

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

PROPUESTA PARA LA PRUEBA DE UNA
HIPÓTESIS NULA CENTRAL COMPUESTA
Y UNA HIPÓTESIS ALTERNATIVA
BILATERAL EN LA DISTRIBUCIÓN
NORMAL

PRESENTA:

LEONARDO ROMÁN OLMEDO GARCÍA

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS

MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES

ASESOR:

DR. ALBERTO CASTILLO MORALES

2009

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1 CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS	5
1.1 CONCEPTOS GENERALES	5
1.2 CONTRASTES DE HIPÓTESIS	6
1.3 LEMA DE NEYMAN-PEARSON	8
1.4 HIPÓTESIS COMPUESTA	11
1.5 CONTRASTES INSESGADOS	14
1.6 RAZÓN DE VEROSIMILITUD	15
2 PRUEBA UNIFORMEMENTE MÁS POTENTE INSESGADA DE UNA HIPÓTESIS NULA COMPUESTA VERSUS ALTERNATIVA BILATERAL PARA UNA $N(\mu, \sigma)$ CON σ CONOCIDA.	17
2.1 ZONA DE RECHAZO DE UNA HIPÓTESIS CENTRAL COMPUESTA VERSUS ALTERNATIVA BILATERAL	18
2.2 APROXIMACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LAS CONSTANTES C_1 Y C_2	31
3 PRUEBA UNIFORMEMENTE MÁS POTENTE INSESGADA, PARA EL CONTRASTE HIPÓTESIS NULA COMPUESTA CONTRA ALTERNATIVA BILATERAL EN UNA $N(\mu, \sigma)$ CON σ DESCONOCIDA.	39

3.1	ZONA DE RECHAZO PARA HIPÓTESIS NULA COMPUESTA CONTRA ALTERNATIVA BILATERAL CON σ DESCONOCIDA.	39
3.2	CALCULO DE LAS CONSTANTES C_1 Y C_2	47
4	PRUEBA UMPI CON HIPÓTESIS NULA COMPUESTA CONTRA ALTERNATIVA BILATERAL CON σ VARIANZA COMÚN CONOCIDA PARA DOS POBLACIONES NORMALES.	53
4.1	ZONA DE RECHAZO PARA UNA HIPÓTESIS NULA COMPUESTA FRENTE ALTERNATIVA BILATERAL DOS POBLACIONES NORMALES.	53
4.2	APROXIMACIÓN PARA EL CALCULO DE LAS VARIABLES C_1 Y C_2	63
	CONCLUSIONES	68
	BIBLIOGRAFÍA	78

INTRODUCCIÓN

En los cursos de inferencia estadística se revisan las pruebas de hipótesis sobre la media en una distribución Normal, sobre la diferencia de medias en dos distribuciones Normales independientes y sobre la media de la diferencia de las variables de una Normal bivariada.

El caso de una Normal se utiliza para establecer el contexto de la prueba, que considera la existencia de una muestra aleatoria, del establecimiento del nivel de significación, y de las hipótesis nula y alternativa. Después, se justifica de manera teórica la obtención del procedimiento de prueba y de la forma correcta de concluir.

Es difícil notar en los ejercicios que se realizan en los cursos, que hay un detalle que dificulta a un investigador aplicado el uso de los métodos presentados, esto tampoco se identifica en las publicaciones, pero puede surgir en las discusiones de los resultados, previas a su escritura, en problemas donde la hipótesis nula de igualdad se rechaza según el procedimiento seguido, pero la significación estadística no refleja una diferencia con la igualdad que sea de interés al investigador.

La causa de la aparente contradicción entre la conclusión estadística y la recomendación del investigador no está en el procedimiento de prueba, ni en los valores que usualmente se establecen para el nivel de significación. Pudiera pensarse que se encuentra en el tamaño de la muestra, si es que éste es grande, ya que a medida que el tamaño de muestra crece también lo hace la potencia de la prueba, dando rechazos para diferencias de medias cada vez menores, pero esto también conduce a una aparente contradicción, ya que indica que conviene usar muestras pequeñas para que el resultado estadístico de lugar a una recomendación basada en él. Los estudios de tamaño de muestra producen un valor que se refiere al menor tamaño de muestra que permite rechazar cuando ocurre una diferencia de medias mayor que un valor previamente establecido como mínimo para recomendar por las modalidades dadas por las hipótesis alternativas.

El problema radica en el establecimiento de las hipótesis nula y alternativa. Por ejemplo,

imaginemos dos diferentes tipos de semilla de maíz, digamos: cacahuazintle y zapalote, es evidente que sus medias de producción no serán iguales pues estas provienen de diferentes subespecies de maíz, ahora imagina que tienes un granero lleno, exclusivamente, de maíz cacahuazintle y que extraes dos muestras aleatorias e independientes, a pesar de que provienen de la misma población, la media de producción de cada una de ellas no será idéntica, diferirá aunque sea ínfimamente la una de la otra, por ello, es difícil concebir que dos tipos de semilla o dos muestras de la misma población, tengan exactamente la misma media de producción (la igualdad sólo se da en las matemáticas). Así que, para rechazar la hipótesis nula de la igualdad de medias, sólo bastaría con tener un tamaño de muestra suficientemente grande. En realidad, el investigador debería estar interesado en probar si la diferencia de medias es menor o igual que una constante apropiada, o es mayor que esa misma constante. De este modo, al rechazar la hipótesis nula el investigador puede con toda naturalidad recomendar a uno de los tipos de semilla, pues la diferencia de medias es mayor que aquella que estableció como base para la comparación.

La prueba de esta pareja de hipótesis no se presenta en los cursos aplicados de licenciatura porque no está en los textos. Esto puede deberse a que el método de prueba requiere la solución iterativa de las ecuaciones que definen a la prueba, el hecho es que la presentación en los textos se ha diferido. Ahora las computadoras y el software permiten llegar a la solución, y consideramos de interés presentar la metodología y dar el algoritmo para su solución a dos niveles, uno que utiliza los métodos que ya se presentan en los textos, modificándolos ligeramente con base en una gráfica que da la pauta para la modificación, y otro que consiste de un programa de uso sencillo para obtener los resultados requeridos.

El objetivo del presente trabajo es encontrar métodos de prueba sobre la hipótesis nula compuesta central versus la hipótesis alternativa bilateral, en el contexto dado por la distribución Normal, así como dar procedimientos que hagan factible que esta prueba se enseñe a nivel licenciatura. En la primera parte presentamos los conceptos necesarios para una mejor comprensión del trabajo. Se introduce la notación y terminología básica, así como los fundamentos de la teoría de Neyman Pearson, los conceptos de hipótesis insesgada y de razón de verosimilitud, todo esto en el contexto de prueba de hipótesis estadísticas en la distribución Normal.

En la segunda parte se aplicaran los conceptos de razón de verosimilitud y de hipótesis insesgada al contraste de hipótesis estadística con nula central compuesta frente una alternativa bilateral, para una población normal con varianza conocida obteniendo para esta prueba el contraste insesgado uniformemente más potente.

En la tercera parte se extenderá en resultado anterior, para una hipótesis nula central compuesta contra una alternativa bilateral con varianza desconocida.

El último capítulo, se enfoca a la presentación del contraste de hipótesis para dos poblaciones Normales con hipótesis nula central compuesta contra una alternativa bilateral

con varianza conocida común.

Finalmente se presenta una forma de usar los métodos de prueba que se estudian en los cursos de licenciatura, las pruebas de Z y de t , y el método computacional para obtener la región de rechazo, así como, la metodología para implementar la prueba a situaciones reales de experimentación.

CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

La prueba de una hipótesis estadística es una aplicación de un conjunto explícito de reglas para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula, y en caso de rechazarla, se hace a favor de la hipótesis alternativa. Suponga, por ejemplo, que un estadístico desea probar la hipótesis $\mu = \mu_0$ contra la hipótesis alternativa $\mu = \mu_1$. Para tomar una decisión, generará una muestra aleatoria, que al realizarse dará datos y con ellos calculará el valor de una estadística de prueba, que le dirá que acción tomar con base en la clasificación de los resultados posibles del espacio muestral dada por el método de prueba. El procedimiento de prueba de H_0 contra H_a , por consiguiente, clasifica los valores posibles de la estadística de contraste en dos subconjuntos, zona o región de aceptación y zona de rechazo.

1.1 CONCEPTOS GENERALES

La función de densidad de probabilidad Normal de una variable aleatoria x , $f(x; \mu, \sigma)$, depende de los parámetros μ y σ que toman valores en el espacio paramétrico Θ , de tal forma que para cada valor que toma la pareja μ, σ en Θ , la función $f(x; \mu, \sigma)$ es distinta.

Definición 1.1.1. *Una hipótesis estadística es una afirmación o conjetura acerca de la distribución de una o más variables aleatorias.*

A la hipótesis que deseamos probar la denominamos **hipótesis nula**, $H_0(\mu \in \Theta_0)$ y a la otra, **hipótesis alternativa**, $H_a(\mu \in \Theta_a)$. Si los dos subconjuntos Θ_0 y Θ_a se componen de un solo elemento (μ_0 y μ_a , respectivamente) las correspondientes hipótesis se denominan *simples*, de lo contrario, **compuestas**.

Ejemplo 1.1.1. *En las distribuciones Normales con desviación estándar igual a 5, $N(\mu; \sigma = 5)$, una hipótesis nula simple puede ser $\mu = 1.5$ y la hipótesis alternativa*

puede ser $\mu = 2$. Ejemplos de hipótesis compuestas son $\mu < 2$, $\mu \leq 2$, $\mu > 2$, $\mu \geq 2$ y $\mu \neq 2$.

1.2 CONTRASTES DE HIPÓTESIS

Para probar cualquier hipótesis estadística, simple o compuesta, utilizando una muestra de n observaciones de \mathbf{x} , se crea una partición del espacio muestral, Ω , en dos subconjuntos K y K^* denominados **zona de rechazo** y **zona de no rechazo**, de modo que si el punto muestral $\mathbf{x} \in K$ se rechaza la hipótesis nula H_0 y, si $\mathbf{x} \in K^*$ (complemento de K) se acepta la hipótesis nula H_0 .

Ejemplo 1.2.1. *El peso de un producto oscila entre 3 y 6 Kgs. y se desea contrastar $H_0 = 4$ contra $H_a = 5$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño uno. Si el peso es mayor a 4.35 se rechaza la hipótesis nula que la media sea igual a 4, y por lo tanto, se acepta que la media es igual a 5.*

El espacio muestral $\Omega = [3, 6]$, la región crítica $K = (4.35, 6]$ y la región de aceptación $K^ = [3, 4.35]$, de tal forma que, $\Omega = K^* \cup K = [3, 4.35] \cup (4.35, 6]$.*

Debido a que la muestra está compuesta por variables aleatorias, el estadístico de prueba tiene una distribución de probabilidades que puede llevar a dos clases de errores.

Definición 1.2.1. *Para las hipótesis nula y alternativa:*

1. *El rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera se llama **error tipo I**, la probabilidad de cometer error tipo I se denota α ; a esta probabilidad también se le conoce como **nivel de significancia** o **tamaño de la zona de rechazo (ZR)** de la prueba.*
2. *El no rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando es falsa, se llama **error tipo II**, la probabilidad de cometer error tipo II se denota con β .*

La partición del espacio muestral dada por la región de rechazo K permite establecer los eventos que dan lugar a los Errores tipo I y II. Si el estadístico de prueba queda en la zona de rechazo K dado que la hipótesis nula es cierta, se denotará por $\{\mathbf{x} \in K \mid H_0\}$, dando como resultado el Error tipo I. Análogamente, cuando la hipótesis alternativa es cierta pero se acepta la hipótesis nula, se tiene el evento $\{\mathbf{x} \notin K \mid H_a\} = \{\mathbf{x} \in K^* \mid H_a\}$.

De acuerdo con lo anterior, el nivel de significancia de la prueba es:

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(x \in K \mid H_0)$$

y la probabilidad de error tipo II:

$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(x \notin K^* \mid H_a).$$

Ejemplo 1.2.2. *En una población $N(\mu; \sigma = 4)$ se plantean las hipótesis $H_0 : \mu = 3$ y $H_a : \mu = 6$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño uno y se establece como región crítica el intervalo $[4, \infty)$.*

El nivel de significancia, es la probabilidad de cometer error tipo I, es la probabilidad de que el valor muestral este dentro de este intervalo $[4, \infty)$ cuando es cierta la hipótesis nula $H_0 : \mu = 3$. Bajo estas condiciones, sólo tenemos que calcular en una distribución $N(3; 4)$ la probabilidad del evento $x \geq 4$:

$$\begin{aligned} \alpha = P(\text{error tipo I}) &= P(x_1 \geq 4 \mid N(3, 4)) \\ &= P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{4 - 3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{4 - 3}{4/\sqrt{1}}\right) = P(Z \geq 0.25) \\ &= 0.4013 \end{aligned}$$

y la probabilidad de error tipo II,

$$\begin{aligned} \beta = P(\text{error tipo II}) &= P(x_1 < 4 \mid N(6, 4)) \\ &= P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{4 - 6}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{4 - 6}{4/\sqrt{1}}\right) = P(Z < -0.5) \\ &= 0.3085. \end{aligned}$$

Un buen procedimiento de prueba es aquel en que α como β son pequeñas, de ese modo se tiene alta probabilidad para tomar la decisión correcta. La probabilidad de un error tipo I en el ejemplo anterior es más bien alta pero esta se puede reducir al cambiar en forma apropiada la región de rechazo. Por ejemplo, si la región de rechazo fuese $x > 5.7$, se obtendría un $\alpha = 0.2498$ y $\beta = 0.4701$. Aunque se ha reducido la probabilidad de error tipo I, se ha vuelto más grande la probabilidad de error tipo II. Debido a que α y β no son independientes entre si, esta relación inversa entre las probabilidades del error tipo I y el error tipo II se mantendrá y sólo decrecen ambos si aumenta el tamaño de muestra.

1.3 LEMA DE NEYMAN-PEARSON

La teoría basada en el lema de Neyman-Pearson permite que la probabilidad de cometer error tipo I sea menor, o igual que una constante que se conoce como **nivel de significancia** de la prueba, y que se denota con α . La idea es fijar la probabilidad del error tipo I y determinar la prueba estadística que minimice la probabilidad de cometer error tipo II, que se denota como β , o equivalentemente, maximizar la cantidad $1 - \beta$, que se conoce como **potencia de la prueba**. En otras palabras, se busca la prueba que da máxima la probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 cuando esta sea falsa.

Definición 1.3.1. Si x_1, x_2, \dots, x_n son valores de una muestra aleatoria de una población Normal con parámetros μ y σ y función de densidad $f(x; \mu, \sigma)$, entonces la función de verosimilitud de la muestra esta dada por

$$L(\mu, \sigma) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma)$$

para los valores μ y σ reales y $\sigma > 0$. En este caso $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma)$ es el valor de la función de densidad conjunta o de la densidad de probabilidad de las variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n .

Como la muestra es aleatoria $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma)$.

Definición 1.3.2. Una zona de rechazo para probar una hipótesis nula simple, contra una hipótesis alternativa simple, a un nivel de significación, α , se dice que es **mejor** o **más potente**, si la potencia de la prueba bajo la hipótesis nula es α y maximiza la potencia bajo H_a .

Neyman y Pearson⁰ trabajaron el caso de dos hipótesis simples H_0 y H_a . Se toma una muestra de tamaño n , con función de verosimilitud $L(\mu, \sigma)$ y se particulariza para cada una de las hipótesis, L_0 en la nula y, L_a en la alternativa.

Se divide el espacio muestral, Ω , en dos subconjuntos, K y K^* , $\Omega = K^* \cup K$, de modo que si la muestra \mathbf{x} pertenece a K , se verifica que L_0/L_a es menor igual que c , mientras que cuando \mathbf{x} esta fuera de K , se verifica que L_0/L_a es mayor a c , el contraste que se obtiene es óptimo, es el que proporciona la mejor zona de rechazo de tamaño α , en el sentido, de que es la mejor zona que da la mayor potencia entre todas las de tamaño α . En estas condiciones, si el contraste se efectúa con un nivel de significancia α , la región de rechazo K tiene mayor o igual potencia que la de cualquier otra región de ese mismo tamaño α . La constante c se obtiene de la condición de que la probabilidad de error tipo I es α .

⁰Neyman y Pearson (1933).

Teorema 1.3.1 (Lema de Neyman-Pearson). ¹ Sea x una variable aleatoria con función de densidad, $f(x_i; \mu, \sigma)$, sea $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una muestra aleatoria de x con función de verosimilitud $L(\mu, \sigma) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma)$ y, sea $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_a : \mu = \mu_a$. Denote $L_0 = L_{\mu_0}$ y $L_a = L_{\mu_a}$.

Si K es una zona de rechazo de tamaño α y, $c > 0$ es una constante tal, que

$$\frac{L_0}{L_a} \leq c \quad \mathbf{x} \text{ dentro de } K$$

$$\frac{L_0}{L_a} > c \quad \mathbf{x} \text{ fuera de } K$$

y $P(x \in K \mid H_0) = \alpha$.

Entonces, K es una zona de rechazo más potente de tamaño α para contrastar $\mu = \mu_0$ contra $\mu = \mu_a$.

Demostración. Suponga que K es una zona de rechazo que satisface las condiciones del teorema y que K' es alguna otra región crítica de tamaño α , y que $K \neq K'$. Así

$$\int_K \dots \int L_0 dx = \int_{K'} \dots \int L_0 dx = \alpha$$

Como $\Omega = K \cup K^* = K' \cup K'^*$; establezcamos las dos igualdades siguientes $K = \{(K \cap K') \cup (K \cap K'^*)\}$ mientras que $K' = \{(K \cap K') \cup (K^* \cap K')\}$; teniendo en cuenta las particiones efectuadas en cada región, la probabilidad de que un punto muestral x pertenezca a la región de rechazo K y a la región de rechazo K' , están dadas por el término izquierdo y derecho, respectivamente, en la siguiente igualdad

$$\int_{K \cap K'} \dots \int L_0 dx + \int_{K \cap K'^*} \dots \int L_0 dx = \int_{K \cap K'} \dots \int L_0 dx + \int_{K^* \cap K'} \dots \int L_0 dx = \alpha \quad (1.1)$$

al ser ambas regiones de tamaño α bajo la hipótesis nula H_0 , se verifica que

$$\int_{K \cap K'^*} \dots \int L_0 dx = \int_{K^* \cap K'} \dots \int L_0 dx \quad (1.2)$$

Si la hipótesis alternativa es cierta, las probabilidades $\int_{K \cap K'} \dots \int L_a dx + \int_{K \cap K'^*} \dots \int L_a dx$ y $\int_{K \cap K'} \dots \int L_a dx + \int_{K^* \cap K'} \dots \int L_a dx$ son las potencias de cada una de las regiones de rechazo,

¹Freund (2000).

debiéndose demostrar que la potencia de K es, al menos, igual que la de K' , es decir, que en condiciones del teorema se verifique que

$$\int_{K \cap K'^*} \cdots \int L_a dx \geq \int_{K^* \cap K'} \cdots \int L_a dx \quad (1.3)$$

o equivalentemente,

$$\int_{K \cap K'^*} \cdots \int L_a dx - \int_{K^* \cap K'} \cdots \int L_a dx \geq 0$$

Según las condiciones del teorema, dado que $L_a \geq L_0/c$ dentro de K , en particular dentro de $K \cap K'^*$ luego usando la expresión 1.2 y finalmente dado que $L_a \leq L_0/c$ fuera de K , en particular si pertenece a $K^* \cap K'$, se sigue que

$$\int_{K \cap K'^*} \cdots \int L_a dx \geq \int_{K \cap K'^*} \cdots \int (L_0/c) dx = \int_{K^* \cap K'} \cdots \int (L_0/c) dx \geq \int_{K^* \cap K'} \cdots \int L_a dx$$

Por lo tanto,

$$\int_K \cdots \int L_a dx \geq \int_{K'} \cdots \int L_a dx$$



El teorema de Neyman-Pearson nos indica que la zona

$$K = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid \frac{L_0}{L_a} \leq c\}$$

es la mejor o más potente, MP, zona de rechazo entre todas las de tamaño α .

Cuando tratamos con hipótesis compuestas, nos enfrentamos a discernir entre los méritos del criterio de prueba o zona crítica, para un conjunto de valores de los parámetros, volviéndose esto más complejo. Por ello, tenemos que considerar las probabilidades $\alpha(\mu)$ de cometer error tipo I y $\beta(\mu)$ de cometer error tipo II para todos los valores posibles de μ , bajo las hipótesis nula H_0 y la alternativa H_a , respectivamente.

