UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

IZTAPALAPA

ESTABILIDAD ASINTOTICA DE VARIEDADES CANONICAMENTE POLARIZADAS

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN MATEMATICAS

PRESENTA

MAT. FERNANDO PIÑA SOTO

ASESORES

DR. PEDRO LUIS DEL ANGEL RODRIGUEZ - DR. FELIPE ZALDIVAR CRUZ

OCTUBRE DE 1995

Estabilidad Asintótica de Variedades Canónicamente Polarizadas

por

Fernando Piña Soto

Tesis de Maestría

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Pedro Luis Del Angel Rodríguez y al Dr. Felipe Zaldívar Cruz por su paciencia, dedicación y amor al trabajo, lo que ha significado una excelente motivación para continuar por el camino de la Matemática Básica, así como también al M. en C. Mario Pineda Ruelas, al Dr. Carlos Signoret P. y al M. en C. Alfonso Flores Carrillo, por solo mencionar algunos de entre todos aquellos magníficos profesores y compañeros con los que tuve oportunidad de trabajar y que de una u otra forma han influido en mi formación.

Deseo también manifestar mi agradecimiento a **CONACYT** por su apoyo económico y al Departamento de Matemáticas de la **UAM-I** por las facilidades que me brindó, sin los cuales no me hubiera sido posible realizar mis estudios

Introducción

Los problemas de módulos fueron primeramente tratados por Riemann [**Ri**] quien mostró que las curvas de género $g \geq 2$ tienen $3g - 3$ parámetros. Dichos problemas fueron formulados de manera más precisa por A. Grothendieck [**Gr**] y D. Mumford [$\mathbf{Mu - I}$], quienes definieron los esquemas de módulos para variedades de dimensión alta, solucionando en algunos casos el problema. Mumford observó del trabajo de Grothendieck que la relación de equivalencia para el funtor de Hilbert se puede ver como la acción de un grupo algebraico y que en algunos casos los esquemas de módulos se pueden obtener como el cociente correspondiente, definiendo así cocientes categóricos, cocientes geométricos y estabilidad. Deligne y Mumford [$\mathbf{De - Mu}$] resuelven a partir de lo anterior el problema de Riemann para curvas algebraicas de género g. En la actualidad se tiene una muy buena clasificación de curvas módulo la acción de un grupo reductivo. Posteriormente Gieseker [**Gi**] resuelve, a partir del trabajo de Mumford, el problema para superficies de tipo general usando estabilidad asintótica.

El presente trabajo consiste en una aproximación a estas ideas , para posteriormente en un trabajo doctoral dar solución a dos problemas que se derivan de dichas ideas: Clasificar las variedades de dimensión 3 de manera similar a como Gieseker lo hace en superficies y determinar cómo cambian los puntos estables para polarizaciones arbitrarias.

Capítulo 1

Problema de módulos

El problema de módulos nos lleva a B. Riemann [**Ri**], quien mostró en su célebre artículo de 1857 sobre funciones abelianas que las clases de isomorfismos de superficies de género $g \geq 2$ tienen $3g-3$ parámetros, en el cual propone el término módulo. Sin embargo sólo muy recientemente han sido formulados de manera precisa los problemas globales de módulos en geometría algebraica, lo cual se debe a A.Grothendieck [**Gr**] y D.Mumford[$\mathbf{Mu-I}$] quienes definieron el esquema de módulos o espacio algebraico para ciertas variedades de dimensión alta, obteniendo en algunos casos solución al problema. Aquí nos interesamos en el esquema de módulos de variedades proyectivas canónicamente polarizadas. En lo que sigue definiremos nuestros objetos de estudio: familias , familias parametrizadas, problemas de módulos y lo que entenderemos por solución a un problema de módulos. En este trabajo sólo consideraremos esquemas sobre un campo k algebraicamente cerrado de característica cero.

1.1 Familias parametrizadas

Definición 1 Una *familia de esquemas* X *parametrizada por* S, es simplemente un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow S$. La familia será llamada *plana* si f es un morfismo plano y será denotada por (X, f). Dos familias parametrizadas (X, f) y (Y, g) se dirán *equivalentes*, lo cual será denotado $(X, f) \sim (Y, g)$, si X es isomorfo a Y y el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Definición 2 Dada una relación de equivalencia $\cong$ (isomorfismo) entre los esquemas X y una entre los esquemas parametrizados (X, f) denotada por $\sim$, entonces llamaremos *familia* a toda colección $\Im$ de esquemas parametrizados tal que cumple con las condiciones siguientes:

(a) Si S es un punto entonces, $X \in \Im$

(b) La noción de equivalencia $\sim$ entre familias parametrizadas por S se reduce a la equivalencia entre esquemas $\cong$ cuando S es un punto, es decir $(X, f) \sim (Y, g)$ si y sólo si $X \cong Y$

(c) Dado un morfismo $\phi : S' \longrightarrow S$ y una familia (X, f) parametrizada por S, existe una familia inducida $(\phi^* X, \phi^* f) = \left(X \times_S S', pr_2\right)$.

Así mismo se tienen las relaciones:

i. $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$

ii. $1_S^* X = X$

iii. Si $(X, f) \sim (Y, g)$ entonces, $(\phi^* X, \phi^* f) \sim (\psi^* Y, \psi^* g)$

Nótese que la condición (c) en la anterior definición establece la existencia de un funtor contravariante de la categoria de esquemas en la categoria de conjuntos.

$$\Im : Esquemas \longrightarrow Conjuntos$$

tal que a cada esquema S le asocia el conjunto

$$\Im(S) = \{(X, f) \mid f : X \longrightarrow S \textit{ es plano}\} / \sim$$

El funtor anterior será llamado funtor de módulos y la familia de esquemas sobre k módulo isomorfismos será denotada por

$$\Im(k) = \{X \mid X \textit{ es un esquema sobre } k\} / \cong$$

La pregunta natural es si se le puede dar a $\Im(k)$ una estructura de esquema, la cual refleje las características de sus elementos. Hagamos el siguiente análisis para ver cómo dar respuesta a lo anterior, así como un mejor planteamiento del mismo problema.

Pensemos que $\Im(k)$ es el espacio subyacente al esquema M, entonces para toda familia parametrizada (X, f) tenemos un morfismo

$$\mathcal{V}_X : S \longrightarrow M \text{ tal que } \mathcal{V}_X(s) = \left[f^{-1}(s)\right].$$

La función anterior está bien definida pues si $(X, f) \sim (Y, g)$ entonces, como el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

se tiene $f^{-1}(s) \cong g^{-1}(s)$ es decir $[f^{-1}(s)] = [g^{-1}(s)]$, así pues a cada familia (X, f) parametrizada por S le hemos asociado una función de S en M de manera que si

$$\Im : Esquemas \longrightarrow Conjuntos$$

es el funtor contravariante definido anteriormente entonces, $\mathcal{V}_X$ induce una transformación funtorial tal que

$$\mathcal{V} : \Im(S) \longrightarrow Hom(S, M)$$
$$(X, f) \longrightarrow \mathcal{V}_X$$

Aquí debemos plantearnos las siguientes dos preguntas

- ¿ Es $\mathcal{V}_X : S \longrightarrow M$ un morfismo de $k - esquemas$?
- ¿ Es $\mathcal{V} : \Im(-) \longrightarrow Hom(-, M)$ una transformación natural ?

Un funtor $\Im$ se dice representable, si existe una pareja (M, Θ) donde M es un esquema sobre k y Θ una equivalencia natural entre los funtores $\Im(-)$ y $Hom(-. M)$; y si este es el caso, diremos que el esquema M representa al funtor $\Im$.

1.2 Esquemas de Módulos Finos y Toscos

Definición 3 *Un problema de módulos* consiste en determinar si el funtor $\Im$ (*funtor de módulos*) descrito anteriormente es representable. En cuyo caso también diremos que la pareja (M, Θ) que lo representa es un *esquema de módulos fino.*

Observación 1 Si $\Im$ es representable por M se tiene lo siguiente

i. $\Theta(pt) : \Im(k) \longrightarrow Hom(pt, M) \cong M$, es decir $\Im(k)$ tendrá estructura de esquema

ii. $\mathcal{V}_X : S \longrightarrow M$ será un morfismo pues para cada esquema S y cualquier $s \in S$, la inclusión de $\{s\}$ en S induce el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} \Im(S) \arrow[r, "A_n"] \arrow[d, "\Im(i)"'] & Hom(S,M) \arrow[d, "j^*"] \\ \Im(pt) \arrow[r, "\alpha_n"'] & M \end{tikzcd}$$

$$\Theta\,(s)\,(X) = \Theta\,(pt) \circ \mathcal{V}_X = \mathcal{V}_X'$$

iii. La identidad $1_M \in Hom\,(M, M)$ determina salvo isomorfismos una familia $(\mathcal{Y}, M)$ parametrizada por M, llamada familia universal, tal que para toda familia (X, f) parametrizada por S existe un único morfismo $\theta : S \longrightarrow M$ tal que $(X, f) \sim (\theta^*\mathcal{Y}, \theta^* g)$.

Las observaciones anteriores nos llevan a la proposición siguiente.

Proposición 1 *Un problema de módulos tendrá un esquema de módulos fino si y sólo si existen un esquema M y una familia universal $(\mathcal{Y}, g)$ parametrizada por M tal que para cualquier familia (X, f) parametrizada por S, existe un único morfismo $\theta : S \longrightarrow M$ para el cual $(X, f) \sim (\theta^*\mathcal{Y}, \theta^* g)$.*

Demostración Las observaciones anteriores muestran la necesidad, de modo que sólo probaremos la suficiencia, para lo cual observaremos que $\Theta\,(S)$ está bien definida y es inyectiva por ser θ único y tal que $\theta^*\mathcal{Y} \cong X$. Veamos que es suprayectiva, en este caso sólo diremos que dado un morfismo $\theta \in Hom\,(S, M)$ la familia que le corresponde es $\mathcal{Y} \times_M S$

$\square$

Desafortunadamente existen muy pocos problemas de módulos con un esquema de módulos fino, esto nos lleva a relajar un poco el concepto de solución, dando lugar a la definición siguiente.

Definición 4 Un *esquema de módulos tosco* para un problema de módulos consiste de un esquema M junto con una transformación natural Θ entre los funtores $\Im(-)$ y $Hom(-,M)$ satisfaciendo lo siguiente:

i. $\Theta(Spec(k)) : \Im(Spec(k)) \longrightarrow Hom(Spec(k), M) \cong M$ es biyectiva

ii. Dado un esquema N y una transformación natural

$$\Psi : \Im(-) \longrightarrow Hom(-,N)$$

existe una única transformación natural

$$\Phi : Hom(-,M) \longrightarrow Hom(-,N)$$

tal que $\Psi = \Phi \circ \Theta$.

Nótese que Θ está dada como antes por

$$\Theta(S)(X) = \Theta(pt) \circ \mathcal{V}_X$$

y más aún, para cualquier transformación natural

$$\Psi : \Im(-) \longrightarrow Hom(-,N)$$

se tiene una función $\mu = \Psi(pt) \circ \Theta(pt)^{-1} : M \longrightarrow N$.

Si Φ existe como en ii) entonces, se puede comprobar fácilmente que $\mu = \Phi(pt)$ coincide con el morfismo $\Phi(M)(1_M)$. De hecho se tiene que

$$\Phi(S)(\theta) = \mu \circ \theta$$

para cualquier $\theta \in Hom(S,M)$. Conversamente si μ es un morfismo nosotros podemos definir Φ, de manera que tenemos la siguiente proposición

Proposición 2 *Dado un problema de módulos* $\Im(-)$ *existe un esquema de módulos tosco si y sólo si existe un esquema* M *y una biyección* $\alpha : \Im(k) \longrightarrow M$ *tal que*

i. para cualquier familia parametrizada por $S\ (X, f)$, $\alpha \circ \mathcal{V}_X$ es un morfismo

ii. para todo esquema N y cualquier transformación natural $\Psi : \Im(-) \longrightarrow Hom(-, N,)$ la función

$$\mu = \Psi(pt) \circ \alpha^{-1}$$

es un morfismo.

Demostración Como observamos anteriormente, la parte (i) es equivalente a tener Θ y la parte (ii) es equivalente a tener Φ que es lo que se buscaba.

$\square$

Proposición 3 *Dados dos esquemas de módulos toscos* (M, α_1) *y* (N, α_2) *como en la proposisión anterior para un funtor de módulos* $\Im(-)$, *entonces existe un isomorfismo*

$$\mu : M \longrightarrow N$$

tal que $\mu \circ \alpha_1 = \alpha_2$

Demostración La función $\mu = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : M \longrightarrow N$ es biyectiva con inversa $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$ y por (ii) en la proposición anterior, tanto μ como μ^{-1} son morfismos.

$\square$

Lo anterior nos indica que para un problema de módulos para el cual existe un esquema de módulos, éste es único salvo isomorfismo, lo cual no depende de la equivalencia entre familias parametrizadas. Por otro lado cabe hacer notar que un esquema de módulos fino es también un esquema de módulos tosco por ser Θ

en este caso una equivalencia natural con $\alpha = \Theta(pt)$ un morfismo. Así pues los esquemas de módulos son únicos salvo $\sim$. No se ha establecido la existencia de los esquemas de módulos, sólo la unicidad de estos cuando existan. Ahora bien si tenemos un esquema de módulos tosco (M, Θ), éste será un esquema de módulos fino si cumple las dos condiciones siguientes:

i.

i. existe una familia universal $(\mathcal{Y}, g)$ parametrizada por M tal que, para toda $m \in M$, $g^{-1}(m)$ es equivalente a $\Theta(pt)^{-1}(m)$

i. dado un par de familias (X, f) y $\left(X', f'\right)$ parametrizadas por S

$$\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_{X'} \text{ } si \text{ } y \text{ } sólo \text{ } si \text{ } (X, f) \sim \left(X', f'\right)$$

i) es equivalente a la suprayectividad de Θ y ii) es equivalente a la inyectividad de Θ, es decir si se cumplen (i) y (ii) Θ será una equivalencia natural.

1.3 Curvas de grado d en $\mathbf{P}^2$ y Endomorfismos de Espacios Vectoriales

Ejemplo 1 Sea $A = \{H \subset \mathbf{P}^2 \mid H \text{ } es \text{ } una \text{ } curva \text{ } de \text{ } grado \text{ } d\}$, donde $X \sim Y$ si y sólo si $X = Y$. Cada H está caracterizada por un polinomio homogéneo de la forma:

$$F(x, y) = \sum_{i+j=d} a_{ij} x^i y^j = 0$$

el cual puede reescribirse como

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i} = 0$$

siendo dicha ecuación única salvo multiplos escalares. Hagamos $M = \mathbf{P}^d$, entonces a cada punto $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_d) \in M$ le corresponde una única curva $H \in A$, a saber

$$H \text{ tal que } \sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i} = 0.$$

Ahora bien, como $X \simeq Y$ si y sólo si $X = Y$, se tiene

i. $[(X, f)] = \{(X, f)\}$

ii. $\mathcal{V}_X : S \longrightarrow M$ con $\mathcal{V}_X(s) = (a_0, \ldots, a_d)$

donde X_s es la curva caracterizada por

$$\sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i} = 0$$

Ejemplo 2 Ahora consideraremos a los endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión n sobre un campo k, es decir consideraremos parejas (V, T) consistentes de un espacio vectorial V y un endomorfismo T de V a las cuales llamaremos simplemente endomorfismos. Dos endomorfismos (V, T) y $\left(V', T'\right)$ serán equivalentes si existe un isomorfismo $h : V \longrightarrow V'$ tal que $h \circ T = T' \circ h$. El problema de módulos correspondiente será denotado por $\mathcal{E}nd_n(-)$. Una familia de endomorfismos (E, T) parametrizada por S será un haz vectorial E de rango n junto con un endomorfismo T de haces vectoriales. Así , dos familias (E, T) y $\left(E', T'\right)$ serán equivalentes si existe un isomorfismo $h : E \longrightarrow E'$ tal que $h \circ T = T' \circ h$. El problema de módulos anterior no tiene un esquema de módulos fino pues si lo tuviera, digamos (M, Θ) se tiene que para toda variedad S y todo haz no trivial E de rango n sobre S, las familias $(E, 1_E)$ y $(I_n, 1_{I_n})$ donde I_n denota el haz vectorial trivial de rango n, inducen el mismo morfismo en $Hom(S, M)$ sin ser estas dos familias equivalentes. Tampoco existe un esquema de módulos tosco para $\mathcal{E}nd_n$, pues al considerar un morfismo $\beta : k \longrightarrow M_{n\times n}$ tal que

$$\beta(t) = \beta_t = \begin{bmatrix} \lambda & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

este morfismo representa una familia $\mathcal{E}nd_n(k) = F$ de familias de endomorfismos parametrizadas por k, a saber $\{(I_n, \beta_t) \mid t \in k\}$, la cual determina un morfismo $\mathcal{V}_F \in Hom(k, M)$. Tenemos que si $t \neq 0$ el polinomio característico de β_t y su polinomio minimal coinciden, más aún existe un cambio de base que transforma β_t en β_1 por lo cual tenemos $(I_n, \beta_t) \sim (I_n, \beta_1)$ para todo $t \neq 0$ es decir $\mathcal{V}_F(t) = \mathcal{V}_F(1)$, de donde, por continuidad $\mathcal{V}_F(1) = \mathcal{V}_F(0)$, es decir β_1 y β_0 son representados por el mismo punto en M, sin embargo β_1 y β_0 no pueden ser transformados uno en otro mediante un cambio de base, de manera que no existe tal esquema de módulos tosco.

