es un monoide bajo la operación binaria $\circ$.*

Demostración. Debido a que los funtores $\frac{1}{0}$ y $\mathbf{1}$ son equivalentes bajo $\approx$, la identidad en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ es $[\mathbf{1}]$. Además es evidente que $\circ$ es asociativa, con lo cual resta probar que $\circ$ es cerrada. Para tal fin sean $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in {}_R\mathsf{P}$ con $\tau_1 \leq \sigma_1$ y $\tau_2 \leq \sigma_2$ y sea $M \in R$-Mod. Entonces

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma_1}{\tau_1} \circ \frac{\sigma_2}{\tau_2}\right)(M) &= \frac{\sigma_1}{\tau_1}\left(\frac{\sigma_2(M)}{\tau_2(M)}\right) = \sigma_1\left(\frac{\sigma_2(M)}{\tau_2(M)}\right) \Bigg/ \tau_1\left(\frac{\sigma_2(M)}{\tau_2(M)}\right) \\
&= \left[\frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_2, \tau_2)(M)}{\tau_2(M)}\right] \Bigg/ \left[\frac{\diamond(\tau_1, \sigma_2, \tau_2)(M)}{\tau_2(M)}\right] \\
&\cong \frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_2, \tau_2)(M)}{\diamond(\tau_1, \sigma_2, \tau_2)(M)} = \frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_2, \tau_2)}{\diamond(\tau_1, \sigma_2, \tau_2)}(M).
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{\sigma_1}{\tau_1} \circ \frac{\sigma_2}{\tau_2} \approx \frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_2, \tau_2)}{\diamond(\tau_1, \sigma_2, \tau_2)}.$$

Se sigue que

$$\left[\frac{\sigma_1}{\tau_1}\right] \circ \left[\frac{\sigma_2}{\tau_2}\right] = \left[\frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_2, \tau_2)}{\diamond(\tau_1, \sigma_2, \tau_2)}\right]. \tag{✺}$$

■

Si en la identidad (✺) del teorema anterior se considera $\tau_1 = \tau_1 = 0$ entonces por 3.2.2

$$\left[\frac{\sigma_1}{0}\right] \circ \left[\frac{\sigma_1}{0}\right] = \left[\frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_1, 0)}{\diamond(0, \sigma_1, 0)}\right] = \left[\frac{\sigma_1 \circ \sigma_2}{0}\right].$$

Similarmente, al tomar $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$

$$\left[\frac{1}{\tau_1}\right] \circ \left[\frac{1}{\tau_2}\right] = \left[\frac{\diamond(1, 1, \tau_2)}{\diamond(\tau_1, 1, \tau_2)}\right] = \left[\frac{(\tau_2 : 1)}{(\tau_2 : \tau_1)}\right] = \left[\frac{1}{(\tau_2 : \tau_1)}\right].$$

Para cualesquiera prerradicales σ y τ se define

$$\sigma \equiv \tau \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \approx \frac{1}{\sigma}.$$

Es evidente que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Teorema 3.3.2.

a) *La asignación $\sigma \mapsto \left[\frac{\sigma}{0}\right]$ es un homomorfismo de monoides de $\langle {}_R\mathsf{P}, \circ\rangle$ en $\langle \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}), \circ\rangle$. El núcleo*[1] *de este homomorfismo es precisamente la relación de congruencia $\approx$. Así ${}_R\mathsf{P}/\approx$ se sumerge en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$.*

b) *La asignación $\tau \mapsto \left[\frac{1}{\tau}\right]$ es un homomorfismo de monoides de $\langle {}_R\mathsf{P}, :^{op}\rangle$ en $\langle \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}), \circ\rangle$. El núcleo de este homomorfismo es $\equiv$. Así ${}_R\mathsf{P}/\equiv$ se sumerge en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$.*

Demostración. Por las observaciones anteriores sólo basta verificar que los núcleos de los homomorfismos mencionados sean como establece el enunciado.
(a) Si f denota al homomorfismo entonces

$$ker f = \{(\sigma, \tau) \mid f(\sigma) = f(\tau)\} = \left\{(\sigma, \tau) \mid \left[\frac{\sigma}{0}\right] = \left[\frac{\tau}{0}\right]\right\} = {}_R\mathsf{P}/\approx.$$

(b) Se procede de forma similar. ∎

Lema 3.3.3. (a) *Si σ y τ son prerradicales idempotentes en R-Mod entonces $\sigma \approx \tau$ si y sólo sí $\sigma = \tau$.*

(b) *Dualmente, si σ y τ son radicales en R-Mod entonces $\sigma \equiv \tau$ si y sólo si $\sigma = \tau$.*

[1] Ver sección 1.1.1

Demostración. (a) Claramente $\sigma \approx \tau$ si $\sigma = \tau$. Suponer ahora que $\sigma \approx \tau$. Dado $M \in \mathbb{T}_\sigma$, $\tau(M) \cong \sigma(M) = M$. Como τ es un prerradical, preserva isomorfismos, de ahí que $M \in \mathbb{T}_\tau$. La otra contención se obtiene de forma similar. Por la correspondencia entre prerradicales idempotentes y clases de pretorsión se concluye que $\sigma = \tau$.

(b) La demostración es dual a la anterior. ■

Del lema previo se sigue que cualquier submonoide X de $\langle {}_R\mathsf{P}, \circ\rangle$ formado únicamente por elemetos idempotentes se sumerge en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ bajo el homomorfismo de monoides $\sigma \mapsto \left[\frac{\sigma}{0}\right]$; dualmente, cualquier submonoide Y de $\langle {}_R\mathsf{P}, :^{\mathbf{op}}\rangle$ formado sólo por radicales, se sumerge en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ bajo el homomorfismo $\tau \mapsto \left[\frac{1}{\tau}\right]$.

Se define

$$\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP}) := \left\{ \frac{\sigma}{\tau} \in \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) \mid \sigma, \tau \in {}_R\mathsf{HP};\ \tau \leq \sigma \right\}.$$

Teorema 3.3.4. *$\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ es un submonoide de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$.*

Demostración. Como el prerradical identidad es hereditario, $\mathbf{1} \in \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in {}_R\mathsf{HP}$ con $\tau_1 \leq \sigma_1$ y $\tau_2 \leq \sigma_2$. Por la observación 3.2.3

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\tau_1} \circ \frac{\sigma_2}{\tau_2} &\approx \frac{\diamond(\sigma_1, \sigma_2, \tau_2)}{\diamond(\tau_1, \sigma_2, \tau_2)} \\ &= \frac{[(\tau_2 : \sigma_1) \wedge \sigma_2] \vee \tau_2}{[(\tau_2 : \tau_1) \wedge \sigma_2] \vee \tau_2} \\ &= \frac{(\tau_2 : \sigma_1) \wedge \sigma_2}{(\tau_2 : \tau_1) \wedge \sigma_2}. \end{aligned}$$

Como ${}_R\mathsf{HP}$ es cerrada bajo $:$ y $\wedge$, entonces $(\tau_2 : \sigma_1) \wedge \sigma_2$ y $(\tau_2 : \tau_1) \wedge \sigma_2$ pertenecen a ${}_R\mathsf{HP}$. Por otro lado, como $\tau_1 \leq \sigma_1$ se cumple la desigualdad

$$(\tau_2 : \tau_1) \wedge \sigma_2 \leq (\tau_2 : \sigma_1) \wedge \sigma_2$$

y por tanto $\left[\frac{\sigma_1}{\tau_1}\right] \circ \left[\frac{\sigma_2}{\tau_2}\right] \in \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$. ■

En general se cumple que si $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ es conmutativo, entonces por la proposición 3.1.2 para cada $\sigma \in {}_R\mathsf{HP}$

$$\sigma \circ \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \circ \sigma = \frac{\sigma}{\sigma \circ \sigma} = 0.$$

Es decir, σ es radical, con lo cual ${}_R\mathsf{HP} = {}_R\mathsf{HR}$. Naturalmente se presenta la siguiente ☞

Pregunta 3.3.5. *¿Si ${}_R\mathsf{HP} = {}_R\mathsf{HR}$, entonces $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ es conmutativo?*

Desafortunadamente, en este texto no habrá oportunidad de responderla afirmativa o negativamente, ni siquiera conjeturar una respuesta.

3.4. Ejemplos

A continuación se presenta la descripción de los cocientes de prerradicales sobre anillos semisimples artinianos, lo que genenaliza el primer ejemplo en [32]. Posteriormente, se desribe $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ para un anillo particular.

3.4.1. Anillos semisimples artinianos

Sea R un anillo semisimple artiniano. Sea $\mathcal{S} := R\text{-}simp = \{S_1, ..., S_n\}$ un conjunto completo e irredundante de módulos simples. Si σ,$\tau \in {}_R\mathsf{P}$, por el teorema 1.3.8 existen subconjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ tales que $\sigma = soc_{\mathcal{A}}$ y $\tau = soc_{\mathcal{B}}$. Es fácil notar que $\tau \leq \sigma$ si y sólo si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. En tal caso, si S es un módulo simple, $\frac{\sigma}{\tau}(S) \cong S$ si y sólo si $\sigma(S) = S$ y $\tau(S) = 0$. En contraparte, $\frac{\sigma}{\tau}(S) \cong 0$ si y sólo si $\sigma(S) = \tau(S)$.

Proposición 3.4.1. *Si $\sigma = soc_{\mathcal{A}}$ y $\tau = soc_{\mathcal{B}}$ con $\tau \leq \sigma$, entonces*

$$\frac{\sigma}{\tau} \approx soc_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}.$$

Es decir ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$. En particular $\frac{1}{soc_{\mathcal{A}}} \approx soc_{\mathcal{A}^c}$ para cualquier $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$.

Demostración. Sea $S \in \mathcal{S}$. Si $S \in \mathcal{A}^c$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(S) \cong 0$. Si $S \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(S) \cong S$. En cambio, si $S \in B$ se tiene que $\frac{\sigma}{\tau}(S) \cong 0$. Cualquiera que sea el caso se cumple $\frac{\sigma}{\tau}(S) \cong soc_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}(S)$ y por tanto la equivalencia $\frac{\sigma}{\tau} \approx soc_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$. ■

Es claro que $soc_{\mathcal{A}} \circ soc_{\mathcal{B}} = soc_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ para cuales quiera $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$. Esta observación y el resultado previo establecen lo siguiente.

Corolario 3.4.2. *Sean $\sigma = soc_{\mathcal{A}}$, $\tau = soc_{\mathcal{B}}$ y $\rho = soc_{\mathcal{D}}$ con $\tau \leq \sigma$. Entonces*

$$\frac{\diamond(\rho, \sigma, \tau)}{\tau} \approx soc_{\mathcal{D}\cap\mathcal{A}\cap\mathcal{B}^c}.$$

■

En la tabla 3.1 se considera un anillo semisimple artiniano con únicamente dos módulos simples S_1 y S_2. Se definen $\sigma_1 = soc_{S_1}$ y $\sigma_2 = soc_{S_2}$.

$\circ$	$\mathbf{0}$	σ_1	σ_2	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
σ_1	$\mathbf{0}$	σ_1	$\mathbf{0}$	σ_1
σ_2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	σ_2	σ_2
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	σ_1	σ_2	$\mathbf{1}$

Tabla 3.1: Tabla de multiplicación de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) = {}_R\mathsf{P}$ para un anillo semisimple con dos módulos simples.

3.4.2. Un anillo particular

Sea F un campo y $R = F \ltimes F$ [2]. Entonces R es isomorfo al anillo de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in F \right\}$. Se cumple que R es conmutativo pues dadas dos matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ en R

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + bx \\ 0 & ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Con lo cual $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la identidad de R.

Proposición 3.4.3. *El único ideal propio de R es $J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, R es Artiniano.*

Demostración. Sea $I \subseteq R$ un ideal tal que existe un elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in I$ con $a \neq 0$, entonces a y a^2 son distintos del cero pues F es un campo y así

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in I$$

■

En el Apéndice A se prueba que la asignación $I \to \eta_I$ entre los ideales de un anillo y el conjunto de prerradicales hereditarios, donde $\eta_I(M) := \{x \in M \mid Ix = 0\}$, es sobreyectiva precisamente cuando el anillo en cuestión es artiniano. Debido a que el anillo R de este ejemplo es artiniano local se tiene que $\eta_I = soc$, de donde se observa que ${}_R\mathsf{HP} = \{\mathbf{0}, soc, \mathbf{1}\}$. Entonces

[2]La extensión trivial de F por F. Para su definición formal así como sus propiedades básicas se sugiere el ejercicio 6.8(3) de [33].

$\circ$	0	soc	$\frac{1}{soc}$	1
0	0	0	0	0
soc	0	1	$\frac{1}{soc}$	soc
$\frac{1}{soc}$	0	0	0	$\frac{1}{soc}$
1	0	soc	$\frac{1}{soc}$	1

Tabla 3.2: Tabla de multiplicación de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$, donde $R = F \ltimes F$.

$$\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP}) = \{\mathbf{0}, soc, \frac{1}{soc}, \mathbf{1}\}.$$

A diferencia del ejemplo anterior, $soc : soc = \mathbf{1}$, ya que $soc : soc = (\eta_I : \eta_I) = \eta_{I^2} = \eta_0 = \mathbf{1}$.

Capítulo 4

Caracterizando anillos con $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$

4.1. Anillos semisimples artinianos

Por el Teorema 3.3.2, ${}_R\mathsf{P}$ se sumerge en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ bajo el morfismo de monoides $\sigma \xrightarrow{\chi_1} \left[\frac{\sigma}{0}\right]$. Anillos para los cuales este morfismo es biyectivo (lo que se escribe como ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$) se caracterizan en el Teorema 4.1.9, mientras que en 4.2.12 se dan condiciones necesarias y suficientes para que en un anillo R, la imagen de χ_1 contenga a $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$; esta última situación se expresa en símbolos como ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$. Se sigue fielmente la teoría desarrollada en [32].

Proposición 4.1.1. *Sea $M \in R$-Mod. Si se cumple ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$, entonces para cada σ y τ prerradicales en $\sigma[M]$ con $\tau \leq \sigma$ existe un prerradical λ en $\sigma[M]$ tal que $\lambda \approx \frac{\sigma}{\tau}$.*

Demostración. Sean σ y τ como en la hipótesis. Sea ρ el prerradical hereditario cuya clase de pretorsión coincide con $\sigma[M]$, así $\sigma[M] = \{M \mid \rho(N) = N\}$. Como en particular ρ es idempotente, $\rho(M) \in \mathbb{T}_\rho = \sigma[M]$, por tanto $\tau \circ \rho$ y $\sigma \circ \rho$ son prerradicales en R-*Mod*. Además, es claro que $\tau \circ \rho \leq \sigma \circ \rho$. Por hipótesis, existe $\lambda \in {}_R\mathsf{P}$ tal que

$$\lambda \approx \frac{\sigma \circ \rho}{\tau \circ \rho} = \left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \circ \rho.$$

Si $N \in \sigma[M]$ entonces $\lambda(N) \cong (\frac{\sigma}{\tau}) \circ \rho(N) = \frac{\sigma}{\tau}(N)$. Como $\sigma[M]$ es cerrada bajo submódulos y $\lambda(N) \leq N$ entonces $\lambda(N) \in \sigma[M]$. Se cumple así que $\lambda|_{\sigma[M]}$ es un prerradical en $\sigma[M]$ y por tanto $\frac{\sigma}{\tau} \approx \lambda|_{\sigma[M]}$. ■

En este capítulo se usará continuamente que ${}_R\mathsf{HP}$ es cerrada bajo $\circ$.

Corolario 4.1.2. *Sea $M \in R$-Mod. Si se cumple ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ entonces para cada σ y τ prerradicales hereditarios en $\sigma[M]$ con $\tau \leq \sigma$, existe un prerradical λ en $\sigma[M]$ tal que $\lambda \approx \frac{\sigma}{\tau}$.* ■

Sea I un ideal de un anillo R, viendo a ambos como R-módulos izquierdos el cociente $M := R/I$ también es un módulo izquierdo que a su ves es un anillo, con lo cual $\sigma[M] = R/I$-Mod. Se siguen ahora los siguientes resultados.