Definición 1.3.3. La función de potencia, π , de un contraste de una hipótesis estadística, H_0 , versus una hipótesis alternativa, H_a , que rechaza H_0 si $x \in K$, esta dada por

$$\pi(\mu) = P(x \in K \mid H : \mu) \quad \text{para todo } \mu \in \Theta.$$

De este modo, los valores de la función de potencia son las probabilidades de rechazar la hipótesis nula H_0 para diversos valores del parámetro $\mu \in H_a$, o sea, para valores asumidos bajo H_0 , la función de potencia da la probabilidad de cometer error tipo I y para valores bajo H_a , da la probabilidad de *no cometer* error tipo II.

Al emplear la teoría de Neyman-Pearson de prueba de hipótesis debemos mantener fijo α , la probabilidad de cometer error tipo I, lo que implica que la hipótesis nula H_0 debe ser simple.

1.4 HIPÓTESIS COMPUESTA

Una hipótesis es compuesta cuando el subconjunto del espacio paramétrico, Θ , definido por ella, contiene más de un elemento, pudiendo ser compuesta la hipótesis nula, la alternativa o ambas.

En la teoría de Neyman-Pearson de prueba de hipótesis, mantenemos fijo α y ello requiere que H_0 sea simple, $\mu = \mu_0$. Como resultado la función de potencia pasará por el punto único (μ_0, α) , en el cual la función de potencia es la probabilidad de cometer error tipo I. Esto facilita la comparación entre funciones de potencia de varias regiones críticas, todas las cuales están diseñadas para probar las hipótesis nula simple $\mu = \mu_0$ frente a una alternativa compuesta, por ejemplo, $\mu > \mu_0$.

Ejemplo 1.4.1. *Sea una distribución $N(\mu; \sigma)$ con desviación estándar conocida. Considere la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ contra una alternativa compuesta $H_a : \mu > \mu_0$. Aplicamos el teorema de Neyman-Pearson para un valor μ de la media en la hipótesis alternativa.*

El cociente de verosimilitudes enfocadas a las dos hipótesis es $H_0 : \mu = \mu_0$ y H_a fija con $\mu > \mu_0$ es

$$\frac{L(X; \mu_0)}{L(X; \mu)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \}}$$

desarrollando los cuadrados y reduciendo terminos tenemos

$$\frac{L(X; \mu_0)}{L(X; \mu)} = e^{-\frac{n(\mu_0^2 - \mu^2)}{2\sigma^2} + \frac{n(\mu_0 - \mu)}{\sigma^2} \bar{x}}$$

La prueba aplicando el lema de Neyman-Pearson es

$$e^{-\frac{n(\mu_0^2 - \mu^2)}{2\sigma^2} + \frac{n(\mu_0 - \mu)}{\sigma^2} \bar{x}} \leq k_1$$

aplicando logaritmos, factorizando y despejando

$$-\frac{n(\mu_0^2 - \mu^2)}{2\sigma^2} + \frac{n(\mu_0 - \mu)\bar{x}}{\sigma^2} \leq \ln k_1$$

$$(\mu_0 - \mu)\bar{x} \leq \frac{\sigma^2}{n} \left(\ln k_1 + \frac{n(\mu_0^2 - \mu^2)}{2\sigma^2} \right) = k_2.$$

Entonces, la zona de rechazo adopta la forma $(\mu_0 - \mu)\bar{x} \leq k_2$.

La hipótesis alternativa es $H_a : \mu > \mu_0$, como $\mu > \mu_0$, $\mu_0 - \mu < 0$ es negativo, por lo que la zona de rechazo más potente, MP, para μ es $\bar{x} \geq k_3$ y como lo anterior se cumple para cualquier μ en la hipótesis alternativa se dice que $\bar{x} \geq k_3$ es una prueba uniformemente más potente, UMP, de $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_a : \mu > \mu_0$.

Definición 1.4.1. Sean las hipótesis H_0 simple y H_a compuestas a contrastar y sea K la zona de rechazo con nivel de significancia o tamaño de la prueba, α , y función de potencia $\pi_K(\mu^*)$, K define a la prueba **Uniformemente Más Potente, UMP**, si para cualquier otra prueba con zona de rechazo K' , función de potencia $\pi_{K'}(\mu^*)$ y nivel de significancia α y, para cualquier valor μ^* de $\mu \in H_a$ se tiene que

$$\pi_K(\mu^*) \geq \pi_{K'}(\mu).$$

La definición anterior indica, que una prueba con nivel de significancia, α , es uniformemente más potente que otra, si para cualquier valor paramétrico en H_a , los valores de su función de potencia son mayores, o iguales que, los de la otra.

Ejemplo 1.4.2. Sea una distribución $N(\mu; \sigma)$ con desviación estándar conocida. Considere la hipótesis nula simple $H_0 : \mu = \mu_0$ contra una alternativa compuesta $H_a : \mu > \mu_0$, (ver ejemplo 1.4.1). El cociente de verosimilitudes para μ_0 y μ fija con $\mu > \mu_0$, produce la ZR, $\bar{x} \geq k_2$, que es de nivel α UMP para probar H_0 vs. H_a y para cualquier $\mu^* < \mu_0$ también es UMP pero no es de tamaño α sino $\alpha' < \alpha$.

Definición 1.4.2. La prueba de $H_0 : \mu \in \Theta_0$ contra $H_a : \mu \in \Theta_a$ es de tamaño α cuando

$$\sup_{\mu \in \Theta_0} \pi(\mu) = \alpha.$$

Conviene definir el nivel de significancia o tamaño de la prueba para una hipótesis nula compuesta.

Definición 1.4.3. El nivel de significancia óptimo bajo H_0 está dado por

$$\alpha = \max_{\mu \in \Theta_0} P(X \in K : \mu \in \Theta_0) = \max_{\mu \in \Theta_0} \alpha(\mu).$$

También hay casos donde no existe una prueba uniformemente más potente, *UMP*, en particular, cuando contrastamos la hipótesis bilateral $\mu \neq \mu_0$ con nula simple, $\mu = \mu_0$.

Ejemplo 1.4.3. *Sea una distribución $N(\mu; \sigma)$ con desviación estándar conocida y sean $H_0 : \mu = \mu_0$, la hipótesis nula contra una alternativa bilateral $H_a : \mu \neq \mu_0$. Entonces, la mejor zona de rechazo de tamaño α , para un valor específico de la media, μ , en H_a , usando el lema de Neyman-Pearson es:*

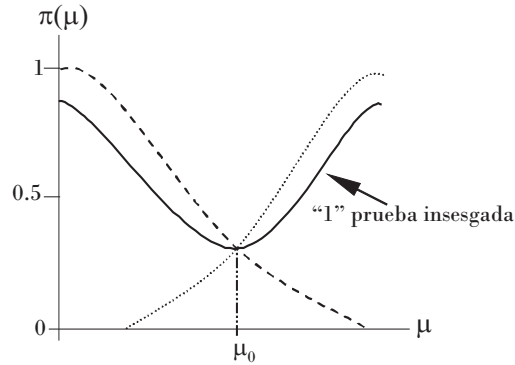
$$\frac{L(X; \mu_0)}{L(X; \mu)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}} = e^{-\frac{n(\mu_0^2 - \mu^2)}{2\sigma^2} + \frac{n(\mu_0 - \mu)\bar{x}}{\sigma^2}} \leq k_1$$

tomando logaritmos, factorizando y despejando se tiene la zona de rechazo definida por $(\mu_0 - \mu)\bar{x} \leq k$ (ver ejemplo 1.4.1).

Necesitamos conocer el signo de la diferencia $\mu_0 - \mu$ pues de él depende el sentido de la desigualdad.

1. Si $\mu_0 - \mu > 0$, la zona de rechazo sería $\bar{x} \leq k$.
2. Si $\mu_0 - \mu < 0$, la zona de rechazo sería $\bar{x} \geq k$.

Si se deja $\alpha/2$ para cada sección de la zona de rechazo se tiene que, para μ en la parte derecha (o sea, en 1.), la zona de rechazo coincide con la que define la prueba unilateral derecha, ya que, $Z_{1-\alpha/2} > Z_{1-\alpha}$; la prueba obtenida tiene menor potencia que la prueba unilateral derecha (línea punteada). De modo similar sucede con “2.”, cuando μ se encuentra a la izquierda (línea semisólida) la zona de rechazo tendrá menor potencia que la unilateral izquierda, ver gráfica 1.1; En cambio, la prueba unilateral derecha tiene potencia menor que α , en la parte de H_a donde $\mu_0 - \mu < 0$, siendo peor que la bilateral, que usa $\alpha/2$ a cada lado, puesto que esta prueba da potencias mayores que α para toda distribución en H_a (línea sólida en la gráfica “1.1”).



Gráfica 1.1: Prueba UMP

Lo anterior lleva a la necesidad de restringir las pruebas que comparemos a aquellas que siendo el nivel de significancia α , tienen la potencia mayor, o igual que α , para todo valor paramétrico en H_a . Se necesita el criterio de prueba insesgado.

1.5 CONTRASTES INSESGADOS

Al probar dos hipótesis es deseable prevenirse contra los dos tipos de errores que pueden cometerse: Error tipo I y Error tipo II. Debido a que la probabilidad de cometer un tipo de error condiciona el valor de la probabilidad de cometer el otro tipo de error, el procedimiento consiste en fijar la probabilidad de cometer el error tipo I o el nivel de significancia α en un límite, razonablemente bajo, entonces, dado α se minimiza la probabilidad del error tipo II para los valores de μ en la hipótesis alternativa. Así, cuanto mayor sea la potencia del contraste mayor seguridad proporcionará éste. De modo que, resulta sensato que el nivel de significancia sea menor que la potencia para cualquier valor del parámetro en la hipótesis alternativa. Cuando así acontece, se dice que la prueba es *insesgada*, en otras palabras, un contraste es *insesgado de tamaño α* cuando la función de potencia, $\pi(\mu)$ correspondiente, asume valores menores o iguales que α , bajo la hipótesis nula y valores mayores que α , bajo la hipótesis alternativa.

Definición 1.5.1. Un contraste es *insesgado* para $H_0 : \mu \in \Theta_0$ frente $H_a : \mu \in \Theta_a$ cuando

$$\max_{\mu \in \Theta_0} P(\text{rechazar } H_0) \leq \min_{\mu \in \Theta_a} P(\text{rechazar } H_0)$$

es decir, el contraste será *insesgado* cuando la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta es siempre menor o igual que la de rechazarla siendo falsa.

Cuando no se tiene el contraste *UMP*, se puede usar la prueba *Uniformemente Más Potente Insegada*, *UMPI*, que es la línea “1” en la gráfica 1.1, sección 1.4.

1.6 RAZÓN DE VEROSIMILITUD

Un método que permite construir regiones de rechazo para contrastar una hipótesis nula simple frente una alternativa compuesta, es el método de *razón de verosimilitud* que se basa en un procedimiento que usa la verosimilitud pero en hipótesis compuestas. El procedimiento tiene sentido al rechazar cuando la verosimilitud en μ_0 es menor que el máximo de la verosimilitud para todo valor de μ .

Definición 1.6.1. *El estadístico de contraste, llamado **razón de verosimilitud** para $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_a : \mu \neq \mu_0$ es*

$$\lambda(x) = \frac{L(X; \mu_0)}{\max_{\mu} L(X; \mu)}$$

donde $\max_{\mu} L(X; \mu)$ representa el valor máximo que puede alcanzar $L(X; \mu)$ dentro del campo de variación del parámetro μ , la hipótesis nula se rechaza si $\lambda(x) \leq c$.

Ejemplo 1.6.1. *En una población $N(\mu; \sigma)$ con σ conocida se contrastan la hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a la alternativa $H_a : \mu \neq \mu_0$, a partir de una muestra aleatoria de tamaño n .*

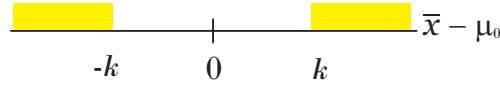
El estimador máximo verosímil del parámetro μ es \bar{x} , $\hat{\mu} = \bar{x}$, con lo que la razón de verosimilitud es

$$\begin{aligned} \frac{L(X; \theta_0)}{\max_{\theta} L(X; \theta)} &= \frac{L(X; \theta_0)}{L(X; \hat{\theta})} = \frac{L(X; \mu_0)}{L(X; \bar{x})} \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (\mu_0^2 - \bar{x}^2 - 2x_i[\mu_0 - \bar{x}]) \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(n\mu_0^2 - n\bar{x}^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i[\mu_0 - \bar{x}] \right)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (n\mu_0^2 - n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}[\mu_0 - \bar{x}])} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (n\mu_0^2 - n\bar{x}^2 - 2n\mu_0\bar{x} - 2n\bar{x}^2)} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_0^2 - \bar{x}^2 - 2\mu_0\bar{x} - 2\bar{x}^2)} \\ &= e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \mu_0)^2} \end{aligned}$$

La región de rechazo esta dada por $\lambda(x) \leq k$, entonces, aplicando logaritmos a ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2} &\leq k_1 \\ -\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2 &\leq \ln k_1 \\ (\bar{x}-\mu_0)^2 &\geq -\frac{2\sigma^2 \ln k_1}{n} \\ |\bar{x}-\mu_0| &\geq \sqrt{\frac{-2\sigma^2 \ln k_1}{n}} = k \end{aligned}$$

y la zona de rechazo bilateral se construye aprovechando la simetría de la distribución Normal, dejando $\alpha/2$ a cada lado de la zona de rechazo



siendo el estadístico de contraste $|\bar{x} - \mu_0| = |T(x)|$. Nótese que para el nivel de significancia α se tiene

$$\begin{aligned} \alpha = P_\mu(\lambda(x) \leq k) &= P_\mu(|\bar{x} - \mu_0| \leq k) = P_\mu\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right| \leq k^*\right) \\ &= P(|Z| \leq k^*) \Rightarrow k^* = Z_{1-\alpha/2}. \end{aligned}$$

La prueba basada en la razón de verosimilitud para la hipótesis nula compuesta se define en seguida

Definición 1.6.2. Si Θ_0 y Θ_a son subconjuntos complementarios del espacio paramétrico Ω y la hipótesis nula es compuesta $H_0 : (\mu \in \Theta_0)$, la prueba de razón de verosimilitud está dada por

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\Theta_0} L(x; \mu_0)}{\max_{\Omega} L(x; \mu)}$$

donde $\max_{\Theta_0} L(x; \mu_0)$ y $\max_{\Omega} L(x; \mu)$ son los valores máximos de la función de verosimilitud para todos los valores μ en Θ_0 y Ω , respectivamente, entonces la zona de rechazo de tamaño α ,

$$\lambda(x) \leq k$$

donde $0 < k < 1$, y $\max_{\Theta_0} P(\lambda \leq k) = \alpha$.

PRUEBA UNIFORMEMENTE MÁS
POTENTE INSESGADA DE UNA
HIPÓTESIS NULA COMPUESTA
VERSUS ALTERNATIVA BILATERAL
PARA UNA $N(\mu, \sigma)$ CON σ
CONOCIDA.

Una de las pruebas de hipótesis que con mayor frecuencia se presenta en situaciones de investigación reales dada la naturaleza de los datos, y comúnmente enseñadas por su facilidad en la práctica académica es: $H_0 : \mu = k$ contra $H_a : \mu \neq k$. Un contraste, que por convención se formula como: hipótesis nula simple frente hipótesis alternativa compuesta, y basa la hipótesis nula en que la diferencia entre el parámetro μ y k sea cero. Sin embargo, sólo en problemas de enseñanza académica debemos concebir plausible la prueba de la igualdad. Cuando un investigador contrasta una hipótesis nula, por ejemplo, sobre el rendimiento por hectárea de una variedad de simiente de maíz, es difícil establecer un valor para dicho rendimiento. El contraste de hipótesis a implementar debería ser de la forma: $H_0 : |\mu - k| \leq \delta$ contra $H_a : |\mu - k| > \delta$. Contraste que permitirá al investigador determinar si la media no difiere de k por una constante practica o en el caso de la hipótesis alternativa, difiere de k por un valor mayor que δ , el rechazo de la hipótesis nula permite la recomendación práctica de que hay una diferencia relevante.

2.1 ZONA DE RECHAZO DE UNA HIPÓTESIS CENTRAL COMPUESTA VERSUS ALTERNATIVA BILATERAL

En el Capítulo I se expuso una parte de la teoría que sustenta las pruebas estadísticas. De las diversas situaciones que pueden darse en los contrastes de hipótesis, nos enfocaremos de aquí en adelante, en la clase de una hipótesis nula central compuesta y la alternativa bilateral, para una distribución Normal. Estas hipótesis son: $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ contra $H_a : \mu \notin [k_1, k_2]$ y se presentará para este tipo prueba, el contraste *Uniformemente Más Potente Insesgado*, *UMPI*, de nivel α .

Recordemos que, de la definición 1.4.1, se mostró que para un contraste de la forma $H_0 : \mu = \mu_1$ contra $H_a : \mu \neq \mu_1$ no podemos obtener el contraste *UMP* aplicando el teorema de Neyman-Pearson (ver ejemplo 1.4.3). En la definición 1.6.1 se mostró, aplicando razón de verosimilitud, que la zona de rechazo bilateral *UMPI*, para el estadístico en prueba, es de la forma $|\bar{x} - \mu_0| = |T(x)| \geq k$ (ejemplo 1.6.1). También se dijo, que si se tiene $H_0 : \mu \in \Theta_0$, la distribución no queda determinada y, por tanto, habrá tantos niveles de significancia como parametros satisfagan $\mu \in \Theta_0$, no obstante, si se conjugan los conceptos de las definiciones 1.4.3 y 1.5.1 y de razón de verosimilitud, se puede obtener la prueba *UMPI* para el contraste. Por esta razón, para el esquema $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ contra $H_a : \mu \notin [k_1, k_2]$, donde la hipótesis nula es compuesta, se puede usar la zona de rechazo que produce la razón de verosimilitud, dada por la definición 1.6.2.

Proposición 2.1.1. *Sea x_1, x_2, \dots, x_n una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu; \sigma)$ con σ conocida. Para probar $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ frente $H_a : \mu \notin [k_1, k_2]$, con nivel de significación α , la razón de verosimilitud para el contraste produce la prueba*

$$ZR = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \leq C_1\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \geq C_2\} \text{ con } C_1 < k_1 < k_2 < C_2$$

donde

$$T(x) = \bar{x} \quad \text{y} \quad P_{\mu=k_1}(ZR) = P_{\mu=k_2}(ZR) = \frac{\alpha}{2}.$$

Demostración. *Se busca la razón de verosimilitud*

$$\lambda(x) = \frac{\max_{k_1 \leq \mu \leq k_2} L(x; \mu)}{\max_{\mu \in \Omega} L(x; \mu)}$$

la función de verosimilitud de x_1, x_2, \dots, x_n para $X \sim N(\mu; \sigma)$ con σ conocida es

$$L(x; \mu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad \text{con} \quad -\infty \leq \mu \leq \infty \quad (2.1)$$

Aplicando logaritmos

$$\begin{aligned} \ln(L(x; \mu)) &= \ln \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para encontrar el máximo del denominador de la razón de verosimilitud, la función de verosimilitud en el espacio paramétrico total, Ω , se deriva con respecto μ , el logaritmo de la función de verosimilitud y se tiene

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \quad (2.3)$$

igualando a cero y despejando de 2.7 a μ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \mu \right) &= \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i &= n\mu \Rightarrow \therefore \bar{x} = \mu \end{aligned} \quad (2.4)$$

como, $\frac{\partial^2 \ln(L(x; \mu))}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$, se verifica que el máximo del término en el denominador es $\mu = \bar{x}$, $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

El máximo del término en el numerador en la razón de verosimilitud se obtiene para tres casos: en ellos $k_1 \leq \mu \leq k_2$

1er. Caso *Si \bar{x} es tal, que $k_1 \leq \bar{x} \leq k_2$, el máximo coincide con el del denominador y*

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{\max_{k_1 \leq \mu \leq k_2} L(x; \mu)}{\max_{\mu \in \Omega} L(x; \mu)} = \frac{\max_{k_1 \leq \mu \leq k_2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}{\max_{\mu \in \Omega} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}} \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1. \end{aligned}$$

2do. Caso Si $\bar{x} < k_1$,

En el rango $\bar{x} < k_1 < \mu < k_2$, se tiene que $\bar{x} - k_1 < 0$, por lo tanto, la derivada de $\ln(L(x; \mu))$ respecto a μ ,

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) < 0 \quad (2.5)$$

es menor que 0 y en consecuencia $\ln(L(x; \mu))$ es estrictamente decreciente, lo que lleva a concluir que $\ln(L(x; \mu))$ alcanza su valor máximo en el extremo inferior del intervalo (k_1, k_2) entonces

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}.$$

Con base en ello, determinamos la razón de verosimilitud como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{\max_{k_1 \leq \mu \leq k_2} L(x; \mu)}{\max_{\mu \in \Omega} L(x; \mu)} \\ &= \frac{\max_{k_1 \leq \mu \leq k_2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}}{\max_{\mu \in \Omega} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - 2x_i k_1 + k_1^2) - \sum_{i=1}^n (x_i - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 k_1 + nk_1^2 - (n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2) \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 k_1 + nk_1^2 \right)} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2} \left(\bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 k_1 + k_1^2 \right)} \\ &= e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - k_1)^2} \end{aligned}$$

por lo anterior, la zona de rechazo será

$$e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - k_1)^2} \leq c$$

aplicando logaritmos

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - k_1)^2 &\leq \ln c \\ -\left(\frac{\bar{x} - k_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 &\leq 2 \ln c \\ c^* &\leq \left(\frac{\bar{x} - k_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\left|\frac{\bar{x} - k_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \sqrt{c^*} = C_1 \quad (2.6)$$

Como $\bar{x} < k_1$ se tiene que $\bar{x} - k_1 < 0$ y $\left|\frac{\bar{x} - k_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = -(\bar{x} - k_1)$, entonces, $-(\bar{x} - k_1) \geq \frac{\sqrt{c^*}\sigma}{\sqrt{n}}$, multiplicando se tiene $\bar{x} - k_1 \leq -\frac{\sqrt{c^*}\sigma}{\sqrt{n}}$, entonces $\bar{x} \leq k_1 - \frac{\sqrt{c^*}\sigma}{\sqrt{n}}$.