Ahora nos restringimos a una clase más pequeña de endomorfismos, a saber aquella para la cual se tiene una descomposición cíclica fija del espacio vectorial como indicaremos enseguida.

I. Sea $r \in N$ tal que $r \leq n$, considere el conjunto

$$\Omega_r = \{\omega \in N^r \mid \omega = (n_1, \ldots, n_r)\} \ \textit{tal que}$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{r} n_i = n$$
$$n_i \geq n_{i+1} \ \textit{para} \ i = 1, \ldots, r-1$$

Sea $\Omega = \cup_{r=1}^{n} \Omega_r$, entonces para cada $\omega \in \Omega$ denotaremos por $\mathcal{E}nd_{n,\omega}(T)$ a el conjunto de $(V, T) \in \mathcal{E}nd_n$ tales que la descomposición $T-\textit{cíclica}$ de V

está dada como suma directa de r subespacios $T-$ *cíclicos*, esto es

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

donde V_i es un subespacio $T-$ *cíclico* de dimensión n_i. El correspondiente problema de módulos será denotado por $\mathcal{E}nd_{n,\omega}(-)$.

Una familia de endomorfismos parametrizada por S, $\mathcal{E}nd_{n,\omega}(S)$, un haz vectorial E de rango n junto con un endomorfismo T para el cual existen r secciones $s_1, \ldots, s_r$ de E tales que $\{v_i, T(v_i), \ldots, T^{n_i-1}(v_i)\}$ es una base para el subespacio cíclico correspondiente de E_s donde $v_i = s_i(s)$ con $s \in S$. Notemos que E tiene que ser trivial pues el conjunto $\gamma = \cup\gamma_i$ $i = 1, \ldots, r$, con $\gamma_i = \{v_i, \ldots, T^{n_i-1}(v_i)\}$ es una base para $\Gamma(S, E)$. El conjunto de clases de equivalencia de familias parametrizadas por S en $\mathcal{E}nd_{n,\omega}(-)$ se denotará por $\Im^{\omega}(S)$.

Sea $(E, T) \in \Im^{\omega}(S)$, por el teorema de descomposición cíclica tenemos que el espacio vectorial $\Gamma(S, E)$ tiene una descomposición de la forma

$$\Gamma(S, E) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

donde cada W_i es un subespacio $T-$ *cíclico*.

Sean

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x^{n_1} + a_1 x^{n_1-1} + \cdots + a_{n_1} \\
P_2(x) &= x^{n_2} + a_{n_1+1} x^{n_2-1} + \cdots + (a_{n_1} + a_{n_2}) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
P_r(x) &= x^{n_r} + a_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} x^{n_1-1} + \cdots + (a_{n_1} + \cdots + a_{n_r})
\end{aligned}$$

los T anuladores de los W_i, así $P_{i+1} \mid P_i$ y por tanto podemos definir

$$\begin{aligned} q_i = P_i/P_{i+1} \quad & si \quad 1 \leq i < r \\ q_r = P_r \qquad & si \qquad i = r \end{aligned}$$

.

como los $P_i's$ son únicos , también lo son los $q_i\,'s$. De manera que podemos definir una función de $\Im\omega(S)$ en k^{n_1} de la manera siguiente

$$(b_1, \ldots, b_{n_1}) : S \longrightarrow k^{n_1}$$

la cual es un morfismo pues cada b_i es una función regular sobre S, nótese que si $S = \{pt\}$ la función es biyectiva, la inyectividad es por la unicidad de los P_i y para la suprayectividad basta recordar que se puede construir el endomorfismo a partir de los polinomios P_i (obtenidos a partir de los q_i), es decir para cada $\omega \in \Omega$ existe una transformación natural

$$\Theta : \Im^{\omega}(-) \longrightarrow Hom(-, k^{n_1})$$

tal que

$$\Theta_{pt} : \Im^{\omega}(pt) \longrightarrow Hom(pt, k^{n_1})$$

es biyección, por tanto $\Im^{\omega}(-)$ es representable, lo cual significa que (k^{n_1}, Θ) es un esquema de módulos fino para $\mathcal{E}nd_{n,\omega}$.

Observemos que aún cuando el problema original no tiene un esquema de módulos fino, sí puede descomponerse como una unión disjunta de subproblemas de módulos, cada uno de los cuales sí tiene un esquema de módulos fino

Capítulo 2

Esquema de Hilbert

En este capítulo daremos el ejemplo más importante de una familia parametrizada, la familia de variedades planas sobre un esquema S con polinomio de *Hilbert* dado e inmersos en algún $\mathbf{P}^\ell$, siendo la inmersión dada por la gavilla $\mathcal{O}_X$ ó por una potencia de la gavilla de diferenciales $\omega_X^{[\nu]}$, en este último caso diremos que los esquemas son $\nu-$canónicamente polarizados.

Comenzaremos citando algunos resultados clásicos acerca de la cohomología de gavillas coherentes así como sobre esquemas planos.

Teorema 1 *(Serre [Faisceaux algebriques cohérents, Ann. of Math. 61(1955), 197-278.] o III.5.2 (Hartshorne,pa,228). Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, y sea $\mathcal{O}_X(1)$ una gavilla muy amplia en $X_{|_{Spec(A)}}$. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente en X . Entonces:*

(a) Para todo $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ es un $A-$módulo finitamente generado

(b) Existe $n_0 \in N$ que depende de $\mathcal{F}$, tal que para toda $i > 0$ y para toda $n \geq n_0$ $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.

Teorema 2 *(III.8.8 pa. 252 Hartshorne) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo proyectivo entre esquemas noetherianos, sea $\mathcal{O}_X(1)$ una gavilla muy amplia en X sobre Y, y sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente en X. Entonces*

(a) *Para toda $n \gg 0$, el morfismo natural $f^* f_*(\mathcal{F}(n)) \longrightarrow \mathcal{F}(n)$ es epimorfismo;*

(b) *Para toda $i \geq 0$, $R^i f_*(\mathcal{F})$ es una gavilla coherente en Y;*

(c) *Para toda $i > 0$ y para toda $n \gg 0$, $R^i f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$.*

Teorema 3 *(III.9.9 pag.261 Hartshorne) Sea T un esquema entero noetheriano. Sea $X \subseteq \mathbf{P}^n_T$ un subesquema cerrado. Para cada punto $t \in T$ consideremos el polinomio de Hilbert $h_t \in Q[Z]$ de la fibra X_t considerada como subesquema cerrado de $\mathbf{P}^n_{k(t)}$. Entonces X es plano sobre T si y sólo si el polinomio de Hilbert es independiente de t.*

Lema 1 *(EGA IV, II.1.1) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de tipo finito entre esquemas noetherianos. Entoces $\{x \in X \mid f \text{ es plano en } x\} \subset X$ es abierto (posiblemente vacío).*

2.1 Esquema de Hilbert de Variedades Proyectivas $S-$Planas

Definición 5 *Definimos los conjuntos $Hilb^\ell(k) = \{X \subseteq \mathbf{P}^\ell \mid X$ es un subesquema cerrado $\} \;/\; \cong$ y el funtor de Hilbert como aquel que a cada esquema S le asocia el conjunto $Hilb^\ell(S) = \left\{X \in Hilb^\ell(k) \mid \mathcal{O}_X \text{ es } S-\text{plano}\right\}$*

Observación 2 Dado un morfismo de cambio de base $S' \longrightarrow S$, sea $X' = X \times S'$ tenemos $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X \bigotimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, por lo cual X' es un S' esquema. Por tanto $Hilb^\ell(-)$ el funtor de Hilbert es contravariante en S'.

Denotaremos $Hilb^\ell_h(k) = \{X \subseteq \mathbf{P}^\ell \mid X$ es un subesquema cerrado y $h(\nu) = \chi(\mathcal{O}_X(\nu))$ para todo ν $\}$

Definición 6 Sea h un polinomio de Hilbert fijo, y sea ℓ fijo. Definimos el *subfuntor del funtor de Hilbert $Hilb^\ell_h$: Esquemas $\longrightarrow$ Conjuntos* como aquel funtor que a cada esquema S le asocia el conjunto $Hilb_h^{\ell}(S) = \{(f : X \longrightarrow S, \zeta)$ $\mid X$ es un subesquema cerrado, $\mathcal{O}_X$ *es* $S-$*plano* y $h(\nu) = \chi(\mathcal{O}_X(\nu))$ $\}$. donde $\zeta : X \longrightarrow \mathbf{P}^{\ell}$ es un morfismo que induce inmersiones cerradas $\zeta_s : f^{-1}(s) \longrightarrow \mathbf{P}^{\ell}$ para toda $s \in S$.

Observación 3 Dar la pareja (f, ζ) es lo mismo que dar un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\zeta'"] \arrow[dr, "f"'] & & P^{\ell} \times S \arrow[dl, "pr_2"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

donde $\zeta' = \zeta \times f$ es una inmersión cerrada.

Teorema 4 *El funtor de Hilbert es representable por un $S-$ esquema $\mathcal{H}$, suma de una sucesión de $S-$esquemas proyectivos.*

Demostración 1) $Hilb^{\ell}(S) = \bigoplus Hilb_h^{\ell}(S)$, donde h es el polinomio de Hilbert de X

2) Sea ν un entero. Definimos $A_{\nu}(S) \subset Hilb_h^{\ell}(S)$ como

$$A_{\nu}(S) = \left\{ \begin{array}{ll} Y \in Hib_h^{\ell}(S) \mid & a)\ R^i f_*'(\mathcal{O}_Y(n)) = 0\ \forall\ i > 0\ ,\ n \geq \nu \\ & b)\ R^i f_*'(\mathcal{I}_Y(n)) = 0\ \forall\ i > 0\ ,\ n \geq \nu \\ & c)\ f_*'(\mathcal{I}_Y(\nu + k)) = \delta_k' f_*'(\mathcal{I}_Y(\nu))\ \ \forall\ k \geq 0 \end{array} \right\}$$

de donde por el teorema de Serre (versión para gavillas), $Hilb_h^{\ell} = \cup_{\nu} A_{\nu}$.

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Para la condición c), como X $=Proj(S_*)$, con S_* un álgebra graduada casi cohe- rente sobre S con grados positivos, generada por S_1, si escribimos $S' = S\bigotimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, se obtiene que $X' = Proj\left(S'\right)$.

Para demostrar el teorema, podemos suponer $X = P_S^r$ ($S = \cup_\alpha U_\alpha$, U_α afín tal que $X_{|U_\alpha} \subset P_{U_\alpha}^r$ es cerrado, y $\mathcal{O}_X$ (1) es inducido por $\mathcal{O}_{P_U^r}(1)$.) de este modo las gavillas $\mathcal{I}_Y$ son regularmente planas. ($0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_Y \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_S - \textit{módulos}$, donde el segundo y el tercero son planos, luego el primero también lo es [III.9.1.A(e), pág. 254, Hartshorne]). Nótese que a), b) y c) son estables ante cambio de base [III.8] Así A_ν es un subfuntor de $Hilb_h^\ell\left(S'\right)$. De este modo , basta demostrar que A_ν es representable para toda ν.

3) Sea $M_* = \sum\limits_{n\geq 0} f_*\left(\mathcal{O}_X\left(n\right)\right) = S_*$, entonces

$$M_*' = M_*\bigotimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} = \sum_{n\geq 0} f_*'\left(\mathcal{O}_{X'}\left(n\right)\right) = S_*'$$

Por a) se tiene a$'$) $f_*'\left(\mathcal{O}_Y\left(n\right)\right)$ es localmente libre de rango $h\left(n\right)$ para toda $n \geq \nu$ [III.9.2.(e) "plano implica localmente libre"]

Por b) se tiene (para $i = 1$) a$''$) $f_*'\left(\mathcal{O}_Y\left(n\right)\right)$ es un cociente de M_n

$$0 \to f_*\mathcal{I}_Y\left(n\right) \to f_*\mathcal{O}_X\left(n\right) \to f_*'\mathcal{O}_Y\left(n\right) \to R'f_*\left(\mathcal{I}_Y\left(n\right)\right) = 0$$

note que $M_n = f_*'\mathcal{O}_Y\left(n\right)$ y $M_n' = R'f_*\left(\mathcal{I}_Y\left(n\right)\right) = 0$. Así, conocer el módulo M_n' (cociente de M_n) para $n = \nu$ implica por c) conocer a los submódulos $f_*'\left(\mathcal{I}_Y\left(n\right)\right)$ para toda $n \geq \nu$ ($n = \nu + k$), por tanto implica conocer al módulo $\mathcal{I}_Y$ y al módulo $\mathcal{O}_Y$. De este modo se tiene una inyección

$$\begin{aligned} A_\nu\left(S'\right) &\longrightarrow Grass_{P(\nu)}\left(M_\nu'\right) = Gr\left(h\left(\nu\right),\ f_*\mathcal{O}_X\left(\nu\right)\right) \\ Y &\longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y\left(\nu\right) \end{aligned}$$

y por tanto, un homomorfismo funtorial

$$i_\nu : A_\nu\left(S'\right) \longrightarrow Gr\left(h\left(\nu\right),\ f_*\mathcal{O}_X\left(\nu\right)\right)$$

4) Dado $N_\nu \in Gr\left(h\left(\nu\right),\ f_*\mathcal{O}_X\left(\nu\right)\right)$, N_ν proviene de $A_\nu\left(S\right)$ si y sólo si

(a) $M_{\nu+k}/S_kR_\nu$ es localmente libre de rango $h\left(\nu+k\right)$ para todo $k \geq 0$

(b) La gavilla $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ definida por el submódulo graduado $R_* = \sum_{k\geq 0} S_kR_\nu$ y el cociente $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ satisfacen las condiciones a) y b).

Aquí $0 \longrightarrow R_\nu \longrightarrow M_\nu \longrightarrow N_\nu \longrightarrow 0$, las condiciones a) y b) son suficientes pues $\mathcal{I}$ define un subesquema $Y \subset X$ plano, que es un elemento de $A_\nu\left(S\right)$. Luego A_ν es un subfuntor representable del funtor $Gr\left(P\left(\nu\right),\ M_\nu\right)$, pues a) y b) son estables ante cambio de base.