Corolario 4.1.3. *Sea I un ideal de R. Si ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ entonces ${}_{R/I}\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_{R/I}\mathsf{P})$.* ■

Corolario 4.1.4. *Sea I un ideal de R. Si ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ entonces ${}_{R/I}\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_{R/I}\mathsf{HP})$.* ■

Proposición 4.1.5. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una familia finita de anillos $\{R_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.*

(*a*) *${}_{R_i}\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_{R_i}\mathsf{P})$ para todo $1 \leq i \leq n$;*

(*b*) *Si $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ entonces ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$.*

Demostración. $(b) \Rightarrow (a)$ Es consecuencia del Corolario 4.1.3 pues cada R_i es isomorfo a un ideal de R.

$(a) \Rightarrow (b)$ Se puede asumir que $n = 2$ y concluir por inducción. Si $\lambda_i \in {}_{R_i}\mathsf{P}$ con $i = 1, 2$, se tiene el prerradical (λ_1, λ_2) definido por

$$(\lambda_1, \lambda_2)(M) = \lambda_1((R_1 \times 0)M) + \lambda_2((0 \times R_2)M)$$

para cada $M \in R$-Mod. Sean $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$ con $\tau \leq \sigma$ y sean $\sigma_i = \sigma|_{R_i-Mod}$ y $\tau_i = \tau|_{R_i-Mod}$ con $i = 1, 2$. Claramente $\sigma_i, \tau_i \in {}_{R_i}\mathsf{P}$ y $\tau_i \leq \sigma_i$. Por (a) existen prerradicales $\lambda_i \in {}_{R_i}\mathsf{P}$ con $i = 1, 2$ tales que $\frac{\sigma_i}{\tau_i} \approx \lambda_i$. Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{\tau}(M) &= \frac{\sigma(M)}{\tau(M)} = \frac{\sigma((R_1 \times 0)M + (0 \times R_2)M)}{\tau((R_1 \times 0)M + (0 \times R_2)M)} \\
&= \frac{\sigma((R_1 \times 0)M) + \sigma((0 \times R_2)M)}{\tau((R_1 \times 0)M) + \tau((0 \times R_2)M)} \\
&\cong \frac{\sigma((R_1 \times 0)M)}{\tau((R_1 \times 0)M)} \oplus \frac{\sigma((0 \times R_2)M)}{\tau((0 \times R_2)M)} \\
&= \frac{\sigma_1((R_1 \times 0)M)}{\tau_1((R_1 \times 0)M)} \oplus \frac{\sigma_2((0 \times R_2)M)}{\tau_2((0 \times R_2)M)} \\
&\cong \lambda_1((R_1 \times 0)M) \oplus \lambda_2((0 \times R_2)M) \cong (\lambda_1, \lambda_2)(M).
\end{aligned}$$

Es decir $\frac{\sigma}{\tau} \approx (\lambda_1, \lambda_2)$. ■

Nuevamente es posible restringir el resultado anterior a ${}_R\mathsf{HP}$.

Corolario 4.1.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una familia finita de anillos* $\{R_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

(*a*) ${}_{R_i}\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_{R_i}\mathsf{HP})$ *para todo* $1 \leq i \leq n$;

(*b*) *Si* $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ *entonces* ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$.

■

Proposición 4.1.7. *Sean* $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$ *con* $\frac{1}{\tau} \approx \sigma$. *Entonces la clase de pretorsión* $\mathbb{T}_\tau$ *coincide con* $\mathbb{F}_\sigma$. *En particular,* $\mathbb{T}_\tau$ *es cerrada bajo submódulos y productos.*

Demostración. Se tiene para todo $M \in R\text{-}Mod$:

$$M \in \mathbb{T}_\tau \Leftrightarrow M = \tau(M) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\tau}\right)(M) = 0 \Leftrightarrow \sigma(M) = 0 \Leftrightarrow M \in \mathbb{F}_\sigma.$$

Con lo cual $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{F}_\sigma$ y como $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos y productos, $\mathbb{T}_\tau$ también lo es. ■

Proposición 4.1.8. *Si* ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$, *entonces* R *es artiniano izquierdo.*

Demostración. Si τ es un prerradical hereditario entonces por hipótesis $\frac{1}{\tau} \approx \lambda$ para algún prerradical λ. Por la Proposición 4.1.7 $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo productos. Por el Lema A.2.7 R es artiniano izquierdo.

■

En el Ejemplo 3.4.1 del Capítulo 2 se describió $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ para anillos semisimples. Particularmente se encontró que ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$. El siguiente teorema establece el recíproco.

Teorema 4.1.9. *Las siguientes condiciones con equivalentes para un anillo* R.

(*a*) R *es semisimple artiniano;*

(*b*) ${}_R\mathsf{P} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$;

(*c*) ${}_R\mathsf{HP} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$;

(*d*) $\frac{1}{soc} \approx \tau$ *para cierto* $\tau \in {}_R\mathsf{HP}$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Se sigue del Ejemplo 3.4.1

$(a) \Rightarrow (c)$ Por el el Teorema 1.3.8 y la Proposición 1.3.9 cada prerradical $\lambda \in {}_R\mathsf{P}$ es t-radical hereditario. Sean $\sigma, \tau \in {}_R\mathsf{P}$ con $\tau \leq \sigma$ y sean I, J ideales de R con $J \supseteq I$ tales que $\sigma(M) = JM$ y $\tau(M) = IM$ para todo $M \in R\text{-}Mod$. Como R es semisimple, $J = H \oplus I$ para algún ideal H de R. Se sigue que $\frac{\sigma}{\tau}(M) = \frac{JM}{JN} \approx HM$. Por tanto, $\frac{\sigma}{\tau} \approx \rho$, donde ρ es el t-radical (hereditario) asociado a H.

$(c) \Rightarrow (d)$ Es obvio.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea S un módulo simple, entonces $\tau(S) \cong \frac{1}{soc}(S) = \frac{S}{socS} = 0$. Como τ es hereditario $\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, entonces el cogenerador de $R\text{-}Mod$ $\prod_{S \in R-Simp} ES$ es un elemento de $\mathbb{F}_\tau$. Se tiene que $\tau = \mathbf{0}$ y por tanto $soc = \mathbf{1}$, es decir, R es un anillo semisimple.

$(b) \Rightarrow (a)$ R es un anillo artiniano por 4.1.8. Se probará que R es un V-anillo pues por 1.3.10 ambas condiciones implican que R es semisimple. Por hipótesis $\frac{soc}{soc \wedge J} \approx \sigma$ para algún $\sigma \in {}_R\mathsf{P}$, donde J es el radical de Jacobson de R. Si R no es un V-anillo entonces existe un $S \in R\text{-}Simp$ tal que $S \neq ES$, luego

$$\sigma(S) \cong \frac{soc(S)}{soc(S) \cap J(S)} = \frac{S}{S \cap 0} \cong S$$

y

$$\sigma(ES) \cong \frac{soc(ES)}{soc(ES) \cap J(ES)} = \frac{S}{S \cap J(ES)}.$$

Como $S \neq ES$, $J(ES) \supset S$, entonces $0 = \sigma(ES) \supseteq \sigma(S) = S$, una contradicción. Se sigue que $S = ES$ para cada $S \in R\text{-}Simp$ y así, R es un V-anillo. ∎

4.2. ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$

Comienza ahora el camino para caracterizar anillos que satifacen ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$.

Lema 4.2.1. *Sea τ un radical hereditario en R-Mod. Si $\frac{1}{\tau} \approx \lambda$ para algún λ entonces τ es estable.*

Demostración. Sea $M \in \mathbb{T}_\tau$, entonces

$$\lambda(EM) \cong \frac{1}{\tau}(EM) = EM/\tau(EM)$$

y por tanto $\lambda(EM) \in \mathbb{F}_\tau$ pues τ es radical. Como $\lambda(EM) \cap M \leq M$ entonces $\lambda(EM) \cap M \in \mathbb{T}_\tau$ y similarmente $\lambda(EM) \cap M \in \mathbb{F}_\tau$. Con lo cual $\lambda(EM) \cap M \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{F}_\tau = 0$. Usando que M es esencial en EM se obtiene $\lambda(EM) = 0$, es decir, $EM \in \mathbb{T}_\tau$. ∎

Lema 4.2.2. *Si para cualquier $\mathcal{S} \subseteq R$-Simp el radical hereditario $\overline{soc}_{\mathcal{S}}$ es estable, entonces cada módulo de Loewy M se descompone como*

$$M = \bigoplus_{S \in R\text{-}Simp} \overline{soc}_S M.$$

Demostración. Sea $N = \bigoplus_{S \in R\text{-}Simp} \overline{soc}_S M$ y supongamos que $N \neq M$. Por la Proposición 1.3.12 M/N contiene un submódulo simple, digamos, $L/N \cong T \in R\text{-}Simp$. Consideremos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow N/\overline{soc}_T(M) \longrightarrow L/\overline{soc}_T(M) \longrightarrow L/N \longrightarrow 0$$

Notemos que $N/\overline{soc}_T(M)$ es de torsion respecto a $\overline{soc}_{\mathcal{S}}$ donde $\mathcal{S} = R$-$simp \setminus \{T\}$. Además, el monomorfismo anterior no puede ser esencial porque de serlo, por la Proposición 1.1.15, $E(N/\overline{soc}_T(M)) = E(L/\overline{soc}_T(M))$ y como $\overline{soc}_{\mathcal{S}}$ es hereditario y estable entonces $L/\overline{soc}_T(M)$ sería de torsión respecto a $\overline{soc}_{\mathcal{S}}$, una contradicción. Por tanto, la sucesión se escinde y así B/N se sumerge en $B/\overline{soc}_T(M)$, lo cual es una contradicción al hecho que $B/\overline{soc}_T(M)$ es libre de torsión respecto a $\overline{soc}_T$. ■

Proposición 4.2.3. *Si R es un anillo para el cual ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ entonces $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$, donde cada R_i es un anillo con un único módulo simple (salvo isomorfismo) que satisface ${}_{R_i}\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_{R_i}\mathsf{HP})$.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.8 el anillo R es artiniano izquierdo. Puede tomarse $R\text{-}Simp = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$, un conjunto de completo e irredundante de módulos simples; se sigue se los lemas 4.2.1 y 4.2.2 que

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{soc}_{S_i}({}_R R).$$

Como cada $\overline{soc}_{S_i}({}_R R)$ es un ideal de R, la anterior es una descomposición de anillos. Sea $R_i = \overline{soc}_{S_i}({}_R R)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Claramente cada R_i tiene un único (salvo isomorfismo) R_i-módulo simple S_i. Por la Proposición 4.1.5 los anillos R_i satisfacen ${}_{R_i}\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_{R_i}\mathsf{HP})$.

■

Lema 4.2.4. *Sea R que satisface ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$. Entonces $d_\alpha(M) \leq d_\beta(M)$ para cualesquiera ordinales α y β con $\beta \leq \alpha$ y para todo $M \in R$-Mod.*

Demostración. Dado un prerradical hereditario τ, por hipótesis existe un prerradical λ tal que $\frac{1}{\tau} \approx \lambda$ y así $M/\tau(M) \cong \lambda(M) \leq M$ para cada $M \in R$-Mod, es decir, $M/\tau(M) \lesssim M$. Entonces

$$\begin{aligned} M/soc^\alpha M &\cong (M/soc^\beta M)/(soc^\alpha M/soc^\beta M) \\ &= (M/soc^\beta M)/(soc^{\alpha-\beta}(M/soc^\beta M)) \\ &\lesssim M/soc^\beta M. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$soc^{\alpha+1}M/soc^{\alpha}M = soc(M/soc^{\alpha}M) \lnsim soc(M/soc^{\beta}M) = soc^{\beta+1}M/soc^{\beta}M.$$

■

En lo posterior, cuando se mencione que un módulo es uniserial significará que su cadena de submódulos es finita (ver 1.3.13).

Lema 4.2.5. *Sea R un anillo que satisface ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$. Las siguientes condiciones son equivalentes para todo $M \in R$-Mod.*

(a) $soc(M)$ es simple;

(b) M es uniserial.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ R es artiniano por la Proposición 4.1.8, entonces M tiene longitud de Loewy finita $n \geq 2$. Del Lema 4.2.4 $d_i(M) = 1$, es decir, $soc^{i+1}M/soc^{i}M$ es distinto de cero y simple para $0 \leq i < n$. Se concluye entonces que M es uniserial (ver 1.3.13).

$(b) \Rightarrow (a)$ Como M es uniserial, el primer elemento de la cadena de submódulos de M es el único submódulo simple.

■

Lema 4.2.6. *Sea $I \subsetneq R$ un ideal propio. Si C es cogenerador para R-Mod entonces $(0 :^{C} I)$ es un cogenerador para R/I-Mod.*

Demostración. Sea $M \in R$-Mod tal que $IM = 0$. Sea $\iota : M \longrightarrow C^X$ un monomorfismo para algún conjunto X. Como $I\iota(M) = \iota(IM) = 0$ entonces $\iota(M) \subseteq (0 :^{C^X} I) = (0 :^{C} I)^X$ y así M es cogenerado por $(0 :^{C} I)$. ■

Proposición 4.2.7. *Para un anillo R que satisface:*

(a) R es artiniano izquierdo;

(b) R tiene un único submódulo simple S;

(c) $E(S)$ es uniserial.

Si P es un R-módulo proyectivo con longitud de Loewy n y J es el radical de Jacobson de R, cada submódulo invariante de P pertenece a la cadena

$$P \supset JP \supset J^2P \supset ... \supset J^{n-1}P \supset 0.$$

Demostración. Sea L un submódulo de P totalmente invariante. Como P/L tiene zoclo esencial, existe un conjunto X tal que $S^{(X)}$ se sumerge esencialmente en P/L. Por otro lado, como R es noetheriano (por el Teorema de Hopkins) $ES^{(X)}$ es la cubierta inyectiva de $S^{(X)}$. Por tanto se tiene un encaje $\iota : P/L \to ES^{(X)}$. Sean $\pi_\alpha : ES^{(X)} \to ES$ y $\iota_\alpha : ES \to ES^{(X)}$ las proyecciones y encajes canónicos respectivamente. Considerar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
P/L \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\pi_\alpha\iota"'] & ES^{(X)} \arrow[d, bend right, "\pi_\alpha"'] \\
& ES \arrow[u, bend right, "\iota_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Sea m el mínimo natural que cumple $L \supseteq J^m P$ (tal m existe pues al menos $L \supseteq 0 = J^n P$). Se demostrará que $L = J^m P$.
Afirmación: $\pi_\alpha \iota[P/L] \nsubseteq soc^{m-1} ES$ para cierto $\alpha \in X$. En caso contrario

$$\begin{aligned}
\iota[P/L] \quad &= \sum_{\alpha\in X} \iota_\alpha \pi_\alpha \iota[P/L] \\
&\subseteq \sum_{\alpha\in X} \iota_\alpha^{m-1}(ES)] \\
&= soc^{m-1}\left(ES^{(X)}\right).
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que P/L tiene longitud de Loewy a lo más $m-1$ y así $J^{m-1}[P/L] = 0$, es decir $L \supseteq J^{m-1}P$, contradicción a la minimalidad de m. La afirmación queda ahora probada.

Del hecho que ES es uniserial, se cumple $\pi_\alpha\iota[P/L] \supset soc^{m-1}ES$, de donde se tiene $\pi_\alpha\iota[P/L] \supseteq soc^m ES$. Así

$$\sigma[P/L] \supseteq \sigma[soc^m ES]$$

Como S es el único módulo simple, entonces ES cogenera a R-Mod. Haciendo $I = J^m$ en el lema previo, se deduce que $soc^m ES = (0 :^{ES} J^m)$ cogenera a R/J^m-Mod. Como R es artiniano izquierdo, R/J^m es finintamente cogenerado y así se sumerge en una suma directa de $soc^m ES$. Por el Lema 1.3.16

$$\sigma[soc^m E(S)] = R/J^m{-}Mod.$$

Ahora

$$\begin{aligned} R/J^m\text{-}Mod \quad &\supseteq \sigma[P/J^mP] \\ &\supseteq \sigma[P/L] \\ &\supseteq \sigma[soc^m ES] \\ &= R/J^m\text{-}Mod. \end{aligned}$$

Como L y J^mP son submódulos totalmente invariantes de P con $L \supseteq J^mP$ y $\sigma[P/J^mP] = \sigma[P/L]$, se sigue del Lema 1.3.17 que $L = J^mP$.

