"SOLUCIONES EXACTAS DE UNIVERSOS NO-ISOTROPICOS"

TESIS QUE PRESENTA

GUZMAN DE LA SELVA ENRIQUE

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE MAESTRIA
EN FISICA

MAYO, 1985

ASESOR: PABLO CHAUVET ALDUCIN

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

"... La superficie de la tierra (tlaltípac) es un gran disco situado en el centro del Universo que se prolonga horizontal y verticalmente. Porque, el Universo se distribuye en cuatro grandes cuadrantes o rumbos distintos, que se abren en el ombligo de la tierra y se prolongan hasta donde las aguas que rodean al mundo se juntan con el cielo y reciben el nombre de agua celeste (Ilhuica-atl)..."

(Códice Vaticano A, Náhuatl. León Portilla, 1956).

Agradezco al M. en C. Paul Chauvet po
su valiosa colaboración y orientación
en este trabajo.

I N D I C E

I. INTRODUCCION.

En este trabajo mostramos algunas soluciones exactas a las ecuaciones cosmológicas en la teoría Jordan-Brans-Dicke (JBD), para universos homogéneos y anisotrópicos. Primero mencionaremos algunas características de la teoría tensor-escalar JBD, después la importancia de los universos no-isotrópicos. En la sección II se proponen las hipótesis que modelan al universo. En III se dá la representación de las ecuaciones cosmológicas de los diferentes tipos de universos homogéneos. En IV se muestran las soluciones de las ecuaciones cosmológicas de los Universos tipo I, II, III, Kantowski-Sachs (KS), V, VI_0 y VI_h, según la clasificación dada por Bianchi (1897) (ver Estabrook et al. 1968). Estas soluciones son para fluídos perfectos que obedecen ecuación de estado barotrópica, además se dan las razones por las cuales todavía no se han encontrado soluciones para los demás tipos de universos homogéneos. En V discutimos las soluciones y en VI las conclusiones.

Generalizaciones de la teoría de la Relatividad de Einstein, que incluyen la variación de la "constante" de gravitación universal G como función de un campo escalar ϕ, fueron propuestas por Jordan (1948) e independientemente por Brans y Dicke (1961), aunque esta última es un caso particular de la de Jordan. El punto de partida de Brans y Dicke fue incorporar el principio de Mach en la Relatividad General (RG), el cual dice que el fenómeno de la inercia surge de aceleraciones con respecto a la distribución de masa total en el universo y la hipótesis de Dirac (1937) propuso que G variara con el tiempo ($G \sim \frac{1}{t}$). La teoría tensor-escalar JBD difiere significativamente de la Relatividad General cerca de la singularidad inicial a tiempos pequeños donde el campo escalar ϕ tiene contribuciones importantes (Gurevich et al. 1973 , Ruban y Finkelstein, 1975). La teoría JBD ganó nuevo interés en Cosmología através de la discusión por Dehnen y Obregón (1971,1972) de las soluciones exactas de las ecuaciones de Brans-Dicke, las cuales no tienen analogía en Relatividad General, aun para valores grandes del parámetro ω .

Observaciones primeramente de la radiación de fondo de microondas (2.7K), muestra que el universo se expande isotrópicamente con un alto grado de exactitud en la actualidad, y que la distribución de materia es homogénea a gran escala, aunque hay ciertas desviaciones de esa isotropía (Sunyaev y Zel'dovich, 1970). Entonces surge la pregunta de por qué el universo es tan isotrópico a gran escala, aunque no es isotrópico localmente?. Surge la posibilidad de que haya habido condiciones altamente anisotrópicas cerca de la singularidad inicial, y por algunos mecanismos disipativos, tales como viscosidad de neutrinos (Matzner y Misner, 1972) y creación de partículas (Zel'dovich, 1971), en etapas tempranas del universo, hayan tendido a isotropizar el universo como se observa ahora aunque seguirían quedando algunas desviaciones de esa isotropía (como la observada en la radiación de fondo), algunos modelos indican que esos procesos de isotropización tardaron del orden de $t \sim 10^{-43}$ s (Novikov 1968-1970), donde probablemente entrarían efectos cuánticos, todas estas clases de modelos son los llamados universos homogéneos anisotrópicos, para una revisión completa ver por ej. Ryan y Shepley (1972).

La finalidad de este trabajo es presentar un conjunto de soluciones exactas a la teoría JBD para universos homogéneos anisotrópicos (tipos I, II,III-KS, V, VI_o, VI_h). en donde se demuestra que se pueden integrar las ecuaciones cosmológicas en forma relativamente sencilla, con un reescalamiento del campo escalar ϕ y de la densidad de energía ρ . Este reescalamiento se obtiene como solución en el espacio plano (K=0) isotrópico y resulta que también es solución para espacio abierto (K=-1) y espacio cerrado (K=+1) (Chauvet,1983). En este trabajo se obtiene el mismo reescalamiento en el modelo Bianchi tipo-I, y se propone para los demás tipos homogéneos.

II. SUPOSICIONES.

Las supociciones que hacemos para este trabajo, son por un lado, que el universo se comporta como un fluído perfecto, lo cual es observado a una gran escala y se supone que la ecuación de estado que describe a ese fluído, es la ecuación llamada barotrópica:

$$P = \beta\rho$$

donde P es la presión y ρ es la densidad del fluído y la constante de proporcionalidad β que generalmente toma valores entre 0 y 1, pero que también puede ser negativa en caso de creación de partículas (Obregón y Pimentel, 1978). Cuando $\beta = \frac{1}{3}$ la época es dominada por partículas relativistas o radiación, se conocen soluciones exactas en el caso isotrópico (Obregón y Chauvet, 1978; Gurevich et al., 1973), se considera que esta época antecede a la llamada "polvo" donde $\beta = 0$ que parece ser la que predomina actualmente. Zel'dovich (1972) sugirió la ecuación límite $P = \rho$ para describir un gas de bariones frío con interacción fuerte. Si cualquier época puede ser caracterizada, por lo menos en primera aproximación, por un valor particular de β nuestras soluciones las podrían describir a todas ellas (Chauvet y Obregón, 1979).

Por otra parte, la única hipótesis que se hizo para encontrar las soluciones es la que conecta el campo escalado Ψ, donde:

$$\Psi = \phi R^3$$

ϕ es el campo escalar de la teoría JBD y R es el factor de escala del universo, con la densidad de energía ε :

$$\varepsilon = \rho R^3$$

ρ es la densidad del fluído, y están relacionados por la ecuación

(Chauvet, 1984):

$$\varepsilon\psi = a\eta^2 + b\eta + c$$

Donde a, b y c son constantes, y η es un "tiempo generalizado" que puede ser el tiempo propio t. Esta relación de campo escalado ha mostrado que es una manera relativamente simple de integrar las ecuaciones de JBD para universos homogéneos e isotrópicos, y al parecer también es una herramienta para trabajar el caso anisotrópico. En este trabajo por medio del reescalamiento se obtuvo la solución $\varepsilon\psi = a\eta^2 + b\eta + c$ en el modelo Bianchi tipo-I, y luego vamos a suponer que se cumple:

$$\varepsilon\psi = a\eta^2$$

Para resolver los otros tipos de Universos, esta aproximación es aceptable, ya que para tiempos grandes donde es importante la curvatura (i.e. todos los modelos no isotrópicos excepto Bianchi tipo-I), el término dominante es el que contiene a la constante a.

III.- ECUACIONES COSMOLOGICAS.

En este capítulo se muestran las ecuaciones de la teoría JBD para los diferentes Universos homogéneos, y usando la hipótesis de reescalamiento del campo escalar ϕ de la teoría, se reescribiran las ecuaciones para cada universo y su solución, según el caso.

La métrica para el modelo Bianchi tipo-I es:

$$ds^2 = -\,dt^2 + R_1^2\, dX^{1^2} + R_2^2\, dX^{2^2} + R_3^2\, dX^{3^2}$$

El cual representa la generalización homogénea del modelo cuasi-euclideano isotrópico y contiene al último como un caso especial con $R_1 = R_2 = R_3 = R(t)$.