3er. Caso $\bar{x} > k_2$.

En el rango $k_1 < \mu < k_2 < \bar{x}$, la derivada de $\ln(L(x; \mu))$ respecto a μ ,

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) > 0 \quad (2.7)$$

es positiva, por lo que, en el intervalo (k_1, k_2) la función $L(x; \mu)$ es estrictamente creciente, y su máximo se alcanza en $\bar{x} = k_2$, por lo que

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{\max_{k_1 \leq \mu \leq k_2} L(x; \mu)}{\max_{\mu \in \Omega} L(x; \mu)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n ((x_i - k_2)^2 - (x_i - \bar{x})^2)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - 2x_i k_2 + k_2^2) - \sum_{i=1}^n (x_i - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left((n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 k_2 + nk_2^2) - (n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2) \right)} \\ &= e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 k_2 + k_2^2)} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - k_2)^2} \end{aligned}$$

por lo que, la región de rechazo será

$$0 \leq e^{-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - k_2)^2} \leq c$$

nuevamente aplicando logaritmos

$$-\infty \leq -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - k_2)^2 \leq \ln c$$

$$-\left(\frac{\bar{x} - k_2}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \leq 2 \ln c$$

$$c' \leq \left(\frac{\bar{x} - k_2}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 < \infty$$

cuya zona es

$$\left|\frac{\bar{x} - k_2}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq c' \tag{2.8}$$

recordando que $\bar{x} > k_2$, se puede tomar, $\bar{x} \geq k_2 + \frac{c'\sigma}{\sqrt{n}} = C_2$.

Formalmente nuestra zona de rechazo es de la forma:

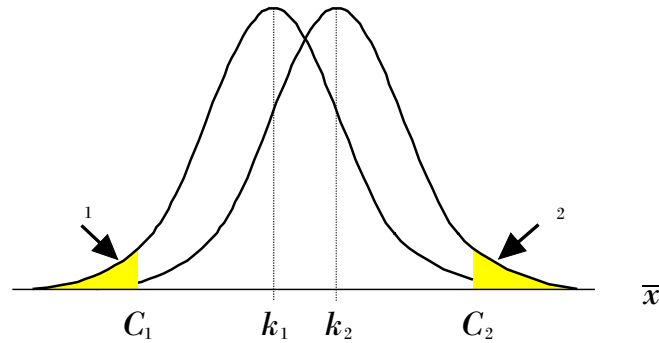
$$ZR = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \leq C_1\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \geq C_2\}$$

y para que sea de tamaño α , se debe cumplir que

$$P_{k_1}(ZR) = P_{k_2}(ZR) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$



Gráficamente tenemos



Ahora demostraremos que esta prueba es *Uniformemente Más Potente Insesgada, UMPI*.

Para ello, primeramente veremos que, $T(x) = n\bar{x}$ es un estadístico suficiente, posteriormente, que la razón de verosimilitud de la prueba pertenece a la familia con razón de verosimilitud monótona creciente respecto a $T(x)$, determinando con ello, la zona de rechazo *UMP* de tamaño α , $\{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \leq C_1\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \geq C_2\}$.

Finalmente, se analizarán las propiedades del contraste en la frontera de H_0 , el conjunto $\{k_1, k_2\}$, obteniendo así, la prueba *UMPI* de tamaño α en k_1 y k_2 , con lo que se termina la prueba.

Aplicando el criterio de factorización de Fisher-Neyman

$$L(x; \mu) = g(T(x); \mu) \cdot H(x)$$

de la función de verosimilitud 2.1 obtenemos

$$g(T(x); \mu) = [c(\mu)]^n e^{q(\mu)T(x)} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\mu^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$H(x) = \prod_{i=1}^n h(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

lo que implica que² $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ es un estadístico suficiente para μ .

Ahora, escribamos la función de verosimilitud 2.1, en la forma

$$F_\mu(x) = \prod_{i=1}^n [c(\mu)]^n e^{q(\mu)T(x)} h(x) \tag{2.9}$$

$$L(x; \mu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$L(x; \mu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\mu^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i} \tag{2.10}$$

en 2.10, podemos identificar los siguientes componentes

$$\prod_{i=1}^n h(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$[c(\mu)]^n = e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\mu^2}$$

$$q(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{2.11}$$

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$$

como $\mu > 0$, en 2.11, $q(\mu)$ es no decreciente, entonces, $L(x; \mu)$ pertenece a la familia de distribución exponencial con razón de verosimilitud monótona no decreciente de $T(x)$.

Finalmente, veamos las propiedades del contraste en la frontera de H_0 , en $\{k_1, k_2\}$. Para esto se utiliza la generalización del lema fundamental de Neyman-Pearson

²Nótese que $T(x)$ es una función continua.

Definición 2.1.1. Se conoce como función de rechazo a $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal, que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, y W es un subespacio euclidiano. La significancia de la prueba corresponde al máximo valor esperado de ϕ en H_0 , $E(\phi(x)) = \alpha$.

Teorema 2.1.1 (Generalización del lema fundamental de Neyman-Pearson).³ Sean f_1, f_2 y f_3 funciones de densidad integrables definidas sobre un espacio euclidiano W , y suponga que para α_1, α_2 , con $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ la clase de funciones indicadoras

$$\mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2} = \{ \phi \in W \mid \int \phi f_1 d\mu = \alpha_1, \int \phi f_2 d\mu = \alpha_2 \}$$

es no vacía, entonces se cumple que

I. Existe $\phi^* \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ tal, que $\int \phi^* f_3 d\mu \geq \int \phi f_3 d\mu$ para todo $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$.

II. Si $\phi^* \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ es tal, que $\int \phi^* f_3 d\mu \geq \int \phi f_3 d\mu$ para todo $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$, entonces

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

III. Si $\phi^* \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ es igual a

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

entonces $\int \phi^* f_3 d\mu \geq \int \phi f_3 d\mu$ para todo $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$.

IV. El conjunto de puntos

$$M = \left\{ \int \phi f_1 d\mu, \int \phi f_2 d\mu \mid \phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2} \right\}$$

es cerrado y convexo y, si (c_1, c_2) es un punto interior de M , entonces existen k_1, k_2 y $\mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ tales, que

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

³La demostración para el caso general y el teorema de compacidad débil se puede consultar en Borovkov (1988) o Lehmann (1997).

Demostración. -

I. Sea $H = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \int \phi f_3 d\mu \text{ con } \phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}\}$ el conjunto \mathcal{H} es acotado, por lo tanto tiene supremo. Sea α_0 el supremo de \mathcal{H} ,

- Si α_0 es punto aislado de \mathcal{H} , entonces existe $\phi \in \mathcal{C}$ tal, que $\int \phi f_3 d\mu = \alpha_0$.
- Si α_0 es punto de acumulación de \mathcal{H} , entonces existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tal, que $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$, en consecuencia existe una subsucesión de funciones de rechazo $\{\alpha_{n_i}\}_{n_i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tales, que $\alpha_{n_i} = \int \phi_{n_i} f_3 d\mu$, para la cual, el teorema de convergencia débil, $\int \phi_{n_i} f_3 d\mu \rightarrow \int \phi f_3 d\mu = \alpha_0$ para $\phi \in \mathcal{C}$.

II. Considere la función $\phi^* \in \mathcal{C}$ tal, que $\int \phi^* f_3 d\mu \geq \int \phi f_3 d\mu$ para todo $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ entonces $\int (\phi^* - \phi) f_3 d\mu \geq 0$ y

$$\int \phi(k_1 f_1 + k_2 f_2) d\mu \leq \int \phi^*(k_1 f_1 + k_2 f_2) d\mu = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$$

de donde se sigue, que para toda $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$, la $\int (\phi^* - \phi)(k_1 f_1 + k_2 f_2) d\mu = 0$ esto implica que

$$\int (\phi^* - \phi) f_3 d\mu = \int (\phi^* - \phi)(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2) d\mu \geq 0$$

Ahora suponga que $\mathcal{A} = \{x \mid (\phi^* - \phi)(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2)(x) < 0\}$ y considere la función

$$\phi'(x) = \begin{cases} \phi & \text{si } x \in \mathcal{A} \\ \phi^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por construcción ϕ' también pertenece a $\mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$, entonces

$$\int (\phi^* - \phi')(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2) d\mu = \int_{\mathcal{A}} (\phi^* - \phi')(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2) d\mu \geq 0$$

de donde se sigue que \mathcal{A} es de medida 0. Se concluye que

$$(\phi^* - \phi)(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2) d\mu \geq 0$$

casi por doquier, para toda $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$. Esto significa que si $(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2) d\mu < 0$ necesariamente $(\phi^* - \phi) < 0$ y, si $(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2) d\mu > 0$ necesariamente $(\phi^* - \phi) > 0$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$, esto implica que

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

III. Considera una función $\phi^* \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ igual a

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

entonces para cualquier función indicadora ϕ se tiene que cuando $(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2)d\mu > 0$ necesariamente $1 - \phi(x) = (\phi^*(x) - \phi(x)) \geq 0$ y cuando $(f_3 - k_1 f_1 - k_2 f_2)d\mu < 0$ necesariamente $0 - \phi(x) = (\phi^*(x) - \phi(x)) \leq 0$, por lo que

$$(\phi^*(x) - \phi(x))(f_3(x) - k_1 f_1(x) - k_2 f_2(x))d\mu \geq 0$$

y

$$\int (\phi^*(x) - \phi(x))(f_3(x) - k_1 f_1(x) - k_2 f_2(x))d\mu \geq 0$$

puesto que $\int (\phi^*(x) - \phi(x))(k_1 f_1(x) - k_2 f_2(x))d\mu = 0$ entonces se tiene que $(\phi^*(x) - \phi(x))f_3(x) \geq 0$ y sin limitar la generalidad, se tiene que $\int \phi^*(x)f_3(x) \geq \int \phi(x)f_3(x)$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$.

IV. El conjunto $M = \left\{ \int \phi(x)f_1(x)dx, \int \phi(x)f_2(x)dx : \phi \text{ es la función de rechazo} \right\}$ cerrado por el teorema de compacidad débil y convexo debido a que ϕ_1 y ϕ_2 son funciones de rechazo también $\gamma\phi_1 + (1-\gamma)\phi_2$ es función de rechazo para $0 \leq \gamma \leq 1$.

El conjunto $N = \left\{ \int \phi(x)f_1(x)dx, \int \phi(x)f_2(x)dx, \int \phi(x)f_3(x)dx \right\}$ también es cerrado y convexo usando los mismo argumentos.

Tome $0 < C_1, C_2 < 1$ fijos, los puntos $(C_1, C_2, C) \in N$ forman un intervalo cerrado $[C^*, C^{**}]$. Si $C^* < C^{**}$, el punto (C_1, C_2, C^{**}) está en la frontera de N y los puntos $(v_1, v_2, v_3) \in N$ están acotados por arriba por un hiperplano, con ecuación

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C^{**}.$$

Como (C_1, C_2) es un punto interior de M también lo es de N y $k_3 \neq 0$, por lo tanto, se puede tomar $k_3 = -1$ con lo que se cumple

$$v_3 - k_1 v_1 - k_2 v_2 = C^{**} - k_1 C_1 - k_2 C_2.$$

Ahora, tome ϕ^{**} como la función de rechazo que produce al punto (C_1, C_2, C^{**}) y ϕ la que produce (v_1, v_2, v_3) , entonces

$$\int \phi(x)[f_3(x) - f_1(x) - f_2(x)]dx \leq \int \phi(x)^{**}[f_3(x) - f_1(x) - f_2(x)]dx$$

y ϕ^{**} es la función de rechazo que maximiza el lado izquierdo de la desigualdad y como la integral se maximiza haciendo $\phi = 1$ cuando el integrando es positivo y $\phi = 0$ si este es negativo, ϕ^{**} satisface

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

Ahora, veamos el caso, $C^* = C^{**}$. Tome $(C'_1, C'_2) \neq (C_1, C_2)$, existe exactamente un punto C' tal, que $(C'_1, C'_2, C') \in N$.

Suponga lo contrario, que existen dos puntos (C'_1, C'_2, C'_4) y (C'_1, C'_2, C'_5) en N y considere cualquier punto $(C''_1, C''_2, C''_3) \in N$ tal, que (C'_1, C'_2) es punto interior de la línea que une a (C'_1, C'_2) y (C''_1, C''_2) . El conjunto convexo expandido por (C'_1, C'_2, C'_4) , (C'_1, C'_2, C'_5) y (C''_1, C''_2, C''_3) está en N y contiene a (C_1, C_2, C_4) y (C_1, C_2, C_5) con $C_4 < C_5$ en contradicción con $C^* = C^{**}$.

Como N es convexo, contiene al origen y cuando más un punto de cada línea vertical dada por $(v_1 = C'_1, v_2 = C'_2)$ está en el hiperplano que pasa por el origen y no es paralelo al eje 3, entonces

$$\int \phi(x) f_3(x) dx = k_1 \int \phi(x) f_1(x) dx + k_2 \int \phi(x) f_2(x) dx$$

para todo ϕ , lo que lleva al caso trivial de que $f_3 = k_1 f_1 + k_2 f_2$ con probabilidad 1 y la condición (II) se cumple consecuentemente.



Finalmente, probaremos que la ZR que resultó de la relación de verosimilitud es UMPI. La prueba se basa en el siguiente resultado.

El siguiente teorema es un resultado general

Teorema 2.1.2. ⁴ Para probar el parametro θ y las hipótesis $H_0 : \theta \in (-\infty, \theta_1) \cup (\theta_2, \infty)$ frente $H_a : \mu \in [k_1, k_2]$, con $\theta_1 < \theta_2$,

I. Existe una prueba UMP dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 < T(x) < k_2, \ k_1 < k_2 \\ 0 & \text{si } k_1 > T(x), \text{ o } T(x) \geq k_2 \end{cases}$$

$$\text{con } \int \phi(x) f(x; \theta_1) d\theta = \int \phi(x) f(x; \theta_2) d\theta = \alpha.$$

⁴La demostración del teorema 2.1.2 se encuentra en Borovkov (1988) pag. 323 o Lehmann (1997) pag. 102.

- II. La prueba satisfice la relación $\int \phi(x)f(x;\theta)d\theta < \alpha$ para toda $\theta < k_1$ o $\theta > k_2$ cuando $\int \phi(x)f(x;\theta_1)d\theta = \int \phi(x)f(x;\theta_2)d\theta = \alpha$.
- III. Para $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que existe, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ en donde la función dada por la integral $y(\theta) = \int \phi(x)f(x;\theta)d\theta$ alcanza su valor máximo en θ_0 , es decreciente.

El teorema anterior se particulariza para el caso de la distribución Normal.

Teorema 2.1.3. sea μ el parametro de de la distribución Normal con varianza conocida y sean las hipótesis $H_0 : \mu \in (-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty)$ contra $H_a : \mu \in [k_1, k_2]$, con $k_1 < k_2$

- I. Existe una prueba UMP dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 < T(x) < k_2, \quad k_1 < k_2 \\ 0 & \text{si } k_1 \geq T(x), \text{ o } T(x) \geq k_2 \end{cases}$$

con $\int \phi(x)f(x; k_1)d\mu = \int \phi(x)f(x; k_2)d\mu = \alpha$ y $T(x) = \sum_{i=1}^n X_i$.

- II. La prueba satisface la relación $\int \phi(x)f(x;\mu)d\mu < \alpha$ para toda $\mu < k_1$ o $\mu > k_2$ cuando $\int \phi(x)f(x;\mu_1)d\mu = \int \phi(x)f(x;\mu_2)d\mu = \alpha$.
- III. Para $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que existe, $\mu_0 \in (\mu_1, \mu_2)$ en donde la función dada por la integral $y(\mu) = \int \phi(x)f(x;\mu)d\mu$ alcanza su valor máximo en μ_0 , lo que implica que $y(x)$ es creciente antes de μ_0 y después de μ_0 es decreciente.

Demostración. -

- I. Si la muestra aleatoria provienen de una distribución Normal se tienen que $T(x)/n$ se distribuye normalmente con media μ y varianza σ^2/n
- Primero se encuentran los valores k_1 y k_2 tales, que

$$P(k_1 \leq T(x) \leq k_2 | \mu = \mu_1) = P(k_1 \leq T(x) \leq k_2 | \mu = \mu_2) = \alpha$$

entonces

$$P\left(\frac{\sqrt{n}(k_1 - \mu_1)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}(k_2 - \mu_1)}{\sigma}\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}(k_1 - \mu_2)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}(k_2 - \mu_2)}{\sigma}\right) = \alpha$$

Observese que los dos intervalos donde se calcula la probabilidad de esta expresión son distintos pero de igual longitud, de manera que se debe satisfacer que sus extremos son de signo contrario, es decir:

$$\frac{\sqrt{n}(k_1 - \mu_1)}{\sigma} = -\frac{\sqrt{n}(k_2 - \mu_2)}{\sigma}$$

y

$$\frac{\sqrt{n}(k_2 - \mu_1)}{\sigma} = -\frac{\sqrt{n}(k_1 - \mu_2)}{\sigma}$$

luego entonces, $k_1 - \mu_1 = \mu_2 - k_2$. Ahora se determinará el valor de μ_0 que maximice la probabilidad

$$P(k_1 \leq T(x) \leq k_2 | \mu = \mu_0)$$

Esto es equivalente a maximizar la función

$$Q(\mu_0) = F\left(\frac{\sqrt{n}(k_2 - \mu_0)}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\sqrt{n}(k_1 - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

donde F es la función de distribución Normal estandar.

La derivada de Q respecto a μ_0 es

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_0} = f\left(\frac{\sqrt{n}(k_2 - \mu_0)}{\sigma}\right) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} - f\left(\frac{\sqrt{n}(k_1 - \mu_0)}{\sigma}\right) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

esta diferencia es igual a cero cuando

$$k_2 - \mu_0 = -(k_1 - \mu_0) = -k_1 + \mu_0 \Rightarrow \mu_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

En este caso, la probabilidad es

$$P(k_1 \leq T(x) \leq k_2 | \mu = \mu_0) = P\left(-\frac{\sqrt{n}(k_2 - k_1)}{2\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}(k_2 - k_1)}{2\sigma}\right)$$

Por otro lado, la función de verosimilitud de esta prueba se puede escribir como en 2.7, de modo que, $q(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2}$ es creciente (ver 2.9). Tome $\mu_1 < \mu' < \mu_2$, para maximizar $\int \phi(x)f(x; \mu')$ sujeta a $\int \phi(x)f(x; \mu_1) = \int \phi(x)f(x; \mu_2) = \alpha$ donde $\phi(x) = \psi[T(x)]$ como la función de rechazo. El conjunto

$$N = \left\{ \left(\int \phi(t)f_1(t)dt, \int \phi(t)f_2(t)dt, | \phi \text{ es una función de prueba} \right) \right\}$$

es tal, que $(a, a) \in N$ es punto interior ($0 < a < 1$), entonces N contiene los puntos (a, μ_1) y (a, μ_2) con $\mu_1 \leq a \leq \mu_2$ y este contiene al punto (a, a) con ($0 < a < 1$), de

manera que, (por IV del teorema 2.1.1) existen k_1 , k_2 y ψ_0 tales, que $\phi_0[T(x)] = \psi_0[T(x)]$ satisface $\int \phi_0(x)f(x; \mu_1) = \int \phi_0(x)f(x; \mu_2) = \alpha$ y

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1[c(\mu_1)]e^{q(\mu_1)T(x)} + k_2[c(\mu_2)]e^{q(\mu_2)T(x)} < [c(\mu')]e^{q(\mu')T(x)} \\ 0 & \text{si } k_1[c(\mu_1)]e^{q(\mu_1)T(x)} + k_2[c(\mu_2)]e^{q(\mu_2)T(x)} > [c(\mu')]e^{q(\mu')T(x)} \end{cases}$$

por lo tanto, usando a y b para los coeficientes de la definición de $\phi_0(x)$, $\phi_0(T(x)) = 1$, cuando $a_1e^{b_1t} + a_2e^{b_2t} < 1$ con $b_1 < 0 < b_2$ y, $\phi_0(T(x)) = 0$, cuando $a_1e^{b_1t} + a_2e^{b_2t} > 1$.