■

Teorema 4.2.8. *Si el anillo R satisface $_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}(_R\mathsf{HP})$ y además existe un único módulo simple (salvo isomorfismo) S, entonces R es artiniano izquierdo y serial.*

Demostración. Sea S el único módulo simple y P su cubierta proyectiva. Como ya se ha visto, R es artiniano izquierdo. Basta probar entonces que ES y P son ambos uniseriales (Teorema 1.3.14). ES es uniserial por el Lema 4.2.5. Suponer entonces que P tiene longitud de Loewy n. Se sigue del lema previo que cada submódulo invariante de P es miembro de la cadena

$$P \supset JP \supset J^2P \supset ... \supset J^{n-1}P \supset 0,$$

la cual debe coincidir con la serie de Loewy

$$P \supset soc^{n-1}P \supset soc^{n-2}P \supset ... \supset socP \supset 0.$$

Como P es cubierta projectiva de un módulo simple, por 1.1.19 $soc^{n-1}P$ es el único submódulo máximo de P, i.e., $P/soc^{n-1}P$ es simple. Por hipótesis existe un prerradical η tal que $\eta \approx \frac{1}{soc^{n-1}}$, donde $\eta(P)$ es simple y como además es totalmente invariante se sigue que $\eta(P) = socP$. Nuevamente, usando el Lema 4.2.5 se concluye que P es uniserial. ■

Ha quedado probada la primer parte del resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.9. *Si R satisface $_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}(_R\mathsf{HP})$ entonces $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$, donde cada R_i es un anillo artiniano izquierdo serial con un único módulo simple (salvo isomorfismo) y que satisface $_{R_i}\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}(_{R_i}\mathsf{HP})$.* ■

Lema 4.2.10. *Sea R un anillo artiniano izquierdo serial con un único módulo simple S. Si $_RR$ tiene longitud de Loewy n, entonces cada módulo inescindible es isomorfo a $soc^mE(S)$ para algún $m \leq n$. Por tanto existe (salvo isomorfismo) un único módulo inescindible de longitud m para cada $m \leq n$.*

Demostración. Si $M \in R\text{-}Mod$ es inescindible entonces es uniserial por 1.3.14, además M se sumerge en ES puesto que ES es cogenerador. Es fácil ver que ES es uniserial y por tanto todo submódulo suyo debe ser de la forma soc^mES para algún $m \leq n$.

■

Proposición 4.2.11. *Sea R un anillo artiniano izquierdo serial con un único módulo simple (salvo isomorfismo). Si ${}_RR$ tiene longitud de Loewy n, entonces cada prerradical hereditario τ es de la forma $\tau = soc^m$ para algún $m \leq n$.*

Demostración. Por el lema previo $\tau(ES) = soc^m ES$ para algún $m \leq n$. Se afirma que $\tau = soc^m$. Como los prerradicales abren sumas directas basta probar que $\tau(M) = soc^m M$ para cada módulo uniserial M y concluir por el mismo lema. De tal suert, si M es uniserial, entonces M se sumerge en ES y como τ y $soc^m M$ son hereditarios, $\tau(M) = M \cap \tau(ES) = M \cap soc^m(ES) = soc^m M$. Por tanto $\tau = soc^m M$ como se quería.

■

Teorema 4.2.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.*

(a) ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$;

(b) $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ donde cada R_i es un anillo artiniano izquierdo serial con un único R_i-módulo simple (salvo isomorfismo).

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Es el Teorema 4.2.9.

$(b) \Rightarrow (a)$ Es suficiente probar que cada R_i satisface $R_i \supseteq \mathcal{Q}({}_{R_i}\mathsf{HP})$ debido a la Proposición 4.1.6. Sin pérdida de generalidad se supone que R es un anillo artiniano izquierdo con un único módulo simple salvo isomorfismo. Sea $\frac{\sigma}{\tau} \in \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$ con $\tau \leq \sigma$. Como τ es hereditario $\tau \circ \sigma = \tau \wedge \sigma = \tau$. Entonces $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma}{\tau\circ\sigma} = \frac{1}{\tau} \circ \sigma$. Luego, basta probar que $\frac{1}{\tau} \in {}_R\mathsf{P}$. Sea $M \in R\text{-}Mod$. Por el Lema 4.2.10, $M \cong \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} L_\alpha$ para alguna familia de módulos uniseriales L_α, por tanto, $\frac{1}{\tau}(M) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \frac{1}{\tau(L_\alpha)}$. Todo se reduce ahora a mostrar que existe $\eta \in {}_R\mathsf{P}$ tal que $\frac{1}{\tau}(L) \cong \eta(L)$ para cada módulo uniserial L.

Sea n la longitud de Loewy de ${}_RR$. Por 4.2.11, $\tau = soc^m$ para cierto $m \leq n$. Sea ρ es el t-radical asociado al radical de Jacobson J de R. Sea entonces L uniserial con longitud de Loewy l; como ya se sabe, la retícula de submódulos de L se describe por las dos cadenas idénticas:

$$0 \subset socL \subset soc^2 L \subset ... \subset soc^{l-1} \subset^l = L$$

y

$$0 \subset J^{l-1} \subset J^{l-2} \subset ... \subset JL \subset L.$$

Entonces $\frac{1}{\tau}(L) = L/soc^m L$. Si $l \leq m$ entonces $soc^m L = L$ y así $\frac{1}{\tau}(L) = 0 = J^m L = \rho^m(L)$. Si $l > m$ entonces $L/soc^M L$ es uniserial con longitud de Loewy $l - m$, así, por 4.2.10, $L/soc^m L \cong soc^{l-m} = J^{l-(l-m)} = J^m L = \rho^m(L)$. Como se requería, $\frac{1}{\tau}(L) \cong \rho^m(L)$ con L un módulo uniserial arbitrario. ■

Corolario 4.2.13. *Si R es un anillo uniserial en el sentido de Köthe (particularmente local uniserial), entonces ${}_R\mathsf{P} \supseteq \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$.* ■

Capítulo 5

Cocientes de prerradicales sobre anillos locales uniseriales

En lo siguiente se describirá el monoide de cocientes de prerradicales sobre un anillo local uniserial R con longitud de composición $n \geq 1$. Para tal propósito se extienden algunos resultados del Capítulo 2, en particular la descripción del producto en $_R\mathsf{P}$. En un paralelismo natural se generalizan las retículas B_n y C_n junto con sus propiedades. En el Apéndice B se introducen los números de Motzkin, requeridos para calcular el cardinal de $\mathcal{Q}(_R\mathsf{P})$. Para simplificar la notación, en la mayor parte del capítulo no se distingue entre los símbolos $\frac{\sigma}{\tau}$ y $\left[\frac{\sigma}{\tau}\right]$, a menos que se especifique lo contrario. En general, la notación $\frac{\sigma}{\tau}(M)$ significa que se evalúa M en cualquier representante de la clase de equivalencia $\left[\frac{\sigma}{\tau}\right]$.

5.1. Dos retículas isomorfas

Definición 5.1.1. *Para cada número natural $n \geq 1$ se define el conjunto*

$$W_n \coloneqq \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \{-1, 0, 1\}, \sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0 \ \forall \ 0 \leq k \leq n\}.$$

Es decir, W_n es el conjunto de palabras trinarias con entradas en el subconjunto de números enteros $\{-1, 0, 1\}$ tales que la suma de las primeras k entradas siempre es no negativa para todo $k \in \{1, ..., n\}$. A continuación se define un orden en W_n.

Definición 5.1.2. *Dados $n \geq 1$, $a = (a_1, ..., a_n)$ y $b = (b_1, ..., b_n)$ elementos de W_n :*

(1) *$a \leq b$ si para toda $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$.*

(2) $a \vee b := (c_1, ..., c_n)$, *donde* $c_1 := máx\{a_1, b_1\}$ *y para cada* $k \in \{2, ..., n\}$

$$c_k := \begin{cases} \text{-1}, & si\ máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\} < máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\}; \\ 0, & si\ máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\} = máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\}; \\ 1, & si\ máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\} > máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\}. \end{cases}$$

(3) $a \wedge b := (d_1, ..., d_n)$, *donde* $d_1 := mín\{a_1, b_1\}$ *y para cada* $k \in \{2, ..., n\}$

$$d_k := \begin{cases} \text{-1}, & si\ mín\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\} < mín\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\}; \\ 0, & si\ mín\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\} = mín\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\}; \\ 1, & si\ mín\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\} > mín\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\}. \end{cases}$$

De la definición anterior se puede observar que $a \vee b$ y $a \wedge b$ satisfacen las propiedades de supremo e ínfimo, respectivamente, de a y b en W_n. A saber, si $a \vee b := c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}.$$

Para probarlo se procede por inducción, donde claramente $c_k \in W_n$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Si $k = 1$, la afirmación es obvia. Sea $k \in \{2, ..., n\}$ y supongamos cierta la afirmación para $k - 1$; se tienen tres posibilidades:

(1) $máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\} > máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}$;

(2) $máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\} = máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}$;

(3) $máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\} < máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}$.

En cualquier caso, variando $\theta \in \{-1, 0, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i + c_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i + \theta = máx\left\{\sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i\right\} + \theta = máx\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i\right\}.$$

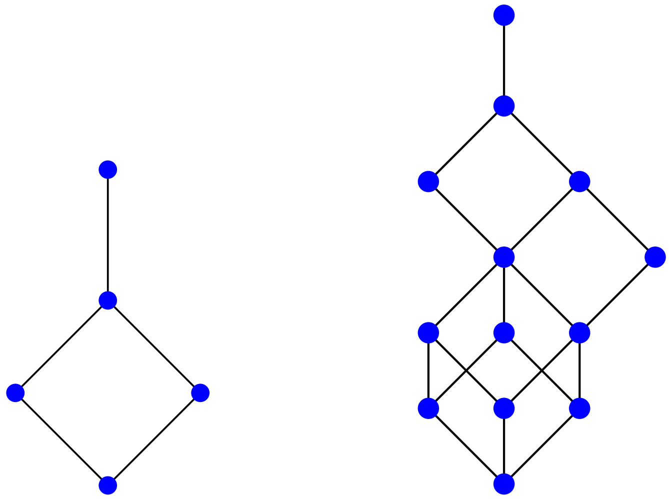

Figura 5.1: Diagramas de Hasse para W_2 y W_3.

Ahora es claro que $a \vee b$ es supremo de a y b. Similarmente se verifica que si $a \wedge b = (d_1, ..., d_2)$ entonces para cada $k \in \{1, ..., n\}$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = min \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i \right\}.$$

Así, $a \wedge b$ es el ínfimo de a y b. Por tanto $\langle W_n, \leq, \vee, \wedge, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ es una retícula completa con mayor $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ y menor $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$. Más aún, eliminando los elementos de W_n que tengan alguna entrada igual a -1, obtenemos el conjunto de sucesiones binarias B_n, cuyo orden (véase 2.2.2) coincide con el recién definido ya que las situaciones

$$\textit{máx} \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i \right\} < \textit{máx} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i \right\}$$

y

$$\textit{mín} \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} b_i \right\} < \textit{mín} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} a_i, \sum_{i=1}^{k-1} b_i \right\}$$

no pueden ocurrir dentro de B_n y es por las mismas razones que supremos e ínfimos también coinciden.

Observación 5.1.3. Para cada $n \geq 1$ existen encajes de retículas $\xi_0 : W_n \to W_{n+1}$ y $\xi_1 : W_n \to W_{n+1}$ definidos por $\xi_0(a_1, ..., a_n) \coloneqq (0, a_1, ..., a_n)$ y $\xi_1(a_1, ..., a_n) \coloneqq (1, a_1, ..., a_n)$ para todo $(a_1, ..., a_n) \in W_n$. Como ejemplo, ver la imagen 5.1.

Del isomorfismo establecido en el teorema 2.2.6 y las consideraciones previas, podemos derivar el siguiente

Corolario 5.1.4. *Dado $n \geq 0$, W_n contiene una copia isomorfa de ${}_R\mathsf{P}$, donde R es cualquier anillo local uniserial con longitud de composición n.* ■

Ahora se definirán retículas de caminos que resultarán isomorfas a W_n para cada n, lo que permitirá probar el resultado más importante del capítulo.

Definición 5.1.5. *Un n-camino funcional (ver Capítulo 2) $c = (c_0, c_1, ..., c_n)$ se llama w-camino si $c_0 = 0$, y $-1 \leq c_{i+1} - c_i \leq 1$ para todo $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.*

Un w-camino $c = (c_0, c_1, ..., c_n)$ siempre cumple que $0 \leq c_1 - c_0 = c_1 \leq 1$ y por tanto $c_1 = 0$ o $c_1 = 1$.

Llamaremos K_n a la colección de w-caminos de longitud $n \geq 1$ y naturalmente los relacionamos con caminos en la cuadrícula $\mathbf{n{+}1}^2$ que van del punto $(0, 0)$ a algún punto (n, y) siempre iguales o por debajo de la diagonal $x = y$ con saltos horizontales del tipo $(1, 0)$ o diagonales en dos sentidos, $(1, 1)$ y $(1, -1)$. La figura 5.2 muestra un elemento típico en K_{10}. El objetivo es proveer de estructura de orden a K_n, probar que es una retícula y establecer un isomorfismo entre W_n y K_n para cada n.

Lema 5.1.6. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$:*

(1) $\text{máx}\{a, b\} \leq \text{máx}\{a, b+1\} \leq \text{máx}\{a, b\} + 1 = \text{máx}\{a+1, b+1\}$;

(2) $\text{mín}\{a, b\} \leq \text{mín}\{a, b+1\} \leq \text{mín}\{a, b\} + 1 = \text{mín}\{a+1, b+1\}$;

(3) $\text{máx}\{a, b\} - 1 \leq \text{máx}\{a-1, b-1\} \leq \text{máx}\{a, b-1\} \leq \text{máx}\{a, b\}$;

(4) $\text{mín}\{a, b\} - 1 \leq \text{mín}\{a-1, b-1\} \leq \text{mín}\{a-1, b\} \leq \text{mín}\{a, b\}$.

■

Teorema 5.1.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n es una subretícula de F_n.*

Demostración. Dados $c = (c_0, c_1, ..., c_n)$, $c' = (c'_0, c'_1, ..., c'_n)$, elementos de K_n, basta ver que $c \vee c'$ y $c \wedge c'$ son a su vez elementos de K_n. Por definición $c \vee c' = (t_1, ..., t_n)$ y $c \wedge c' = (s_1, ..., s_n)$, donde $t_i = \text{máx}\{c_i, c'_i\}$ y $s_i = \text{mín}\{c_i, c'_i\}$ para cada $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Notemos que $t_0 = s_0 = 0$ pues $c_0 = c'_0 = 0$. Sea entonces $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ y ya que $c, c' \in K_n$ se cumple

$$-1 \leq c_{k+1} - c_k, c'_{k+1} - c'_k \leq 1.$$

Sin pérdida de generalidad, se tienen los siguientes casos

Caso 1. $c_{k+1} - c_k = c'_{k+1} - c'_k = 0$.

Caso 2. $c_{k+1} - c_k = c'_{k+1} - c'_k = 1$.

Caso 3. $c_{k+1} - c_k = c'_{k+1} - c'_k = -1$.

Caso 4. $c_{k+1} - c_k = 0$ y $c'_{k+1} - c'_k = 1$.

Caso 5. $c_{k+1} - c_k = 0$ y $c'_{k+1} - c'_k = -1$.

Caso 6. $c_{k+1} - c_k = 1$ y $c'_{k+1} - c'_k = -1$.

Para una demostración detallada de los casos 1,2,4 se sugiere [15]. En el caso 3 se tiene que $c_{k+1} = c_k - 1$ y $c'_{k+1} = c'_k - 1$, usando ahora el inciso (3) del lema previo

$$t_k - 1 = máx\{c_k, c'_k\} - 1 \leq máx\{c_k - 1, c'_k - 1\} = máx\{c_{k+1}, c'_{k+1}\} = t_{k+1}.$$

Es decir $-1 \leq t_{k+1} - t_k$. Por el inciso (3) y (1) del mismo lema

$$t_{k+1} = máx\{c_{k+1}, c'_{k+1}\} = máx\{c_k - 1, c'_k - 1\} \leq máx\{c_k, c'_k\} + 1 = t_k + 1$$

Con lo cual $t_{k+1} - t_k \leq 1$. Se cumple entonces que $-1 \leq t_{k+1} - t_k \leq 1$.

Ahora, para el caso 5, nuevamente usando 5.1.6, se tienen las desigualdades

$$t_k - 1 = máx\{c_k, c'_k\} - 1 \leq máx\{c_k, c'_k - 1\} = máx\{c_{k+1}, c'_{k+1}\} = t_{k+1};$$
$$t_{k+1} = máx\{c_k, c'_k - 1\} \leq máx\{c_k, c'_k\} + 1 = t_k + 1.$$

Por tanto $-1 \leq t_{k+1} - t_k \leq 1$.