Las correspondientes ecuaciones de campo JBD son:

$$\dot{H}_i + 3HH_i + H_i \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{\alpha}{\phi}\left[\rho + \omega\,(\rho - p)\right] \text{ ------------------}*$$

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} = \frac{\rho}{\phi} \text{ ------------------}**$$

$$\frac{1}{R^3}\frac{d}{dt}(R^3\dot{\phi}) = \alpha(\rho - 3P) \text{ -----------------------}***$$

Donde el punto indica derivada con respecto a t, donde $H_i = \frac{\dot{R}_i}{R_i}$ son los parámetros de Hubble, $i = 1,2,3$. Además

$$3H = \Sigma H_i$$

$$R^3 = R_1 R_2 R_3$$

$$\alpha = \frac{1}{(3+2\omega)}$$

De la Ley de conservación del tensor de energía-momento en la teoría JBD, en el sistema de referencia moviéndose con el fluído cosmológico se tiene la ecuación de la expansión adiabática válida para fluído ideal (también vale en relatividad general):

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + P} = -3\,\frac{\dot{R}}{R} \tag{1}$$

y la ecuación de estado es barotrópica:

$$P = \beta\rho \quad ; \quad 0 \leq \beta \leq 1 \tag{2}$$

substituyendo 2 en 1 se obtiene:

$$\rho R^{3(1+\beta)} = M \tag{3}$$

donde M es una constante. Sumando *,**,*** tenemos:

$$\left[R^3\left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} + \frac{\dot{R}_2}{R_2} + \frac{\dot{R}_3}{R_3}\right)\right]^{\bullet} + R^3\left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} + \frac{\dot{R}_2}{R_2} + \frac{\dot{R}_3}{R_3}\right)\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 3\alpha\left[1 + \omega(1-\beta)\right]\frac{\varepsilon}{\phi} \tag{4}$$

Donde reescalando la densidad

$$\varepsilon \equiv \rho R^3 \tag{5}$$

Multiplicando 4 por ϕ:

$$\left[\phi R^3\left(\frac{\dot{R}_1}{R_1}+\frac{\dot{R}_2}{R_2}+\frac{\dot{R}_3}{R_3}\right)\right]^{\cdot} = 3\alpha\left[1+\omega(1-\beta)\right]\varepsilon \tag{6a}$$

integrando:

$$\phi\dot{R}^3 = 3\alpha\left[1+\omega(1-\beta)\right]\eta \tag{6}$$

donde el nuevo parametro η es introducido mediante la relación

$$d\eta = \varepsilon dt \tag{7}$$

Usando *** como

$$\left(R^3\dot{\phi}\right)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\,\varepsilon \tag{8}$$

integrando

$$R^3\dot{\phi} = \alpha(1-3\beta)\,\eta + b \tag{9}$$

Sumando 6 y 9

$$\phi\dot{R}^3 + R^3\dot{\phi} = A_1\eta + b \tag{10}$$

Donde A_1 y b son constantes. Introduciendo el campo reescalado ψ

$$\psi = \phi R^3 \tag{11}$$

Substituyendo en 10 y cambiando el punto por derivado con respecto a η mediante 7:

$$\varepsilon \psi' = A_1 \eta + b \tag{12}$$

donde "prima" indica derivación con respecto a η. De 3 y 5 se obtiene:

$$-3\beta \frac{R'}{R} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \tag{13}$$

Usando 11, 13 y 7, y substituyendo en 6:

$$\psi \varepsilon' = A_2 \eta \;, \quad A_2 = \text{constante.} \tag{14}$$

Sumando 12 y 14 e integrando se obtiene:

$$\varepsilon \psi = a\eta^2 + b\eta + c \qquad (15$$

Donde a,b y c son constantes. Se ha obtenido esta relación del campo escalado, que es la misma que obtuvo Chauvet (1984) para el caso isotrópico. y se va a utilizar para resolver otros universos anisotrópicos más adelante.

Usando la relación obtenida para ψ , procedemos a encontrar la solución para Bianchi tipo -I, subtituyendo 15 en 6 se obtiene:

$$\frac{R'}{R} = \alpha\left[1+\omega(1-\beta)\right]\frac{\eta}{a\eta^2+b\eta+c} \tag{16}$$

Donde se ha usado de nuevo 7 y 11. Para encontrar los diferentes Ri, multiplicando ** por ψ y cambiando t por η de la misma manera que antes se obtiene:

$$\psi H_i = \alpha\left[1+\omega(1-\beta)\right]\eta + h_i \tag{17}$$

Donde h_i es una constante de integración. Usando 15 se encuentra que:

$$\frac{R_i'}{R_i} = \frac{R'}{R} + \frac{h_i}{a\eta^2+b\eta+c} \tag{18}$$

Donde:

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \tag{19}$$

El carácter de la solución de las ecuaciones básicas 16 y 19, y el comportamiento dinámico del modelo anisotrópico depende esencialmente del signo del discriminante del denominador:

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{20}$$

Si $\Delta < 0$, la solucion es:

$$R = R_o(a\eta^2 + b\eta + c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \left[\frac{2a\eta + b - \sqrt{-\Delta}}{2a\eta + b + \sqrt{-\Delta}}\right]^{-\frac{\alpha b}{2a}\frac{[1+\omega(1-\beta)]}{\sqrt{-\Delta}}}$$

$$R_i = R_{oi}(a\eta^2 + b\eta + c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \left[\frac{2a\eta + b - \sqrt{-\Delta}}{2a\eta + b + \sqrt{-\Delta}}\right]^{-\frac{\alpha b}{2a}\frac{[1+\omega(1-\beta)]}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{h_i}{\sqrt{-\Delta}}} \tag{21}$$

usando 3 y 5:

$$\psi = \frac{R^{3\beta}}{M}(a\eta^2 + b\eta + c) \tag{22}$$

Si $\Delta > 0$, la solución es:

$$R = R_o(a\eta^2 + b\eta + c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \exp\left\{-\frac{\alpha b}{a}\frac{(1-3\beta)}{\sqrt{\Delta}}\, \mathrm{TAN}^{-1}\frac{2a\eta + b}{\sqrt{\Delta}}\right\}$$

$$R_i = R_{oi}(a\eta^2 + b\eta + c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \exp\left\{-\frac{\alpha b[1+\omega(1-\beta)] + 2ah_i}{a\sqrt{\Delta}}\, \mathrm{TAN}^{-1}\frac{2a\eta + b}{\sqrt{\Delta}}\right\} \tag{23}$$

Si Δ = 0, la solucion es:

$$R = R_o(a\eta^2 + b\eta + c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \exp\left\{\frac{\alpha\frac{b}{a}[1+\omega(1-\beta)]}{2a\eta + b}\right\}$$

$$R_i = R_{oi}(a\eta^2 + b\eta + c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \exp\left\{\frac{\alpha\frac{b}{a}[1+\omega(1-\beta)] - 2h_i}{2a\eta + b}\right\} \tag{24}$$

Donde para estos dos últimos valores de Δ, también vale 22.
Además de *, ** y ***:

$$R_{01}R_{02}R_{03} = R_0^3$$

$$a = \frac{\alpha}{2}\left\{(1-3\beta) + 3\left[1+\omega(1-\beta)\right](1-\beta)\right\}$$

$$b = 3\alpha\left[1+\omega(1-\beta)\right](1-\beta) \qquad (25)$$

$$c = \alpha^2\left\{3\left[1+\omega(1-\beta)\right]^2 - \frac{1}{2}\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)\right\}$$

y el discriminante será negativo, positivo o cero, dependiendo del parametro ω.
Estas soluciones fueron encontradas por Ruban y Finkelstein (1975) de una manera más complicada.
El campo escalar se puede obtener substituyendo los valores para R de 21, 23, 24, dependiendo del valor de Δ, en 22 donde $\psi = \phi R^3$ (Ec. 11) donde resulta:

$$\phi = \phi_0 \frac{(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}(1-3\beta)}}{\left[\dfrac{2a\eta+b-\sqrt{-\Delta}}{2a\eta+b+\sqrt{-\Delta}}\right]^{\frac{\alpha b}{2a}\frac{(1-3\beta)}{\sqrt{-\Delta}}}} \;;\quad \Delta < 0 \qquad (21\text{-a})$$

$$\phi = \phi_0 (a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}(1-3\beta)} \exp\left\{-\frac{\alpha b}{a}\frac{(1-3\beta)}{\sqrt{\Delta}} \tan^{-1}\frac{2a\eta+b}{\sqrt{\Delta}}\right\};\Delta>0 \qquad (23\text{-a})$$

$$\phi = \phi_0 (a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}(1-3\beta)} \exp\left\{\frac{\alpha\frac{b}{a}(1-3\beta)}{2a\eta+b}\right\} \;;\quad \Delta = 0 \qquad (24\text{-a})$$

donde ϕ_0 es una constante, a, b, c, están dadas por 25.

