

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE PROCESOS E HIDRAULICA
AREA DE INGENIERIA QUIMICA

TESIS DE MAESTRIA

TITULADA:

DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS TIPO CASCADA USANDO
TECNICAS NO LINEALES

AUTOR

*AMERICA BERENICE MORALES DIAZ
INGENIERO QUIMICO PETROLERO
DE LA ESIQIE-IPN*

ASESOR

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

SEPTIEMBRE DE 1998

Índice General

Resumen General	2
Introducción General	4
Capítulo 1. Importancia del control en los procesos químicos	6
1.1 Resumen	6
1.2 Introducción	7
Motivación	7
Situación	7
1.3 Objetivo general de control	8
Objetivos particulares	8
Terminología usada y su rol específico en el diseño de controladores	8
1.4 Interacción entre el control y la dinámica de los procesos	9
Observaciones	11
Capítulo 2. Control en cascada	13
2.1 Resumen	13
2.2 Introducción	14
Motivación	14
Antecedentes	15
2.3 Tipos de controladores en cascada	15
2.3.1 Control cascada en serie	17
2.3.2 Control cascada en paralelo	22
Observaciones	23

Capítulo 3. Herramientas de control	24
3.1 Resumen	24
3.2 Introducción	24
3.2.1 Transformadas de Laplace	25
Solución de ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace	26
Función de transferencia	27
Valores propios y estabilidad	27
Funciones de transferencia y álgebra de bloques	28
3.2.2 Diagramas de bloques	29
3.2.3 Definición de observabilidad	30
Ejemplos	31
Construcción de observadores de orden reducido	35
3.2.4 Controlabilidad	37
3.2.5 Backstepping	39
Capítulo 4. Casos de Estudio	43
4.1 Resumen	43
4.2 Introducción	45
Motivación	45
Antecedentes	46
Control cascada	47
4.3 Casos de estudio	49
4.3.1 Ejemplo 1	49
Diseño del control cascada en serie	51
Diseño del control global	63
Observaciones	68
4.3.2 Ejemplo 2	71
Diseño del controlador cascada en paralelo	73
Diseño del control global	80
Observaciones	84

Conclusiones Generales	87
Apéndice	90
Bibliografía	95

Resumen general

En el presente trabajo¹ de tesis se muestra el uso y desempeño de controladores tipo cascada en los procesos químicos. El trabajo esta organizado de la siguiente forma: introducción general en la cual se justifica el uso de controladores tipo cascada, se mencionan los trabajos previamente hechos y la diferencia entre el presente estudio con respecto a los trabajos en control cascada de literarura. En el capítulo uno se justifica el uso del control como una técnica para mejorar la operación de los procesos químicos mencionando algunos ejemplos. En el capítulo dos se mencionan los tipos de controles en cascada, su aplicación y uso. En el capítulo tres se mencionan las herramientas usadas en el diseño de los controladores cascada serie y paralelo de los casos de estudio manejados. En el capítulo cuatro se describen los dos casos de estudio trabajados describiendo y explicando paso a paso la construcción de los controladores cascada y de los controladores de comparación que son retroalimentados linearizados, se ilustra con figuras los procesos que son dos reactores tanques agitados contínuos el primero con dinámica adicional en el sistema de enfriamiento y el segundo con dinámica en la concentración y en la temperatura solamente. Y por medio de gráficas se muestra la velocidad de respuesta y el desempeño de los controladores cascada contruidos para los dos reactores, comparando su comportamiento con un controlador retroalimentado que no usa medidas intermedias y que contiene los mismos términos inciertos considerados para los controladores en cascada. Los modelos de trabajo de los reactores se manejaron en forma no lineal. Se observó que el uso de estructuras tipo cascada mejora el desempeño de los controladores por que se aprovechan medidas intermedias, también se observó que los controladores tipo cascada rechazan mejor las perturbaciones; se simularon terminos inciertos en ambos casos de estudio, para lo cual se diseñaron observadores de orden reducido, los cuales reconstruyeron bien las incertidumbres. Por último, se encontró que la estructura de los controladores generaba un equivalencia a un control tipo PI donde la parte proporcional esta dada por el error de seguimiento entre la variable controlada

¹ Este trabajo se llevo a cabo gracias al programa de becas patrocinado por el Instituto Mexicano del Petróleo a través del proyecto FIES 9593-II.

y la referencia y la parte integral esta dada por el observador de orden reducido que se usa para estimar la incertidumbre. El control así constituido tiene una estructura de "anti-windup", es decir, a saturaciones en los controladores existe la capacidad de resetear la saturación y llegar a la referencia dada.

Introducción general

El control en cascada es una de las herramientas más útiles para el diseño de controles avanzados. Su utilidad radica en su capacidad para rechazar perturbaciones y mejorar el desempeño de los controladores. Este tipo de estrategia es usada en los procesos químicos debido a que existen variables con medidas retardadas o procesos de gran capacitancia como columnas de destilación. En los cuales la implementación de una técnica de control convencional, como el uso de controladores con estructura proporcional e integral implica retardos en las acciones de control y mal desempeño de los controladores ya que las perturbaciones y los ruidos de medición no serán detectados al tiempo que ocurren y por lo tanto el control tardará en corregir la acción de control.

La idea de usar control en cascada se originó con el problema de rechazo de perturbaciones cuyos efectos se detectan más rápidamente en una salida de control secundaria que en la variable controlada. Entonces, el uso de control en cascada es recomendado para aquellos procesos en los cuales la dinámica de un lazo de control secundario es más rápida que la dinámica del proceso primario (*Stephanopoulos, 1984*). En estas condiciones la interacción entre los dos esquemas de control formados es prácticamente nula, debido a la diferencia en sus dinámicas y por la cual se dice que no se presentan problemas de sintonizado en el esquema de control en cascada.

Antecedentes

Yu (*1988*) realizó trabajos de diseño y análisis de controladores tipo cascada paralelo. Mientras que Shen y Yu (*1990*) aplicaron estos resultados para la selección de una variable medida secundaria cuando existen diferentes tipos de perturbaciones. Brambilla y Semino (*1992*), introdujeron un filtro no lineal entre los dos lazos de control de un controlador cascada paralelo con el fin de desacoplarlos ya que la velocidad de respuesta de los dos esquemas era equiparable y no resultaba tan obvia la sintonización de los dos lazos de control. Brambilla (*1994*) propuso la selección de algunos parámetros adimensionales para diseñar esquemas de control cascada

paralelo en columnas de destilación con control dual. Semino y Brambilla (1996) propusieron el diseño de un estructura de control cascada paralelo capaz de evitar interacciones entre los lazos de control maestro y esclavo, utilizando un control convencional en el lazo interno y técnicas de *IMC*¹ (Morari y Zafirou, 1989) en lazo externo con el fin de rechazar los efectos de las perturbaciones que no son tomadas en cuenta por el lazo interno, la estructura de control que ellos propusieron mostró mayores ventajas cuando la variable medida del lazo primario se obtiene con retardos. Russo y Bequette (1997) construyeron una estructura de control cascada para el caso un **RTAC** de tres estados² y usaron el modelo linearizado alrededor de un punto de equilibrio inestable, mientras que para la construcción del controlador utilizaron una estructura de *IMC* en el lazo externo o lazo esclavo para desacoplar a la temperatura del reactor de la temperatura del sistema de enfriamiento, y una estructura de un control convencional tipo proporcional en el lazo interno o maestro. En este trabajo se presenta una estructura cascada serie para el caso uno, en el cual se usaron técnicas de *back-stepping* para desacoplar a la temperatura del reactor de la temperatura del sistema de enfriamiento y se asumieron la existencia de incertidumbres en los términos de reacción, en el coeficiente de transferencia de calor y en la temperatura de las corrientes de entrada al reactor y al sistema de enfriamiento; mientras que para el segundo caso de estudio se construyó un control cascada paralelo asumiendo las mismas incertidumbres que para el caso uno, ambos casos de estudio se trabajaron con el sistema no lineal.

¹ *IMC: Internal model control*

² **RTAC** de tres estados: es un reactor tanque agitado continuo con dinámica en la concentración y en las temperaturas del reactor y del sistema de enfriamiento.

Capítulo 1

Importancia del control en los procesos químicos

1.1 Resumen

En este capítulo se hace una introducción a la importancia y aplicación de las técnicas de control en los procesos químicos. De manera general se tratan algunos problemas de control en la industria química y su correlación con objetivos de producción, calidad, seguridad e higiene y manejo de residuos contaminantes. Se mencionan los términos generales usados en teoría de control y la interacción entre ellos. También se establece el objetivo general del estudio y aplicación de control, así como también los objetivos particulares. Por último, se enfatiza el motivo del uso del control como una herramienta que se suma a la búsqueda de nuevas tecnologías y no como su manejo tradicional que implica su uso como una alternativa paralela a la aplicación y al mejoramiento de tecnologías.

1.2 Introducción

Motivación

El control de procesos es una técnica que tiene una variedad de campos de aplicación pero su utilidad sólo se observa a través de ser usada directamente en los procesos industriales. El control necesariamente interacciona con otras disciplinas para generar y aplicar tecnologías a situaciones reales que involucran problemas de calidad, seguridad y disposición de residuos.

En el área industrial se ha observado que la mejora de procesos no necesariamente proviene del hecho de usar nuevas tecnologías si no más bien del diseño de técnicas de control y en ocasiones el conjunto entre ambos recursos. En la industria química actual se presentan objetivos que involucran mejoras de calidad en los productos, reducción de costos de producción, disminución de la contaminación, mayor flexibilidad de los procesos sujetos a cambios de mercado y de tecnología. De manera que el reto es lograr lo anterior contando con una industria ya cimentada que en algunas ocasiones tiene varios años de antigüedad. Bajo esta situación el control es capaz de cubrir estos aspectos al hacer un análisis propio de cada proceso y diseñar una técnica de control adecuada que cubra dichos objetivos. Si se diseña un "buen" control, lo que significa que se mantendrán los valores de referencia dados en las variables de control, a bajos márgenes de variación, entonces, se mejorará la calidad y se reducirán costos de producción.

Situación.

En sus inicios, los procesos químicos se encontraban en un control vía operadores de planta, personal del área que estuviera observando niveles, temperaturas, presiones, mediciones de flujo, etc. para realizar aberturas de válvulas y cualquier otra acción que involucrara el esfuerzo necesario para mantener a las variables en un punto de operación dado. Posteriormente se hizo uso de control automático, el cual utilizaba controladores calibrados con resortes, de manera que los actuadores recibían señales de aire y realizaban los mismos esfuerzos de control que anteriormente realizaban los operadores; de esta forma se observó que si se introducían controladores para el

manejo de procesos, entonces, se tendría más efectividad en la obtención de productos con calidad cercana al objetivo real y entre los márgenes de calidad aceptados. Posteriormente se llegó al uso de controladores lógicos programables, en los cuales la comunicación entre medidores, controladores y actuadores de control se realiza por señales eléctricas y aquí es donde se hace necesaria la herramienta de computo para realizar los programas que cristalicen las técnicas de control diseñadas. Esto es como un marco de referencia de la situación de los procesos industriales a lo largo de su uso. Pero existe un aspecto que hay que analizar con detenimiento y que involucra cual es el objetivo u objetivos de control y cuales son las variables y el lenguaje usado en la implementación de un control. Entonces, se procede a definir el objetivo general y los objetivos particulares de control.

1.3 Objetivo general de control

Es mantener a la o las variables manipuladas en el punto de operación deseado, realizando las manipulaciones necesarias en los actuadores o elementos finales de control.

Objetivos particulares

Algunos ya se han mencionado y son: mantener la calidad de los productos entre un margen de variabilidad fijo, disminuir costos de producción, disminuir emisiones de contaminantes a la atmósfera, reutilizar materiales de desecho, aumentar la producción, entre otras.

Terminología usada y su rol específico en el diseño de controladores

Variable: cualquier propiedad del sistema en estudio que este variando conforme el tiempo avanza.

Variable controlada: es aquella propiedad o característica del proceso que se desea mantener en un punto de referencia dado y pueden ser presiones, temperaturas, niveles de líquidos, índices de refracción, etc.; todas estas propiedades están involucradas con la operación del proceso deseada.

Variable manipulada: es aquella en la que se pueden inducir cambios para mantener a la variable controlada en el punto de referencia dado.

Entrada de control: es la variable que entra al control y su función es efectuar los cambios requeridos por el sistema de control, para mantener a la variable controlada en el punto de referencia.

Perturbaciones del sistema: cuando existen variables de entrada o salida del sistema que sufren cambios repentinos se dice que existen perturbaciones, ejemplo de ellas son cambios de composición en flujos de entrada, cambios de temperatura en corrientes de agua de enfriamiento, etc.

Sistema a lazo abierto: se usa este termino cuando el proceso no tiene retroalimentación de señal de control.

Sistema a lazo cerrado: es aquel en el cual existe un control retroalimentado que va a inferir cambios en el sistema.

Dinámica de un sistema: se dice que es la variación de las propiedades del sistema con el tiempo.

1.4 Interacción entre el control y la dinámica de los procesos

La mejor forma de mostrar la interacción entre la dinámica de los procesos y el control es haciendo uso de ejemplos, por lo que se van a tomar tres casos de literatura (*Luyben, 1990*), los cuales solamente van a describirse. En el primer caso se describe un proceso simple en el cual la dinámica es importante para la evolución del caso de estudio; el segundo caso muestra un control retroalimentado simple y el tercer caso discute el control global de un proceso químico.

Caso 1. Se cuenta con un tanque en el cual se bombea un líquido incompresible a un gasto $F_0(t)$, en la base del tanque existe una tubería que conecta con otro tanque, por la cual fluye el líquido a un flujo $F(t)$, ambos tanques están abiertos a la atmósfera. Se desea mantener una altura de líquido h en el interior del tanque de

manera que el volumen del líquido sea constante. Primero se analiza el caso en el que el tanque está en estado estacionario, lo cual significa que el flujo de entrada y el de salida no están cambiando con el tiempo y que además son iguales, en esta situación se debe calcular la altura del tanque y el diámetro de la tubería óptimos, es decir, hacer el menor costo manteniendo las dimensiones requeridas para que el volumen de líquido en el tanque sea constante. Si no se diseña bien el tanque y se deja poco margen entre la altura requerida y la de diseño se tendrán derrames, lo cual implica pérdidas de materiales. Por otro lado si se deja mucho margen entre la altura del tanque y la altura de diseño habrá gasto innecesario de materiales. Supóngase que el tanque almacena ácido sulfúrico y que va a ser alimentado a un segundo tanque de dilución para finalmente alimentar la solución de ácido a una unidad de intercambio iónico, si el tanque de ácido concentrado se derrama se producirá una situación de inseguridad, ya que el derrame puede alcanzar tanto a personal como a las instalaciones de la planta, si existe vaciado del tanque o solamente una baja del nivel requerido, entonces no se estará alimentando la solución requerida a la unidad de intercambio iónico y el funcionamiento de esta se verá alterado.

Con este ejemplo se observa la importancia de estudiar el estado estacionario de un proceso para realizar un diseño óptimo, pero ¿qué pasa con la dinámica?, esto es algo que también es importante por que se necesitará de un control que mantenga la altura de líquido requerida, ya que el proceso tiene una dinámica que involucra flujos variables y en caso de que no exista control en el sistema, se tendrán también problemas de derrames o vaciado del tanque.

Caso 2. Se considera un intercambiador de calor del tipo haz de tubos con coraza, por los tubos pasa un gasóleo que va a ser alimentado a una unidad de craqueo catalítico (**FCC**), para la obtención de gasolinas. Por el lado de la coraza pasa una corriente de vapor de agua con la temperatura necesaria para calentar el gasóleo a la temperatura de entrada requerida en la unidad de craqueo, es muy importante mantener la temperatura del vapor o de lo contrario la operación de la unidad **FCC** será ineficiente, para esto se coloca un indicador de temperatura en la corriente de salida del gasóleo, el indicador va a mandar una señal a un controlador que

va a comparar la temperatura de salida con la temperatura calibrada de existir diferencias entre ambas el control actuará sobre la válvula de admisión de vapor, abriéndola o cerrándola, según sea el caso, de manera que la temperatura del gasóleo siempre sea la especificada. Este controlador es del tipo de retroalimentación simple.

Caso 3. Aquí se menciona una planta de producción de polímeros en la cual se involucran dos fases del proceso que son reacción y secado, además de los servicios requeridos por el proceso como agua de enfriamiento, agua de carga a reactores, vapor de calentamiento, entre otros. Cada parte del proceso va a involucrar una serie de controladores que en su conjunto van a constituir el control global de la planta. Por ejemplo, en la parte de reacción el reactor debe controlarse por medio de la temperatura, ya que si existen altas temperaturas existe riesgo de explosión del equipo o en menor nivel, polímero fuera de especificación; en la parte de secado se necesita mantener niveles de tanques de alimentación a los secadores, para producir una cantidad óptima de polímero secado, en esta parte también deberá mantenerse la temperatura de aire de secado para evitar que el polímero se quemé o quede humedo; en la parte de servicios, si se toma en cuenta la caldera usada para la producción de vapor, se debe considerar que este es un equipo de alto riesgo y si no se tiene control en la relación de alimentación de combustible-aire y en la temperatura de calentamiento existirá peligro de explosión. De esta forma se pueden ir mencionando los demás esquemas de control necesarios para el buen funcionamiento de la planta y que en su conjunto tienen la función de cumplir con un objetivo de producción y de calidad de producto óptimos para que el proceso sea rentable.

Con esto se da por terminado el análisis de la importancia del control en los procesos químicos.

Observaciones

Se observó, con la ayuda de ejemplos explícitos de tipo industrial, que la aplicación de control es elemental para operar los procesos químicos, ya que de las técnicas de control usadas dependerá en buena parte la calidad y cantidad de los productos. También se observó que el uso de técnicas de control implica seguridad del personal

y de las instalaciones. Por la parte de disminución de contaminantes, esto se cubre si se piensa que al operar eficientemente la planta o proceso químico, no existirán derrames innecesarios o emisiones a la atmósfera de gases contaminantes, además de que si se cuenta con una planta de tratamiento de agua, se deberá hacer uso de control para obtener la calidad mínima requerida por las autoridades para poder descargar el agua al drenaje, teniendo la opción de que si se realiza una remoción eficiente de contaminantes, entonces el agua se podrá incluso reutilizar.

Por lo tanto, se comprobó que el diseño de técnicas de control, es elemental para operar eficientemente los procesos químicos y que el diseño de una técnica en particular dependerá de las necesidades de operación y de las variables necesarias para diseñar el control, las cuales pueden ser medidas, no medidas e inferidas.

Capítulo 2

Control en cascada

2.1 Resumen

El objetivo de este capítulo es mostrar la importancia de la implementación de controladores tipo cascada en los procesos químicos, el capítulo está organizado de la siguiente manera: primero se define un control tipo cascada y su uso, posteriormente se definen los dos tipos de controladores en cascada que han sido desarrollados y su aplicación específica, enseguida se mencionan los tipos de trabajos que se han hecho usando la estructura de control tipo cascada y la aportación de cada trabajo, por último, se muestran algunos ejemplos esquemáticos de la aplicación de este tipo de controladores, todo lo anterior se hace con el fin de justificar el uso del control cascada en este trabajo y mostrar las herramientas de control necesarias para la implementación de estos controladores, de manera que en el siguiente capítulo se expliquen y desarrollen con ejemplos este tipo de herramientas.

2.2 Introducción

Motivación

La estructura de controladores en cascada es una de las herramientas más útiles para diseño de controles avanzados en la industria. Su utilidad radica en su capacidad para rechazar perturbaciones y mejorar el desempeño de los controladores. Este tipo de estrategia es usada en los procesos químicos, debido a que existen variables con medidas retardadas o procesos de gran capacitancia, como columnas de destilación, en los cuales la implementación de una técnica de control convencional como el uso de controladores tipo PI¹ implica retardos en las acciones de control y mal desempeño de los controladores, ya que las perturbaciones y los ruidos de medición no serán detectados al tiempo que ocurren y por lo tanto el control tardará en corregir la acción de control.

La idea de usar control en cascada se originó con el problema de rechazo de perturbaciones cuyos efectos se detectan de manera más rápida en una salida de control secundaria que en la variable controlada. Entonces, el uso de control en cascada es recomendado para aquellos procesos en los cuales la dinámica de un lazo de control secundario es más rápida que la dinámica del proceso primario (*Stephanopoulos, 1984*). En estas condiciones, la interacción entre los dos esquemas de control formados es prácticamente nula debido a la diferencia en sus dinámicas y por la cual se dice que no se presentan problemas de sintonizado en el esquema de control en cascada.

La estructura de un control cascada convencional esta compuesta por dos controladores retroalimentados, donde la salida del control primario o control maestro cambia el punto de referencia del control secundario o esclavo. La salida del control secundario incide directamente en la acción final de control, como por ejemplo una válvula.

¹Controladores con acción proporcional e integral

Antecedentes

Yu (1988) realizó trabajos de diseño y análisis de controladores tipo cascada paralelo. Mientras que Shen y Yu (1990) aplicaron estos resultados para la selección de una variable medida secundaria cuando existen diferentes tipos de perturbaciones. Brambilla y Semino (1992), introdujeron un filtro no lineal entre los dos lazos de control de un controlador cascada paralelo con el fin de desacoplarlos, ya que la velocidad de respuesta de los dos esquemas era equiparable y no resultaba tan obvia la sintonización de los dos lazos de control. Brambilla (1994) propuso la selección de algunos parámetros adimensionales, para diseñar esquemas de control cascada paralelo en columnas de destilación con control dual. Semino y Brambilla (1996) propusieron el diseño de un estructura de control cascada paralelo que era capaz de evitar interacciones entre los lazos de control maestro y esclavo, para lo cual usaron un control convencional en el lazo interno y técnicas de *IMC* en lazo externo con el fin de rechazar los efectos de las perturbaciones que no son tomadas en cuenta por el lazo interno, la estructura de control que ellos propusieron mostró mayores ventajas cuando la variable medida del lazo primario se obtiene con retardos.

2.3 Tipos de controladores en cascada

Como ya se menciona, existe un esquema de control primario o control maestro y un esquema de control secundario o control esclavo, la primera denominación se usa cuando van a existir más de dos lazos de control, mientras que la segunda denominación se usa cuando existen solamente dos lazos o esquemas de control. En el presente trabajo se van a usar solamente dos lazos de control y el objetivo de usarlos es que en conjunto, como ya se había mencionado, tienen la capacidad de rechazar perturbaciones y mejoran el desempeño del sistema de control. Existen dos tipos de estructuras en las cuales el control en cascada puede aplicarse. Genéricamente se dice que si la variable manipulada afecta a una variable y ésta a su vez afecta a una segunda variable controlada, la estructura se denomina control cascada en serie. Pero si la variable manipulada afecta directamente a la variable controlada y

a una segunda variable, entonces el control es cascada paralelo.

Para ilustrar el efecto de rechazo de perturbaciones que tienen los controladores tipo cascada considerar el reboiler de una columna de destilación, Figura 2.1a, suponer que la presión de suministro de vapor aumenta. El tiempo que el control requerirá para manipular la válvula de admisión de vapor será demasiado grande, por lo que el flujo de vapor se incrementará. Con un esquema de control simple, no habrá acción correctiva de control hasta que la alta presión de vapor incremente el contenido de los fondos y la temperatura del plato donde se encuentre localizado el medidor de temperatura aumente, por lo que el sistema estará perturbado por el aumento en la presión de vapor y por lo tanto no se obtendrán las especificaciones de destilado requeridas hasta que el control "se de cuenta" de este cambio en la presión. Pero con el esquema de control en cascada, Figura 2.1b, el controlador de flujo de entrada de vapor de inmediato detectará el cambio en la temperatura que es proporcional al cambio de presión y enseguida accionará a la válvula de admisión de vapor, de manera que el flujo de vapor se encuentre en el punto de referencia dado. Por lo tanto el reboiler y la columna estarán afectados de manera mínima por el cambio de presión en el vapor de calentamiento del reboiler, cambio que al final de cuentas se traduce como una perturbación. Hay que tener en cuenta que la estructura de control mostrada en la Figura 2.1b, no necesariamente es la única posibilidad de implementar un lazo de control en cascada, ya que una forma tal vez más natural, y definitivamente menos costosa, es colocar un transmisor de temperatura en la línea de retorno de fondos a la columna, de manera que esta señal sea enviada al controlador de flujo (**CF**) y este a su vez accione la válvula de admisión de vapor.

Otro ejemplo del uso de este tipo de estructura es un **RTAC** (reactor tanque agitado continuo), en donde el control primario esta constituido por el control de la temperatura del reactor, Figura 2.2, mientras que el control secundario esta constituido por la temperatura del sistema de enfriamiento, mediante los cuales el control de temperatura del reactor detectará y rechazará perturbaciones en la temperatura de entrada del enfriante de manera rápida y eficiente. El usar esquemas de control en cascada disminuye considerablemente el tiempo característico a lazo cerrado del

reactor, en comparación del tiempo característico generado por una estructura simple de control, en la cual directamente la temperatura del reactor genera la acción de control sobre la válvula de admisión del refrigerante². Los esquemas de control del reboiler de la columna de destilación y del **RTAC** son esquemas de cascada en serie ya que la variable manipulada afecta a la segunda variable controlada y esta a su vez afecta a la variable del esquema primario.

2.3.1 Control cascada en serie

En esta parte se va a esquematizar el diseño de un control cascada serie y a comparar frente a un esquema simple de control retroalimentado en conjunto con las características del sistema a lazo cerrado.

Entonces, la Figura 2.3a muestra un proceso a lazo abierto en el cual las funciones de transferencia g_1 y g_2 están conectadas en serie, la variable manipulada m entra a g_1 y produce un cambio en la variable x_1 , la cual a su vez entra a g_2 y cambia a x_2 . La Figura 2.3b muestra un sistema con un control retroalimentado convencional, donde un controlador simple b identifica a la variable x_2 y la compara con un punto de referencia x_2^{set} , para que posteriormente el control b cambie a la variable manipulada y esta a través de g_1 haga el cambio necesario en x_1 , la que a su vez, a través de g_2 dirija la variable x_2 hacia al valor de referencia dado, de manera que la comparación entre esta y la referencia sea cero, la ecuación característica del sistema en el dominio de Laplace es la siguiente:

$$1 + g_1(s)g_2(s)b(s) = 0 \quad (2.1)$$

La Figura 2.3c muestra un control cascada serie para el mismo proceso de la Figura 2.3a, en esta se observan dos controladores, la forma en que se llevan a cabo las acciones de control es la siguiente: variable x_2 es comparada con el punto de referencia (x_2^{set}), la diferencia generada ente ambas es alimentada al controlador b_1 ,

²Ver la comprobación en la parte de diseño de esquemas de cascada serie.