Note, que no puede ser $a_1a_2 \leq 0$ ya que se obtiene una prueba que rechaza siempre, sí $a_1 \leq 0$ y $a_2 > 0$ o $a_1 > 0$ y $a_2 \leq 0$, $a_1e^{b_1t} + a_2e^{b_2t}$ es estrictamente monótona y no puede satisfacer $\int \phi_0(x)f(x; \mu_1) = \int \phi_0(x)f(x; \mu_2) = \alpha$, por lo tanto, ambas, a_1 y a_2 son mayores a cero y de esa manera se cumple con la forma de ϕ (premisa (I y II)) y es, entonces UMP (teorema 2.1.1, (III)) sujeta a $\int \phi_0(x)f(x; \mu_1) = \int \phi_0(x)f(x; \mu_2) \leq \alpha$. Para probar que es UMP para H_0 se debe satisfacer que $\int \phi(x)f(x; \mu) \leq \alpha$ para $\mu \leq \mu_1$ y $\mu \geq \mu_2$, esto sigue de compararla con $\phi_\mu = \psi_\mu \equiv \alpha$.

II. Tome $\mu' \leq \mu_1$ y aplique el teorema anterior para minimizar $\int \phi(x)f(x; \mu')$ sujeta a $\int \phi_0(x)f(x; \mu_1) = \int \phi_0(x)f(x; \mu_2) = \alpha$, la prueba tiene forma $a_1e^{b_1t} + a_2e^{b_2t} < 1$ con $b_1 < 0 < b_2$.

III. De (I) y de la continuidad de $\int \phi(x)f(x; \mu)$, entonces $\int \phi(x)f(x; \mu^*)$ satisface (III) o existen tres puntos $\mu^* < \mu'' < \mu'''$ tales, que $\int \phi_0(x)f(x; \mu'') \leq \int \phi(x)f(x; \mu^*) = \int \phi(x)f(x; \mu''') = c$ con $0 < c < 1$; si $\int \phi(x)f(x; \mu^*) = 0$ o $\int \phi(x)f(x; \mu') = 1$, entonces $\phi = 0$ (o 1) con probabilidad 1, esto excluye que $\int \phi_0(x)f(x; \mu_1) = \int \phi_0(x)f(x; \mu_2) = \alpha$. La prueba maximiza $\int \phi_0(x)f(x; \mu'')$ sujeta a $\int \phi(x)f(x; \mu^*) = \int \phi(x)f(x; \mu''') = c$ para todo $\mu^* < \mu'' < \mu'''$. Determinándose con ello que la prueba es UMPI.

Se ha obtenido el test UMPI para la hipótesis $H_0 : \mu \in (-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty)$ contra $H_a : \mu \in [k_1, k_2]$, con $k_1 < k_2$; de modo que, para la prueba $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ frente $H_a : \mu \notin [k_1, k_2]$, con nivel de significación α , que es la de nuestro interés, tome $1 - \phi(x)$ para la dócima anterior y, con ello, evidentemente nuestro contraste será UMPI entre aquellos que satisfacen $\int \phi(x)f(x; \mu_1) = \int \phi(x)f(x; \mu_2) = \alpha$. ♣

Se ha mostrado que en este tipo de contrastes la región de rechazo se compone de dos intervalos siendo del tipo $|T(x)| \geq k$, es decir, $\{x_1, x_2, \dots, x_n \mid (T(x) \leq -k)\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) \geq k\}$, donde $T(x)$ es un estadística de prueba.

2.2 APROXIMACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LAS CONSTANTES C_1 Y C_2 .

En la sección 1.4 vimos que cuando el contraste de hipótesis es compuesto tiene como consecuencia que, al poder tomar el parámetro más de un valor, la distribución de probabilidad de la población en H_0 queda indefinida. En la sección 2.1, se determinó la zona de rechazo para el contraste de una hipótesis nula central compuesta contra una alternativa bilateral. La prueba uniformemente más potente incesgada se define con probabilidad de rechazo α para los valores de μ en la frontera de H_0 , esto es, k_1 y k_2 . El proceso lleva a un sistema de ecuaciones que no tiene solución cerrada, pero, implementaremos un método numérico para obtener los valores de C_1 y C_2 .

Desarrollando las ecuaciones para la probabilidad de la zona de rechazo, ZR , en C_1 y C_2 , se tiene

$$P_{H_0; \mu=k_1} (\bar{x} < C_1 \text{ ó } \bar{x} > C_2) = P_{H_0; \mu=k_2} (\bar{x} < C_1 \text{ ó } \bar{x} > C_2) = \alpha$$

Para μ_1 se tiene

$$\begin{aligned} P_{H_0; \mu=k_1} \left(\frac{\bar{x} - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{C_1 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ ó } \frac{\bar{x} - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C_2 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) &= \alpha \\ &= P \left(Z < \frac{C_1 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ ó } Z > \frac{C_2 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha \end{aligned}$$

igualando los términos constantes con los percentiles que les corresponden, y aprovechando que son dos eventos disjuntos, se toma la probabilidad del evento compuesto como la suma de las probabilidades, queda

$$P \left(Z < \frac{C_1 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha_1 \quad \text{y} \quad P \left(Z > \frac{C_2 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha_2$$

despejando tenemos

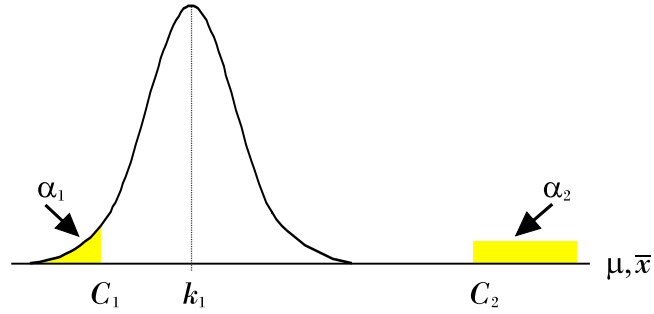
$$Z_{\alpha_1} = \frac{C_1 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{2.12}$$

y

$$Z_{1-\alpha_2} = \frac{C_2 - k_1}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{2.13}$$

con α_1 y α_2 , tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

En la densidad de \bar{x} cuando $\mu = \mu_1$ se ven las áreas α_1 y α_2



De manera similar para μ_2

$$P_{H_0: \mu=k_2} (\bar{x} < C_1 \text{ ó } \bar{x} > C_2) = \alpha$$

Produce

$$\begin{aligned} P_{H_0: \mu=k_2} \left(\frac{\bar{x} - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{C_1 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ ó } \frac{\bar{x} - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C_2 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \right) &= \alpha \\ &= P \left(Z < \frac{C_1 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ ó } Z > \frac{C_2 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha \end{aligned}$$

Entonces

$$P \left(Z < \frac{C_1 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha_1 \quad \text{y} \quad P \left(Z > \frac{C_2 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha_2$$

despejando tenemos

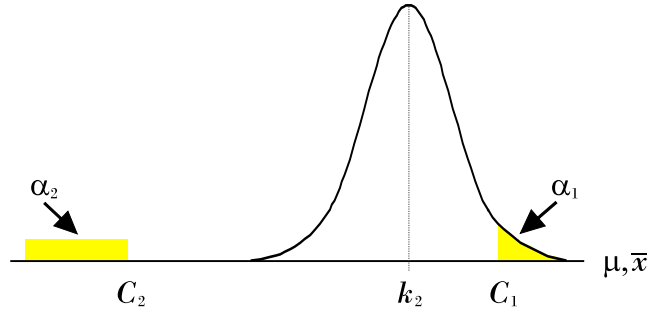
$$Z_{1-\alpha_1} = \frac{C_1 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{2.14}$$

y

$$Z_{\alpha_2} = \frac{C_2 - k_2}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{2.15}$$

Tales, que $\alpha_1^0 + \alpha_2^0 = \alpha$.

En la densidad de \bar{x} cuando $\mu = \mu_2$ se ven las áreas α_1 y α_2



Despejando de 2.12 y 2.13 a C_1 y C_2 , respectivamente

$$C_1 = Z_{\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + k_1 \quad \text{y} \quad C_2 = Z_{1-\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + k_1$$

Análogamente de 2.14 y 2.15, obtenemos

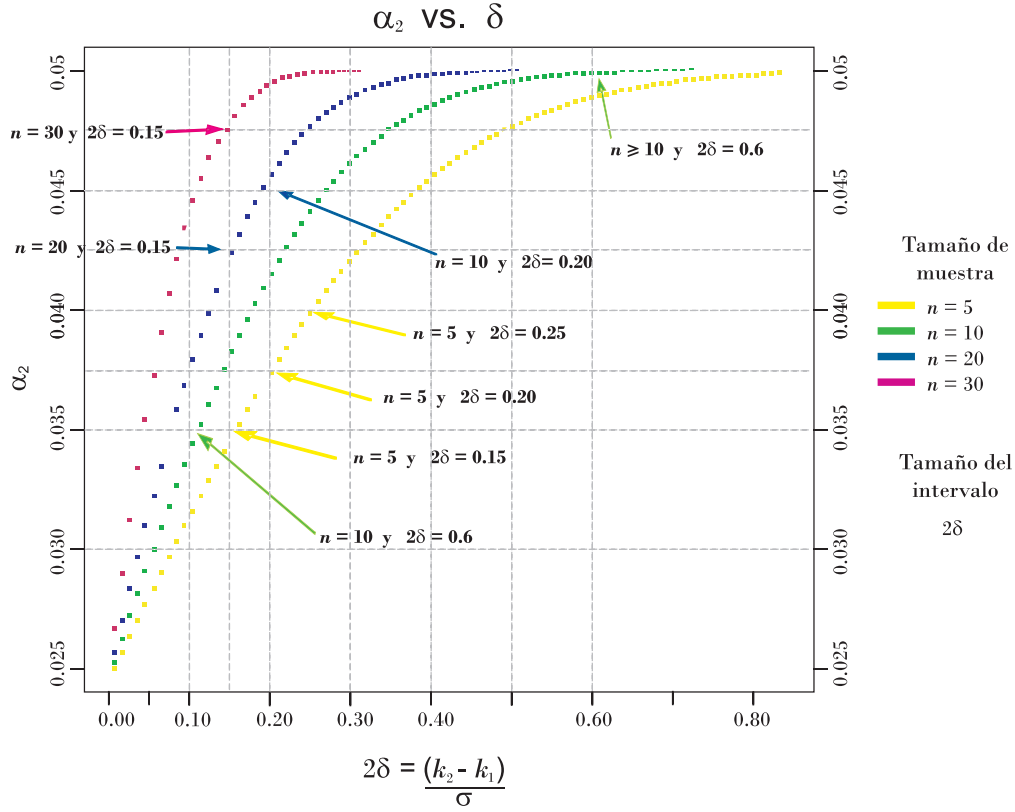
$$C_1 = Z_{1-\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + k_2 \quad \text{y} \quad C_2 = Z_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + k_2$$

Por simetría se toma $\alpha_1^0 = \alpha_2$ y $\alpha_2^0 = \alpha_1$.

Los valores de C_1 y C_2 dependen de α_1 y α_2 , de modo que, la zona de rechazo para un tamaño de muestra n , se aproxima sucesivamente, procediendo como sigue:

Inicialmente, dados: el tamaño de la muestra, la desviación estándar y un error de tolerancia para la precisión, se fija el valor de la probabilidad de cometer error tipo I en uno de los extremos, digamos, $\alpha_2^* = \alpha/2$ y $\alpha_1^* = \alpha - \alpha_2^*$, con $\mu_0 = k_1$, bajo H_0 ; se comienza a iterar con los valores de los cuantiles $Z_{1-\alpha_2^*}$ y $Z_{\alpha_1^*} = Z_{\alpha - \alpha_2^*}$ calculándose C_1 y C_2 , conocidas estas cuantías, se calcula la diferencia entre $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha$ si es menor que la tolerancia estipulada se obtiene la zona de rechazo con C_1 y C_2 que producen $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ para el contraste, de lo contrario, se continuará iterando hasta cumplir con la precisión deseada, al ir incrementando el extremo α_2^* .

La implementación computacional y su ejecución, de la pasada exposición, genera el siguiente resultado gráfico:



Gráfica 2.1: ZR para muestras de tamaños 5, 10, 20 y 30

Para $\alpha = 0.05$, en la gráfica de arriba, se muestra Alfa (α_2), valor de probabilidad a la derecha que, fija al percentil de la Normal estándar que se debe usar para realizar la prueba cuando $2\delta = (k_2 - k_1)/\sigma$, si $\bar{x} > k_2$ la prueba se hará hacia la derecha y si $\bar{x} < k_1$ la prueba se hace hacia la izquierda con el valor de α dado por la gráfica.

PROCEDIMIENTO: Para cada valor $2\delta = (k_2 - k_1)/\sigma$ tome la línea vertical que cruce a la curva de n , en el punto de cruce tome la línea horizontal que lo llevará al valor de α_2 (en la gráfica Alfa), que le indica que deberá comparar el valor de Z calculado igual a $\frac{\bar{x} - k_2}{\sigma} \sqrt{n}$ con el percentil $100(1 - \alpha_2)\%$ de la Normal estándar si $\bar{x} > k_2$ y Z calculada igual a $-\frac{\bar{x} - k_1}{\sigma} \sqrt{n}$ con el percentil $100(1 - \alpha_2)\%$ de la Normal estándar si $\bar{x} < k_1$.

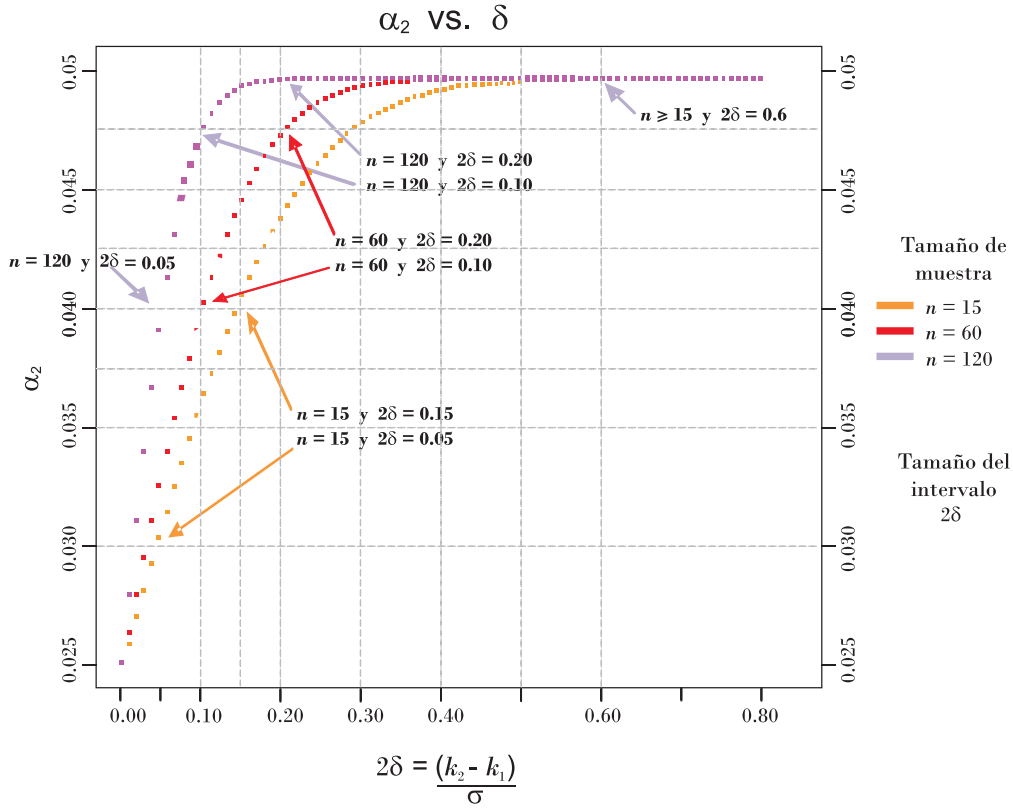
El uso de la gráfica se ilustra con los siguientes ejemplos:

- Si $2\delta \geq 0.6$ y $n \geq 10$, se debe usar el percentil 95% de Z , como la prueba convencional de nivel 5% unilateral a la derecha.

- Si $2\delta = 0.15$ y $n = 30$, obtenemos $\alpha_2 = 0.0475$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.25% de Z .
- Si $2\delta = 0.2$ y $n = 5$, entonces $\alpha_2 = 0.0375$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.25% de Z .
- Para $2\delta = 0.15$ y $n = 20$, entonces $\alpha_2 = 0.0425$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.75% de Z .
- Si $2\delta = 0.25$ y $n = 5$ tenemos, $\alpha_2 = 0.04$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 96% de Z .
- Si $2\delta = 0.20$ y $n = 5$ tenemos, $\alpha_2 = 0.0375$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.25% de Z .
- Si $2\delta = 0.15$ y $n = 5$ tenemos, $\alpha_2 = 0.035$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.5% de Z .
- Si $2\delta = 0.15$ y $n = 10$, se debe usar $\alpha = 0.0375$ lo que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.25% de Z .
- Y si $2\delta = 0.10$ y $n = 10$, tenemos $\alpha_2 = 0.035$, prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.5% de Z ; etc.

En la gráfica siguiente se ve que:

Cuando $n \geq 15$ y $2\delta \geq 0.60$, o $n \geq 30$ y $2\delta \geq 0.4$, o $n = 120$ y $2\delta \geq 0.2$, se usa la prueba ordinaria unilateral derecha con $\alpha = 0.05$.



Gráfica 2.2: ZR para muestras de tamaño 15, 60 y 120

Algunos ejemplos que ilustran esta gráfica para $\bar{x} > k_2$ son:

- Para $2\delta = 0.1$ y $n = 120$, se tiene el valor de $\alpha = 0.0475$, se usa la prueba unilateral derecha con el percentil 95.25% de Z .
- Si $2\delta = 0.2$ y $n = 120$, la zona de rechazo será, $\alpha = 0.05$, unilateral a la derecha con el percentil 95% de Z .
- Si $2\delta = 0.05$ y $n = 120$ tenemos, $\alpha = 0.04$ con la prueba unilateral a la izquierda derecha con el percentil 96% de Z .
- Si tenemos $2\delta = 0.2$ y $n = 60$ la zona de rechazo sería, $\alpha = 0.0475$ empleando un percentil de 95.25% de la normal estandar.
- Si fuese $2\delta = 0.1$ y $n = 60$ obtendríamos una zona de rechazo de $\alpha = 0.04$, lo que da el uso de la prueba con el percentil 96% de Z .

- Con $2\delta = 0.15$, para $n = 15$, la zona de rechazo sería, $\alpha = 0.04$, empleando el percentil 96% de Z .
- Y, si $2\delta = 0.05$ y $n = 15$, se debe usar $\alpha = 0.03$, se usa el percentil $Z_{0.97\%}$.

**PRUEBA UNIFORMEMENTE MÁS
POTENTE INSESGADA, PARA EL
CONTRASTE HIPÓTESIS NULA
COMPUESTA CONTRA ALTERNATIVA
BILATERAL EN UNA $N(\mu, \sigma)$ CON σ
DESCONOCIDA.**

El resultado de la sección anterior se puede extender para cuando tenemos el contraste de hipótesis de la forma: $H_0 : |\mu - k| \leq \delta$ frente $H_a : |\mu - k| > \delta$ con desviación estándar, σ , desconocida.

**3.1 ZONA DE RECHAZO PARA HIPÓTESIS NULA COMPUESTA
CONTRA ALTERNATIVA BILATERAL CON σ DESCONOCIDA.**

Se desea obtener la prueba *UMPI* para probar una hipótesis de la forma

$$H_0 : \mu \in [k_1, k_2] \text{ contra } H_a : \mu \in (-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty).$$

Para resolver este problema, hemos de recurrir al resultado obtenido en el anterior capítulo. Recordemos que la proposición 2.1.1 proporciona, el contraste UMPI para $\mu \in [k_1, k_2]$ frente $\mu \notin [k_1, k_2]$ con σ conocida. Entonces, para encontrar la prueba UMPI

para el caso donde σ es desconocida, procedemos de manera análoga a 2.1.1, aplicando razón de verosimilitud, para caracterizar la zona de rechazo de tamaño α .