Pasamos ahora a resolver el modelo Bianchi Tipo-II.

Tomando (x,y,z) como coordenadas locales, la métrica Bianchi tipo-II es:

$$dS^2 = -dt^2 + R_1^2 (dx - z\,dy)^2 + R_2^2 dy^2 + R_3^2 dz^2 \tag{26}$$

Donde las ecuaciones de campo son:

$$\dot H_1 + 3HH_1 + \frac{R_1^2}{2R_2^4} + \frac{\dot\Phi}{\Phi} H_1 = \alpha \frac{\rho}{\Phi}[1+\omega(1-\beta)] \tag{27a}$$

$$\dot H_i + 3HH_i - \frac{R_1^2}{2R_2^4} + \frac{\dot\Phi}{\Phi}H_i = \alpha\frac{\rho}{\Phi}[1+\omega(1-\beta)], \quad i=2,3. \tag{27b}$$

$$H_2 = H_3 \tag{27c}$$

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 - \frac{R_1^2}{4R_2^4} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot\Phi^2}{\Phi^2} + 3H\frac{\dot\Phi}{\Phi} = \frac{\rho}{\Phi} \tag{28}$$

$$(R^3\dot\Phi)^{\cdot} = \alpha\rho R^3(1-3\beta) \tag{29}$$

donde hemos usado la ecuación de estado barotrópica 2. Consideramos el caso de simetría rotacional localmente (LRS), donde $S = R$, $R = R_2 = R_3$.

De la ecuación 27a, sumándole para i=2 en la ecuacion 27b, se obtiene:

$$\left(\frac{\dot R}{R}+\frac{\dot S}{S}\right)^{\cdot} + \left(2\frac{\dot R}{R}+\frac{\dot S}{S}\right)\left(\frac{\dot R}{R}+\frac{\dot S}{S}\right) + \left(\frac{\dot R}{R}+\frac{\dot S}{S}\right)\frac{\dot\Phi}{\Phi} = 2\alpha\frac{\rho}{\Phi}[1+\omega(1-\beta)] \tag{30}$$

multiplicando por $\phi R^2 S$ y usando el parámetro η en lugar de t de 7 de la misma manera que para Bianchi tipo I, se obtiene:

$$\phi R^2 S\left(\frac{\dot R}{R}+\frac{\dot S}{S}\right) = 2\alpha[1+\omega(1-\beta)]\eta \tag{31}$$

usando la ecuación de reescalamiento 15 de la siguiente manera:

$$\varepsilon\psi = a\eta^{2} \tag{32}$$

con a una constante por evaluar.

Integrando 31, después de haber cambiado de puntos a primas:

$$RS = \eta^{2\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]} \tag{33}$$

dividiendo 31 y 29 obtenemos ϕ como función de RS, y usando 33 se obtiene ϕ como función de η :

$$\phi = F^{1}\eta^{\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)} \tag{34}$$

Con estos resultados y usando de nuevo 32 y 33, junto con 3 que es la relación para ε como función de R y S, encontramos estas cantidades en función de η , pero ya por separado:

$$S = \frac{1}{\Omega}\eta^{\left\{-2+\frac{(1-\beta)}{a}+2\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right](1-2\beta)\right\}\frac{1}{(1-\beta)}} \tag{35}$$

$$R = \Omega\,\eta^{\left\{2-\frac{(1-\beta)}{a}+2\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]\beta\right\}\frac{1}{(1-\beta)}} \tag{36}$$

regresando a 3:

$$\varepsilon = M\Omega^{-\beta}\eta^{\left\{2-\frac{(1-\beta)}{a}+2\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]\right\}\frac{-\beta}{(1-\beta)}} \tag{37}$$

y usamos bien la representación de campo escalado ψ ó equivalentemente ϕ , ya que están conectados por 11:

$$\phi = F\, \eta^{\left\{\frac{(1-\beta)-2\alpha[1+\omega(1-\beta)]}{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}\right\}(5-\beta)} \tag{38}$$

donde usando las ecuaciones de campo 27, 28 y 29 para evaluar las constantes a, b y F se obtiene:

$$a = \frac{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}{(5-\beta)} \tag{39}$$

$$\Omega^{(3-\beta)} = \frac{1}{M}\left\{\frac{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}{2(1-\beta)-2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}\right\} \tag{40}$$

$$F = \frac{a}{M\,\Omega^{(1-\beta)}} \tag{41}$$

La métrica de Bianchi tipo-V es definida por:

$$ds^2 = -dt^2 + R_1^2 dx^2 + \exp(-2qx)\,(R_2^2 dy^2 + R_3^2 dz^2) \tag{42}$$

la cual conduce a las ecuaciones JBD de campo, que obedece la relación barotrópica 2:

$$\dot{H}_i + 3HH_i - 2\left(\frac{q}{R_1}\right)^2 + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\frac{\dot{R}_i}{R_i} = \alpha\frac{\rho}{\phi}[1+\omega(1-\beta)]\,, \quad i = 1,2,3. \tag{43}$$

$$2H_1 = H_2 + H_3 \tag{44}$$

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 - 3\left(\frac{q}{R_1}\right)^2 - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{\rho}{\phi} \tag{45}$$

$$\left(R^3\dot{\phi}\right)^{\bullet} = \alpha \rho R^3 (1-3\beta) \tag{46}$$

donde q es una constante.
Restando 43 con i = 1 y 2 se obtiene:

$$(H_1-H_2)^{\bullet} + 3H(H_1-H_2) + \frac{\dot{\phi}}{\phi}(H_1-H_2) = 0 \tag{47}$$

multiplicando 47 por ϕR^3, agrupando como antes y después integrando:

$$\phi R^3 (H_1-H_2) = b \tag{48}$$

donde b es una constante, usando la relación para $\psi = \phi R^3$; con a una constante por evaluar

$$\psi = \frac{a}{\varepsilon}\eta^2 \tag{49.a}$$

donde la ecuación de conservación 3 tenemos:

$$\varepsilon = M(R_1R_2R_3)^{-\beta} \tag{49.b}$$

recordando que $H_1 = \dot{R}_1/R_1 = \varepsilon R_1'/R_1$, igual para H_2, integrando 48 se tiene:

$$\frac{R_1}{R_2} = r\, e^{-\frac{b}{a\eta}} \tag{50}$$

donde r es una constante de integración.

Dividiendo 48 y 46, cambiando puntos a primas se obtiene, despuês de integrar de igual manera que para los Bianchis anteriores:

$$\Phi = F' \eta^{\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)} \tag{51}$$

con F, otra constante de integraciôn por evaluar.

Derivando 50, y usando la relaciôn auxiliar de la ecuaciôn de campo 44, se obtiene despuês de integrar, una relaciôn entre R_3 y R_2:

$$\frac{R_3}{R_2} = h\, e^{-\frac{2b}{a\eta}} \tag{52}$$

donde h es una constante de integraciôn.

Usando la relaciôn para ψ 49.a, y substituyendo 50, 51 y 52, junto con 49.b:

$$R_2 = \left(\frac{\Omega}{hr}\right)^{\frac{1}{3}} \eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{1}{3(1-\beta)}} e^{\frac{b}{a\eta}} \tag{53}$$

de 53 regresando a 50 y 52:

$$R_1 = \left(\frac{\Omega}{hr}\right)^{\frac{1}{3}} r\, \eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{1}{3(1-\beta)}} \tag{54}$$

$$R_3 = \left(\frac{\Omega}{hr}\right)^{\frac{1}{3}} h\, \eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{1}{3(1-\beta)}} e^{-\frac{b}{a\eta}} \tag{55}$$

substituyendo R_1, R_2 y R_3 en 49.b se obtiene ε como funciôn de η :

$$\varepsilon = M\Omega^{-\beta} \eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{-\beta}{(1-\beta)}} \tag{56}$$