En el caso 6 tenemos $c_{k+1} - c_k = 1$ y $c'_{k+1} - c'_k = -1$ y se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned} &t_k - 1 = máx\{c_k, c'_k\} - 1 \leq máx\{c_k + 1, c'_k\} - 1 \leq máx\{c_k + 1, c'_k - 1\} \\ &= máx\{c_{k+1}, c'_{k+1}\} = t_{k+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &t_{k+1} = máx\{c_{k+1}, c'_{k+1}\} = máx\{c_k + 1, c'_k - 1\} \leq máx\{c_k + 1, c'_k\} \\ &\leq máx\{c_k, c'_k\} + 1 = t_k + 1. \end{aligned}$$

■

Corolario 5.1.8. *Para cada $n \geq 1$, K_n es distributiva.*

Demostración. Para $c, d, e \in K_n$ y $t = e \vee (c \wedge d)$, $s = (a \vee c) \wedge (e \vee d)$:

$$t_i = máx\{e_i, mín\{c_i, d_i\}\} = mín\{máx\{e_i, c_i\}, máx\{e_i, d_i\}\} = s_i.$$

■

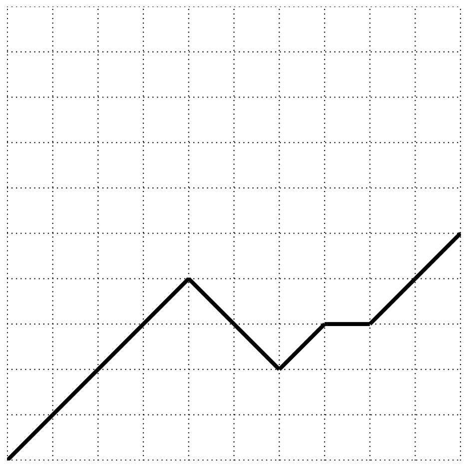

Figura 5.2: Un elemento de K_{10}.

Teorema 5.1.9. $|K_{n+1}| = 3|K_n| - \mathfrak{m}_n$ *para cada* $n \geq 1$. *Si* $n = 1$, $|K_n| = 2$.

Demostración. Sea $n \geq 2$. Si $c = (c_0, c_1, ..., c_n) \in K_n$, el camino $c' = (c_0, c_1, ..., c_n, c_{n+1})$ es un elemento de K_{n+1} si y sólo si $c_{n+1} - c_n \in \{-1, 0, 1\}$, de aquí que c_{n+1} tiene exactamente dos valores posibles si y sólo si $c_n = 0$. Un tal camino es precisamente de Motzkin (ver Apéndice B). Luego, $|K_{n+1}| = 3|K_n| - \mathfrak{m}_n$. ■

Teorema 5.1.10. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe un isomorfismo de orden entre* W_n *y* K_n.

Demostración. Definamos $\varphi : W_n \to K_n$ tal que si $(a_1, a_2, ..., a_n) \in W_n$ entonces $\varphi(a_1, a_2, ..., a_n) = (0, a_1, a_1 + a_2, ..., \sum_{i=1}^{n} a_i)$. Si $a = (a_1, ..., a_n)$ y $b = (b_1, ..., b_n)$ son elementos de W_n con $a \leq b$ entonces $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$ y por tanto $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Se tiene entonces que φ es un morfismo de orden.

Ahora sea $\psi : K_n \to W_n$ tal que para cada camino $(c_0, ..., c_n) \in K_n$ $\psi(c_0, ..., c_n) = (a_1, ..., a_n)$ donde para $i \in \{1, ...n\}$

$$a_i := c_i - c_{i-1}$$

Claramente cada suma del tipo $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ con $k \in \{1, .., n\}$, es telescópica y por tanto tenemos

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$$

Resta ver que ψ es un morfismo de orden. Sean entonces $c = (c_0, c_1, ...c_n)$ y $d = (d_1, ..., d_n)$ elementos de K_n con $c \leq d$. Si $\psi(c) = (a_1, ..., a_n)$ y $\psi(d) = (b_1, ..., b_n)$, para $k \in \{1, .., n\}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = c_k \leq d_k = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Se cumple así que ψ es un morfismo de orden. Tenemos además las identidades

$$\psi \circ \varphi(a_1, a_2, ..., a_n) = \psi(0, a_1, a_1 + a_2, ..., \sum_{i=1}^{n} a_i) = (a_1, ..., a_n);$$

$$\varphi \circ \psi(c_0, c_1, ..., c_n) = \varphi(c_1, c_2 - c_1, ..., c_n - c_{n-1}) = (0, c_1, ..., c_n) = (c_0, c_1, ..., c_n),$$

para cada $(a_1, a_2, ..., a_n) \in W_n$ y $(c_0, c_1, ...c_n) \in K_n$. Finalmente, hemos probado que $W_n \cong K_n$ para todo $n \geq 1$. ■

Corolario 5.1.11. $|W_{n+1}| = 3|W_n| - \mathfrak{m}_n$. ■

5.2. La retícula $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$

A lo largo de esta sección se considera un anillo local uniserial R fijo con serie de composición $0 = I_0 < I_1 < ... < I_n = R$. Por el Corolario 2.1.4 del Capítulo 2, para cada R-módulo M existe un conjunto $S \subseteq \{0, 1, ..., n\}$ para el cual $M = \bigoplus_{s \in S} I_s^{(X_s)}$, donde cada X_s es un conjunto no vacío. Si σ y τ son prerradicales sobre R con $\tau \leq \sigma$, del hecho que cocientes de prerradicales conmutan con el símbolo de suma directa (ver proposición 3.1.1) se observa que

$$\frac{\sigma}{\tau}(M) \cong \bigoplus_{s \in S} \left[\frac{\sigma}{\tau}(I_s)\right]^{(X_s)}. \qquad (✢)$$

Lema 5.2.1. *Si* $0 \leq r \leq k \leq n$ *entonces* $\frac{I_k}{I_r} \cong I_{k-r}$.

Demostración. I_k/I_r es un módulo uniserial con longitud de composición $k - r$ isomorfo a una suma directa de ideales de R. La única posibilidad es que sea precisamente isomorfo a I_{k-r}. ■

De (✢) y el lema 5.2.1 se deduce que para cada $s \in S$, $\frac{\sigma}{\tau}(I_s)$ es isomorfo a algún I_{k_s}, con $k_s \leq s$. Además, $\frac{\sigma}{\tau}(M) \lesssim M$ para cada módulo M y prerradicales $\tau \leq \sigma$. Más aún, por el comportamiento de los prerradicales sobre los ideales de R, descrito en la proposición 2.1.5, si $\tau(I_k) = I_r$, se tienen los siguientes casos:

1. $\tau(I_{k+1}) = I_r$;
2. $\tau(I_{k+1}) = I_{r+1}$.

En el primero, si $\sigma(I_{k+1}) = I_m$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) \cong I_{m-r}$, en cambio, si $\sigma(I_{k+1}) = I_{m+1}$, $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) \cong I_{m-r+1}$. Para el caso 2, si $\sigma(I_{k+1}) = I_m$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) \cong I_{m-r-1}$ y si $\sigma(I_{k+1}) = I_{m+1}$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) \cong I_{m-r}$. Vemos pues que un cociente de prerradicales sobre un anillo local uniserial R está descrito por su comportamiento sobre los ideales I_k de la serie de composición de R, de forma análoga a los prerradicales mismos. Es posible que el funtor $\frac{\sigma}{\tau}$ no sea equivalente módulo $\approx$ a ningún prerradical, a saber, en el caso $\sigma(I_{k+1}) = I_m$ y $\tau(I_{k+1}) = I_{r+1}$.

Observación 5.2.2. Un cociente de prerradicales $\frac{\sigma}{\tau}$ sobre un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$ no es equivalente a ningún prerradical si y sólo si existen enteros $0 \leq r < s \leq n$ tales que

$$\frac{\sigma}{\tau}(I_r) \gtrsim \frac{\sigma}{\tau}(I_s).$$

En tal caso diremos que $\frac{\sigma}{\tau}$ es un cociente estricto. Si no ocurre lo anterior se dice que $\frac{\sigma}{\tau}$ es un prerradical.

Dado un elemento $a = (a_1, ..., a_n) \in W_n \setminus B_n$, nuestra intención es construir dos prerradicales $\sigma_a \geq \tau_a$ sobre R tales que su cociente quede completamente determinado por a. Naturalmente se define $\sigma_a(I_0) = \tau_a(I_0) = 0$. Si $a_1 = 0$ hacemos $\sigma_a(I_1) = \tau_a(I_1) = 0$; si en cambio $a_1 = 1$, $\sigma_a(I_1) = 1$ y $\tau_a(I_1) = 0$. Sea ahora $k \geq 2$ y supongamos definidos $\sigma_a(I_k) = I_s$ y $\tau_a(I_k) = I_r$:

$$\sigma_a(I_{k+1}) := \begin{cases} I_s, & \text{si } a_{k+1} = -1; \\ I_s, & \text{si } a_{k+1} = 0; \\ I_{s+1}, & \text{si } a_{k+1} = 1. \end{cases}$$

$$\tau_a(I_{k+1}) := \begin{cases} I_{r+1}, & \text{si } a_{k+1} = -1; \\ I_r, & \text{si } a_{k+1} = 0; \\ I_r, & \text{si } a_{k+1} = 1. \end{cases}$$

Claramente $\sigma_a(I_1) \geq \tau_a(I_1)$. Si se supone $\sigma_a(I_k) \geq \tau_a(I_k)$ para cierto $k \in \{1, ..., n-1\}$, se debe corroborar que la desigualdad sigue siendo válida al evaluar en I_{k+1}. Si $a_{k+1} = 0$ o $a_{k+1} = 1$ la afirmación es obvia, así como en el caso que $a_{k+1} = -1$ y $\sigma_a(I_k) > \tau_a(I_k)$. Queda entonces el caso $a_{k+1} = -1$ y $\sigma_a(I_k) = \tau_a(I_k)$. De la definición de σ_a y τ_a se observa que los valores $\sigma_a(I_s)$ aumentan siempre que $a_s = 1$ y los $\tau_a(I_s)$ lo hacen cuando $a_s = -1$, como además $\sum_{i=0}^{s} a_k \geq 0$ para todo $s \in \{1, ..., n\}$, se deduce que si $\sigma_a(I_s) = \tau_a(I_s)$ entonces $\sigma_a(I_{s+1}) = \tau_a(I_{s+1}) = \sigma(I_s)$ o $\sigma_a(I_{s+1}) > \tau_a(I_{s+1}) = \sigma(I_s)$. Es decir, si $\sigma_a(I_k) = \tau_a(I_k)$ no puede cumplirse $a_{k+1} = -1$. Por tanto, $\sigma_a \geq \tau_a$ y $\frac{\sigma_a}{\tau_a}$ es un cociente de prerradicales estricto por construcción. Más aún, la asignación $a \mapsto \left[\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right] = \frac{\sigma_a}{\tau_a}$ es inyectiva, pues si $a, b \in W_n$ con $\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \frac{\sigma_b}{\tau_b}$, un argumento inductivo similar a los ya establecidos prueba que $a = b$. Hemos probado la existencia de una función inyectiva ϑ_n entre el subconjunto $W_n \setminus B_n$ de W_n y el subconjunto de cocientes estrictos en $\mathcal{Q}({}_\mathcal{R}\mathsf{P})$ para cualquier anillo uniserial R con longitud de composición $n \geq 1$. La situación anterior se extiende fácilmente a cocientes de prerradicales en general, simplemente eliminando la necesidad que exista una entrada $a_k = -1$. Nótese que en dicho caso $\tau_a = \mathbf{0}$ y que $\frac{\sigma_a}{0}$ corresponde precisamente al elemento $\psi_n(a)$ como en el teorema 2.2.6.

Lema 5.2.3. *(a) La asignación $\vartheta_n : W_n \to \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ dada por*
$\vartheta_n(a) := \left[\dfrac{\sigma_a}{\tau_a}\right]$ *es inyectiva;*

(b) La restricción de ϑ_n a $W_n \setminus B_n$ tiene codominio $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) \setminus {}_R\mathsf{P}$;

(c) La restricción de ϑ_n a B_n es biyectiva sobre ${}_R\mathsf{P}$.

■

Teorema 5.2.4. *Si R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$, existe una biyección entre $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ y W_n.*

Demostración. Gracias al lema previo $\vartheta_n : W_n \to \mathcal{Q}({}_\mathcal{R}\mathsf{P})$ es inyectiva. Sea $\gamma_n : \mathcal{Q}({}_\mathcal{R}\mathsf{P}) \to W_n$ definida como sigue. Para $\frac{\sigma}{\tau} \in \mathcal{Q}({}_\mathcal{R}\mathsf{P})$, si r_1, r_2 son tales que $\sigma(I_1) = I_{r_1}, \tau(I_1) = I_{r_2}$, entonces $\gamma_n\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)(1) = r_1 - r_2$; si $k \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\gamma_n\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)(k+1) := \begin{cases} \text{-1}, & \text{si } \frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) < \frac{\sigma}{\tau}(I_k); \\ 0, & \text{si } \frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) = \frac{\sigma}{\tau}(I_k); \\ 1, & \text{si } \frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) > \frac{\sigma}{\tau}(I_k). \end{cases}$$

No es dificil ver que γ_n está bien definida. Sea $\frac{\sigma}{\tau} \in \mathcal{Q}({}_\mathcal{R}\mathsf{P})$ y hagamos $a := \gamma_n\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)$, $a_k := \gamma_n\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)(k)$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Entonces $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_1) = \frac{\sigma}{\tau}(I_1)$. Supongamos que se cumple $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_k) = \frac{\sigma}{\tau}(I_k) = I_r$ para $k \in \{2, ..., n-1\}$.

1. Si $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) < \frac{\sigma}{\tau}(I_k) = I_r$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) = I_{r-1}$ y $a_{k+1} = -1$, con lo cual $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = I_{r-1}$;
2. Si $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) = \frac{\sigma}{\tau}(I_k) = I_r$ es claro que $a_{k+1} = 0$ y $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = I_r$;
3. Si ocurre $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) > \frac{\sigma}{\tau}(I_k) = I_r$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) = I_{r+1}$, $a_k = 1$ y $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = I_{r+1}$.

En cualquier caso tenemos para cada $k \in \{1, ..., n-1\}$ que $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = \frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1})$. Entonces $\vartheta_n \circ \gamma_n\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) = \mathbf{1}_{\mathcal{Q}({}_\mathcal{R}\mathsf{P})}$.

Sea ahora $a = (a_1, ..., a_n) \in W_n$. Calculemos $\gamma_n \circ \vartheta_n(a) = \gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)$. Procediendo por inducción (nuevamente) se observa primero que $\gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)(1) = a_1$. Suponiendo cierto para $k \in \{2, ..., n-1\}$ que $\gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)(k) = a_k$ y $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_k) = I_r$:

1. Si $a_{k+1} = -1$ entonces $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = I_{r-1}$ y $\gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)(k) = -1$.
2. Si $a_{k+1} = 0$ entonces $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = I_r$ y $\gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)(k) = 0$.
3. Si $a_{k+1} = 1$ entonces $\frac{\sigma_a}{\tau_a}(I_{k+1}) = I_{r+1}$ y $\gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)(k) = 1$.

En cualquier caso $\gamma_n\left(\frac{\sigma_a}{\tau_a}\right)(k+1) = a_{k+1}$, con lo cual $\gamma_n \circ \vartheta_n(a) = a$. Por tanto, $\gamma_n \circ \vartheta_n = \mathbf{1}_{W_n}$. Concluímos que $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) \cong W_n$. ■

Se define naturalmente para $\frac{\sigma}{\tau}, \frac{\eta}{\rho} \in \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$

$$\frac{\sigma}{\tau} \lessapprox \frac{\eta}{\rho} \Leftrightarrow \gamma_n\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \leq \gamma_n\left(\frac{\eta}{\rho}\right).$$

Es notorio que $\gamma_n\left(\frac{1}{0}\right)$ es el mayor elemento de W_n, contrario a $\gamma_n\left(\frac{0}{0}\right)$, el menor de W_n. Con esta definición, es claro que $\left\langle \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}), \lessapprox, \vee, \wedge, \frac{1}{0}, \frac{0}{0} \right\rangle$ es una retícula.