□

2.2 Esquema de Hilbert de Variedades Canónicamente Polarizadas

Definición 7 *Definiremos los conjuntos* $\underline{H}ilb(k) = \{X \mid X$ *es un esquema proyectivo equidimensional y conexo con* $\omega_X^{[N_0]}$ *invertible y amplia*$\}/\cong$.

$\underline{H}ilb\left(S\right) = \{f : X \longrightarrow S \mid f^{-1}\left(s\right) \in \underline{H}ilb\left(k\right),\ \omega_X^{[r]}\ S-$*plana* con $\omega_X^{[r]}\mid_{f^{-1}(s)} = \omega_{f^{-1}(s)}^{[r]}$ para toda $r,\ s\}/\cong$.

$\underline{H}ilb_h\left(S\right) = \{(X, f) \in \underline{H}ilb\left(S\right) \mid h\left(\nu\right) = \chi\left(f^{-1}\left(s\right),\ \omega_{f^{-1}(s)}^{\nu}\right)$ para toda $\nu, s\}$, y finalmente $\underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}\left(S\right) = \{(X, f, \zeta) \mid (X, f) \in \underline{H}ilb_h\left(S\right)$ y $\zeta : X \longrightarrow \mathbf{P}^\ell$ es un morfismo con $\zeta^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^\ell}\left(1\right) \sim \omega_X^{[\nu]}$ tal que $\zeta_s = \zeta_{|_{f^{-1}(s)}}$ es una inmersión para toda s, cuya imagen no reside en un hiperplano$\}$

Observación 4 $\underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}$ es un subproblema de módulos de $Hilb^\ell_{h\left(\frac{\nu}{N_0}T\right)}$ Si ν y ℓ son elegidos de manera que $\ell = h\left(\frac{\nu}{N_0}\right) - 1$ y tal que $\omega_X^{[\nu]}$ se anula en cohomologías superiores, para toda $X \in \underline{Hilb}_h(k)$, entonces llamamos a $\underline{Hilb}_h^{\ell,\nu}(-)$ el funtor de hilbert de esquemas $\nu-$canónicamente polarizados.

En la situación anterior el morfismo ζ factoriza sobre

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{P}(f_*\omega_{X/S}^{[\nu]}) \arrow[r, "\rho", "\cong"'] \arrow[d] & \mathbf{P}^\ell \times S \arrow[r] \arrow[d, "pr_2"] & \mathbf{P}^\ell \\ S \arrow[r] & S \arrow[r] & S & \end{tikzcd}$$

donde ρ es el morfismo inducido por la suprayección

$$f^* f_* \omega_X^{[\nu]} \longrightarrow \omega_X^{[\nu]}$$

En particular obliga a $\mathbf{P}\left(f_*\omega_X^{[\nu]}\right)$ a ser el haz proyectivo trivial y uno puede escribir

$$f_*\omega_X^{[\nu]} = \bigoplus^{\ell+1} \mathcal{B}$$

para una gavilla invertible $\mathcal{B}$ sobre S. Dar ζ es lo mismo que dar un isomorfismo

$$\rho : \mathbf{P}\left(f_*\omega_X^{[\nu]}\right) \longrightarrow \mathbf{P}^\ell \times S.$$

Así que una definición equivalente para $\underline{Hilb}_h^{\ell,\nu}$ es :

$$\underline{Hilb}_h^{\ell,\nu}(S) = \{ \ (X, f, \rho) \mid (X.f) \in \underline{Hilb}_h(S) \quad y$$

$$\rho : \mathbf{P}\left(f_*\omega_X^{[\nu]}\right) \longrightarrow \mathbf{P}^\ell \times S \ es\ un\ isomorfismo \ \}$$

Teorema 5 *El funtor de hilbert* $\underline{Hilb}_h^{\ell,\nu}$ *es representado por un esquema cuasi-proyectivo* $\mathcal{H}$. *Si* $(f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{H}, \rho) \in \underline{Hilb}_h^{\ell,\nu}(\mathcal{H}) \cong Hom(\mathcal{H},\mathcal{H})$ *es la familia universal, entonces para alguna gavilla invertible* $\mathcal{B}$ *sobre* $\mathcal{H}$, *la gavilla* $f_*\omega_{\mathcal{Y}}^{[\nu]}$ *es* *isomorfa a* $\bigoplus^{h\left(\frac{\nu}{N_0}\right)} \mathcal{B}$ *y, para algún* $\mu > 0$*, la gavilla*

$$\mathcal{A} = \det\left(f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{[\nu\cdot\mu]}\right)^{h\left(\frac{\nu}{N_0}\right)} \otimes \det\left(f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{[\nu]}\right)^{-h\left(\frac{\nu\cdot\mu}{N_0}\right)\cdot\mu}$$

es amplia sobre $\mathcal{H}$*.*

Demostración Para $(X, f, \zeta) \in \underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}(k)$ uno tiene que

$$h\left(\frac{\nu\cdot\eta}{N_0}\right) = \chi\left(\omega_X^{[\nu\cdot\eta]}\right) = \chi\left(\zeta^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^\ell}(\eta)\right),$$

y para $h' = h\left(\frac{\nu\cdot T}{N_0}\right)$, uno tiene una inclusión $\underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}(S) \subset Hilb_{h'}^{\ell}(S.)$, el cual es representado por un esquema $\mathcal{H}''$. sea

$$\begin{tikzcd}
X_{h'l} \arrow[rr, "\subset"] \arrow[dr] & & P^l \times \mathcal{H}'' \arrow[dl, "pr_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

la familia universal . Como $\underline{H}ilb_h(k)$ se supuso un problema de módulos localmente cerrado, existe un único subesquema máximo $\mathcal{H}'$ en $\mathcal{H}''$, tal que la restricción

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}' \arrow[rr, "\zeta'"] \arrow[dr, "g"'] & & P^l \times \mathcal{H}' \arrow[dl, "pr_2"] \\
& \mathcal{H}' &
\end{tikzcd}$$

de la familia universal es una familia

$$g : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{H}' \in \underline{H}ilb_h\left(\mathcal{H}'\right) \tag{2.1}$$

Además, para alguna gavilla invertible $\mathcal{B}'$ sobre $\mathcal{H}'$, uno tiene que

$$\omega^{[\nu]}_{\mathcal{Y}'/\mathcal{H}'} = \zeta'^{*}\left(pr_1^{*}\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell}}(1)\right) \otimes g^{*}\mathcal{B}'. \tag{2.2}$$

Cada diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\zeta'"] \arrow[dr, "f"'] & & P^{l} \times S \arrow[dl, "pr_2"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

que satisface las propiedades (2.1) y (2.2) es obtenido del diagrama anterior por producto fibrado bajo un único morfismo $S \longrightarrow \mathcal{H}$. Una gavilla amplia sobre $\mathcal{H}'$ está dada por el determinante $\mathcal{A}'$ de $g_{*\zeta'*}\left(pr_1^{*}\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell}}(\mu)\right) = g_{*}\omega^{[\nu\cdot\mu]}_{\mathcal{Y}'/\mathcal{H}'} \otimes \mathcal{B}'^{-\mu}$, para alguna $\mu > 0$. De (2.2)se tiene un morfismo

$$\zeta'^{*} : \bigoplus^{\ell+1} \mathcal{B}' = pr_{2*}\left(pr_1^{*}\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\ell}}(1) \otimes pr_2^{*}\mathcal{B}'\right) \longrightarrow g_{*}\omega^{\nu}_{\mathcal{Y}'/\mathcal{H}'}.$$

Por cohomología y cambio de base, ambas gavillas son compatibles con cambios de base arbitrarios y ellas son localmente libres de rango $h'(1) = h\left(\frac{\nu}{N_0}\right)$. Sea $\mathcal{H}$ el subesquema abierto de $\mathcal{H}'$ sobre el cual ζ'^{*} es un isomorfismo y sean $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{B}$ las restricciones de $\mathcal{Y}'$ y $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{H}$. Escribimos $f = g\mid_{\mathcal{Y}}$ y elegimos ρ el isomorfismo inducido por $\zeta'^{*}\mid_{\mathcal{H}}$, un punto $s \in \mathcal{H}'$ pertenece a $\mathcal{H}$ si y sólo si para

$$\zeta'_s = \zeta'\mid_{g^{-1}(s)}: g^{-1}(s) \longrightarrow \mathbf{P}^{\ell} = \mathbf{P}^{\ell} \times \{s\}$$

el morfismo

$$\zeta'^{*}_s : H^0\left(\mathbf{P}^{\ell}, _{\mathbf{P}^{\ell}}(1)\right) \longrightarrow H^0\left(g^{-1}(s), \omega^{[\nu]}_{g^{-1}(s)}\right)$$

es biyectivo. Como ambos lados son espacios vectoriales de la misma dimensión esto será cierto si y sólo si ζ'^{*}_s es inyectiva. Lo último es equivalente al hecho de que $\zeta_s^{'}\left(g^{-1}\left(s\right)\right)$ no está contenido en un hiperplano, lo cual se pidió en la definición del funtor de Hilbert para variedades canónicamente polarizadas. Por lo cual $\mathcal{H}$ representa el funtor de Hilbert y el isomorfismo $\overset{\ell+1}{\bigoplus}\mathcal{B}\longrightarrow f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{[\nu]}$ implica que la restricción $\mathcal{A}$ de la gavilla amplia $\mathcal{A}'^{h'(1)}$ para $\mathcal{H}$ no es otra cosa que

$$det\left(f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{[\nu\cdot\mu]}\right)^{h'(1)}\otimes\mathcal{B}^{-h'(\mu)\cdot h'(1)\cdot\mu}=$$

$$det\left(f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{[\nu\cdot\mu]h'(1)}\right)\left(f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{[\nu\cdot\mu]h'(1)}\right)\otimes det\left(f_*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{H}}^{\nu}\right)^{-h'(\mu)\cdot\mu}.$$

□

Llamaremos al esquema construido $\mathcal{H}$, el esquema de Hilbert de esquemas $\nu-$canónicamente polarizados para $\underline{H}ilb_h\left(k\right)$. La gavilla amplia e invertible $\mathcal{A}$ será llamada la gavilla amplia inducida por las coordenadas de Plücker.

Corolario 1 *Bajo las hipótesis del teorema anterior sea $g:X\longrightarrow S\in\underline{H}ilb_h\left(S\right)$ una familia dada y sea $s\in S$ un punto. Entonces existe una vecindad abierta S' de s en S y un morfismo $\tau:S'\longrightarrow\mathcal{H}$ tal que $g'=g\mid_{X'}:X'=g^{-1}\left(S'\right)\longrightarrow S'$ es $S'-$isomorfo a*

$$pr_2:\mathcal{Y}\times_{\mathcal{H}}S'\left[\tau\right]\longrightarrow S'.$$

Además, se $\tau_i:S'\longrightarrow\mathcal{H}$ son dos de tales morfismos, para $i=1,2$,y si

$$\left(g':X'\longrightarrow S',\rho_i:\mathbf{P}\left(g'_*\omega^{[\nu]}\right)_{X'|S'}\longrightarrow\mathbf{P}^{\ell}\times S'\right)\in\underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}\left(S'\right)\cong Hom\left(S',\mathcal{H}\right)$$

son las familias inducidas, entonces existe $\delta\in\mathbf{P}Gl\left(\ell+1,\mathcal{O}_{S'}\left(S'\right)\right)$ con $\rho_1=\delta\circ\rho_2$.

Demostración Se tiene que elegir S'tal que $f_*\omega_{X/S}^{[\nu]}\mid S'$es libre. Por definición de $\underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}$y $\mathcal{H}$,dar un morfismo $\tau_i:S'\longrightarrow\mathcal{H}$ es lo mismo que dar un sistema global de coordenadas sobre S'para el espacio proyectivo $P\left(g'_*\omega_{X'/S'}^{[\nu]}\right)$.Dos de tales sistemas de coordenadas sobre S'sólo difieren por un elemento de $PGl_{\ell+1}\left(\mathcal{O}_{S'}\left(S'\right)\right)$.

□

Observación 5 Este corolario nos muestra cuál es la diferencia entre $\underline{H}ilb_h^{\ell,\nu}$ para el cual se construyó el esquema $\mathcal{H}$ que lo representa y $\underline{H}ilb_h$, mostrandonos que este último es localmente el cociente de $\mathcal{H}$ bajo la acción del grupo lineal general $PGl_{\ell+1}\left(\mathcal{O}_{S'}\left(S'\right)\right)$. Surge ahora la pregunta de si este cociente es aún un esquema, en cuyo caso se tendría que $\underline{H}ilb_h$ es también representable, siendo localmente el esquema que lo representa alguno de los anteriores.

Capítulo 3

Cocientes categóricos y geométricos

En los capítulos anteriores se vió que tanto para haces vectoriales de rango n con descomposición cíclica determinada, como para variedades canónicamente polarizadas, las relaciones de equivalencia establecidas pueden ser vistas como las órbitas bajo la acción de un grupo algebraico (el grupo lineal general Gl_{n+1}) sobre un esquema. Razón por la cual en este capítulo estableceremos la conexión de esto último con los problemas de módulos.

3.1 Grupos Algebraicos y Acciones

Definición 8 *Un esquema en grupos* será un esquema G sobre S con un morfismo de esquemas $\pi : G \longrightarrow S$, más morfismos $\mu : G \times G \longrightarrow G$, $\beta : G \longrightarrow G$ y $e : S \longrightarrow G$ los cuales satisfacen:

(a) Asociatividad $\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$, i.e., el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{\mu\times Id} & G\times G \\ {\scriptstyle Id\times\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times G & \xrightarrow[\mu]{} & G \end{array}$$

(b) Ley del inverso $\mu(a,\beta(a)) = \mu(\beta(a),a)$, i.e., las composiciones siguientes son ambas iguales a $e\circ\pi$, Δ es la diagonal

$$G \xrightarrow{\Delta} G\times G \underset{\beta\times 1_G}{\overset{1_G\times\beta}{\rightrightarrows}} G\times G \xrightarrow{\mu} G$$

(c) Ley de la identidad $\mu(a,e) = \mu(e,a) = a$, i.e., el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccccc} S\times G & \xrightarrow{e\times Id} & G\times G & & \\ {\scriptstyle \cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ G\times S & \xrightarrow[Id\times e]{} & G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Un esquema G sobre S lo denotaremos G_S.

Definición 9 *Un grupo algebraico* G sobre un campo k, es un esquema en grupos G sobre $Spec(k)$, $G_{Spec(\ k)}$, tal que G es un esquema liso sobre k (es decir, π es liso)

Ejemplo 3 El grupo lineal especial Sl_{n+1} que consiste de todas las matrices con determinante 1 en Gl_{n+1}; es claramente un grupo y un cerrado afín , por ser los ceros de $\det(T_{ij})-1$; más aún al ser definido por un solo polinomio, Sl_{n+1} es una hipersuperficie de dimensión n^2+2n en M_{n+1}.

Ejemplo 4 El grupo simpléctico $S_{P_{2n}}$ que consiste de todas las matrices $A \in Gl_{n+1}$ que satisfacen

$$A^t \begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix}, \; donde \; J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Es inmediato que $S_{P_{2n}}$ es un grupo y también es un cerrado afín, sólo que ahora se deben satisfacer más de un polinomio, razón por la cual es difícil calcular su dimensión directamente.

Definición 10 Un esquema en grupos G_S *actúa en un S-esquema* X (X_S) si existe un S-morfismo $\sigma : G \times_S X \longrightarrow X$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

(a) $\sigma(a, \sigma(b, x)) = \sigma(\mu(a, b), x)$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "Id_G \times \sigma"] \arrow[d, "\mu \times Id_X"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times X \arrow[r, "\sigma"'] & X \end{tikzcd}$$

(b) $\sigma(1, x) = x$

$$\begin{tikzcd} S \times X \arrow[r, "e \times Id"] \arrow[dr, "Id"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Ejemplo 5 El grupo Gl_{n+1}actúa de manera natural en $\mathbf{P}^n$ de la manera siguiente: dado $\overline{x} \in \mathbf{P}^n$ y $g \in Gl_{n+1}$ la acción transforma $\overline{x}$ en $\overline{gx}$, donde $x \in \mathbf{A}^{n+1}$

Ejemplo 6 Todo grupo actúa en si mismo por conjugación y por multlipicación.