Evaluando las constantes a, b,Ω, F, por medio de las ecuaciones de campo 43, 45 y 46:

$$a = -\alpha \frac{(1-3\beta)^2}{(1+3\beta)} \tag{57}$$

$$F = \frac{a}{\mu}\, \Omega^{-(1-\beta)} \tag{58}$$

$$\Omega = \left[\frac{2q^2}{\mu^2} \left(\frac{h^2}{\delta^4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1-3\beta)^2}{2+\omega(1-\beta)(1+3\beta)} \right]^{\frac{3}{2(1-3\beta)}} \tag{59}$$

$$b = 0 \tag{60}$$

Consideramos el modelo Bianchi tipo-VI_0 con la métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + R_1^2 dx^2 + R_2^2 \exp(-2qx)\, dy^2 + R_3^2 \exp(2qx)\, dz^2 \tag{61}$$

las ecuaciones de campo quedan consideradas de la siguiente forma:

$$\dot{H}_1 + 3HH_1 - 2\left(\frac{q}{R_1}\right)^2 + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\frac{\dot{R}_1}{R_1} = \alpha \frac{\rho}{\Phi}\left[1+\omega(1-\beta)\right] \tag{62}$$

$$\dot{H}_2 + 3HH_2 + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \alpha \frac{\rho}{\Phi}\left[1+\omega(1-\beta)\right] \tag{63}$$

$$H_2 = H_3 \tag{64}$$

$$H_1H_2+H_1H_3+H_2H_3-\left(\frac{q}{R_1}\right)^2-\frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2}+3H\frac{\dot{\phi}}{\phi}=\frac{\rho}{\phi} \tag{65}$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\dot{}}=\alpha(1-3\beta)\rho R^3 \tag{66}$$

Donde q = constante. Con $S = R_1$ y $R = R_2 = R_3$, y recordando que $R^2S\phi = \psi$, y $\varepsilon = \rho R^3$, multiplicando 63 por $R^2S\dot{\phi}$:

$$R^2S\phi\dot{H}_2+3HR^2S\phi H_2+R^2\dot{\phi}H_2=\alpha[1+\omega(1-\beta)]\varepsilon \tag{67}$$

Agrupando en una sola derivada e integrando:

$$R^2S\phi\frac{\dot{R}}{R}=\alpha[1+\omega(1-\beta)]\eta \tag{68}$$

donde hemos usado $\varepsilon dt = d\eta$, entonces dividiendo entre ψ con

$$\varepsilon\psi=a\eta^2 \tag{69}$$

se obtiene

$$\frac{\dot{R}}{R}=\alpha[1+\omega(1-\beta)]\frac{\varepsilon}{a\eta} \tag{70}$$

integrando después de cambiar puntos a primas:

$$R=b\eta^{\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]} \tag{71}$$

Donde b es una constante de integración. Usando 66:

$$R^2 S \dot{\Phi} = \alpha(1-3\beta)\eta \tag{72}$$

De igual manera que antes, dividiento 72 y 70, e integrando se encuentra ϕ, que tiene la misma forma que para los otros universos, claro con distinto valor de constantes:

$$\phi = F' \eta^{\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)} \tag{73}$$

usando 69 para encontrar S:

$$S = \frac{a}{\varepsilon \phi R^2} \eta^2 \tag{74}$$

y de la ecuación de conservación para un fluído ideal 3 se tiene:

$$\varepsilon = M (R^2 S)^{-\beta} \tag{75}$$

substituyendo 75, 73 y 71 en 74 encontramos S:

$$S = \frac{\Omega}{b^2} \eta^{\{2 - \frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{1}{(1-\beta)} - 2\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]} \tag{76}$$

donde Ω es una constante. Evaluando las constantes a, Ω, y F, por las ecuaciones de campo para este Universo 62, 63, 65, 66, se obtiene:

$$a = (1-\beta) \tag{77}$$

$$F^{1} = \frac{a}{M\Omega^{(1-\beta)}} \tag{78}$$

$$\Omega^{(1-\beta)} = \frac{b^{2}(1-\beta)q}{M\sqrt{\frac{\alpha}{2}\{2+\omega(1-\beta)(1+3\beta)\}}} \tag{79}$$

La métrica para el universo Bianchi tipo-VI_h es dado por

$$dS^2 = -dt^2 + R_1^2 dx^2 + \exp[-2q(1+K)x]R_2^2 dy^2 + \exp[2q(K-1)x]R_3^2 dz^2 \tag{80}$$

con q = constante, y K = (-/h) , donde $h \leq 0$. El caso h = 0 fué considerado anteriormetne para Bianchi tipo-VI_0. Las ecuaciones de campo son:

$$\dot{H}_1 + 3HH_1 - 2q^2(1+K^2)/R_1^2 + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\frac{\dot{R}_1}{R_1} = \alpha\frac{\rho}{\Phi}[1+\omega(1-\beta)] \tag{81}$$

$$\dot{H}_2 + 3HH_2 - 2q^2(1+K)/R_1^2 + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \alpha\frac{\rho}{\Phi}[1+\omega(1-\beta)] \tag{82}$$

$$\dot{H}_3 + 3HH_3 - 2q^2(1-K)/R_1^2 + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\frac{\dot{R}_3}{R_3} = \alpha\frac{\rho}{\Phi}[1+\omega(1-\beta)] \tag{83}$$

$$2H_1 = (1+K)H_2 + (1-K)H_3 \tag{84}$$

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 - \frac{q^2}{4}(3+k^2)/R_1^2 + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} = \frac{\rho}{\phi} \qquad (85)$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3 \qquad (86)$$

multiplicando 82 por K, sumándole 83 y restándole 81, se obtiene:

$$\dot{H}_3 + k\dot{H}_2 - \dot{H}_1 + 3H(H_3+kH_2-H_1) + \frac{\dot{\phi}}{\phi}(H_3-kH_2-H_1) = \alpha\frac{\rho}{\phi}[1+\omega(1-\beta)]K \qquad (87)$$

multiplicando por $\Psi = \phi R^3$ e integrando con $\varepsilon dt = d\eta$:

$$\phi R^3\left(\frac{\dot{R}_3}{R_3} + k\frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{\dot{R}_1}{R_1}\right) = \alpha[1+\omega(1-\beta)]K\eta \qquad (88)$$

usando el valor para el campo escalado:

$$\varepsilon\Psi = a\eta^2 \qquad (89)$$

con a una constante por evaluar de nuevo.

De la ecuación 88 através de 89 integramos, usando primas en lugar de puntos como lo hemos venido haciendo, recordando que $\varepsilon dt = d\eta$ 88 queda como:

$$\frac{R_3'}{R_3} + k\frac{R_2'}{R_2} - \frac{R_1'}{R_1} = \frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]\frac{K}{\eta} \qquad (90)$$

integrando 90 se obtiene con B = constante:

$$\frac{R_3 R_2^{K}}{R_1} = B\,\eta^{\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]K} \tag{91}$$

integrando 86 de la misma manera que antes:

$$R_1 R_2 R_3 \dot{\phi} = \alpha(1-3\beta)\,\eta \tag{92}$$

de nuevo, como para los otros modelos, dividiendo 92 y 88 se tiene:

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{(1-3\beta)}{[1+\omega(1-\beta)]K}\left(\frac{\dot{R}_3}{R_3} + K\frac{\dot{R}_2}{R_2} - \frac{\dot{R}_1}{R_1}\right) \tag{93}$$

integrando:

$$\phi = F'\,\eta^{\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)} \tag{94}$$

multiplicando 90 por 2 y usando 84 con primas en lugar de puntos (la cual mantiene la misma forma) para eliminar H_1:

$$(K-1)\frac{R_2'}{R_2} = -(1+K)\frac{R_3'}{R_3} + 2\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]\frac{K}{\eta} \tag{95}$$

integrando 95, con r una constante:

$$\frac{R_2^{-(1-K)}}{R_3^{-(1+K)}} = r\,\eta^{2\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]K} \tag{96}$$

multiplicando 90 por $(1+k)/k$ y usando la ecuación de ligadura 84 para este modelo, para eliminar H_2:

$$(1+k^2)\frac{R_3'}{R_3} = (1-k)\frac{R_1'}{R_1} + \frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right](1+k)\frac{k}{\eta} \qquad (97)$$

integrando 97 se obtiene la relación entre R_3 y R_1:

$$\frac{R_3^{(1+k^2)}}{R_1^{(1-k)}} = \eta^{\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right](1+k)\,k} \qquad (98)$$

despejando el valor de R_2 de 96 y multiplicando por R_1R_3:

$$R_1R_2R_3 = r\,\eta^{-2\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]\frac{k}{(1-k)}}\,R_3^{\frac{2}{(1-k)}}\,R_1 \qquad (99)$$