Corolario 5.2.5. *Si R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$, las retículas $\left\langle \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}), \lessapprox, \vee, \wedge, \frac{1}{0}, \frac{0}{0} \right\rangle$ y $\langle W_n, \leq \vee, \wedge, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0} \rangle$ son isomorfas.* ■

Corolario 5.2.6. *Si R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$, las retículas $\left\langle \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}), \lessapprox, \vee, \wedge, \frac{1}{0}, \frac{0}{0} \right\rangle$ y $\langle K_n, \leq \vee, \wedge, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0} \rangle$ son isomorfas.* ■

Corolario 5.2.7. *Para un anillo local uniserial R con longitud de composición $n \geq 1$, $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ es distributiva.* ■

Corolario 5.2.8. *Sea R_n un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$ y $\mathfrak{m}_n$ el n-ésimo número de Motzkin. Si $\mathfrak{q}_n := |\mathcal{Q}({}_{R_n}\mathsf{P})|$ entonces*

$$\mathfrak{q}_1 = 2 \text{ si } n = 1;$$
$$\mathfrak{q}_{n+1} = 3\mathfrak{q}_n - \mathfrak{m}_n \text{ si } n > 1.$$

■

Proposición 5.2.9. *Si σ y τ son prerradicales tales que $\tau \leq \sigma$ y existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que:*

i) Si se cumple

(1) $k = mín\{r \mid \sigma(I_r) \neq \tau(I_r)\}$.

(2) $\tau(I_r)$ *es constante* $\forall\ k \leq r \leq n$.

Entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ es un prerradical.

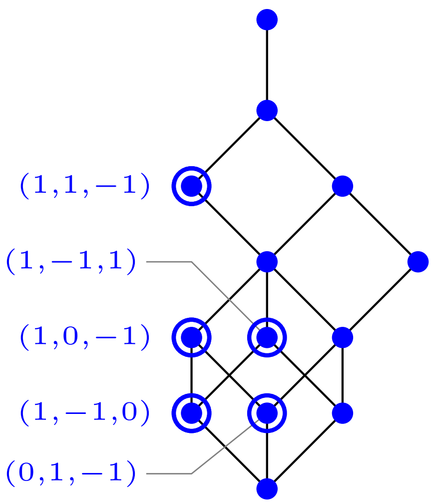

Figura 5.3: Cocientes estrictos sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 3.

ii) *Si se cumple*

(1) $k = \text{mín}\{r \mid \sigma(I_r) \neq \tau(I_r)\}$.

(2) *No existe* $k \leq r \leq n$ *tal que* $\tau(I_r) < \tau(I_{r+1})$ *y* $\sigma(I_r) = \sigma(I_{r+1})$ *para cada* $k < r \leq n$.

Entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ *es un prerradical.*

En cualquier caso, $\frac{\sigma}{\tau} \lnapprox \frac{\sigma}{0}$.

Demostración. Se sigue de la Observación 5.2.2. ∎

Corolario 5.2.10. *(a) Si* τ *es un prerradical idempotente y* $\sigma \geq \tau$*, entonces* $\frac{\sigma}{\tau}$ *es un prerradical.*

(b) Si σ *es radical y* $\sigma \geq \tau$*, entonces* $\frac{\sigma}{\tau}$ *es un prerradical.*

∎

Proposición 5.2.11. *Si* λ *es el isomorfismo del lema 2.3.3, entonces para todo prerradical* σ *se cumple* $\frac{1}{\sigma} = \lambda(\sigma)$.

Demostración. Por el lema anterior $\frac{1}{\sigma}$ es un prerradical. Usando el isomorfismo de retículas γ del teorema 5.2.4 se tiene que

$$\gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)(k) := \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{1}{\sigma}(I_k) \cong \frac{1}{\sigma}(I_{k+1}); \quad (1) \\ \\ 1, & \text{si } \frac{1}{\sigma}(I_k) \lnapprox \frac{1}{\sigma}(I_{k+1}). \quad (2) \end{cases}$$

Supongamos que $\sigma(I_k) = I_r$ y $\sigma(I_{k+1}) = I_s$, donde $s \in \{r, r+1\}$.

Si ocurre (1)

$$\frac{1}{\sigma}(I_k) \cong \frac{1}{\sigma}(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_{k-r} = I_{k+1-s} \Leftrightarrow k-r = k+1-s \Leftrightarrow s = r+1.$$

Si ocurre (2)

$$\frac{1}{\sigma}(I_k) \lneqq \frac{1}{\sigma}(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_{k-r} < I_{k+1-s} \Leftrightarrow k-r < k+1-s \Leftrightarrow s < r+1 \Leftrightarrow s = r.$$

Por tanto,

$$\gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)(k) := \begin{cases} 0, & \text{ssi } \gamma\left(\frac{\sigma}{0}\right)(k) = 1; \\ 1, & \text{ssi } \gamma\left(\frac{\sigma}{0}\right)(k) = 0. \end{cases}$$

Concluímos que $\frac{1}{\sigma} = \lambda(\sigma)$. ■

Corolario 5.2.12. *$\frac{1}{\sigma}$ es un prerradical para todo σ. En particular, para ω_0^{n-1} y α_{n-1}^{n-1}, el único átomo y coátomo de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ respectivamente, se tiene $\frac{1}{\alpha_{n-1}^{n-1}} = \omega_0^{n-1}$ y $\frac{1}{\omega_0^{n-1}} = \alpha_{n-1}^{n-1}$.* ■

El lema 2.2.5 se escribe ahora en términos convenientes para este capítulo.

Lema 5.2.13. *Supongamos que σ cubre a τ. Entonces existe $k \in \{1, 2..., n\}$ tal que*

(1) *$\sigma(I_r) = \tau(I_r)$ para $r \neq k, k+1$.*

Si $\sigma(I_{k-1}) = I_s$:

(2) *$\sigma(I_k) = I_{s+1}$, $\tau(I_k) = I_s$;*

(3) *Si $k < n$ entonces $\sigma(I_{k+1}) = I_{k+1}$, $\tau(I_{k+1}) = I_{s+1}$.*

■

En la figura 5.4, se presenta a la izquierda el hemisferio norte y a la derecha el sur de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$, donde R es un anillo local uniserial con longitud de composición 4.

Proposición 5.2.14. *Supongamos que σ cubre a τ. Sean k y s como en el lema anterior.*

(*a*) *Si $k = n$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ es un prerradical;*

(*b*) *Si $k < n$ entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ no es un prerradical.*

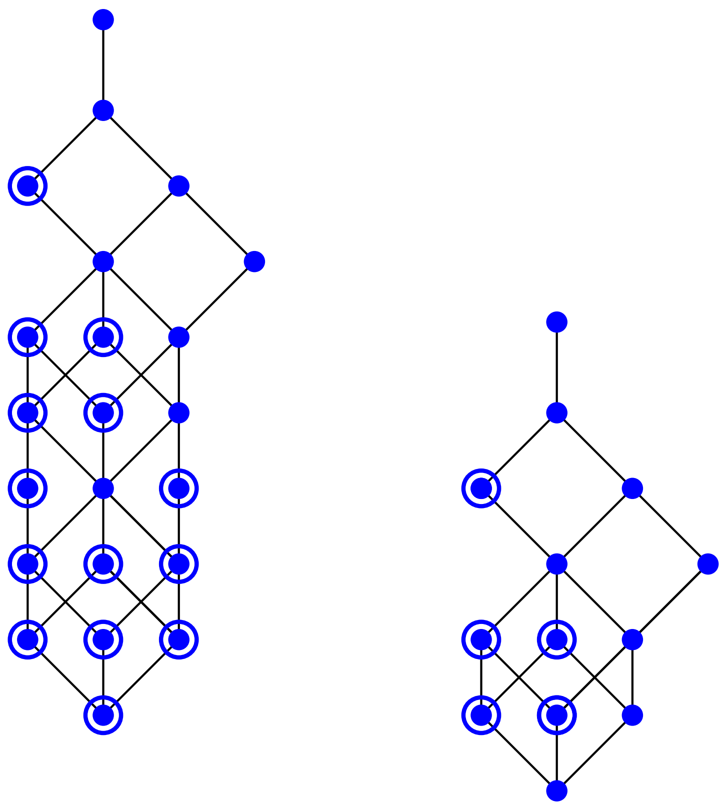

Figura 5.4: Cocientes estrictos sobre un anillo local uniserial con longitud de composición 4.

Demostración. (a) Es evidente que $\frac{\sigma}{\tau} = \omega_0^{n-1}$.

(b) $\frac{\sigma}{\tau}(I_k) \cong \frac{I_{s+1}}{I_s} \cong I_1$ y $\frac{\sigma}{\tau}(I_{k+1}) \cong \frac{I_{s+1}}{I_{s+1}} \cong 0$. Luego, $\frac{\sigma}{\tau}$ no es un prerradical. ∎

Corolario 5.2.15. *En $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$, donde R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$, existen n átomos, cada uno de los cuales es cociente de dos prerradicales, donde el mayor cubre al menor. En particular $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ no es una retícula autodual, ya que el único coátomo es α_{n-1}^{n-1}.* ∎

La figura 5.5 muestra un átomo para $n = 6$.

5.2.1. Cocientes de prerradicales idempotentes y radicales

Como se observó en el Capítulo 2 (Corolario 2.4.5), el suborden parcial de prerradicales idempotentes (radicales) sobre un anillo local uniserial forma una cadena, con lo cual tiene sentido tomar cocientes de sus elementos, en donde aparecerá cada prerradical idempotente (radical) ya que $\mathbf{0}$ es también idempotente (radical). Sean $r, m \in \{0, ..., n\}$, entonces $\alpha_r^r \leq \alpha_m^m$ si y sólo si $r \leq m$; como cada prerradical idempotente es de la forma α_m^m, es posible

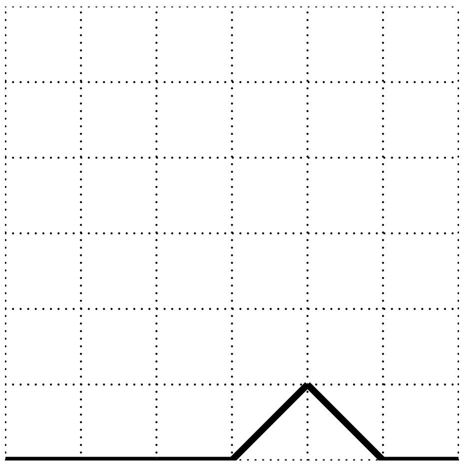

Figura 5.5: El átomo $\frac{\omega_4^5}{\omega_3^4}$ para $n = 6$.

caracterizar respectivos cocientes. En lo que resta de esta sección, el símbolo $\frac{\sigma}{\tau}$ representa únicamente al funtor cociente de σ y τ.

Corolario 5.2.16. *Si $\sigma = \alpha_m^m$ y $\tau = \alpha_r^r$ son idempotentes con $r \leq m$, entonces el funtor $\frac{\sigma}{\tau}$ es equivalente (módulo $\approx$) al prerradical α_{m-r}^m y es idempotente (radical) si y sólo si $r = 0$ ($m = n$). Además, existen $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ de dichos cocientes.*

Demostración. La equivalencia $\frac{\sigma}{\tau} \approx \alpha_{m-r}^m$ se sigue de la proposición 5.2.9. ∎

Corolario 5.2.17. *Si $\tau = \omega_0^m$ y $\sigma = \omega_0^r$ son radicales con $r \leq m$, entonces $\frac{\sigma}{\tau}$ es equivalente (módulo $\approx$) al prerradical α_{m-r}^m y es radical (idempotente) si y sólo si $m = n$ ($r = 0$). Además, existen $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ de dichos cocientes.* ∎

Corolario 5.2.18. *$Coirr({}_R\mathsf{P}) \cup \{\frac{0}{0}\} = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP}) = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{tRad}) \subseteq {}_R\mathsf{P}$.* ∎

Por supuesto, parte del corolario anterior se sabía de 4.2.13.

Corolario 5.2.19. *Si $m \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces $\frac{1}{\alpha_m^m} \approx \omega_0^m$ y $\frac{1}{\omega_0^m} \approx \alpha_m^m$.* ∎

Aunque el funtor cociente de dos radicales sea equivalente a un prerradical coirreducible, no se implica que éste último preserve epimorfismos. Esto es debido a que una propiedad de un funtor cualquiera, no necesariamente es compartida por todos los elementos de su clase de equivalencia módulo $\approx$.

Corolario 5.2.20. *Sobre anillos locales uniseriales, el funtor cociente de dos radicales preserva epimorfismos.*

Demostración. Se sigue del Corolario 3.1.4 y del hecho que todos los radicales son t-radicales (Proposición 2.4.4). ∎

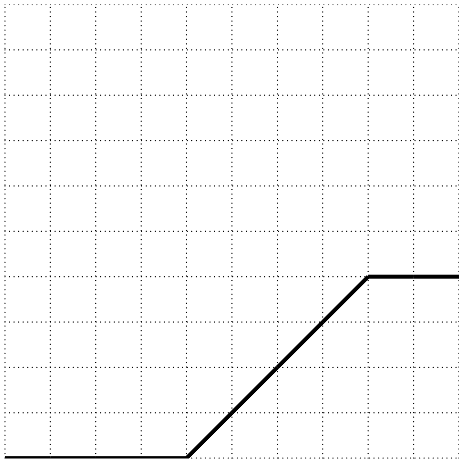

Figura 5.6: $\frac{\omega_0^4}{\omega_0^8} \approx \frac{\alpha_8^8}{\alpha_4^4}$ para $n = 10$.

5.2.2. Cocientes de prerradicales primos y coprimos

En el caso de prerradicales primos, $r \leq m$ si y sólo si $\omega_{r-1}^r \leq \omega_{m-1}^m$ y para coprimos $r \leq m$ si y sólo si $\alpha_1^m \leq \alpha_1^r$ según 2.6.2 y 2.6.3 respectivamente.

Proposición 5.2.21. *Si* $0 < r < m$, $\frac{\omega_{m-1}^m}{\omega_{r-1}^r}$ *no es un prerradical.*

Demostración.

$$\frac{\omega_{m-1}^m}{\omega_{r-1}^r}(I_{r-1}) = \frac{I_{r-1}}{I_{r-1}} \cong 0;$$

$$\frac{\omega_{m-1}^m}{\omega_{r-1}^r}(I_r) = \frac{I_r}{I_{r-1}} \cong I_1;$$

$$\frac{\omega_{m-1}^m}{\omega_{r-1}^r}(I_m) = \frac{I_{m-1}}{I_{m-1}} \cong 0.$$

Por tanto, $\frac{\omega_{m-1}^m}{\omega_{r-1}^r}$ no es un prerradical. ■

Proposición 5.2.22. *Si* $0 < r < m$, $\frac{\alpha_1^r}{\alpha_1^m}$ *no es un prerradical.*

Demostración.

$$\frac{\alpha_1^r}{\alpha_1^m}(I_{r-1}) = \frac{0}{0} \cong 0;$$

$$\frac{\alpha_1^r}{\alpha_1^m}(I_r) = \frac{I_1}{0} \cong I_1;$$

$$\frac{\alpha_1^r}{\alpha_1^m}(I_m) = \frac{I_1}{I_1} \cong 0.$$

Por tanto, $\frac{\alpha_1^r}{\alpha_1^m}$ no es un prerradical. ■

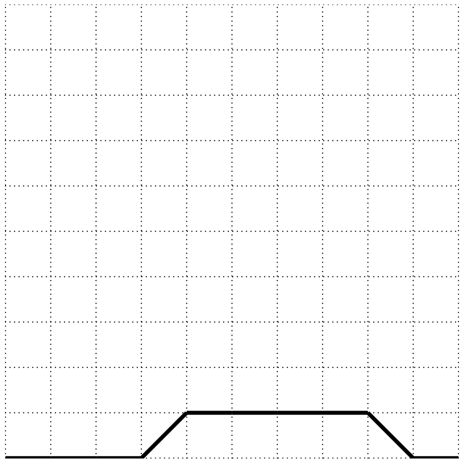

Figura 5.7: $\frac{\omega_8^9}{\omega_3^4} \approx \frac{\alpha_1^4}{\alpha_1^9}$ para $n = 10$.