Proposición 3.1.1. *Sea x_1, x_2, \dots, x_n una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu; \sigma)$ con $\sigma > 0$ desconocida. Para contrastar $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ contra $H_a : \mu \in (-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty)$, con nivel de significación α y, considerando el valor del estimador s^2 de σ^2 fijo, la razón de verosimilitud para el contraste produce la prueba UMPI*

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\substack{k_1 \leq \mu_0 \leq k_2 \\ \sigma > 0}} L(x; \mu_0, \sigma)}{\max_{\substack{\mu \in \Omega \\ \sigma > 0}} L(x; \mu, \sigma)} \leq C$$

con

$$P_{\mu=k_1} [\lambda(x) \leq C] = P_{\mu=k_2} [\lambda(x) \leq C] = \alpha.$$

Demostración. *La función de verosimilitud de x es*

$$L(x; \mu, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad \text{con } \mu \in \mathfrak{R} \text{ y } \sigma > 0$$

aplicando logaritmo natural tenemos

$$\begin{aligned} \ln(L(x; \mu, \sigma)) &= \ln \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

derivando con respecto μ y σ

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu, \sigma))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu, \sigma))}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (3.2)$$

igualando a cero de 3.1

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu, \sigma))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\mu \Rightarrow \therefore \bar{x} = \hat{\mu} \quad (3.3)$$

haciendo lo mismo en 3.2

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu, \sigma))}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{n}{\sigma} \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = n\hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \quad (3.5)$$

tenemos que el máximo para μ y σ en el espacio paramétrico total ocurre con

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad y \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{n-1}{n} s^2.$$

Nuevamente, el máximo del término en el numerador se obtiene para tres casos:

1er. Caso $\bar{x} \in [k_1, k_2]$, $\sigma > 0$.

El máximo ocurre en $\mu = \bar{x}$ y $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$, como $k_1 \leq \bar{x} \leq k_2$ el máximo del numerador coincide con el valor máximo en el denominador y

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\substack{k_1 \leq \mu_0 \leq k_2 \\ \sigma > 0}} L(x; \hat{\mu}_0, \sigma)}{\max_{\substack{\mu \in \Omega \\ \sigma > 0}} L(x; \hat{\mu}, \sigma)} = \frac{\max_{\substack{k_1 \leq \mu_0 \leq k_2 \\ \sigma > 0}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{\max_{\substack{\mu \in \Omega \\ \sigma > 0}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} s^{-n} e^{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} s^{-n} e^{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 1$$

2do. Caso $\bar{x} < k_1$, $\sigma > 0$.

En el rango $\bar{x} < k_1 < \mu < k_2$, se tiene que $\bar{x} - k_1 < 0$, por lo tanto, la derivada de $\ln(L(x; \mu))$ respecto a μ ,

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) < 0 \quad (3.6)$$

es negativa y en consecuencia $\ln(L(x; \mu))$ es estrictamente decreciente, lo que lleva a concluir que $\ln(L(x; \mu))$ alcanza su valor máximo en el extremo inferior del intervalo (k_1, k_2) entonces

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}.$$

Con base en ello, determinamos la razón de verosimilitud como sigue:

En el espacio paramétrico de probar $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ haciendo $\mu = k_1$ tenemos que el valor de σ esta dado por 3.2, luego, la razón de verosimilitud para el caso en que $\bar{x} < k_1$, $\sigma > 0$ es:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{\max_{\substack{k_1 \leq \mu_0 \leq k_2 \\ \sigma > 0}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}}{\max_{\substack{\mu \in \Omega \\ \sigma > 0}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}} \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}{n} \right]^{-n} e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{\sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]^{-n} e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \\ &= \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2}{n} \right]^{-n} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]^n \quad (3.7) \end{aligned}$$

Transformemos $\sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2$ sumando y restando \bar{x} ,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - k_1)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} - k_1 + \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - k_1)^2$$

que sustituida en el denominador de 3.7 y multiplicando por $1/\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ produce

$$\lambda(x) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - k_1)^2} \right]^n = \frac{1}{\left[1 + \frac{n(\bar{x} - k_1)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]^n} \quad (3.8)$$

haciendo en 3.8 la factorización de los cuadrados y multiplicando por $[(n-1)/(n-1)]^{1/n}$ queda

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1} \frac{n(\bar{x} - k_1)^2}{s^2}} \\ &= \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_1)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}} \right)^2 \right]^n} \end{aligned}$$

la variable

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_1)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$$

se distribuye como una t - Student con $n - 1$ grados de libertad si la hipótesis $\mu = k_1$, es cierta.

La región de rechazo es de la forma $0 \leq \lambda(x) \leq c$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n-1} \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - k_1)}{s} \right]^2} \leq c \\ 0 &\leq 1 \leq c \left[1 + \frac{1}{n-1} \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - k_1)}{s} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &\leq \left[1 + \frac{1}{n-1} \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - k_1)}{s} \right]^2 \\ \left(\frac{1}{c} - 1 \right) n - 1 &\leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - k_1)}{s} \\ \left(\frac{1}{c} - 1 \right) n - 1 &\leq \left(\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - k_1)}{s} \right)^2 \\ c_2 &\leq \left| \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - k_1)}{s} \right| \end{aligned}$$

como $\bar{x} < k_1$, se tiene

$$c_3 \leq -\frac{(\bar{x} - k_1)\sqrt{n}}{s}$$

$$c_4 \geq \frac{(\bar{x} - k_1)\sqrt{n}}{s}.$$

Haciendo

$$t_{1c} = \frac{(\bar{x} - k_1)\sqrt{n}}{s} \tag{3.9}$$

resulta que este caso define el rechazo si $t_{1c} \leq c_4$.

3er. Caso $\bar{x} > k_2$, $\sigma > 0$.

En el rango $k_1 < \mu < k_2 < \bar{x}$, la derivada de $\ln(L(x; \mu))$ respecto a μ ,

$$\frac{\partial \ln(L(x; \mu))}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) > 0 \tag{3.10}$$

es positiva, por lo que, en el intervalo (k_1, k_2) la función $L(x; \mu)$ es estrictamente creciente, y su máximo se alcanza en $\bar{x} = k_2$, de modo que, el valor de σ está dado,

haciendo $\mu = k_2$ como en 3.2 y la razón de verosimilitud es

$$\begin{aligned}
 \lambda(x) &= \frac{\max_{\substack{k_1 \leq \mu \leq k_2 \\ \sigma > 0}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2}}{\max_{\substack{k_1 \leq \mu \leq k_2 \\ \sigma > 0}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \\
 &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2}{n} \right]^{-n} e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{\sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]^{-n} e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \\
 &= \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2}{n} \right]^{-n} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2} \right]^n \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

sumando y restando \bar{x} en $\sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - k_2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} - k_2 + \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - k_2)^2$$

sustituyendo en 3.11 y multiplicando por $1 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$\lambda(x) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - k_2)^2} \right]^n = \frac{1}{\left[1 + \frac{n(\bar{x} - k_2)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]^n} \tag{3.12}$$

operando en 3.12

$$\lambda(x) = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}} \right)^2 \right]^n} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{s} \right)^2 \right]^n}$$

la variable

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$$

se distribuye como una t -Student con $n-1$ grados de libertad, cuando $\mu = k_2$.

La zona de rechazo es

$$0 \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-k_2)}{s} \right)^2} \leq d$$

como $\bar{x} > k_2$, se tiene

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{s} \geq d_1$$

y este caso produce rechazo, si

$$t_{2c} = \frac{(\bar{x} - k_2)\sqrt{n}}{s} \geq d_2. \quad (3.13)$$

Uniendo el resultado del caso 2 y el caso 3, es decir las ecuaciones 3.9 y 3.13, respectivamente, para la zona de rechazo se tiene

$$ZR = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) = t_{1c} \leq c_4\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid T(x) = t_{2c} \geq d_2\}$$

donde se debe cumplir $P_{\mu=k_1}(ZR) = P_{\mu=k_2}(ZR) = \alpha$.

Finalmente, la demostración para obtener la prueba UMPI para el contraste $\mu \in [k_1, k_2]$ frente $\mu \notin [k_1, k_2]$ con σ desconocida, no varía en esencia de la prueba para el contraste cuando se conoce la σ siempre que los desarrollos se hagan para $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$ fijos.

Por lo tanto, la docimasia $H_0 : \mu \in [k_1, k_2]$ contra $H_a : \mu \notin [k_1, k_2]$ con σ desconocida dada por la razón de verosimilitud es Uniformemente Más Potente Insesgada, UMPI, de tamaño α , siendo la zona de rechazo para el contraste del tipo $\mid T(x) \mid \geq K$, o sea, se compone de dos intervalos, $\{(T(x) \leq C_1) \cup (T(x) \geq C_2)\}$. ♣

3.2 CALCULO DE LAS CONSTANTES C_1 Y C_2 .

La expresión del estadístico utilizado para el contraste es

$$t_c = \begin{cases} 0, & \text{si } k_1 \leq \bar{x} \leq k_2, \\ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-k_1)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} & \text{si } \bar{x} < k_1, \\ \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-k_2)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} & \text{si } \bar{x} > k_2. \end{cases}$$

y la zona de rechazo está dada por $\frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{x} - k_1) < C_1$ ó $\frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{x} - k_2) > C_2$. Entonces, la zona de rechazo, ZR , de tamaño α se define como

$$ZR = \{t_{1c} < C_1 \text{ ó } t_{2c} > C_2\}$$

para k_1 y k_2 tales, $P_{H_0:\mu=k_1}(ZR) + P_{H_0:\mu=k_2}(ZR) = \alpha$. El estadístico de prueba tiene dos expresiones y por cada una de ellas, se tiene que cumplir lo anterior. Para $\mu = k_1$ se tiene

$$\alpha = P_{H_0:\mu=k_1} \left(\frac{\bar{x} - k_1}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < C_1 \text{ ó } \frac{\bar{x} - k_2}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > C_2 \right).$$

Aprovechando, el hecho, de que ambos eventos son disjuntos, se toma la probabilidad del evento compuesto como la suma de las probabilidades, queda:

$$ZR = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_1)}{s} < C_1 \text{ ó } \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{s} > C_2 \right\}$$

note que $C_1 \leq 0 \leq C_2$.

Por ello,

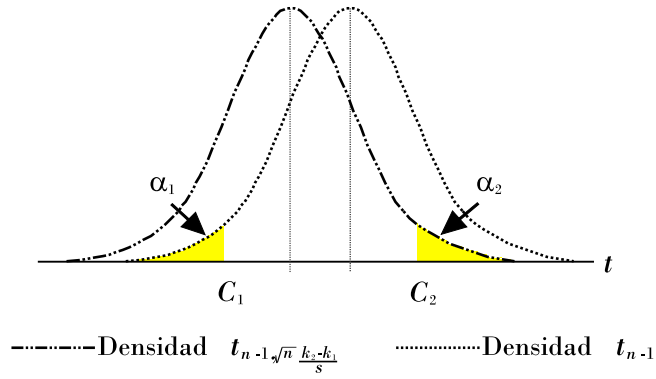
$$\begin{aligned} P_{H_0:\mu=k_1}(ZR) &= P_{H_0:\mu=k_1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_1)}{s} < C_1 \right) + P_{H_0:\mu=k_1} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{s} > C_2 \right) \\ &= P_{H_0:\mu=k_1} (t_{n-1} < C_1) + P_{H_0:\mu=k_1} \left(t_{n-1, \frac{\sqrt{n}(k_2-k_1)}{s}} > C_2 \right) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \end{aligned}$$

donde $C_1 = t_{n-1, \alpha_1}$ y $C_2 = t_{n-1, \delta, 1-\alpha_2}$ con $\delta = \frac{\sqrt{n}(k_2-k_1)}{s}$, el parametro de no centralidad de la distribución t . Similarmente, para $\mu = k_2$ tenemos

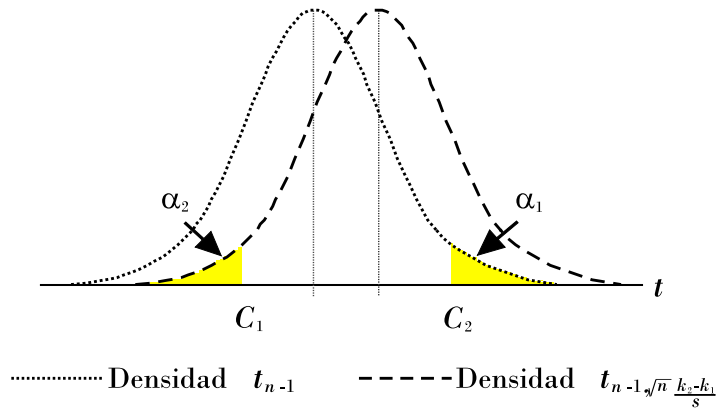
$$\begin{aligned} P_{H_0:\mu=k_2}(ZR) &= P_{H_0:\mu=k_2} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_1)}{s} < C_1 \right) + P_{H_0:\mu=k_2} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - k_2)}{s} > C_2 \right) \\ &= P_{H_0:\mu=k_2} \left(t_{n-1, \frac{\sqrt{n}(k_2-k_1)}{s}} < C_1 \right) + P_{H_0:\mu=k_2} (t_{n-1} > C_2) = \alpha_1^* + \alpha_2^* = \alpha \end{aligned}$$

donde $C_1 = t_{n-1, \delta, \alpha_1}$ y $C_2 = t_{n-1, 1-\alpha_2}$ con $\delta = \frac{\sqrt{n}(k_2-k_1)}{s}$.

Gráficamente se tiene, para $\mu = k_1$



De igual forma, para $\mu = k_2$



Igualando los términos constantes con los percentiles que les corresponden

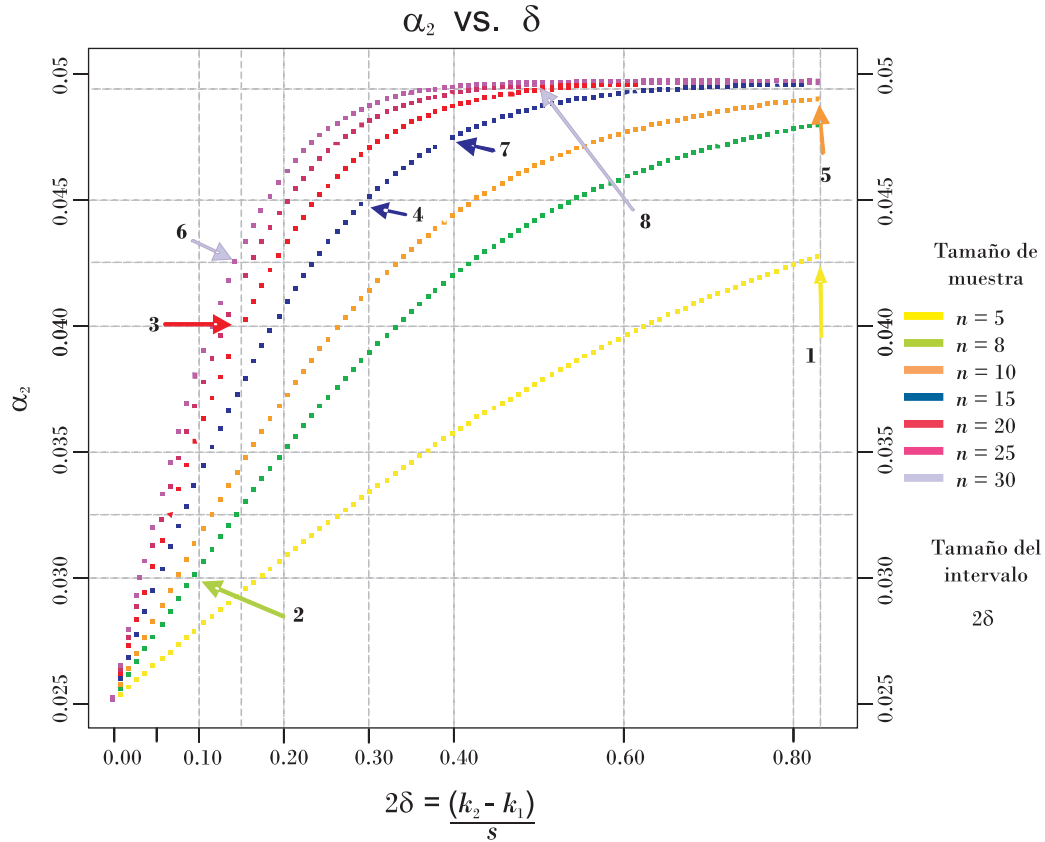
$$P(t_{n-1} < t_{n-1, \delta, \alpha_1}) + P\left(t_{n-1, \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{n}}} > t_{n-1, 1 - \alpha_2}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

Como se vió en la sección 2.2.2, el procedimiento es similar al caso de varianza conocida, sólo que ahora hay que usar la distribución t y t no central con $n - 1$ grados de libertad.

Dados, el tamaño de la muestra, la desviación estándar y el error de precisión, se fija el valor de la probabilidad de cometer error tipo I en uno de los extremos, digamos,

$\alpha_2^* = \alpha/2$ y $\alpha_1^* = \alpha - \alpha_2^*$, con $\mu_0 = \mu_1$, bajo H_0 ; se comienza a iterar con los valores de los cuantiles $t_{n-1, 1-\alpha_1^*}$ y $t_{n-1, \alpha-\alpha_2^*, \delta} = t_{\alpha_1^*}$, donde $2\delta = \frac{k_2 - k_1}{s}$ (es decir, se calculan C_1 y C_2), con respecto a la t no central, conocidas estas cuantías, se calcula la diferencia entre $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha$ si esta alcanza la precisión deseada, se obtiene la zona de rechazo, α_1 y α_2 , para el dícima, de otro modo, se continua iterando hasta alcanzarla tolerancia predefinida, al ir incrementando el extremo α_2^* .

El resultado computacional, genera el siguiente resultado gráfico:



Gráfica 3.1: ZR

La gráfica 3.1 muestra los valores específicos de α_2 , para una prueba de t , para tamaños muestrales de: 5, 8, 10, 15, 20, 25, 30. Las líneas verticales discontinuas, corresponden a diferentes valores de $2\delta = \sqrt{n} \frac{k_2 - k_1}{s}$ (tamaño del intervalo) y, las líneas horizontales discontinuas, que representan los valores de 2δ : 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45 y 0.5.

La interpretación de la gráfica 3.1, es completamente análoga, al caso con varianza cono-

cida (sección 2.2). Para $\alpha = 0.05$, en la gráfica 3 se muestra el valor de probabilidad a la derecha, α_2 , que fija al percentil de la t_{n-1, α_2} , con σ desconocida y el valor del estimador s^2 de σ^2 fijo, que se debe usar para realizar la prueba cuando $2\delta = \frac{k_2 - k_1}{s}$.

Si $\bar{x} > k_2$ la prueba se hará hacia la derecha y si $\bar{x} < k_1$ el contraste se hará hacia la izquierda.

PROCEDIMIENTO: Para cada valor $2\delta = (k_2 - k_1)\sqrt{n}/s$ tome la línea vertical que cruce a la curva de n , en el punto de cruce tome la línea horizontal que lo llevará al valor de α_2 (en la gráfica α_2), que le indica que deberá comparar el valor calculado $t_c = \frac{(\bar{x} - k_2)\sqrt{n}}{s}$ con el percentil $100(1 - \alpha_2)\%$ de t con $n - 1$ grados de libertad si $\bar{x} > k_2$ y, el valor de $t_c = -\frac{(\bar{x} - k_1)\sqrt{n}}{s}$ con el mismo percentil $100(1 - \alpha_2)$ de t_{n-1} si $\bar{x} < k_1$.

En la grafica 3.1 se aprecia que:

1. Si $2\delta = 0.8$ y $n = 5$, se debe emplear $\alpha_2 = 0.0425$, el percentil 95.75% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$, (punto "1" en la gráfica 3).
2. Si $2\delta = 0.1$ y $n = 8$, se debe usar $\alpha_2 = 0.03$ lo que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 97% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$, (punto "2" en la gráfica 3).
3. Si $2\delta = 0.15$ y $n = 20$ tenemos, $\alpha_2 = 0.04$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 96% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$, (punto "3" en la gráfica 3, etc.).
4. Para $2\delta = 0.3$ y $n = 15$, entonces $\alpha_2 = 0.045$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.55% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$.
5. Con $2\delta = 0.85$ y $n = 10$, entonces $\alpha_2 = 0.049$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.10% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$.
6. Y si $2\delta = 0.15$ y $n = 30$, tenemos $\alpha = 0.0425$, prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.75% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$.
7. Si $2\delta = 0.4$ y $n = 15$, obtenemos $\alpha_2 = 0.0475$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.25% de $t_{n-1, 1-\alpha_2}$; etc.
8. Finalmente, cuando $2\delta \geq 0.5$ y $n = 30$ tenemos, $\alpha_2 = 0.05$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 95% de t_{n-1, α_1} .

Algunos casos más, no numerados en la gráfica 3.1, se dan a continuación:

- Si $n = 5$ y $2\delta = 0.1$ tenemos, $\alpha_2 = 0.028$ empleando la prueba unilateral a la derecha con el percentil 97.2% de t_{n-1, α_1} .