usando 98 en 99:

$$R_3 = \eta^{\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]\frac{(1+k)}{(1+k^2)}k}\,R_1^{\frac{(1-k)}{(1+k^2)}} \qquad (100)$$

de la ecuación 89 para el campo escalado Ψ y su definición, se obtiene la misma relación que para los otros modelos:

$$R_1R_2R_3 = \frac{a}{\varepsilon F}\,\eta^{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)} \qquad (101)$$

de la ecuación de conservación 3 sabemos que:

$$\varepsilon = M\,(R_1R_2R_3)^{-\beta} \qquad (102)$$

usando 102 en 101 y regresando a 99 obtenemos por fin el valor para R_1:

$$R_1 = D\,\eta^{\left\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\right\}\frac{(1+k^2)}{(1-\beta)(3+k^2)} - 2\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]\frac{k^2}{(3+k^2)}} \tag{103}$$

donde hemos usado 100, y D es una constante. Con este valor de 103 para R_1, regresamos a 100 para obtener R_3:

$$R_3 = E\,\eta^{\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]k\frac{(3+k)}{(3+k^2)} + \left\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\right\}\frac{(1-k)}{(1-\beta)(3+k^2)}} \tag{104}$$

de varias maneras podemos encontrar R_2, por ejemplo substituyendo la ecuación de campo de ligadura 84 en 90 para eliminar H_3, se obtiene:

$$(1+k^2)\frac{R_2'}{R_2} = (1+k)\frac{R_1'}{R_1} - \frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]k\frac{(1-k)}{\eta} \tag{105}$$

integrando 105 se obtiene:

$$R_2 = \eta^{-\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]k\frac{(1-k)}{(1+k^2)}}\; R_1^{\frac{(1+k)}{(1+k^2)}} \tag{106}$$

substituyendo el valor de R_1 de 103 en 106 obtenemos R_2:

$$R_2 = G\,\eta^{-\frac{\alpha}{a}\left[1+\omega(1-\beta)\right]k\frac{(3-k)}{(3+k^2)} + \left\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\right\}\frac{(1+k)}{(1-\beta)(3+k^2)}} \tag{107}$$

usando 103, 104 y 107 en 102 para encontrar ε:

$$\varepsilon = M\,\Omega^{-\beta}\,\eta^{\left\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\right\}\frac{-\beta}{(1-\beta)}} \tag{108}$$

donde Ω es una constante relacionada por otras constantes:

$$\Omega = DEG \tag{109}$$

con los valores de R_1, R_2 y R_3 como función de η y con el valor para ϕ de 94, substituímos en las ecuaciones de campo 81-86, para conocer a, F y Ω, obteniendo:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{(k^2-1) - \beta(3+k^2)}{\{1+3k^2-6\beta(1+k^2) + 3\beta^2(3+k^2) + 2\omega(1-\beta)^2 k^2\}} \tag{110}$$

$$\Omega^{-\beta} = \frac{q}{ND}\sqrt{\frac{2(3+k^2)(1-\beta)}{\{2-\frac{\alpha}{a}(4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2)\}}} \tag{111}$$

$$F' = \frac{a}{N\Omega^{(1-\beta)}} \tag{112}$$

consideramos ahora las métricas de los modelos de Bianchi tipo-III y Kantowski-Sachs, que en coordenadas esféricamente simétricas están relacionados:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2 dr^2 + R^2 (d\theta^2 + f^2(\theta)\, d\phi^2) \tag{113}$$

donde

$$f(\theta) := \begin{cases} \operatorname{senh}\theta\,, & \text{Bianchi Tipo-III} \\ \operatorname{sen}\theta\,, & \text{Kantowski-Sachs} \end{cases} \tag{114}$$

Las correspondientes BDT-ecuaciones de campo para estos modelos, con ecuación de estado barotrópica son:

$$\dot{H}_i + 3HH_i + \frac{\dot{\phi}\dot{R}_i}{\phi R_i} - \delta\left(\frac{2q}{R_1}\right)^2 = \alpha\frac{\rho}{\phi}[1+\omega(1-\beta)] \, , \quad i = 1,2. \tag{115}$$

$$\dot{H}_3 + 3HH_3 + \frac{\dot{\phi}\dot{R}_3}{\phi R_3} = \alpha\frac{\rho}{\phi}[1+\omega(1-\beta)] \tag{116}$$

$$H_1 = H_2 \tag{117}$$

$$H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3 - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \delta\left(2q/R_1\right)^2 = \frac{\rho}{\phi} \tag{118}$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\dot{}} = \alpha\rho R^3(1-3\beta) \tag{119}$$

donde $\delta = 1$ para Bianchi tipo-III, y $\delta = -\frac{1}{4}q^2$ para el modelo Kantowski-Sachs con $q = \frac{1}{2}$. Se observa que las ecuaciones de campo de estos modelos, son casos especiales del modelo más general Bianchi tipo VI_h con $K = 1$, que se resolvió anteriormente. Por tanto hacemos $K = 1$ en las ecuaciones para R_1, R_2 y R_3, 103, 107 y 104 respectivamente:

$$R_1 = d\,\eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{1}{2(1-\beta)} - \frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \tag{120}$$

$$R_2 = g\,\eta^{-\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)] + \{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{1}{2(1-\beta)}} \tag{121}$$

$$R_3 = e\,\eta^{\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]} \tag{122}$$

donde d, g y e son constantes, y para ϕ usamos 94:

$$\phi = F'\,\eta^{\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)} \tag{123}$$

donde encontramos los valores de las constantes, por medio de las ecuaciones de campo 115-119:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{-2\beta}{(2-6\beta+6\beta^2+\omega(1-\beta)^2)} \tag{124}$$

$$F' = \frac{a}{M\,\Omega^{(1-\beta)}} \tag{125}$$

$$\Omega = deg \tag{126}$$

donde la ecuación para la "densidad de energía" ε, también vale para estos modelos, de igual manera que para los otros:

$$\varepsilon = M\,\Omega^{-\beta}\,\eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{-\beta}{(1-\beta)}} \tag{127}$$

además para Bianchi tipo-III:

$$\Omega^{-\beta} = \frac{2q}{Md}\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{\{2-\frac{\alpha}{a}(4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2)\}}} \tag{128}$$

y para Kantowski - Sachs:

$$\Omega^{-\beta} = \frac{1}{2Md}\sqrt{\frac{-(1-\beta)}{2\{2-\frac{\alpha}{a}(4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2)\}}} \tag{129}$$

IV. Soluciones JBD-Bianchi-Kantowski-Sachs.

En este capítulo se muestra un resumen de las soluciones a las ecuaciones cosmológicas de la sección anterior.

Bianchi Tipo-I

$$R_i = R_{oi}(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]}\left[\frac{2a\eta+b-\sqrt{-\Delta}}{2a\eta+b+\sqrt{-\Delta}}\right]^{-\frac{\alpha b}{2a}\frac{[1+\omega(1-\beta)]}{\sqrt{-\Delta}}+\frac{h_i}{\sqrt{-\Delta}}}, \quad i=1,2,3$$

$$\phi = \phi_o(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}(1-3\beta)}\left[\frac{2a\eta+b-\sqrt{-\Delta}}{2a\eta+b+\sqrt{-\Delta}}\right]^{-\frac{\alpha b}{2a}\frac{(1-3\beta)}{\sqrt{-\Delta}}}, \quad \text{Si } \Delta<0 \qquad \text{(I-1)}$$

$$R_i = R_{oi}(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]}\exp\left\{-\frac{\alpha b[1+\omega(1-\beta)]+2ah_i}{a\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{TAN}^{-1}\frac{2a\eta+b}{\sqrt{\Delta}}\right\}$$

$$\phi = \phi_o(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}(1-3\beta)}\exp\left\{-\frac{\alpha b}{a}\frac{(1-3\beta)}{\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{TAN}^{-1}\frac{2a\eta+b}{\sqrt{\Delta}}\right\}, \quad \text{Si } \Delta>0 \qquad \text{(I-2)}$$

$$R_i = R_{oi}(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]}\exp\left\{\frac{\alpha\frac{b}{a}[1+\omega(1-\beta)]-2h_i}{2a\eta+b}\right\}$$

$$\phi = \phi_o(a\eta^2+b\eta+c)^{\frac{\alpha}{2a}(1-3\beta)}\exp\left\{\frac{\alpha\frac{b}{a}(1-3\beta)}{2a\eta+b}\right\}, \quad \Delta=0 \qquad \text{(I-3)}$$

Donde R_{oi}, ϕ_o, h_i son constantes, $i=1, 2, 3$, el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, y además:

$$a = \frac{\alpha}{2}\left\{(1-3\beta)+3[1+\omega(1-\beta)](1-\beta)\right\}$$

$$b = 3\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-\beta)$$

$$c = \alpha^2\left\{3[1+\omega(1-\beta)]^2-\frac{1}{2}\sum_i h_i^2\right\} \qquad \text{(I-4)}$$

Donde $\Delta<0$, $\Delta>0$ y $\Delta=0$, dependiendo del parámetro ω.