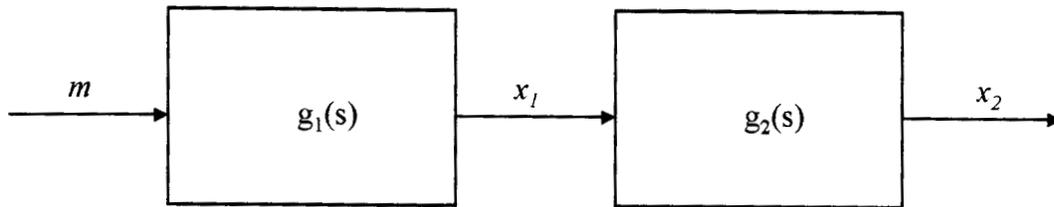


Figura 2.3a Esquema de un proceso a lazo abierto, donde existe una variable medida “ m ” y dos variables de salida “ x_1 ” y “ x_2 ”

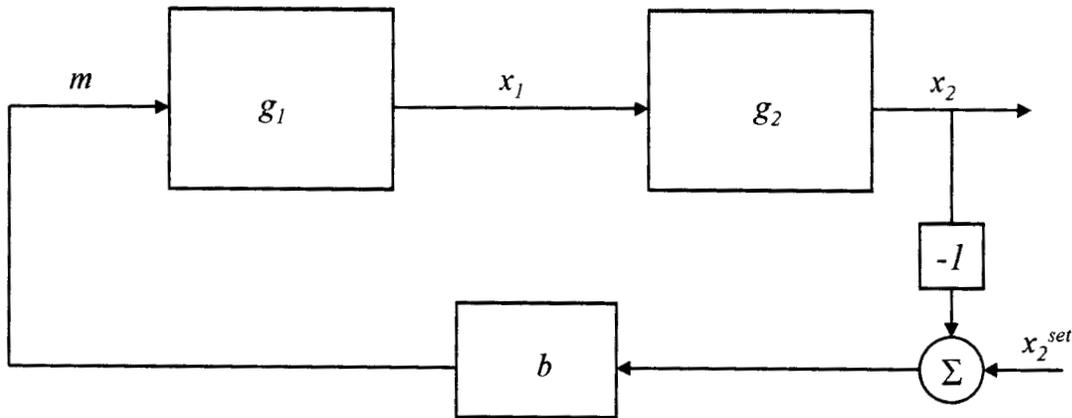


Figura 2.3b Esquema de un sistema con un control retroalimentado convencional

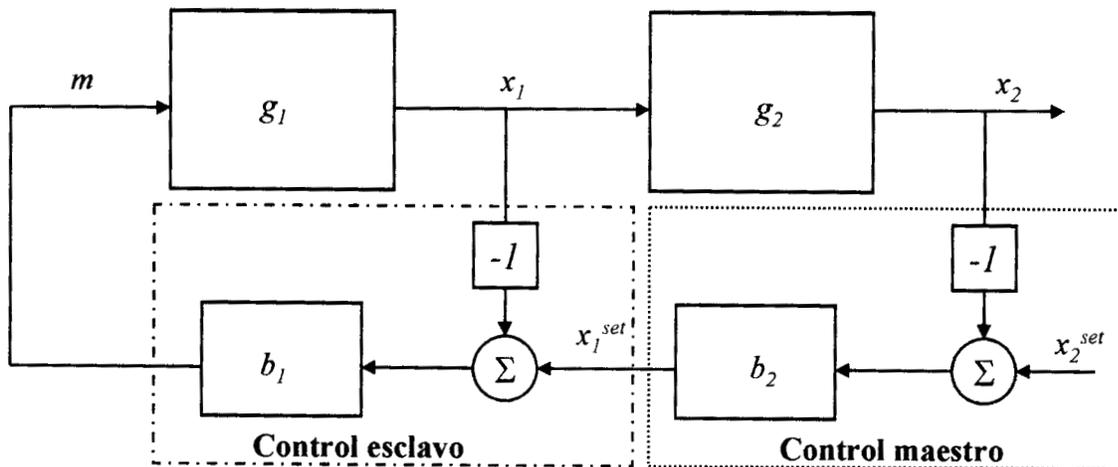


Figura 2.3c Esquema de un sistema con control cascada en serie

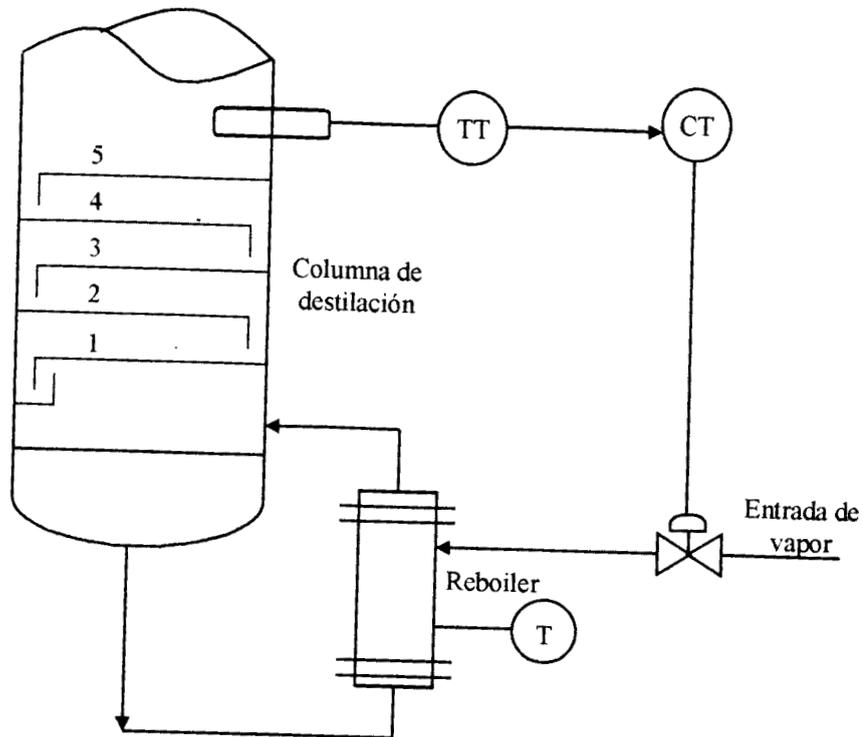


Figura 2.1a Control convencional retroalimentado de los fondos de una columna de destilación

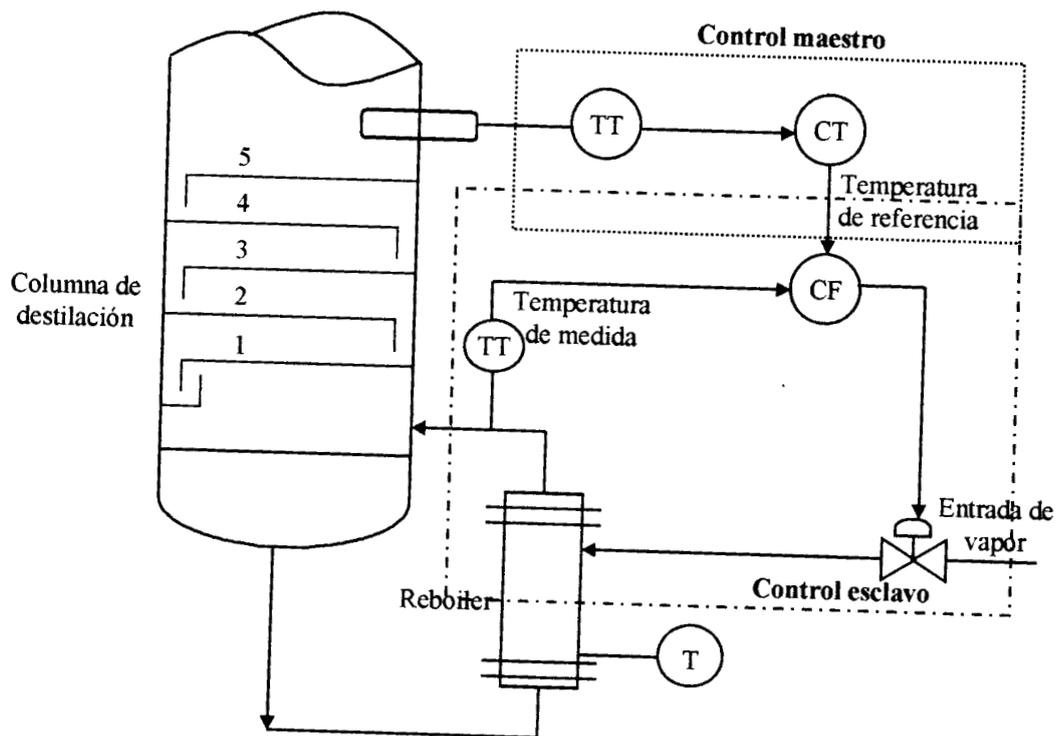


Figura 2.1b Control cascada en serie de los fondos de una columna de destilación

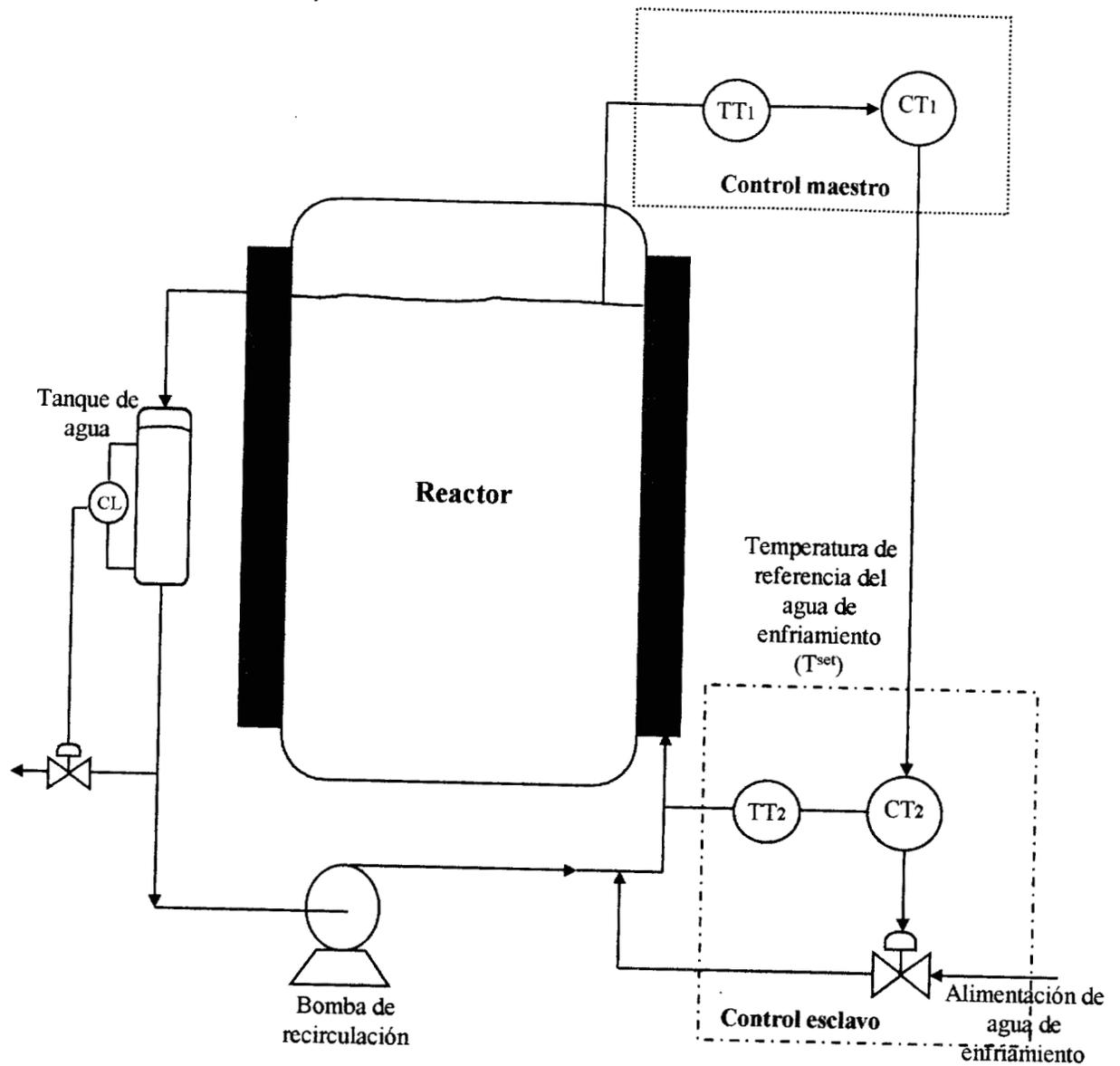


Figura 2.2 Control de temperatura tipo cascada en serie de un RTAC

que es el control primario o maestro, del cual sale la variable x_1 de referencia (x_1^{set}), la cual a su vez, es comparada con la variable de proceso x_1 generada por g_1 . El error o la diferencia ente x_1^{set} y x_1 es alimentada al control b_2 , que es el control secundario o esclavo, el cual finalmente provoca los cambios necesarios en la variable manipulada m para obtener el valor de referencia dado en x_1 y que este a su vez al entrar a g_2 genere el valor de x_2 pedido al inicio por la referencia (x_2^{set}). La ecuación característica del sistema es:

$$1 + g_2 b_2 \left[\frac{g_1 b_1}{1 + g_1 b_1} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Se observa claramente que las ecuaciones (2.1) y (2.2) difieren bastante y por lo tanto las características de respuesta de ambos controladores también será diferente.

Ahora bien, considerando expresiones para los controladores y las funciones de transferencia, se define que los controladores b , b_1 y b_2 son del tipo proporcional solamente, entonces:

$$b = kc$$

$$b_1 = k_1$$

$$b_2 = k_2$$

y que las expresiones de las funciones de transferencia son:

$$g_1 = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)}$$

$$g_2 = \frac{1}{5s + 1}$$

entonces, aplicando estas expresiones a las ecuaciones características a lazo cerrado, para el control retroalimentado convencional, ecuación (2.1): $1 + g_1(s)g_2(s)b(s) = 0$ y el control en cascada en serie, ecuación (2.2): $1 + g_2 b_2 \left(\frac{g_1 b_1}{1 + g_1 b_1} \right) = 0$, se van a obtener los valores de ganancia última y frecuencia última y con ellos determinar las ventajas de usar cualesquiera de los esquemas de control aquí presentados.

(a) *Control convencional.* Considerado que el control b es proporcional igual a kc , entonces, la ecuación característica a lazo cerrado es

$$1 + \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)(5s + 1)} kc = 0$$

$$2.5s^3 + 8s^2 + 6.5s + 1 + kc = 0$$

para obtener la última ganancia (k_u^3) y la última frecuencia (ω_u^4) se sustituye $i\omega$ en vez de s , entonces:

$$-i2.5\omega^3 - 8\omega^2 + i6.5\omega + 1 + kc = 0 \quad (2.3)$$

$$[-8\omega^2 + 1 + kc] + i[-2.5\omega^3 + 6.5\omega] = 0 + i0$$

Resolviendo la ecuación (2.3) se tiene lo siguiente:

$$k_u = 19.20 \quad (2.4)$$

$$\omega_u = \sqrt{\frac{13}{5}} = 1.61$$

(b) *Diseño del control esclavo.* Se escoge un coeficiente de amortiguamiento⁵ a lazo cerrado para el lazo esclavo de 0.707, de manera que los polos de la función de transferencia de este control sean iguales. Enseguida se calcula el valor requerido de k_1 . La ecuación característica a lazo cerrado del control esclavo es

$$1 + k_1 \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)} = 0$$

$$0.5s^2 + 1.5s + 1 + k_1 = 0$$

³Última ganancia representa el valor del límite de estabilidad de un controlador proporcional retroalimentado.

⁴La frecuencia última es aquella en la que el sistema comienza a oscilar.

⁵El coeficiente de amortiguamiento (ζ) es un valor que se asigna a un sistema de segundo orden ($\tau^2 \ddot{x} + 2\tau\zeta \dot{x} + x = f(t)$), para colocar los polos de la función de transferencia en determinados valores. Si $\zeta > 1$ el sistema tiene dos raíces reales, si $\zeta = 1$ el sistema tiene una raíz repetida y si $\zeta < 1$ el sistema genera dos raíces con parte compleja.

resolviendo la ecuación a lazo cerrado las raíces son:

$$s = -1.5 \pm i0.5\sqrt{8k_1 - 1} \quad (2.5)$$

Al escoger un un coeficiente de amortiguamiento de 0.707, las raíces imaginarias y las reales deben ser iguales (*Luyben, 1990*), de manera que la velocidad de respuesta del control esclavo no sea lenta en comparación al control maestro. Entonces de la ecuación (5):

$$1.5 = 0.5\sqrt{8k_1 - 1} \Rightarrow k_1 = 1.25 \quad (2.6)$$

(c) *Diseño del lazo maestro.* La ecuación característica del lazo maestro es:

$$1 + g_2 b_2 \left(\frac{g_1 b_1}{1 + g_1 b_1} \right) = 1 + \frac{2.5k_2}{5s^3 + s_2 + 3s + 4.5} = 0$$

$$5s^3 + 16s^2 + 25.5s + 4.5 + 2.5k_2 = 0 \quad (2.7)$$

resolviendo la ecuación anterior para obtener la última ganancia y la frecuencia última se sustituye $i\omega$ por s y se tiene:

$$k_u = 30.8 \quad (2.7a)$$

$$\omega_u = \sqrt{5.1} = 2.26$$

Si se comparan los valores de ganancia última y de período último obtenidos para el control convencional retroalimentado, $k_u = 19.20$ y $\omega_u = 1.61$. Y para el control cascada en serie, $k_u = 30.8$ y $\omega_u = 2.26$, se observa que el control cascada serie resulta en mayor ganancia última, es decir mejor desempeño del control al tener un margen mayor de aplicación de ganancias y en un tiempo a lazo cerrado menor (que es el recíproco de la frecuencia), lo cual implica mayor rapidez de respuesta del control. Con lo cual se comprueba la afirmación hecha, al decir que se presenta un mejor desempeño el usar un control cascada serie en lugar de un retroalimentado simple para controlar el **RTAC**.

Ahora se ejemplifica un sistema de retroalimentación simple y de cascada en serie

para un proceso químico.

Se considera el proceso de regeneración catalítica de la Figura 2.4, en el cual el catalizador de la unidad de reacción es introducido para quemarle el coque depositado en su superficie, el quemado se realiza mediante la introducción de aire para que se lleve la reacción de combustión $C + O_2 \rightarrow CO_2$. Este es un proceso que se lleva a cabo por lotes y el tiempo de regenerado puede ser variable. La situación es la siguiente: si el tiempo de regeneración es muy largo se tienen retrasos en la operación del sistema de reacción, lo que a fin de cuentas se reduce a pérdidas de dinero, pero por otro lado, si el tiempo de regenerado es demasiado corto, el catalizador se va a degradar sufriendo desactivación permanente, lo que también se traduce en pérdidas de dinero. Por lo anterior se hace necesario implementar una técnica de control que optimice la operación del sistema de regeneración. La Figura 2.4 muestra un control de retroalimentación simple, en el cual la medida de temperatura de la cama superior del catalizador T_C entra a un control de temperatura ITC , para ser comparada frente a una referencia dada y generar una acción de control que manipule la válvula de admisión de combustible al horno, de manera que se regule la temperatura del aire de entrada al calentador: Si existen fluctuaciones en la temperatura de entrada de aire o un cambio en el flujo o en las características del combustible del horno, habrá deficiencias en la temperatura de entrada de aire a la unidad de regeneración T_H , lo que significará finalmente ineficiencias en el quemado de coque y se detectará mediante la temperatura de la cama superior de catalizador T_C , que es la variable medida y para que el control simple detecte esto pasará demasiado tiempo debido a la capacitancia del horno y de la unidad de regeneración, por lo que el control será lento e ineficiente. Entonces se hace necesario implementar una técnica de control eficiente y se propone usar un control cascada en serie que se muestra en la Figura 2.5, en esta estructura de control se cuentan dos esquemas: el lazo maestro y el lazo esclavo. La manera de trabajar del control cascada es la siguiente: se mide la temperatura de la cama de catalizador y se manda a un primer controlador de temperatura $ITC1$ y se compara con la temperatura óptima de quemado, el control uno genera una referencia para el segundo controlador, el cual recibe la medida de

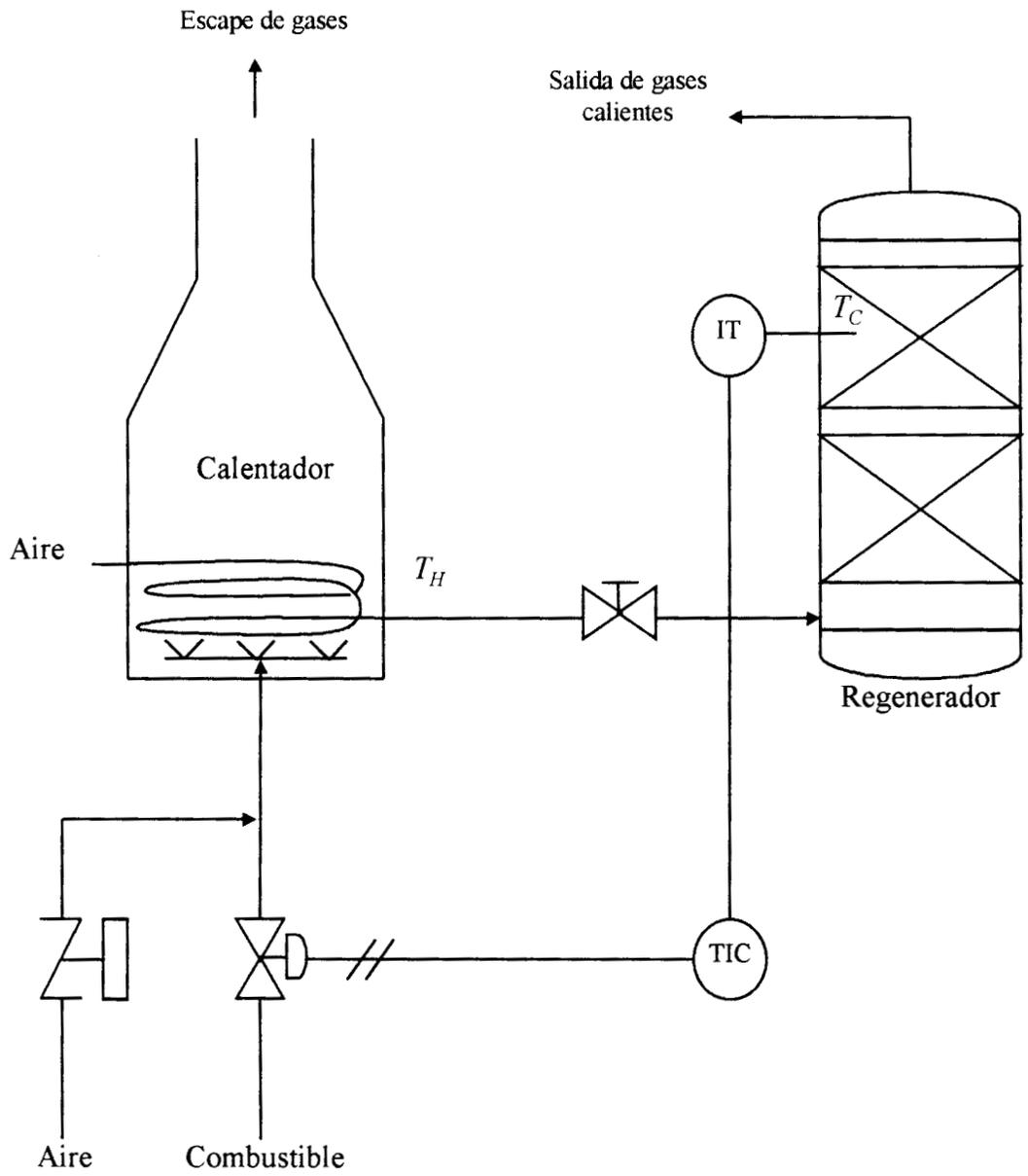


Figura 2.4 Sistema de regeneración de catalizador con un control retroalimentado simple

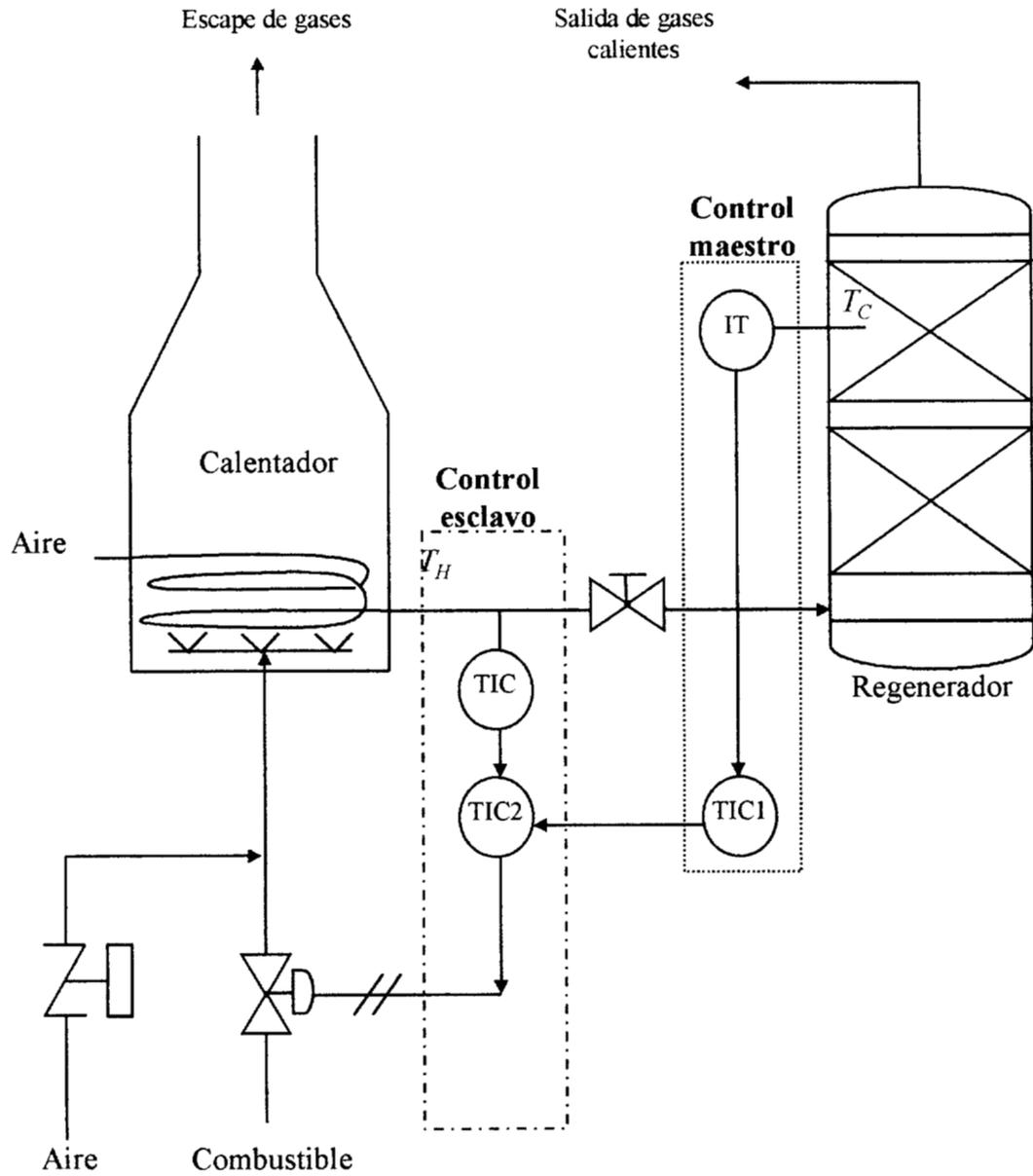


Figura 2.5 Sistema de regeneración de catalizador con un control en cascada serie

la temperatura de salida del aire del calentador y al comparar la referencia pedida por el primer control, para mantener la temperatura de la capa del catalizador, el segundo control de temperatura acciona la válvula de admisión de combustible para mantener la temperatura de aire T_H requerida, de manera que la temperatura de la capa del catalizador se mantenga en el punto deseado, si en el calentador se introduce alguna perturbación T_H se desvía del punto de referencia dado y entonces se inician acciones correctivas antes de que la temperatura de la cama del catalizador cambie. Esto se logra por que se divide el retardo en dos bloques, para compensar las perturbaciones antes de que se afecte la variable controlada del esquema primario o maestro.

2.3.2 Control cascada paralelo

Este sistema de control tiene la característica de que tanto la variable manipulada y la perturbación afectan al lazo de control primario y al lazo secundario a través de acciones paralelas, mientras que en el control cascada en serie ambas acciones afectan al lazo primario y a través de éste último al lazo secundario. Un ejemplo en procesos químicos de este tipo de estructura, es una columna de destilación, Figura 2.6, en la cual la temperatura de un plato es medida sin considerar grandes retrasos y se escoge como variable a controlar. Al mismo tiempo se tienen medidas retardadas de la composición de destilados, las cuales son usadas para corregir la temperatura del plato a un punto de referencia correlacionado con la concentración del producto deseado en los destilados. El primer lazo de control (control maestro), esta dado por la medida de la concentración, la cual entra a un primer control CC , en donde hay una referencia dada, se compara la concentración medida con esta referencia y se induce a través del controlador CC una referencia para la temperatura del plato. En el segundo lazo de control o control esclavo, se tiene la medida de la temperatura de plato la cual practicamente se mide en línea, esta temperatura se compara con la referencia generada en el lazo de control maestro T_{ref} . De acuerdo a la diferencia entre la temperatura de plato medida y la de referencia se genera una acción de control, que consiste en manipular la válvula de recirculación de destilado

a la torre, de manera que al abrirla o cerrarla se modifique la temperatura del plato, lo que a su vez generará la concentración de destilado deseada.

Observaciones

En este capítulo se mostraron las características de los controladores en cascada y la ventaja de usarlos frente a un esquema de control retroalimentado convencional. Esto se logró ejemplificando con diagramas de bloques. Haciendo uso también, de análisis de ecuaciones características de los controladores comparados en sistemas a lazo cerrado. Y por último, usando aplicaciones industriales de procesos químicos. Para determinar que estructura de control en cascada debe aplicarse, se tendrá que hacer un análisis de las variables medidas disponibles y de la forma en como las perturbaciones del proceso afectan a las variables medidas, a las variables controladas y a las variables manipuladas.

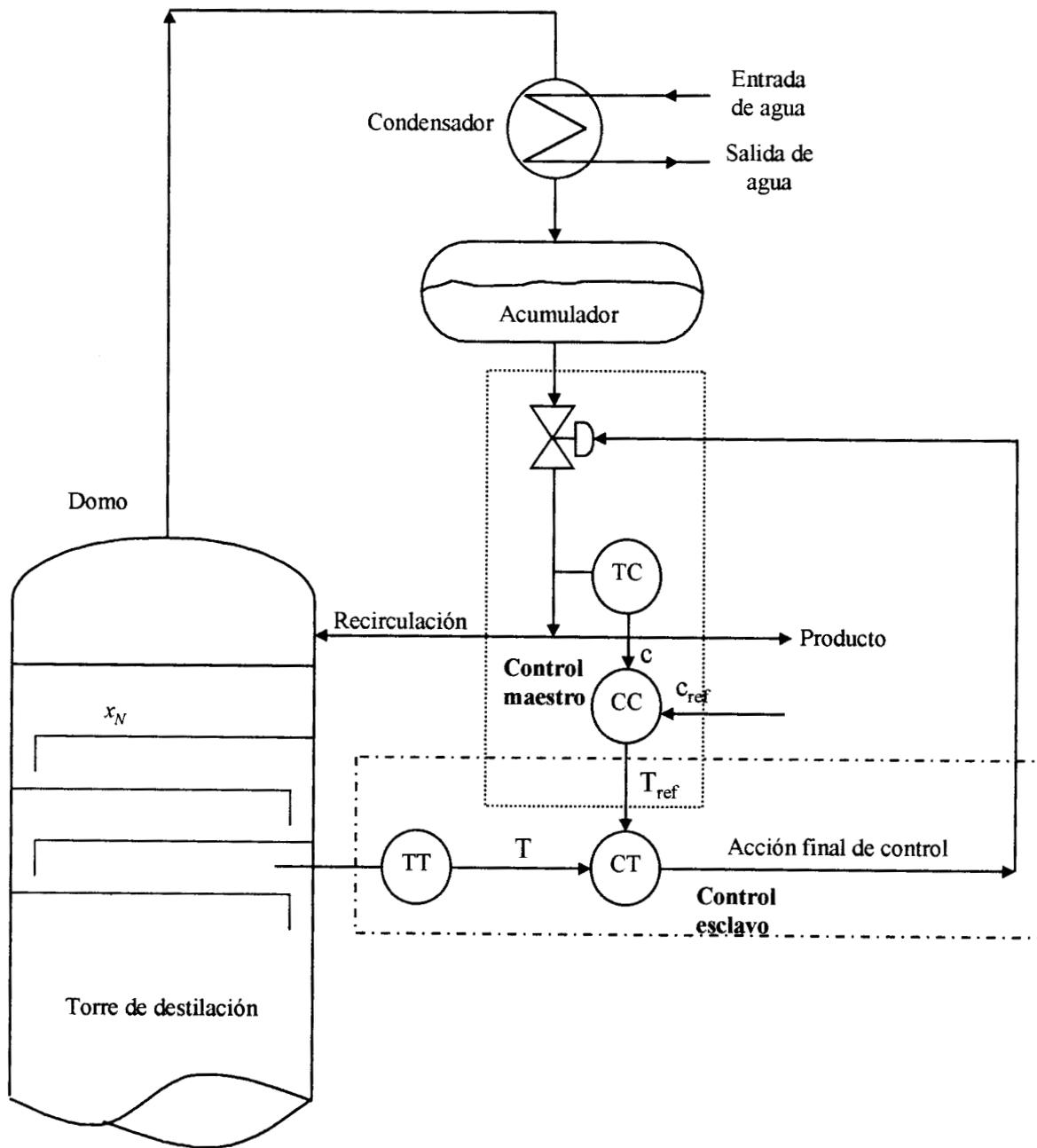


Figura 2.6 Control cascada en paralelo del domo de una columna de destilación

Capítulo 3

Herramientas de control

3.1 Resumen

En este capítulo, se muestran de manera general las herramientas necesarias para el análisis de sistemas y diseño de controladores usados en el capítulo cuatro. Se presentan análisis de sistemas a lazo abierto y a lazo cerrado, obtención de funciones de transferencia y la definición de observabilidad y de controlabilidad. También se muestra la construcción de observadores de orden completo y de orden reducido con ejemplos de aplicación. Por último, se ejemplifica el uso de la técnica de backstepping para el diseño de un esquema de control en sistemas no lineales.