Notación: Dado $f : T \longrightarrow X$ diremos que X tiene un punto T-valuado. Si $T = Spec(k)$, $k = \overline{k}$, diremos que se tiene un punto geométrico. Si $T = Spec\ (R)$, diremos que se tiene un punto R-valuado.

Sean $f : T \longrightarrow X$ un punto T-valuado de X, y $\sigma : G \times_S X \longrightarrow X$ una acción de G en X. Entonces se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times T \arrow[rr, "\sigma \circ (1_G \times f)"] \arrow[dr, "1_G \times f"'] & & X \\ & G \times X \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $\sigma \circ (1_G \times f) : G \times T \longrightarrow X$ es un morfismo .

Definamos $\Psi_f^G : G \times T \longrightarrow X \times T$ como $\Psi_f^G = (\sigma \circ (1_G \times f), P_2)$ es decir, de manera que conmute el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times T \arrow[rr, "\Psi_f^G"] \arrow[dr, "1_G \times f \times 1_T"'] & & X \times T \\ & G \times X \times T \arrow[ur, "(\sigma, P_3)"'] & \end{tikzcd}$$

Si no hay confusión escribiremos Ψ_f en lugar de Ψ_f^G. Si $T = X$ y $f = Id_X$, escribiremos simplemente Ψ (en lugar de Ψ_{Id_X}).

Definición 11 Sea $f : T \longrightarrow X$ un punto T-valuado de X. *La órbita de f es $\mathcal{O}(f) = Im\Psi_f^G$.*

Ejemplo 7 Si $f = Id_X$, $\Psi_f^G = \Psi = (\sigma, P_2)$ y entonces,

$$\mathcal{O}(Id_X) = Im\Psi = \{(g \cdot x, x) \mid x \in X, g \in G\},$$

en particular dado $x \in X$, $\mathcal{O}(1_X)_x \cong \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Ejemplo 8 Si $\jmath : Spec(k) \longrightarrow X$ es un punto geométrico,entonces

$$\Psi_{\jmath}^{G} : G \times_S Spec(k) \longrightarrow X \times Spec(k)$$

con $\Psi_{\jmath}^{G} = (\sigma \circ (1_G \times \jmath), P_2)$de manera que $Im\ \Psi_{\jmath}^{G} = \{(g \cdot x, a) \mid g \in G\}$, donde $x = \jmath(a)$. Si adicionalmente $S = Spec(k)$ entonces, $X \times_S Spec(k) = X$, y se tiene que $\mathcal{O}\left(\Psi_{\jmath}^{G}\right) = \{(g \cdot x) \mid g \in G\}$, con $x = \jmath(a)$, $Spec(k) = \{a\}$

Ejemplo 9 Si $f : S = T \longrightarrow X$ es una sección ($\pi \circ f = 1_S$), entonces

$$\Psi_{f}^{G} : G \times S = G \longrightarrow X \times S = X$$
$$\Psi_{f}^{G} = (\sigma \circ (1_G \times f), P_2)$$
$$Im\ \Psi_{f}^{G} = \{(g \cdot f(s), s) \mid s \in S\}$$

Ejemplo 10 Sea R un anillo de valoración discreta y $T = Spec(R) = \{0, \wp\}$, $\wp \in \overline{\{0\}}$. Sean $i : R \longrightarrow K = R_0$, $i : Spec(k) \hookrightarrow Spec(R) = T \longrightarrow S$. Un punto T-valuado de X induce un único punto geométrico, a saber

$$\begin{tikzcd}
Spec(k) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & & T \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

por lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
G \times Spec(k) \arrow[r, "\Psi_{\overline{f}}"] \arrow[d, "1_G \times i"'] & X \times Spec(k) \arrow[d, "1_X \times i"] \\
G \times T \arrow[r, "\Psi_f"'] & X \times T
\end{tikzcd}$$

En particular $\mathcal{O}(f)$ posee también información acerca de $\mathcal{O}(\overline{f})$, que es una órbita en el sentido clásico,(i.e. $\mathcal{O}(f)$ es la órbita de un par $(p,0)$ con $p \in \overline{\{0\}}$.)

Observación 6 Como esquema sobre T, $X \times T$ tiene una sección canónica, a saber $\sigma = (f, 1_T)$.

$$\begin{tikzcd} X \times T \arrow[d, shift right, "P_2"'] \\ T \arrow[u, shift right, "\sigma = (f, 1_T)"'] \end{tikzcd}$$

Definición 12 **El estabilizador** ($G-$*estabilizador*) de f es el esquema $S(f)$ definido mediante el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times T \arrow[r, "\Psi_f"'] & X \times T \end{tikzcd}$$

$(i.e.\ S(f) = G \times T \times_{X \times T} T)$.

Ejemplo 11 Sea k un campo y $T = Spec(k)$, $f : T \xrightarrow{\cdot} X$ una inmersión cerrada, entonces se tiene

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_T"'] & & X \arrow[dl, "\pi_S"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

sean $x = f(0) \in X$ e $y = \pi_T(0) \in S$, entonces

1. $G \times T = G \times Spec(k) = G \times Spec(k(y)) = G_y$ es la fibra de G en $y \in S$.En particular G_y es un grupo (*un k grupo*)

2. $X \times T = X \times k(y) = X_y$ es la fibra de X en $y \in S$. Además

$$\begin{array}{ccc} G_y & \qquad\qquad & X_y \ni x = f(0) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \{y\} = T & & \{y\} = T \end{array}$$

3. $S(f) = G \times T \times_{X \times T} T = G_y \times_{X_y} Spec(k) = G_y \times_{X_y} Spec(k(x))$.

Sea

$$\eta : G_y \longrightarrow X_y \ni x$$
$$g \longrightarrow g \cdot x$$

Entonces $S(f) = (G_y)_x$ es la fibra de G_y en $x \in X_y$,

$$S(f) \cong \{g \in G_y \mid g \cdot x = x\}.$$

Esto es, $S(f)$ es el estabilizador clásico de x, pero en $G_y \neq G$ (¡ G_y es un grupo!)

Más aún, si $k = \overline{k}$, $x = f(0) \in X$ es un punto geométrico, y en este caso G_y se denota por $\overline{G}$ y X_y se denota por $\overline{X}$. $\overline{G}$ y $\overline{X}$ son variedades sobre $\overline{k}$, de hecho son las fibras geométricas de G y X respecto a x. Por último, si $T = S = Spec\left(\overline{k}\right)$, entonces $G_y = G$, $X_y = X$, $S(f) = G_x \cong \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ es el estabilizador clásico de x en G. En tal caso escribiremos $S(x)$ en lugar de $S(f)$.

3.2 Cocientes Categóricos y Geométricos

Definición 13 Dada una acción σ de G en X, un par (Y, Φ) que consiste en un esquema Y y un morfismo $\Phi : X \longrightarrow Y$ será llamado un **Cociente categórico** *de X por G* si *(a)* El diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ X \arrow[r, "\Phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta (i.e. $\Phi(x) = \Phi(g \cdot x)$ $\forall g \in G,\ x \in X$, Φ es constante en fibras)

(b) Dado un par (Z, Ψ) con Z un esquema y Ψ un morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & X \arrow[d, "\Psi"] \\ X \arrow[r, "\Psi"'] & Z \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $\chi : Y \longrightarrow Z$ tal que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\chi"] & & Z \\ & X \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 4 *Si definimos una relación de equivalencia en X como $p \sim q$ si y sólo si existe g tal que $p = g \cdot q$ y existe el espacio de módulos tosco M para $X/\sim$, entonces M es un cociente categórico, de modo que existe una única $\alpha : M \longrightarrow N$ para la cual conmuta el digrama*

$$\begin{tikzcd} \Im(-) \arrow[r, "\overline{\Phi}"] \arrow[dr, "\Psi"'] & Hom(-,M) \arrow[dl, "\exists\alpha"] \\ Hom(-,N) & \end{tikzcd}$$

Demostración

i. Por ser M un espacio de módulos tosco,conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & M \arrow[d, "\cong"] \\ X/\sim = \Im(pto) \arrow[r, "\overline{\Phi}"'] & Hom(pto, M) \end{tikzcd}$$

ii. El digrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ X \arrow[r, "\Phi"'] & M \end{tikzcd}$$

conmuta si y sólo si $\Phi(x) = \Phi(g \cdot x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$ si y sólo si Φ es constante en órbitas, lo cual es claro de la definición de Φ

iii. Si existe N tal que

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & X \arrow[d, "\Psi"] \\ X \arrow[r, "\Psi"'] & N \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces siendo Ψ constante en órbitas Ψ define $\overline{\Psi}$: $X/\sim = \Im\,(pto) \longrightarrow N \cong Hom\,(-, N)$. Más aún, si S parametriza a una familia en $X/\sim$ ($f : Y \to S$, $Y_s \in X/\sim \forall\, s \in S$), definamos

$$\overline{\Psi} : \Im\,(S) \longrightarrow Hom\,(S, N)$$
$$(f : Y \to S) \longrightarrow \nu_S : S \to N$$
$$s \to \overline{\Psi}\,(Y_s)$$

por la universalidad de M existe $\alpha : M \longrightarrow N$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\Im(-) \arrow[rr, "\overline{\Psi}"] \arrow[dr, "\overline{\Phi}"'] & & Hom(-, M) \\
& Hom(-, N) \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, por tanto

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & \Im(pt) \arrow[r] & Hom(pt, N) \\
X/\sim \arrow[d] & & \\
Hom(pt, M) \arrow[uurr, "\alpha"] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

$\square$

Definición 14 Dada una acción σ de G en X, un par (Y, Φ) consistente en un esquema Y y un morfismo $\Phi : X \longrightarrow Y$, será *un* **cociente geométrico** *de* X *por* G si

1. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow{\scriptstyle P_2} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ X & \xrightarrow[\Phi]{} & Y \end{array}$$

conmuta

2. Φ es suprayectivo y la imagen de Ψ es $X \times_Y X$.

3. Φ es una submersión, esto es $U \subset Y$ es abierto si y sólo si $\Phi^{-1}(U) \subset X$ es abierto.

4. $\mathcal{O}_Y \subset \Phi_*(\mathcal{O}_X)^G$, esto es, si $f \in \Gamma(U, \Phi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(\Phi^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$, entonces $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ si y sólo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times \Phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \Phi^{-1}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle P_2} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \Phi^{-1}(U) & \xrightarrow[F]{} & A^1 \end{array}$$

conmuta, donde F es el morfismo definido por f

Observación 7 La condición 2) puede leerse de otro modo, pues

$$\Psi : G \times X \longrightarrow X \times X$$
$$(g, x) \longrightarrow (g \cdot x, x)$$
$$\mathcal{O}(f) = Im\Psi \subset X \times X \supset X \times_Y X$$

$Im\Psi = X \times_Y X$ si y sólo si para toda $x \in X$ y $x' \in \Phi^{-1}(x)$ $((x', x') \in X \times_Y X)$, se tiene $(x', x') \in Im\Psi$ si y sólo si $x' = g \cdot x$ para algún $g \in G$, esto es las fibras geométricas de Φ son las órbitas geométricas de σ.

Proposición 5 *Si definimos una relación de equivalencia en X como $p \sim q$ si y sólo si existe g tal que $p = g \cdot q$ y existe el espacio de módulos fino M para $X/\sim$, entonces M es un cociente geométrico, de modo que existe una única $\alpha : M \longrightarrow N$ para la cual conmuta el digrama*

$$\begin{tikzcd} \Im(-) \arrow[rr, "\overline{\Phi}"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & Hom(-,M) \arrow[dl, "\exists\alpha"] \\ & Hom(-,N) & \end{tikzcd}$$

Demostración Es inmediata de la proposición 4, de que todo cociente categórico será un cociente geométrico, $\overline{\Phi}$ es un epimorfismo y las fibrasde Φ son las órbitas.

□

Definición 15 (Y, Φ) es *un cociente categórico* **universal** *(respectivamente cociente geométrico* **universal** *)* si para todo $h : Y' \longrightarrow Y$, al hacer $X' = X \times_Y Y'$ y $\Phi' : X' \longrightarrow Y'$, se tiene $\left(Y', \Phi'\right)$ es un cociente categórico (respectivamente geométrico) de $X\,'$ por G. Si esto es cierto sólo para morfismos planos, (Y, Φ) se dice **uniforme**

Proposición 6 *Sea $\sigma : G \times X \longrightarrow X$ y supongamos que (Y, Φ) es un cociente geométrico de X por G. Entonces (Y, Φ) es un cociente categórico. Más aún, si (Y, Φ) es un cociente geométrico universal, entoces (Y, Φ) es un cociente categórico universal.*

Demostración Sea (Y, Φ) un cociente geométrico universal., entonces $\left(Y', \Phi'\right)$ es un cociente geométrico de X' por G para todo $f : Y' \longrightarrow Y$, de manera que $\left(Y', \Phi'\right)$ es un cociente categórico de X' por G para todo $f : Y' \longrightarrow Y$ de donde (Y, Φ) es un cociente categórico universal, queda por demostrar:

1. El diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ X \arrow[r, "\Phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta y

2. Y es universal respecto de 1).

Siendo Y un cociente geométrico, se tiene que 1 conmuta. Sea Z un esquema y $\Psi : X \longrightarrow Z$ tal que

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & X \arrow[d, "\Psi"] \\ X \arrow[r, "\Psi"'] & Z \end{tikzcd}$$

conmuta, veamos que existe $\chi : Y \longrightarrow Z$ tal que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\chi"] & & Z \\ & X \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Como $\Psi(x) = \Psi(g \cdot x)$ para todo $g \in G$, es decir Ψ es constante en las fibras geométricas de Φ, esto es podemos definir χ en un punto geométrico cerrado $y = \Phi(x) \in Y$ (Φ es suprayectiva) como $\chi(y) = \Psi(x)$. Como los puntos geométricos son densos esto define χ. Sea $\{V_i\}$ una cubierta afín de Z.

$\Psi^{-1}(V_i) \subset X$ es un abierto G invariante. Pero por (2) en la dedinición de cociente geométrico, para todo $x_1, x_2 \in X$ tales que $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, se tiene que $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$ (las fibras geométricas de Φ son las órbitas geométricas y los puntos geométricos son densos) de manera que $\Psi^{-1}(V_i) = \Phi^{-1}(U_i)$, donde $U_i = \Phi(\Psi^{-1}(V_i))$ ($x \in \Phi^{-1}(U_i)$ es decir $\Phi(x) = \Phi(y)$ para algún $y \in \Psi^{-1}(V_i)$). Por (3) en la definición de cociente geométrico, $U_i \subset Y$ es abierto pues $\Phi^{-1}(U_i)$ lo es, así que, $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de Y (Φ es suprayectiva). Si existe $\chi : Y \longrightarrow Z$ tal que $\Psi = \chi \circ \Phi$, entonces $\chi(Ui) \subset V_i$ por lo cual debe estar definido por un conjunto de homomorfismos h_i tales que

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V_i), \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\Psi^*"'] & \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, "\Phi^*"] \\
\Gamma(\Psi^{-1}(V_i, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "Id"'] & \Gamma(\Psi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como Φ^* es inyectiva ((4) en la definición de cociente geométrico), las h_i están unívocamente determinadas si existen, por tanto χ es única si existe $\left(\mathcal{O}_Y \subset \Phi_*(\mathcal{O}_X)^G\right)$,

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(U, \Phi_*(\mathcal{O}_X))^G, \; \Gamma(U, \Phi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma\left(\Phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X\right),$$

pero para todo $g \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z)$, $\Psi^*(g) \in \Gamma(\Phi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)^G$, o bien $\Psi^*(g) \in \Gamma(\Phi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_Y)$ y por tanto h_i existe. Esto define $\chi_i : U_i \longrightarrow V_i$, y como $\chi_i|_{U_i \cap U_j} = \chi_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo i, j, entonces χ existe.