Bianchi Tipo-II.-

Aunque supusimos simetría rotacional local (LRS) es decir $R_1=R_2=R$, podemos hacerlo sin esa suposición integrando facilmente la ecuación 27.c. Entonces $R=R_1=CR_2$ y $S=R_3$, lo cual implica:

$$
\left.
\begin{aligned}
R_1 &= \Omega\, \eta^{\left\{\frac{(1-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](2+\beta)}{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}\right\}} \\
R_2 &= C R_1 \\
R_3 &= \frac{1}{\Omega}\, \eta^{\left\{\frac{-(1-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](3-2\beta)}{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}\right\}}
\end{aligned}
\right. \qquad \text{(II-1)}
$$

$$
\phi = \frac{a}{M\Omega^{(1-\beta)}}\, \eta^{\left\{\frac{(1-\beta)-2\alpha[1+\omega(1-\beta)]}{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}\right\}(5-\beta)} \qquad \text{(II-2)}
$$

Donde C y M son constantes y además:

$$
\left.
\begin{aligned}
a &= \frac{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}{(5-\beta)} \\
\Omega^{(3-\beta)} &= \frac{1}{M}\sqrt{\frac{(1-\beta)(3-\beta)+2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}{2(1-\beta)-2\alpha[1+\omega(1-\beta)](1-3\beta)}}
\end{aligned}
\right. \qquad \text{(II-3)}
$$

Bianchi Tipo-III y Kantowski-Sachs.-

$$
\left.
\begin{aligned}
R_1 &= d\, \eta^{\left\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\right\}\frac{1}{2(1-\beta)}-\frac{\alpha}{2a}[1+\omega(1-\beta)]} \\
R_2 &= g R_1 \\
R_3 &= e\, \eta^{\frac{-2\beta[1+\omega(1-\beta)]}{[2-6\beta+6\beta^2+\omega(1-\beta)^2]}}
\end{aligned}
\right. \qquad \text{(III-1)}
$$

$$
\phi = \frac{a}{M\Omega^{(1-\beta)}}\, \eta^{\frac{-2\beta(1-3\beta)}{[2-6\beta+6\beta^2+\omega(1-\beta)^2]}} \qquad \text{(III-2)}
$$

Donde d, g, e y M son constantes con:

$$
a = -\frac{\alpha}{2\beta}\left[2-6\beta+6\beta^2+\omega(1-\beta)^2\right] \qquad \text{(III-3)}
$$

Además para:

i) Bianchi Tipo-III, $\Omega^{-\beta} = \frac{2q}{Md}\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2-\frac{\alpha}{a}[4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2]}}$

(III-4)

ii) Kantowski-Sachs, $\Omega^{-\beta} = \frac{1}{2Md}\sqrt{\frac{-(1-\beta)}{2[2-\frac{\alpha}{a}[4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2]]}}$

Bianchi Tipo-V.-

$$\begin{aligned} R_1 &= r R_2 \\ R_2 &= \left(\frac{\Omega}{rh}\right)^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{1}{(1-3\beta)}} \\ R_3 &= h R_2 \end{aligned} \tag{V-1}$$

$$\phi = -\alpha \frac{(1-3\beta)^2}{(1+3\beta)} \frac{1}{M\Omega^{(1-\beta)}} \eta^{-\frac{(1+3\beta)}{(1-3\beta)}} \tag{V-2}$$

Donde r, h, M son constantes, y:

$$\Omega = \left[\frac{2q^2}{M^2}\left(\frac{h^2}{r^4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1-3\beta)^2}{\{2+\omega(1-\beta)(1+3\beta)\}}\right]^{\frac{3}{2(1-3\beta)}} \tag{V-3}$$

Bianchi Tipo-VI_0.-

Aunque usamos en este modelo $R=R_2=R_3$ (LRS), podemos después de integrar fácilmente la ecuación 64 tener: $R=R_2=CR_3$ y $S=R_1$, entonces:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\Omega}{cb} \eta^{\{2-\alpha\frac{(1-3\beta)}{(1-\beta)}-2\alpha[1+\omega(1-\beta)]\}\frac{1}{(1-\beta)}} \\ R_2 &= b\, \eta^{\alpha[1+\omega(1-\beta)]\frac{1}{(1-\beta)}} \\ R_3 &= \frac{c}{b} R_2 \end{aligned} \tag{VI_0-1}$$

$$\phi = \frac{(1-\beta)}{M\,\Omega^{(1-\beta)}}\,\eta^{\alpha\frac{(1-3\beta)}{(1-\beta)}} \tag{VI$_o$-2}$$

Donde b, c, M son constantes y:

$$\Omega^{(1-\beta)} = \frac{cb(1-\beta)q}{M\sqrt{\frac{\alpha}{2}\{2+\omega(1-\beta)(1+3\beta)\}}}\ , \quad q = \text{CONST.} \tag{VI$_o$-3}$$

<u>Bianchi Tipo-VI$_h$</u>.-

$$R_1 = D\,\eta^{\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{(1+k^2)}{(1-\beta)(3+k^2)} - 2\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]\frac{k^2}{(3+k^2)}}$$

$$R_2 = G\,\eta^{-\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]k\frac{(3-k)}{(3+k^2)} + \{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{(1+k)}{(1-\beta)(3+k^2)}} \tag{VI$_h$-1}$$

$$R_3 = E\,\eta^{\frac{\alpha}{a}[1+\omega(1-\beta)]k\frac{(3+k)}{(3+k^2)} + \{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\}\frac{(1-k)}{(1-\beta)(3+k^2)}}$$

$$\phi = \frac{a}{M\,\Omega^{(1-\beta)}}\,\eta^{\frac{\{(k^2-1)-\beta(3+k^2)\}(1-3\beta)}{\{1+3k^2-6\beta(1+k^2)+3\beta^2(3+k^2)+2\omega(1-\beta)^2k^2\}}} \tag{VI$_h$-2}$$

Donde D, G, E y M son constantes, además:

$$a = \frac{\alpha\{1+3k^2-6\beta(1+k^2)+3\beta^2(3+k^2)+2\omega(1-\beta)^2k^2\}}{(k^2-1)-\beta(3+k^2)}$$

(VI$_h$-3)

$$\Omega^{-\beta} = \frac{q}{MD}\sqrt{\frac{2(1-\beta)(3+k^2)}{\{2-\frac{\alpha}{a}[4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2]\}}}$$

V. DISCUSION DE LAS SOLUCIONES.

Se puede observar primeramente que el uso de la relación $\varepsilon\Psi = a\eta^2 + b\eta + c$, la cual fué obtenida solamente en Bianchi tipo-I, en la ecuación de campo para ϕ : $(\dot{\phi}R^3\dot{)} = \alpha(1-3\beta)\varepsilon$, la cual es la misma para todos los universos (ecs. ***, 29, 46, 66, 86, 119), se obtiene el campo escalar ϕ de la teoría JBD como función de η (que juega el papel de tiempo), la dependencia funcional es la misma para todos los universos homogéneos: $\phi = F'\eta^{\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)}$ (ecs. 34,51,73,94), esto se debe a que en los universos no isotrópicos pero homogéneos el campo escalar ϕ no depende de la dirección (i.e. anisotropía) del espacio-tiempo, sino de la distribución de materia, y como ésta es homogénea el campo escalar JBD se comporta de la misma manera en todos los espacios-tiempos, claro con diferentes constantes a y F. Otra característica importante de este tipo de universos, se puede observar en las ecuaciones de campo (*-***,27,29,43-46,62-66,81-86,115-119) el lado derecho es común a todos los tipos (homogeneidad), y el lado izquierdo donde aparecen los parámetros de Hubble Hi, difieren los términos donde aparecen los factores de escala R_1, R_2, R_3, que caracterizan a un tipo de Bianchi en particular (anisotropía), y son el análogo a la curvatura en los modelos de Friedmann isotrópicos. Sin embargo, usando la similitud en el lado izquierdo de las ecuaciones de campo y reescalando el tiempo propio $d\eta = \varepsilon dt$, donde $\varepsilon = \rho R^3$, siguiendo un procedimiento similar para todos los tipos de Bianchi encontramos la solución completa de los factores de escala R_1, R_2, R_3. Cabe señalar que para la constante barotrópica $\beta = 0$ (ec. de estado 2), época que se denomina polvo, de la ec. de conservación 3 se observa que ε se hace constante y esto implica que el parámetro η se vuelva proporcional al tiempo propio t.