- Así, si $n = 8$ y $2\delta = 0.05$, se debe usar $\alpha_2 = 0.0275$, se emplea el percentil $t_{n-1, 0.9725\%}$.
- Con $2\delta = 0.15$, para $n = 8$, la zona de rechazo sería, $\alpha_2 = 0.0325$, el percentil $t_{n-1, 0.9675\%}$.
- Para el caso con $2\delta = 0.2$ y $n = 10$ la zona de rechazo sería, $\alpha_2 = 0.037$, tomando el percentil $t_{n-1, 0.963\%}$.
- Si fuese $2\delta = 0.15$ y $n = 25$ obtendríamos una zona de rechazo de $\alpha_2 = 0.043$ con el percentil $t_{n-1, 0.957\%}$.
- Y para $2\delta = 0.1$ y $n = 25$, el valor de será $\alpha_2 = 0.037$ y el percentil $t_{n-1, 0.957\%}$.

Adviértase, que con $2\delta \geq 0.5$ y $n \geq 25$, la zona de rechazo sería, $\alpha = 0.05$, debiéndose tratar como una prueba unilateral a la derecha convencional.

**PRUEBA UMPI CON HIPÓTESIS
NULA COMPUESTA CONTRA
ALTERNATIVA BILATERAL CON σ
VARIANZA COMÚN CONOCIDA PARA
DOS POBLACIONES NORMALES.**

En el Capítulo II y III, se presentó la prueba de hipótesis con nula central compuesta y alternativa bilateral, con varianza conocida y desconocida, respectivamente, sobre de la media de una distribución Normal. En este apartado consideraremos la comparación de dos poblaciones Normales.

4.1 ZONA DE RECHAZO PARA UNA HIPÓTESIS NULA COMPUESTA FRENTE ALTERNATIVA BILATERAL DOS POBLACIONES NORMALES.

Definición 4.1.1. *En dos distribuciones Normales, $N(\mu_X, \sigma)$ y $N(\mu_Y, \sigma)$ con varianzas poblacionales conocidas e iguales, se establece la hipótesis del tipo $H_0 : |\mu_X - \mu_Y| \leq \delta$ frente $H_a : |\mu_X - \mu_Y| > \delta$. Para llevar a cabo el contraste se toman dos muestras aleatorias simples e independientes entre sí, de tamaños n y m , con $N = n + m$, $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y(y_1, y_2, \dots, y_m)$, respectivamente.*

Nuevamente se recurrirá a la razón de verosimilitud y al contraste insesgado, para obtener

el método de prueba.

Proposición 4.1.1. Sean x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_m dos muestras aleatorias de $x \sim N(\mu_x; \sigma)$ e $y \sim N(\mu_y; \sigma)$, con $\sigma > 0$ conocida. Para probar $H_0 : |\mu_y - \mu_x| \leq \delta$ frente $H_a : |\mu_y - \mu_x| > \delta$ con nivel de significación, α , la razón de verosimilitud para el contraste produce la prueba

$$ZR = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m | T(x, y) \leq C_1\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m | T(x, y) \geq C_2\}$$

, con $C_1 < C_2$ donde $T(x, y) = \bar{y} - \bar{x}$

$$P_{\mu_y = \mu_x - \delta}(ZR) = P_{\mu_y = \mu_x + \delta}(ZR) = \alpha/2.$$

Demostración. Tenemos dos muestras independientes por lo que la función de verosimilitud conjunta es igual al producto de las funciones de verosimilitud de cada muestra

$$\begin{aligned} L(x, y; \mu_x, \mu_y) &= L(x, \mu_x)L(y, \mu_y) \\ &= f(x_1, \mu_1) \cdots f(x_n, \mu_n)f(y_1, \mu_1) \cdots f(y_m, \mu_m) \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y)^2}{\sigma^2} \right)} \end{aligned}$$

con $-\infty \leq \mu_x \leq \infty$, $-\infty \leq \mu_y \leq \infty$

Aplicando logaritmo neperiano $Q = \ln(L(x, y; \mu_x, \mu_y))$

$$Q = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - N \ln \sigma - \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y)^2}{\sigma^2} \right) \quad (4.1)$$

Para obtener el máximo de Q en $(\Omega_X \times \Omega_Y)$ se obtienen las derivadas parciales respecto μ_x y μ_y de (4.1) y se igualan a 0, llegando a

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y) = 0 \quad (4.3)$$

despejando a μ_x y μ_y en (4.2) y (4.3), tenemos que los valores que hacen máxima la función de verosimilitud en el espacio paramétrico total, son

$$\sum_{i=1}^n (x_i) = n\mu_x \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \mu_x = \bar{x} \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m (y_i) = m\mu_y \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \mu_y = \bar{y} \quad (4.5)$$

Para maximizar Q bajo $H_0 : |\mu_x - \mu_y| \leq \delta$ conviene escribir $\mu_y = \mu_x + a$, $-\infty \leq a \leq \infty$ y bajo $H_0 : |a| \leq \delta$ se tiene

$$Q_a = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - N \ln \sigma - \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_x - a)^2}{\sigma^2} \right) \quad (4.6)$$

La derivadas de Q_a con respecto de μ_x y a son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_a}{\partial \mu_x} &= -\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x} - \mu_x) + \frac{m}{\sigma^2}(\bar{y} - \mu_x - a) \\ \frac{\partial Q_a}{\partial a} &= \frac{m}{\sigma^2}(\bar{y} - \mu_x - a) \end{aligned}$$

De la maximización sin restricciones se sabe que el máximo de Q ocurre en $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \bar{y}$. Sea $b = \bar{y} - \bar{x}$, así el máximo de Q_a ocurre en $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \mu_x + b$ y ello implica que Q_a es creciente cuando $\mu_y = \mu_x + a$ con $a < b$, entonces haciendo $\mu_x = \bar{x}$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial \mu_x} = \frac{n}{\sigma^2}(x_i - \mu_x) + \frac{m}{\sigma^2}(y_i - \mu_x - a) = 0 + \frac{m}{\sigma^2}(y_i - \mu_x - a) = \frac{m}{\sigma^2}(\bar{y} - \bar{x} - a) = \frac{m}{\sigma^2}(b - a) > 0$$

Respecto a a también la pendiente es creciente, ya que $\frac{\partial^2 Q_a}{\partial a^2}$ es el segundo término de $\frac{\partial Q_a}{\partial \mu_x}$. Q_a es decreciente cuando $\mu_y = \mu_x + a$ con $a > b$, $\frac{\partial Q_a}{\partial \mu_x} = \frac{m}{\sigma^2}(b - a) < 0$

Entonces, el máximo de Q_a en $|\mu_x - \mu_y| \leq \delta$ se revisa para los casos siguientes:

1. $\bar{y} - \bar{x} = b$ con $-\delta \leq b \leq \delta$ entonces $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \bar{y}$ cumple con $|\mu_y - \mu_x| = |\bar{y} - \bar{x}| \leq \delta$.

2. $\bar{y} - \bar{x} < -\delta$ con $|\mu_x - \mu_y| \leq \delta$, $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \bar{x} + a$ esto forza que $|\mu_y - \mu_x| = |\bar{x} - \bar{x} + a| = |a| \leq \delta$, es decir, $-\delta \leq a \leq \delta$, de la primera restricción, $\bar{y} - \bar{x} = b < -\delta$, tenemos $\bar{y} - \bar{x} < -\delta$ lleva a que $\bar{y} - \bar{x} = b$ y $\mu_y = \bar{x} + a$ con $-\delta \leq a \leq \delta$ para $b < -\delta$. Como la función a maximizar es creciente en $(-\infty, b)$ y decreciente en $[b, \infty)$, en especial en $[b, \delta]$ el máximo se obtiene en $a = -\delta$ y $\mu_y = \bar{x} - \delta$.

3. $\bar{y} - \bar{x} > \delta$ con $|\mu_x - \mu_y| \leq \delta$, $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \bar{x} + a$ esto forza que $|\mu_y - \mu_x| = |\bar{x} - \bar{x} + a| = |a| \leq \delta$, $-\delta \leq a \leq \delta$, empleando la primera restricción, $\bar{y} - \bar{x} = b > \delta$, tenemos $\bar{y} - \bar{x} > \delta$ lleva a que $\bar{y} - \bar{x} = b$ y $\mu_y = \bar{x} + a$ con $-\delta \leq a \leq \delta$ para $b > \delta$. Como la función a maximizar es creciente en $(-\infty, b)$ y decreciente en $[b, \infty)$, en especial en $[b, \delta]$ el máximo se obtiene en $a = \delta$ y $\mu_y = \bar{x} + \delta$.

Los resultados anteriores se utilizan para maximizar

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \max_{|\mu_x - \mu_y| \leq \delta} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y)^2}{\sigma^2} \right)} \\ &= \max_{|\mu_x - \mu_y| \leq \delta} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y)^2}{\sigma^2} \right)}. \end{aligned}$$

1er. Caso Si $|\bar{y} - \bar{x}| \leq \delta$, entonces

$$\lambda(x, y) = \frac{\max_{|\mu_x - \mu_y| \leq \delta} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y)^2}{\sigma^2} \right)}}{\max_{\mu \in \Omega} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_y)^2}{\sigma^2} \right)}} = 1$$

2do. Caso Si $\bar{y} - \bar{x} = b$, con $b < -\delta$, entonces $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \bar{x} - \delta$,

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \frac{\max_{|\mu_x - \mu_y| \leq \delta} L(x, y, \mu_x, \mu_y)}{\max_{\mu \in \Omega} L(x, y, \mu)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - (\bar{x} - \delta))^2}{\sigma^2} \right)}}{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \right)}} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - (\bar{x} - \delta))^2}{\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^m [y_i^2 - 2y_i(\bar{x} - \delta) + (\bar{x} - \delta)^2] - \sum_{i=1}^m [y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2] \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^m [y_i^2 - 2y_i(\bar{x} - \delta) + y_i(\bar{x} - \delta)^2 - y_i^2 + 2y_i\bar{y} - \bar{y}^2] \right)} \\ &= e^{-\frac{m}{2\sigma^2} [(\bar{x} - \delta)^2 - 2\bar{y}(\bar{x} - \delta) + \bar{y}^2]} = e^{-\frac{m}{2\sigma^2} [\bar{y} - (\bar{x} - \delta)]^2} \leq c \end{aligned}$$

aplicando logaritmos

$$\begin{aligned} &= -\frac{m}{2\sigma^2} [\bar{y} - \bar{x} + \delta]^2 \leq \ln c \\ &(\bar{y} - \bar{x} + \delta)^2 \geq -\frac{2\sigma^2 \ln c}{m} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$|\bar{y} - \bar{x} + \delta| \geq C'.$$

Como $\bar{y} - \bar{x} < -\delta$ el valor absoluto produce $\bar{x} - \bar{y} - \delta \leq C_1$ y escribimos

$$-(\bar{y} - \bar{x} + \delta) \geq C'. \quad (4.7)$$

3er. Caso Si $\bar{y} - \bar{x} = b$, con $b > \delta$, entonces $\mu_x = \bar{x}$ y $\mu_y = \bar{x} + \delta$. Procediendo de

manera semejante al caso anterior, determinamos, la razón de verosimilitud.

$$\begin{aligned}
 \lambda(x, y) &= \frac{\max_{|\mu_x - \mu_y| \leq \delta} L(x, y, \mu_x, \mu_y)}{\max_{\mu \in \Omega} L(x, y, \mu)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - (\bar{x} + \delta))^2}{\sigma^2} \right)}}{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \right)}} \\
 &= e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - (\bar{x} + \delta))^2}{\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \right)} \\
 &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^m [y_i^2 - 2y_i(\bar{x} + \delta) + (\bar{x} + \delta)^2 - (y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2)] \right)} \\
 &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^m [y_i^2 - 2y_i(\bar{x} + \delta) + y_i(\bar{x} + \delta)^2 - y_i^2 + 2y_i\bar{y} - \bar{y}^2] \right)} \\
 &= e^{-\frac{m}{2\sigma^2} [(\bar{x} + \delta)^2 - 2\bar{y}(\bar{x} + \delta) + \bar{y}^2]} = e^{-\frac{m}{2\sigma^2} [\bar{y} - (\bar{x} + \delta)]^2} \leq d
 \end{aligned}$$

aplicando logaritmos

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{m}{2\sigma^2} [\bar{y} - (\bar{x} + \delta)]^2 \leq \ln d \\
 (\bar{y} - \bar{x} - \delta)^2 &\geq -\frac{2\sigma^2 \ln d}{m}
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$|\bar{y} - \bar{x} - \delta| \geq D. \quad (4.8)$$

Como $\bar{y} - \bar{x} > \delta$ y el valor absoluto produce $\bar{y} - \bar{x} - \delta \geq D$.

Por lo tanto, la zona de rechazo de tamaño α sucede cuando se considera la unión de los eventos 4.7 y 4.8

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m | T(x, y) \leq -C\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m | T(x, y) \geq C\}$$

o equivalentemente

$$ZR = \{\bar{y} - \bar{x} + \delta \leq C_1 \text{ ó } \bar{y} - \bar{x} - \delta \geq C_2\}.$$

Conviene usar

$$ZR = \left\{ \frac{\bar{y} - \bar{x} + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq C_1 \text{ ó } \frac{\bar{y} - \bar{x} - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \geq C_2 \right\}.$$

ya que $\bar{x} \sim N(\mu_x; \sigma^2/n)$, $\bar{y} \sim N(\mu_y; \sigma^2/m)$ y $\bar{y} - \bar{x} \sim N(\mu_y - \mu_x; \sigma^2(1/n + 1/m))$, es decir,

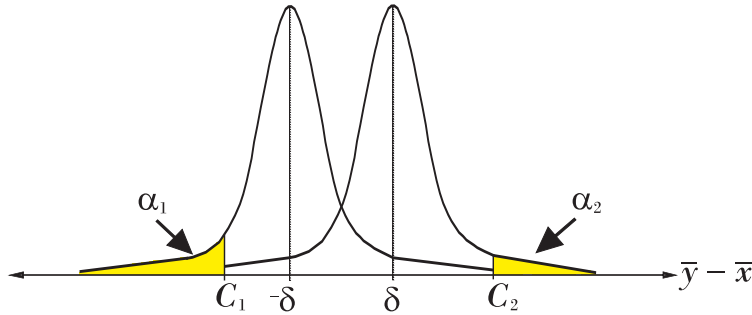
$$\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1)$$

formalmente nuestra zona de rechazo de tamaño α es de la forma:

$$ZR = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m | (T(x, y) \leq C_1)\} \cup \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m | (T(x, y) \geq C_2)\}.$$

♣

Gráficamente se tiene:



Ahora demostraremos que esta prueba es Uniformemente Más Potente Insesgada, UMPI.

Se procede a ver que $T(x, y)$ es suficiente, usando el criterio de factorización de Fisher-Neyman, se debe cumplir que

$$L(x, y, \mu_x, \mu_y) = g(T(x, y); \mu_x, \mu_y) \cdot H(x, y)$$

De este modo tenemos

$$\begin{aligned} L(x, y, \mu_x, \mu_y) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_y)^2} \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left[\sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} \mu_x^2} e^{-\frac{\mu_x}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i} \sigma^{-m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i^2} e^{-\frac{m}{2\sigma^2} \mu_y^2} e^{-\frac{\mu_y}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

podemos identificar los siguientes componentes de 4.9

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N H(x, y) &= \prod_{i=1}^n h(x) \prod_{i=1}^m h(y) = \left((2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \left((2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sigma^{-N} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{i=1}^m y_i^2} \right) \\ [c(\mu_x, \mu_y)]^N &= \left(e^{-\frac{n}{2\sigma_x^2} \mu_x^2} \right) \left(e^{-\frac{m}{2\sigma_y^2} \mu_y^2} \right) \quad y \\ e^{q(\mu_x)T(x)} e^{q(\mu_y)T(y)} &= \left(e^{-\frac{\mu_x}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n x_i} \right) \left(e^{-\frac{\mu_y}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^m y_i} \right) \end{aligned}$$

entonces, se puede escribir la función de verosimilitud conjunta en la forma

$$f_{\mu}(x, y) = \prod_{i=1}^n [c(\mu_x, \mu_y)]^N e^{q(\mu_x)T(x)} e^{q(\mu_y)T(y)} H(x, y) \quad (4.10)$$

y por lo tanto, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ y $T(y) = \sum_{i=1}^m y_i$ son estadísticos suficientes para μ_x y μ_y y la

razón de verosimilitud en términos de el estadístico $T(x, y) = \left(T(x) = \sum_{i=1}^n x_i, T(y) = \sum_{i=1}^m y_i \right)$ es

$$\lambda(x, y) = \frac{L(x, y, \mu_x, \mu_y)}{L(x, y, \mu)} = \frac{g(x, y, \mu_0)H(x, y)}{g(x, y, \mu)H(x, y)} \lambda[T(x, y)]$$

como $\sigma_x, \sigma_y > 0$, en 4.10 $q(\mu_x), q(\mu_y) > 0$, de manera que es creciente, por lo que, $L(x, y, \mu_x, \mu_y)$ pertenece a la familia de distribución exponencial con razón de verosimilitud monótona creciente de $T(x, y)$.

Por último, se debe analizar las propiedades del contraste en la frontera de H_0 , en $\{\mu_y = \mu_x - \delta\} \cup \{\mu_y = \mu_x + \delta\}$.

Si hacemos $\mu^* = \mu_y - \mu_x$ podemos escribir la dócima anterior en la forma $H_0 : |\mu^*| \leq \delta$ contra $H_a : |\mu^*| > \delta$, y el teorema 2.1.1 es aplicable directamente. Entonces, existe una sucesión de funciones, $\phi^* \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$, que definen a la zona de rechazo y cumplen con $\int \phi f_1 d\mu_x d\mu_y \leq \alpha_1$, $\int \phi f_2 d\mu_x d\mu_y \leq \alpha_2$ para todo $\phi \in \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ que tienden al $\sup_{\phi} \int \phi^* f_3 d\mu_x d\mu_y$

tales, que $\int \phi_{n_i} f_{n_i} d\mu_x d\mu_y \rightarrow \int \phi f_3 d\mu_x d\mu_y = \alpha_0$ para $\phi \in \mathcal{C}$ e $i = 1, 2$ y, existen constantes k_1 y k_2 tales, que $f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ para $k_1, k_2 > 0$, donde la zona de rechazo de la función de rechazo, $\phi(x)$, que maximiza a $\int \phi f_3 d\mu_x d\mu_y$ es de la forma

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \text{ para } k_1, k_2 > 0 \\ 0 & \text{si } f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{cases}$$

(Teorema 2.1.1 parte I y II). Como la ZR satisface la condición II del teorema 2.1.1, entonces maximiza a $\int \phi f_3 d\mu_x d\mu_y$ entre las funciones que satisfacen $\int \phi f_1 d\mu_x d\mu_y \leq$

$\alpha_1, \int \phi f_2 d\mu_x d\mu_y \leq \alpha_2$. Por último, de la sección IV del teorema, existen conjunto, M y N , de la forma

$$M = \left\{ \iint \phi(x, y) f_1(x, y) dx dy, \iint \phi(x, y) f_2(x, y) dx dy : \phi \text{ es la función de rechazo} \right\} \text{ y}$$

$$N = \left\{ \iint \phi(x, y) f_1(x, y) dx dy, \iint \phi(x, y) f_2(x, y) dx dy, \iint \phi(x, y) f_3(x, y) dx dy \right\}$$

cerrados (teorema de compacidad débil) y convexos; puesto que $\gamma\phi_1 + (1-\gamma)\phi_2$ es función de rechazo para $0 \leq \gamma \leq 1$; como existen k_1, k_2 y $\int \phi f_1 d\mu_x d\mu_y = \alpha_1, \int \phi f_2 d\mu_x d\mu_y = \alpha_2$; la ZR que maximiza $P_{f_3}(ZR)$ con $ZR = \{f_3(x) \geq k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\}$ siempre que cumpla con $\int \phi f_1 d\mu_x d\mu_y = \alpha_1, \int \phi f_2 d\mu_x d\mu_y = \alpha_2$, lo que lleva al caso trivial de que $f_3 = k_1 f_1 + k_2 f_2$, es decir,

$$\iint \phi(x, y) f_3(x, y) dx dy = k_1 \iint \phi(x, y) f_1(x, y) dx dy + k_2 \iint \phi(x, y) f_2(x, y) dx dy$$

para todo ϕ , con probabilidad 1.