□

Observación 8 Suponga que (Y, Φ) es un cociente categórico universal y sea $U \subset Y$ abierto, entonces $\left(U, \Phi_{|_U}\right)$es un cociente categórico universal de $X' =$

$X \times_Y U = \Phi^{-1}(U) \subset X$. Si

$$f \in \Gamma\left(\Phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X\right) = \Gamma\left(X', \mathcal{O}_{X'}\right),$$

f define un morfismo $F : X' \longrightarrow A^1$, el cual desciende a U si y sólo si existe $\overline{F} : U \longrightarrow A^1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Phi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "F"'] & & U \arrow[dl, "\overline{F}"] \\ & A^1 & \end{tikzcd}$$

conmuta, si y sólo si

$$\begin{tikzcd} G \times \Phi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "P_2"'] & \Phi^{-1}(U) \arrow[d, "F"] \\ \Phi^{-1}(U) \arrow[r, "F"'] & A^1 \end{tikzcd}$$

conmuta, por ser (U, Φ) un cociente categórico de X' por G. Más aún, sea $y = Spec(k) \hookrightarrow Y$ un punto en Y, entonces (y, Φ) es un cociente categórico de $\Phi^{-1}(y) = X \times_Y Spec(k)$ por G. Luego $\Phi^{-1}(y)$ no es vacío, pues el cociente categórico del vacío es el vacío $\neq (y, \Phi)$ por tanto Φ es suprayectivo. Así pues, (Y, Φ) será un cociente geométrico si y sólo si Φ es una sumersión e $Im\Phi = X \times_Y X$

Capítulo 4

Existencia de cocientes geométricos y categóricos

En el capítulo anterior se establecen las definiciones de cocientes categóricos y geométricos, así como las relaciones entre estos y los espacios de módulos, pero no se garantiza la existencia de alguno de estos cocientes.

En este capítulo se establecerá un resultado que garantiza la existencia de cocientes categóricos en caso de que el grupo que actúa sea reductivo, así como un resultado de Mumford acerca de la estabilidad de los puntos bajo la acción de un grupo y su relación con los subgrupos uniparamétricos.

4.1 Grupos Reductivos y Estabilidad

Un grupo G será llamado reductivo si

$$G \cong \frac{Semisimple \times G_m^n}{subgrupo\ central\ finito}$$

Definición 16 *Un grupo G se dice* **geométricamente reductivo,** si para todo subespacio $G-$invariante $V_0 \subset V$ de codimensión 1 (G actúa en V), existe un n para el cual el subespacio $G-$invariante $V_0 \cdot Symm^{n-1}V \subset Symm^n V$ de codimensión 1 tiene un complemento 1-dimensional que es $G-$invariante.

Lema 2 *G es geométricamente reductivo si y sólo si para toda $x \neq 0$ tal que $x \in V$ es $G-$invariante, existe un polinomio $G-$invariante f tal que $f(x) \neq 0$ y $f(0) = 0$.*

Demostración Sea G geométricamente reductivo, identifiquemos a V con $(V^*)^*$ de manera canónica. Sea $V_0 = \ker x \subset V^*$, como x es $G-$invariante, entonces V_0 es $G-$invariante de codimensión 1. Por otro lado, al ser G geométricamente reductivo, existe n tal que $V_0 \cdot Symm^{n-1}V^* \subset Symm^n V^*$ tiene un complemento $G-$invariante de codimensión 1. Sea f un generador de dicho complemento, entonces $f(x) \neq 0$, $f(0) = 0$ y f es $G-$invariante.

Sean $V_0 \subset V$ espacios $G-$invariantes de codimensión 1. Sea $V^* \ni x \neq 0$ tal que $V_0 = \ker x$ y x es $G-$invariante, sea f un polinomio $G-$invariante tal que $f(x) \neq 0$ con $f(0) = 0$. Si grad$f = d$, entonces

(a) $f \in Symm^d V \cong Symm^d (V^*)^*$.

(b) $V_0 \cdot Symm^{d-1} V \subset Symm^d V^*$ es $G-$invariante.

(c) $\langle f \rangle \subset Symm^d V$ es $G-$invariante.

□

Teorema 6 *(W. Haboush) Todo grupo reductivo es geométricamente reductivo (esto fue probado primeramente por C. S. Seshadri* [**Se − II**] *para Gl_2 y después por W. Haboush en general* [**Hab**]. *)*

Definición 17 Sea $k = \overline{k}$, G **un grupo reductivo**, V una representación $n-$dimen- sional de G y $x \in V - \{0\}$. Decimos que x es

(a) Estable, si

i. $\mathcal{O}^G(x)$ es cerrada y

ii. $\mathrm{Stab}_G(x)$ es finito (*i.e.* $\dim Stab_G(x) = 0$).

(b) Semiestable, si $0 \notin \overline{\mathcal{O}^G(x)}$.

(c) Inestable, si $0 \in \overline{\mathcal{O}^G(x)}$.

Observación 9 a) implica b).

Observación 10 Más adelante mostraremos algunas propiedades equivalentes a la definición previa, que harán más clara la definición de inestable y semiestable.

Observación 11 Hemos mostrado que

$$\begin{array}{ccc} M = \textit{Esquema de módulos fino} & \Longrightarrow & M \textit{ es cociente geométrico} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M = \textit{Esquema de módulos tosco} & \Longrightarrow & M \textit{ es cociente categórico} \end{array}$$

Definición 18 Un homomorfismo inyectivo $\lambda : \mathbf{G}_m = k^* \longrightarrow G$ se llama un **subgrupo uniparamétrico** de G *(1-ps)*

Ejemplo 12 Sea $G = SL_n$, $\lambda : \mathbf{G}_m \longrightarrow SL_n$ dado por

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

λ es inyectivo y se cumple $\lambda(t_1)\lambda(t_2) = \lambda(t_1 t_2)$

4.2 Un teorema de Mumford

Teorema 7 (Mumford) *Son equivalentes:*

(a) x es inestable

(b) $f(x) = 0$ para todo polinomio homogéneo $G-$invariante

(c) Existe un subgrupo uniparamétrico λ de G tal que los pesos de x respecto a λ son todos positivos, i.e. $\lambda(t) = t^a x$, donde $a > 0$.

Antes de demostrar el teorema señalaremos algunas consecuencias del mismo así como algunos resultados técnicos previos.

Corolario 2 *Son equivalentes:*

(a) x es semiestable

(b) Existe un polinomio homogéneo $G-$invariante tal que $f(x) \neq 0$

(c) Para todo subgrupo uniparamétrico λ de G, los pesos de x con respecto a λ no son todos positivos, i.e. existe algún peso que es negativo o cero.

Corolario 3 *Son equivalentes:*

(a) x es estable

(b)

$i)$ Si $y \in V - \mathcal{O}^G(x)$, existe un polinomio homogéneo $G - invariante$, tal que $f(y) \neq f(x)$

$ii)$ El grado de trascendencia de $k(V)^G = \dim V - \dim G$

(c) Para todo subgrupo uniparamétrico λ de G, los pesos de x con respecto a λ son todos negativos.

Observación 12 Si $x \in V - \{0\}$ es inestable, entonces $x \in Z$ para toda subvariedad $Z \subset V$ $G-$invariante ($Z = Z(I)$ para algún ideal I que es $G-$invariante).

Lema 3 *Sean $G_{|S}$ un esquema en grupos, G reducido y $X_{|S}$ un esquema en el cual actúa G. Sean Y un $S-$esquema y $\Phi : X \longrightarrow Y$ un morfismo. Supongamos que*

(a) $\Phi \circ \sigma = \Phi \circ P_2$

(b) $\mathcal{O}_Y = \Phi_* (\mathcal{O}_X)^G$

(c) Si W es un subconjunto cerrado $G-$invariante de X , entonces $\Phi(W)$ es cerrado en Y; si W_i, $i \in I$, es una colección de subconjuntos cerrados $G-$invariantes de X, entonces $\Phi(\cap_{i\in I} W_i) = \cap_{i\in I}\Phi(W_i)$.

Entonces (Y, Φ) es un cociente categórico y Φ es una submersión.

Demostración Como $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \Phi_* (\mathcal{O}_X)$, entonces Φ es dominante, pero $\Phi(X) \subset Y$ es cerrado, por tanto Φ es un epimorfismo. Sea $\Psi : X \longrightarrow Z$ un morfismo tal que $\Phi \circ \sigma = \Psi \circ P_2$, debemos encontrar un morfismo $\eta : Y \longrightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & Y \arrow[dl, "\eta"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

i.e. es universal respecto de a). Sea $\{V_i\}$ una cubierta abierta afín de Z. Como Φ es suprayectiva, $\Psi^{-1}(V_i) \subset \Phi^{-1}(U_i)$ para algún subconjunto U_i de Y. De hecho, sea $W_i = X - \Psi^{-1}(V_i)$, W_i es cerrado en X, de modo que $U_i = Y - \Phi(W_i)$ es abierto en Y y $\Phi^{-1}(U_i) \supset \Psi^{-1}(Vi)$ para todo i, como $\{\Psi^{-1}(V_i)\}$ cubre a X, entonces $\cap_i W_i = \emptyset$ y, usando c), concluimos que $\cap_i \Phi(W_i) = \Phi(\cap_i W_i)$, por lo cual $\{U_i\}$ cubre a Y. De manera que dado $p \in Y$ existe $q \in Z$ tal que $\Phi^{-1}(p) = \Psi^{-1}(q)$, y así definimos $\eta(p) = q$.

Por lo anterior , dado un morfismo $\chi : Y \longrightarrow Z$ tal que $\Psi = \chi \circ \Phi$ se tiene $\chi(U_i) = V_i$ para toda cubierta $\{V_i\}$ de Z, por lo cual $\chi = \eta$ y tenemos la unicidad.

□

Proposición 7 *Sea X un esquema afín sobre k, G un grupo reductivo,*

$$\sigma : G \times X \longrightarrow X$$

una acción de G en X. Entonces existe un cociente categórico (Y, Φ)

Demostración Sea $k = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ y sea $R_0 = R^G \subset k$, obsérvese que

i. Si S_0 es una R_0 álgebra, entonces $S_0 = \left(R \bigotimes_{R_0} S_0\right)^G$

ii. Si $\{I_j\}\, j$ es una colección de ideales $G-$invariantes en k, entonces $(\sum I_j) \cap R_0 = \sum (I_j \cap R_0)$.

Definamos a $Y = Spec(R_0)$ y $\Phi : X \longrightarrow Y$ el morfismo correspondiente a $R_0 \hookrightarrow R$. (recuerdece que X es afín). $(Y.\Phi)$ satisface las condiciones del lema previo ii) implica c) y b) es por definición de Y, i.e. (Y, Φ) es un cociente categórico

□

Corolario 4 *Si W_1 y W_2 son dos cerrados disjuntos $G-$invariantes en X, entonces existe $f \in \Gamma(X.\mathcal{O}_X)$ tal que $f(W_1) = 0$ y $f(W_2) = 1$.*

Demostración Sea I_j el ideal que corresponde a W_j. Como $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, entonces $R_0 = (I_1 \oplus I_2) \cap R_0 = (I_1 \cap R_0) \oplus (I_2 \cap R_0)$. i.e. existen $f \in I_1 \cap R_0$ y $g \in I_2 \cap R_0$ tales que $1 = f + g$, f satisfase lo deseado

□

Demostración (Teorema de Mumford) c) implica a) pues $t^a x \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow 0$, a) implica b) pues si $0 \in \overline{\mathcal{O}^G(x)}$, entonces $0 = f(0) \in \overline{\{f(g \cdot x) \mid g \in G\}}$ $= \overline{\{g^{-1} \cdot f(x) \mid g \in G\}} = \overline{\{f(x) \mid g \in G\}} = f(x)$. b) implica a) sean $Z_1 = \overline{\mathcal{O}^G(x)}$ y $Z_2 = \{0\}$ dos cerrados $G-$invariantes disjuntos, entonces por el corolario previo tenemos que existe F' $G-$invariante tal que $F'(Z_1) = 1$ y $F'(Z_2) = 0$. Si escribimos $F' = \sum F_{k_i}$ con F_{k_i} homogéneos $G-$invariantes de grado k_i, entonces $F_{k_i}(Z_2) = 0$ para todo i y existe un i tal que $F_{k_i}(Z_1) \neq 0$ de donde $F = F_{k_i}$. a) implica c) Si todo subgrupo uniparamétrico λ admite un peso negativo en x, entonces $\lambda(t) \cdot x$ tiene un polo en $t = 0$, i.e. $\lambda(t) \cdot x$ no tiende a cero cuando t lo hace, para todo subgrupo uniparamétrico.

□

El teorema de Mumford y sus dos corolarios se pueden presentar en la tabla siguiente:

x inestable	**x semiestable**	**x estable**
a)	**a**)	**a**)
$0 \in \overline{\mathcal{O}^G(x)}$	$0 \notin \overline{\mathcal{O}^G(x)}$	$i)$ $\mathcal{O}^G(x)$ *es cerrada en* V
		$ii)$ $stab(x)$ *es finito*
b)	**b**)	**b**)
$\forall$ *polinomio* $G-$*invariante* f , $f(x)=0$	$\exists$ *un polinomio* $G-$*invariante* f, *tal que* $f(x) \neq 0$	$i)$ $\forall\ y \in V - \mathcal{O}^G(x)$, *existe un polinomio* $G-$*invariante* f *tal que* $f(x) \neq f(y)$
		$ii)$ $tr\ \deg_k k(V)^G = \dim V - \dim G$
c)	**c**)	**c**)
$\exists$ $1-ps$ λ *de* G *tal que que los pesos de* x *con respecto a* λ *son todos positivos*	$\forall$ $1-SG$ λ *de* G, *los pesos de* x *respecto a* λ *no son* 0 *todos positivos*	$1-ps$ *no trivial de* G, x *tiene pesos positivos y negativos respecto a* λ

Capítulo 5

Estabilidad asintótica

En este capítulo consideraremos el concepto de estabilidad asintótica, así como de algunas importantes consecuencias del mismo (criterio numérico para la estabilidad de variedades). La idea de estabilidad asintótica fue utilizada por Gieseker [**Gi**], para establecer dichos criterios numéricos cuando las variedades son superficies de tipo general.

Iniciaremos citando un resultado de C. P. Ramanujan [**Ra**], junto con una observación acerca de las fomas de Chow [**Sa**] , [**Gre**]. Las variedades en este capítulo serán de dimensión r y estarán encajadas en $\mathbf{P}^n$ si no se indica otra cosa.

5.1 Formas de Chow y Estabilidad Asintótica

Las formas de Chow son la respuesta al problema de describir una subvariedad general $V \subset \mathbf{P}^n$ por un conjunto explícito de números. Existen dos casos en los cuales, el problema tiene una respuesta sencilla: una hipersuperficie tiene su ecuación F y un espacio lineal L tiene sus coordenadas de Plücker. Las formas de Chow son una manera hábil de combinar estos casos especiales. Supongase que V tiene grado d; existen dos maneras de proceder

1. Si $u = (u_i) \in \mathbf{P}^n$ escribimos H_u para el hiperplano $\sum u_i X_i = 0$. Se puede mostrar que existe un polinomio irreducible Φ_V tal que

$$V \cap H_u^{(0)} \cap \cdots \cap H_u^{(r)} \neq \emptyset \Longleftrightarrow \left[\Phi_V\left(u_i^{(0)}, \ldots, u_i^{(r)}\right) = 0\right].$$

Más aún Φ_V es multihomogéneo de grado d en cada una de las variables $\left(u_0^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}\right)$, Φ_V es única salvo escalares, y por tanto Φ_V determina a V.