3.2 Introducción

El diseño de controladores de sistemas es un proceso que depende del conocimiento de matemáticas que involucran herramientas tales como transformadas de Laplace, métodos de linearización, solución de ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, entre otras. Cuando se cuenta con estos conocimientos entonces se procede al reconocimiento y a la aplicación de técnicas específicas de diseño de controladores. La función de aplicar una técnica en especial, depende de las características del sistema a controlar y de los datos del sistema conocidos.

Se ha comprobado que el uso de técnicas de transformadas de Laplace y linealización son útiles para el análisis de la dinámica de los procesos y diseño de sistemas de control, ya que proporcionan una visión general del comportamiento de una gran variedad de procesos.

La representación gráfica de las funciones de transferencia por medio de diagramas de bloques, es una forma útil de representarlas para el diseño de control de procesos.

En los procesos químicos existen variables que son conocidas y variables que se pueden inferir, del conocimiento de ambas variables dependerá la factibilidad de construir un controlador que funcione, ya que si con anticipación se determina que el sistema al cual se le va aplicar una técnica de control no es controlable, entonces de antemano se ahorran recursos innecesarios o se busca la manera de aplicar una técnica de control que funcione, por ejemplo, se descoplan variables del sistema. Por otro lado si todas las variables no son conocidas, pero si se pueden inferir de alguna manera u observar, entonces valdrá la pena aplicar un análisis de controlabilidad y posteriormente se diseñarán alguna o algunas técnicas de control al sistema. De esta forma se cuenta con una estructura que indica las herramientas y su aplicación en el diseño de controladores.

3.2.1 Transformadas de Laplace

Se define lo que es la transformada de Laplace y su uso en los sistemas de control, debido a que para el diseño de los controladores del capítulo cuatro, se requieren análisis de estabilidad de los sistemas manejados.

La transformada de Laplace es una función del tiempo, $f(t)$, que se define mediante la siguiente formula:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

donde: $f(t)$ es una función del tiempo; $F(s)$ es la transformada de Laplace correspondiente; s es la variable de la transformada de Laplace; t es el tiempo. En la

aplicación de la transformada de Laplace al diseño de sistemas de control, las funciones del tiempo son las variables del sistema, inclusive la variable manipulada y la variable controlada, las perturbaciones, el flujo a través de la válvula de control y cualquier otra variable intermedia.

Solución de ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace

Para ejemplificar el uso de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, considerar la siguiente ecuación:

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y(t) = bx(t) \quad (3.1)$$

Para resolver la ecuación anterior se puede plantear como sigue: dados los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 y b , las condiciones iniciales apropiadas y la función $x(t)$, encontrar la solución de la ecuación (3.1).

La función $x(t)$ se conoce como variable de entrada y $y(t)$ como la función de salida.

Solución

Paso 1. Obtención de la transformada de Laplace de la ecuación (3.1).

$$\mathcal{L} [a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y(t)] = \mathcal{L} [bx(t)]$$

$$\mathcal{L} [a_2 \ddot{y}] = a_2 [s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)]$$

$$\mathcal{L} [a_1 \dot{y}] = a_1 [sY(s) - y(0)]$$

$$\mathcal{L} [a_0 y(t)] = a_0 Y(s)$$

$$\mathcal{L} [bx(t)] = bX(s)$$

sustituyendo las transformaciones de cada termino en la ecuación original

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) - (a_2 s + a_1)y(0) - a_2 \dot{y}(0) = bX(s) \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) es una ecuación algebraica con variable s .

Paso 2. Se usa la ecuación algebraica que se resuelve para la variable de salida $Y(s)$, en términos de la variable de entrada y de las condiciones iniciales.

$$Y(S) = \frac{bX(s) + (a_2s + a_1)y(0) + a_2 \dot{y}(0)}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (3.3)$$

Paso 3. Inversión de la ecuación resultante para obtener la variable de salida en función del tiempo $y(t)$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{bX(s) + (a_2s + a_1)y(0) + a_2 \dot{y}(0)}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \right]$$

donde la expresión general de la transformada queda identificada de la siguiente forma:

$$Y(S) = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \right] X(s) \quad (3.4)$$

En este procedimiento los dos primeros pasos son relativamente fáciles y directos, todas las dificultades se concentran en el tercer paso. La utilidad de la transformada de Laplace en el diseño de sistemas de control tiene como fundamento el hecho de que rara vez es necesario el paso de inversión, debido a que todas las características de la respuesta en tiempo $y(t)$ se pueden reconocer en los términos de $Y(s)$.

Función de transferencia.

Si las variables $X(s)$ y $Y(s)$ de la ecuación (3.4), $Y(S) = \left[\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \right] X(s)$, corresponden con las respectivas transformadas de las señales de entrada y de salida de un proceso o de un sistema de control, el término entre corchetes representa por definición, la *función de transferencia* del proceso. La función de transferencia proporciona un mecanismo útil para el análisis del comportamiento dinámico y el diseño de sistemas de control.

Valores propios y estabilidad

Al realizar un análisis de obtención de raíces de ecuaciones diferenciales con el método de la transformada de Laplace se observó que el número de raíces o valores característicos de la ecuación diferencial se obtienen al resolver la ecuación

representada por el denominador de la función de transferencia de la ecuación (3.4)

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3.5)$$

Se dice que la expresión (3.5) es la ecuación característica de la ecuación diferencial y del sistema. Se define que la ecuación diferencial es estable cuando su respuesta en tiempo permanece limitada, de manera que todos los valores característicos deben tener partes reales negativas.

Con lo anterior se pueden entonces, obtener los valores característicos de un sistema dinámico, determinar su estabilidad y observar su comportamiento a lazo abierto (sin control), a diferentes funciones de entrada como funciones escalón o rampas, para detectar el orden del sistema a controlar cuando no existe un modelo bien definido o cuando este modelo se puede expresar en forma más simple.

Lo que sigue ahora es hacer uso del álgebra de bloques para obtener la función de transferencia del sistema.

Funciones de transferencia y álgebra de bloques

La función de transferencia ya se definió, como la relación de la transformada de Laplace de la variable de salida sobre la transformada de Laplace de la variable de entrada. La función de transferencia se representa generalmente por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1)}{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1)} \quad (3.6)$$

donde: $G(s)$ = a una representación general de una función de transferencia; $Y(s)$ = a la transformada de Laplace de la variable de salida; $X(s)$ = a la transformada de Laplace de la variable de entrada y K, a_{es}, b_{es} = son constantes.

En la ecuación (3.6) K representa la ganancia del sistema, las otras constantes (a_{es} y b_{es}) tienen unidades de *tiempo* ^{i} donde i representa la potencia de la variable de Laplace y s es la variable de Laplace con unidades de *tiempo*⁻¹.

La función de transferencia define completamente las características de estado estacionario y de la dinámica de un sistema, por lo que se dice que la repuesta total del

sistema se describe mediante una ecuación diferencial lineal. La respuesta define si un sistema es estable o inestable y si su comportamiento a cierta entrada es de tipo oscilatorio o de cualquier otro tipo.

Algunas características de las funciones de transferencia son:

1. Para que el sistema sea causal, se requiere que $n \geq m$
2. $n - m = \rho$, define el grado relativo del sistema

3.2.2 Diagramas de bloques

La representación gráfica de las funciones de transferencia por medio de diagramas de bloques, es una herramienta que ayuda a visualizar mejor un sistema y su interacción con los sistemas de control. Los diagramas de bloques constan de cuatro elementos básicos: flechas, puntos de sumatorias, puntos de derivación y bloques, en la Figura 3.1 se muestran estos tres elementos. Las flechas indican flujo de información y representan a las variables del proceso ó a las señales de control. Los puntos de sumatorias indican la suma algebraica de las flechas que entran. Los bloques representan la operación matemática en forma de función de transferencia. Cualquier diagrama de bloques se puede manejar de forma algebraica, también en la Figura 3.1 se muestran algunas reglas del álgebra de los diagramas de bloques.

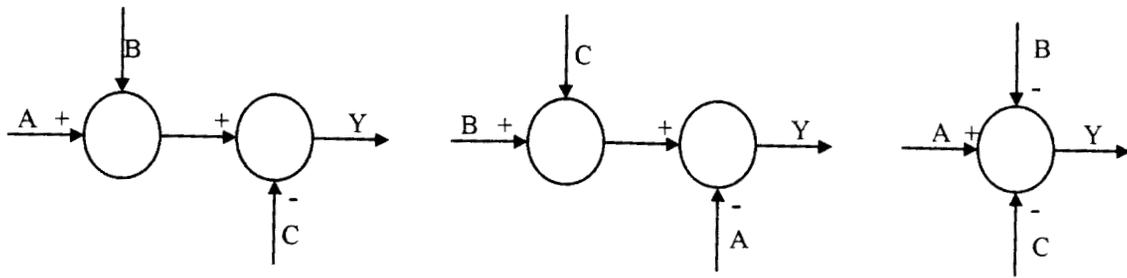
Ejemplo. Obtención de la función de transferencia que relaciona a $Y(s)$ con $X_1(s)$ y $X_2(s)$, a partir del diagrama de bloques de la Figura 3.2.

El diagrama de bloques (3.2) se puede reducir a la forma de la Figura 3.2a entonces:

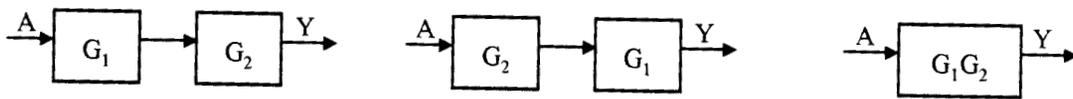
$$Y(s) = G_3(G_1 - G_2)X_1(s) + (G_4 - 1)X_2(s)$$

a partir de la cual se pueden determinar las dos funciones de transferencia que se desean.

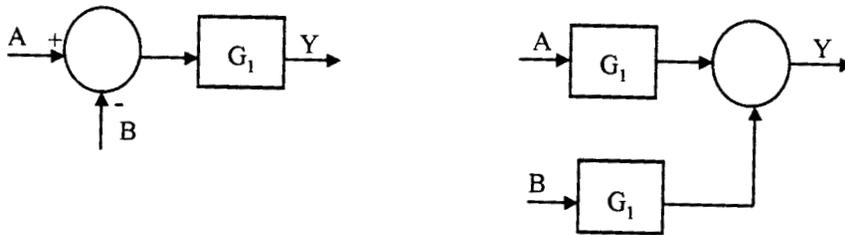
1. $Y = A - B - C$



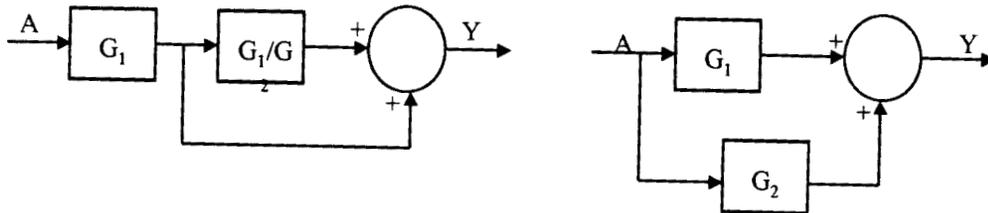
2. $Y = G_1 G_2 A$



3. $Y = G_1(A - B)$



4. $Y = (G_1 + G_2)A$



5. $Y = G_1 A + G_2 B$

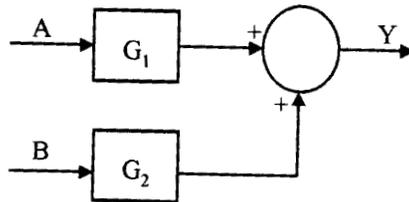


Figura 3.1 Reglas del álgebra de los diagramas de bloques

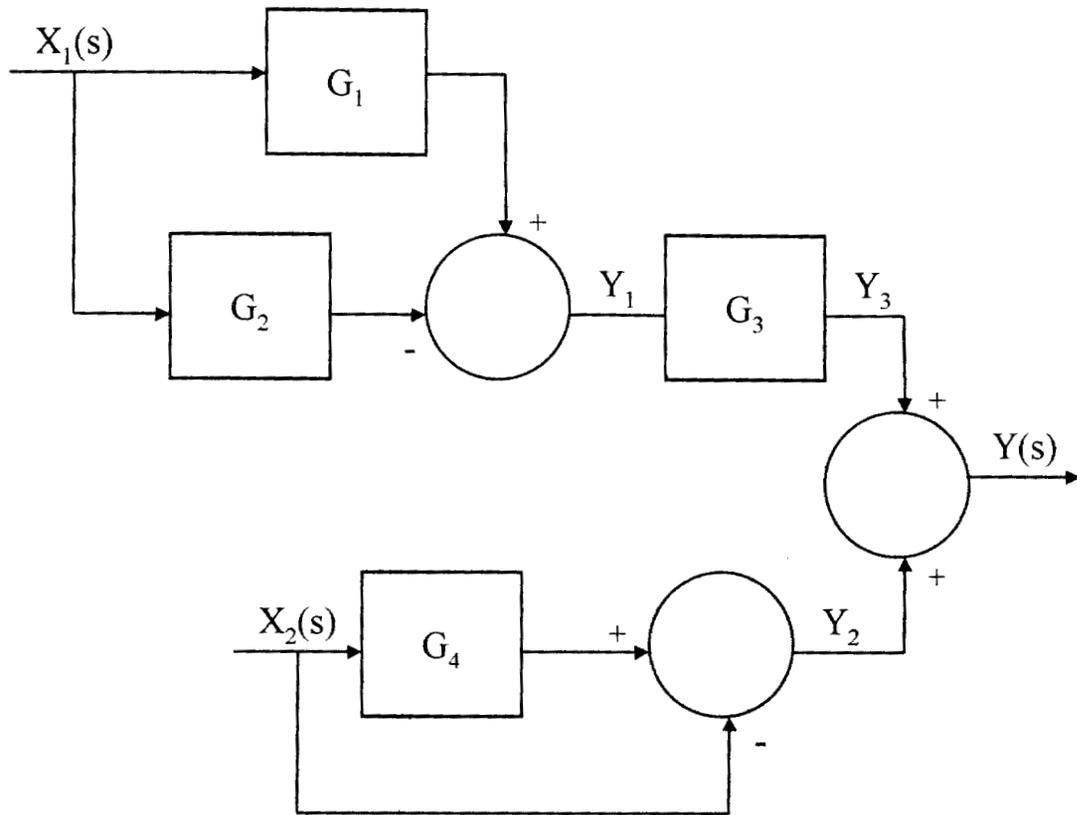


Figura 3.2 Ejemplo usado para la obtención de la función de transferencia que relaciona a $Y(s)$ con $X_1(s)$ y $X_2(s)$.

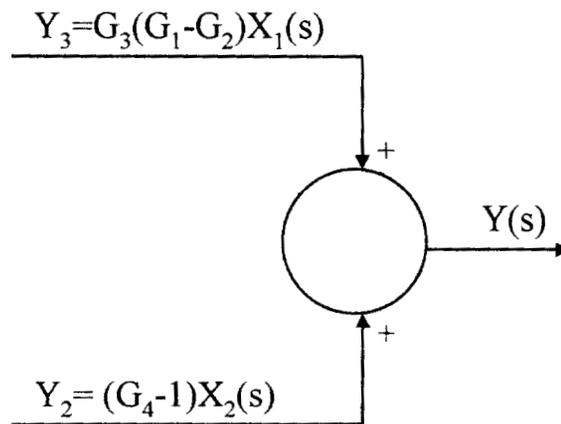


Figura 3.2a Representación minimizada del proceso representado en la Figura 3.2

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = G_3(G_1 - G_2)$$

$$\frac{Y(s)}{X_2(s)} = G_4 - 1$$

Con esta parte se da por terminado el uso de transformadas de Laplace y del uso de diagramas de bloques, a continuación se muestra la construcción de observadores de orden completo y de orden reducido.

3.2.3 Definición de observabilidad

Esta parte tiene el fin de mostrar las herramientas usadas para reconstruir incertidumbres, ya que los sistemas ejemplificados en el capítulo cuatro necesitan de estimación de incertidumbres.

La estimación de incertidumbres se realiza para que el desempeño de los controladores cascada, diseñados en el capítulo cuatro sean robustos. Entonces se va proceder a definir la noción de observabilidad haciendo uso de sistemas sencillos y posteriormente se va a definir que es un observador de orden reducido, que finalmente, es lo que se uso para la estimación de incertidumbres de los sistemas de los ejemplos 1 y 2 del capítulo cuatro.

Suponer que se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= cx \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde: x = representa los estados del sistema; A = es una matriz de orden n correspondiente al número de estados del sistema; u = conjunto de entradas de control; B = matriz de orden m correspondiente al número de entradas de control; y = salida medida; C = matriz correspondiente a las salidas medidas.

Se tiene que el problema de observabilidad es un problema de reconstrucción de

condiciones iniciales, por ejemplo, se toma el caso de un reactor tanque agitado continuo en el cual por medio de la temperatura y con el modelo linearizado del sistema se puede inferir la concentración

Volviendo al problema anterior, se dice que el sistema de ecuaciones (3.7) es observable si la dinámica de los estados $x(t)$ se puede reconstruir a partir de la dinámica de la salida medida $y(t)$. Entonces, se construye una matriz de observabilidad de rango m que corresponde al número de estados $x(t)$, la forma de la matriz es la siguiente:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} CI \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde: I es la matriz identidad de orden $n \times n$

Si el rango de la matriz (\mathcal{O}) es $m = n \Rightarrow$ se dice que el sistema (3.7), $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = cx$, es observable.

A continuación se muestran ejemplos de distemas lineales, en donde se determina si los sistemas son o no observables.

ejemplos

(1)

$$\dot{x}_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

$$y = x_1$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(\mathcal{O}) = 1$$

$$n > R(\mathcal{O})$$

Entonces, se dice que el sistema no es observable

(2)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$y = x_1$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\mathcal{O}) = 2$$

$$n = R(\mathcal{O})$$

Entonces, se dice que el sistema es observable

Procedimiento de reconstrucción

a) se mide $y \rightsquigarrow$ para poder reconstruir x_1 ya que $y = x_1$

b) se deriva $y \rightsquigarrow \dot{y} = \dot{x}_1$ y del modelo $\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow x_2(t) = \dot{y}(t)$

Reconstrucción de estados mediante el uso de observadores.

Para reconstruir los estados del sistema no medidos y que son observables se procede a la construcción de observadores, entre los cuales se encuentran el observador tipo Luenberger, el filtro de Kalman, etc.

Primero para reconstruir los estados se hace una copia del sistema.

Sistema :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + k(y - \hat{y}) \quad (3.9)$$

$$y = c\hat{x}$$

donde: k es la ganancia del observador y $(y - \hat{y})$ es una corrección tipo gradiente

Y se cuenta con las siguientes condicionantes: si $\hat{x}_0 = x_0 \Rightarrow \hat{x}(t) \equiv x(t)$
 $t > 0$

Como seleccionar k ?

Criterio. que $\hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x(t)$

A continuación se define un error de observación para asegurar que la estimación de los estados observados tienda al valor real de manera asintóticamente estable, es decir, que tienda a cero conforme el tiempo tienda a infinito.

El error de observación es:

$$e = x - \hat{x}$$

de manera que:

$$e(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

obtención de la dinámica del error:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - k(y - \hat{y}) \\ \dot{e} &= A(x - \hat{x}) - k(y - \hat{y}) = Ae - k(y - \hat{y}) \\ \dot{e} &= A(x - \hat{x}) - k(cx - c\hat{x}) = A(x - \hat{x}) - kc(x - \hat{x}) \\ \dot{e} &= e(A - kc)\end{aligned}$$

si $A_0 = (A - kc) \Rightarrow$

$$\dot{e} = A_0 e$$

de manera que:

$$\dot{e} - A_0 e = 0$$

por lo que A_0 debe ser positiva para que el error tienda asintóticamente a cero y los valores propios de A_0 deben tener parte real negativa, por lo que se dice que la matriz A_0 es Hurwitz. Entonces, la designación de valores de k (la ganancia del observador), debe hacerse de manera que la matriz A_0 sea Hurwitz y de esta forma se asegura que el error de observación converga asintóticamente a cero.

Generalizando al observador construido mediante la ecuación (3.9), $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + k(y - \hat{y})$ y $y = c\hat{x}$, se ve que consta de n estados en donde n es el orden de realización de los estados que están siendo observados o reconstruidos. Sin embargo, Luenberger (1964), encontró que el orden del observador puede ser menos de n ya que las salidas observadas están relacionadas de manera lineal con los estados del sistema de la forma $y(t) = cx(t)$. Por lo que se dice que es suficiente observar $n - 1$ estados y con esto se puede calcular el último estado mediante la relación lineal antes mostrada. La construcción de un observador de orden reducido no es complicada, sobre todo si se implementa en un circuito integrado.

Construcción de observadores de orden reducido.

Volviendo al sistema (3.7)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

donde

$$c = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} x(t) = x_n(t)$$

con esto se puntualiza que existe un estado directamente observable,

$$\hat{x}_n(t) = y(t) = x_n(t)$$

con lo que solo se necesita estimar los estados $x_r = [x_1, \dots, x_{n-1}]$, entonces, para calcular la derivada del estado n se tiene lo siguiente:

$$\dot{x}_n(t) = a_{nn}x_n(t) + c_r x_r(t) + g_n u(t)$$

la ecuación anterior provee de cierta información para el cálculo de x_r ; entonces se define la siguiente igualdad:

$$y_r(t) = \dot{y}(t) - a_{nn}y(t) - g_n u(t)$$

con lo cual se puede escribir que

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + b_r y_r(t) + g_r u(t) \\ y_r(t) &= c_r x_r(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

donde $y_r(t)$ se determina haciendo uso de medidas de $y(t)$ y de $u(t)$ de manera que se puede realizar un observador, sin embargo, existe el problema de que hay una derivada de y que también se necesita para el cálculo de $y_r(t)$. Ignorando temporalmente esta dificultad, se tiene que la ecuación (3.10) representa el estado $n - 1$ $x_r(t)$ de manera que se puede construir un observador de orden reducido que es:

$$\dot{\hat{x}}_r(t) = A_r \hat{x}_r(t) + b_r y(t) + g_r u(t) + k_r [y_r(t) - c_r \hat{x}_r(t)] \quad (3.11)$$

donde k_r es una matriz de $(n-1) \times 1$, entonces la dinámica del error de reconstrucción esta dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} e_r(0) &= x_r(0) - \hat{x}_r(0) \\ \dot{e}_r &= (A_r - k_r c_r) e_r \end{aligned} \quad (3.11a)$$

en la ecuación 3.11a el par $\{c_r, A_r\}$ es observable, de manera que el error de reconstrucción se puede hacer converger a cero de manera rápida. Entonces se ha obtenido un observador de orden reducido con el problema de estimación de una derivada de la salida medida, el cual se puede solventar de la siguiente forma:

Se sustituye la expresión de $y_r(t)$ en la ecuación del observador y definiendo un nuevo estado se tiene lo siguiente:

$$\dot{\hat{x}}_r(t) = A_r \hat{x}_r(t) + b_r y(t) + g_r u(t) + k_r [\dot{y}(t) - a_{nn} y(t) - g_n u(t) - c_r \hat{x}_r(t)]$$

definiendo $\theta = \hat{x}_r(t) - k_r y(t)$

$$\dot{\theta} = A_r \hat{x}_r(t) + b_r y(t) + g_r u(t) - k_r [a_{nn} y(t) + g_n u(t) + c_r \hat{x}_r(t)]$$

$$\hat{x}_r(t) = \theta + k_r y(t) \quad (3.12)$$

entonces la dinámica del nuevo estado es:

$$\dot{\theta} = \theta(A_r - k_r c_r) + (g_r - g_n k_r)u(t) + [b_r - a_{nn} k_r + A k_r - k_r c_r k_r]y(t) \quad (3.13)$$

con condiciones iniciales de :

$$\theta(0) = 0 \quad (3.13a)$$

De esta forma queda constituido el observador de orden reducido para x_r , con las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) y la condición inicial (3.13a).

3.2.4 Controlabilidad

Se dice que un sistema es alcanzable, si al partir de cualquier condición inicial $x(t)$ se puede llegar a cualquier estado

$x(T)$ en un tiempo arbitrario T .

Ejemplificando lo anterior, para un sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x &\in R^n, u \in R^m \end{aligned}$$

Se dice que el par (A, B) es alcanzable si y solo si existe una matriz $\zeta = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ cuyo rango es igual al número de estados $x(t)$, es decir, $R(\zeta) = n$. Entonces para cuestiones de controlabilidad se dice que el par (A, B) es controlable, si se cumple la condición de alcanzabilidad y si además si existe una entrada de control $u(t)$, tal que dado un punto, esta entrada de control puede llevar a los estados al origen.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como se puede observar, el rango de la matriz ζ es igual a uno y es menor que el número de estados (x_1, x_2) , que es dos, es decir: $R(\zeta) < n$, por lo que se dice que el sistema no es alcanzable ni tampoco es controlable.

Por otro lado, n también representa el número de direcciones donde se puede incidir arbitrariamente al mover la entrada de control u . Entonces para que un sistema pueda llevarse de un punto inicial arbitrario a cualquier otro punto, que puede ser el origen, debe ser alcanzable y controlable, de manera que exista una entrada de control que use alguno o algunos de los estados medidos, para poder realizar el esfuerzo de control necesario para alcanzar el estado final pedido.

Las nociones de alcanzabilidad y controlabilidad se requieren para saber si va existir una entrada de control y por tanto un controlador que sea capaz de llevar a un sistema a cualquier punto requerido. Entonces, cuando se dice en el capítulo cuatro que el sistema del ejemplo uno no es controlable en estructuras de control cascada de simple entrada simple salida, se está diciendo que no se van a poder alcanzar los estados pedidos a un controlador de estas características, por que el análisis de controlabilidad ya indica que no va existir una entrada de control que lo haga posible¹ bajo esas condiciones para el diseño del controlador. Entonces se requerirá una técnica de desacoplamiento de estados entre las temperaturas del reactor y del sistema de referencia, para lo cual se va a hacer uso de la técnica de back-stepping que a continuación se describe.

¹Para más detalles ver referencia (*Russo y Bequette, Ind. Eng. Chem. Res.* 1997, vol. 36 páginas 2274-2275.)

3.2.5 Backstepping

Esta técnica se aplica para sistemas no lineales con estructura tipo cascada, la idea principal es aplicar el diseño a una parte del sistema con el fin de hacer un desacoplamiento de estados y de contrarrestar las no linealidades por separado. Lo cual se logra a través del uso de entradas virtuales o *pasivas*². Una vez que se aplica el diseño a una etapa o parte del sistema, esto se hace recursivo con las demás etapas hasta obtener la entrada real de control. Una característica de esta técnica de diseño, es que se emplean expresiones analíticas de las derivadas en tiempo de la ley de control obtenidas en una etapa anterior. La flexibilidad que ofrece esta técnica en su uso, es que puede usarse para evitar cancelaciones de polos, lo que a su vez incide en la estabilidad del sistema. Y también sirve para robustecer las acciones de los controladores. Para tener una idea más clara del uso de esta técnica se muestra un ejemplo.

ejemplo

Se cuenta con el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde θ es un parámetro incierto del cual se sabe que pertenece a un intervalo de valores comprendido entre -1 y 1 , de manera que $\theta \in [-1, 1]$. El sistema (3.14) puede representarse por el diagrama de bloques de la Figura 3.3, el cual muestra un esquema retroalimentado. Para $u = 0$ el sistema muestra dos tipos de inestabilidad: la primera es una estabilidad lineal debida a el doble integrador (x_2, x_3) y una inestabilidad no lineal en el subsistema $\dot{x}_1 = \theta x_1^2$. El objetivo de control es asegurar que el sistema sea asintóticamente estable por medio de alguna técnica de

² *Pasivas: se refiere a denominar variables de salidas de manera que el sistema sea globalmente asintóticamente estable.*

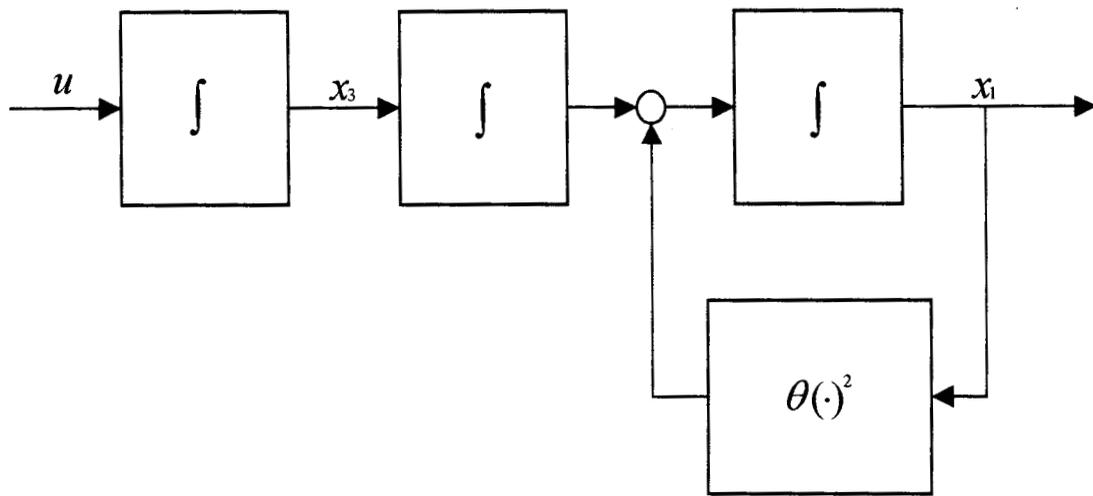


Figura 3.3 Diagrama de bloques de un sistema estrictamente retroalimentado

diseño. Esto se va a lograr mediante el uso una salida *pasiva* y de una función de almacenamiento que va a ser usada como función de Liapunov. Lo anterior se va hacer de manera recursiva hasta obtener la entrada real de control u .