Finalmente, sabemos que existe la ZR para el contraste $H_0 : |\mu^*| \leq \delta$ contra $H_a : |\mu^*| > \delta$, con $\mu^* = \mu_y - \mu_x$. En el capítulo II se vio que la ZR para este contraste, derivada de relación de verosimilitud, viene dada por la demostración del teorema 2.1.2, que es la prueba complementaria a este contraste. De manera que, existen k_1, k_2 y ϕ_0 tales, que $\phi_0(T(x, y))$ satisface $\int \phi_0 f_{\mu_x} d\mu_x d\mu_y = \int \phi_0 f_{\mu_y} d\mu_x d\mu_y = \alpha$ y

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 [c(\mu_x)]^n e^{q(\mu_x, \mu_y)T(x, y)} + k_2 [c(\mu_y)]^m e^{q(\mu_x, \mu_y)T(x, y)} < [c(\mu')]^N e^{q(\mu')T(x, y)} \\ 0 & \text{si } k_1 [c(\mu_x)]^n e^{q(\mu_x, \mu_y)T(x, y)} + k_2 [c(\mu_y)]^m e^{q(\mu_x, \mu_y)T(x, y)} > [c(\mu')]^N e^{q(\mu')T(x, y)} \end{cases}$$

(por parte IV del teorema 2.1.1) y resulta $UMPI$ (teorema 2.1.1, parte iii) sujeta a $\int \phi_0 f_{\mu_x} d\mu_x d\mu_y = \int \phi_0 f_{\mu_y} d\mu_x d\mu_y \leq \alpha$. Determinándose con ello, la prueba $UMPI$ para probar $H_0 : |\mu^*| \leq \delta$ contra $H_a : |\mu^*| > \delta$.

Remitiendonos al teorema 2.1.3 y generalizandolo tenemos

Teorema 4.1.1. *Para probar las hipótesis $H_0 : |\mu^*| \geq \delta$ contra $H_a : |\mu^*| < \delta$, con nivel de significación α , con $\mu_x < \mu_y$ y $\mu^* = \mu_y - \mu_x$ en el caso de una distribución Normal con un parámetro*

I. *Existe una prueba UMP dada por*

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 < T(x, y) < k_2, k_1 < k_2 \\ 0 & \text{si } k_1 \geq T(x, y) \text{ ó } T(x, y) \geq k_2 \end{cases}$$

$$\text{con } \int \phi(x, y) f(x, y; \mu_x) d\mu_x d\mu_y = \int \phi(x, y) f(x, y; \mu_2) d\mu_x d\mu_y = \alpha \text{ y } T(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^m Y_i.$$

II. La prueba satisface la relación $\int \phi(x, y) f(x, y; \mu_x, \mu_y) d\mu_x d\mu_y < \alpha$ para toda $\mu < k_1$ o $\mu > k_2$ sujeta a $\int \phi(x, y) f(x, y; \mu_x) d\mu_x d\mu_y = \int \phi(x, y) f(x, y; \mu_y) d\mu_x d\mu_y = \alpha$.

III. Para $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que existe, $\mu \in (\mu_x, \mu_y)$ en donde la función dada por la integral $h(\mu_x, \mu_y) = \int \phi(x, y) f(x, y; \mu_x, \mu_y) d\mu_x d\mu_y$ alcanza su valor máximo en μ_0 , lo que implica que $h(x, y)$ es creciente antes de μ_0 y después de μ_0 es decreciente.

La prueba del teorema 4.1.1 es completamente análoga a la prueba del teorema 2.1.2 del capítulo II, donde se demostró que es UMPI. Entonces, sin limitar la generalidad, la prueba UMPI para contrastar la hipótesis $H_0 : |\mu_y - \mu_x| \geq \delta$ contra $H_a : |\mu_y - \mu_x| < \delta$ (es decir, $H_0 : \{\mu_y < \mu_x - \delta \text{ ó } \mu_y > \mu_x + \delta\}$ contra $H_a : \{-\delta \leq \mu \leq \delta\}$), entre aquellos que satisfacen $\int \phi(x, y) f(x, y; \mu_x) d\mu_x d\mu_y = \int \phi(x, y) f(x, y; \mu_y) d\mu_x d\mu_y = \alpha$, se obtiene al tomar, nuevamente, $1 - \phi(x)$, para la dócima del teorema 4.1.2.

Se ha propuesto que en este tipo de contrastes la zona de rechazo se compone de dos intervalos que son $\{T(x, y) \leq -C \text{ ó } T(x, y) \geq C\}$, donde $T(x, y)$ es la estadística de prueba $\bar{y} - \bar{x}$ y $C > 0$.

La prueba está dada por la proposición 4.1.1 como $\{\bar{y} - \bar{x} \leq -C \text{ ó } \bar{y} - \bar{x} \geq C\}$, que lleva al estadístico $-\bar{y} + \bar{x} - \delta \leq -C \text{ ó } \bar{y} - \bar{x} + \delta \geq C$ con C que cumple con

$$P_{H_0: \mu_y - \mu_x = -\delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq C_1 \right) + P_{H_0: \mu_y - \mu_x = -\delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \geq C_2 \right) = \alpha$$

y

$$P_{H_0: \mu_y - \mu_x = \delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq C_1 \right) + P_{H_0: \mu_y - \mu_x = \delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \geq C_2 \right) = \alpha$$

4.2 APROXIMACIÓN PARA EL CALCULO DE LAS VARIABLES C_1 Y C_2 .

El proceso lleva a un sistema de ecuaciones que no tiene solución cerrada, pero, implementaremos un método numérico para obtener los valores de C_1 y C_2 .

Desarrollando las ecuaciones para la probabilidad de la zona de rechazo, ZR , en μ_x y μ_y se tiene

$$P_{H_0:\mu_y-\mu_x=-\delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq C_1 \right) + P_{H_0:\mu_y+\mu_x=-\delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \geq C_2 \right) = \alpha$$

$$P_{H_0:\mu_y-\mu_x=-\delta} \left(Z \leq \frac{C_1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) + P_{H_0:\mu_y+\mu_x=-\delta} \left(Z \geq \frac{C_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) = \alpha$$

Igualando los términos constantes con los percentiles que les corresponden, y aprovechando que son dos eventos disjuntos, se toma la probabilidad del evento compuesto como la suma de las probabilidades, queda

$$P_{H_0:\mu_y-\mu_x=-\delta} \left(Z \leq \frac{C_1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) = \alpha_1 \quad \text{y} \quad P_{H_0:\mu_y-\mu_x=-\delta} \left(Z \geq \frac{C_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) = \alpha_2$$

despejando obtenemos

$$Z_{\alpha_1} = \frac{C_1 - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{N}{nm}}} = \alpha_1 \quad \text{y} \quad Z_{1-\alpha_2} = \frac{C_2 - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{N}{nm}}} = \alpha_2$$

tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Análogamente, por simetría, sea

$$P_{H_0:\mu_y-\mu_x=\delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq C_1 \right) + P_{H_0:\mu_y-\mu_x=\delta} \left(\frac{\bar{y} - \bar{x} - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \geq C_2 \right) = \alpha$$

$$P_{H_0:\mu_y-\mu_x=\delta} \left(Z \leq \frac{C_1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) + P_{H_0:\mu_y-\mu_x=\delta} \left(Z \geq \frac{C_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) = \alpha$$

Procediendo a igualar los términos constantes con los percentiles correspondientes, y como son dos eventos disjuntos, se toma la probabilidad del evento compuesto como la suma de las probabilidades, queda

$$P_{H_0:\mu_y-\mu_x=\delta} \left(Z \leq \frac{C_1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) = \alpha_1 \quad \text{y} \quad P_{H_0:\mu_y-\mu_x=\delta} \left(Z \geq \frac{C_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right) = \alpha_2$$

despejando obtenemos

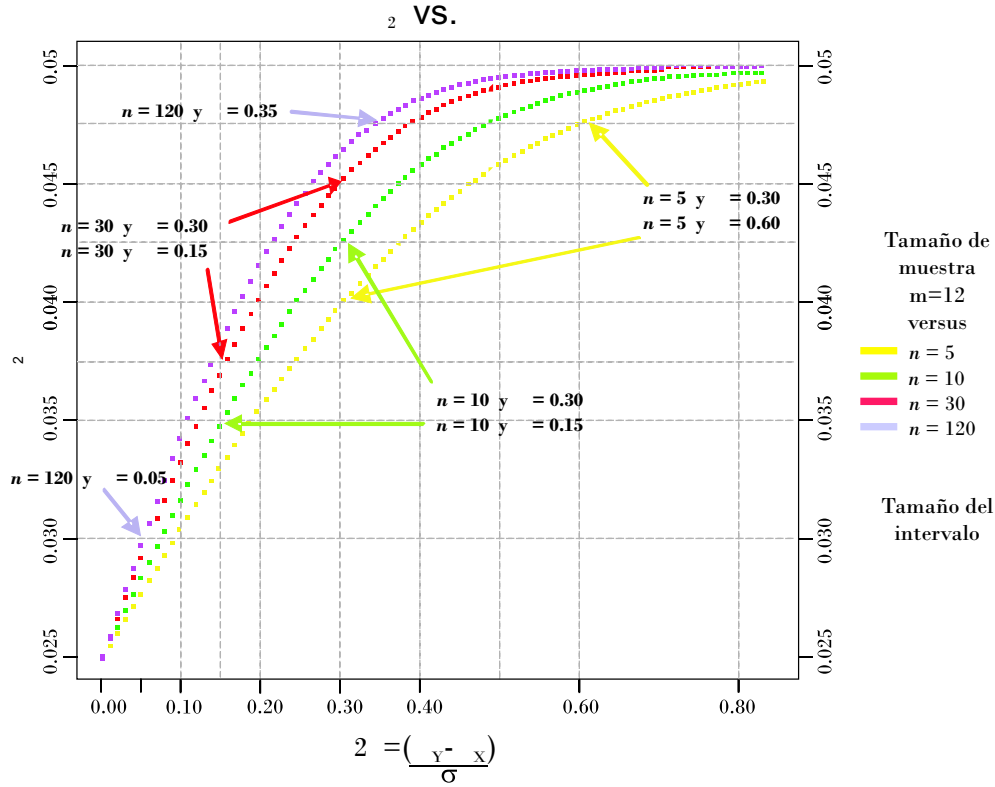
$$Z_{1-\alpha_1} = \frac{C_1 + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{N}{nm}}} = \alpha_1 \quad \text{y} \quad Z_{\alpha_2} = \frac{C_2 + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{N}{nm}}} = \alpha_2$$

tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

El algoritmo para encontrar iterativamente los valores de C_1 y C_2 dependientes de α_1 y α_2 , siguen un procedimiento completamente similar al de la sección 2.2 donde se presentó el algoritmo para el contraste de una población Normal con varianza conocida. Únicamente, hay que modificar ligeramente este al incluir el tamaño m de la muestra y , es decir, el valor que hay que usar para esta prueba en el denominador ahora es $\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$.

La implementación y ejecución computacional para esta prueba genera los siguientes resultados gráficos para diversos tamaños de muestra de $n = \{5, 10, 15, 20, 30, 60, 120\}$ y $m = \{12, 22, 32, 42, 55, 75, 100, 200\}$.

A continuación se analiza, con cierto detalle, el caso $m = 12$ frente $n = \{5, 10, 15, 20, 30, 60, 120\}$.



Gráfica 4.1: ZR

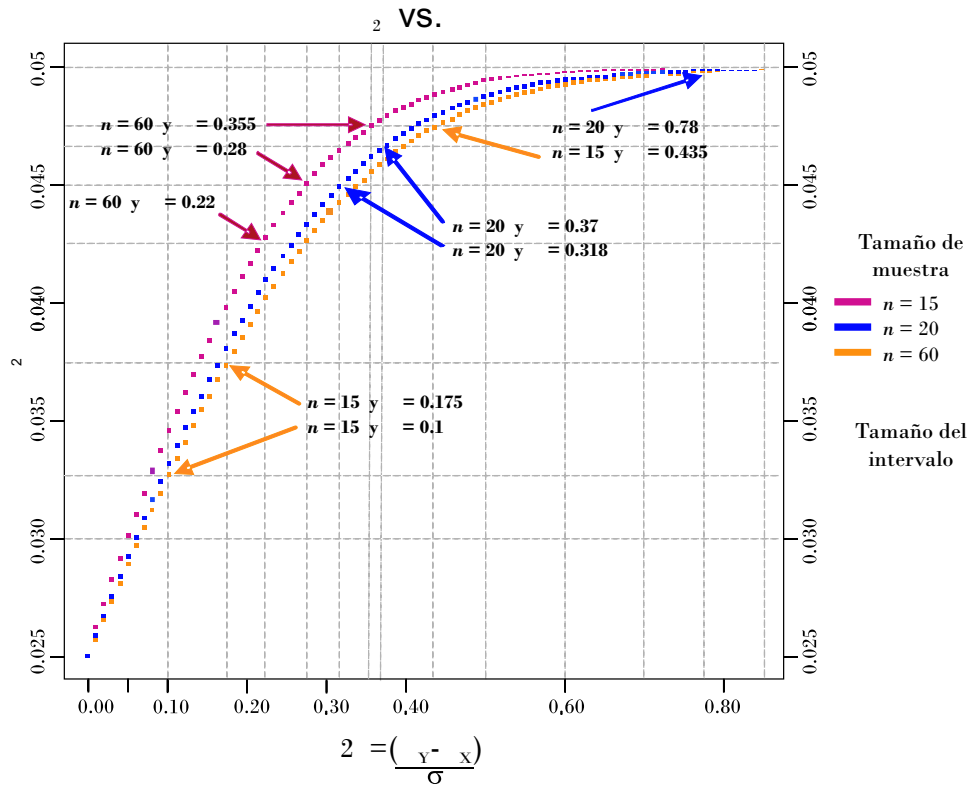
Para $\alpha = 0.05$, en la gráfica 4.1, se muestra Alfa (α), valor de probabilidad a la derecha que, fija al percentil de la Normal estándar que se debe usar para realizar la prueba cuando $2\delta = (\mu_y - \mu_x)/(\sigma)$, si $\bar{y} - \bar{x} > \delta$ la prueba se hará hacia la derecha, si $\bar{y} - \bar{x} < -\delta$ el contraste será hacia la izquierda. Para la prueba a la derecha se usa $Z_C = \frac{\bar{y} - \bar{x} - \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$ y para el test a la izquierda se emplea $Z_C = -\frac{\bar{y} - \bar{x} + \delta}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$ y se compara en ambos casos con el percentil $Z_{1-\alpha_2}$. El uso de esta se ilustra con los siguientes ejemplos:

Si $\bar{y} - \bar{x} > \delta$ la prueba se hará hacia la derecha.

- Si $2\delta \geq 0.05$ con $n = 120$ y $m = 12$, produce una prueba unilateral a la derecha con $\alpha_2 = 0.03$ y el percentil 97% de Z ,
- Si $2\delta = 0.15$ y, $n = 10$ y $m = 12$, obtenemos $\alpha_2 = 0.035$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.5% de Z .

- Con $2\delta = 0.3$, $n = 10$ y $m = 12$, entonces $\alpha_2 = 0.0425$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.75% de Z .
- Para $2\delta = 0.15$ y $n = 30$ y $m = 12$, entonces $\alpha_2 = 0.0375$, que produce una prueba unilateral a la derecha con el percentil 96.25% de Z .
- Si $2\delta = 0.3$ y $n = 30$ y $m = 12$ tenemos, $\alpha_2 = 0.045$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.5% de Z .
- Si $2\delta = 0.3$, $n = 5$ y $m = 12$ tenemos, $\alpha_2 = 0.04$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 96% de Z .
- Si $2\delta = 0.6$, $n = 5$ y $m = 12$ tenemos, $\alpha_2 = 0.0475$ con la prueba unilateral a la derecha con el percentil 95.25% de Z .

Advierta, el caso cuando $2\delta = 0.6$, $n \geq 120$ y $m = 12$, se debe usar $\alpha = 0.05$ como la prueba convencional unilateral a la derecha con el percentil 95% de Z . También, el caso si $2\delta = 0.8$, $n = 30$ y $m = 12$, tenemos $\alpha_2 = 0.05$, prueba unilateral a la derecha con el percentil 95% de Z ; etc.



Gráfica 4.2: ZR

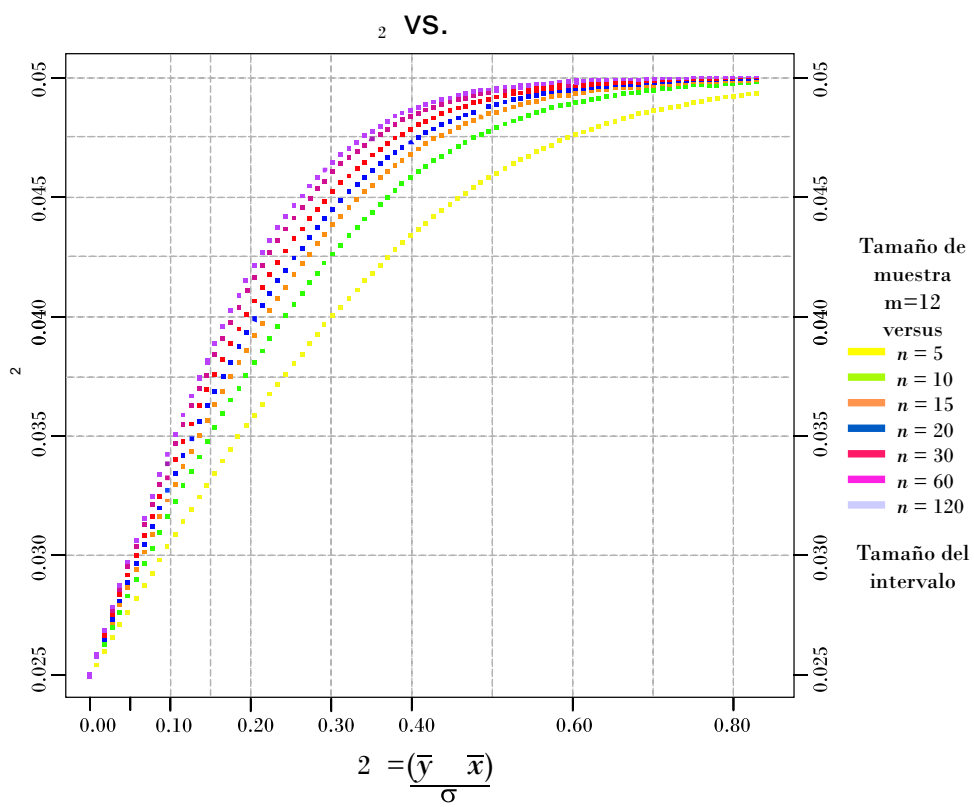
En la gráfica 4.2 se ve que:

Cuando $n = 15$, $m = 12$ y $\delta \geq 0.85$, o $n = 20$, $m = 12$ y $2\delta \geq 0.85$, o $n = 60$, $m = 12$ y $2\delta \geq 0.75$, se usa la prueba ordinaria unilateral derecha con $\alpha = 0.05$. También

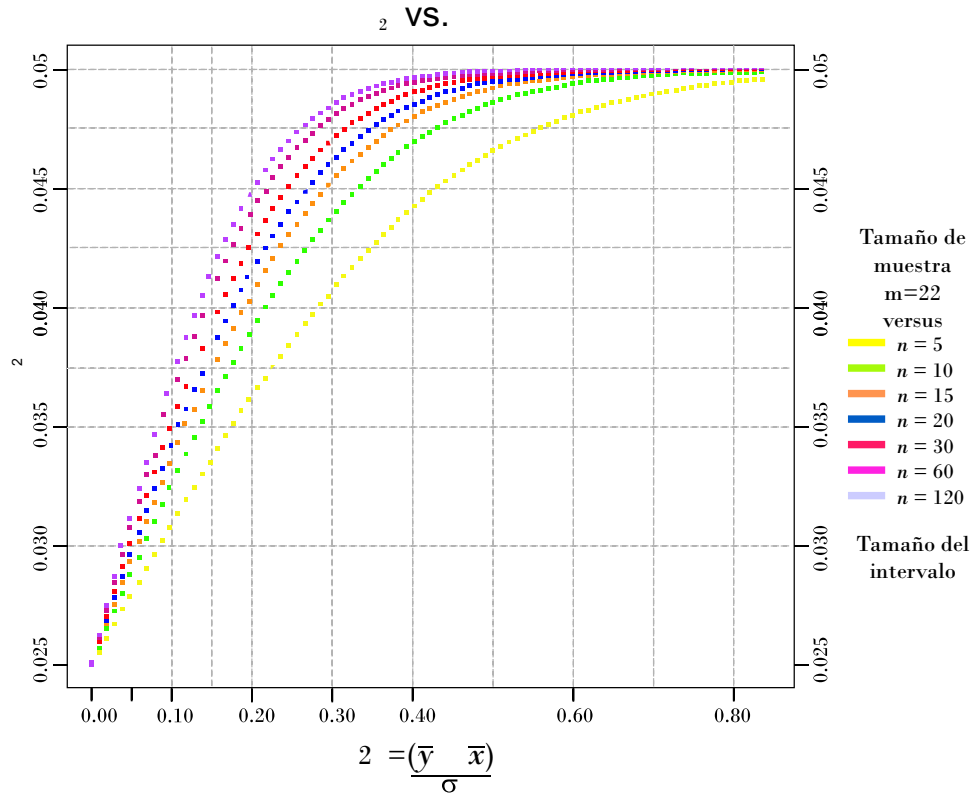
- Para $2\delta = 0.1$, $n = 15$ y $m = 12$, se tiene el valor de $\alpha_2 = 0.0325$, se usa la prueba unilateral derecha con el percentil 96.75% de Z .
- Si $2\delta = 0.175$ y $n = 15$, $m = 12$, la zona de rechazo será, $\alpha_2 = 0.0375$, unilateral a la derecha con el percentil 96.25% de Z .
- Si $2\delta = 0.22$, $n = 60$ y $m = 12$ tenemos, $\alpha_2 = 0.0425$ con la prueba unilateral a la izquierda derecha con el percentil 95.75% de Z .
- Si tenemos $2\delta = 0.28$, $n = 60$ y $m = 12$ la zona de rechazo sería, $\alpha_2 = 0.045$ empleando un percentil de 95.5% de la normal estándar.

- Si fuese $2\delta = 0.355$ y $n = 60$ y $m = 12$ obtendríamos una zona de rechazo de $\alpha_2 = 0.0475$, lo que da el uso de la prueba con el percentil 95.25% de Z .
- Con $2\delta = 0.318$, para $n = 20$ y $m = 12$, la zona de rechazo sería, $\alpha_2 = 0.045$, empleando el percentil 95.5% de Z .
- Ahora, si $2\delta = 0.37$, $n = 20$ y $m = 12$, se debe usar $\alpha_2 = 0.0465$, se usa el percentil $Z_{0.9535\%}$.
- Y, cuando $2\delta = 0.435$, $n = 15$ y $m = 12$, se debe usar $\alpha_2 = 0.0475$, se usa el percentil $Z_{0.9525\%}$, y
- Finalmente, si $2\delta = 0.78$, $n = 20$ y $m = 12$, se debe usar $\alpha_2 = 0.0499$, se usa el percentil $Z_{0.9501\%}$, o bien, $Z_{0.95\%}$, según convenga.

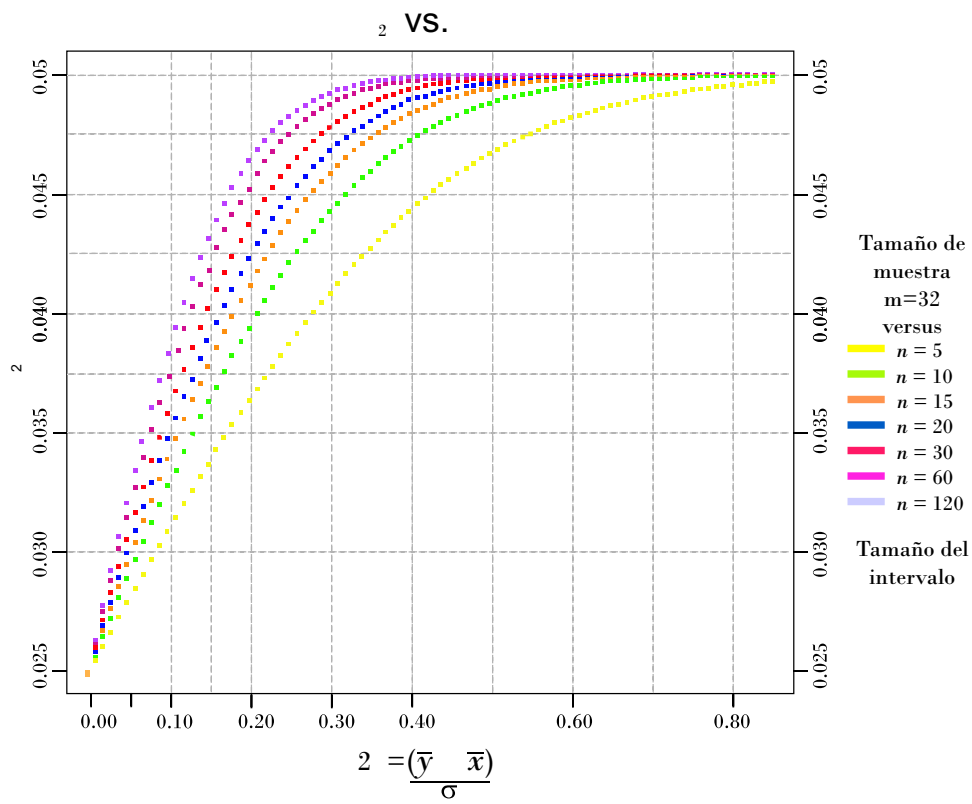
A continuación se muestran los resultados gráficos para los valores fijos de $n = \{5, 10, 15, 20, 30, 60, 120\}$ y los valores para: $m = 12, m = 22, m = 32, m = 42, m = 55, m = 75, m = 100$ y $m = 200$; sin dar ejemplos específicos en estas.



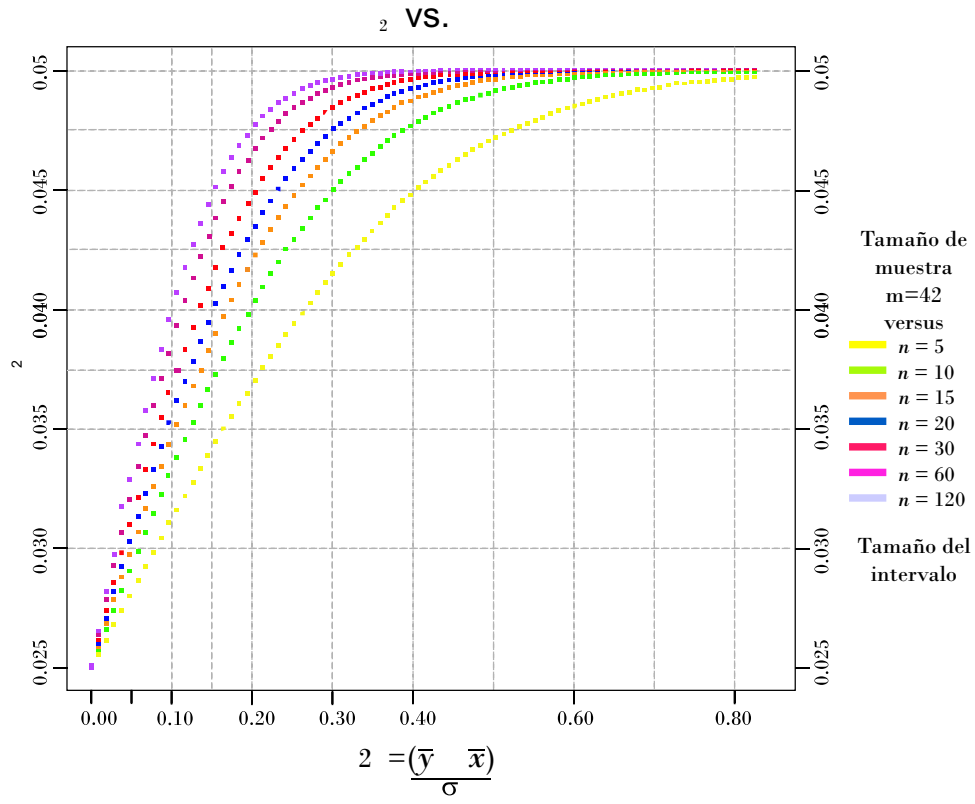
Gráfica 4.3: ZR



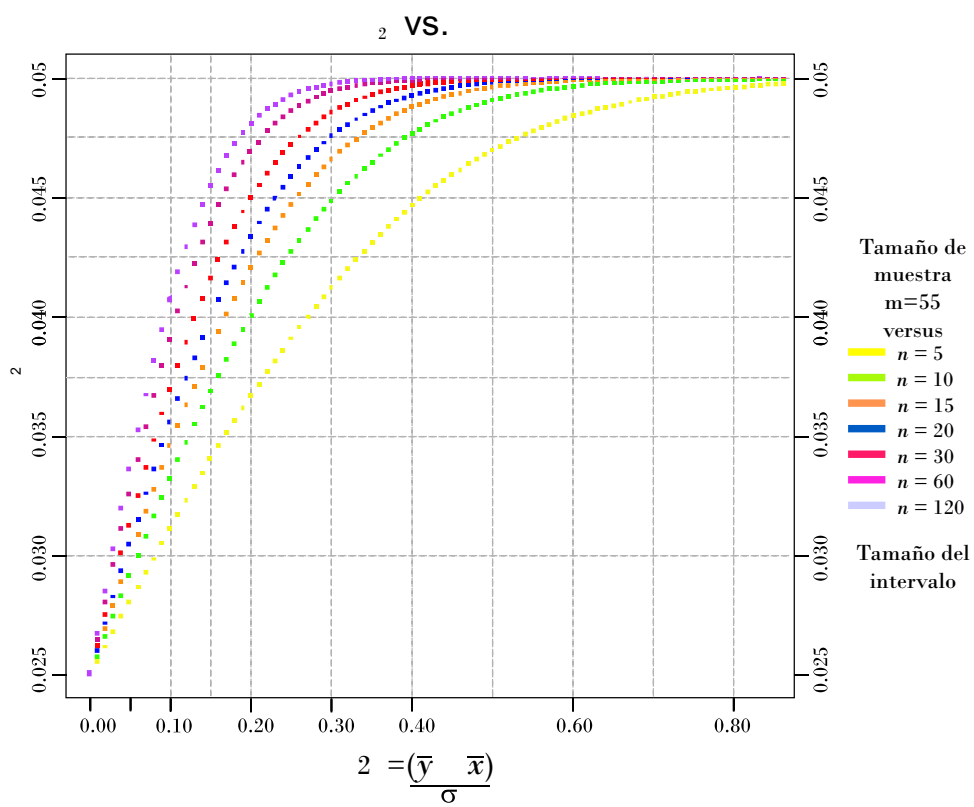
Gráfica 4.4: ZR

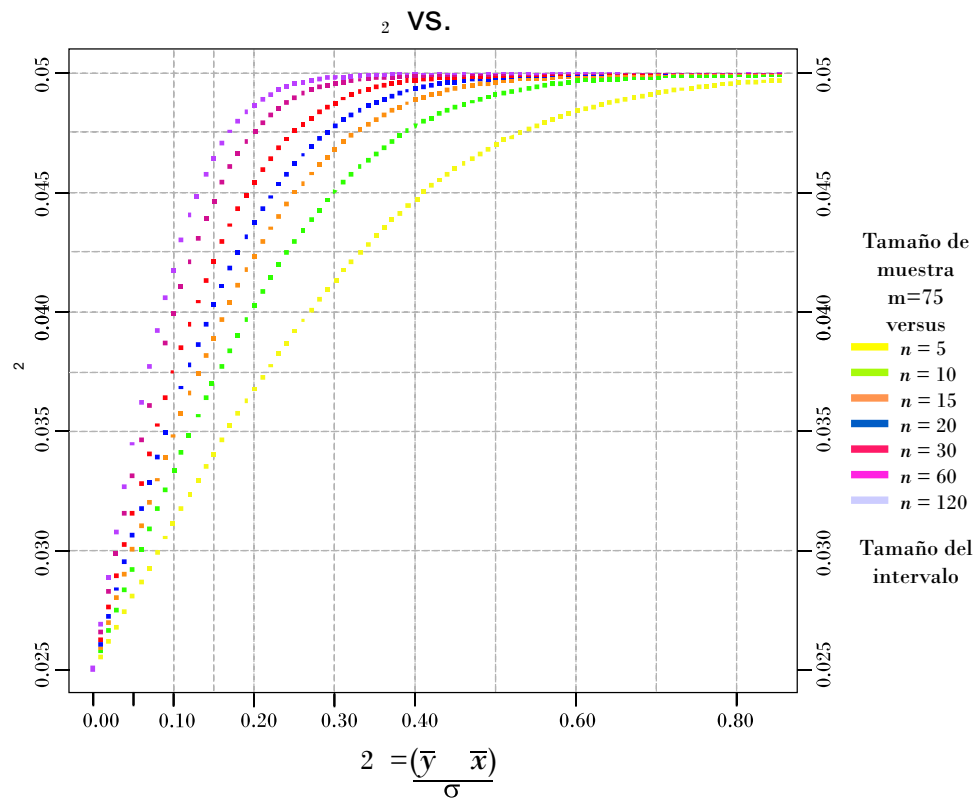


Gráfica 4.5: ZR

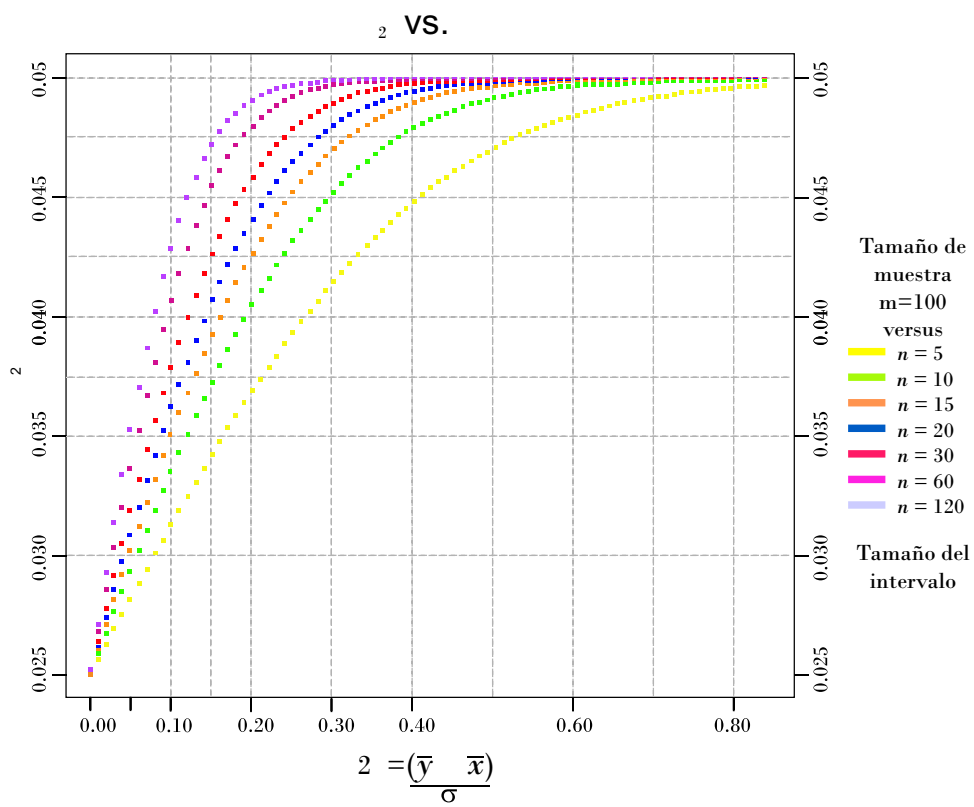


Gráfica 4.6: ZR

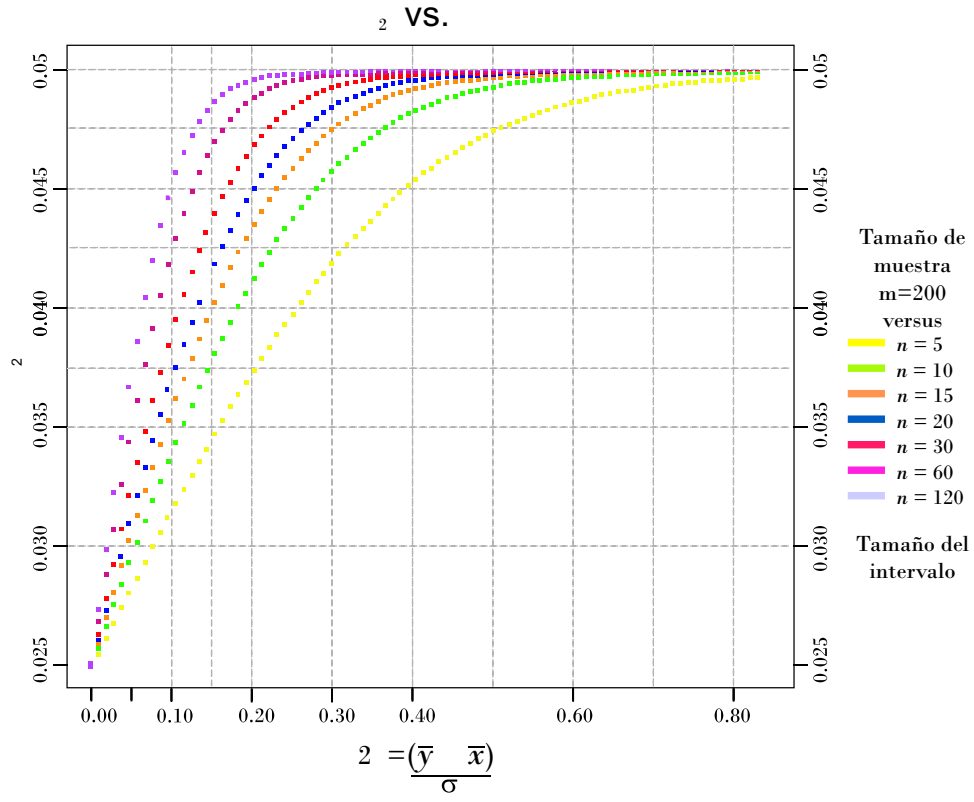




Gráfica 4.8: ZR



Gráfica 4.9: ZR



Gráfica 4.10: ZR

CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó y analizó la prueba de una hipótesis nula central compuesta contra una hipótesis alternativa bilateral en la distribución Normal, tratando de presentar todas las ideas relacionadas de manera unificada y de acuerdo con los objetivos.

Se demostró para la docimasia de la hipótesis nula central compuesta versus una hipótesis alternativa bilateral con σ conocida,

$$H_0 : \mu \in [k_1, k_2] \text{ vs. } H_a : \mu \notin [k_1, k_2]$$

donde el valor calculado de Z es $\frac{(\bar{x}-k_1)\sigma}{\sqrt{n}}$ si $\bar{x} < k_1$ y la prueba es a la izquierda y, es $\frac{(\bar{x}-k_2)\sigma}{\sqrt{n}}$ si $\bar{x} > k_2$ y la prueba es a la derecha, es Uniformemente Más Potente Insesgada, valiendonos de los métodos que se dan en los cursos de estadística a nivel licenciatura (razón de versosimilitud); el concepto de hipótesis insesgada y la generalización del Lema de Neyman-Person.

Además, se ha propuesto un método gráfico que da los percentiles de la Normal estandar que se deben usar como valores críticos para el contraste. Así mismo, se dió el procedimiento para la implementación computacional de la prueba y la explicación de como implementarlo en situaciones reales de experimentación.

Lo anterior fundamenta el desarrollo teórico-práctico de los capítulos subsecuentes donde se extiende dicho resultado.

Vimos que la prueba

$$H_0 : \mu \in [k_1, k_2] \text{ vs. } H_a : \mu \notin [k_1, k_2] \text{ con } \sigma \text{ desconocida}$$

es UMPI, dando también para ella, el método gráfico que da los percentiles de la prueba

t , el procedimiento para su implementación computacional y la implementación para situaciones reales de experimentación.

Finalmente, se demostró para el resultado más general de la investigación

$$H_0 : |\mu_X - \mu_Y| \leq \delta \text{ frente } H_a : |\mu_X - \mu_Y| > \delta, \text{ con } \sigma \text{ común conocida}$$

que es UMPI, se proporciona su método gráfico que da los percentiles de la prueba Z para dos poblaciones Normales y los procedimientos de implementación computacional y aplicación en situaciones reales de experimentación.

A diferencia de las conclusiones en la prueba convencional, $H_0 : \mu = \mu_0$ frente $H_a : \mu \neq \mu_0$, donde el rechazo de la hipótesis nula de igualdad, no necesariamente lleva a una recomendación práctica, en estos contrastes, la significación estadística refleja una diferencia con la igualdad que es de interés para el investigador, adquiriendo sentido práctico, pues se enfoca a probar si la media difiere menos que delta de el valor de C o la diferencia es mayor que delta, por lo que al rechazar la hipótesis nula el investigador puede con toda naturalidad recomendar que el valor de la media difiere de C más que delta, una diferencia que aquella que seleccionó como criterio para la comparación.

BIBLIOGRAFÍA

Borovkov, A. A., *Estadística Matemática*; Editorial Mir, Moscú, 1988.

Freund, J. E.; Miller, I.; Miller, M., *Estadística Matemática con Aplicaciones*, 6ª. Edición; Pearson Education, México, 2000.

Lehmann, E.L., *Testing Statistical Hypotheses*, 3rd. ed., New York; John & Wiley Sons, Inc., 1997.

Mood, A. M., *The Theory of Statistics*, 2nd ed., New York, Mc Graw Hill Book Company, Inc., 1963.

Ruíz-Maya P.,L.; Martín Pliego, F.J., *Estadística II:inferencia*; Editorial AC, España, 2002.

UNIV

Propuesta para la prueba de una hipótesis
nula central compuesta y una hipótesis
alternativa bilateral en la distribución Normal

Presenta

Leonardo Román Olmedo García

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Aplicadas e Industriales



Asesor

Dr. Alberto Castillo Morales