Corolario 5.2.23. *En un anillo local uniserial, cocientes de prerradicales primos coinciden con cocientes de prerradicales coprimos y son estrictos excepto al dividir un prerradical σ entre sí mismo.* ∎

Consecuencia directa de la Proposición 5.2.11 es que si $0 < m$, $\frac{1}{\omega_{m-1}^m} \cong \alpha_1^m$ y $\frac{1}{\alpha_1^m} \cong \omega_{m-1}^m$.

5.2.3. Cocientes de prerradicales irreducibles y coirreducibles

Sabemos de 2.5.1 y 2.5.2 que los prerradicales irreducibles tienen la forma ω_r^m con $0 \leq r < m \leq n$, mientras que los coirreducibles son del tipo α_r^m con $0 < r \leq m \leq n$.

Proposición 5.2.24. *Si $s < l$, $r < m$ y $\omega_s^l \leq \omega_r^m$:*

(*a*) *Si $m < l$ entonces $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}$ es estricto;*

(*b*) *Si $l \leq m$ entonces $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}$ es un prerradical.*

Demostración. Por el lema 2.5.3 se cumple que $r \leq s$ y $m - l - r + s \geq 0$.

(*a*) Notemos que

$$\omega_r^m(I_s) = \begin{cases} I_r, & \text{si } r \leq s \leq m; \quad (1) \\ I_{s-(m-r)}, & \text{si } m \leq s. \quad (2) \end{cases}$$

Se observa que $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_l) = \frac{I_s}{I_{r+(l-m)}} \cong I_{s-(r+(l-m))} \cong I_{(m-r)-(l-s)}$. Si ocurre (1), entonces $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_s) = \frac{I_s}{I_r} \cong I_{s-r} \geq I_{s-(r+(l-m))}$. En cambio, si (2) ocu-

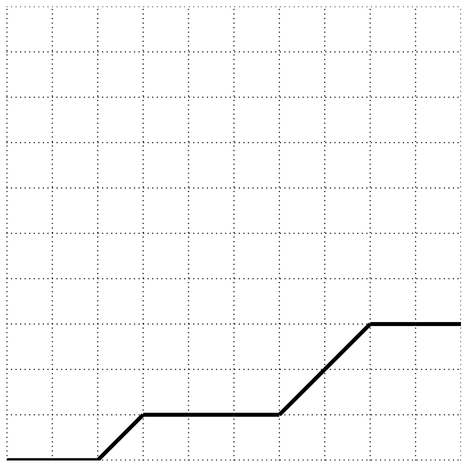

Figura 5.8: $\frac{\omega_3^6}{\omega_6^8} \approx \frac{\alpha_6^8}{\alpha_3^6}$ para $n = 10$.

rre, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_s) = \frac{I_s}{I_{s-(m-r)}} \cong I_{m-r} \geq I_{(m-r)-(l-s)}$. Cualquiera que sea el valor de $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_s)$ se cumple que $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_s) \gtrsim \frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_l)$, donde $s < l$. Así, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}$ no es prerradical.

(b) Tomemos en cada caso $k \in \{0, ..., n\}$.

Si $k \leq r \leq s$, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_k) \cong 0$.

Si $r \leq k \leq s$, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_k) = \frac{I_k}{I_r} \cong I_{k-r}$.

Si $s \leq k \leq l$, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_k) = \frac{I_s}{I_r} \cong I_{s-r}$.

Si $l \leq k \leq m$, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_k) = \frac{I_{k-(l-s)}}{I_r} \cong I_{k+s-l-r}$.

Si $m \leq k$, $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}(I_k) = \frac{I_{k-(l-s)}}{I_{k-(m-r)}} \cong I_{m-l+s-r}$ (constante).

Por tanto $\frac{\omega_s^l}{\omega_r^m}$ es un prerradical. ■

De forma similar se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 5.2.25. *Si* $0 < r \leq m$ *y* $0 < s \leq l$ *y* $\alpha_r^m \leq \alpha_s^l$*:*

(a) *Si* $m \leq l$ *entonces* $\frac{\alpha_r^m}{\alpha_s^l}$ *es un prerradical;*

(b) *Si* $l < m$ *entonces* $\frac{\alpha_r^m}{\alpha_s^l}$ *es estricto.*

■

Corolario 5.2.26. *Si* $0 \leq r < m \leq n$ *entonces* $\frac{1}{\omega_r^m} \cong \alpha_{m-r}^m$*. Dualmente, si* $0 < r \leq m \leq n$ *entonces* $\frac{1}{\alpha_r^m} \cong \omega_{m-r}^m$*.* ■

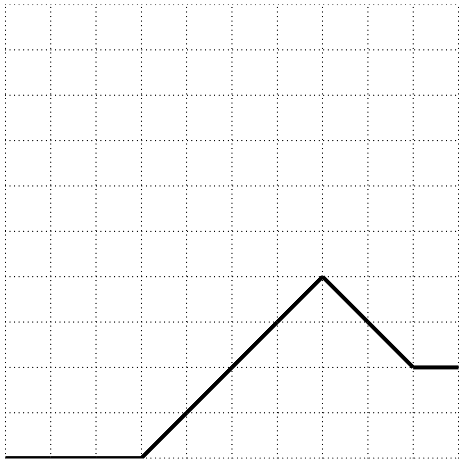

Figura 5.9: $\frac{\omega_7^9}{\omega_3^7} \approx \frac{\alpha_3^7}{\alpha_2^9}$ para $n = 10$.

5.3. El monoide $\langle \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}), \circ \rangle$

Nuevamente, R es un anillo local uniserial con longitud de composición n fijo y serie de composición $0 = I_0 < I_1 < ... < I_n = R$. R' denota un anillo local uniserial con longitud de composición $n+1$ y serie de composición

$$0 = I'_0 < I'_1 < ... < I'_n < I'_{n+1} = R'.$$

Proposición 5.3.1. *Sea $\sigma = \omega_0^{n-1}$ el único átomo en ${}_R\mathsf{P}$. Para cualquier prerradical τ se cumple:*

a) $\sigma \circ \tau = 0$ *si y sólo si* $\tau \neq \mathbf{1}$.

b) $\tau \circ \sigma \neq 0$ *si y sólo si* $\tau(I_1) = I_1$ *y en tal caso* $\tau \circ \sigma = \sigma$.

Demostración. (a) Sean $\tau = (a_1, ..., a_n)$ y $\sigma \circ \tau = (p_1, ..., p_n)$. Usando la descripción del producto dada en 2.2.7 y como $\sigma = (0, ..., 0, 1)$, $p_k = 0$ para todo $k = 1, ..., n-1$. Ahora, $p_n = 1$ si y sólo si $a_n = 1$ si y sólo si $\tau = \mathbf{1}$.

(b) Si $\tau = (a_1, ..., a_n)$ y $\tau \circ \sigma = (p_1, ..., p_n)$, como $\sigma = (0, ..., 0, 1)$ entonces $p_k = 0$ para todo $k = 1, ..., n-1$. Ahora, $p_n = 1$ si y sólo si $a_1 = 1$.

■

Proposición 5.3.2. *Si σ y τ son idempotentes, entonces*

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = \textit{mín}\{\sigma, \tau\}.$$

Demostración. En ${}_R\mathsf{HP}$, el orden es lineal y las operaciones $\wedge$ y $\circ$ coinciden.

■

Para cada $\frac{\sigma}{\tau} = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ se definen

$$\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^+ := (1, a_1, ..., a_n);$$
$$\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)_+ := (0, a_1, ..., a_n),$$

que son funciones correspondientes a las que aparecen en la Observación 5.1.3. Es decir, ambas son funciones de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ en $\mathcal{Q}({}_{R'}\mathsf{P})$ que se restringen a funciones de ${}_R\mathsf{P}$ en ${}_{R'}\mathsf{P}$.

Teorema 5.3.3. *El monoide $\langle {}_R\mathsf{P}, \circ, \mathit{1} \rangle$ se sumerge en $\langle {}_{R'}\mathsf{P}, \circ, \mathit{1} \rangle$.*

Demostración. Sean $\sigma = (a_1, ..., a_n)$, $\tau = (b_1, ..., b_n)$, $\sigma \circ \tau = (p_1, ..., p_n)$, $\sigma^+ = (c_1, ..., c_n)$, $\tau^+ = (d_1, ..., d_n)$, y $(\sigma \circ \tau)^+ = (e_1, ..., e_n)$. Se debe probar

$$(\sigma \circ \tau)^+ = \sigma^+ \circ \tau^+. \tag{☎}$$

Sabemos que se cumplen las identidades $c_1 = d_1 = e_1 = 1$ y para cualquier $k > 1$, $c_k = a_{k-1}, d_k = b_{k-1}$. Sean $r_k := \sum_{i=1}^{k} d_i$ y $s_k := \sum_{i=1}^{k} b_i$.

Sea $k > 1$.

1. Si $d_k = 0$ entonces $e_k = 0$ y $0 = d_k = b_{k-1}$. Por tanto $p_{k-1} = 0$.
2. Si $d_k = 1$ y $c_{r_k} = 0$, entonces $e_k = 0$. Se cumple que $b_{k-1} = 1$ y
$$r_k = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=2}^{k} d_i + 1 = \sum_{i=1}^{k} b_{i-1} + 1 = \sum_{i=1}^{k-1} b_i + 1 = s_{k-1} + 1.$$
Con lo cual $0 = c_{r_k} = a_{r_k - 1} = a_{s_{k-1}}$. Se tiene entonces que $b_{k-1} = 1$ y $a_{s_{k-1}} = 0$ y por tanto $0 = p_{k-1} = e_k$.
3. Si $d_k = 1$ y $c_{r_k} = 1$, similarmente al caso anterior se tiene que $b_{k-1} = 1$ y $a_{s_k - 1} = 1$.

Es decir, para cada $k \in \{1, ...n\}$, $e_k = p_{k-1}$. Por tanto, (☎) queda probada. ∎

Corolario 5.3.4. $\langle {}_R\mathsf{HP}, \circ, \mathit{1} \rangle$ *se sumerge (como monoide) en* $\langle {}_{R'}\mathsf{HP}, \circ, \mathit{1} \rangle$.

Demostración. Si $\sigma \in {}_R\mathsf{HP}$, entonces $\sigma^+ \in {}_{R'}\mathsf{HP}$. ∎

En particular, la asignación $\sigma \mapsto \sigma^+$ preserva idempotentes, primos e irreducibles, mas no lo hace con radicales, coprimos ni coirreducibles. Extendemos a continuación la caracterización del producto en prerradicales de la Proposición 2.2.7 a cocientes.

Lema 5.3.5. *Sean* $\frac{\sigma}{\tau} = (a_1, ..., a_n)$ *y* $\frac{\epsilon}{\delta} = (b_1, ..., b_n)$*, cocientes de prerradicales sobre un anillo local uniserial con longitud de composición* $n \geq 1$ *y sea* $\frac{\sigma}{\tau} \circ \frac{\epsilon}{\delta} = (p_1, ..., p_n)$ *su producto. Sea* $k \in \{1, ..., n\}$ *y supongamos que* $\frac{\epsilon}{\delta}(I_k) \cong I_{r_k}$*, donde* $r_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$*. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

$P1$ *Si* $b_k = 0$ *entonces* $p_k = 0$*;*

$P2$ *Si* $b_k = 1$ *y* $a_{r_k} = 0$ *entonces* $p_k = 0$*;*

$P3$ *Si* $b_k = 1$ *y* $a_{r_k} = 1$ *entonces* $p_k = 1$*.*

$P4$ *Si* $b_k = 1$ *y* $a_{r_k} = -1$ *entonces* $p_k = -1$*.*

$P5$ *Si* $b_k = -1$ *y* $a_{r_{k-1}} = 0$ *entonces* $p_k = 0$*.*

$P6$ *Si* $b_k = -1$ *y* $a_{r_{k-1}} = -1$ *entonces* $p_k = 1$*.*

$P7$ *Si* $b_k = -1$ *y* $a_{r_{k-1}} = 1$ *entonces* $p_k = -1$*.*

Demostración. $P1, P2, P3$ fueron probados en 2.2.7.

$P4$ Si $b_k = 1$ y $a_{r_k} = -1$, entonces $I_{r_k - 1} = \tau(I_{k-1}) < \tau(I_k) = I_{r_k}$ y luego $\sigma(I_{r_k - 1}) > \sigma(I_{r_k})$ y se tiene que $p_k = -1$.

$(P5 - P7)$ Ahora supongamos que $b_k = -1$, entonces $I_{r_k + 1} = I_{r_{k-1}} = \tau(I_{k-1}) > \tau(I_k) = I_{r_k}$. Luego, $r_{k-1} - 1 = r_k$. Si $a_{r_{k-1}} = -1$ entonces $\sigma\tau(I_k) = \sigma(I_{r_k}) = \sigma(I_{r_{k-1}-1}) > \sigma(I_{r_{k-1}}) = \sigma\tau(I_{k-1})$, es decir $\sigma\tau(I_k) > \sigma\tau(I_{k-1})$, con lo cual $p_k = 1$. Similarmente, si $a_{r_{k-1}} = 1$ entonces $\sigma\tau(I_k) < \sigma\tau(I_{k-1})$ y así $p_k = -1$. Si en cambio $a_{r_{k-1}} = 0$, se cumple $\sigma\tau(I_k) = \sigma\tau(I_{k-1})$ y por tanto $p_k = 0$. ■

Corolario 5.3.6. *Sea* $\sigma = \omega_0^{n-1}$ *el único átomo en* ${}_R\mathsf{P}$*. Para cualquier cociente* $\frac{\tau}{\eta}$ *se cumple:*

a) $\frac{\sigma}{0} \circ \frac{\tau}{\eta} = 0$ *si y sólo si* $\frac{\tau}{\eta} \neq \frac{1}{0}$*.*

b) $\frac{\tau}{\eta} \circ \frac{\sigma}{0} \neq 0$ *si y sólo si* $\frac{\tau}{\eta}(I_1) \cong I_1$ *y en tal caso* $\frac{\tau}{\eta} \circ \frac{\sigma}{0} = \frac{\sigma}{0}$*.*

Demostración. La demostración es parecida a 5.3.1, usando 5.3.5. ■

Teorema 5.3.7. *Existe un encaje de monoides* $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) \hookrightarrow \mathcal{Q}({}_{R'}\mathsf{P})$*.*

Demostración. Por el teorema 5.2.4 sabemos que $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P}) \cong W_n$ y $\mathcal{Q}({}_{R'}\mathsf{P}) \cong W_{n+1}$ (como retículas). Además, por la Observación 5.1.3 W_n se sumerge (como retícula) en W_{n+1}. Por otro lado, el teorema anterior nos dice que dicho encaje restringido a ${}_R\mathsf{P}$ es también un encaje de monoides en ${}_{R'}\mathsf{P}$. Extendamos dicho resultado a los cocientes de prerradicales respectivos. Basta entonces considerar dos cocientes $\frac{\sigma}{\tau} = (a_1, ..., a_n)$ y $\frac{\epsilon}{\delta} = (b_1, ..., b_n)$, donde al menos uno de ellos es estricto y probar

$$\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^+ \circ \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^+ = \left(\frac{\sigma}{\tau} \circ \frac{\epsilon}{\delta}\right)^+. \qquad (✱)$$

Donde $\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^+ = (c_1, ..., c_n)$, $\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^+ = (d_1, ..., d_n)$, $\frac{\sigma}{\tau} \circ \frac{\epsilon}{\delta} = (p_1, ..., p_n)$ y $\left(\frac{\sigma}{\tau} \circ \frac{\epsilon}{\delta}\right)^+ = (e_1, ..., e_n)$.
Se tienen las identidades: $c_1 = d_1 = e_1 = 1$ y para $k > 1$, $c_k = a_{k-1}, d_k = b_{k-1}$. Sean $r_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$ y $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$.

1. Si $d_k = 1$ y $c_{r_k} = -1$ entonces $e_k = -1$ y $b_{k-1} = 1$. Ahora

$$r_k - 1 = \sum_{i=1}^{k} d_i - 1 = \sum_{i=2}^{k} d_i = \sum_{i=2}^{k} b_{i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} b_i = s_{k-1}.$$

   Con lo cual $-1 = c_{r_k} = a_{r_k - 1} = a_{s_{k-1}}$. Se tiene entonces que $b_{k-1} = 1$ y $a_{s_{k-1}} = -1$, por $P5$ del lema 5.3.5 se tiene que $p_{k-1} = -1$ y así $p_{k-1} = e_k$.