Obtención de salidas de control pasivas. Existen dos propiedades que debe cumplir una salida *pasiva*: la primera es que debe ser de grado relativo uno y la segunda que debe ser de fase mínima. Para obtener una salida de grado relativo uno que sea usada en el sistema (3.14), ésta debe ser función de x_3 . Entonces, se define $y_3 = x_3 - \alpha_2(x_1, x_2)$. A continuación se tiene que seleccionar $\alpha_2(x_1, x_2)$ tal que se satisfaga el requerimiento de que sea de fase mínima, lo que significa que el sistema sea de manera global aintóticamente estable cuando existe dinámica cero. Se establece entonces que $y_3 \equiv 0$ lo cual muestra que la dinámica cero del subsistema es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{3.15}$$

Para el subsistema (3.15) se debe encontrar ahora una ley de control estabilizante $\alpha_2(x_1, x_2)$, de manera que ahora se presenta el problema de estabilización del subsistema formado. Sin embargo, este nuevo problema de estabilización es de un orden menor al del sistema original, tercer orden (ecuación 3.14). Entonces, el problema original es reducido a estabilizar un subsistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3\end{aligned}\tag{3.16}$$

en el cual x_3 es el "control". Ahora para resolver este problema se necesita construir una salida virtual o salida *pasiva* que se va a definir como $y_2 = x_2 - \alpha_1(x_1)$, de manera que ahora se va a diseñar $\alpha_1(x_1)$ para asegurar globalmente estabilidad

asintótica de la dinámica cero en el subsistema formado que es:

$$\dot{x}_1 = \alpha_1(x_1) + \theta x_1^2 \quad (3.17)$$

Una vez más, se ha reducido el problema, de manera que ahora se tiene que estabilizar el subsistema de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta x_1^2 \quad (3.18)$$

en el cual x_2 es el "control" y $y_1 = x_1$ es la salida.

Diseño de salidas de control "pasivas": definición de back-stepping. La definición de salidas pasivas y_1 , y_2 y y_3 se realiza en dirección ascendente de y_3 a y_2 y de y_2 a y_1 . Estas salidas se obtienen construyendo las funciones $\alpha_1(x_1)$ y $\alpha_2(x_1, x_2)$, cada una de estas funciones tienen el rol de una "ley de control" de la siguiente forma: $\alpha_1(x_1)$ para x_2 como un *control virtual* para el subsistema (3.18), y $\alpha_2(x_1, x_2)$ para x_3 como un *control virtual* para el subsistema (3.16). Este procedimiento muestra un diseño recursivo que se lleva a cabo en una dirección descendente, diseñando primero $\alpha_1(x_1)$, luego $\alpha_2(x_1, x_2)$ y por último $\alpha_3(x_1, x_2, x_3)$ para el control real u . En esta dirección descendente se comienza por el subsistema escalar (3.18), el cual es aumentado posteriormente por una ecuación a la expresión (3.16) y de nuevo aumentado por una ecuación al sistema original (3.14). Si esto se visualiza en un diagrama de bloques se observaría que se traza una trayectoria en retroceso empezando con el integrador más alejado de la entrada de control real u , por lo cual esta técnica de diseño se denomina *back-stepping*³. Para los casos presentados en el capítulo cuatro, no es necesario tener convergencia globalmente asintótica (**GAS**, siglas en inglés), cuando exista dinámica cero, por lo que no se construirán funciones de Liapunov, si no más bien, se procede a usar variables de entrada-simple y de salida simple. Sin embargo, con el fin de ilustrar la esencia de la técnica se mostró usando funciones de Liapunov.

³*back-stepping: paso en retroceso*

Entonces, para poder construir los sistemas robustos de control cascada del capítulo cuatro, usando técnicas no lineales, se usaran observadores de orden reducido y la técnica de back-stepping. Esto, con el fin de asegurar buen desempeño de estos controladores y con la seguridad de que van a mantener las referencias impuestas.

Capítulo 4

Casos de Estudio

4.1 Resumen

En esta parte del trabajo se muestran dos ejemplos de aplicación de la estructura de control en cascada.

El primero trata de un reactor tanque agitado continuo con dinámica en el sistema de enfriamiento, en el cual se trabaja alrededor de un punto de equilibrio inestable y cuyo modelo se obtuvo de un artículo de Bequette (1996), en este ejemplo se trabaja una estructura de control cascada en serie usando técnicas de back-stepping, para desacoplar a la temperatura del reactor y la temperatura del sistema de enfriamiento. En este ejemplo ocurre una situación interesante, ya que se acostumbra considerar al sistema de enfriamiento con dinámica mucho mayor a la del reactor y por tanto no se toma en cuenta, mientras que para los datos particulares del sistema queda establecido (Bequette y Russo 1997), que de no considerar a la dinámica del sistema de enfriamiento no se tendrá una representación real del sistema; además, si se desea implementar una técnica de control en cascada de simple entrada simple salida, se observa que no es adecuada para controlar la operación del sistema, ya que la temperatura del reactor y la temperatura del sistema de enfriamiento, como ya se menciono, están acopladas a través de las ecuaciones dinámicas del sistema, es decir que para calcular la temperatura del reactor necesito la temperatura del sistema

de enfriamiento y viceversa, el objetivo de proponer el control cascada en serie es aprovechar la medida adicional de la temperatura del sistema de enfriamiento, de manera que se mejore el desempeño y la velocidad de respuesta del controlador, aun contando con incertidumbres en el modelo usado. El primer ejemplo se comenzo a trabajar, con la idea de considerar a la dinámica de la chaqueta como una dinámica no modelada, partiendo de la hipótesis de que al no tomarla en cuenta se tendrán problemas de controlabilidad y por supuesto de dimensionamiento de equipos, por lo que se procedió a tratar de diseñar controladores tipo PI, los cuales no funcionaron al activar la dinámica del sistema de enfriamiento y posteriormente se usaron técnicas IMC para asegurar robustez y desempeño al calcular los valores de sintonizado para los controladores propuestos; sin embargo, no se logró controlar el sistema. Entonces, de bibliografía se encontró que el uso de técnicas de back-stepping era adecuada para desacoplar variables y para asegurar convergencia asintótica, entonces, se procedió a realizar el diseño de un control cascada bajo las condiciones que en este resumen se marcan.

El segundo ejemplo también trata de un reactor tanque agitado continuo, que considera dinámica en la ecuación de la concentración de reactante y en la temperatura del reactor, en este ejemplo se cuenta con tres puntos de equilibrio, de los cuales uno es inestable y es el punto de operación que se desea regular, se considera que se tienen medidas de la concentración a la salida del reactor y medidas de la temperatura del reactor, el control diseñado actua para regular la concentración pedida del punto de equilibrio. Como las medidas de la concentración están retardadas con respecto a la evolución del sistema, se usa una estructura de control cascada en paralelo, para aprovechar las medidas practicamente en línea de la temperatura del reactor.

Ambos ejemplos, se trabajaron con el sistema no lineal y considerando incertidumbres en los términos de reacción, en las temperaturas de entrada al sistema e incertidumbres en el coeficiente de transferencia de calor:

Los esquemas de control en cascada en serie y cascada en paralelo se comparan frente a un esquema de control de transferencia global sin usar medidas intermedias, el desarrollo del control global se muestra en conjunto con los ejemplos. Para ambos

ejemplos el control global se diseña usando técnicas de retroalimentación linearizada y usando observadores de alta ganancia para la estimación de incertidumbres.

4.2 Introducción

En la industria química el uso de reactores constituye una primera etapa de transformación de los materiales y su operación sienta las bases para controlar la producción y calidad del material deseado. Por lo que una operación eficiente de estos sistemas es necesaria y se puede llevar a cabo mediante el diseño de diversas estrategias de control, la elección de una de ellas dependerá de las características particulares del sistema de trabajo y de las medidas disponibles en línea, como presiones, temperatura, concentraciones, índices de refracción, etc.

Motivación

Los reactores tipo tanque agitado continuo (**RTAC**), presentan problemas de operación significativos debidos a la presencia de comportamientos complejos a lazo abierto (sin control), tales como multiplicidad de estados estacionarios, puntos de equilibrio de ignición y extinción, sensibilidades paramétricas, oscilaciones e incluso comportamientos caóticos. Estas características demuestran la necesidad del diseño de esquemas de control y su posible dificultad. En algunos casos, es desable operar un **RTAC** en un punto de equilibrio inestable, ya que la reacción tendrá un buen rendimiento mientras la temperatura se mantiene baja, lo cual previene el desarrollo de reacciones laterales o degradación del catalizador, según sea el caso. Por lo que los **RTAC** son buenos candidatos para el diseño de controladores en cascada, de manera que se aprovechen medidas hechas prácticamente en línea y que son fáciles de medir, como temperaturas y presiones, así como también medidas retardadas como concentración, índices de refracción, etc., de manera que al usar estas medidas el control disminuya el tiempo de respuesta y su desempeño sea más rápido y mejor.

Antecedentes

Un caso particular que ha sido objeto de estudio es un **RTAC** estándar con reacción de primer orden irreversible y exotérmica, ya que tanto como ingenieros químicos y matemáticos han hecho diversos estudios para obtener técnicas de análisis de estabilidad, obtención de multiplicidad de soluciones en estado estacionario y análisis de comportamiento dinámico (*Poore, 1973; Golubtisky y Keyfitz, 1980; Guckenheimer, 1986; Aris y Amundson, 1958; Uppal et. al., 1974; Balakotaiah y Luss, 1982*). Aris y Amundson (1958), examinaron la estabilidad, control y la dinámica local del **RTAC** estándar usando el método de linealización local de Lyapunov y las técnicas de análisis de Poincare. Hlavacek (1970) estudio estabilidad, multiplicidad y comportamientos oscilatorios del **RTAC** estándar, con lo cual determinó las condiciones necesarias para la existencia de multiplicidad de soluciones, encontrando que las reacciones altamente exotérmicas son causa de este comportamiento. Uppal *et. al.* (1974, 1976) clasificó diferentes tipos de dinámicas y de multiplicidad de acuerdo a los valores de los parámetros del sistema. Schmitz *et. al.* (1979) comparó los métodos teóricos desarrollados por Uppal *et. al.*, con estudios experimentales de una reacción homogénea de segundo orden entre el tiosulfato de sodio y el peróxido de hidrógeno, encontrando concordancia con respecto a la teoría de predicción de histeresis y comportamientos oscilatorios. Ray (1982), mostró que existen problemas de controlabilidad y operabilidad cuando hay perturbaciones en los parámetros del sistema y se usa un control proporcional para la regulación de la temperatura de un **RTAC**, con un modelo de dos estados (concentración y temperatura). Chang y Calo (1979) utilizaron una teoría de caos para determinar la multiplicidad de salidas para una reacción de orden n en un **RTAC**. Golubitsky y Kreyfitz (1980), y Balakotaiah y Luss (1981, 1983) usaron la teoría de la singularidad (extensión de la teoría de caos), para encontrar condiciones analíticas exactas, para la obtención del comportamiento de multiplicidad de soluciones en el modelo estándar del **RTAC**. Balakotaiah y Luss predijeron la multiplicidad de soluciones para una serie de valores, haciendo uso del número de Danköehler. Planeaux y Jensen (1986) consideraron el caso de un **RTAC** con capacitancia termal, causada por las paredes e

intercambiadores de calor del reactor, encontrando casos de bifurcación degenerados (en donde la hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf no es válida), los cuales muestran una variedad de comportamientos dinámicos exóticos, tales como oscilaciones cuasiperiódicas, múltiples puntos de bifurcación de Hopf y multiplicidad de órbitas periódicas estables. Guckenheimer (1986) resaltó la importancia de contar con mejores herramientas matemáticas de análisis. Con lo anterior, se puede uno dar cuenta de la variedad de estudios y resultados obtenidos para un **RTAC** estándar y variedades del mismo, sin dejar a un lado la existencia de otras extensiones como el estudio de una reacción consecutiva $A \rightarrow B \rightarrow C$ (Farr y Aris, 1986; Moiola *et. al.*, 1990). Russo y Bequette (1995) mostraron que al considerar la dinámica de la chaqueta en un **RTAC** en un conjunto específico de parámetros, se muestran diagramas de bifurcación con puntos inestables, lo cual no se ve si solamente se trabaja el modelo de dos estados, lo cual es importante tenerlo en cuenta para el diseño del equipo de reacción y de los controladores. Russo y Bequette (1997), mostraron la importancia de considerar un esquema de control en cascada no convencional, con un control proporcional en el lazo interno de control y un controlador tipo *IMC* en el lazo externo de control, para un **RTAC** de tres estados (concentración, temperatura del reactor y temperatura del sistema de enfriamiento) cuando la temperatura del reactor y del sistema de enfriamiento se encuentran acoplados en el espacio de estados.

Control cascada

Como ya se menciona, en el capítulo tres, la importancia del uso de control en cascada, radica en su capacidad de rechazar perturbaciones, aprovechando el uso de medidas rápidas como temperaturas, presiones, entre otras. Entonces, para su aplicación industrial se aprovechan estas características para obtener mejoras en la velocidad y desempeño de los procesos operados con controladores tipo cascada, tal es el ejemplo de columnas de destilación, intercambiadores de calor, el proceso de regeneración de catalizador de una unidad **FCC**. Pero la aplicación de estos controladores no es aislada para un solo tipo de proceso industrial, sino que más bien en una planta conteniendo diferentes etapas se pueden conectar sistemas en

cascada de manera que el desempeño global de la planta se mejore. A continuación se resumen algunos trabajos hechos para el control de procesos con estructura tipo cascada.

Franks y Worley (1956), reportaron una mejora relativa de desempeño obtenida de un control cascada, en comparación con los controladores retroalimentados para procesos que contaban con dos retrasos de primer orden en el lazo de control primario y tres retardos de primer orden el lazo secundario. Harriot (1964), reportó algunas ideas sobre las características básicas del control cascada. Luyben (1973), utilizó una combinación de medidas de concentración y temperatura en una columna de destilación para formar una estructura de control tipo cascada paralelo, de manera que obtuvo mejoras en el desempeño de la columna a pesar de existir perturbaciones. Schork y Deshpande (1978), aplicaron un control de doble cascada en una operación de secado de polímero en película. Deshpande (1980), estudió la aplicación del control cascada en un reactor de polimerización industrial y mostró como se pueden identificar las dinámicas de un proceso inestable a lazo abierto con solo realizar pruebas tipo pulso a la entrada del reactor. McMillan (1982), demostró los beneficios que se obtienen del control cascada para procesos autoregulados, procesos con trayectorias de escape y procesos con capacitancia. Yu y Luyben (1986), encontraron condiciones de estabilidad en controladores cascada paralelo para procesos con lazos de control secundarios con dinámicas rápidas. Utilizando controladores tipo PI para ambos lazos de control. Krishnaswamy y Rangaiah (1987), mostraron que la identificación de las dinámicas de los lazos primario y secundario puede hacerse con una prueba simple de pulsos.

Como se pudo observar en el ámbito de investigación existen trabajos enfocados al estudio de estructuras de control tipo cascada, con el fin de entender las características que los hacen elegibles para ser aplicados a diferentes tipos de procesos industriales, así como también, con el fin de obtener reglas de sintonizado para mejorar su desempeño.

A continuación se procede a describir y trabajar los casos de estudio, en los cuales se van aplicar las técnicas de back-stepping para obtener estructuras de controladores

tipo cascada.

4.3 Casos de estudio

4.3.1 Ejemplo 1

Se trabajó con un **RTAC** de tres estados, para una reacción exotérmica $A \rightarrow B$, de primer orden tipo Arrhenius. Se desea controlar la temperatura del reactor en un punto de equilibrio inestable manipulando el gasto de enfriante q_c . Las ecuaciones del **RTAC** estándar, considerando volumen constante, mezclado perfecto, parámetros físicos constantes y dinámica de la chaqueta despreciable, están representadas por el siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} \dot{c}_a &= \frac{Q}{V}(c_{af} - c_a) - k_0 \exp\left(\frac{-Ea}{RT}\right) c_a \\ \dot{T} &= \frac{Q}{V}(T_f - T) - \frac{UA}{V\rho C_p}(T - T_c) + \left(\frac{-\Delta H}{\rho C_p}\right) k_0 \exp\left(\frac{-Ea}{RT}\right) c_a \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde, c_a y T son la concentración del componente A y temperatura del reactor, respectivamente. A continuación se muestra un balance adicional alrededor del sistema de enfriamiento.

$$\dot{T}_c = \frac{Q_c}{V_c}(T_{cf} - T_c) + \frac{UA}{V_c \rho_c C_{p_c}}(T - T_c) \quad (4.2)$$

donde T_c es la temperatura del sistema de enfriamiento, las ecuaciones (4.1) y (4.2) pueden escribirse en forma adimensional.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= q(x_{1f} - x_1) - \phi x_1 \kappa(x_2) \\ \dot{x}_2 &= q(x_{2f} - x_2) - \delta(x_2 - x_3) + \beta \phi x_1 \kappa(x_2) \\ \dot{x}_3 &= \delta_1 \{q_c(x_{3f} - x_3) + \delta \delta_2(x_2 - x_3)\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde x_1, x_2, x_3 ¹ y q_c ² son la concentración adimensional, temperatura adimensional del reactor, temperatura adimensional del sistema de enfriamiento y gasto adimensional del enfriante, respectivamente. El gasto adimensional del enfriante (q_c) es la variable manipulada, mientras que x_2 y x_3 son las variables medidas. Las variables y los parámetros adimensionales se describen en la Tabla 1, mientras que en la Tabla 2 se exhiben los valores de los parámetros usados.

Tabla 1

$$\begin{array}{lll}
 x_1 = \frac{c_a}{c_{af0}} & x_2 = \frac{T-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma & x_3 = \frac{T_c-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma \\
 x_{1f} = \frac{c_{af}}{c_{af0}} & x_{2f} = \frac{T_f-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma & x_{3f} = \frac{T_{cf}-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma \\
 q = \frac{Q}{Q_0} & q_c = \frac{Q_c}{Q_{c0}} & \phi = \frac{V}{Q_0} (k_0 e^{-\gamma}) \\
 \delta = \frac{UA}{\rho c_p Q_0} & \delta_1 = \frac{V}{V_c} & \delta_2 = \frac{\rho c_p}{\rho_c c_{pc}} \\
 \gamma = \frac{E_a}{RT_{f0}} & \beta = \frac{(-\Delta H)c_{af0}}{\rho c_p T_{f0}} \gamma & \kappa(x_2) = \exp\left(\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}\right)
 \end{array}$$

Tabla 2

Parámetro	ϕ	β	δ	γ	q	δ_1	δ_2	x_{1f}	x_{2f}	x_{3f}
Valor	0.072	8.0	0.3	20.0	1.0	10	1.0	1.0	0.0	-1.0

Aplicando los valores de la Tabla 2 al sistema de ecuaciones (4.3) del **RTAC**, se localiza un punto de equilibrio inestable con temperatura adimensional de $x_2 = 2.7$. Este valor representa a la temperatura que se quiere regular en el reactor. Como ya se mencionó, se va a desarrollar un controlador tipo cascada en serie, que cuenta con dos controladores retroalimentados (control maestro y control esclavo, respectivamente), que sirve para rechazar perturbaciones (cambios en la temperatura de entrada al reactor, por ejemplo) y para disminuir retardos en las acciones de control,

¹Se considera que esta valor esta acotado entre -1.5 y 1.5.

²Se considera que esta valor esta acotado entre 0 y 3.0, donde cero indica válvula cerrada y 3.0 significa 100% de abertura en la válvula.

lo cual se logra al fijar primero la temperatura del reactor que deseo y posteriormente calcular la temperatura del sistema de enfriamiento necesaria que determine el gasto de enfriante requerido.

El párrafo anterior describe la suposición hecha para aplicar el control cascada en serie en el presente ejemplo. Ya que se aprovecha una lectura de temperatura que prácticamente se mide en línea y que es fácil de obtener. No se hace uso de un control cascada en paralelo ya que este se usa para cuando existen retardos considerables en las variables medidas. Ahora bien, para diseñar el esquema de control cascada en serie se usaron técnicas de back-stepping, que sirvieron para desacoplar a la temperatura del reactor de la temperatura del sistema de enfriamiento, ya que mediante estudios previos (*Russo y Bequette, 1997*) se observó que la matriz de controlabilidad no es de rango completo³, es decir el sistema no es controlable ni realizable, si se usa un esquema de cascada en serie de simple entrada simple salida. A continuación se muestra el diseño del control cascada en serie.

Diseño del control cascada en serie

El diseño va comprender dos pasos, de los cuales, en el primero se va a construir el lazo de control maestro y en el segundo el lazo de control esclavo. En el primer lazo se va a obtener un control virtual que se designa al sustituir la temperatura del sistema de enfriamiento por una nueva variable que se denomina tc , la cual al enlazarla con la dinámica del sistema de enfriamiento, va a ser la referencia para el lazo de control esclavo, de manera que la temperatura de enfriante, x_3 , siga a esta variable para obtener la temperatura del reactor (x_2), previamente pedida. En el lazo de control esclavo se va a obtener el control real, es decir, la variable que físicamente se manipula y que es el gasto de enfriante. Para construir los lazos de control, se van a definir errores de convergencia, de manera que la dinámica de la ecuación del error sea tal, que al asignar los valores propios suficientemente grandes y positivos, el control converga rápidamente a tiempos suficientemente largos, es decir, cuando el tiempo tienda al infinito. Para la estimación de las incertidumbres

³Para más detalles, ver *Russo y Bequette, Industrial Engineering Chemical Research 1997*, vol. 36 páginas 2274-2275.

se usan observadores de orden reducido. Por lo que se muestra su construcción, para poder acoplarlos al control y de esta forma estimar las incertidumbres.

Tomando como base el sistema de ecuaciones (4.3).

$$\dot{x}_2 = q(x_{2f} - x_2) - \delta(x_2 - x_3) + \beta\phi x_1 \kappa(x_2) \quad (4.4)$$

Paso 1. El objetivo es controlar la temperatura del reactor x_2 manipulando el gasto de enfriante q_c . Se podría "manipular" la temperatura del enfriante x_3 , lo cual se entrecomilla ya que realmente se manipulan válvulas y no temperaturas. Ahora bien, lo anterior se logra si se define una entrada "virtual al sistema" denominada tc , a la cual la temperatura del sistema de enfriamiento va intentar seguir, para obtener la temperatura del reactor deseada, de esta manera vamos a constituir el esquema de control maestro. Esto se hace bajo el siguiente procedimiento:

$$x_3 \equiv tc$$

$$\dot{x}_2 = q(x_{2f} - x_2) - \delta x_2 + \delta tc + \beta\phi x_1 \kappa(x_2) \quad (4.5)$$

Para lograr que la temperatura del sistema de enfriamiento siga a la entrada virtual tc , se define un modelo de referencia, que va a contener un error de convergencia entre la temperatura del reactor calculada y la temperatura deseada o de referencia x_{2ref} , que para el caso de estudio es una constante igual a 2.7. El modelo de referencia debe ser tal que el error converga de manera asintóticamente estable a cero, es decir, que la temperatura de referencia pedida al control y la calculada por el sistema controlado sean iguales.

Modelo de referencia 1

$$\dot{e}_1 + \tau_m^{-1} e_1 = 0 \quad (4.6)$$

donde:

$$e_1 = x_2 - x_{2ref}$$

$$\dot{e}_1 + \tau_m^{-1} e_1 = 0$$

$$\tau_m^{-1} > 0$$

Se observa que el valor de τ_m^{-1} debe ser suficientemente grande, para que el error converga al origen de manera asintóticamente estable, esto se puede comprobar si se analiza la ecuación simpl del modelo de referencia $s + \tau_m^{-1} = 0$. Ahora, se sustituye la expresión de $e_1 = x_2 - x_{2ref}$ en la ecuación (4.6), y se obtiene lo siguiente

$$\dot{x}_2 + \tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref}) = 0$$

Despejando la derivada de la temperatura del reactor y equiparándola con la ecuación (4.5):

$$\dot{x}_2 = -\tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})$$

$$-\tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref}) \equiv q(x_{2f} - x_2) - \delta x_2 + \delta tc + \beta \phi x_1 \kappa(x_2)$$

Despejando la variable "manipulada" tc , se obtiene el siguiente control:

$$tc^I = [-q(x_{2f} - x_2) - \beta \phi x_1 \kappa(x_2) + \delta x_2 - \tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})]/\delta \quad (4.7)$$

La ecuación (4.7) muestra un control ideal, por eso esta marcada con el superíndice "I", ya que solamente sería realizable si conociéramos perfectamente el modelo de la ecuación de temperatura del reactor y esto no es posible ya que existen términos inciertos en variables como la expresión de reacción de Arrhenius $\beta\phi x_1\kappa(x_2)$, el coeficiente de transferencia de calor δ y en la temperatura de entrada al reactor x_{2f} . Por lo que se toman valores nominales del coeficiente de transferencia y de la temperatura de entrada y los denominamos: $\bar{\delta}$ y \bar{x}_{2f}

Entonces, re-escribiendo la ecuación (4.5).

$$\dot{x}_2 = q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \bar{\delta}(x_2 - tc) + \eta_1 \quad (4.8)$$

donde:

$$\eta_1 = \beta\phi x_1\kappa(x_2) - \Delta\delta(x_2 - tc) - \Delta x_{2f}q$$

$$\Delta\delta = \delta - \bar{\delta}$$

$$\Delta x_{2f} = \bar{x}_{2f} - x_{2f}$$

Usando la ecuación (4.8) y equiparando la dinámica de la temperatura del reactor con la dinámica obtenida por el error de convergencia uno ($\dot{x}_2 = -\tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})$), se despeja la entrada virtual tc , llegando a la siguiente ley de control real.

$$tc^r = [-q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \eta_1 + \bar{\delta}x_2 - \tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})]/\bar{\delta} \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) del control real muestra un término que agrupa a las incertidumbres η_1 y que debe ser calculado de alguna manera, pero si se trata de incertidumbres entonces estas y sus respectivas derivadas no pueden calcularse por que se desconocen, entonces se propone estimarlas, es decir, realizar una aproximación de ellas. Para lo cual se va hacer uso de las variables medidas y conocidas. Ahora bien, para estimar las incertidumbres se va a definir un error de reconstrucción entre la

incertidumbre estimada y la "real", de la siguiente manera.

$$e_{r1} = (\eta_1 - \hat{\eta}_1) \quad (4.9a)$$

donde : $\hat{\eta}_1$ es la incertidumbre estimada, entonces la ecuación (4.9) queda expresada de la siguiente manera.

$$tc^r = [-q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \hat{\eta}_1 + \bar{\delta}x_2 - \tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})]/\bar{\delta} \quad (4.9b)$$

Si interpretamos a la incertidumbre como un nuevo estado que sea observable, es decir, reconstruible a partir de variables medidas, como ya se menciona, se tiene lo siguiente.

$$\dot{\eta}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, tc)$$

Donde $\dot{\eta}_1$ es desconocida ya que también φ_1 lo es, entonces, para calcular las incertidumbres se despejan de la ecuación (4.8).

$$\eta_1 = x_2 - q(\bar{x}_{2f} - x_2) + \bar{\delta}(x_2 - tc) \quad (4.10)$$

Pero la ecuación (4.10) muestra una derivada en tiempo de la temperatura del reactor, lo cual no es fácil de implementar, entonces se puede hacer uso de observadores, los cuales mediante la medida de la temperatura del reactor (x_2), temperatura del sistema de enfriamiento ($x_3 \equiv tc$) y la concentración de reactante (x_1), se pueden calcular el estimado de η_1 . Pero es suficiente contar con la medida de la temperatura del reactor y del sistema de enfriamiento, de acuerdo a la ecuación (4.10), para construir el observador, por lo que se va hacer uso de un observador de orden reducido. Entonces, se procede a definir un nuevo estado medido denominado y_{m1} y que es equiparable a η_1 .

$$y_{m1} = \dot{x}_2 - q(\bar{x}_{2f} - x_2) + \bar{\delta}(x_2 - tc)$$

A continuación se propone una expresión para calcular la derivada de las incertidumbres estimadas.

$$\dot{\hat{\eta}}_1 = (y_{m1} - \hat{\eta}_1)\tau_1^{-1} \quad (4.11)$$

Para asegurar la convergencia entre las incertidumbres reales y las estimadas, es decir $\hat{\eta}_1 \rightarrow E(\eta_1)$, se propone que τ_1^{-1} sea suficientemente grande, lo cual se valida con el siguiente análisis.

De acuerdo a ecuación (4.9a), el error de reconstrucción y su derivada están expresadas de la siguiente forma.

$$e_{r1} = (\eta_1 - \hat{\eta}_1)$$

$$\dot{e}_{r1} = \dot{\eta}_1 - \dot{\hat{\eta}}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, tc) - (y_{m1} - \hat{\eta}_1)\tau_1^{-1}$$

$$\dot{e}_{r1} = \varphi_1(x_1, x_2, tc) - (\eta_1 - \hat{\eta}_1)\tau_1^{-1} = \varphi_1 - e_{r1}\tau_1^{-1}$$

La dinámica nominal del error de reconstrucción queda expresada como:

$$\dot{e}_{r1} + e_{r1}\tau_1^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{e}_{r1} = -e_{r1}\tau_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \tau_1^{-1} > 0$$

Entonces, para que el error converga de manera asintóticamente estable, se requiere que τ_1^{-1} sea suficientemente grande y positivo, ya que al resolver la ecuación dinámica nominal del error, se obtiene una expresión del tipo $e_{r1} = \exp^{-t\tau_1^{-1}} + cte.$, de manera que para que el error converga a cero de manera rápida, τ_1^{-1} debe ser positivo y entre más grande, este error tenderá a cero más rápidamente.

A τ_1^{-1} se le denomina tiempo característico de reconstrucción de las incertidumbres. Volviendo con la estimación de las incertidumbres, se sustituye la expresión de η_1 en ecuación (4.10).

$$\dot{\hat{\eta}}_1 = \tau_1^{-1}(\eta_1 - \hat{\eta}_1) = \tau_1^{-1}[\dot{x}_2 - q(\bar{x}_{2f} - x_2) + \bar{\delta}(x_2 - tc) - \hat{\eta}_1]$$

Como ya se había mencionado, no se puede hacer uso de derivadores para la implementación del estimador de incertidumbres de manera tan fácil, por lo que se procede a definir una nueva variable, que va a contener a la derivada de las incertidumbres estimadas y de la temperatura del reactor.

$$w_1 = \dot{\hat{\eta}}_1 - x_2\tau_1^{-1}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \tau_1^{-1}[-q(\bar{x}_{2f} - x_2) + \bar{\delta}(x_2 - tc) - \hat{\eta}_1] & (4.12) \\ \hat{\eta}_1 &= w_1 + x_2\tau_1^{-1} \\ tc^r &= [-q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \hat{\eta}_1 + \bar{\delta}x_2 - \tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})]/\bar{\delta} \end{aligned}$$

Mediante el sistema de ecuaciones (4.12), el control y el estimador de incertidumbres queda constituido para su implementación, este sistema forma el lazo de control

maestro.

A continuación se procede al *Paso 2*, con el cual se va a conectar la dinámica del sistema de enfriamiento y se va a calcular un control que indique el gasto de enfriante necesario, para obtener la temperatura del sistema de enfriamiento demandada en tc .