2. Si $Gr = Grassmanianos$ de los subespacios lineales L de dimensión $n-r-1$ en $\mathbf{P}^n$ y $\mathcal{O}_{Gr}(1)$ es la gavilla amplia definida sobre Gr por su encaje de Plücker, entonces el conjunto de los $L \in Gr$ tales que $L \cap V \neq \emptyset$ es el divisor D_V de ceros de alguna sección si V , D_V y $\mathcal{O}_{Gr}(d)$ determinan cada uno a los otros. (Desgraciadamente, D_V es casi siempre un divisor singular).

Los métodos anteriores nos conducen al mismo resultado vía la identificación

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty} \Gamma\left(Gr, \mathcal{O}_{Gr}(d)\right) = (\text{Anillo de coordenadas homogéneas de } Gr) =$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Subanillo } W \text{ de } \mathbf{C}\left[\ldots, U_i^{(j)}, \ldots\right] \text{ generado por las coordenadas} \\ \text{de Plücker } P_{i_0,\ldots,i_r} = \det_{(r+1,r+1)}\left(U_{i_j}^{(j)}\right), i_0 < i_1 < \cdots < i_r \end{array}\right) \tag{5.1}$$

Si W_d es la parte de grado d de W, la identificación proporciona una representación irreducible

$$Symm^d\left(\Lambda^{r+1}\left(\mathbf{C}^{n+1}\right)\right) \longrightarrow W_d \hookrightarrow \bigotimes^{r+1} Symm^d\left(\mathbf{C}^{n+1}\right) \tag{5.2}$$

Así, a pesar de que consideraremos usualmente la forma de Chow como un punto de la Sl_{n+1} representación, $\bigotimes^{r+1} Symm^d\left(\mathbf{C}^{n+1}\right)$, dicha forma pertenece a W_d y por tanto podemos pensarla como un divisor sobre el Grassmaniano.

Proposición 8 *Supongamos que X es una k-variedad (no necesariamente completa), $\mathcal{L}$ una gavilla invertible sobre X e $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ es una gavilla ideal tal que $Z = Supp\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ es propio sobre k. Entonces existe un polinomio $h(n,m)$ de grado total $\leq r$, tal que, para m grande*

$$\chi\left(\mathcal{L}^n/\mathcal{I}^m\mathcal{L}^n\right) = h(n,m). \tag{5.3}$$

Ver $[Ra]$.

Definición 19 Una variedad X *es Chow estable* si su forma de Chow es estable bajo la acción natural de Sl_{n+1}. Si $\mathcal{L}$ es un haz lineal diremos que X es *asintóticamente estable* si existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\Phi_{\Gamma(\mathcal{L}^n)}(X) \subset \mathbf{P}^{h^0(\mathcal{L}^n)-1}$ es estable

Observación 13 Una variedad estable puede no ser asintóticamente estable y una asintóticamente estable puede no ser estable.

Definición 20 Si $f(a)$ es una función con valores enteros, la cual es representada por un polinomio racional de grado a lo más r en n para n suficientemente grande, denotaremos por $cpn(f)$ *(el coeficiente principal normalizado de f) el entero e* para el cual $f(n) = e\frac{n^r}{r!}+$ términos de grado menor. Si $\mathcal{L}$ es una gavilla invertible sobre X e $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ es una gavilla ideal con soporte propio sobre k, denotaremos por $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{I})$ el entero $e(\chi(\mathcal{L}^n/\mathcal{I}^n\mathcal{L}^n))$ (la multiplicidad de $\mathcal{I}$ medida via $\mathcal{L}$).

Observación 14 La definición anterior se refiere al coeficiente principal normalizado del polinomio de Hilbert-Samuel para la gavilla cociente indicada.

Proposición 9 *Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ y Λ es un subespacio de $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1))$, $\mathcal{L}_\Lambda$ es el subespacio lineal de $\mathbf{P}^n$ dado por $s = 0$ para $s \in \Lambda$, $\mathcal{I}_\Lambda$ la gavilla ideal generada por las secciones $s \in \Lambda$. $P_\Lambda : \mathbf{P}^n - \mathcal{L}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{P}(\Lambda) = \mathbf{P}^m$ la proyección canónica de la dilatación de X a lo largo de $\mathcal{I}_\Lambda$, entonces $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{I}_\Lambda) = \deg(X) - \deg P_\Lambda(X)$.*

Demostración Si H es la clase del divisor de una sección hiperplano sobre X, entonces $\deg X = (H^r) = \epsilon(\chi(\mathcal{O}_X(1)))$.

$\deg P_\Lambda(X) = \left((\pi^{-1}(H) - E)^r\right) = \epsilon(\chi(\pi^*(\mathcal{O}(n)(-nE))))$ finalmente, por definición $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{I}_\Lambda) = \epsilon(\mathcal{O}_X(n)/\mathcal{I}^n\mathcal{O}_X(n)) = \epsilon(\chi(\mathcal{O}_X(n))) - \epsilon(\chi(\mathcal{I}^n\mathcal{O}_X(n))) = \deg X - \deg P_\Lambda(X)$

□

Proposición 10 *Si estando en la situación de la proposición 8, tenemos además que:*

(a) Si $\mathcal{L}$ e $\mathcal{I}\cdot\mathcal{L}$ son generadas por sus secciones, entonces

$$\mid h^0(\mathcal{L}^n/\mathcal{I}^n\mathcal{L}^n) - e_{\mathcal{L}}(\mathcal{I})\frac{n^r}{r!} \mid = O\left(n^{r-1}\right)$$

(es decir, podemos calcular $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{I})$ de las dimensiones de los espacios de secciones.)

(b) Supongase además, que tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \supset & X_0 = f^{-1}(0) \\ \downarrow f & & \downarrow \\ Spec(A) & \ni & 0 \end{array}$$

donde f es propio, y $W \subset \Gamma(X, \mathcal{I}\mathcal{L})$ un espacio vectorial de dimensión finita, el cual

A. genera $\mathcal{I}\mathcal{L}$

B. define una inmersión cerrada $X - X_0 \hookrightarrow \mathbf{P}\left(\widehat{W}\right)$

Entonces las dimensiones del núcleo y el conúcleo del morfismo ($\Gamma(X,\mathcal{L})/A-$ submódulo generado por la imagen de $W^{\otimes n} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}^n/\mathcal{I}^n\cdot\mathcal{L}^n)$) son ambas de orden $O(n^{r-1})$.

Demostración La idea en a) es mostrar que $h^i(\mathcal{L}^n/\mathcal{I}^n\cdot\mathcal{L}^n) = O(n^{r-1})$, $i\geq 1$. Primero observaremos que si $\overline{X}$ es una compactificación de X sobre la cual $\mathcal{L}$ se extiende al haz lineal $\overline{\mathcal{L}}$ tal que

i. $\overline{\mathcal{L}}$ es generado por sus secciones

ii. algún $W\subset\Gamma(X,\mathcal{L})$ el cual genera $\mathcal{I}\cdot\mathcal{L}$ extiende a $W\subset\Gamma\left(\overline{X},\overline{\mathcal{L}}\right)$.

Realmente sobre cualquier compactificación $\overline{X}$, existe una gavilla coherente $\overline{\mathcal{F}}$ tal que $\overline{\mathcal{F}}_{|X}\cong\mathcal{L}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ tiene las propiedades i) y ii), el producto fibrado de $\overline{\mathcal{F}}$ a la dilatación $B_{\overline{\mathcal{F}}_1}\left(\overline{X}\right)$ es un haz lineal con esas propiedades: así podríamos también reemplazar $\overline{X}$ por $B_{\overline{\mathcal{F}}_1}\left(\overline{X}\right)$. Entonces si tomamos la gavilla ideal $\overline{\mathcal{I}}$ tal que $\overline{W}$ genera $\overline{\mathcal{I}}\cdot\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{I}}=\mathcal{I}\cdot\mathcal{I}'$ donde $\mathcal{I}'$ está soportada únicamente sobre $\overline{X}-X$, y esto es suficiente para mostrar que $h^i\left(\overline{\mathcal{L}}^n/\overline{\mathcal{I}}^n\cdot\overline{\mathcal{L}}^n\right) = O(n^{r-i})$ $i\geq 1$ pues $\overline{\mathcal{L}}^n/\overline{\mathcal{I}}^n\cdot\overline{\mathcal{L}}^n\cong\overline{\mathcal{L}}^n/\mathcal{I}^n\cdot\overline{\mathcal{L}}^n\bigoplus\overline{\mathcal{L}}^n/\mathcal{I}'^n\overline{\mathcal{L}}^n$, esto acota $h^i\left(\overline{X},\overline{\mathcal{L}}^n\right)$ y $h^i\left(\overline{X},\overline{\mathcal{I}}^n\cdot\overline{\mathcal{L}}^n\right) = h^i\left(B_{\overline{\mathcal{I}}}\left(\overline{X}\right),\overline{\mathcal{L}}\left(-\overline{E}\right)^{\otimes n}\right)$ (donde E es el divisor excepcional sobre $B_{\overline{\mathcal{I}}}\left(\overline{X}\right)$). Esas cotas se siguen de :

Lema 4 *Si X es propia sobre k y $\mathcal{L}$ es un haz lineal sobre X generado por sus secciones, entonces* $h^i(\mathcal{L}^{\otimes n}) = O(n^{r-1})$, $i\geq 1$.

Demostración Sea X_0 la imagen de X en $\mathbf{P}^n$ bajo la acción del morfismo dado por las secciones de $\mathcal{L}$. Entonces $\mathcal{L}=\pi^*(\mathcal{O}_{X_0}(1))$ y

$$H^i\left(X,\mathcal{L}^{\otimes n}\right) = H^i(X,\pi^*(\mathcal{O}_{X_0}(n)))\cong H^0\left(X_0,\left(R^i\pi_*\mathcal{O}_{X_0}\right)\bigotimes\mathcal{O}_{X_0}(n)\right)$$

para n grande. El último isomorfismo se sigue del primero aplicando la sucesión espectral de Leray, y entonces se observa que todos los términos involucran grupos de cohomología alta nulos para n grande, por la amplitud de $\mathcal{O}_{X_0}(1)$. Pero si $s\in SuppR^i\pi_*\mathcal{O}_{X_0}$ para $i\geq 1$, la fibra $\pi^{-1}(s)$ tiene dimensión positiva, de modo que $dim\ SuppR^i\pi_*\mathcal{O}_{X_0}\leq r-1$ lo cual da la cota deseada para el espacio anterior.

□

Una compactificación adecuada y un argumento similar a la demostración de a), reducen la parte de b) acerca del conúcleo a acotar un $h^i(\mathcal{I}^n \cdot \mathcal{L}^n)$ y esto es obtenido como en a) por una dilatación y el lema. El procedimiento para manejar el núcleo es algo diferente : la dimensión que deseamos controlar es la de

$$H^0(\mathcal{I}^n \cdot \mathcal{L}^n)/A - \text{submódulo generado por la imagen de } W^{\otimes n}.$$

Es decir, para $n \gg 0$, la dimensión de:

$$H^0(B(X), \pi^*\mathcal{L}^n(-nE))/A - \text{submódulo generado por la imagen de } W^{\otimes n}.$$

Sea $B = B_{\mathcal{I}}(X)$ sea q el morfismo propio, birracional $q : B \longrightarrow B' \subset \mathbf{P}^n \times Spec(A)$ inducido por W. Entonces $q^*(\mathcal{O}_{B'}(1)) = \pi^*\mathcal{L}(-E)$ y para n grande, tenemos

$$\begin{array}{ccc} H^0(B, \mathcal{L}^n(-nE)) & \cong & H^0\left(B', q_*(\mathcal{O}_B) \otimes \mathcal{O}_{B'}(n)\right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left[\begin{array}{c} A - \textit{submódulo generado por} \\ \textit{la imagen de } W^{\otimes n} \end{array}\right] & \cong & H^0\left(B', \mathcal{O}_{B'}(n)\right) \end{array}$$

El conúcleo de la inclusión de la derecha es justamente $H^0\left(B', q_*(\mathcal{O}_B)/\mathcal{O}_{B'}(n)\right)$. Pero el soporte de esta última gavilla es propio sobre $0 \in Spec(k)$, así que su dimensión es menor que r, una última aplicación del lema completa la prueba.

□

5.2 Criterio numérico para la Estabilidad

Observación 15 Sea $X \subset \mathbf{P}^n$ una variedad proyectiva fija, $X_0, \ldots, X_n$, coordenadas en $\mathbf{P}^n$, Φ_X es la forma de Chow de X y

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t^{\rho_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t^{\rho_n} \end{bmatrix} \cdot t^m, \quad \rho_0 \geq \rho_1 \geq \cdots \geq \rho_n \geq 0,$$

es un $1-ps$ de Sl_{n+1}, es decir $m = -\sum \rho_i / (n+1)$. Consideremos la gavilla ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \times \mathbf{A}^1}$ como aquella para la cual

$$\mathcal{I} \cdot \left[\mathcal{O}_X(1) \bigotimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}\right] = \textit{subgavilla generada por } \{t^{\rho_i} X_i\}, \ i = 1, ..., n.$$

(a) Al examinar los generadores de $\mathcal{I}$, uno ve que el soporte del subesquema $Z = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{A}^1} / \mathcal{I}$ está concentrado en $0 \in \mathbf{A}^1$; si normalizamos los ρ_i de manera que $\rho_n = 0$ entonces el soporte de $\mathcal{I}$ también reside en la sección $X_n = 0$ en X.

(b) Considerando la bandera ponderada (pesada):

$$(X_1 = \cdots = X_n = 0) \subset (X_2 = \cdots X_n = 0) \subset \cdots \subset (X_n = 0)$$

las cuales corresponden a los subespacios lineales $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$ asociados a los pesos respectivos $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$. El subesquema Z visto burdamente como la unión de vecindades normales de orden ρ_i–ésimo de $L_i \cap X$. Es fácil ver como esto sólo depende de la bandera y no de la descomposición definida por λ.

(c) Burdamente hablando, $e_{\mathcal{O}_X(1) \bigotimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}}(\mathcal{I})$, denotará la medida de contacto de esta bandera con X. Puede esperarse que la multiplicidad de $\mathcal{I}$ llegue a ser muy grande, por ejemplo, si L_0 llega a ser un punto más singular de X ó si L_{n-1} oscila para una X de grado alto. El siguiente teorema que es el resultado pricipal de este capítulo hará más preciso esto. Antes necesitamos algunas definiciones.

Definición 21 Si $\mu : \mathbf{G}_m \longrightarrow Gl(W)$ es una representación de $\mathbf{G}_m$ y W_i es el subespacio propio donde $\mathbf{G}_m$ actúa mediante el caracter t^{ρ_i}, entonces el *$\mu-$peso de W es* $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho_i \dim W_{\rho_i}$. Si $w \in W_{\rho_i}$ entonces decimos que ρ_i es el $\mu-$peso de w

Definición 22 Si $X^{\lambda(t)}$ es la imagen de X por $\lambda(t)$, entonces tomando $\lim_{t\to o} X^{\lambda(t)}$ obtenemos un esquema $X^{\lambda(0)}$ y un ciclo subyacente $\widetilde{X}$, llamado **el ciclo límite** *de X bajo $\lambda(t)$.*

Teorema 8 *En la situación de la observación anterior, Φ_X es estable (respectivamente semiestable) con respecto a λ si y sólo si:*

$$e(\mathcal{I}) < \tfrac{(r+1)\deg X}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \rho_i.$$
$$\left(respectivamente,\ e(\mathcal{I}) \leq \tfrac{(r+1)\deg X}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \rho_i \right).$$

Demostración Probaremos algunos resultados antes de demostrar el teorema.