a) Bianchi Tipo-I: La solución para Bianchi tipo-I, como dijimos fué encontrada anteriormente por Ruban y Finkelstein (1975) pero de una forma mucho más complicada, aquí se encuentra de una forma más directa reescalando ϕ y ρ la cual fué obtenida formalmente para este universo (ec. 15). El modelo Bianchi tipo-I generaliza el espacio plano isotrópico de los modelos Friedmann-Robertson-Walker (FRW) con curvatura K=0, y las soluciones coinciden formalmente con las de FRW (Gu-

revich et al., 1973) cuando $R_1=R_2=R_3=R(t)$. Este modelo es particularmente importante cerca de la singularidad inicial donde se sabe que la curvatura es despreciable, todo esto para "tiempos" η pequeños. Como mencionamos el carácter dinámico de la solución (ecs.I-1,2,3) depende del signo del discriminante Δ (>0, <0, $=0$), donde $\Delta = b^2-4ac$ y éste depende del parámetro ω. Para el caso $\Delta < 0$ la solución I-1 muestra un universo con singularidad en las dos raíces reales de $a\eta^2+b\eta+c$ cuando $[1+\omega(1-\beta)]/a>0$, y un valor máximo de R (donde $R^3=R_1R_2R_3$) en esas dos raíces cuando $[1+\omega(1-\beta)]/a<0$. La solución general para el caso $\Delta>0$ es I-2, donde si $[1+\omega(1-\beta)]/a>0$ el factor de expansión $R(\eta)$ no se hace cero para cualquier valor de η ($-\infty<\eta<+\infty$). Estos modelos son no-singulares puesto que van de la fase de contracción a la expansión pasando por un mínimo $R_{min}\neq 0$. Cuando $[1+\omega(1-\beta)]/a<0$, sin embargo, la singularidad inicial ($\eta\to-\infty$) y la singularidad final ($\eta\to+\infty$), existen para este modelo y están separadas por un intervalo de tiempo propio finito:

$$\Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} R^{3\beta}\, d\eta$$

También para este caso hay R_{max}. Por último el caso degenerado $\Delta = 0$ ec. I-3(cuando $a\eta^2+b\eta+c$ tiene raíces reales que coinciden), cuando $[1+\omega(1-\beta)]/a>0$ tiene dos ramas diferentes, una el modelo regular ($R_{min}<R<\infty$) donde η toma valores $-\infty<\eta<\eta_0$, donde η_0 es la raíz doble de $a\eta^2+b\eta+c$, y el modelo singular ($0\leq R<\infty$), este último sucede cuando η toma valores $\eta_0\leq\eta<\infty$. Por último, cuando $[1+\omega(1-\beta)]/a<0$, en este modelo siempre hay singularidad en $R = 0$. Una descripción más completa de estas soluciones se puede ver en Ruban y Finkelstein (1973).

Para encontrar las soluciones para Bianchi Tipo-II, y los tipos III-KS-V-VI_0 y VI_h usamos la relación en su forma $\varepsilon\Psi = a\eta^2$. Esta reducción (b=0, c=0) se basa en el hehco de que los términos donde aparecen los factores de escala R_1, R_2, R_3 (ecs.-***, 27-29,43-46,62-66,81-86, 115-119) son relevantes a tiempos grandes, esto implica que estos modelos describirían mejor al universo cuando influye su curvatura, es decir, para "tiempos" η grandes, por lo tanto consideramos que es bue-*

na aproximación quedarse solo con el término dominante (cuadrático) que conecta al campo Ψ con η .

b) Bianchi tipo-II: Un caso que no tiene relevancia física aparece cuando $p=\rho$ $(\beta=1)$, ya que la constante Ω (ec. II-3) se vuelve imaginaria además los factores de escala R_1, R_2, R_3 (ec.II-1) decrecen conforme aumenta η. Un resultado interesante es para polvo (β = 0): en las ecs. II-1,2,3, vemos que las soluciones físicas son para $\omega > -\frac{11}{8}$, esto es que las constantes son reales, más aun si $\omega > -\frac{3}{4}$ encontramos que hay singularidad en R_1, R_2, R_3 conforme $t \to 0$ (recordando que para polvo el parámetro $\eta \sim t$ que es el tiempo propio) y este modelo se expande indefinidamente con t. En cambio el comportamiento dinámico para el campo escalar ϕ si $\omega > -\frac{3}{4}$, crece con t. La solución β = 1 Bianchi tipo-II, fué encontrada anteriormente por Lorenz-Petzold (1984) pero este autor solamente obtiene solución para el caso $R_1 = R_2 \neq R_3$ (LRS) y de una forma más complicada.

c) Bianchi tipo-III y Kantowski-Sachs (KS): como podemos ver de III-1,2,3,4, la solución para el tipo-III y el modelo relacionado KS ($q=\frac{1}{2}$), tienen el mismo comportamiento excepto por la constante Ω (ec. III-4). Modelos físicamente posibles son para $\omega < -\frac{2}{(1-\beta)(1+3\beta)}$ para Bianchi tipo-III y $\omega > -\frac{2}{(1-\beta)(1+3\beta)}$ para KS. Estas soluciones son divergentes para polvo $(\beta=0)$ $\phi \to \infty$, cuando $\Psi = at^2$. Sin embargo, usando la relación completa $\Psi = at^2+bt+c$, aparentemente solo hay solución si $\omega = -2$.

d) Bianchi tipo-V: este modelo es una generalización del caso isotrópico FRW, espacio abierto K=-1. Las soluciones para este modelo V-1,2,3, a diferencia de los otros, son válidas para cualquier tipo de materia (con $\beta=\frac{1}{3}$ hay que seguir el procedimiento descrito al final de esta sección). Si queremos garantizar que R_1, R_2, R_3 sean positivos, entonces para $\Omega > 0$, $\omega > \frac{-2}{(1-\beta)(1+\beta)}$. De la ec. V-1 vemos que los factores de escala crecen indefinidamente con η si $\beta < \frac{1}{3}$ y muestran singularidad en η = 0. Sin embargo, para $\beta > \frac{1}{3}$ hay singularidades en $\eta \to \pm\infty$, pero R_1, R_2 y R_3 decrecen conforme aumenta η . La característica más importante para este modelo es que de la ec. V-2, usando $\Omega > 0$, $M = \rho R^{3(1+\beta)} > 0$ y $\alpha > 0$ implican $\phi < 0$ y tenemos antigravedad ya que $\phi \sim G^{-1}$. Cuando $R_1 = R_2 = R_3 = R$, estos resultados se reducen al caso isotrópico FRW (K=-1), donde por ejemplo para polvo ($\beta = 0$) también predicen antigravedad (Chauvet, 1983).

e) Bianchi tipo-VI_0: en este modelo se tiene que para que las constantes sean reales $\omega > \frac{-2}{(1-\beta)(1+3\beta)}$, $\alpha > 0$, notese que son las mismas condiciones que en Bianchi tipo-V dan antigravedad, solo que en el tipo-VI_0 es todo lo contrario, es decir, $\phi > 0$ (ec.VI_0-2). Además para polvo $\phi \sim t^{\alpha}$, con $\alpha > 0$ o sea que aumenta con t mientras que en Bianchi tipo-V decrece.

f) Bianchi tipo-VI_h: está caracterizado por el parámetro del grupo h (Kramer et. al., 1980), que para valores particulares de éste se reducen a otros modelos. El parámetro está restringido a $h \leq 0$. El caso h=0 es el tipo-VI_0 discutido anteriormente. Para el caso h=-1, es decir K=1 (ecs.81-85), es el mismo que el modelo Bianchi tipo-III y las ecs. VI_h- 1,2,3, se reducen a las ecs. III-1,2,3,4. En el límite cuando K=0 ($h \rightarrow -\infty$) las soluciones VI_h-1,2,3, se reducen al modelo Bianchi tipo-V (ecs. V-1,2,3). Para que el modelo sea factible físicamente y las constantes sean reales, se debe cumplir que $\frac{\alpha}{a}\left[4-6\beta+3\omega(1-\beta)^2\right] < 2$ donde a está dada por la ec. VI_h-3.

g) Otros Universos Homogéneos: El modelo Bianchi tipo-IV no tiene métrica diagonal y no se han encontrado soluciones, ni siquiera en vacío (Lorenz-Petzold, 1983). Bianchi tipo-VII_h ha sido considerado por Doroshkevich et al., (1973) y Jantzen (1980). En general este modelo posee una métrica no diagonal, pero el caso $R_1 = R_2$, $h \neq 0$ se reduce al modelo Bianchi tipo-V, el LRS tipo-VII_0 es un Bianchi tipo-I. La única solución conocida en RG para Bianchi tipo VII_h para vacío ha sido dada por Lukash (1976).