Paso 2. En esta parte se va a a conectar la dinámica de la chaqueta, para poder obtener el gasto de enfriamiento requerido por el lazo de control maestro, lo cual se va a lograr definiendo un error de convergencia entre la entrada virtual asignada a la temperatura del sistema de enfriamiento tc y la temperatura del sistema de enfriamiento calculada (x_3): Este error va a definirse de tal forma, que converga de manera asintóticamente al origen, es decir, que la temperatura real del sistema de enfriamiento sea igual a la variable virtual tc , que es requerida para mantener la temperatura de referencia pedida en el reactor, que es de $x_2 = 2.7$ y que además es un valor constante. De esta forma se construye el lazo de control denominado esclavo. A continuación se escribe la ecuación de trabajo que corresponde a la dinámica del sistema de enfriamiento y enseguida el *Modelo de referencia 2*, que va a asegurar que el error de convergencia, $e_2 = x_3 - tc$, tienda a cero rápidamente, entonces:

$$\dot{x}_3 = \delta_1 \{q_c(x_{3f} - x_3) + \delta\delta_2(x_2 - x_3)\} \quad (4.3a)$$

Modelo de referencia 2

$$\dot{e}_2 + \tau_s^{-1} e_2 = 0 \quad (4.13)$$

donde:

$$e_2 = x_3 - tc$$

$$\tau_s^{-1} > 0$$

Al igual que en el *Modelo de referencia 1*, se asigna una ganancia $\tau_s^{-1} > 0$, para hacer converger de manera asintóticamente estable y lo más rápido posible a la temperatura del sistema de enfriamiento a la requerida por el control, para mantener la temperatura del reactor en el punto pedido. Se observa que a diferencia del diseño del lazo maestro de control, aquí la referencia pedida tc no es una constante, lo cual va a repercutir en la implementación del lazo esclavo de control. Por otra parte, siguiendo con el desarrollo del control, se sustituye la expresión del error de convergencia e_2 en la ecuación (4.13), se despeja la derivada de la temperatura del sistema de enfriamiento (\dot{x}_3) y se equipara con la ecuación (4.3a), para posteriormente despejar el control que es el gasto de enfriamiento qc .

$$(\dot{x}_3 - \dot{tc}) + \tau_s^{-1}(x_3 - tc) = 0$$

$$\dot{x}_3 = \dot{tc} - \tau_s^{-1}(x_3 - tc)$$

$$\dot{tc} - \tau_s^{-1}(x_3 - tc) \equiv \delta_1 \{q_c(x_{3f} - x_3) + \delta\delta_2(x_2 - x_3)\}$$

$$qc^I = \{\dot{tc} - \tau_s^{-1}(x_3 - tc) - \delta_1\delta\delta_2(x_2 - x_3)\} / [\delta_1(x_{3f} - x_3)] \quad (4.14)$$

La expresión del control (ecuación 4.14), esta marcada con un superíndice de ideal, ya que al igual que para el control de la temperatura de enfriamiento (ecuación 4.9), existen términos inciertos, debidos a que no se tiene conocimiento perfecto del modelo de la dinámica de temperatura de enfriamiento, y esto se debe a las incertidumbres asociadas a la temperatura de entrada del enfriante x_{3f} y otra vez

al coeficiente de transferencia de calor δ , por lo que se va proceder a usar valores nominales de estos para diseñar una ley de control real. Entonces la ecuación (4.3a), queda expresada de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \delta_1 q_c (\bar{x}_{3f} - x_3) + \bar{\delta}^* (x_2 - x_3) + \eta_2 \\ \bar{\delta}^* &= \bar{\delta} \delta_1 \delta_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde:

$$\eta_2 = \Delta \delta^* (x_2 - x_3) + \Delta x_{3f} \delta_1 q_c$$

$$\Delta \delta^* = \delta^* - \bar{\delta}^*$$

$$\Delta x_{3f} = x_{3f} - \bar{x}_{3f}$$

Equiparando la ecuación (4.15) con la derivada de la temperatura del sistema de enfriamiento (\dot{x}_3), obtenida en el *Modelo de referencia 2* ($\dot{x}_3 = tc - \tau_s^{-1}(x_3 - tc)$), se obtiene la expresión del control real para calcular el gasto de enfriamiento del esquema de control esclavo.

$$q_c^r = \{tc - \tau_s^{-1}(x_3 - tc) - \bar{\delta}^* (x_2 - x_3) - \eta_2\} / [\delta_1 (\bar{x}_{3f} - x_3)] \quad (4.16)$$

En la ecuación (4.15) existe un termino de incertidumbres el cual va hacer estimado. Conforme el valor de las incertidumbres estimadas se aproxime a los valores reales del coeficiente de transferencia de calor y de la temperatura de entrada del sistema de enfriamiento, entonces el control real se aproximará al control ideal. Ahora bien, existe el problema de calcular las incertidumbres, ya que existe un desconocimiento de alguna función que lo haga, por lo que se va a proceder a realizar una estimación mediante un observador de orden reducido que use las medidas de la temperatura del reactor y la medida de la temperatura del sistema de enfriamiento. Además no

hay que perder de vista que existe una derivada en tiempo de la referencia pedida al sistema de enfriamiento tc , la cual de alguna forma tiene que calcularse.

Estimación de las incertidumbres.

Si se considera que :

$$\dot{\eta}_2 = \varphi_2(x_2, x_3, qc)$$

en donde φ_2 es desconocido porque η_2 también lo es, por lo tanto se define un nuevo estado medido y_{m2} , que va a coincidir con η_2 , de manera que al estimar la primera derivada de la incertidumbre se proponga la siguiente expresión.

$$\dot{\hat{\eta}}_2 = \tau_2^{-1}(y_{m2} - \hat{\eta}_2) \quad (4.17)$$

donde :

$$\begin{aligned} y_{m2} &\equiv \eta_2 \\ y_{m2} &= \dot{x}_3 - \delta_1 qc(\bar{x}_{3f} - x_3) - \bar{\delta}^*(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

que es la expresión de las incertidumbres obtenida al despejarlas de la ecuación (4.15): $\dot{x}_3 = \delta_1 qc(\bar{x}_{3f} - x_3) + \bar{\delta}^*(x_2 - x_3) + \eta_2$.

Ahora se define una expresión de error de seguimiento (e_{r2}) entre las incertidumbres estimadas ($\hat{\eta}_2$) y las reales (η_2), para asignar un valor del tiempo característico τ_2^{-1} , lo cual se logra al obtener la ecuación de la dinámica nominal de este error.

Entonces:

$$e_{r2} = (\eta_2 - \hat{\eta}_2)$$

$$\dot{e}_{r2} = (\dot{\eta}_2 - \dot{\hat{\eta}}_2) = \varphi_2 - \tau_2^{-1}(y_{m2} - \hat{\eta}_2) = \varphi_2 - \tau_2^{-1}(\eta_2 - \hat{\eta}_2)$$

$$\dot{e}_{r2} = \varphi_2 - \tau_2^{-1}e_{r2}$$

Ecuación nominal del error de convergencia.

$$\dot{e}_{r2} + \tau_2^{-1} e_{r2} = 0$$

$$\dot{e}_{r2} = -\tau_2^{-1} e_{r2}$$

$$\tau_2^{-1} > 0$$

Con lo cual se determina que el tiempo característico de estimación de incertidumbres τ_2^{-1} debe ser positivo y suficientemente grande para que el error de convergencia dos (e_{r2}), tienda de manera asintótica al origen. Por otro lado queda aun el problema de estimar las incertidumbres y de obtener la derivada de la referencia.

Conforme a la definición de la ecuación (4.17), $\hat{\eta}_2 = \tau_2^{-1}(y_{m2} - \hat{\eta}_2)$, se sustituye la expresión de la derivada de las incertidumbres ($\dot{\eta}_2 = \dot{x}_3 - \delta_1 q_c(\bar{x}_{3f} - x_3) - \bar{\delta}^*(x_2 - x_3)$) y se define un nuevo estado (w_2), de manera que se pueda encontrar un sistema que estime las incertidumbres y calcule el control.

$$\dot{\hat{\eta}}_2 = \tau_2^{-1} [\dot{x}_3 - \delta_1 q_c(\bar{x}_{3f} - x_3) - \bar{\delta}^*(x_2 - x_3) - \hat{\eta}_2]$$

si:

$$w_2 = \hat{\eta}_2 - \tau_2^{-1} x_3$$

$$\Rightarrow \dot{w}_2 = -\tau_2^{-1} [\delta_1 q_c(\bar{x}_{3f} - x_3) + \bar{\delta}^*(x_2 - x_3) + \hat{\eta}_2] \quad (4.18)$$

$$\hat{\eta}_2 = w_2 + \tau_2^{-1} x_3 \quad (4.19)$$

$$qc^r = \{tc - \tau_s^{-1}(x_3 - tc) - \bar{\delta}^*(x_2 - x_3) - \hat{\eta}_2\} / [\delta_1(\bar{x}_{3f} - x_3)] \quad (4.20)$$

Mediante el sistema de ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20), se constituye el lazo de control esclavo, en el cual se estima la derivada de la referencia (tc), con una aproximación filtrada de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{t}_c &= x_n + \frac{t_c}{t_{fcs}} \\ \dot{x}_n &= -\frac{x_n + \frac{t_c}{t_{fcs}}}{t_{fcs}}\end{aligned}$$

donde el tiempo de filtrado t_{fcs} se hace lo suficientemente pequeño para que la estimada de la derivada converga a la real.

El control en cascada queda constituido por dos lazos o esquemas denominados control primario o maestro y control secundario o esclavo, en este último se realiza la acción final de control que es manipular el gasto de enfriante abriendo o cerrando la válvula de entrada del mismo. Para tener una idea mejor del control que aquí se desarrolla se muestra la Figura 4.1 en donde se observa grafica y esquematicamente el control cascada en serie del **RTAC** de tres estados.

Diseño del control global

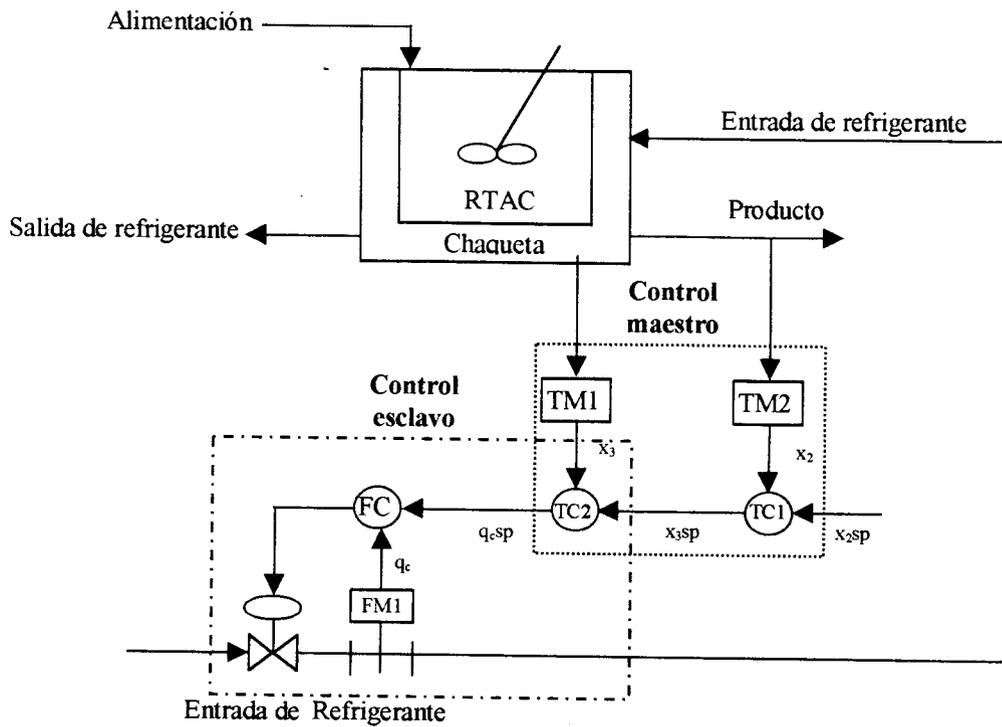
En esta parte se diseña un esquema de control global usando la técnica de retroalimentación linearizante. Se va usar solamente la medida de la temperatura del reactor para obtener un control que manipule el gasto del enfriante. La técnica de diseño consiste en encontrar el grado relativo del sistema, así que se deriva la ecuación de la temperatura del reactor hasta que "aparezca" la variable manipulada que es el gasto de enfriante, para el ejemplo del **RTAC** con tres estados se encontró que el grado relativo es dos, entonces se obtiene la segunda derivada, se define un modelo de referencia de segundo orden que asegure convergencia asintóticamente estable entre la temperatura del reactor (x_2) y la temperatura de referencia (x_{2ref}). A continuación se muestran los pasos hechos para la obtención del control.

Paso 1. Obtención del grado relativo del sistema.

Para un manejo más fácil de las ecuaciones del sistema, estas se expresan de la siguiente manera.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \tag{4.21}$$

A. Diagrama de proceso



B. Diagrama de flujo

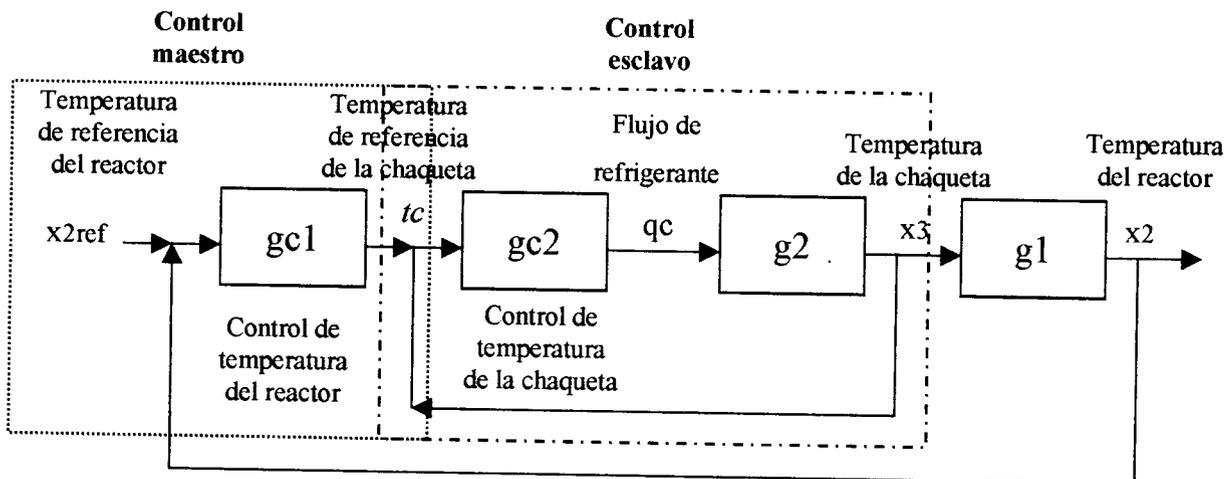


Figura 4.1 Estructura de control cascada en serie de un reactor tanque agitado continuo de tres estados.

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= f_2(x_2, x_3) + \beta \mathfrak{R}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= \delta^*(x_2 - x_3) + \delta_1(x_{3f} - x_3)qc\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(x_1, x_2) &= \phi x_1 \kappa(x_2) \\ f_1(x_1, x_2) &= q(x_{1f} - x_1) - \mathfrak{R}(x_1, x_2) \\ f_2(x_2, x_3) &= q(x_{2f} - x_2) - \delta(x_2 - x_3)\end{aligned}$$

Tomando la ecuación de la temperatura, y derivando hasta obtener en la ecuación resultante el gasto del enfriante, se llega a la siguiente expresión, donde los subíndices en las funciones indican derivadas con respecto a la concentración (1), temperatura del reactor (2) y temperatura del sistema de enfriamiento (3).

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= f_{22}f_2 + f_{23}\delta^*(x_2 - x_3) + \delta_1 f_{23}(x_{3f} - x_3)qc + \{f_{22}\beta \mathfrak{R}(x_1, x_2) + \\ &\beta \mathfrak{R}_1(x_1, x_2)f_1 + \beta \mathfrak{R}_2(x_1, x_2)f_2 + \beta^2 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}(x_1, x_2)\}\end{aligned}\quad (4.22)$$

donde:

$$\begin{aligned}f_{22} &= -(q + \delta) \\ f_{23} &= \delta\end{aligned}$$

Pero el término de reacción es incierto y por tanto sus derivadas con respecto a la concentración y temperatura también lo son, así como también existe un desconocimiento del valor exacto del coeficiente de transferencia de calor (δ) y la temperatura de entrada al reactor (x_{2f}) y al sistema de enfriamiento (x_{3f}), entonces se agrupan los términos inciertos en una variable nueva.

$$\eta_{g1} = f_{22}\beta \mathfrak{R}(x_1, x_2) + \beta \mathfrak{R}_1(x_1, x_2)f_1 + \beta \mathfrak{R}_2(x_1, x_2)f_2 + \quad (4.23)$$

$$\beta^2 \Re_2 \Re(x_1, x_2) + \Delta \delta^* (x_2 - x_3) f_{23} + \Delta x_{3f} \delta_1 f_{23} q c + f_{22} \Delta f_2$$

donde:

$$\begin{aligned} \Delta \delta^* &= \delta^* - \bar{\delta}^* \\ \Delta x_{3f} &= x_{3f} - \bar{x}_{3f} \\ \Delta f_2 &= f_2 - \bar{f}_2 \\ \bar{f}_2 &= q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \bar{\delta}(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

Y la ecuación (4.22) se expresa de la siguiente forma.

$$\ddot{x}_2 = f_{22} \bar{f}_2 + f_{23} \bar{\delta}^* (x_2 - x_3) + \delta_1 f_{23} (\bar{x}_{3f} - x_3) q c + \eta_{g1} \quad (4.24)$$

Paso 2. Ahora se define un modelo de referencia de segundo orden para que el control mantenga a la temperatura de referencia en el punto de 2.7 y que la diferencia entre la temperatura del reactor calculada y la referencia converga asintóticamente a cero, es decir, que la temperatura del reactor se acerque rápidamente a 2.7 y se mantenga allí a pesar de incertidumbres y de perturbaciones en las propiedades de entrada. El control, también debe soportar cambios de referencia y hacerlos de manera rápida y suave.

Modelo de referencia de segundo orden

$$\ddot{e} + d_1 \dot{e} + d_2 e = 0 \quad (4.25)$$

donde⁴:

$$e = x_2 - x_{2ref}$$

⁴Se nota que los valores de los coeficientes d_1 y d_2 asignados en el modelo de referencia de segundo orden tienen una equiparación con respecto a los tiempos característicos usados en el diseño del control en cascada, lo cual resulta de comparar el diseño de control por back-stepping y de linearización retroalimentada en el sistema de ecuaciones del RTAC, ya que ambos son similares si se cumple esta equivalencia entre sus tiempos característicos asignados. La comprobación viene detallada en el apéndice.

$$d_1 = \tau_m^{-1} + \tau_s^{-1}$$

$$d_2 = (\tau_m \tau_s)^{-1}$$

Se sustituye la expresión del error en la ecuación (4.25), se despeja la segunda derivada de la temperatura y se equipara con la ecuación (4.24) .

$$0 = \ddot{x}_2 + d_1 \dot{x}_2 + d_2(x_2 - x_{2ref})$$

$$\ddot{x}_2 = -d_1 \dot{x}_2 - d_2(x_2 - x_{2ref})$$

$$-d_1 \dot{x}_2 - d_2(x_2 - x_{2ref}) = f_{22}\bar{f}_2 + f_{23}\bar{\delta}^*(x_2 - x_3) + \delta_1 f_{23}(\bar{x}_{3f} - x_3)qc + \eta_{g1}$$

Ahora se despeja el gasto del enfriante para obtener la expresión del control.

$$qc^I = \frac{[-d_1 \dot{x}_2 - d_2(x_2 - x_{2ref}) - f_{22}\bar{f}_2 - f_{23}\bar{\delta}^*(x_2 - x_3) - \eta_{g1}]}{\delta_1 f_{23}(\bar{x}_{3f} - x_3)} \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) del control no puede implementarse por que contiene derivadas de la temperatura y el término de incertidumbre η_{g1} , entonces se hace necesario estimar las incertidumbres y la derivada de la temperatura, por lo que se va a usar un estimador de alta ganancia.

Se observa que:

$$\dot{x}_2 = f_2 + \beta\mathfrak{R}$$

pero $\beta\mathfrak{R}$ es un termino desconocido, redefiniedo nuevas variables.

$$z_1 = x_2$$

$$z_2 = \dot{x}_2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= z_1 & (4.27) \\
 \dot{x}_2 &= z_2 \\
 \ddot{x}_2 &= \dot{z}_2 = f_{22}\bar{f}_2 + f_{23}\bar{\delta}^*(x_2 - x_3) + \delta_1 f_{23}(\bar{x}_{3f} - x_3)qc + \eta_{g1}
 \end{aligned}$$

y

$$\dot{\eta}_{g1} = \varphi(x_1, x_2, x_3, qc)$$

pero como η_{g1} es desconocida, entonces φ también lo es. Sin embargo, dadas medidas de la temperatura del reactor x_2 y de la temperatura del sistema de enfriamiento x_3 , las dinámicas de los estados desconocidos o no medido η_{g1} y $\dot{x}_2 = z_2$ se pueden reconstruir u observar.

En efecto.

$$\begin{aligned}
 z_2 &= \dot{x}_2 \\
 \eta_{g1} &= \ddot{x}_2 - [f_{22}\bar{f}_2 + f_{23}\bar{\delta}^*(x_2 - x_3) + \delta_1 f_{23}(\bar{x}_{3f} - x_3)qc]
 \end{aligned}$$

Aprovechando la estructura dada por el sistema de ecuaciones (4.27), se construye el estimador de alta ganancia.

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}_1 &= 3\tau_3^{-1}(x_2 - \hat{z}_1) + \hat{z}_2 & (4.28) \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= 3\tau_3^{-2}(x_2 - \hat{z}_1) + f_{22}\bar{f}_2 + f_{23}\bar{\delta}^*(x_2 - x_3) + \delta_1 f_{23}(\bar{x}_{3f} - x_3)qc + \hat{\eta}_{g1} \\
 \dot{\hat{\eta}}_{g1} &= \tau_3^{-3}(x_2 - \hat{z}_1)
 \end{aligned}$$

Y las condiciones iniciales son :

$$\hat{z}_1(0) = x_2(0); \hat{z}_2(0) = 0; \hat{\eta}_{g1}(0) = 0$$

Entonces, el control real con el término de las incertidumbres estimadas es:

$$qc^r = \frac{-d_1 \hat{z}_2 - d_2 (\hat{z}_1 - x_{2ref}) - f_{22} \bar{f}_2 - f_{23} \bar{\delta}^* (x_2 - x_3) - \hat{\eta}_{g1}}{\delta_1 f_{23} (\bar{x}_{3f} - x_3)} \quad (4.29)$$

Por lo tanto, el control global queda constituido por las ecuación (4.29) junto con el estimador (4.28) en donde la asignación del tiempo característico τ_3 debe ser positivo y lo mas pequeño posible para estimar rápidamente los estados no observados.

Con el control se va a manipular el gasto de enfriante abriendo o cerrando la válvula de entrada del mismo. Para tener una idea mejor del control que aqui se desarrollo se muestra la Figura 4.1a en donde se observa con un esquema y un diagrama de bloques el control global del **RTAC** de tres estados.

Observaciones

Se compara el desempeño del control en cascada serie contra el control global, para comprobar que el uso de medidas intermedias y la aplicación de técnicas de back-stepping implementan un control más rápido y que detecta rápidamente cambios en el punto de control deseado.

En la Figura 4.2 se muestra la evolución de la temperatura del reactor usando los controles diseñados para el *ejemplo 1* y se observa que actua mejor el control cascada en serie ya que el control global no puede mantener a la temperatura del reactor en lo puntos deseados que son 2.7 al inicio y posteriormente 3.1, con un cambio de referencia, mientras que en la evolución del gasto de enfriamiento se observa un comportamiento oscilatorio para el control global. Se aplico una saturación en los dos lázos de control del diseño cascada en serie y en el control global, es decir, que la entrada virtual tc se acoto entre valores de -1.5 y 1.5 y el gasto del enfriante qc para ambos controles se acoto entre 0 y 3.0 de forma que el control tenga un sentido físico, por que el control cascada en serie realizaba esfuerzos de control muy grandes al calcular valores del gasto de enfriante positivos y negativos con diferencias hasta en dos ordenes de magnitud, lo cual físicamente no es posible, ya que implica aberturas negativas de válvulas.

Los valores de los tiempos característicos usados en la sintonización de los controles cascada serie y control global usados fueron de $\tau_m = 0.10$, $\tau_s = 0.50$ y $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.20$, mientras que el tiempo adimensional de residencia del reactor es de 1.0. En la Figura 4.3 se muestra la estimación de las incertidumbres del primer lazo de control frente al valor real y se aprecia que el observador construido tiene un buen desempeño. Las Figuras 4.2 y 4.3 se realizaron considerando solamente incertidumbres en la expresión de reacción.

En la Figura 4.4 se realizaron simulaciones tomando en cuenta incertidumbres en las temperaturas de entrada, en el coeficiente de transferencia de calor y por supuesto en el término de reacción y sus derivadas. En esta gráfica se observa el control cascada serie actúa más rápido y con mejor desempeño que el control global, se usaron las mismas saturaciones de los controles que en la Figura 4.2 y los valores de los tiempos característicos usados en la sintonización de los controladores fueron los siguientes: $\tau_m = 0.10$, $\tau_s = 0.30$ y $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.20$

A lo largo del diseño del control cascada en serie se observó que se podía llegar a una expresión de un control PI común si:

$$w_1 = \hat{\eta}_1 - x_2 \tau_1^{-1} \quad (A)$$

$$\Rightarrow \dot{w}_1 = \tau_1^{-1} [-q(\bar{x}_{2f} - x_2) + \bar{\delta}(x_2 - tc) - \hat{\eta}_1] \quad (B)$$

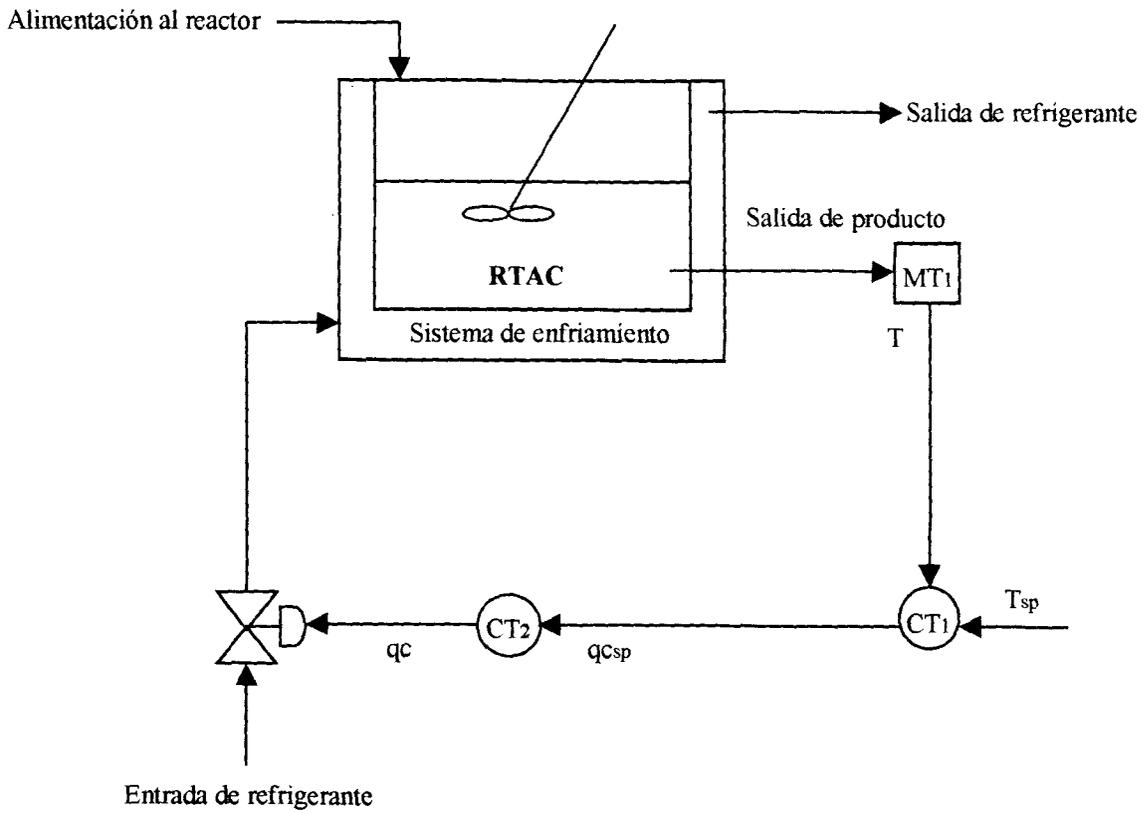
Pero de la expresión del control real:

$$tc^r = [-q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \hat{\eta}_1 + \bar{\delta}x_2 - \tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref})] / \bar{\delta} \quad (C)$$

se puede obtener el término $-q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \hat{\eta}_1 + \bar{\delta}(x_2 - tc)$. de manera que:

$$\tau_m^{-1}(x_2 - x_{2ref}) = -q(\bar{x}_{2f} - x_2) - \hat{\eta}_1 + \bar{\delta}(x_2 - tc) \quad (D)$$

A. Diagrama de proceso



B. Diagrama de flujo

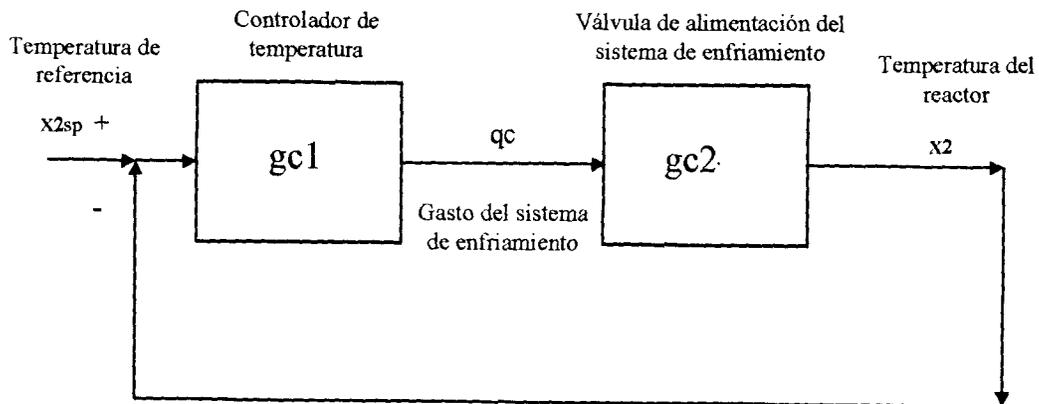


Figura 4.1a Diagrama de control global de un reactor tanque agitado de tres estados

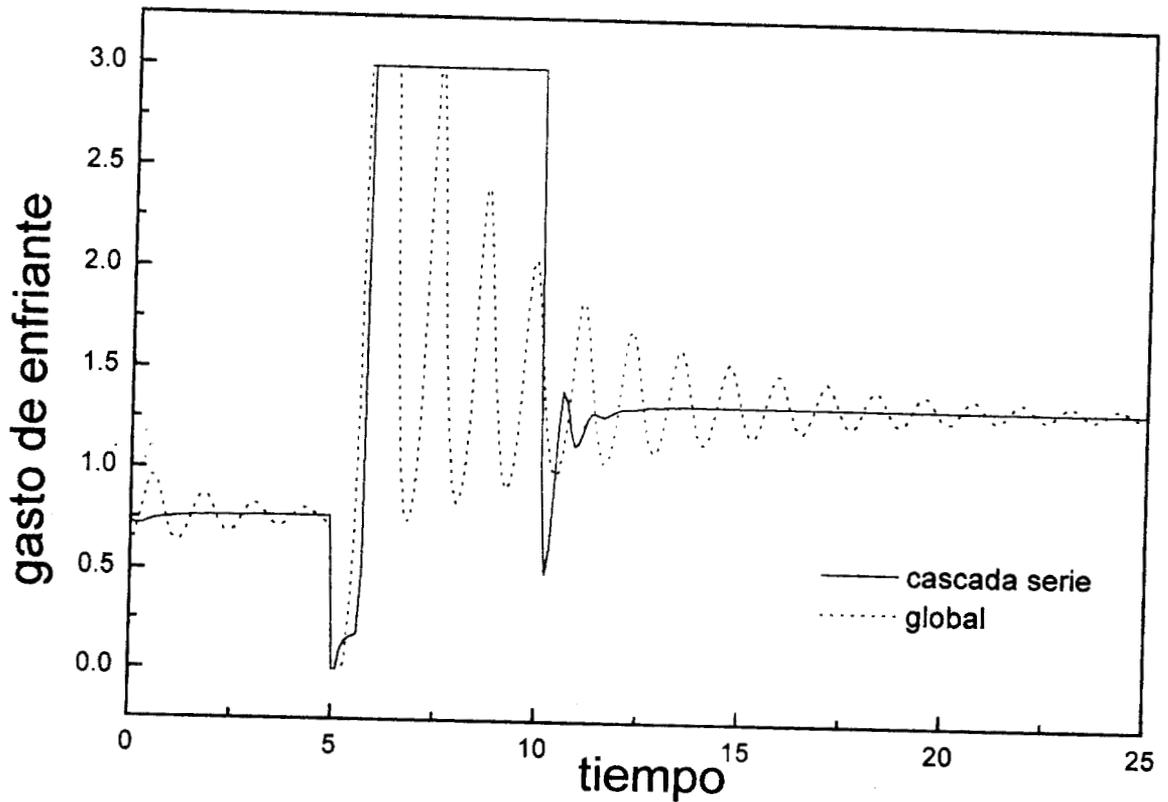
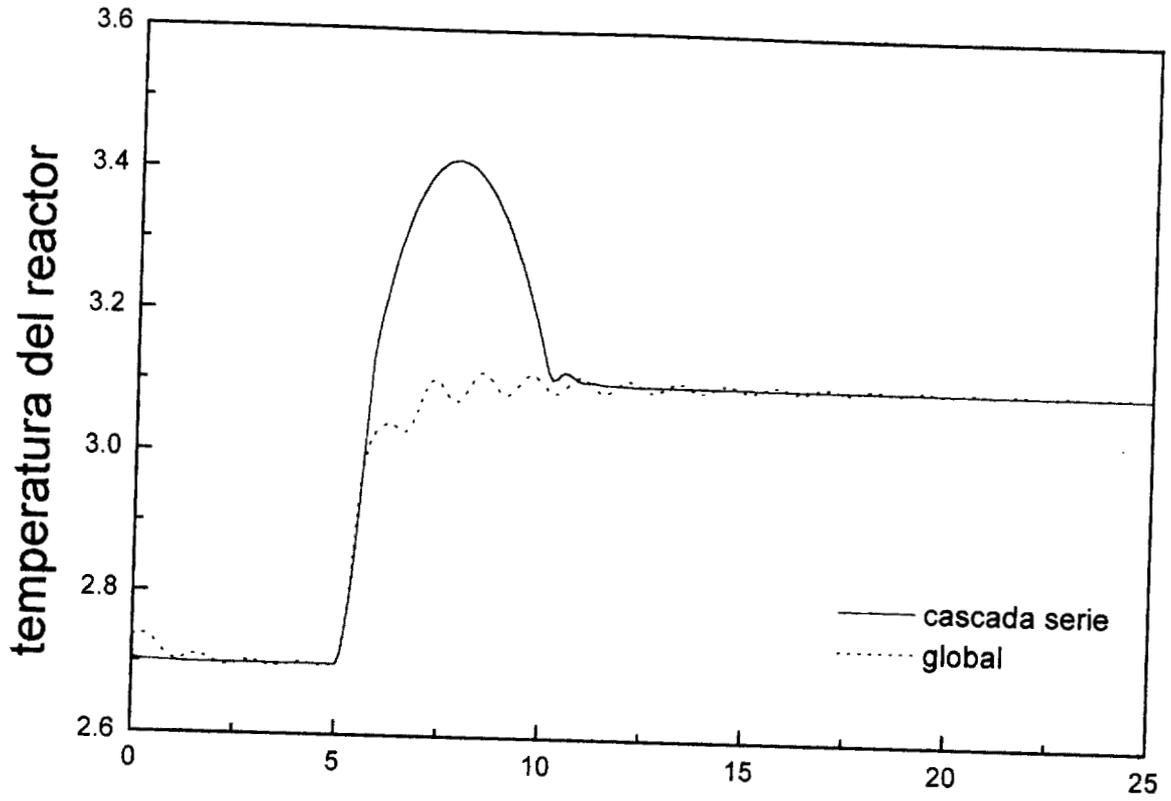


Figura 4.2 Comparación del desempeño entre el control cascada serie y el control global, con existencia de incertidumbres en el término de reacción usando valores de sintonizado de $\tau_m=0.10$, $\tau_s=0.50$ y $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0.20$ y saturaciones en los controles.

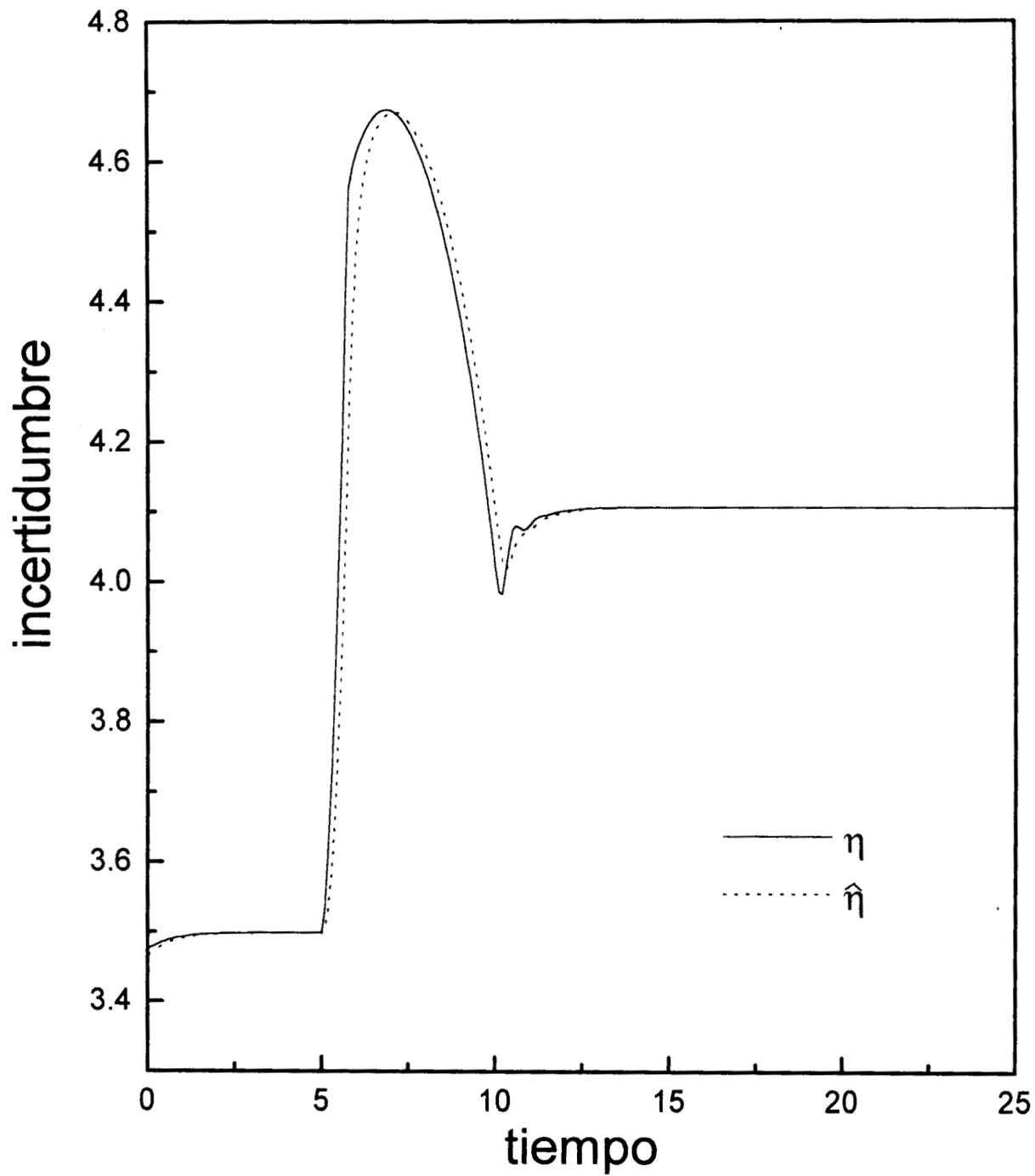


Figura 4.3 Comparación entre el término de reacción calculado por la expresión de Arrhenius (línea continua) y la estimación correspondiente (línea punteada).

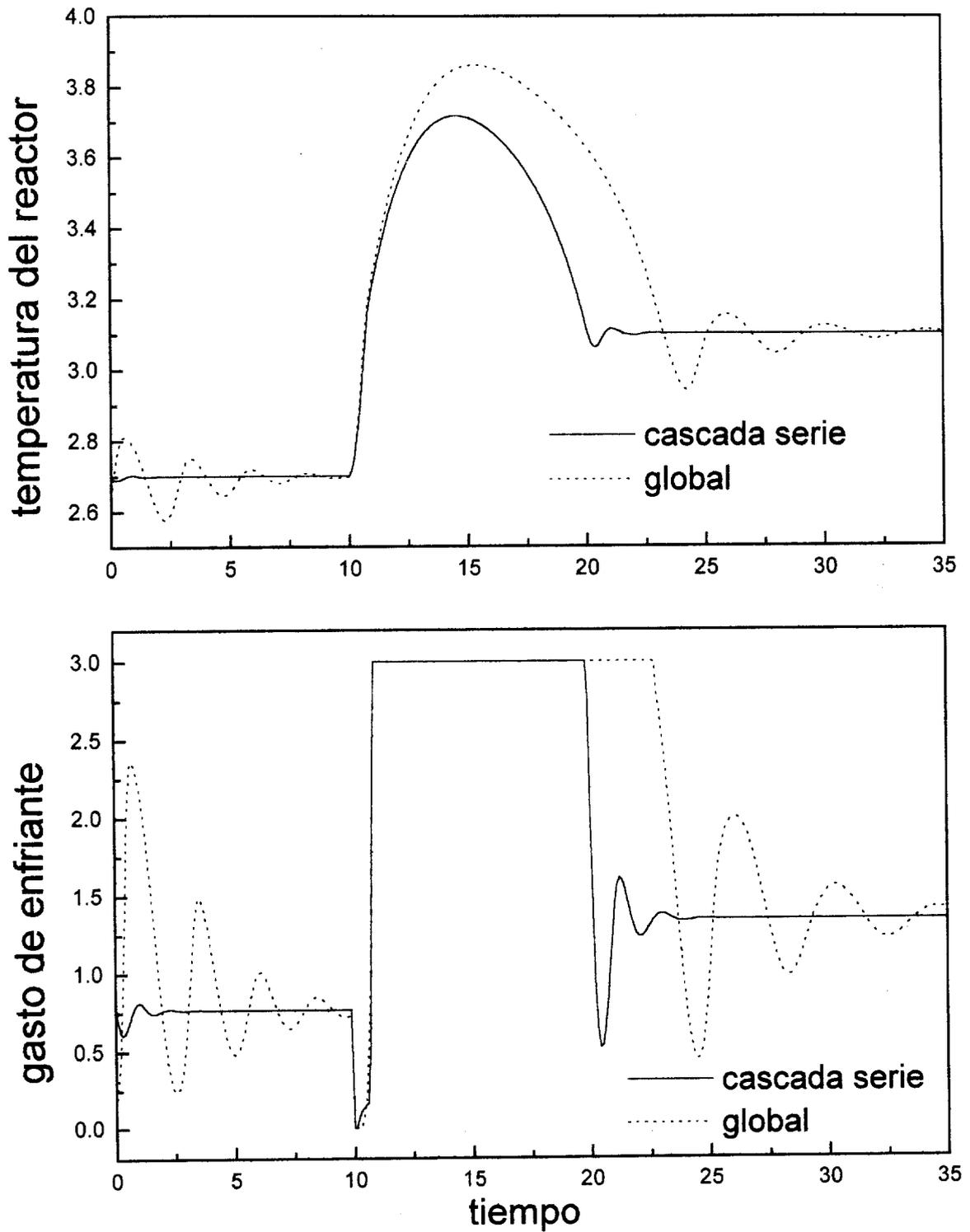


Figura 4.4 Comparación del desempeño entre el control cascada serie y el control global, simulando incertidumbres paramétricas y de modelado, donde: $\tau_m=0.10$, $\tau_s=0.30$ y $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0.20$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \tau_m^{-1} \tau_1^{-1} (x_2 - x_{2ref}) \\ \hat{\eta}_1 &= w_1 + x_2 \tau_1^{-1} \end{aligned} \quad (E)$$

Pero si se estima las incertidumbres usando la expresión (E), no se obtiene un control en la temperatura del reactor, ya que al haber saturación y al existir cascada el control no tiene información de la saturación por que la igualdad (D) no se cumple.

Al estar realizando las simulaciones para la comparación de los controles se observo que el control global comenzaba actuar mejor a valores del tiempo característico del estimador de alta ganancia menores de $\tau_3 = 0.2$ y solo de esta forma comienza a compararse su desempeño. Si se desea que el control cascada en serie tenga menor sobredisparo al llevar a la temperatura del reactor al cambio de referencia de 2.7 a 3.1, como se observa en la Figura 4.2, esto se logra disminuyendo el rango de saturación del lazo de control maestro manteniendo constante la saturación del lazo esclavo en $0 < qc < 3.0$, ver Figura 4.5, en la cual se muestran cambios en las saturaciones del lazo maestro de control, las cuales fueron de: (a) $-1.5 < tc < 1.5$; (b) $-1.0 < tc < 1.0$, y (c) $-0.8 < tc < 0.8$. En esta gráfica se observa que al disminuir el sobredisparo que se ocasiona en la variable de controlada que es la temperatura del reactor, se tendrá un desempeño más lento del controlador: Para evitar este comportamiento se puede también cambiar la saturación del lazo esclavo en conjunto con la del lazo maestro, a rangos mayores como $0 < tc < 3.5$, sin embargo, esto se traduce como aberturas de válvula mayores de lo cual físicamente no será posible (*recordar que se considera que esta valor esta acotado entre 0 y 3.0, donde cero indica válvula cerrada y 3.0 significa 100% de abertura en la válvula*).

Por último, en la Figura 4.6 se realizaron simulaciones en las cuales se disminuyo el tiempo caraterístico de los estimadores de incertidumbres a $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.066$ de manera que los desempeños fueran equiparables, aqui se observan dos comportamientos específicos, en los casos (a) y (b) solamente se manejaron incertidumbres en el termino de reacción y se observa que el desempeño del control global es más

rápido que el de cascada en serie y no implica sobre disparos del control, sin embargo, al introducir las incertidumbres paramétricas de la Figura 4.4, casos (c) y (d), se observó que el control global comenzaba a saturarse, es decir, requería de mayores acciones de control para mantener la temperatura del reactor de referencia, y sin embargo, su velocidad de respuesta es mayor que la del control cascada en serie. El introducir mayor capacidad de estimación en ambos esquemas de control se contrarresta de alguna forma las incertidumbres de modelado y de parámetros, recuperándose la equivalencia entre las técnicas de diseño de control por retroalimentación linearizante y back-stepping, ya que si se observa en el apéndice esta igualdad ocurre para casos con conocimiento exacto de los estados y del modelo, sin embargo la capacidad de estimación real esta limitada por los parámetros físicos del sistema.

De manera general, para el *ejemplo1*, se concluye que se construyo un control en cascada capaz de desacoplar a la temperatura del reactor de la temperatura del sistema de enfriamiento, dicho control es robusto a incertidumbres paramétricas y de modelado. Se construyo el control usando el modelo no lineal del **RTAC** de tres estados, siendo este control capaz de actuar de manera rápida y estable, aun a cambios súbitos de referencias. El control de comparación, denominado global, se construyo usando la técnica no lineal de retroalimentación linearizante, este control no es robusto a incertidumbres ya que tiene que estimar un termino altamente no lineal como lo es la exponencial de Arrhenius y sus derivadas.

4.3.2 Ejemplo 2

Se trabajó con un reactor tanque agitado continuo (**RTAC**) de dos estados, concentración y temperatura, se asume que ambos estados se pueden medir y que la medida de la concentración esta retardada un cierto tiempo con respecto al avance de la operación del sistema, mientras que la temperatura del reactor se dice que se mide practicamente en línea. La dinámica de la chaqueta se considera mucho más rápida que la dinámica del reactor y por tanto no se toma en cuenta, la reacción que

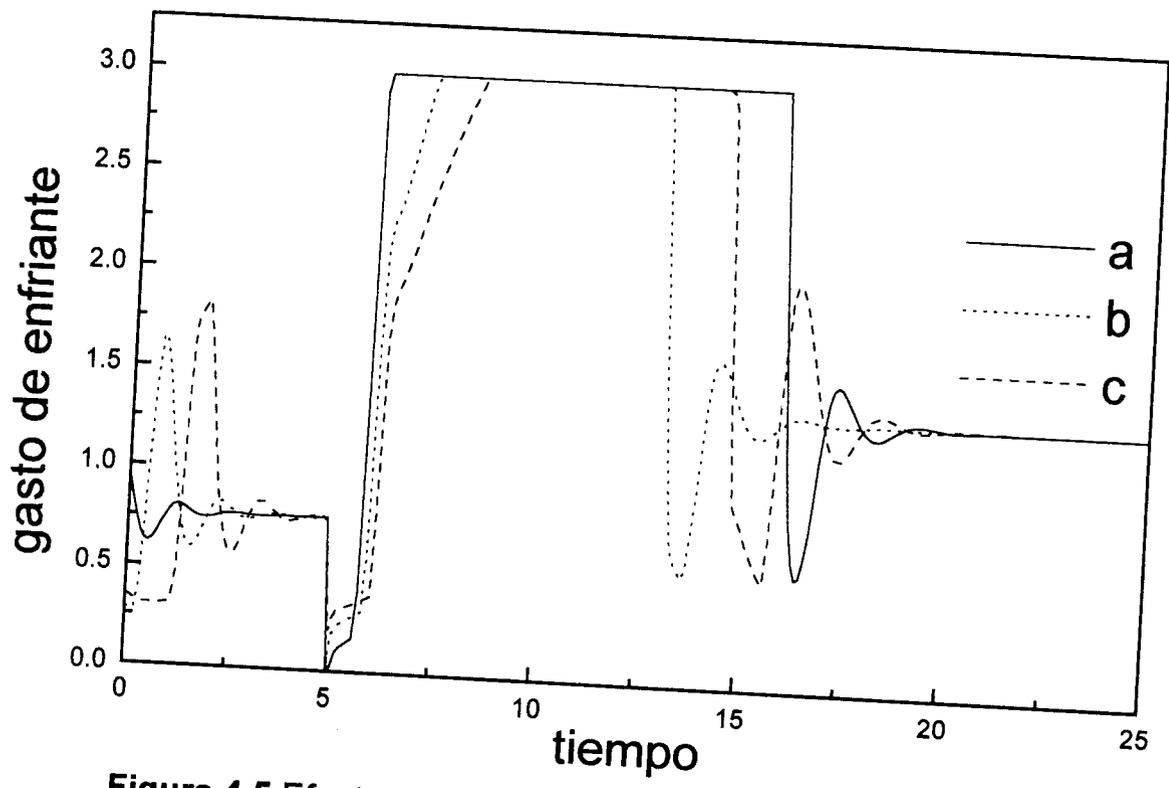
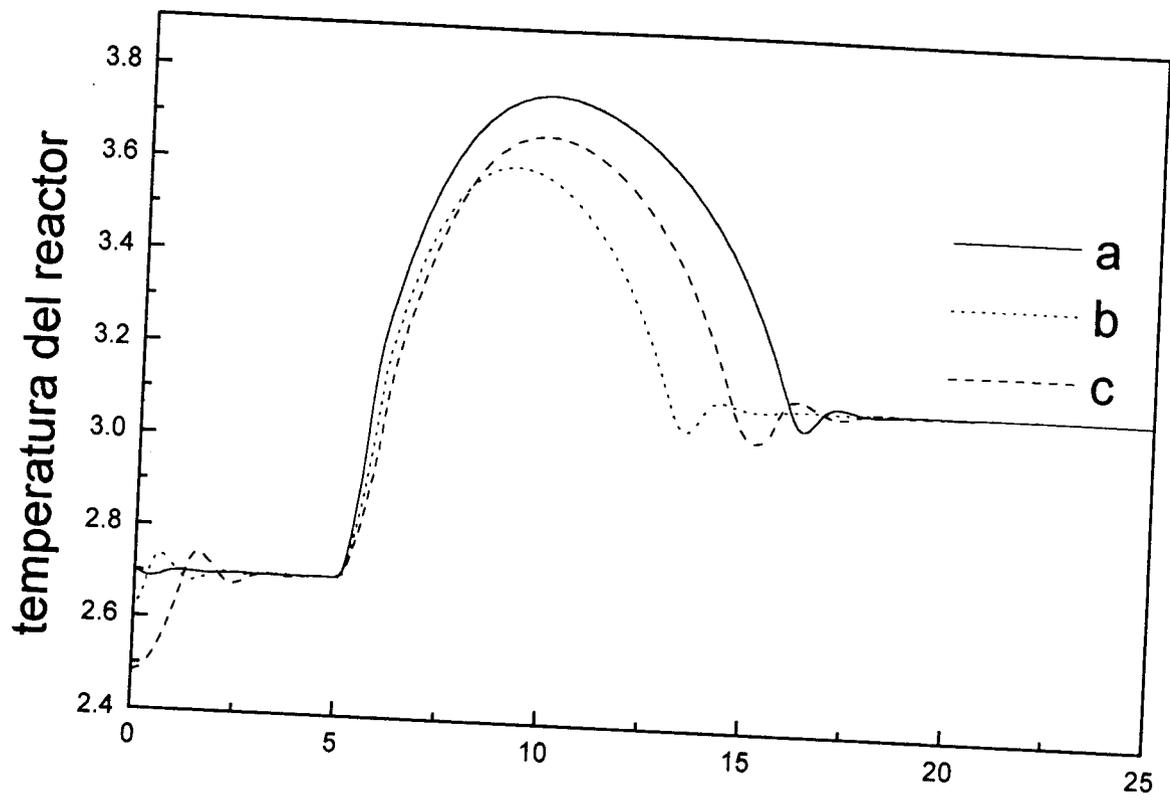


Figura 4.5 Efecto del cambio de saturación en el control cascada serie, considerando solamente incertidumbres en el término de reacción.

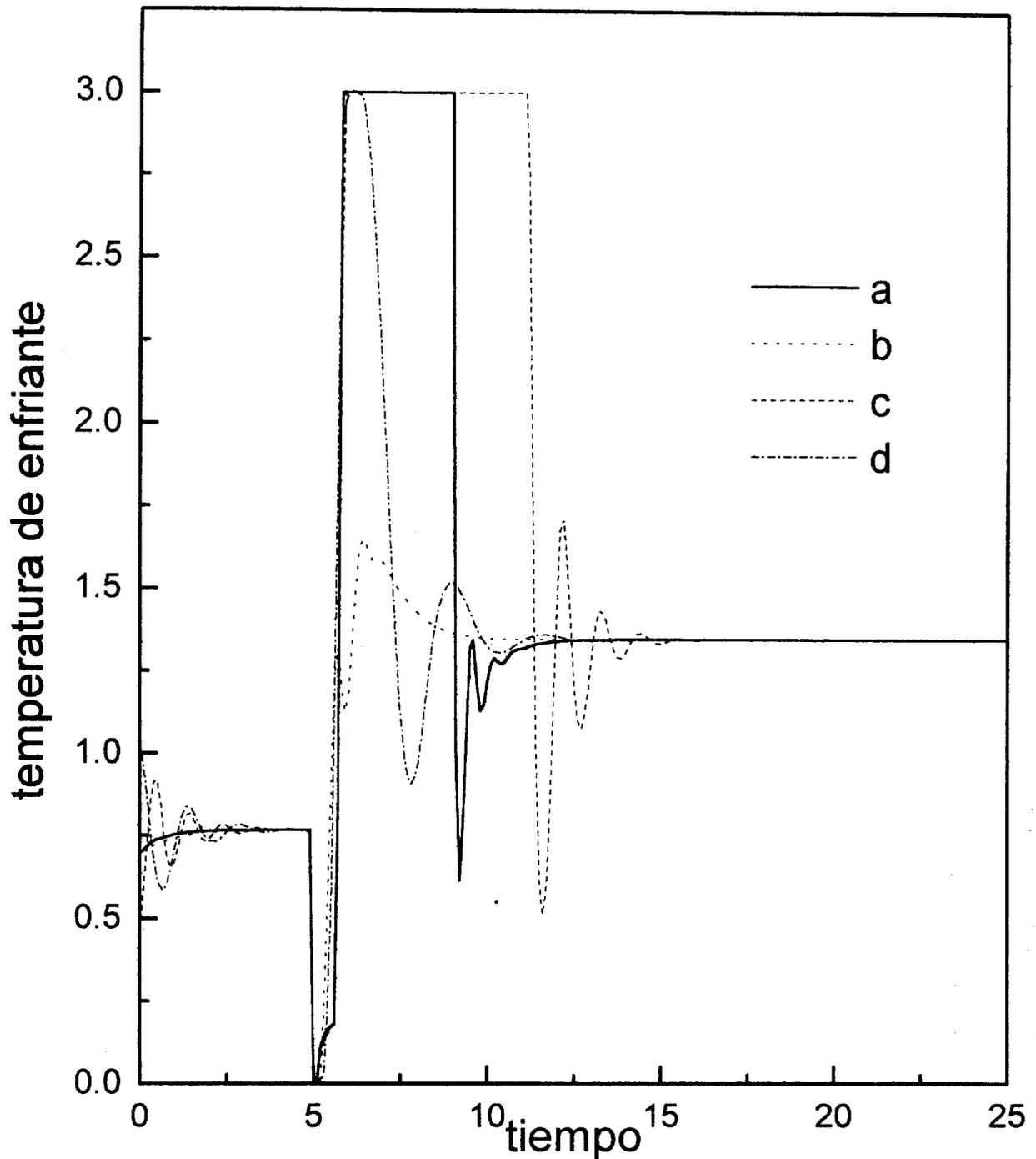


Figura 4.6 Comparación del desempeño entre el control cascada en serie y el control global para valores de $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0.066$.

Para los casos (a) y (b) se consideraron incertidumbres en el término de reacción y para los casos (c) y (d) se consideraron incertidumbres de modelado y paramétricas.

se lleva a cabo es exotérmica, de primer orden $A \rightarrow B$ tipo Arrhenius, el reactor manifiesta tres puntos de equilibrio, de los cuales uno es inestable con valores de $T = 400K$ y $C = 0.5\text{moles/litro}$ y es el que se desea regular. Las ecuaciones que modelan el sistema son las siguientes.

$$\begin{aligned} \dot{c}_a &= \theta(c_{af} - c_a) - k_0 \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) c_a \\ \dot{T} &= \theta(T_f - T) - \gamma(T - T_c) + \beta k_0 \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) c_a \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde c_a es la concentración de reactante en moles/lt y es la variable a controlar; T es la temperatura del reactor en grados kelvin; T_c es la temperatura del sistema de enfriamiento y para el caso en particular que aquí se trabaja es de 350 kelvin a la entrada; c_{af} es la concentración de reactante que entra al reactor y es de 1.0moles/litro ; T_f es la temperatura de entrada al reactor y es de 350 kelvin; θ es el tiempo de residencia $\frac{Q}{V}$ su valor es de 1min^{-1} ; γ es el calor generado por transferencia entre las paredes del reactor con el sistema de enfriamiento $\frac{UA}{V\rho C_p}$, para este caso vale 1.0min^{-1} ; k_0 es la constante de reacción su valor se va a tomar de $\exp(25)$; β es el calor generado por reacción entre la densidad y el coeficiente de transferencia de calor de la mezcla reaccionante $(\frac{-\Delta H}{\rho C_p})$ y tiene un valor de 200min^{-1} ; y por último, δ es la energía de activación entre la constante de gases $(\frac{-E_a}{R})$ y vale -1.0×10^4 .

Se desea controlar la concentración del reactor "manipulando" la temperatura del reactor con la cual se va a calcular la temperatura del enfriante requerida y esta a su vez va a incidir en un actuador que regule el gasto de enfriante. Para lograr esto se va a diseñar un control cascada paralelo que aproveche la velocidad con la que se mide la temperatura del reactor, de manera que el retardo en las mediciones de la concentración no afecte la velocidad de respuesta ni el desempeño del control. El desempeño del control cascada paralelo se va a comparar con un control global diseñado por retroalimentación linealizada. Se cuentan con incertidumbres en el término de reacción y en el coeficiente de transferencia de calor, como en el *ejemplo*

1, por lo que se va hacer uso de observadores que reconstruyan las incertidumbres.