1) Tanto $X^{\lambda(0)}$,como $\widetilde{X}$ son fijos bajo la acción de $\lambda(t)$. Más aún, $\Phi_{X^{\lambda(t)}} = (\Phi_X)^{\lambda(t)}$ así si $\Phi_X = \sum_{i=a}^{b} \Phi_{X,i}$ donde $\Phi_{X,i}$ es la componente de Φ_X en el $i-$ésimo espacio pesado: entonces

$$\Phi_{X^{\lambda(t)}} = \sum_{i=a}^{b} t^i \Phi_{X,i} = t^a \left[\Phi_{X,a} + t\,(\text{otros términos})\right].$$

De donde $\Phi_{\widetilde{X}} = \Phi_{X,a}$ y a es el $\lambda-$peso de $\Phi_{\widetilde{X}}$. Por definición, Φ_X es estable (respectivamente semiestable) con respecto a λ si y sólo si $a < 0$ (respectivamente $a \leq 0$) ó equivalentemente si y sólo el $\lambda-$peso de $\Phi_{\widetilde{X}}$ es < 0 (respectivamente ≤ 0).

2) El segundo paso es conectar los pesos con el polinomio de Hilbert, lo cual es hecho por:

Proposición 11 *Sea $V^r \subset \mathbf{P}^n$ un subespacio fijo bajo la acción de un $1-ps$ λ de Sl_{n+1}, sea I el ideal homogéneo de V y sea $R_n = (k[X_0,\ldots,X_n]/I)_n$ (i.e. $V = Proj\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n\right)$). Sea a_V el $\lambda-$peso de Φ_V y r_n^V el $\lambda-$peso de R_n. Entonces para n grande, r_n^V es representado por un polinomio en n de grado a lo más $r+1$ con cpn a_V.*

Demostración

(a) Si asumimos que V es lineal. En las coordenadas adecuadas, podemos escribir

$$V = V(X_{r+1},\ldots,X_n) \text{ y } \lambda(t) = \begin{bmatrix} t^{a_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t^{a_n} \end{bmatrix}.$$

Entonces de por 5.1 , la forma de Chow de V es el monomio

$$\Phi_V = \det\left(U_i^{(j)}\right),\ i,j = 0,\ldots,n.$$

De donde $\Phi_{\widetilde{V}} = \Phi_V$ y con $\lambda-$ peso $\sum_{i=0}^{r} a_i$. Por otro lado el $\lambda-$peso de R_n depende sólo de $a_0,\ldots,a_r$, es simétrica en esos pesos, y es lineal en el vector $(a_0,\ldots,a_r)$, por lo cual depende sólo de $\sum_{i=0}^{r} a_i$. Considerando el caso $a_0 = \cdots = a_r$ vemos que

$$r_n^V = \frac{n}{r+1}\left(\sum_{i=0}^{r}\right)\dim R_n = a_V\frac{n}{r+1}\binom{n}{r}$$

el cual tiene la forma deseada.

(b) V es un ciclo positivo de espacios lineales.Aquí será más conveniente considerar el ideal I en lugar de V. Usando inducción noetheriana, podemos suponer que se ha probado para todos los ideales $\lambda-$fijos $I' \supset I$. Entonces si $V = \sum a_i L_i$, sea J_1 el ideal de L_1 y elijamos una $a \in k[X] - I$ la cual es un $\lambda-$ valor propio de peso, digamos w, tal que $J_1 a \subset I$. Ahora veamos la secuencia

$$0 \longrightarrow (a + I)/I \longrightarrow k[x]/I \longrightarrow k[x]/(a + I) \longrightarrow 0$$

exacta por inducción noetheriana. Si $I' = \{f \mid af \in I\} \supset J_1 \supset I$, entonces vía el levantamiento de los pesos por w,se tiene $(a + I)/I \cong k[x]/I'$; lo que cambia el $\lambda-$peso por una cantidad de la forma

$$w \dim \left[\left(k[x]/I'\right)_n\right] = O(n^r),$$

de manera que no afecta el coeficiente lider del $\lambda-$peso. Lo anterior también es cierto para I' por inducción noetheriana, esto prueba lo pedido para I

(c) Reducción al caso b). Recordemos el teorema del punto fijo de Borel, si G es un grupo algebraico soluble y conexo actuando sobre una variedad proyectiva W, entoces existe un punto fijo en $\overline{\mathcal{O}^G(y)}$ para todo $y \in W$. Sea $[V]$ el punto asociado de V en $Hilb^n$ y considere la órbita de $[V]$ bajo la acción de un toro maximal $T \subset Sl_{n+1}$ que contiene a $\lambda(t)$. Sea $[V_0]$ un punto $T-$ invariante en $\overline{\mathcal{O}^T([V])}$. Entonces V_0 es una suma de subespacios lineales, por ser estos las únicas variedades $T-$invariantes de $\mathbf{P}^n$. Si descomponemos Φ_V como $\Phi_V = \sum\limits_{\alpha} \Phi_V^{\alpha}$, donde α corre sobre los caracteres de T y Φ_V^{α} es la parte de Φ_V sobre la cual T actúa con peso α, entonces para cualquier $\tau \in T$, $\Phi_V^{\tau} = \sum\limits_{\alpha} c_{\alpha}^{\tau} \Phi_V^{\alpha}$ para constantes adecuadas c_{α}^{τ}. De donde Φ_{V_0} es tanto $T-$ invariante como límite de las formas Φ_V^{τ}, $\tau \in T$, $\Phi_{V_0} = \Phi^{\alpha}$ para algún α. Más aún como V es un punto $\lambda-$ invariante, todos los caracteres α que aparecen en la descomposición de Φ_V deben tener el mismo valor sobre λ, así que el $\lambda-$ peso de Φ_{V_0} es el $\lambda-$ peso de Φ_V. Únicamente resta comparar los anillos de coordenadas homogéneas. Ahora bien V y V_0 son miembros de una familia plana V_t . $t \in S$ para algún espacio conexo de parámetros S, así que si $n \gg 0$, $H^0(V_t, \mathcal{O}_{V_t}(n))$ son las fibras de un haz vectorial sobre S. Así entendemos que la $\lambda-$acción varia continuamente sobre esas fibras, por tanto los $\lambda-$pesos de todas las fibras son iguales. Ahora lo requerido se sigue de b).

□

Observación 16 La relación entre las formas de Chow y los puntos de Hilbert en c) es realmente mucho más general: de hecho, Knudsen [**Kn**] ha mostrado que existe un isomorfismo canónico de espacios vectoriales 1-dimensionales

$$k\Phi_V \cong \begin{bmatrix} (r+1) - \textit{ésimas "diferencias" formadas vía } \odot \\ \textit{de espacios sucesivos en la secuencia } \bigwedge^{\dim R_n} R_n \end{bmatrix},$$

siendo posible basar toda la prueba de la proposición 11 sobre esto.

3) Ahora veremos cómo obtener $X^{\lambda(0)}$ por dilatación. Considere el morfismo

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : \quad & \mathbf{G}_m \times X \longrightarrow \mathbf{P}^n \\ & (t, X) \longrightarrow \lambda(t)(x) \end{aligned}.$$

Si la inmersión de X está definida por $s_{0,\dots,}s_n \in \Gamma[X, \mathcal{O}_X(1)]$ y la acción de $\lambda(t)$ está dada por

$$(a_0, \dots, a_n) \longrightarrow (t^{r_0}a_0, \dots, t^{r_n}a_n)$$

con $r_0 \geq r_1 \geq \cdots \geq r_n$ y $\sum_{i=0}^{n} r_i = 0$ (i.e. $(0, \dots, 0, 1)$ es un punto fijo atractor y $(1, 0, \dots, 0)$ es un punto fijo repulsor), entonces $\Lambda_1^*(X_1) = t^{r_i}s_i$. Como $t^{-\gamma}$ es una unidad en $\mathbf{G}_m \times X$, así que cambiando la identificación $\Lambda_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) \cong$

$\mathcal{O}_{\mathbf{G}_m} \otimes \mathcal{O}_X(1)$ por esta unidad, podemos asumir $\Lambda_1^*(X_1) = t^{\rho_i}s_i$ donde $\rho_i = r_i - \gamma$ está normalizado como en la observación 15 así que $\rho_n = 0$. Entonces Λ_1 "extiende" al morfismo racional $\mathbf{A}^1 \times X \longrightarrow \mathbf{P}^n$ el cual está definido por las secciones $\{t^{\rho_i}s_i\} \in \Gamma\left(\mathbf{A}^1 \times X, P_2^*\mathcal{O}_X(1)\right)$, $\mathcal{I}$ es justamente la gavilla ideal que éstas generan en $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1 \times X}$ y Z es justamente el conjunto de puntos base de ese morfismo racional. La dilatación sobre $\mathcal{I}$ da el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "i"] & & B = B_{\mathcal{I}}(\mathbf{A}^1 \times X) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Lambda"] & \\
& \mathbf{A}^1 \times X \arrow[dl, "P_2"'] \arrow[dr, "P_1"] & & \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^n \arrow[dl, "P_1"] \\
X & & \mathbf{A}^1 &
\end{tikzcd}$$

donde E es el divisor excepcional y el morfismo Λ está definido por las secciones $\{t^{\rho_i}s_i\} \in \Gamma\left(B, (P_2\pi)^*(\mathcal{O}(1))(-E)\right)$. Dado que $Im(\Lambda)$ es un subesquema cerrado de $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^n$ dado por $\mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m=0}^{n} R_m\right)$ donde

$$R_m = \left[\begin{array}{c} k[t] - \text{submódulo de } \Gamma(X, \mathcal{O}(m)) \otimes_k k[t] \text{ generado} \\ \text{por los monomios de m-ésimo grado en } \{t^{\rho_i}s_i\} \end{array}\right]$$

de hecho, $Im\Lambda$ es plana sobre $\mathbf{A}^1$, porque:

Lema 5 *Sea S una curva no singular, X plano sobre S y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo propio sobre S. Entonces el esquema $\left(f(X), \mathcal{O}_Y / \ker f^*\right)$ es plano sobre S.*

Demostración Podemos suponer $S = Spec(R)$; y entonces esto se reduce a probar que $\mathcal{O}_Y / \ker f^*$ no tiene R–torsión : si $a \in \mathcal{O}_Y / \ker f^*$, $r \in R$, entonces

$ra = 0$ implica que $rf^*a = 0$ lo que a su vez implica $f^*a = 0$ es decir $a = 0$

□

En particular, $X^{\lambda(0)}$ es la fibra de $Im\Lambda$ sobre $t = 0$, es decir $X^{\lambda(0)} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m=0}^{n} R_m/tR_m\right)$.

4) La demostración es completada al hacer precisa la relación entre $\mathcal{I}$ y el $\lambda-$ peso de $\Phi_{\widetilde{X}}$. Sin embargo uno debe ser cuidadoso porque existen dos $\mathbf{G}_m-$ acciones sobre R_m/tR_m, la dada por la identificación $R_1/tR_1 = \oplus\,(t^{r_i}s_i)\,k$, la cual es justamente λ, y la dada por la identificación $R_1/tR_1 = \oplus\,(t^{\rho_i}s_i)\,k$; llamamos a esta acción μ. Los pesos de μ sobre R_m/tR_m son los pesos de λ trasladados por $m\gamma$. Por la proposición 11

$$\begin{aligned} \lambda - peso\ de\ \Phi_{\widetilde{X}} &= cpn\,(\lambda - peso\ de\ R_m/tR_m) \\ &= cpn\,(\mu - peso\ de\ R_m/tR_m + \gamma m \dim(R_m/tR_m)) \\ &= cpn\,(\mu - peso\ de\ R_m/tR_m) - \left(\tfrac{(r+1)\deg X}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\rho_i\right) \end{aligned}$$

tomando $\gamma = -\frac{1}{n+1}\sum\rho_i$ y

$$\begin{aligned} \dim(R_m/tR_m) &= \left(\deg X^{\lambda(0)}\right)\tfrac{m^r}{r!} + \textit{términos de grado menor} \\ &= (\deg X)\,\tfrac{m^r}{r!} + \textit{términos de grado menor} \end{aligned}.$$

Un último lema nos permite reexpresar los $\mu-$pesos de R_m/tR_m.

Lema 6 *Sea W un $k-$ espacio vectorial y sea $\mathbf{G}_m$ actuando por μ sobre W con pesos $\rho_n \geq \rho_{n-1} \geq \cdots \geq \rho_0 = 0$. Sea W_i el subespacio propio de peso ρ_i y sea W^* el $k\,[t]$ submódulo de $W \otimes k\,[t]$ generado por $\oplus t^{\rho_i}W_i$. Entonces* $\dim(k\,[t]\otimes W/W^*) =$ *$\mu-$ peso de W^*/tW^*.*

Demostración En el diagrama siguiente se tienen los generadores de $W \otimes_k k\,[t]$, de entre estos, los que se encuentran por encima de la primera línea ____ generan a W^*, mientras que los que se encuentran por encima de la segunda línea —— generan tW^*, de donde podemos observar que la $\dim W \otimes_k k\,[t] = \mu$-peso de

W^*/tW^*, ya que la dimensión del subespacio generado por cada columna bajo la primera línea es $\rho_i \dim W^*/tW^*$

$$W \otimes_k k[t] = < \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^{\rho_n+1}W_n & t^{\rho_n+1}W_{n-1} & \cdots & t^{\rho_n+1}W_1 & t^{\rho_n+1}W_0 \\ \overline{\underline{t^{\rho_n}W_n}} & t^{\rho_n}W_{n-1} & \cdots & t^{\rho_n}W_1 & t^{\rho_n}W_0 \\ t^{\rho_{n-1}+1}W_n & t^{\rho_{n-1}+1}W_{n-1} & \cdots & t^{\rho_{n-1}+1}W_1 & t^{\rho_{n-1}+1}W_0 \\ t^{\rho_{n-1}}W_n & \overline{\underline{t^{\rho_{n-1}}W_{n-1}}} & \cdots & t^{\rho_{n-1}}W_1 & t^{\rho_{n-1}}W_0 \\ & & \ddots \ddots & & \\ t^{\rho_1+1}W_n & t^{\rho_1+1}W_{n-1} & \cdots & t^{\rho_1+1}W_1 & t^{\rho_1+1}W_0 \\ t^{\rho_1}W_n & t^{\rho_1}W_{n-1} & \cdots & \overline{\underline{t^{\rho_1}W_1}} & t^{\rho_1}W_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ tW_n & tW_{n-1} & \cdots & tW_1 & tW_0 \\ W_n & W_{n-1} & \cdots & W_1 & \overline{\underline{W_0}} \end{bmatrix} >$$

por otro lado si recordamos la definición de R_m, y aplicamos esto a la $\mu-$ acción sobre R_m/tR_m vemos que el $\mu-$ peso de R_m/tR_m es justamente:

$$\dim \left(\Gamma \left(X, \mathcal{O}\left(m\right)\right) \otimes_k k\left[t\right] / R_m\right)$$

□

Finalmente las secciones $\{t^{\rho_i} s_i\}$ cuyas m-ésimas potencias tensoriales generan R_m, también generan $\mathcal{I}P_2^*\left(\mathcal{O}_X\left(1\right)\right)$ así que por a) y b) de la proposición 10 , esta última dimensión puede ser usada para calcular $e\left(\mathcal{I}\right)$. Reuniendo todo lo anterior, tenemos que:

$$\begin{gathered} \Phi_X \text{ es estable con respecto a } \lambda \\ \text{si y sólo si el } \lambda - \text{peso de } \Phi_X < 0 \\ \text{si y sólo si } e_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{I}\right) - \tfrac{r+1}{n+1} \deg X \sum_{i=0}^{n} \rho_i < 0 \end{gathered}$$

lo cual, con la afirmación análoga para semiestabilidad, es nuestro teorema.

□

Interpretación vía el grado reducido.