Los tipos VIII y IX difieren por una constante que cambia de signo. El universo Bianchi Tipo-IX, generaliza el universo isotrópico cerrado (K=+1). Estos dos tipos son por mucho los más complejos y se ha investigado su posible solución usando la relación $E\Psi = a\eta^2 + b\eta + c$, *pero no se han podido resolver las ecuaciones. Existe solución para $\beta = 1$, para los tipos VIII y IX en JBL Lorenz-Petzold (1984), pero suponiendo $R_1=R_2\neq R_3$ (LRS).*

h) Observaciones generales: se puede ver que el producto $R_1R_2R_3=R^3$ tiene la misma forma con respecto a η (ver ecs. 35,36,53-55,71,76, 101,102,120-122) para cualquier tipo de universo:

$$R^3 = \Omega\,\eta^{\left\{2-\frac{\alpha}{a}(1-3\beta)\right\}\frac{1}{(1-\beta)}}$$

*con a y Ω constantes que varía según el modelo. Esto se debe a que el producto de $R_1R_2R_3$ elimina la anisotropía, puesto que la relación $\epsilon\psi = a\eta^2+b\eta+c$ que se usó para encontrar R^3 es la misma para todos los modelos (ecs. ***, etc). Otra característica común de las soluciones, es que para materia en forma de polvo ($\beta=0$) el parámetro ω está restringido a $\omega>-2$, excepto para Bianchi tipo-III donde $\omega<-2$, para que existan soluciones físicas. Soluciones de espacios homgéneos Bianchi Tipos I-IX para vacío y otras ver Lorenz-Petzold (1983,1984). Para una descripción de soluciones homogéneas en RG ver Kramer et al. (1980).*

Por último, mencionaremos que las soluciónes para radiación ($\beta=\frac{1}{3}$) se pueden obtener fácilmente siguiendo el mismo procedimiento que la sección III, simplemente hay que reemplazar ($1-3\beta$) por Γ, donde Γ es una constante por evaluar. Esto se puede ver por ejemplo de la ecuación de campo para ϕ, que es común para todos los tipos de Bianchi:

$$(R^3\dot{\phi})^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\epsilon = 0 \;; \quad (\text{para } \beta=\tfrac{1}{3}).$$

Entonces al integrar:

$$R^3\dot{\phi} = \Gamma \equiv \textit{constante}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, substituyendo ($1-3\beta$) por la constante Γ en todos lados, se obtiene la solución para radiación.

VI. CONCLUSION.

Podemos concluir de este trabajo que el uso de la relación entre la densidad de energía escalada $\varepsilon = \rho R^3$ y el campo escalado $\Psi = \phi R^3$, conectados por el tiempo η, a saber $\varepsilon\Psi = a\eta^2 + b\eta + c$, permite integrar las ecuaciones de campo JBD para algunos universos homogéneos no-isotrópicos, de una manera mucho más sencilla que la usada por otros autores (Lorenz-Petzold, 1984, Ruban y Finkelstein, 1975), lo que permtió encontrar nuevas soluciones para los modelos Bianchi Tipo- I-II-III-KS-V-VI_0-VI_h, extendiendo así a los universos no isotrópicos la relación entre ε y Ψ ya que en el caso isotrópico FRW es solución para K=1,0,-1 (Chauvet, 1983). Una posible aplicación de este método de reescalamiento podría ser en Relatividad General (donde ϕ = constante), donde hay algunos tipos de Universos homogéneos donde no se ha podido encontrar solución.

Por otra parte un resultado importante es el encontrado para Bianchi Tipo-V, ya que es el único donde se obtiene antigravedad $\phi < 0$ de una manera natural, corroborando así el mismo resultado obtenido para el caso isotrópico FRW espacio plano (K=-1) (Chauvet,1983), recordando que Bianchi Tipo-V es su generalización anisotrópica. Es importante mencionar que estas soluciones son válidas sin la hipótesis de Simetría Rotacional Local (LRS) usada por otros autores, es decir, es válida para anisotropía total $R_1 \neq R_2 \neq R_3$. Por último mencionaremos que las soluciones obtenidas muestran que conforme el parámetro temporal η aumenta, los modelos no tienden a isotropizarse.

VII).- REFERENCIAS

Bianchi, L., Mem. Soc. It. Della Sc (Dei XL) (3), 11, 267 (1897)

Brans, C. y Dicke, R. H., Phys. Rev., 124, 925 (1961).

Chauvet, P., y Obregón, O., Astrophys Space Sci., 66, 515 (1979)

Chauvet, P., Astrophys Space Sci., 90, 51 (1983).

Chauvet, P., Astrophys Space Sci., 106, 207 (1984).

Dehnen, H., y Obregón, O., Astrophys Space Sci., 14, 454 (1971).

Dehnen, H., y Obregón, O., Astrophys Space Sci., 15, 326 (1972).

Dirac, P.A.M., Nature 139, 323 (1937); Proc. Roy. Soc. (London) A165, 199 (1938).

Doroshkevich, A. G., Lokash, V. N., y Novikov, I. D., Zh. Eksp Teor. Fiz. 64, Soviet Phys. JETP 37, 739) (1973).

Estarbrook, F. B., Wahlquist, H. D., y Behr, C.G.J. Math. Phys. 9,497 (1968)

Gurevich, L. E., Finkelstein, A. M., y Ruban, V. A. Astrophys Space Sci., 22, 231 (1973).

Jantzen, R. T., Ann. Phys. (U.S.A.) 127, 302 (1980).

Jordan, P., Astron. Nachr. 276, 193 (1948).

Kramer, D., Stephani, H., Mac Callum, M. Y Herlet, E., "Exact Solutions of Einstein's Field Equations, VEB Deutsche Verlag Der Wissenschaften, Berlín D.D.R. (1980).

León Portilla, Miguel. "La Filosofía Náhuatl estudiada en sus Fuentes" Instituto Indigenista Interamericano. México (1956).

Lorenz-Petzold, D., Astrophys Space Sci., 98, 101 (1983).

Lorenz-Petzold, D., Astrophys Space Sci., 98, 281 (1984).

Lukash, V. N., Nuovo Cimento 35B, 268 (1976).

Matzner, R., y Misner, C. W. Astrophys. J. 171, 415 (1972).

Novikov, I. D., Astron. Zh 45, 538 (1968).

Novikov, I. D., Astron. Zh 47, 1203 (1970).

Obregón, O., y Chauvet, P., Astrophys Space Sci., 56, 335 (1978).

Obregón, O., y Pimentel, O., Gen. Rel. Grav., 9, 585 (1978).

Ruban, V. A., y Finkelstein, A. M. Gen. Rel. Grav., 6, 601 (1975).

Ryan, M. P., Jr., and Shepley, L. C., "Homogeneous Relativistic Cosmologies", Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Sunyaev, R. A., Zeldovich, Ya. B., "The Spectrum of Primordial Radiation, its Distortions and their Significance", Comments Astrophys. Space Phys. 2, 66 (1970).

Zel'dovich, Ya., B., Zh. Eksper. Teor. Fiz., letters 12,443; Transl. en JETP letters 12, 307 (1971).

Zel'dovich, Ya., B., Mon. Not. Roy Astr. Soc., 160, 1 (1972).