2. Si $d_k = -1$ y $c_{r_{k-1}} = 0$ entonces $e_k = 0$ y $b_{k-1} = -1$. Luego,

$$r_{k-1} - 1 = \sum_{i=1}^{k-1} d_i - 1 = \sum_{i=2}^{k-1} d_i = \sum_{i=2}^{k-1} b_{i-1} = \sum_{i=1}^{k-2} b_i = s_{k-2}.$$

   Así, $0 = c_{r_{k-1}} = a_{r_{k-1}-1} = a_{s_{k-2}}$, con lo cual $b_{k-1} = 1$ y $a_{s_{k-2}} = 0$, por tanto $-1 = e_k = p_{k-1}$.

3. Si $d_k = -1$ y $c_{r_{k-1}} = -1$ entonces $e_k = 1$ y $b_{k-1} = 1$. Similarmente al caso 2, se cumple que $-1 = c_{r_{k-1}} = a_{s_{k-2}}$ y por tanto $e_k = p_{k-1} = 1$.

4. Similar al caso previo, $d_k = -1$ y $c_{r_{k-1}} = 1$ entonces $e_k = p_{k-1} = -1$.

Concluímos que $(p_1, ..., p_n)^+ = (c_1, ...c_n)$ y la identidad (✱), queda establecida.

■

Proposición 5.3.8. *Si σ y τ son hereditarios entonces*

$$(\sigma :^{\boldsymbol{op}} \tau) = (\tau :^{\boldsymbol{op}} \sigma) = \textit{máx}\{\sigma, \tau\}.$$

Demostración. En ${}_R\mathsf{HP}$ las operaciones $\vee$ y $:^{\mathbf{op}}$ coinciden. ■

Teorema 5.3.9. *El monoide $\langle {}_R\mathsf{P}, :^{\boldsymbol{op}}, \boldsymbol{0} \rangle$ se sumerge en $\langle {}_{R'}\mathsf{P}, :^{\boldsymbol{op}}, \boldsymbol{0} \rangle$.*

Demostración. Sean $\sigma = (a_1, ..., a_n)$ y $\tau = (b_1, ..., b_n)$ prerradicales en ${}_R\mathsf{P}$. Sean además $(\tau : \sigma) = (q_1, ..., q_n), \sigma_+ = (c_1, ..., c_n), \tau_+ = (d_1, ..., d_n)$ y $(\tau_+ : \sigma_+) = (e_1, ..., e_n)$. Se cumplen por tanto las identidades: $0 = e_1 = d_1 = c_1$ $d_k = b_{k-1}$ y $c_k = a_{k-1}$ para cada $k \in \{2, ..., n\}$.

Debemos probar que

$$(\tau : \sigma)_+ = (\tau_+ : \sigma_+). \qquad (\bigstar)$$

Tomemos $k \in \{2, ..., n\}$ y procedamos como en $C1 - C3$ del lema 2.2.7.

1. Si $1 = d_k = b_{k-1}$ entonces por $C1$, $1 = e_k = q_{k-1}$.

2. Si $0 = d_k = b_{k-1}$ y $c_{k-r_k} = 1$, entonces por $C2$, $e_k = 1$. Ahora

$$k - r_k - 1 = k - 1 - \sum_{i=1}^{k} di = k - 1 \sum_{i=2}^{k} di = k - 1 \sum_{i=2}^{k-1} bi = k - 1 - s_{k-1}.$$

   Por tanto, $1 = c_{k-r} = a_{k-r-1} = a_{k-1-s_{k-1}}$ y así $q_{k-1} = 1$.

3. Si $0 = d_k = b_{k-1}$ y $c_{k-r_k} = 0$ se procede como en 2 (usando $C3$).

Lo anterior permite concluir que $e_k = q_{k-1}$ para todo $k \in \{2, ..., n\}$, estableciendo ($\bigstar$).

■

Corolario 5.3.10. $\langle {}_R\mathsf{HP}, :^{op}, \mathit{0} \rangle$ *se sumerge en* $\langle {}_{R'}\mathsf{HP}, :^{op}, \mathit{0} \rangle$. ■

En el Apéndice C se muestran las tablas de multiplicación de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ para algunos anillos locales uniseriales.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de tesis se ha aplicado con éxito la teoría sobre cocientes de prerradicales hasta ahora conocida al caso de los anillos locales uniseriales. Quizá el resultado más interesante es el teorema 5.3.7, el cual nos acerca al estudio de morfismos entre monoides de cocientes de prerradicales asociados a anillos distintos, lo que genera diversas preguntas (ver sección 6.2.2).

6.1. Conclusiones

Si R es un anillo local uniserial, el Lema 5.2.3 y el corolario 5.2.5 nos garantizan que ${}_R\mathsf{P}$ se sumerge como retícula y como monoide en $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$. De hecho, los elementos de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ también pueden ser visualizados como caminos en la cuadrícula $(\mathbf{n+1})^2$ (Corolario 5.2.6), situación que permitió generar los diagramas de Hasse para algunos casos ($n = 1, 2, 3, 4$) y calcular el tamaño de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ (Corolario 5.2.8) para cualquiera que sea la longitud de composición de R.

Otros resultados de interés son el Corolario 5.2.10 así como las proposiciones 5.2.9 y 5.2.14 y la Observación 5.2.2, los cuales dan condiciones para que un cociente de prerradicales sea estricto o bien un prerradical; en ese sentido, el Corolario 5.2.15 describe y cuenta los átomos de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ y es muy útil para generar los diagramas de Hasse y las tablas de multiplicación presentadas al final del capítulo 5. La Proposición 5.2.11 es clave en las secciones 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 y precisamente estas últimas secciones mencionadas, son el complemento necesario para 2.4, 2.6, 2.5, respectivamente.

6.2. Perspectivas

El estudio de los cocientes de prerradicales lleva a distintas preguntas naturales. Expongo aquí diversos puntos (en diversos temas) que me parecen la continuación idónea a la investigación vertida en esta tesis.

6.2.1. Operadores cerradura

Un operador cerradura en R-Mod es una función C tal que a cada par $N \leq M \in R$-Mod, le asigna un submódulo $C_M(N)$ de M tal que

1. $N \leq C_M(N)$;
2. Si $N \leq L \leq M$, entonces $C_M(N) \leq C_M(L)$;
3. Si $f : M \to M'$ es un morfismo de R-módulos, entonces $f(C_M(N)) \leq C_{M'}(f(N))$;

Si D y C son dos operadores cerradura en R-Mod tales que $D_M(N) \leq C_M(N)$ para cualesquiera $N \leq M \in R$-Mod, decimos que D es menor que C y lo escribimos simplemente por $D \leq C$. Aunque no se ha definido aún en la literatura, si $D \leq C$ siempre podemos tomar el cociente $\frac{C}{D}$, que se define en $N \leq M$ como

$$\left[\frac{C}{D}\right]_M(N) := \frac{C_M(N)}{D_M(N)}$$

Pregunta 6.2.1. *¿Qué propiedades tiene $\frac{C}{D}$?*

Si D, C, H son todos operadores cerradura con $D \leq C$, y $N \leq M$, entonces el submodulo $\diamond(H, C, D)_M(N)$ se define por la regla

$$\diamond(H, C, D)_M(N)/D_M(N) := H_{M/D_m(N)}(C_M(N)/D_M(N)).$$

Parece ser $\diamond(H, C, D)$ es un operador cerradura.

Pregunta 6.2.2. *¿Qué propiedades tiene $\diamond(H, C, D)$?*

Los operadores cerradura en la categoría de módulos son introducidos en [7] y han sido ampliamente estudiados en años recientes.

6.2.1.1. Anillos locales uniseriales

He encontrado el siguiente resultado.

Lema 6.2.3. *Sea C es un operador cerradura en R-Mod. Si Γ es un conjunto no vacío y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una familia de R-módulos, al considerar para cada $\alpha \in \Gamma$ un submódulo $N_\alpha \leq M_\alpha$, se cumple la igualdad*

$$C_{\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha}\left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} C_{M_\alpha}(N_\alpha).$$

Por el lema anterior, si R es un anillo local uniserial (semisimple artiniano), entonces, los operadores cerradura sobre R están determinados por sus valores en los idealdes de R (los módulos simples), de forma similar a los prerradicales. Más aún, si $D \leq C$ son operadores cerradura, bajo las condiciones del lema se tiene que

$$\left[\frac{C}{D}\right]_{\bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha}\left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha\right) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \frac{C_{M_\alpha}(N_\alpha)}{C_{M_\alpha}(N_\alpha)} = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma}\left[\frac{C}{D}\right]_{M_\alpha}(N_\alpha).$$

Entonces, cocientes de operadores cerradura sobre anillos locales uniseriales (semisimples artinianos) están determinados por su comportamiento en los ideales del anillo (los módulos simples), de forma análoga a los cocientes de prerradicales.

Pregunta 6.2.4. *¿Operadores cerradura y cocientes de operadores cerradura sobre anillos locales uniseriales pueden representarse como caminos en* $(\boldsymbol{n+1})^2$*?*

6.2.2. Morfismos entre monoides de cocientes de prerradicales

En [14] se estudian relaciones entre retículas de prerradicales asociadas a anillos cuyas categorías de módulos se encuentran en situación de adjunción. En particular, se prueba que si dos anillos R y S son Morita equivalentes, existe un morfismo de retículas y de monoides $\varphi : {}_R\mathsf{P} \to {}_S\mathsf{P}$. Es natural preguntarse si $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ y $\mathcal{Q}({}_S\mathsf{P})$ son isomorfos. El candidato a ser el isomorfismo es la asignación $\left[\frac{\tau_1}{\tau_2}\right] \mapsto \left[\frac{\varphi(\tau_1)}{\varphi(\tau_2)}\right]$.

Pregunta 6.2.5. *¿Monoides de cocientes de prerradicales asociados a anillos morita equivalentes son isomorfos?*

Por otro lado, puede decirse que la inclusión del Teorema 5.3.7 está generada por la inclusión de 5.3.3.

Pregunta 6.2.6. *¿Qué morfismos (de retículas o monoides) entre* ${}_R\mathsf{P}$ *y* ${}_S\mathsf{P}$ *generan morfismos entre* $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ *y* $\mathcal{Q}({}_S\mathsf{P})$*?*

En [16, Parte VI], se estudian funciones entre teorías de torsión hereditarias, que provienen de morfismos de anillos, así como de funtores entre categorías de módulos ([16, Ejercicio E46.9]). Aunque esto se traduciría en funciones entre radicales hereditarios y en nuestro caso, en cocientes de radicales hereditarios (que no necesariamente forman un monoide), las consideraciones que aparecen más adelante en 6.2.3 pueden ser de utilidad. Otra referencia es, nuevamente, [14].

Pregunta 6.2.7. *¿Qué morfismos de anillos entre R y S o funtores entre R-Mod y S-Mod generan morfismos entre* $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ *y* $\mathcal{Q}({}_S\mathsf{P})$*?*

Pregunta 6.2.8. *¿Una adjunción entra categorías de módulos asociadas a anillos distintos genera un morfismo entre los monoides de cocientes de prerradicales?*

6.2.3. Sobre la conmutatividad de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP})$

La Pregunta 3.3.5 parece, en general, complicada. Sería interesante entonces estudiar anillos R para los cuales ${}_R\mathsf{HP} = {}_R\mathsf{HR}$. Un caso extremo sería la igualdad ${}_R\mathsf{P} = {}_R\mathsf{HR}$, pero por el teorema principal de [28], esto es equivalente a que R sea semisimple artiniano. En [12], Fenrick prueba que para que un anillo noetheriano izquierdo R satisfaga ${}_R\mathsf{HP} = {}_R\mathsf{HR}$, debe ser un V-anillo. Otras referencias se mecionan en [28], que junto a las ideas vertidas en [26] pueden ser muy útiles para buscar respuestas a 3.3.5.

6.2.4. Monoide de cocientes de t-radicales

Si $\sigma, \tau, \rho \in {}_R\mathsf{tRad}$, sabemos que existen ideales I, J, H tales que $\sigma(M) = IM, \tau(M) = JM, \rho(M) = HM$ para todo módulo M. Si $\tau \leq \sigma$ y $M \in R\text{-}Mod$,

$$\frac{\diamond(\rho,\sigma,\tau)(M)}{\tau(M)} = \rho\left(\frac{\sigma(M)}{\tau(M)}\right) = H\left(\frac{IM}{JM}\right) = \frac{HIM + JM}{JM} = \frac{(HI+J)M}{JM}.$$

Entonces, $\diamond(\rho,\sigma,\tau)(M) = (HI+J)M$ para todo $M \in R\text{-}Mod$ (donde $HI+J$ es un ideal), lo que implica que $\diamond(\rho,\sigma,\tau)$ es un t-radical y por tanto, $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{tRad})$ es un monoide. Resulta interesante estudiar este monoide. En particular, si $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{tRad})$ es conmutativo, entonces

$$\frac{1}{\sigma} \circ \sigma = \sigma \circ \frac{1}{\sigma} = 0$$

para cualquier $\sigma \in {}_R\mathsf{tRad}$. Luego, todo t-radical es idempotente (ver proposición 3.1.2). En analogía con 3.3.5 aparece la siguiente

Pregunta 6.2.9. *¿Si todo t-radical es idempotente, entonces $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{tRad})$ es conmutativo?*

Nuevamente, las referencias en [28] pueden ser de ayuda para dar respuesta a esta pregunta.

6.2.5. Monoide de prerradicales extremos

Un prerradical σ se dice extremo si para cada $S \in R\text{-}Simp$, $\sigma(ES) = 0$ o $\sigma(ES) = ES$. Si ρ, σ, τ son todos prerradicales extremos con $\tau \leq \sigma$ y $S \in R\text{-}Simp$, se tienen los siguientes casos

1. Si $\tau(ES) = ES$, entonces $\diamond(\rho,\sigma,\tau)(ES) = 0$;

2. Si $\tau(ES) = 0$, entonces $\diamond(\rho,\sigma,\tau)(ES) = (\rho\circ\sigma)(ES)$ y claramente $\rho\circ\sigma$ es extremo.

Por lo anterior, la colección de clases de equivalencia módulo $\approx$ de prerradicales extremos forma un monoide. Resulta interesante investigar más al respecto.

Los prerradicales extremos se introducen en [27].

Apéndice A

Filtros lineales y módulos finitamente anulados

A.1. Filtros lineales

Definición A.1.1. *Una familia $\mathcal{L}$ de ideales izquierdos de un anillo R se llama filtro lineal si satisface*

1. *Si $I \in \mathcal{L}$ y $J \supseteq I$ entonces $J \in \mathcal{L}$;*
2. *Si $I, J \in \mathcal{L}$ entonces $I \cap J \in \mathcal{L}$;*
3. *Si $I \in \mathcal{L}$ y $a \in R$, entonces $(I : a) \in \mathcal{L}$.*

Para cualquier filtro lineal $\mathcal{L}$, la clase $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} := \{M \in R\text{-}Mod \mid \forall x \in M\ Ann(x) \in \mathcal{L}\}$ es de pretorsión hereditaria. Inversamente, dada una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$, el conjunto de ideales izquierdos $\mathcal{L}_{\mathcal{T}} := \{{}_RI \mid R/I \in \mathcal{T}\}$ es un filtro lineal.

A.2. Módulos finitamente anulados

Dado $M \in R\text{-}Mod$, $\mathcal{L}_M$ denota al conjunto de todos los ideales izquierdos J de R para los cuales existe un número finito de elementos $m_1, ..., m_n \in M$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Ann(m_i) \subseteq J$. Es fácil ver que $\mathcal{L}_M$ es un filtro lineal. Si Rad^M es el prerradical hereditario asociado a $\mathcal{L}_M$, como $Ann(x) \in \mathcal{L}_M$ para cada $x \in M$, es claro que $Rad^M(M) = M$. Más aún, Rad^M es el menor prerradical hereditario tal que M es de torsión. De hecho, si τ es cualquier prerradical hereditario, el módulo $M = \bigoplus_{D \in \mathcal{D}} R/D$, donde $\mathcal{D}$ es el conjunto de ideales izquierdos D tales que $\tau(R/D) = R/D$, es tal que $Rad^M = \tau$.

Un módulo M es finitamente generado si existe un número finito de elementos $m_1, ..., m_n \in M$ tales que $Ann(M) = \bigcap_{i=1}^{n} Ann(m_i)$. Luego, M es finitamente anulado si y sólo si $\mathcal{L}_M$ tiene un elemento mínimo.