Definición 23 Si $X \subset \mathbf{P}^n$ es una variedad de dimensión r, su grado reducido es definido por:

$$red. \deg(X) = \frac{\deg X}{n+1-r}$$

Un conocido teorema dice que si X no está contenido en un hiperplano, entonces $red. \deg(X) \geq 1$. El grado reducido mide, en algún sentido, cuan complicadamente está X en $\mathbf{P}^n$, y existe una clasificación clásica de variedades con grado reducido pequeño.

Ejemplo 13 Si X tiene grado reducido 1 y no está contenida en un hiperplano, entonces es alguna de las siguientes

(a) Una superficie cuádrica.

(b) La superficie de Veronese en $\mathbf{P}^5$ ó un cono sobre ésta.

(c) Una hélice racional: $X = \mathbf{P}\left(\bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n_i)\right) \subset \mathbf{P}^N$, $n_i > 0$ y $N = \sum_{i=0}^{r}(n_i+1) - 1$, o un cono sobre ésta. (ésta es llamada una hélice porque las fibras $\mathbf{P}^{r-1}$ de X sobre $\mathbf{P}^1$ están encajadas linealmente.)

Algunos otros hechos importantes acerca del grado reducido son:

1. Curvas canónicas, superficies $K3$ y las variedades de dimensión 3 de Fano tienen grado reducido 2.

2. Todas las superficies no regladas y todas las curvas especiales tienen grado reducido ≥ 2 (para curvas especiales esto es una concecuencia del teorema de Clifford)

3. Para $\mathcal{L}$ amplia sobre X, el encaje por $\mathcal{L}^{\otimes r}$ tiene grado reducido asintótico a $r!$ cuando $n \to \infty$;

4. El grado reducido se preserva tomando las secciones de hiperplanos propios.

Sería muy interesante conocer si la mayoría de las variedades de dimensión 3 (en un sentido similar al de ii) para superficies) tienen $red.\deg(X) \geq 2$. La siguiente definición es introducida solo tentativamente como una forma de encadenar las ideas nuevas con las viejas (por ejemplo el método de Albanese para simplificar singularidades de variedades)

Definición 24 Una variedad X *es linealmente estable (respectivamente semiestable)* si, cuando $L^{n-m-1} \subset \mathbf{P}^n$ es un espacio lineal tal que la imagen del ciclo $P_L(X)$ de X bajo la proyección $P_L : \mathbf{P}^n - L \longrightarrow \mathbf{P}^m$ tiene dimensión r, entonces $red.\deg P_L(X) > red.\deg(X)$ (respectivamente $red.\deg P_L(X) \geq red.\deg(X)$).

Observación 17 P_L puede ser finito a 1, en cuyo caso $P_L(X)$ debe ser tomado como el ciclo imagen. Estabilidad lineal es una propiedad de los sistemas encajados linealmente X; si $X \subset \mathbf{P}^n$ es encajada por $\Gamma(X, L)$, entonces estabilidad lineal significa que para todos los subespacios $\Lambda \subset \Gamma(X, L)$

$$\frac{\deg P_L(X)}{\dim \Lambda - r} > \frac{\deg X}{n+1-r}$$

o equivalentemente, aplicando la proposición 9

$$e(\mathcal{I}_\Lambda) < \frac{\deg X}{n+1-r}(codim\ \Lambda)$$

Ejemplo 14 Cuando C es una curva de género 0, ésta es linealmente semiestable pero no estable. Cuando $g \geq 1$, el teorema de Clifford muestra que C es linealmente semiestable cuando está encajada por un sistema lineal no especial

Ejemplo 15 $\mathbf{P}^2$ es linealmente inestable cuando está encajado por $\mathcal{O}(n)$, $n \geq 3$ porque éste se proyecta sobre la superficie de Veronese. En vista de *esto*

Proposición 12 *Sea $X \subset \mathbf{P}^n$ fija, sea C una curva lisa y sea $\mathcal{L}$ un haz lineal amplio sobre C. Sea $\Phi_i : C \times \mathbf{P}^n \longrightarrow \mathbf{P}^{N(i)}$ el encaje definido por $\{S_i \otimes X_j\}$ donde $\{S_i\}$ es una base de $\Gamma(\mathcal{L}^{\otimes i})$ y $X_j \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$ son las coordenadas homogéneas. Si $\Phi_i(C \times X)$ es linealmente semiestable para toda i suficientemente grande, entonces X es Chow semiestable*

Demostración Elijamos un $1ps$

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t^{\rho_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t^{\rho_n} \end{bmatrix} t^{-\frac{\sum \rho_i}{n+1}}$$

como en la observación 14 . Elíjase un punto $p \in C$, un isomorfismo $\mathcal{L}_p \cong \mathcal{O}_p$ y una i suficientemente grande para que $\mathcal{L}^{\otimes i}$ sea muy amplia y $\mathcal{L}^{\otimes i}(-\rho_0 p)$ es no especial. Entonces el morfismo

$$\bigoplus_{l=0}^{n} \Gamma\left(C, \mathcal{L}^{\otimes i}\right) X_l \longrightarrow \bigoplus_{l=0}^{n} \left[\mathcal{O}_{p,C}/\mathcal{M}_{p,C}^{\rho_0}\right] X_l$$

es supravectivo. Sea Λ^i la imagen inversa de $\bigoplus_{l=0}^{n} \left[\mathcal{M}_{p,C}^{\rho_l}/\mathcal{M}_{p,C}^{\rho_0}\right] X_l$ bajo este morfismo y sea $\mathcal{I}_\Lambda^i \subset \mathcal{O}_{C \times X}$ el ideal inducido. Como todos los $\mathcal{L}^{\otimes i}$ son triviales cerca de p e $\mathcal{I}_\Lambda^i$ tiene soporte sobre la fibra de $C \times X$ sobre $\mathbf{P}^{N(i)}$, los ideales $\mathcal{I}_\Lambda^i$ son independientes de i; denotaremos el ideal por $\mathcal{I}_\Lambda$. Las hipótesis dicen que para i grande

$$\begin{aligned} e(\mathcal{I}_\Lambda) &\le \frac{\deg(C \times X)}{(n+1)h^0(\mathcal{L}^i) - r - 1} \operatorname{codim}\Lambda \\ &= \frac{(r+1)\deg X \deg \mathcal{L}^{\otimes i}}{(n+1)(\deg \mathcal{L}^{\otimes i} - g - 1) - r - 1} \sum_{l=o}^{n} \rho_l \end{aligned}$$

y haciendo $i \to \infty$,

$$e(\mathcal{I}_\Lambda) \le \frac{(r+1)\deg X}{n+1} \sum_{l=o}^{n} \rho_l.$$

Pero $C \times X$ a lo largo de $p \times X$ es formalmente isomorfa a $\mathbf{A}^1 \times X$ a lo largo de $0 \times X$ con el correspondiente $\mathcal{I}'_\Lambda$. así por el teorema 9 , X es Chow semiestable

□

Veamos ahora una aplicación del teorema 8

Proposición 13 *Sea* $C \subset \mathbf{P}^n$ *una curva sin componentes encajadas tal que* $\deg(C)/(n+1) < 8/7$. *Si* C *es Chow semiestable, entonces* C *tiene a lo más puntos dobles ordinarios.*

Corolario 5 *Una curva* C *asintóticamente estable tiene a lo más puntos dobles ordinarios.*

En particular, si $C \subset \mathbf{P}^2$ tiene grado≥ 4 y tiene un punto cuspidal ordinario, entonces, en $\mathbf{P}^2$, C es estable pero cuando es reencajada en un espacio de dimensión suficientemente alta, C es inestable. Este sorpresivo hecho fue descubierto por D. Gieseker.

Demostración (De la proposición). Primero notaremos que una C semiestable de cualquier dimensión no puede ser contenida en un hiperplano: si $C \subset V(C_0)$, entonces X tiene solo pesos positivos con respecto al $1ps$

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t^{-n} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & t \end{bmatrix}$$

El plan es claro: por el teorema 8 , es suficiente mostrar que si x es una mala singularidad de C, entonces existe un $1ps$.

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t^{\rho_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t^{\rho_n} \end{bmatrix}$$

tal que

$$\epsilon(\mathcal{I}) \geq \frac{16}{7}\lambda(t) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i > \frac{\deg X(r+1)}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \rho_i$$

Primero, si $x \in C$ tiene multiplicidad al menos tres, entonces tomando las coordenadas $(X_0, \ldots, X_n)$ tales que $x = (1, 0, \ldots, 0)$ y sea

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1 \times C}(1)$ es generado por $\{tX_0, X_1, \ldots, X_n\}$. Como $\{X_1, \ldots, X_n\}$ generan $\mathcal{M}_{x,C}$ y X_0 es una unidad en x, $\mathcal{I} = (t, \mathcal{M}_x)\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1 \times X}$, i.e. $\mathcal{I}$ es el ideal maximal de (o, x) sobre $\mathbf{A}^1 \times X$. Por tanto, $e(\mathcal{I}) = mult_x X \geq 3$, lo cual da lo deseado pues $\frac{16}{7}\sum_{i=0}^{n} \rho_i = \frac{16}{7} < 3$.

Por otro lado si $x \in V$ es un punto doble no ordinario, i.e. es un punto doble cuyo cono tangente se reduce a una sola línea, entonces $\dim\left(\mathcal{M}_{x,C}/\mathcal{M}_{x,C}^2\right) = 2$ y $\mathcal{M}_{x,C} \supset \mathcal{I} \supset \mathcal{M}_{x,C}^2$ donde $\mathcal{I}$ es el ideal del cono tangente en x. Elegimos coordenadas $(X_0, \ldots, X_n)$ tales que

i. $X_0(x) \neq 0$

ii. $v = X_1/X_0$ y $u = X_2/X_0$ generan $\mathcal{M}_{x,C}/\mathcal{M}_{x,C}^2$

iii. $u \in \mathcal{I}$ tal que $u^2 \in \mathcal{M}_{x,C}^3$

iv. $X_3/X_0, \ldots, X_n/X_0 \in \mathcal{M}_{x,C}^2$

Entonces si

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} t^4 & & & & & 0 \\ & t^2 & & & & \\ & & t & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

el ideal asociado es $\mathcal{I} = (t^4 X_0, t^2 X_1, t X_2, X_3, \ldots, X_n)$. Pero $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1 \times X}/\mathcal{I}$ está soportado solo en el punto $(0, x)$ así $e(\mathcal{I})$ es nuevamente la multiplicidad de Hilbert Samuel y es al menos la multiplicidad del ideal posiblemente más grande $\mathcal{I}' = \left(t^4, t^2 v, tu, \mathcal{M}_{x,C}^2\right)$. Si $\mathcal{I}$ es el ideal $\left(t^4, \mathcal{M}_{x,C}^2\right)$, entonces como por iii)

$$\begin{aligned} \left(t^2 v\right)^2 &= t^4 v^2 \in \mathcal{I}^2 \\ (tu)^4 &= t^4 \left(u^2\right)^2 \in t^4 \left(\mathcal{M}_{x,C}^3\right)^2 \subset \mathcal{I}^4 \end{aligned}$$

$\mathcal{I}'$ es entero sobre $\mathcal{I}$. Así que

$$e(\mathcal{I}) \geq e\left(\mathcal{I}'\right) = e(I) = (4)(2)\, e(\mathcal{M}_{x,C}) = 16 = \frac{16}{7} \sum_{i=0}^{n} \rho_i$$

como se requería.

5.3 Dos problemas de interés

Como se mencionó en la introducción, este trabajo es el punto de partida, para un trabajo posterior: el dar respuestas a las dos cuestiones siguientes:

(a) Si en el esquema de Hilbert no se polariza por ω, sino por una gavilla invertible $\mathcal{H}$ amplia. ¿ Cuáles son ahora nuestras variedades estables e inestables ?

(b) Determinar las variedades de dimensión tres que son inestables ó semiestables , a partir de los criterios establecidos por Mumford y Gieseker sin cambiar la gavilla.

Referencias

[**At**] Atiyah Michael F. y MacDonald Ian Grant.: *Introducción al Algebra Conmutativa.* Reverté (1989).

[**Bo**] Borel, A.: *Linear Algebraic Groups.* Graduate Text in Math. **126**, Springer Verlag Berlin-Hedelberg-New York (1991).

[**De-Mu**] Deligne, P. and Mumford, D.-*The irreducibility of the space of curves of given genus.* Publ. Matn. IHES **36** (1969),75-110.

[**Fo**] Formanek, E. and Procesi, C.: *Mumford's conjecture for the general linear group.* Adv. in Math. (1976).

[**Fu**] Fulton William.:*Algebraic Curves.* Addison-Wesley P.C.I. (1969).

[**Gi-I**] Gieseker, D.: *Global moduli for surfaces of general type.* Invent. Math. **43** (1977),233-282.

[**Gi-II**] Gieseker, D.:*Moduli of curves.* TIRF Lectures Notes **69** Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, and Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[**Gre**] Green, M.:*The equation defining Chow varieties.* Duke Math. J. **53** (733-747). (1986).

[**Gr-Di**] Grothendieck, A. and Dieudonné, J.: *Eléments de Géométrie Algébrique.* I. Grundlehren **166** (1971)

[**Gr**] Grothendieck, A.:*Techniques de construction et théorémes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schémas de Hilbert*, Sém. Bourbaki **221** (1960-61). In: Fondements de la Géométrie Algébrique. Sém. Bourbaki, Secrétariat, Paris (1962).

[**Hab**] Haboush, W.: *Reductive groups are geometrically reductive.* Annals of Math. **102** (1975).

[**Ha**] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry.* Graduate Text in Math. **52** Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1977).

[**Hu**] Humpreys, J: *Linear Algebraic Groups.* Graduate Text in Math. **21**, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1975).

[**Ja**] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra vol. III.* G.T.M., **32** Springer-Verlag (1964).

[**Ku**] Kundsen, F.: *Proyectivity of space of stable curves.* Part. I: Div. and Det. Math. Scand. **39** (1976).

[**La**] Lang, S.: *Algebra.* Aguilar (1973).

[**Mu-I**] Mumford, D.: *Geometric Invariant Theory.* Second enlarged edition: Mumford, D. and Fogarty, J.: Ergebnise **34** Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[**Mu-II**] Mumford D.: *Stability of projective varieties.* L'Ens. Mathematics, **23**, (1977).

[**Ne**] Newstead, P. E.: *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces.* TIFR Lecture Notes **51** (1978). Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, and Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[**Po**] Popp, H.: *Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties.* Lectures Notes in Math. **620**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).

[**Ra**] Ramanujan, C.P.: *On a geometric interpretation of multiplicity.* Inv. Math., **22** (1973).

[**Ri**] Riemann B.: *Theorie der Abel'schen Funktionen.* Jour. Reine angew. Math. **54**, 115-155 (1857).

[**Sa**] Samuel, P.: *Méthodes d'algébre abstraite en géométrie algébrique.* Springer Verlag **23**, (1955).

[**Se**] Serre, J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents.* Annals of Math. **61** (1955).

[**Ses-I**] Seshadri, C. S.: *Mumford's conjeture for Gl_2 and applications.* Proc. Int. Colloq. on Alg. Geom., Oxford University Press, **347** (1968).

[**Ses-II**] Seshadri, C. S.: *Quotient spaces modulo reductive algebraic groups.* Ann. of Math. **95** (1972), 511-556.

[**Ses-III**] Seshadri, C. S.: *Geometric reductivity over an arbitrary base.* Adv. in Math. **26**,225 (1977)

[**Vi**] Viehweg, E.: *Quasi-projective Moduli for polarized manifolds.* (Preprint) Essen, Germany (1994). Springer Verlag, Berlin- Heidelberg-New York (1995).

[**Za-Sa**] Zariski Oscar y Samuel Pierre.- *Commutative Algebra. Vol I,II.* G.T.M. **28, 29**, Springer-Verlang (1960).