Diseño del control cascada paralelo

El sistema a que se ejemplifica queda constituido por la Figura 4.7 donde se muestra el **RTAC** junto con el esquema de control que se va aplicar, por un lado se muestra el diagrama de flujo y por otro el diagrama de bloques. Para trabajar el diseño del control cascada paralelo se van a formar dos esquemas o lazos de control, uno denominado maestro y otro denominado esclavo. Para un manejo más fácil del sistema (4.30), se define el término de reacción de la siguiente forma.

$$k_0 c_a \exp\left(\frac{\delta}{T}\right) = \mathfrak{R}(c_a, T)$$

Entonces el modelo a trabajar es :

$$\begin{aligned} \dot{c}_a &= \theta(c_{af} - c_a) - \mathfrak{R}(c_a, T) \\ \dot{T} &= \theta(T_f - T) - \gamma(T - T_c) + \beta \mathfrak{R}(c_a, T) \end{aligned} \quad (4.30a)$$

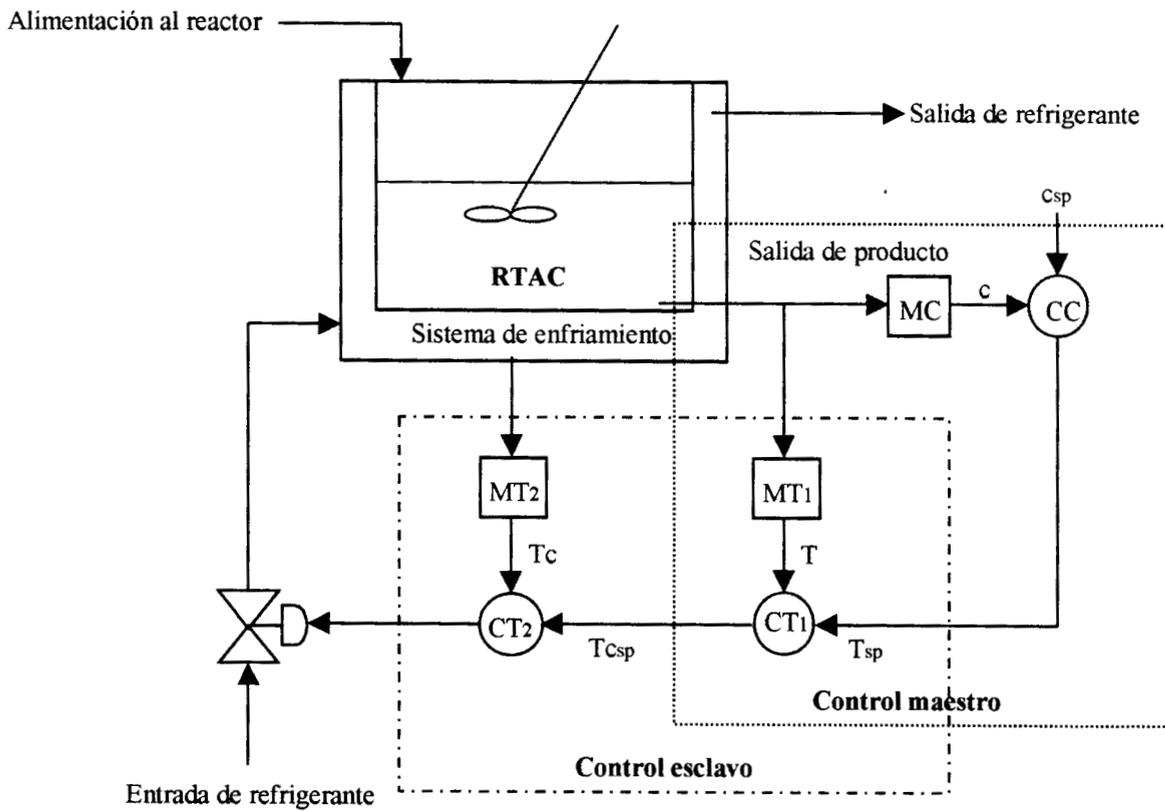
Paso 1. En esta primera parte se desea calcular la temperatura del reactor requerida para mantener la concentración en el punto de referencia 0.50 moles/litro , para constituir el control maestro, entonces se trabaja la ecuación de la concentración, se define una variable " α " que va ser el control virtual de la temperatura y se agrupan los términos inciertos. El control virtual va ir afectado por un término constante b , que es un estimado de la derivada del termino de reacción con respecto a la temperatura evaluada alrededor del punto de equilibrio inestable ($c_a = 0.5 \text{ moles/litro}$ y $T = 400K$). Esto se hace para trabajar el control virtual linearizado ya que la temperatura del reactor esta involucrada de forma no lineal en el termino de reacción.

$$\dot{c}_a = \theta(c_{af} - c_a) - \mathfrak{R}(c_a, T) + \alpha b - \alpha b$$

definiendo:

$$\eta_3 = -[\mathfrak{R}(c_a, T) + \alpha b]$$

A. Diagrama de proceso



B. Diagrama de flujo

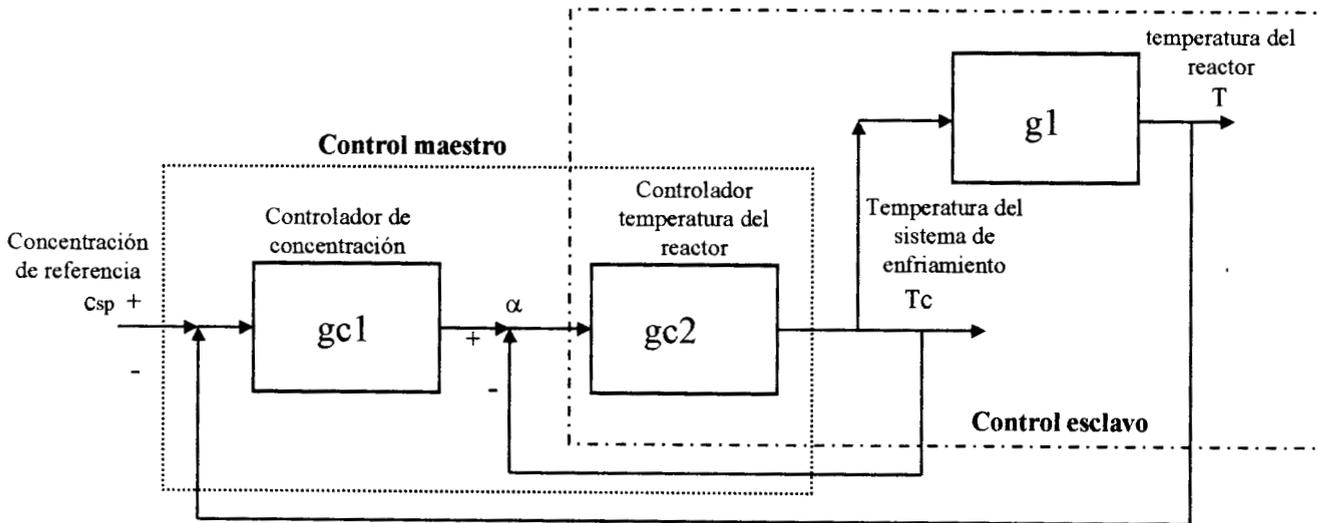


Figura 4.7 Diagrama de control cascada paralelo de un reactor tanque agitado de dos estados, con mediciones retardadas de la concentración

$$\Rightarrow \dot{c}_a = \theta(c_{af} - c_a) + \eta_3 + \alpha b \quad (4.30b)$$

Ahora se define un modelo de referencia de manera que se asegure la convergencia entre la concentración calculada y la de referencia, de manera que el control lleve la concentración a la referencia de manera asintóticamente estable y lo más rápido posible.

Modelo de referencia 3

$$\dot{e}_3 + \tau_{mp}^{-1} e_3 = 0$$

donde:

$$e_3 = c_a - c_{aref}$$

La ecuación de la dinámica nominal del error $s + \tau_{mp}^{-1} = 0$ indica que τ_{mp}^{-1} debe ser positiva y lo suficientemente grande para que el error tienda a cero. Enseguida se procede a sustituir la expresión del error en el modelo de referencia y se despeja la derivada de la concentración, para posteriormente equipararla con la ecuación (4.30b) y despejar el control virtual α .

$$\begin{aligned} \dot{c}_a + \tau_{mp}^{-1}(c_a - c_{aref}) &= 0 \\ -\tau_{mp}^{-1}(c_a - c_{aref}) &= \dot{c}_a \\ -\tau_{mp}^{-1}(c_a - c_{aref}) &\equiv \theta(c_{af} - c_a) + \eta_3 + \alpha b \end{aligned}$$

Entonces:

$$\alpha^I = -\left[\frac{\tau_{mp}^{-1}(c_a - c_{aref}) + \theta(c_{af} - c_a) + \eta_3}{b} \right] \quad (4.31)$$

Donde la expresión del control maestro esta marcada como ideal, ya que como se manejo anteriormente existen incertidumbres y por lo tanto este control no se puede calcular, por lo que se procede a estimar a las incertidumbres, de manera que las

estimadas tiendan a las reales ($E(\eta_3) \rightarrow \eta_3$).

Se puede decir que la derivada de las incertidumbres esta representada por la siguiente funcionalidad

$$\dot{\eta}_3 = \varphi_3(c_a, T, \alpha)$$

pero como η_3 es desconocida entonces φ_3 también lo es; ahora bien, se define un nuevo estado medible y_{m3} equiparable a η_3 el cual se puede obtener de la ecuación (4.30a).

$$\eta_3 \equiv y_{m3} = c_a - \theta(c_{af} - c_a) - \alpha b \quad (4.32)$$

Sin embargo, existe una derivada de la concentración, lo cual no es evidente de implementar ya que para calcular las incertidumbres requiero esta derivada y vice-versa, por lo que como en el diseño del control cascada serie se define una expresión de la derivada de las incertidumbres estimadas.

$$\dot{\hat{\eta}}_3 = \tau_4^{-1}(\eta_3 - \hat{\eta}_3) \quad (4.33)$$

para asignar un valor del tiempo característico de estimación de las incertidumbres τ_4^{-1} se procede a definir un error de reconstrucción (e_{r3}) entre las incertidumbres reales y las estimadas.

$$\begin{aligned} e_{r3} &= (\eta_3 - \hat{\eta}_3) \\ \dot{e}_{r3} &= (\dot{\eta}_3 - \dot{\hat{\eta}}_3) = \varphi_3 - \tau_4^{-1}(y_{m3} - \hat{\eta}_3) = \varphi_3 - \tau_4^{-1}(\eta_3 - \hat{\eta}_3) \\ \dot{e}_{r3} &= \varphi_3 - \tau_4^{-1}e_{r3} \end{aligned}$$

Cuya dinámica nominal es la siguiente

$$\begin{aligned} \dot{e}_{r3} &= -\tau_4^{-1}e_{r3} \\ \Rightarrow \tau_4^{-1} &> 0 \end{aligned}$$

entonces se sabe que el valor del tiempo característico (τ_4^{-1}) debe ser positivo y suficientemente grande para que cumplir la condición de que las incertidumbres

estimadas tiendan a las reales de manera asintóticamente estable.

Para la reconstrucción de las incertidumbres se va a construir un observador de orden reducido, que va hacer uso de las medidas disponibles de concentración y temperatura, entonces se sustituye la ecuación (4.32) en la (4.33) de manera que la derivada de la estimación queda de la siguiente forma.

$$\dot{\hat{\eta}}_3 = \tau_4^{-1}(c_a - \theta(c_{af} - c_a) - \alpha b - \hat{\eta}_3)$$

En donde se tiene una derivada de la concentración la cual se despeja y se define un nuevo estado.

$$\begin{aligned} w_3 &= \hat{\eta}_3 - \tau_4^{-1}c_a \\ \dot{w}_3 &= -\tau_4^{-1}[\theta(c_{af} - c_a) + \alpha b + \hat{\eta}_3] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por lo que las incertidumbres estimadas y el control real se pueden calcular con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_3 &= w_3 + \tau_4^{-1}c_a \\ \alpha^r &= -\left[\frac{\tau_4^{-1}(c_a - c_{aref}) + \theta(c_{af} - c_a) + \hat{\eta}_3}{b}\right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Paso 2. Una vez diseñado el control maestro se activa la dinámica de la temperatura del reactor y se construye el control esclavo. Asumiendo terminos inciertos en el termino de reacción la ecuación de la dinámica de la temperatura queda constituida de la siguiente forma.

$$\dot{T} = \theta(T_f - T) - \gamma(T - T_c) + \eta_4 \quad (4.30c)$$

donde:

$$\eta_4 = \beta \mathfrak{R}(x_1, x_2)$$

En esta parte del trabajo se va a diseñar un control que indique la temperatura del sistema de enfriamiento que requiere el control virtual, para mantener el objetivo de control impuesto al principio que es de mantener a la concentración en 0.50 moles/litro . Entonces, para comenzar el diseño del control esclavo se define un modelo de referencia que asegure la convergencia entre la entrada virtual α y la temperatura del reactor.

Modelo de referencia 4

$$\begin{aligned} e_4 &= T - \alpha \\ 0 &= \dot{e}_4 + \tau_{sp}^{-1} e_4 \end{aligned} \quad (4.36)$$

No hay que perder de vista que la entrada virtual α no es una constante. Para la asignación de valores al tiempo característico del lazo esclavo se usa la ecuación nominal del error para determinar que el valor del tiempo característico del lazo esclavo (τ_{sp}^{-1}) debe ser positivo y suficientemente grande. Enseguida se sustituye la expresión del error cuatro ($e_4 = T - \alpha$), en la ecuación (4.36) y se despeja la derivada de la temperatura del reactor (\dot{x}_2) y luego se equipara con la ecuación (4.30c). De esta forma se logra obtener la expresión del control que es la temperatura del sistema de enfriamiento.

$$\begin{aligned} (T - \dot{\alpha}) + \tau_{sp}^{-1}(T - \alpha) &= 0 \\ T &= \dot{\alpha} - \tau_{sp}^{-1}(T - \alpha) \\ \dot{\alpha} - \tau_{sp}^{-1}(T - \alpha) &= \theta(T_f - T) - \gamma(T - T_c) + \eta_4 \\ T_c^I &= \frac{[\dot{\alpha} - \tau_{sp}^{-1}(T - \alpha) - \theta(T_f - T) + \gamma T - \eta_4]}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Una vez mas, el control esta constituido por terminos inciertos y por ende es ideal y no se puede calcular, por lo que se va proceder a realizar una estimación de las incertidumbres. Además se cuenta con una derivada del control virtual $\dot{\alpha}$ la cual como en el caso del control cascada en serie, se va aproximar mediante un filtro.

Se procede a definir un nuevo estado medido y_{m4} que va a coincidir con la incertidumbre η_4 , este estado medido se puede obtener de la ecuación (4.30c), $\dot{T} = \theta(T_f - T) - \gamma(T - T_c) + \eta_4$, entonces:

$$y_{m4} = T - \theta(T_f - T) + \gamma(T - T_c)$$

Se define:

$$\dot{\hat{\eta}}_4 = \varphi_4(T, T_c)$$

pero la derivada de las incertidumbres son desconocidas por que las incertidumbres tambien lo son, entonces, siguiendo el procedimiento de reconstruir las incertidumbres mediante un observador de orden reducido basado en las medidas de temperatura del reactor. Se procede a definir una expresión de la dinámica del error, como se ha venido haciendo.

$$\dot{\hat{\eta}}_4 = \tau_5^{-1}(y_{m4} - \hat{\eta}_4) \quad (4.38)$$

Ahora se define la dinámica del error de reconstrucción de las incertidumbres y su ecuación nominal para determinar las asignaciones de valores al tiempo característico, τ_5^{-1} .

$$\begin{aligned} e_{r4} &= y_{m4} - \hat{\eta}_4 \\ \dot{e}_{r4} &= \dot{y}_{m4} - \dot{\hat{\eta}}_4 = \dot{\eta}_4 - \dot{\hat{\eta}}_4 = \varphi_4 - \tau_5^{-1}(y_{m4} - \hat{\eta}_4) \\ \dot{e}_{r4} &= \varphi_4 - \tau_5^{-1}e_{r4} \end{aligned}$$

Cuya ecuación nominal es:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{r4} &= -\tau_5^{-1}e_{r4} \\ \Rightarrow \tau_5^{-1} &> 0 \end{aligned}$$

entonces, se llega a la conclusión de que la ganancia asignada para obtener la derivada de las incertidumbres estimadas debe ser positiva y suficientemente grande

para que el error de reconstrucción converga al origen.

Siguiendo con la estimación de las incertidumbres, se usa la ecuación (4.38), $\dot{\hat{\eta}}_4 = \tau_5^{-1}(y_{m4} - \hat{\eta}_4)$, sustituyendo la expresión del estado medido cuatro (y_{m4}), llegando a las expresiones ya manejadas, donde se tiene que definir un nuevo estado que contiene a la incertidumbre estimada y a la derivada de la temperatura afectada por el tiempo característico de reconstrucción τ_5^{-1} . Entonces:

$$\dot{\hat{\eta}}_4 = \tau_5^{-1}[\dot{T} - \theta(T_f - T) + \gamma(T - T_c) - \eta_4]$$

definiendo:

$$w_4 = \hat{\eta}_4 - \tau_5^{-1}T$$

entonces:

$$\dot{w}_4 = -\tau_5^{-1}[\theta(T_f - T) - \gamma(T - T_c) + \hat{\eta}_4] \quad (4.39)$$

$$\hat{\eta}_4 = w_4 + \tau_5^{-1}T \quad (4.40)$$

$$T_c^r = \frac{[\dot{\alpha} - \tau_{sp}^{-1}(T - \alpha) - \theta(T_f - T) + \gamma T - \hat{\eta}_4]}{\gamma} \quad (4.41)$$

Como se podrá observar en la ecuación del control real (ecuación 4.41), existe una derivada en tiempo de la referencia (α), la cual como se menciono no es una constante y para poder calcular su derivada se va a hacer uso, como en el caso del diseño del lazo esclavo del control cascada en serie, de una aproximación filtrada cuya expresión es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= x_m + \frac{\alpha}{t_{fcp}} \\ \dot{x}_m &= -\frac{x_m + \frac{\alpha}{t_{fcp}}}{t_{fcp}} \end{aligned} \quad (4.41a)$$

donde el tiempo de filtrado t_{fcp} entre mas pequeño sea, la aproximación de la derivada se acerca más a la real. La inicialización del estado x_m aquí introducido es: $x_{m0} = (0)$. Con esto último, el lazo maestro esta representado por el conjunto de

ecuaciones (4.39), (4.40), (4.41) y (4.41a).

Por último, el control cascada paralelo esta constituido por sus dos esquemas maestro y esclavo junto con sus estimadores de incertidumbres. Su desempeño y velocidad de convergencia se va a comparar con un esquema de control global entre la concentración de reactante y la temperatura del enfriante aplicando la técnica de retroalimentación linearizante.

Diseño del control global

En esta parte se va a realizar algo equivalente a lo hecho para diseñar el control global del **RTAC** con tres estados del *ejemplo 1*, es decir, se van a usar técnicas de retroalimentación linearizante, en este control se va a calcular la temperatura del sistema de enfriamiento necesaria para mantener la concentración de referencia deseada, que es de $c_a = 0.50 \text{ moles/litro}$. Sin embargo se pueden aplicar cambios de referencia para observar el seguimiento y desempeño del control global y del control cascada paralelo. Volviendo con el diseño del control, se tiene que en principio para aplicar la técnica de retroalimentación se va a obtener el grado relativo del sistema, que como se recordará, es derivar la ecuación modelo representada por la derivada en tiempo de la concentración, hasta obtener la variable "manipulada" que es la temperatura del sistema de enfriamiento, el termino de manipular se entrecorilla por que en realidad, como se ha venido mencionando, este control va a incidir sobre un actuador que es la válvula de alimentación de flujo de enfriante y que es la acción de control que realmente se manipula. Una vez obtenido el grado relativo del sistema, se construye un modelo de referencia del orden del grado relativo, que para este ejemplo es dos, y se define un error de convergencia entre la concentración calculada en el sistema y la de referencia que es una constante, enseguida se obtiene la expresión del control. A continuación se esquematiza el diseño del control global.

Paso 1. Obtención del grado relativo del sistema, se deriva la ecuación dinámica de la concentración, hasta obtener la segunda derivada, ya que aqui es donde aparece la temperatura de enfriamiento.

Ecuación dinámica de la concentración.

$$\dot{c}_a = \theta(c_{af} - c_a) - \mathfrak{R}(c_a, T)$$

Segunda derivada de la ecuación dinámica de la concentración:

$$\ddot{c}_a = -\theta^2(c_{af} - c_a) + b\gamma T_c + \left[\begin{array}{l} \theta\mathfrak{R} - \left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial c_a}\right) * [\theta(c_{af} - c_a) - \mathfrak{R}] - \left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial T}\right) * [\theta(T_f - T) + \\ \beta\mathfrak{R}(c_a, T) + \gamma(T_c - T)] - \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial T}\gamma T_c - b\gamma T_c \end{array} \right] \quad (4.42)$$

En la ecuación anterior se observan dos características, la primera es que se introduce un término sumado y restado, que contiene a la temperatura del sistema de enfriamiento afectada por el coeficiente de transferencia de calor y por el término b , que es el mismo usado en la construcción del lazo maestro del control cascada paralelo y que representa el estimado de la derivada parcial del término de reacción con respecto a la temperatura. Esto se hace por que la temperatura del sistema de enfriamiento esta en forma no lineal afectada por el término de reacción y por el coeficiente de transferencia de calor y si se deja de esta forma al modelo anterior no se podrá despejar esta temperatura que a final de cuentas representa a la variable "manipulada"; la segunda característica es que el término de reacción y sus derivados son incertidumbres, ya que a ciencia cierta no se conoce un modelo que los describa exactamente, entonces se define la siguiente variable para representar a las incertidumbres,

$$\eta_{g2} = \theta\mathfrak{R} - \left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial c_a}\right) * [\theta(c_{af} - c_a) - \mathfrak{R}] - \left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial T}\right) * [\theta(T_f - T) + \beta\mathfrak{R}(c_a, T) + \gamma(T_c - T)] - \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial T}\gamma T_c - b\gamma T_c \quad (4.43)$$

sustituyendo la expresión de las incertidumbres, ecuación (4.43) en la ecuación (4.42), se obtiene el siguiente modelo que es con el que se va a trabajar.

$$\ddot{c}_a = -\theta^2(c_{af} - c_a) + \eta_{g2} + b\gamma T_c \quad (4.44)$$

A continuación se define un modelo de referencia de segundo orden.

Modelo de referencia de segundo orden

$$\ddot{e}_* + d_3 \dot{e}_* + d_4 e_* = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} e_* &= c_a - c_{aref} \\ d_3 &= \tau_{mp}^{-1} + \tau_{sp}^{-1} \\ d_2 &= (\tau_{mp} \tau_{sp})^{-1} \end{aligned}$$

ahora, se sustituye la expresión del error de convergencia (e_*) en el *modelo de referencia de segundo orden*, se despeja la segunda derivada de la concentración y se equipara con la ecuación (4.44), $\ddot{c}_a = -\theta^2(c_{af} - c_a) + \eta_{g2} + b\gamma T_c$, para poder despejar el control representado por la temperatura del sistema de enfriamiento.

$$0 = \ddot{c}_a + d_3 \dot{c}_a + d_4(c_a - c_{aref})$$

$$\ddot{c}_a = -d_3 \dot{c}_a - d_4(c_a - c_{aref})$$

$$-d_3 \dot{c}_a - d_4(c_a - c_{aref}) = -\theta^2(c_{af} - c_a) + \eta_{g2} + b\gamma T_c$$

$$T_c^I = \frac{[\theta^2(x_{1in} - x_1) - \eta_{g2} - d_3 \dot{c}_a - d_4(c_a - c_{aref})]}{b\gamma} \quad (4.45)$$

La expresión del control esta dada por la ecuación (4.45) y se marca con el subíndice "I" de ideal, ya que como se ha venido mencionando, existen incertidumbres, entonces se procede a realizar un estimado de las incertidumbres de manera que las estimadas tiendan a las reales, para lo cual se va hacer uso de un estimador de alta ganancia. Se observa que en la ecuación (4.45) existe una derivada en tiempo de la concentración, la cual contiene un término de reacción $\dot{c}_a = \theta(c_{af} - c_a) - \mathfrak{R}(c_a, T)$, que es incierto y por tanto no se puede calcular directamente, por lo que se definen los siguientes estados.

$$c_a = z_3 \quad (4.46)$$

$$\dot{c}_a = z_4$$

$$\ddot{c}_a = \dot{z}_4 = -\theta^2(c_{af} - c_a) + \eta_{g2} + b\gamma T_c$$

y

$$\dot{\eta}_{g2} = \varphi_*(c_a, T_c)$$

pero como η_{g2} es desconocida, entonces φ_* también lo es, pero dadas medidas de la concentración y de la temperatura del sistema de enfriamiento las dinámicas de los estados desconocidos o no medidos, η_{g2} , $\dot{c}_a = z_4$ se pueden reconstruir u observar.

En efecto.

$$\dot{z}_3 = \dot{c}_a$$

$$\eta_{g2} = \ddot{c}_a + \theta^2(c_{af} - c_a) - b\gamma T_c$$

Paso 2. Aprovechando la estructura dada por el sistema de ecuaciones (4.46), se construye el estimador de alta ganancia.

$$\dot{\hat{z}}_3 = 3\tau_6^{-1}(c_a - \hat{z}_3) + \hat{z}_4 \quad (4.47)$$

$$\dot{\hat{z}}_4 = 3\tau_6^{-2}(c_a - \hat{z}_3) - \theta^2(c_{af} - c_a) + \hat{\eta}_{g2} + b\gamma T_c$$

$$\dot{\hat{\eta}}_{g2} = \tau_6^{-3}(c_a - \hat{z}_3)$$

Con las siguientes condiciones iniciales,

$$\hat{z}_3(0) = c_a(0); \hat{z}_4(0) = 0; \hat{\eta}_{g2}(0) = 0$$

y el control real con el término de las incertidumbres estimadas es:

$$T_c^r = \frac{[\theta^2(x_{1in} - x_1) - \hat{\eta}_{g2} - d_3 \dot{c}_a - d_4(c_a - c_{aref})]}{b\gamma} \quad (4.48)$$

Por lo tanto, el control global queda constituido por las ecuación (4.48) junto con el estimador (4.46) en el cual se asigna el tiempo característico τ_6 que debe ser positivo y lo más pequeño posible para que el estimador converga rápidamente a los valores reales de los estados no observados; con el control se va a manipular la temperatura del sistema de enfriamiento que va a mantener la concentración de referencia dada. Para tener una idea mejor del control que aquí se desarrollo se muestra la Figura 4.7a en donde se observa grafica y esquematicamente el global del **RTAC** de dos estados.

Observaciones

Al comparar el esquema de control cascada en paralelo frente al de retroalimentación linealizante, se vió que el primero estima mejor las incertidumbres y que sigue mejor los cambios de referencia a comparación del segundo. Como ya se mencionó, existieron retrasos en la obtención de las medidas de la concentración, lo cual se ve reflejado en le desempeño del controlador y en el caso de los esquemas de control comparados, se tiene que el control en cascada soporta grandes tiempos de muestreo y logra controlar la concentración a costa de retardos al actuar y el linealizante no. Para escoger las ganancias de los tiempos de estimación en los lazos de control, se observó que el tiempo del control maestro debe ser del orden de dos veces el tiempo de muestreo, mientras que el tiempo del lazo esclavo debe ser del orden de cinco veces el tiempo de muestreo, para que el desempeño del control sea bueno y con respuestas rápidas en la acción de control. Para asignar la ganancia del estimador del control linealizante se debe cumplir que " τ_6 " debe ser dos veces el tiempo de muestreo de la concentración. El control linealizante no soporta grandes tiempos de muestreo y solo es equiparable con el de cascada a altas ganancias en el control, del orden de $.04\text{mín}^{-1}$ en τ_6 y τ_5 , (ganancia del estimador de incertidumbres del control global y ganancia del estimador del control maestro, respectivamente), Figura 4.9,

mientras que el control en cascada trabaja con ganancias del orden de 0.4mín^{-1} para τ_5 , en el control maestro, usando tiempos de muestreo de 0.2mín , con lo cual se obtiene un buen desempeño del controlador, Figura 4.8, mientras que el control global ni si quiera puede controlar la primera referencia de 0.5moles/litro .

Para que existiera concordancia con el sistema físico se saturaron los controles entre valores de 300 y $400K$ para el caso de la temperatura del sistema de enfriamiento y de 350 y $500K$, para el control maestro α del sistema en cascada . En el comportamiento de los controles diseñados al actuar con una concentración de entrada de 1.0moles/litro y una temperatura de alimentación de $350K$, se observa que la concentración se va a niveles cercanos a cero, es decir, que se agota todo el reactante y se convierte practicamente al 100% a producto, lo cual es razonable, ya que el control se satura a temperaturas de $500K$ para la temperatura del reactor, mientras que la temperatura requerida para tenere 0.5moles/lt en reactante es de $400K$, posteriormente el control "aprende" y entonces mantiene a la concentración en la referencia pedida, cuyos valores, como ya se menciono, corresponden a un punto equilibrio inestable del sistema.

En la Figura 4.9, se observa que al comparar los controles, el linearizante presenta comportamiento oscilatorio para alcanzar la referencia pedida, mientras que el cambio de referencia (de 0.5moles/litro a 0.55moles/lt), lo hace de manera más lenta que el control en cascada.

De manera general, en este capítulo se concluye que el diseño de un control cascada en serie para un **RTAC** como el mostrado en la Figura 4.1, mejora la operación del reactor, ya que al usar una medida disponible que es la temperatura del sistema de enfriamiento se comprobó que el control llevaba de forma rápida y suave a la temperatura del reactor a la referencia pedida, a pesar de incertidumbres y de cambios de referencia tipo escalón en la temperatura del reactor y a pesar de que se esta operando en un punto de equilibrio inestable. Se trabajo con el sistema no lineal y se logró desacoplar a la temperatura del sistema de enfriamiento y la

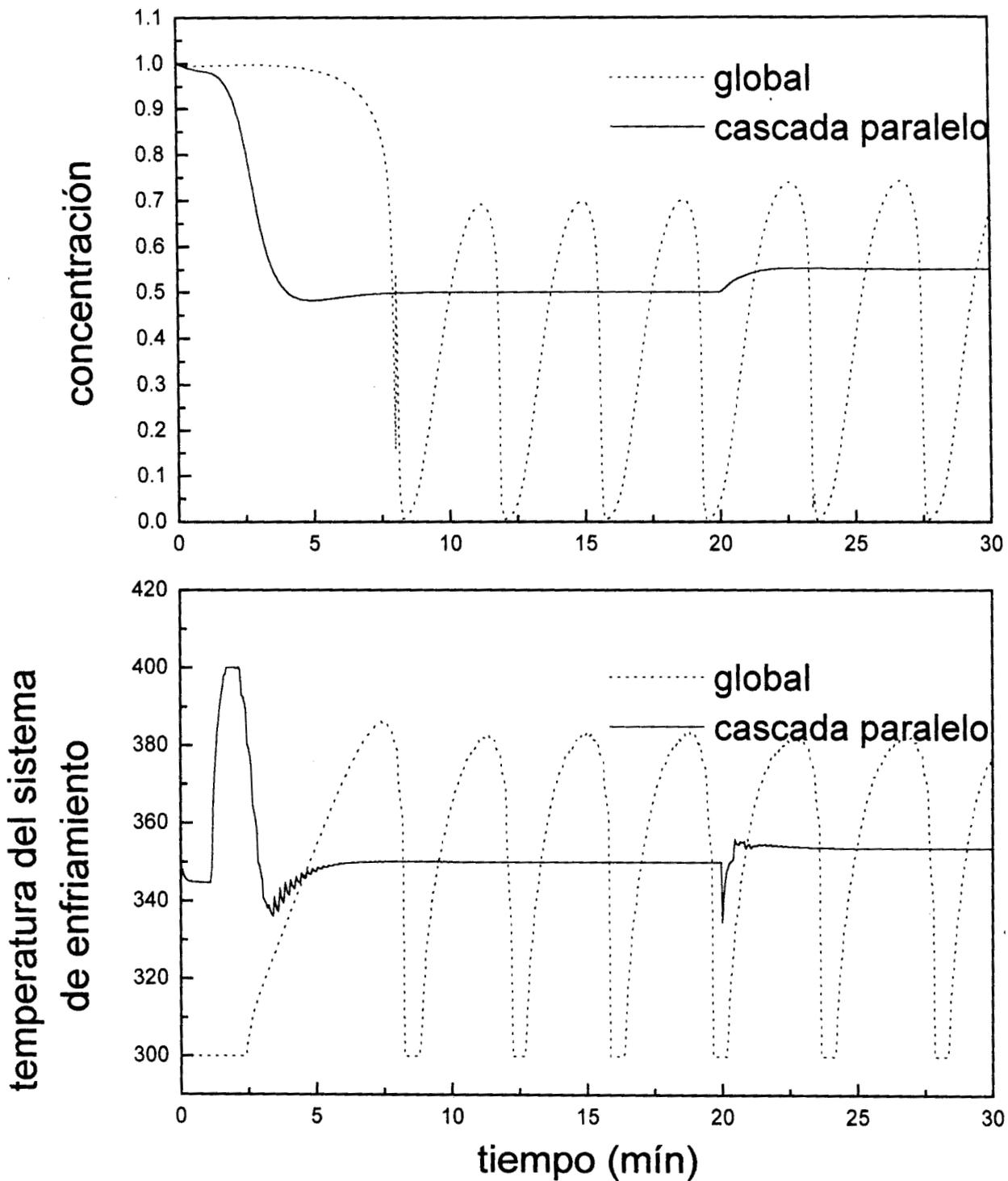


Figura 4.8 Comparación del desempeño entre el control cascada paralelo (línea continua) y el control global (línea punteada). Valores de tiempo de estimación: $\tau_5 = \tau_6 = 0.4$ mín.

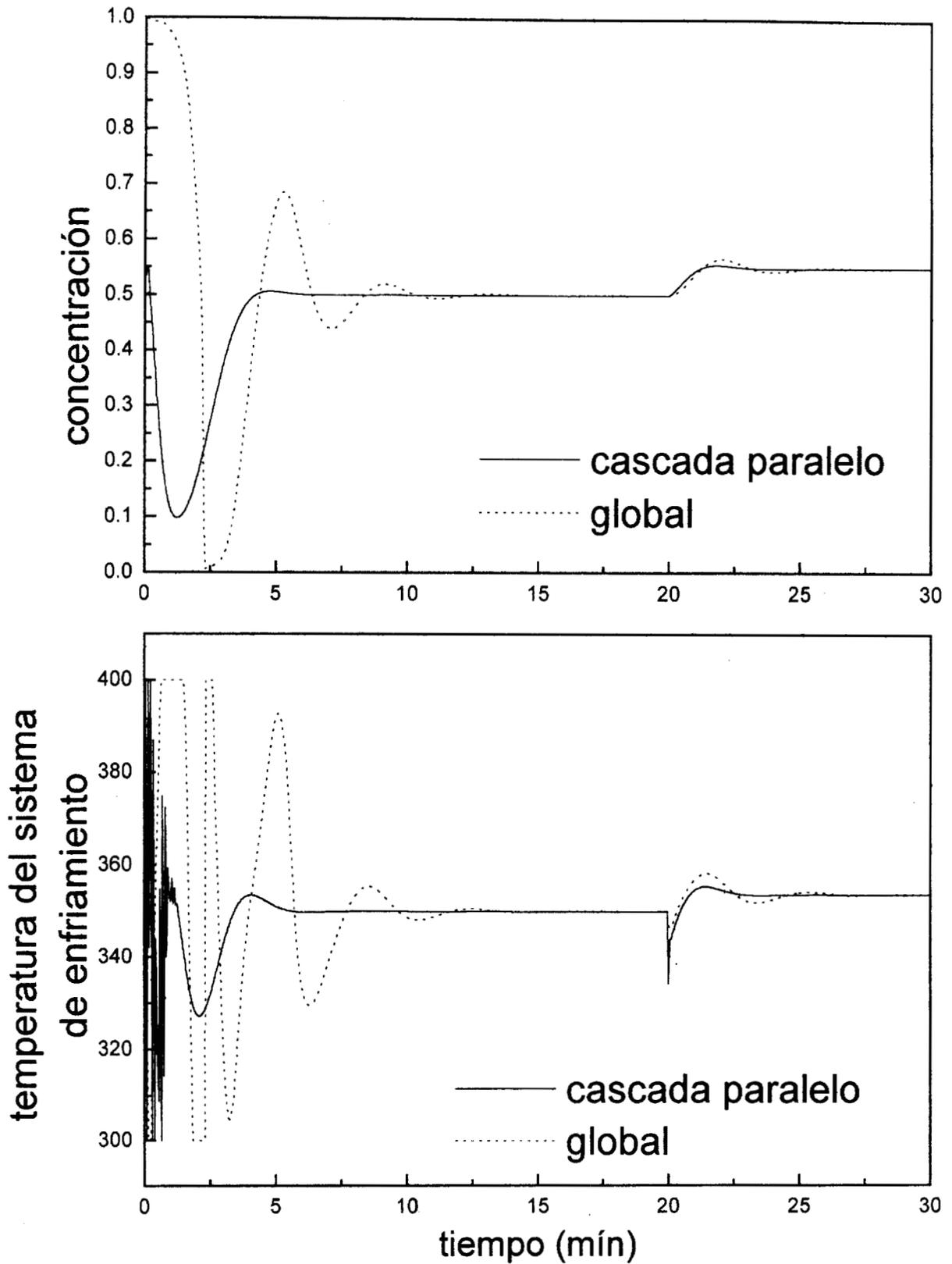
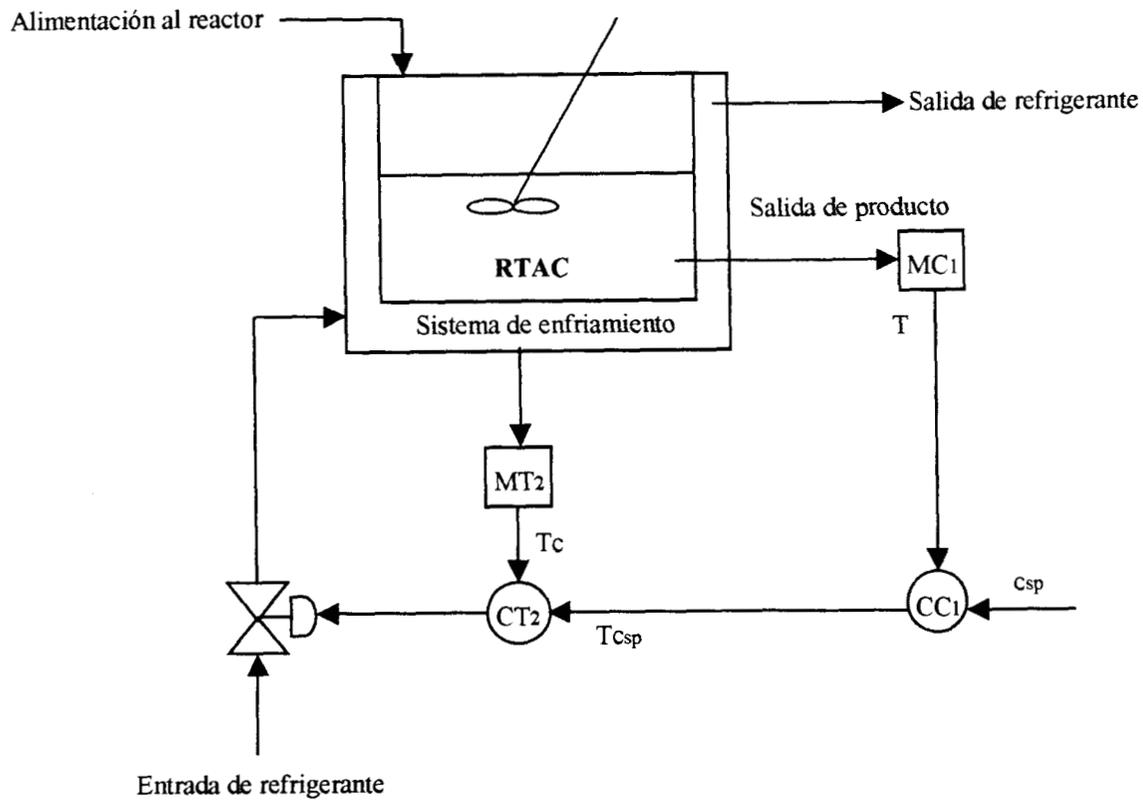


Figura 4.9 Comparación del desempeño entre el control cascada paralelo (línea continua) y el control global (línea punteada). Valores de tiempo de estimación: $\tau_5 = \tau_6 = 0.04$ mín.

A. Diagrama de proceso



B. Diagrama de flujo

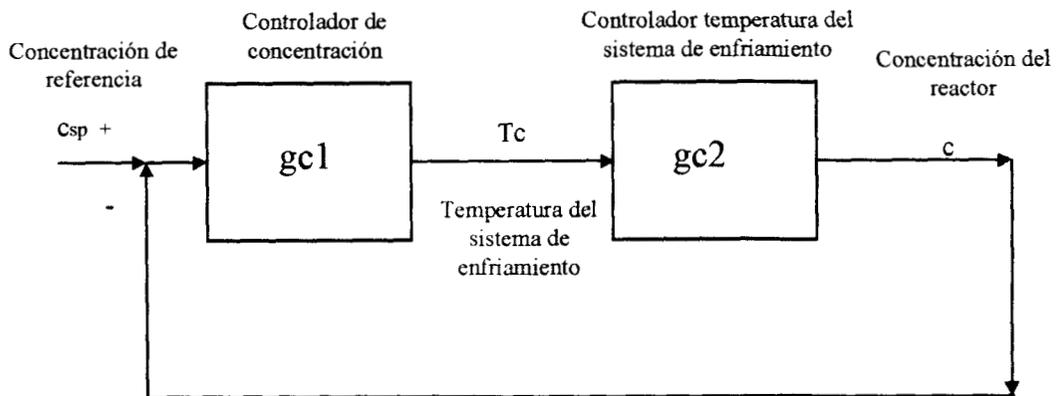


Figura 4.7a Diagrama de control global de un reactor tanque agitado de dos estados, con mediciones retardadas de la concentración

temperatura del reactor en el espacio de estados usando técnicas de back-stepping. Se comprobó que el empleo de un control cascada en paralelo ofrece las ventajas de que aun al contar con medidas retardadas y con incertidumbres en el modelo del sistema, se controla a la variable en el punto de referencia dado, aun siendo este inestable, con una buena rapidez de respuesta a la referencia dada y a cambios en la misma. El control global no puede lograr lo que el control en cascada, *lo cual en parte se debe a que la estimación de las incertidumbres contiene demasiados términos degradando el desempeño del control* y en parte al uso de medidas retardadas, ya que mientras el control actúa con medidas a un tiempo t el sistema ya se encuentra en un tiempo $t+1$, mientras que el control en cascada está diseñado para aprovechar las medidas rápidas (temperatura) y atenuar el efecto del retraso en la medida de la variable controlada (concentración). Se observó en la Figura 4.9 que el control cascada paralelo actúa de manera saturada al inicio de su corrida, lo cual se traducirá en acciones violentas de abertura y cierre de la válvula de entrada de enfriante a la chaqueta y si esto se aplica en planta los operadores lo traducirán como un problema. Sin embargo, esta acción se lleva a cabo debido a que a la chaqueta le estamos pidiendo demasiado, es decir *que rechace las no linealizades del término de reacción y de su derivada*, por lo que el comportamiento de saturación es normal y totalmente comprensible para el control cascada paralelo.

Conclusiones generales

Se partió de la hipótesis de que el uso de controladores cascada mejora el desempeño de los sistemas controlados, lo cual es debido a su capacidad de rechazo de perturbaciones. Lo anterior se aplicó a dos reactores químicos con dinámicas no lineales, encontrándose lo siguiente:

a) Se realizó el diseño de dos controladores tipo cascada para controlar dos casos de **RTAC**, en puntos de equilibrio inestables. Estos controladores mostraron un buen comportamiento al mantener la referencia pedida en los puntos de equilibrio inestables apesar de incertidumbres paramétricas y de modelado.

b) Para comparar dos controles no lineales para los mismos sistemas, uno diseñado por técnicas de retroalimentación linearizante (control global) y otro por técnicas de back-stepping (control cascada) se observó que debía existir una equivalencia entre las ganancias de los controladores (ver apéndice). Esta equivalencia es válida cuando no existen incertidumbres.

c) Los controladores tipo cascada rechazan perturbaciones de mejor forma que un control diseñado por técnicas de linearización por retroalimentación.

d) Para la reconstrucción de incertidumbres en los controladores tipo cascada se usaron estimadores de orden reducido, los cuales para ser implementados requieren de la definición de una nueva variable que contiene la derivada en tiempo del

estado medido. Este tipo de estimadores realizan una buena reconstrucción de las incertidumbres a pesar de las altas no linealidades producidas por la exponencial de Arrhenius.

e) Para la reconstrucción de incertidumbres en los controladores con linearización por retroalimentación, se requirió de estimadores de alta ganancia, en los cuales se tiene que estimar un gran número de términos altamente no lineales y que en el caso del ejemplo para el **RTAC** con dos estados (concentración y temperatura), se debe estimar el término de reacción y sus derivadas. Por lo que el desempeño de este tipo de controladores se ve muy degradado.

f) Los controladores cascada actúan de manera rápida pero realizan al inicio un gran esfuerzo de control lo que se refleja en sobredisparos del control. Esto es físicamente imposible, por lo que se usaron saturaciones en los controladores cascada serie y cascada paralelo y también en los controladores de comparación. Este comportamiento se ve claramente reflejado en la Figura 4.9, en la cual se compara el desempeño del control cascada paralelo frente a un control diseñado por técnicas de linearización por retroalimentación. Para la construcción de la figura 4.9 se usaron ganancias del orden de 25 mín, en comparación a un tiempo de residencia del reactor de 1 mín y se observa un comportamiento de saturación al inicio del tiempo de control para ambos, siendo éste más acentuado para el controlador tipo cascada paralelo. Este comportamiento se debe a que en el cálculo de la temperatura del sistema de enfriamiento requerido (control esclavo) están involucradas las no linealidades del término de reacción. Por lo que al sistema de enfriamiento se le está pidiendo quizá más de lo que es capaz de rechazar. Entonces se llegó a la conclusión de que si ya se estaba haciendo uso de un equipo de medición de concentración en línea, lo que significa un alto gasto, entonces sería mejor usar el lazo de control esclavo con el flujo de entrada al reactor, para de esta manera evitar el manejo de

los términos no lineales involucrados por la temperatura del reactor.

g) Como ya se mencionó, se trabajaron modelos no lineales, en los cuales los controladores mostraron un buen desempeño. Lo que en trabajos previos no se había realizado de esta manera, si no más bien, manejando modelos linealizados. Lo cual limitaba el desempeño de este tipo de controladores, por ejemplo, en la capacidad de rechazo de perturbaciones en escalón de la referencia.

h) Para disminuir el sobredisparo en el control cascada en serie se hicieron cambios en los valores de saturación del lazo maestro, gráfica 4.5, en la cual se observó que al disminuir el sobredisparo se obtenía un retraso en la acción del controlador.

i) Con el uso de estimadores de orden reducido se encontró una estructura del controlador tipo proporcional integral. En donde la parte proporcional esta dada por el error entre la variable controlada y su referencia. Mientras que la parte integral esta representada por el estimador de incertidumbres. Este tipo de estructura es capaz de suprimir el efecto de "wind-up", que ocurre al haber saturaciones en los controladores.

Entonces se concluye que con el uso de controladores tipo cascada usando técnicas no lineales y de observadores de orden reducido para estimación de incertidumbres en sistemas no lineales, se asegura una convergencia asintóticamente estable y un desempeño robusto a incertidumbres paramétricas y de modelado.

Apéndice

Equivalencia entre la técnica de back-stepping y la del diseño de control por retroalimentación linearizante bajo información completa

En esta parte se va a realizar una comprobación matemática que muestre la equivalencia entre los controladores diseñados por la técnica de back-stepping y de retroalimentación linearizante, cuando se tiene información completa acerca de la dinámica y los estados de la planta. Tal comprobación se realizará para el caso del RTAC de tres estados, la cual se puede realizar de manera similar para el caso del RTAC de dos estados.

El RTAC de tres estados se puede representar como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) & (i) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, x_3) + \delta x_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_2, x_3) + g(x_3)u\end{aligned}$$

donde u es la variable controlada (gasto de fluido de enfriamiento, qc), x_1 es la concentración de reactivo, x_2 y x_3 son las variables medidas y corresponden a la temperatura del reactor y del sistema de enfriamiento, respectivamente. La salida controlada del sistema es la temperatura del reactor $y = x_2$.

Aplicación de la técnica de back-stepping

PASO 1. Se desea controlar la temperatura x_2 "manipulando" la temperatura del sistema de enfriamiento x_3 , se define una entrada virtual, que llamaremos v la cual se equipara con la temperatura del sistema de enfriamiento.

$$v \equiv x_3$$

Enseguida, la salida controlada (la temperatura del reactor) queda expresada en función de la entrada virtual de la siguiente forma:

$$y \equiv x_2$$

$$\dot{y} = f_2(x_2, x_3) + \delta v \quad (ii)$$

se designa un modelo de referencia que asegure convergencia asintótica entre la variable controlada (x_2) y la referencia (x_{2ref}).

$$\dot{e}_1 + \tau_1^{-1} e_1 = 0$$

donde

$$e_1 = y - y_{ref} = x_2 - x_{2ref}$$

\Rightarrow

$$\dot{y} = -\tau_1^{-1}(y - y_{ref}) = -\tau_1^{-1}(x_2 - x_{2ref}) \quad (iii)$$

Equiparando las ecuaciones (ii) con la (iii) se obtiene la expresión de la entrada virtual v .

$$v = \frac{[-f_2 - \tau_1^{-1}(x_2 - x_{2ref})]}{\delta} \quad (iv)$$

PASO 2. Controlar x_3 manipulando gc . Este es un problema de seguimiento en el cual se desea que $x_3(t) \rightsquigarrow v(t)$ de manera asintótica. Se tiene que

$$\dot{x}_3 = f_3 + gu \quad (v)$$

y se define otro modelo de referencia, para asegurar convergencia asintótica entre la temperatura del sistema de enfriamiento (x_3) y la entrada virtual (v):

$$\dot{e}_2 + \tau_2^{-1} e_2 = 0$$

donde:

$$e_2 = x_3 - v$$

\Rightarrow

$$\dot{x}_3 = \dot{v} - \tau_2^{-1}(x_3 - v) \quad (vi)$$

Se equiparan a la ecuación (v) con la (vi) y se despeja a la variable controlada u que representa el flujo de enfriante.

$$u = \frac{[-f_3 + \dot{v} - \tau_2^{-1}(x_3 - v)]}{g} \quad (vii)$$

Observemos que en la ecuación (vii) se requiere de la derivada de la entrada virtual \dot{v} ya que no es una constante, entonces se procede a obtenerla.

$$\dot{v} = \frac{1}{\delta} [-f_{21} - f_{22}f_2 - f_{22}\delta x_3 - \tau_1^{-1}f_2 - \tau_1^{-1}\delta x_3] \quad (viii)$$

la cual se sustituye la expresión (viii) en (vii):

$$u = \frac{\delta f_3 - f_{21} - f_{22}f_2 - f_{22}\delta x_3 - \tau_1^{-1}f_2 - \tau_1^{-1}\delta x_3 - \tau_2^{-1}\delta x_3 - \tau_2^{-1}f_2 - (\tau_1\tau_2)^{-1}(x_2 - x_{2ref})}{\delta g} \quad (ix)$$

Aplicación de la técnica de retroalimentación linearizante

Se usa el mismo sistema (i):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, x_3) + \delta x_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_2, x_3) + g(x_3)u \end{aligned}$$

Ahora, como en el caso anterior la salida controlada es:

$$y \equiv x_2$$

\Rightarrow

$$\dot{y} = f_2 + \delta x_3$$

se obtiene deriva la ecuación anterior hasta obtener la expresión que contenga a la

variable controlada u .

$$\ddot{y} = f_{21}f_1 + f_{22}f_2 + f_{22}\delta x_3 + \delta f_3 + \delta g u \quad (x)$$

Ahora se va usar un modelo de referencia de segundo orden, para asegurar convergencia asintótica entre la variable de entrada y y la referencia, y_{ref} .

$$\ddot{e} + d_1 \dot{e} + d_2 e = 0$$

donde

$$e = y - y_{ref} = x_2 - x_{2ref}$$

\Rightarrow

$$\ddot{y} = -d_1 \dot{y} - d_2(y - y_{ref}) \quad (xi)$$

equiparando la ecuación (x) con la ecuación (xi), se obtiene la expresión de la entrada de control u , de manera que:

$$u = \frac{-f_{21} - f_{22}f_2 - f_{22}\delta x_3 - \delta f_3 - d_1 \dot{y} - d_2(y - y_{ref})}{\delta g} \quad (xii)$$

se sustituye la expresión de la derivada de la variable controlada (\dot{y}) en (xii), para obtener finalmente la siguiente expresión:

$$u = \frac{-f_{21} - f_{22}f_2 - f_{22}\delta x_3 - \delta f_3 - d_1(f_2 + \delta x_3) - d_2(y - y_{ref})}{\delta g} \quad (xiii)$$

Se nota que para que ambas técnicas de control (retroalimentación linealizante y back-stepping) sean equivalentes, es decir, que la ecuación (ix) y la ecuación (xiii) sean equivalentes, se deberán cumplir las siguientes relaciones en las ganancias de control:

$$d_1 = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} \quad (xiv)$$

$$d_2 = (\tau_1 \tau_2)^{-1}$$

Entonces se dice que las técnicas de retroalimentación linearizada y la técnica de back-stepping son equivalentes al cumplirse las igualdades marcadas en (xiv). Se debe tener en cuenta que esta equivalencia es válida tomando la consideración de que se tiene información completa de la dinámica y de los estados de la planta, ya que en el caso de existir incertidumbres esta equivalencia no se cumplirá, lo cual se observó en el capítulo cuatro ya que al existir incertidumbres en los modelos de los ejemplos usados el seguimiento y el desempeño de los controladores no es comparable.

Bibliografía

Aris R., Amundson N. R. "An Analysis of Chemical Reactor Stability and Control: I-III". *Chem. Eng. Sci.*, vol. 7, p.121, 1958.

Balakotaiah V., Luss D. "Analysis of the multiplicity Patterns of a CSTR". *Chem. Eng. Comm.*, vol. 13, p. 111, 1981.

Balakotaiah V., Luss D. "Multiplicity Features of Reacting Systems: Dependence of the Steady States of a CSTR on the Residence Time". *Chem. Eng. Sci.*, vol. 38, p. 1709, 1983.

Brambilla A., Semino D. "Nonlinear Filter in Cascade Control Schemes". *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 31, pp. 2694-2699, 1992.

Brambilla A., Semino D., Scali C. "Design and Control Selection of Cascade Loop in Distillation". artículo presentado en el *IFAC Workshop on Integration of Process Design and Control*, Baltimore, MD, 27 y 28 de Junio, 1994, p. 171.

Chang H.-C., Calo J. M. "Exact Criteria for Uniqueness and Multiplicity of an n th Order Chemical Reaction via a Catastrophe Theory Approach". *Chem. Eng. Sci.*, vol. 34, p. 285, 1979.

Deshpande P. B. "Process Identification of Open-Loop Unstable Systems". *AI-Chem J.* 1980, vol. 26, pp., 305-308.

Fargeot A. M., Hammouri H., Celle F. "Nonlinear Observers For Chemical Reactors". *Chem. Eng. Sci.*, vol. 29 n. 14, 1994, pp. 2300.

Franks R. G., Worley C. W. "Quantitative Analysis of Cascade Control". *Ind. Eng. Chem.*, 1956, vol. 48, pp. 1074-1079.

Golubitsky M., Keyfitz B. L. "A Qualitative Study of the Steady State Solutions for a Continuous Flow Stirred Tank Chemical Reactor" *SIAM J. Math. Anal.*, p.11, 1980.

Guckenheimer J. "Multiple Bifurcation Problems for Chemical Reactors" *Physica*, 20D, p.1, 1986.

- Hlavacek** V. M., Kubicek M., Jelinek J. "Modelling of Chemical Reactors: XVIII. Stability and Oscillatory Behaviour of the CSTR". *Chem. Eng. Sci.*, vol. 25, p.1441, 1970.
- Harriot** P. *Process Control*. Ed. MacGraw Hill, New York, 1964.
- Kailath** T., *Linear Systems*. Ed. Prentice Hall, USA 1980, pp. 259-266, 268-272 y 281-285.
- Krishnaswamy** P. R., Rangaiah G. P. "Tuning of Cascade Control Loops". Proceedings of the ACC, Minneapolis, 1987, pp 1158-1160.
- Landau** I. D. "Competition, Interaction, Control". *European Control Conference 1997*, Plenaries and Mini-Courses, George Bastin and Michel Gevers Editors, Bruselas del 1 al 4 de Julio.
- Ling** Y., Tao G. "Adaptive backstepping control design for linear multivariable plants". *Int. J. Control*, 1997, vol. 68 n. 6, pp. 1289-1304.
- Luenberger** D. G. "Observing the State of a Linear System". *IEEE Trans. Mil. Electron.*, MIL-8, pp 74-80, 1964.
- Luyben** W. L. "Parallel Cascade Control". *Ind. Eng. Chem. Fund.* vol. 12, p. 463, 1973.
- Luyben** W. L. *Process Modelling Simulation and Control for Chemical Engineers*. Ed. Mc Graw Hill, Singapur 1990, pp. 1-12, 25, 255-256, 376-383.
- MacMillan** G. K. "Effect of Cascade Control on Loop Performance". Proceedings of the ACC, Arlington, 1982, pp. 363-368
- Morari** M., Zafiriou E. *Robust Process Control*. Ed. Prentice hall, Englewood Cliffs N. J. USA, 1989.
- Mrdjan** Jankovic. "Adaptive Nonlinear Output Feedback Tracking with a Partial High-Gain Observer and Back-Stepping". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, N. 1, Enero 1997, pp. 108-112.
- Oh** S., Khalil H. "Nonlinear Output-Feedback Tracking Using High-gain Observer and Variable Structure Control". *Automatica* vol. 32, N. 10, pp. 1845-1856, 1997.

- Planeux J. B., Jensen K. F.** "Bifurcation Phenomena in CSTR Dynamics: A System with Extraneous Thermal Capacitance". *Chem. Eng. Sci.*, vol. 41, p. 1497, 1986.
- Poore A. B.** "A Model Equation Arising from Chemical Reactor Theory". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 52, pp. 358, 1973.
- Ray W. H.** "New Approaches to the Dynamics of Nonlinear Systems with Implications for Process and Control Systems Design". *Chemical Process Control 2*, D. E. Seborg and T. F. Edgar, Editores, United Engineering Trustees, New York, p. 245, 1982.
- Russo P., Bequette W. B.** "Impact Process Design on the Multiplicity Behavior of a Jacketed Exothermic CSTR". *AIChE J.* vol. 41 N. 1, pp. 135-147, 1995.
- Russo P., Bequette W. B.** "State-Space versus Input/Output Representation for Cascade Control of Unstable Systems". *Ind. Eng. Chem Res.* vol. 36, pp. 2271-2278, 1995.
- Schmitz R. A., Bautz R. R., Ray W. H., Uppal A.** "The Dynamic Behavior of a CSTR: Some Comparisons of Theory and Experiment". *AIChE J.*, vol. 25, p. 289, 1979.
- Schork F. J., Deshpande P. B.** "Double Cascade Controller Tested". *Hydrocarbon Process*, 1978, vol. 57(7), pp. 113-117.
- Semino D., Brambilla A.** "An Efficient Structure for Parallel Cascade Control". *Ind. Chem. Res.* 1996, vol. 35, pp. 1845-1852.
- Sepulchre R., M. Jankovic, Kokotovic P.** *Constructive Nonlinear Control*. Ed. Springer-Verlag, Londres Gran Bretaña, 1997, Capítulo 6.
- Shen S. Y., Yu C. C.** "Selection of Secondary Measurement for Parallel Cascade Control". *AIChE J.* 1990, 36, 1267.
- Smith C., Corripio A. B.**, *Control Automático de Procesos: Teoría y Practica*. Editorial Limusa, México 1994 primera Impresión, pp. 25-31,41-46, 59, 104-109 y 439-447.

Stephanopoulos G. *Control Systems with Multiple Loops In Chemical Process Control*. Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs N. J. USA, 1984, Capítulo 20.

Uppal A., Ray W. H., Poore A: . "On the Dynamic Behavior of Continuous Stirred Tank Reactors" *Chem. Eng. Sci.*, vol. 29, p. 967, 1974.

Uppal A., Ray W. H., Poore A: . "The Classification of the Dynamic Behavior of Continuous Stirred Tank Reactors-Influence of the Reactor Residence Time" *Chem. Eng. Sci.*, vol. 31, p. 205, 1976.

Yu, C. C. "Design of Parallel Cascade Control for Disturbance Rejection". *AIChE J.* 1988, 34, 1833.