Proposición A.2.1. *Son equivalentes para una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$:*

(*a*) *$\mathcal{T}$ es cerrada bajo productos;*

(*b*) *$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ tiene un elemento menor.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Para la familia de epimorfismos naturales $\{\rho_J : R \in R/J \mid J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}\}$ existe un único morfismo $f : R \to \prod_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} R/J$ tal que $I := Kerf = \bigcap \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Luego

$$R/I \cong Imf \leq \prod_{J \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}} R/J.$$

Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo productos entonces $R/I \in \mathcal{T}$ y así $I \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ es el elemento buscado.

$(b \Rightarrow a)$ Si I es el elemento menor, primero se observa que

$$\mathcal{T} = \{M \mid \forall x \in M,\ I \subseteq Ann(x)\} = \{M \mid IM = 0\}.$$

Sea $\{M_i\}_{i \in \Gamma}$ una familia de módulos contenida en $\mathcal{T}$ entonces

$$I\left(\prod_{i \in \Gamma} M_i\right) = 0.$$

■

Un prerradical τ se llama Jansiano si es hererditario y $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo productos. Si τ es Jansiano y $M \in R\text{-}Mod$, por la proposición previa se tiene que $\tau(M) = \{x \in M \mid IX = 0\}$, donde I es el menor elemento de $\mathcal{L}_{\mathbb{T}_\tau}$.

Proposición A.2.2. *M es finitamente anulado si y sólo si existe un monomorfismo de módulos*

$$R/Ann(M) \hookrightarrow M^n$$

para cierto número natural n.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $Ann(M) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ann(m_i)$ con $m_1, ..., m_n \in M$. Se define $\varphi : R/Ann(M) \to M^n$ por $\varphi(r + Ann(M)) = \sum_{i=1}^{n} r\iota_i(m_i)$, donde ι_i es la inclusión natural para cada i. Ahora, $\varphi(r+Ann(M)) = 0$ ssi $r\iota_i(m_i) = 0$ para cada i ssi $rm_i = 0$ para cada i ssi $r \in Ann(M)$.

$(\Leftarrow)$ Si φ es el monomorfismo, se define para cada $i = 1, ..., n$, $m_i = \pi_i\varphi(1 + Ann(M))$, donde π_i es la proyección natural. Si $r \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ann(m_i) \setminus Ann(M)$ entonces para cada i

$$\pi_i\varphi(r + Ann(M)) = r\pi_i\varphi(1 + Ann(M)) = rm_i = 0$$

y así $r \in Ann(M)$, contradicción.

■

Proposición A.2.3. *Si R es artiniano entonces todo módulo fiel M es finitamente anulado.*

Demostración. Si M es fiel entonces $\bigcap\limits_{x \in M} ker\ d_x = 0$, donde cada $d_x : R \to M$ es la multiplicación por $x \in M$. Como R es artiniano existen $x_1, ..., x_n \in M$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} ker\ d_{x_i} = 0$. Entonces el morfismo $\oplus_{i=1}^{n} d_{x_i} : R \to M^n$ es un encaje. ■

El recíproco de lo anterior es cierto, para probarlo se requiere un concepto auxiliar: Un módulo se dice quasi-artiniano si contiene un sumbódulo propio esencial. Todo anillo artinano (izquierdo) es quasi-artiniano pues tiene zoclo no cero.

Proposición A.2.4. *Si todo R-módulo fiel es finitamente anulado entonces R es quasi-artiniano (izquierdo).*

Demostración. Sea $E = \bigoplus\limits_{S \in R\text{-}Simp} ES$. Es bien sabido que E es un cogenerador para R-Mod y por tanto es fiel. Por hipótesis R se sumerge en E^n para algún n y como $_RR$ es finitamente generado este encaje es en realidad dentro de una cantidad finita de cápsulas inyectivas de módulos simples, cada uno de los cuales es quasi-artiniano. Así $_RR$ es quasi-artiniano. ■

En [3] se prueba la siguiente

Proposición A.2.5. *Un anillo R es artiniano si y sólo si todo cociente R/I es un anillo quasi-artiniano para cualquier ideal bilateral I.* ■

Corolario A.2.6. *Un anillo R es artiniano si y sólo si todo R-módulo es finitamente anulado.* ■

Finalmente, ha quedado establecido el muy importante

Teorema A.2.7 (Beachy, 1978)**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R*

1. *R es artiniano izquierdo.*
2. *Todo módulo izquierdo es finitamente anulado.*
3. *Para cualquier filtro lineal $\mathcal{D}$, $\bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{D}$*
4. *Todo prerradical hereditario es Jansiano.*

■

Sea R un anillo cualquiera. A cada ideal I de R le corresponde un prerradical hereditario η_I, definido por $\eta_I(M) \coloneqq \{x \in M \mid Ix = 0\}$ para todo módulo M. Si R es artiniano, entonces cada prerradical hereditario τ es Jansiano por el teorema previo. Haciendo $I_\tau = \bigcap \mathcal{L}_{\mathbb{T}_\tau}$, se cumple que (ver el comentario después de A.2.1) $\eta_{I_\tau} = \tau$. Es decir, la asignación $I \to \eta_I$ es sobreyectiva si y sólo si el anillo en cuestión es artiniano.

Apéndice B

Números de Motzkin

Se llama número de Motzkin a cualquier número natural que satisfaga la relación de recurrencia

$$M_0 = 1;$$
$$M_1 = 1;$$
$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} M_{k-2}M_{n-k}.$$

Los primeros números de Motzkin son

$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798...$$

Si $n \geq 1$, un camino de Motzkin en la cuadrícula $\mathbf{n+1}^2$ es un *w-camino* que termina en el punto $(n, 0)$, es decir, un camino de $(0, 0)$ hasta $(n, 0)$ que admite pasos sólo de la forma $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$. $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}$ denota el conjunto de caminos de Motzkin de longitud $n \geq 1$ y $\mathfrak{m}_n$ su cardinal. Evidentemente $\mathfrak{m}_1 = 1$. Se supone que para cierto $n > 1$, $\mathfrak{m}_{n-1} = M_{n-1}$. Sea $c = (c_0, c_1, ..., c_n) \in \mathfrak{M}_n$, se dice que c es de tipo 1 si $c_1 = 0$, en cambio c es de tipo 2 si $c_1 = 1$. Si c sólo toca al eje x en los extremos de la cuadrícula se dice que "no regresa". Sea ahora $(k, 0)$ el primer punto distinto del origen donde c toque al eje x.

- ⋆ Si $k = 1$, entonces c es de tipo 1, compuesto por un paso horizontal seguido de un camino de Motzkin de longitud $n - 1$. Por hipótesis inductiva, hay M_{n-1} caminos de tipo 1 en $\mathfrak{M}_n$.

- • Si $1 < k \leq n$, entonces c es de tipo 2 y se descompone como un camino de Motzkin de longitud k que no regresa seguido de un camino en $\mathfrak{M}_{n-k}$. Variando k se observa que existen $\sum_{k=2}^{n} M_{k-2}M_{n-k}$ caminos de este tipo en $\mathfrak{M}_n$.

Luego,

$$\mathfrak{m}_n := |\mathfrak{M}_n| = M_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} M_{k-2} M_{n-k} = M_n$$

para todo $n \geq 1$.

Apéndice C

Algunas tablas de multiplicación para anillos locales uniseriales

$\circ$	0	ω_0^1	ω_1^2	ω_1^2/ω_0^1	1
0	0	0	0	0	0
ω_0^1	0	0	0	0	ω_0^1
ω_1^2	0	ω_0^1	ω_1^2	ω_1^2/ω_0^1	ω_1^2
ω_1^2/ω_0^1	0	ω_0^1	ω_1^2	ω_1^2/ω_0^1	ω_1^2/ω_0^1
1	0	ω_0^1	ω_1^2	ω_1^2/ω_0^1	1

Tabla C.1: Tabla de multiplicación de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ (n=2).

$\circ$	0	ω_1^2	1
0	0	0	0
ω_1^2	0	ω_1^2	1
1	0	ω_1^2	1

(a)

$\circ$	0	ω_0^1	1
0	0	0	0
ω_0^1	0	ω_0^1	1
1	0	ω_0^1	1

(b)

Tabla C.2: Tabla de multiplicación de $\langle {}_R\mathsf{HP}, \circ \rangle$ y $\langle {}_R\mathsf{tRad}, :^{\mathsf{opp}} \rangle$ (n=2).

$\circ$	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	ω_0^1	ω_1^2	α_2^2	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/ω_0^2	α_2^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ω_0^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_0^2
α_1^2	0	0	0	0	ω_0^2	ω_1^2	α_1^2	0	0	α_1^2/ω_0^2	0	0	α_1^2
α_1^1	0	0	α_1^2	α_1^1	α_1^2	α_1^1	α_1^1	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_1^1	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_1^1
ω_0^1	0	0	0	0	ω_0^2	ω_1^2	α_1^2	0	0	α_1^2/ω_0^2	0	0	ω_0^1
ω_1^2	0	0	α_1^2	α_1^1	α_1^2	α_1^1	α_1^1	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_1^1	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	ω_1^2
α_2^2	0	0	α_1^2	α_1^1	ω_0^2	ω_1^2	α_2^2	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_2^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_2^2
α_1^2/ω_0^2	0	0	0	0	ω_0^2	ω_0^2	α_1^2	α_1^2/ω_0^2	0	α_1^2/ω_0^2	0	0	α_1^2/ω_0^2
α_1^1/ω_0^2	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	α_1^2	α_1^1	α_1^1	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_1^1	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_1^1/ω_0^2
α_2^2/ω_0^2	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	ω_0^1	ω_1^2	α_2^2	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_2^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_2^2/ω_0^2
α_1^1/α_1^2	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_1^1/α_1^2
ω_1^2/α_1^2	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	ω_1^2/α_1^2
1	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	ω_0^1	ω_1^2	α_2^2	α_1^2/ω_0^2	α_1^1/ω_0^2	α_2^2/ω_0^2	α_1^1/α_1^2	ω_1^2/α_1^2	1

Tabla C.3: Tabla de multiplicación de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{P})$ (n=3).

$\circ$	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	ω_0^1	α_2^2	1
0	0	0	0	0	0	0	0
ω_0^2	0	0	0	0	0	0	ω_0^2
α_1^2	0	0	0	α_1^2	0	α_1^2	α_1^2
α_1^1	0	0	0	α_1^1	0	α_1^1	α_1^1
ω_0^1	0	0	ω_0^2	α_1^2	ω_0^2	ω_0^2	ω_0^1
α_2^2	0	0	α_1^2	α_1^1	α_1^2	α_2^2	α_2^2
1	0	ω_0^2	α_1^2	α_1^1	ω_0^1	α_2^2	1

Tabla C.4: Tabla de multiplicación de $\mathcal{Q}({}_R\mathsf{HP}) = \mathcal{Q}({}_R\mathsf{tRad})$ (n=3).

Bibliografía

[1] ANDERSON, F. y FULLER, K. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN 9781468499131.

[2] BEACHY, J. y SERIES, C. *Introductory Lectures on Rings and Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1999. ISBN 9780521644075.

[3] BEACHY, J. A. y BLAIR, W. D. Finitely annihilated modules and orders in artinian rings. *Communications in Algebra*, vol. 6(1), páginas 1–34, 1978.

[4] VAN DEN BERG, J. E. y WISBAUER, R. Modules whose hereditary pretorsion classes are closed under products. *Journal of pure and applied algebra*, vol. 209(1), páginas 215–221, 2007.

[5] BICAN, L., KEPKA, T., NĚMEC, P. y P, N. *Rings, Modules, and Preradicals*. Lecture notes in pure and applied mathematics. M. Dekker, 1982.

[6] DE VIOLA-PRIOLI, A. M., VIOLA-PRIOLI, J. E. y WISBAUER, R. Module categories with linearly ordered closed subcategories. *Communications in Algebra*, vol. 22(9), páginas 3613–3627, 1994.

[7] DIKRANJAN, D. y GIULI, E. Closure operators i. *Topology and its Applications*, vol. 27(2), páginas 129 – 143, 1987. ISSN 0166-8641.

[8] FACCHINI, A. *Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules*. Progress in mathematics. Birkh{8475}ser, 1998. ISBN 9783764359089.

[9] FAITH, C. On köthe rings. *Mathematische Annalen*, vol. 164, páginas 207–212, 1966.

[10] FAITH, C. *Algebra: Rings, modules, and categories:*. Algebra. Springer-Verlag, 1973. ISBN 9780387055510.

[11] FAITH, C. *Algebra II Ring Theory: Vol. 2: Ring Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 9783642653216.

[12] FENRICK, M. H. Conditions under which all preradical classes are perfect hereditary torsion classes. *Communications in Algebra*, vol. 2(4), páginas 365–376, 1974.

[13] FERNANDEZ-ALONSO, R. y GAVITO, S. The lattice of preradicals over local uniserial rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 05(06), páginas 731–746, 2006.

[14] FERNÁNDEZ-ALONSO, R. y MAGAÑA, J. Galois connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules. *Applied Categorical Structures*, vol. 24, 2015.

[15] GAVITO TICOZZI, S. C. *Las retículas de prerradicales sobre los anillos* $\mathbb{Z}_{p^n}$. Tesis de maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, 2005.

[16] GOLAN, J. *Torsion Theories*. Monographs, advanced texts, and surveys in pure and applied mathematics. Longman Scientific & Technical, 1986. ISBN 9780582998087.

[17] GOLAN, J. S. *Thirty open problems concerning torsion theories*. Secretariado de publicaciones y departamento de algebra y fundamentos, 1986.

[18] GOTTFRIED, K. Verallgemeinerte abelsche gruppen mit hyperkomplexen operatorenring. *Math. Z.*, vol. 05(89), páginas 31–44, 1934.

[19] GRÄTZER, G., DAVEY, B., FREESE, R., GANTER, B., GREFERATH, M., JIPSEN, P., PRIESTLEY, H., ROSE, H., SCHMIDT, E., SCHMIDT, S. ET AL. *General Lattice Theory: Second edition*. Birkhäuser Basel, 2002. ISBN 9783764369965.

[20] MÁRQUEZ HERNÁNDEZ, E. *Grandes retículas asociadas a un anillo y el caso de los enteros*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

[21] NAKAYAMA, T. On frobeniusean algebras ii. *Math*, 1939.

[22] NAKAYAMA, T. Note on uni-serial and generalized uni-serial rings. *Proc. Imp. Acad.*, vol. 16(7), páginas 285–289, 1940.

[23] OSBORNE, M. *Basic Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN 9781461212782.

[24] Raggi, F., Montes, J. R., Rincón, H., Fernández-Alonso, R. y Signoret, C. The lattice structure of preradicals. *Communications in Algebra*, vol. 30(3), páginas 1533–1544, 2002.

[25] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R. y Signoret, C. Prime and irreducible preradicals. *J. Algebra Appl.*, vol. 4(4), páginas 451–466, 2005. ISSN 0219-4988.

[26] Raggi, F., Rios Montes, J., Rincon Mejia, H., Fernández-Alonso, R. y Gavito, S. Main modules and some characterizations of rings with global conditions on preradicals. *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 13, 2013.

[27] Raggi, F., Rios Montes, J., Rincon Mejia, H., Fernández-Alonso, R. y Signoret, C. The lattice structure of preradicals iii: Operators. *Journal of Pure and Applied Algebra - J PURE APPL ALG*, vol. 190, páginas 251–265, 2004.

[28] Rincon Mejia, H. When is every preradical of r-mod a left exact radical. *Communications in Algebra*, vol. 25, páginas 2507–2515, 1997.

[29] Stanley, R. y Fomin, S. *Enumerative Combinatorics: Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. ISBN 9781139810999.

[30] Stanley, R. y Rota, G. *Enumerative Combinatorics: Volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521663519.

[31] Stenström, B. *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 9783642660672.

[32] Teply, M. L. y van den Berg, J. E. Quotients of preradicals on a module category. *Communications in Algebra*, vol. 39(8), páginas 2906–2925, 2011.

[33] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*. Algebra, logic, and applications. Taylor & Francis, 1991. ISBN 9782881248054.

Índice alfabético

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00215
Matrícula: 2183802380

Cocientes de prerradicales sobre anillos locales uniseriales

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 14:00 horas del día 18 del mes de marzo del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. JOSE RIOS MONTES
DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ
DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: EDGAR GARCIA MENESES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES

G. Meneses É.

EDGAR GARCIA MENESES
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

José Rios M.

DR. JOSE RIOS MONTES

VOCAL

R. Fernández A.

DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

SECRETARIA

Lizbeth Sandoval

DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella