



Universidad Autónoma Metropolitana

IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

DESESTACIONALIZACION POR

EXTRACCION DE SEÑAL

T E S I S

Que para obtener el Grado de
MAESTRIA EN MATEMATICAS

p r e s e n t a

César Emilio Contreras Piedragil

Asesor: VICTOR M. GUERRERO

México, D. F.

Noviembre de 1990

U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

DESESTACIONALIZACION

POR

EXTRACCION DE SEÑAL

CESAR E. CONTRERAS PIEDRAGIL

INDICE

| | | |
|---------------|---|-----|
| CAPITULO I- | INTRODUCCION | 1 |
| CAPITULO II- | EXTRACCION DE SEÑAL | 9 |
| | II.1- SUPUESTOS | 9 |
| | II.2- ESTIMADORES | 11 |
| | II.3- ESPACIO DE ESTADOS Y FILTRO DE KALMAN | 21 |
| CAPITULO III- | CONDICIONES INICIALES | 62 |
| | III.1- SISTEMA MINIMO DIMENSIONAL | 62 |
| | III.2- SISTEMA ESTABLE, (F,H) DETECTABLE Y (F,D) CONTROLABLE | 65 |
| | III.3- (F,H) DETECTABLE Y (F,D) CONTROLABLE | 67 |
| | III.4- (F,D) CONTROLABLE | 88 |
| CAPITULO IV- | MODELOS | 93 |
| | IV.1- DESCOMPOSICION CANONICA | 93 |
| | IV.2- ESTIMACION DE LA DESCOMPOSICION CANONICA | 102 |
| CAPITULO V- | EJEMPLOS | 107 |

Indice de notación

| | | |
|--------------|-----------|--|
| ■ | significa | que la demostración ha terminado |
| → | " | convergencia |
| $\{a_t\}$ | es | un proceso de ruido blanco cuya varianza es σ^2 |
| $\{b_{it}\}$ | " | un proceso de ruido blanco cuya varianza es σ_1^2 |
| • | " | el producto Kronecker |

CAPITULO I

INTRODUCCION

La desestacionalización de series de tiempo no es en realidad más que uno de los varios enfoques estadísticos que existen para analizar una serie de tiempo. La idea básica que sustenta a esta metodología de análisis, es que la serie observada está constituida por varias componentes que pueden, en un momento dado, ser separadas de la serie original. En este capítulo se indican algunas ideas generales acerca de la desestacionalización que aparecen originalmente en Guerrero (1983a) y Bell y Hillmer (1984).

A manera de presentación del desarrollo histórico que han seguido los métodos para desestacionalizar series de tiempo, conviene hacer mención a la idea sostenida por Nerlove, Grether y Carvalho (1979) acerca de que las series de tiempo bien podrían visualizarse como constituidas por varias componentes no-observables. Dichas componentes comúnmente se utilizan para caracterizar los distintos movimientos que puede presentar una serie, como son: la tendencia, el ciclo, la estacionalidad y el movimiento irregular.

Esta idea de las componentes no-observables parece haber aparecido dentro del análisis económico en el periodo de 1825 a 1875; no obstante, la misma conceptualización había sido utilizada previamente en estudios de astronomía y meteorología. Según Persons (1919), las series de tiempo están constituidas por cuatro componentes, que él asoció con las siguientes fluctuaciones:

- i) una tendencia a largo plazo, que constituye de hecho el elemento de crecimiento de la serie,
- ii) un movimiento cíclico con forma de onda, superimpuesto en la tendencia a largo plazo,

- iii) un movimiento estacional dentro del año, y
- iv) una variación residual causada por situaciones que afectan a las series de manera individual.

Persons no fué el primero en desestacionalizar una serie de tiempo o especificar las componentes, sin embargo, es el primero en proponer un método que se consideró adecuado para desestacionalizar una serie de tiempo, a partir del cual diversas metodologías se han desarrollado con el propósito de desestacionalizar series de tiempo. Los modelos básicos, que muestran explícitamente la relación que guardan las componentes de una serie observada Y_t son: el multiplicativo $Y_t = S_t \cdot N_t$ o el aditivo $Y_t = S_t + N_t$, en donde S_t , N_t son las componentes estacional y no-estacional, respectivamente. Donde la componente no-estacional puede a su vez descomponerse en las componentes tendencia-ciclo e irregular. A partir de estos modelos básicos, el problema de la desestacionalización se convierte en la estimación de las componentes para cada uno de los periodos de observación.

Uno de los métodos principales que se ha utilizado para desestacionalizar series es el Método de Razón a Promedio Móvil, este método es comúnmente adjudicado a Macaulay (1931). Es notorio que en las primeras propuestas de métodos para ajuste estacional, un elemento fundamental era que los cálculos involucrados fueran fáciles de realizar; a últimas fechas, sin embargo, esto ha perdido relevancia debido a la aparición de la computadora. Así, en 1954, Shiskin inició el trabajo de instrumentación computacional de un método para desestacionalizar series de tiempo masivamente, lo cual resultó ser el primer método de la Oficina del Censo de los Estados Unidos (Census Method I) el cual no era más que un pequeño refinamiento del método de razón a promedio móvil (véase Kallek, 1978); posteriormente apareció el Census Method II, al cual se le estudió empíricamente entre los años de 1955 y 1965, dando origen a las variantes experimentales X-1 a X-11; en particular la variante X-11 aparece descrita en Shiskin, Young y Musgrave (1967). Este método, cabe mencionar, era

utilizado a principios de la década de los 60's por la mayoría de los países industrializados, pero su uso era completamente mecánico, ya que se carecía del entendimiento de por qué se hacía tal o cual cosa. Una vez que la gente empezó a cuestionar la validez del método, surgieron enfoques y métodos alternativos. A los cuales se hará referencia como métodos de Ajuste Estacional Basados en Modelos.

Los métodos de ajuste estacional basados en modelos generalmente usan una descomposición aditiva, $Y_t = S_t + N_t$ o una descomposición aditiva para alguna transformación (como $\ln Y_t$), y hacen uso de modelos estadísticos para Y_t , S_t y N_t . El modelo para Y_t puede ser estimado de los datos observados, pero como S_t y N_t no son observados, sus modelos dependen de suposiciones arbitrarias. Los distintos métodos difieren en el tipo de modelo ajustado a las observaciones Y_t 's y en los supuestos utilizados en especificar modelos para S_t y N_t . S_t y N_t son estimados ya sea directamente cuando se ajusta el modelo para Y_t (Métodos de Regresión) ó después de ajustar el modelo para Y_t mediante el uso de la teoría de EXTRACCION DE SEÑAL.

Los Métodos de Regresión se aplican generalmente en el supuesto de que la estacionalidad, y en ocasiones también la tendencia, pueden representarse de manera determinista mediante funciones del tiempo. Para ello es común representar a la tendencia mediante una curva polinomial y a la estacionalidad mediante funciones periódicas (combinaciones de senos y cosenos) o variables artificiales. Los métodos de regresión fueron propuestos por Hart (1922), Snow (1923), Fisher (1937), Mendershausen (1939), Cowden (1942), Jones (1943), Lovell (1963, 1967), Jorgenson (1964, 1967) y Stephenson y Farr (1972), entre otros. Los métodos de regresión han tenido poca aceptación para realizar ajuste estacional debido a que requieren de una especificación matemática explícita para la componente tendencia-ciclo y la componente estacional.

Actualmente, dentro de los métodos de análisis de series de tiempo, se encuentran dos categorías fundamentales que se conocen como: i) Análisis en el Dominio del Tiempo y ii) Análisis Espectral o en el Dominio de las Frecuencias. Dentro de la primera categoría sobresale el análisis basado en modelos ARIMA, cuya utilidad en la práctica creció notablemente a raíz del trabajo desarrollado por Box y Jenkins en la década de los 60's, el cual culminó con la publicación de su libro (Box y Jenkins, 1976). Por su lado, las técnicas que se utilizan en el análisis espectral requieren una mayor familiaridad con las matemáticas y, por lo tanto, su utilización en la práctica no es tan común como la que se da a las técnicas de análisis en el dominio del tiempo. Sin embargo, los dos tipos de análisis vienen a ser simplemente dos maneras distintas de ver al mismo fenómeno, donde cada una de dichas maneras permiten apreciar ciertas características con mayor o menor profundidad. Además, el desarrollo tan acelerado que han tenido ambos tipos de análisis a últimas fechas, proporciona evidencia de la utilidad que tales metodologías brindan en la práctica (véase Granger y Newbold, 1986). Varios autores han sugerido métodos de ajuste estacional que involucre la construcción de un modelo ARIMA a la serie observada Y_t y usar éste con algunos supuestos para determinar modelos ARIMA para las componentes, que sean consistentes con el modelo ARIMA de la serie observada y emplear la teoría de EXTRACCION DE SEÑAL para estimar las componentes, Box, Hillmer y Tiao (1978), Burman (1980) y Hillmer y Tiao (1982), entre otros.

El problema de EXTRACCION DE SEÑAL es estimar la señal S_t en $Y_t = S_t + N_t$ cuando la observación Y_t contiene un ruido N_t . El ajuste estacional de una serie puede ser visto como un problema de extracción de señal, ya que en ambos casos se observa $Y_t = S_t + N_t$ donde S_t y N_t son componentes no observables, las cuales se desean estimar usando la serie observada Y_t . En extracción de señal S_t y N_t son "señal" y "ruido", mientras que en el ajuste estacional pueden ser identificadas como "estacional" y "no-estacional". El problema tiene origen en el campo de la ingeniería de comunicaciones. En este campo hay una razón física que implica Y_t

= $S_t + N_t$. Aquí, S_t es una señal emitida, y la señal recibida Y_t , es perturbada por un ruido N_t ocasionado por el medio de transmisión. El problema es recobrar la señal emitida, intentando remover el ruido N_t . En la ingeniería de comunicaciones es importante notar que: (a) el interés es la señal y (b) la descomposición aditiva tiene sentido. Por su lado, en el ajuste estacional se tiene lo siguiente:

a) Razones para desestacionalizar una serie

Posiblemente la razón más importante para llevar a cabo el ajuste estacional de una serie, sea la que propuso Persons en 1919 de que cada una de las componentes de una serie es causada por fenómenos distintos. Esta misma idea la elabora Granger (1978) en particular en lo que respecta a la componente estacional y encuentra que existen al menos cuatro posibles causas de las fluctuaciones estacionales; dichas causas, según Granger, no tienen por qué ser completamente ajenas o distintas entre sí. La primera de tales causas es el calendario mismo, es decir, es el hecho de que algunas festividades estén fijas en determinadas fechas del calendario o bien el que los meses tengan más o menos días de acuerdo con el calendario; la segunda causa es que las instituciones tienden a fijar fechas del calendario del año para realizar ciertas actividades, por ejemplo los periodos de vacaciones escolares o bien los periodos de pago de impuestos que son fijados por las autoridades correspondientes; la tercer causa es el clima que, según si es temporada de lluvia o no, determina las cosechas (el clima, o dicho de otra manera, las estaciones del año, podrían pensarse como las causas por excelencia de la estacionalidad y de aquí que se derive el término mismo); finalmente, la cuarta causa señalada por Granger, son las expectativas de fluctuaciones estacionales, ya que por ejemplo la elevada producción de juguetes en los meses previos a la Navidad es causada por la expectativa de ventas elevadas en diciembre. Estas cuatro causas, quizá con otras más, pueden ocurrir simultáneamente para producir las fluctuaciones estacionales que se observan en una serie de tiempo; lo importante a notar aquí es

que tales causas bien pueden considerarse como factores exógenos, de naturaleza no-económica, que influyen sobre la variable que se estudia y que muchas veces oscurecen las características de las series relacionadas con aspectos netamente económicos.

b) La descomposición aditiva es posible

Considerando que los modelos básicos que muestran la relación entre las componentes y la serie observada, son el aditivo o multiplicativo y este último puede expresarse como el modelo aditivo $Y'_t = S'_t + N'_t$, donde (') denota al logaritmo de la componente. Siempre es matemáticamente posible tener una descomposición aditiva (a este respecto Guerrero (1983a) propone un método para llevar a cabo la elección entre estos modelos).

A partir del método propuesto por Persons para desestacionalizar una serie de tiempo, una gran cantidad de gente ha tratado de estimar las componentes estacional, tendencia-ciclo e irregular. Dichas componentes sin embargo, no fueron definidas por Persons, quien por el contrario aceptó explícitamente que las componentes debían definirse de acuerdo con su naturaleza esencialmente empírica. La Oficina de Censos de los Estados Unidos que tiene posiblemente la mayor experiencia a nivel mundial en lo que a ajuste estacional se refiere, utiliza una definición de estacionalidad bastante limitada y referida básicamente (Kallek, 1978) a las "fluctuaciones periódicas que recurren cada año, aproximadamente en las mismas fechas y con la misma intensidad y las cuales, lo que es más importante, pueden medirse y eliminarse de la serie de tiempo en consideración". Básicamente la misma idea la manejan Shiskin (1978) y Dagum (1978), esta última señala en particular que las tres características más importantes de los fenómenos estacionales son:

"(1) el fenómeno se repite cada año con cierta regularidad, pero puede evolucionar,

- (2) el fenómeno puede medirse y separarse de las otras fuerzas que influyen en el movimiento de la serie, y
- (3) el fenómeno es causado principalmente por fuerzas no-económicas, exógenas al sistema económico y que no pueden controlarse o modificarse por los tomadores de decisiones en el corto plazo"

En lo que se refiere a la componente de tendencia, Raveh (1981) cita el diccionario de términos estadísticos que fue editado por Kendall y Buckland y en donde se encuentra que la tendencia es "un movimiento de largo plazo en una serie ordenada,...que se puede considerar, junto con las oscilaciones y la componente aleatoria, como generador de los valores observados. Una característica esencial del concepto de tendencia es que es suave durante periodos que son largos en relación con la unidad de tiempo para la cual existe un registro de observaciones. "Largo" para este propósito es algo arbitrariamente definido, así que un movimiento que es una tendencia para algún propósito, puede no serlo para otro".

En lo que respecta a las otras dos componentes, el ciclo y la irregularidad, Dagum (1978) se refiere a ellas de la siguiente manera: "el ciclo es una oscilación casi-periódica caracterizada por periodos alternantes de expansión y contracción", mientras que la componente irregular esta compuesta de "movimientos imprevisibles relacionados con eventos de toda clase...tienen apariencia aleatoria estable y pueden distinguirse de otros tipos de irregularidades, como las observaciones aberrantes, porque éstas tienen causas bien identificadas, tales como inundaciones, huelgas, etcétera"

Recientemente, esfuerzos por dar definiciones más precisas de las componentes, son basadas en consideraciones espectrales (Dominio de las Frecuencias, véase Granger y Newbold, 1986):

- 1) Una serie con componente estacional tendrá un espectro con picos en $w = 2\pi k/E$, para $k = 1, \dots, [E/2]$ ($[x]$ es el máximo entero menor o igual a x y E es el periodo estacional)
- 2) Una serie con componente de tendencia tendrá un espectro con un pico en $w = 0$ y es muy grande para w cerca de cero

El problema que se presenta con estas definiciones, es que detectan cuándo una serie presenta una componente estacional y cuándo una componente de tendencia, pero no definen dichas componentes. Sin embargo, es de importancia tener en cuenta que la causa de los picos en el espectro de la serie es la presencia de dichas componentes, lo cual es considerado por Burman (1980) y Hillmer y Tiao (1982) al proponer modelos ARIMA para explicarlas.

Debido a que los métodos basados en modelos que hacen uso de la teoría de extracción de señal, son los métodos más sólidos en lo que toca a justificación teórica, en este trabajo se presenta inicialmente los resultados más importantes de la teoría de EXTRACION DE SEÑAL para una serie de tiempo que sigue un modelo autorregresivo y de promedios móviles (un modelo ARIMA puede ser expresado en la forma de un modelo ARMA), considerando que se cuenta con una semirealización de la serie Y_t , posteriormente se presentan las CONDICIONES INICIALES de una técnica recursiva denominada filtro de kalman, para la estimación de las componentes no observables, tomando en cuenta que en la práctica únicamente se tiene una realización finita de la serie Y_t . Presentados dichos resultados, se trata el problema de la determinación de MODELOS ARMA para las componentes no observables, y finalmente se presentan EJEMPLOS de la desestacionalización de series de tiempo con esta técnica.

CAPITULO II

EXTRACCION DE SEÑAL

El problema a tratar en este capítulo consiste en obtener un estimador de la serie $\{S_t\}$ a partir de la serie observada $\{Y_t\}$, que depende del comportamiento de $\{S_t\}$ y que está perturbada por $\{N_t\}$. La relación entre estas series se supone que está dada por:

$$Y_t = S_t + N_t \quad (2.1.1)$$

El problema de hecho consiste en "filtrar" las observaciones Y_t , con el objeto de encontrar la mejor estimación \hat{S}_t , del valor real de S_t , para cualquier t fija. Dicho problema es conocido como extracción de señal, donde $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ son procesos que reciben el nombre de señal y ruido, respectivamente.

El presente capítulo se divide en tres secciones; la primera expone los supuestos bajo los cuales el problema de extracción de señal se tratará, los cuales deben tomarse en cuenta a lo largo del trabajo; la segunda, considera dos situaciones que se presentan en dicho problema, la primera de ellas surge al suponer que el proceso observado es estacionario y se estudia siguiendo el trabajo de Whittle (1983). Para la segunda situación se supone que el proceso es no estacionario, y aquí se expone una extensión del caso estacionario propuesta por Pierce (1979), la cual se estudia en la tercera sección, ya que el problema se transforma en uno que involucra un sistema de ecuaciones en diferencias y se recurre a conceptos que pertenecen a la teoría de control (Burrige y Wallis, 1988).

II.1- SUPUESTOS

Supóngase que se cuenta con el conjunto de información $\{Y_t, | t' \leq t + m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$ del proceso $\{Y_t\}$, que puede

escribirse como en (2.1.1), donde $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ son procesos estocásticos mutuamente independientes, con media cero. Estas son componentes no observables de la serie $\{Y_t\}$, que se supone son generadas por los siguientes modelos autorregresivos y de promedios móviles (ARMA):

$$\phi_S(B)S_t = \theta_S(B)b_{1t} \quad (2.1.2a)$$

$$\phi_N(B)N_t = \theta_N(B)b_{2t} \quad (2.1.2b)$$

en estos modelos B representa al operador de retraso, esto es $BY_t = Y_{t-1}$. Además se considera que las parejas $\{\phi_S(B), \theta_S(B)\}$ y $\{\phi_N(B), \theta_N(B)\}$ no tienen raíces comunes, y las raíces de los polinomios autorregresivos $\phi_S(B)$ y $\phi_N(B)$ se encuentran sobre o fuera del círculo unitario. Por su lado $\{b_{1t}\}$ y $\{b_{2t}\}$ son procesos de ruido blanco Gaussianos, i.e. sucesiones de variables mutuamente independientes distribuidas como $N(0, \sigma_1^2)$ y $N(0, \sigma_2^2)$ respectivamente.

Si los polinomios $\phi_S(B)$ y $\phi_N(B)$ tienen raíces sobre el círculo unitario, entonces se pueden expresar como: $\phi_S(B) = \phi_S^*(B)\delta_S(B)$ y $\phi_N(B) = \phi_N^*(B)\delta_N(B)$, donde los polinomios $\phi_S^*(B)$ y $\phi_N^*(B)$ tienen sus raíces fuera, mientras que los polinomios $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ tienen sus raíces sobre el círculo unitario.

De esta manera los modelos (2.1.2a) y (2.1.2b) se pueden escribir como:

$$\phi_S^*(B)\delta_S(B)S_t = \theta_S(B)b_{1t} \quad (2.1.3a)$$

$$\phi_N^*(B)\delta_N(B)N_t = \theta_N(B)b_{2t} \quad (2.1.3b)$$

a partir de los cuales se obtienen las expresiones:

$$\delta_S(B)S_t = \frac{\theta_S(B)}{\phi_S^*(B)} b_{1t} = \psi_S(B)b_{1t} \quad (2.1.4a)$$

$$\delta_N(B)N_t = \frac{\theta_N(B)}{\phi_N^*(B)} b_{2t} = \psi_N(B)b_{2t} \quad (2.1.4b)$$

donde los polinomios $\psi_S(Z)$ y $\psi_N(Z)$ son absolutamente convergentes para $|Z| \leq 1$. Nótese que $\{\delta_S(B)S_t\}$ y $\{\delta_N(B)N_t\}$ son procesos estacionarios, dado que $\phi_S^*(B)$ y $\phi_N^*(B)$ son polinomios cuyas raíces se encuentran fuera del círculo unitario. Esto permite, por el teorema de la descomposición de Wold (1954), representar a $\delta_S(B)S_t$ y $\delta_N(B)N_t$ como procesos de promedios móviles (ecuaciones (2.1.4a) y (2.1.4b)), es decir, no existen componentes deterministas en dichos procesos.

De los modelos (2.1.4a) y (2.1.4b) se deduce que $\{Y_t\}$ se puede representar como un modelo de la forma:

$$\delta(B)Y_t = \psi(B)a_t \quad (2.1.5a)$$

con

$$\delta(B) = \delta_S(B)\delta_N(B) \quad (2.1.5b)$$

y

$$\psi(B)a_t = \delta_N(B)\psi_S(B)b_{1t} + \delta_S(B)\psi_N(B)b_{2t} \quad (2.1.5c)$$

donde $\delta(B)$ es un polinomio con raíces sobre el círculo unitario y $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco distribuido como $N(0, \sigma^2)$.

II.2 - ESTIMADORES

Para obtener estimadores de S_t y N_t a partir de la serie $\{Y_t\}$, o sea con la información $\{Y_{t'} \mid t' \leq t + m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$, se consideran dos posibles situaciones:

- a) La serie $\{Y_t\}$ es estacionaria
- b) La serie $\{Y_t\}$ es no estacionaria

En ambos casos se indica cómo obtener el estimador correspondiente a S_t y de igual forma se puede obtener el estimador de N_t .

Caso a) La serie $\{Y_t\}$ es estacionaria

Si se considera a la serie $\{Y_t\}$ como estacionaria, entonces se sigue que los polinomios cuyas raíces se encuentran sobre el círculo unitario son idénticamente la unidad, es decir

$$\delta(B) = \delta_S(B) = \delta_N(B) = 1 \quad (2.2.1)$$

y las expresiones (2.1.4a), (2.1.4b) y (2.1.5a) se transforman respectivamente en:

$$S_t = \psi_S(B)b_{1t} \quad (2.2.2a)$$

$$N_t = \psi_N(B)b_{2t} \quad (2.2.2b)$$

$$Y_t = \psi(B)a_t \quad (2.2.2c)$$

Sean $\{Y_t\}$ variables aleatorias con segundo momento finito, $E(Y_1)^2 < \infty$, y sea $L = L\{Y_t\}$ la colección de todas las combinaciones lineales de $\{Y_t\}$. Una variable aleatoria $W \in L$ es de la forma:

$$W = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j Y_{t-j} \quad \text{con } \gamma_j \in \mathbb{R} \quad (2.2.3)$$

Se tiene también que $G = G\{Y_t\}$ es la colección de todas las funciones (medibles) de $\{Y_t\}$, es decir, son funciones $g\{Y_t\}$. Nótese entonces que $L \subset G$.

Sea S_t alguna variable aleatoria con segundo momento finito. Se define un estimador de S_t , dada las variables $\{Y_t\}$, como una

función $\tilde{S}_t = g\{Y_t, \}$. Si $g \in L$, es decir, si \tilde{S}_t es de la forma:

$$\tilde{S}_t = \sum_{j=-m}^{\infty} \gamma_{s_j} Y_{t-j} \quad (2.2.4)$$

se dice entonces que \tilde{S}_t es un estimador lineal de S_t . En cualquier caso se define el error cuadrático medio (ECM) como $E(S_t - \tilde{S}_t)^2$.

El problema de interés es el de determinar el mejor estimador de S_t , es decir, el estimador que minimiza el ECM. De hecho, se pueden considerar dos problemas:

- i) Determinar el mejor estimador lineal $\hat{S}_t \in L$ de S_t
- ii) Determinar el mejor estimador $\tilde{S}_t \in G$ de S_t

Puesto que $L \subset G$, es claro que $E(S_t - \tilde{S}_t)^2 \leq E(S_t - \hat{S}_t)^2$; es decir, en general \tilde{S}_t es un mejor estimador (de S_t) que \hat{S}_t . Un caso importante en el que $\hat{S}_t = \tilde{S}_t$ (cuando el mejor estimador es lineal) es el siguiente:

TEOREMA 2.2.1 (Gikhman y Skorohod, 1974): Si S_t y $\{Y_t, | t' \leq t + m$, con $m \geq 0$ finita} son variables con distribución conjunta normal, media cero y segundo momento finito, entonces:

$$\tilde{S}_t = E(S_t | \{Y_t, \}) \quad (2.2.5a)$$

equivalentemente, \tilde{S}_t está caracterizado por

- i) $\tilde{S}_t = \hat{S}_t$
- ii) $\epsilon_t = S_t - \tilde{S}_t$ no está correlacionada con $Y_t, \forall t' \leq t + m$, donde $m \geq 0$ finita.

DEMOSTRACION: Se desea determinar el mejor estimador \tilde{S}_t de S_t mediante el conjunto de variables $\{Y_t, | t' \in A\}$ donde $A = \{t' \leq$

$t+m$, con $m \geq 0$ finita). Esto es, encontrar una función $g\{Y_t, | t' \in A\}$ tal que minimice el ECM. Entonces, considérese la σ -álgebra $\tilde{\mathcal{Y}} = \sigma\{Y_t, | t' \in A\}$ generada por el conjunto de variables aleatorias $\{Y_t, | t' \in A\}$. Luego, $g\{Y_t, | t' \in A\}$ es una variable aleatoria con segundo momento finito y $\tilde{\mathcal{Y}}$ -medible. Así, si $\xi = E\{S_t | \tilde{\mathcal{Y}}\}$, el ECM se escribe como

$$\begin{aligned} \delta &= E\{S_t - g\{Y_t, | t' \in A\}\}^2 \\ &= E\{S_t - \xi + \xi - g\{Y_t, | t' \in A\}\}^2 \\ &= E\{S_t - \xi\}^2 + 2E\{(S_t - \xi)(\xi - g\{Y_t, | t' \in A\})\} \\ &\quad + E\{\xi - g\{Y_t, | t' \in A\}\}^2 \end{aligned} \tag{2.2.5b}$$

ya que ξ y $g\{Y_t, | t' \in A\}$ son $\tilde{\mathcal{Y}}$ -medibles, se tiene

$$\begin{aligned} E\{(S_t - \xi)(\xi - g\{Y_t, | t' \in A\})\} &= EE\{(S_t - \xi)(\xi - g\{Y_t, | t' \in A\}) | \tilde{\mathcal{Y}}\} \\ &= E\{\xi - g\{Y_t, | t' \in A\}\} E\{(S_t - \xi) | \tilde{\mathcal{Y}}\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.5c}$$

debido a que

$$E\{(S_t - \xi) | \tilde{\mathcal{Y}}\} = E\{S_t | \tilde{\mathcal{Y}}\} - \xi = 0 \tag{2.2.5d}$$

Entonces (2.2.5b) se escribe

$$\delta = E\{S_t - \xi\}^2 + E\{\xi - g\{Y_t, | t' \in A\}\}^2$$

que alcanza su mínimo cuando $\xi = g\{Y_t, | t' \in A\}$. Por lo tanto, el mejor estimador de S_t es $\tilde{S}_t = E\{S_t | \tilde{\mathcal{Y}}\}$ y además se sabe que éste, es único en casi todas partes (Ash, 1972).

Por otro lado, $\varepsilon_t = S_t - \tilde{S}_t$ no está correlacionada con Y_t , para toda $t' \in A$, esto es

$$E\{(S_t - \tilde{S}_t)Y_t, \} = EE\{(S_t - \tilde{S}_t)Y_t | \tilde{\mathcal{Y}}\}$$

$$\begin{aligned}
&= E\{Y_t\} E\{(S_t - \tilde{S}_t) | \mathfrak{F}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo cual se obtiene de (2.2.5d).

Ahora, considérese el subespacio cerrado L del espacio de Hilbert \mathfrak{L}_2 , sobre algún espacio de probabilidad. Este subespacio L consta de todas las variables aleatorias con segundo momento finito, que se obtienen como una combinación lineal de $\{Y_t, | t' \in A\}$. El mejor estimador lineal de S_t (\hat{S}_t) es un elemento de L , i.e.

$$\delta = E\{S_t - \hat{S}_t\}^2 = E\{S_t - S'_t\}^2$$

para cualquier $S'_t \in L$. Luego, de la teoría de espacios de Hilbert, se sabe que \hat{S}_t es único y es la proyección de S_t sobre L (Ash, 1972). Esto es, $E\{(S_t - \hat{S}_t)S'_t\} = 0$ para toda $S'_t \in L$. De donde se sigue que \hat{S}_t es un estimador insesgado ($E(\hat{S}_t) = E(S_t)$), ya que el $1 \in L$. Además que $\varepsilon_t = S_t - \hat{S}_t$ es no correlacionada con Y_t , para toda $t' \in A$ ($E(S_t - \hat{S}_t)Y_t = 0$). Como S_t y $\{Y_t, | t' \in A\}$ son variables con distribución normal se tiene que ε_t y Y_t , son independientes. De modo que ε_t no depende de la σ -álgebra \mathfrak{F} y

$$\begin{aligned}
E\{S_t | \mathfrak{F}\} &= E\{S_t - \hat{S}_t + \hat{S}_t | \mathfrak{F}\} \\
&= E\{S_t - \hat{S}_t\} + \hat{S}_t = \hat{S}_t
\end{aligned}$$

luego, $\hat{S}_t = \tilde{S}_t$ ■

Este teorema permite restringir la búsqueda del mejor estimador de S_t al conjunto de estimadores lineales:

$$\hat{S}_t = E(S_t | \{Y_t, \}) = \sum_{j=-m}^{\infty} \gamma_{sj} Y_{t-j} = \gamma_s(B)Y_t \quad (2.2.6a)$$

donde

$$\gamma_S(B) = \sum_{j=-m}^{\infty} \gamma_{Sj} B^j \quad (2.2.6b)$$

Nótese que una vez obtenido el estimador de la componente S_t , el estimador de la componente N_t se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} \hat{N}_t &= Y_t + \hat{S}_t \\ &= Y_t - \gamma_S(B)Y_t \\ &= \{1 - \gamma_S(B)\}Y_t \\ &= \gamma_N(B)Y_t \end{aligned} \quad (2.2.7a)$$

donde

$$\gamma_N(B) = \sum_{j=-m}^{\infty} \gamma_{Nj} B^j \quad (2.2.7b)$$

Para obtener específicamente el polinomio $\gamma_S(B)$ que proporciona el mejor estimador de S_t , siguiendo a Whittle (1983), se calculan los coeficientes del polinomio utilizando el criterio de mínimos cuadrados, para lo cual es necesario primero definir la función generadora de covarianzas.

DEFINICION: Las funciones generadoras de covarianzas (fgc) o espectro en el dominio de las frecuencias (cuando $Z = e^{i\omega}$) de $\{S_t\}$, $\{N_t\}$ y $\{Y_t\}$ se definen como:

$$f_S(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k^{(SS)} Z^k = \sigma_1^2 |\psi_S(Z)|^2 \quad (2.2.8a)$$

$$f_N(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k^{(NN)} Z^k = \sigma_2^2 |\psi_N(Z)|^2 \quad (2.2.8b)$$

$$f_Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k^{(YY)} Z^k = \sigma^2 |\psi(Z)|^2 \quad (2.2.8c)$$

donde $\lambda_k^{(SS)} = E(S_t S_{t-k})$, $\lambda_k^{(NN)} = E(N_t N_{t-k})$ y $\lambda_k^{(YY)} = E(Y_t Y_{t-k})$.

Por convención, se entenderá $|g(Z)|^2 = g(Z)g(Z^{-1})$, que en forma de

operadores se escribe $|g(B)|^2 = g(B)g(F)$, donde F es el operador de adelanto, tal que $FY_t = B^{-1}Y_t = Y_{t+1}$.

TEOREMA 2.2.2: Si S_t , N_t y $\{Y_t, | t' \leq t + m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$ son variables con distribución conjunta normal, con media igual a cero, segundo momento finito y $\{Y_t\}$ se escribe como en (2.1.1). Entonces el polinomio $\gamma_s(Z)$ en (2.2.6b) está dado por:

$$\gamma_s(Z) = \frac{1}{\sigma^2 \psi(Z)} \left[\frac{f_s(Z)}{\psi(Z^{-1})} \right]_{-m} \quad (2.2.9a)$$

donde:

$$[g(Z)]_{-m} = \sum_{j=-m}^{\infty} g_j Z^j \quad (2.2.9b)$$

DEMOSTRACION: Para demostrar este resultado, si se considera que $m = 0$, entonces se tiene:

$$\hat{S}_t = \gamma_s(B)Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{st} Y_{t-j} \quad (2.2.10)$$

Al usar el criterio de mínimos cuadrados para minimizar $J = E(S_t - \hat{S}_t)^2$ con respecto a los coeficientes γ_{sj} se obtienen las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{j-i}^{(yy)} \gamma_{si} = \lambda_j^{(sy)} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.11a)$$

donde

$$\lambda_j^{(sy)} = E(S_t Y_{t-j}) \quad (2.2.11b)$$

nótese que

$$\begin{aligned} E(S_t Y_{t-j}) &= E\{S_t (S_{t-j} + N_{t-j})\} \\ &= E(S_t S_{t-j} + S_t N_{t-j}) \\ &= E(S_t S_{t-j}) + E(S_t N_{t-j}) \\ &= \lambda_j^{(ss)} + 0 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

puesto que S_t y N_t son independientes con media cero, luego la ecuación (2.2.11a) se expresa como

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{j-i}^{(YY)} \gamma_{Si} = \lambda_j^{(SS)} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.13)$$

Ahora bien, si se multiplica esta ecuación por Z^j y se suma para todos los enteros j , se deduce

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{j-i}^{(YY)} \gamma_{Si} \right] Z^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j^{(SS)} Z^j \quad (2.2.14)$$

que puede escribirse como:

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j^{(YY)} Z^j \right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{Si} Z^i \right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j^{(SS)} Z^j + h(Z) \quad (2.2.15)$$

sustituyendo (2.2.8a) y (2.2.8c), se tiene:

$$f_Y(Z) \gamma_S(Z) = f_S(Z) + h(Z) \quad (2.2.16)$$

la cual puede expresarse como:

$$\sigma^2 |\psi(Z)|^2 \gamma_S(Z) = \sigma^2 \psi(Z) \psi(Z^{-1}) \gamma_S(Z) = f_S(Z) + h(Z) \quad (2.2.17)$$

donde $h(Z)$ es una serie de potencias negativas, siendo ésta necesaria para obtener la igualdad, puesto que (2.2.11a) es válida sólo para $j \geq 0$. De la última ecuación se sigue que

$$\sigma^2 \psi(Z) \gamma_S(Z) = \frac{f_S(Z)}{\psi(Z^{-1})} + \frac{h(Z)}{\psi(Z^{-1})} \quad (2.2.18)$$

en ésta $\sigma^2 \psi(Z) \gamma_S(Z)$ no tiene potencias negativas de Z , y en cambio $\frac{h(Z)}{\psi(Z^{-1})}$ tiene únicamente potencias negativas de Z , considerando esto, (2.2.18) es igual a

$$\sigma^2 \psi(Z) \gamma_S(Z) = \left[\frac{f_S(Z)}{\psi(Z^{-1})} \right]_0 \quad (2.2.19)$$

Finalmente, al despejar $\gamma_S(Z)$ se obtiene:

$$\gamma_S(Z) = \frac{1}{\sigma^2 \psi(Z)} \left[\frac{f_S(Z)}{\psi(Z^{-1})} \right]_0 \quad (2.2.20)$$

con lo cual el resultado queda probado para el caso $m = 0$. Ahora, si $m \neq 0$ entonces se puede escribir:

$$\hat{S}_t = \sum_{j=-m}^{\infty} \gamma_{Sj} Y_{t-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{Si} Y_{t-i} \quad i = j - m \quad (2.2.21)$$

y todo el argumento anterior continúa siendo válido. ■

Análogamente N_t puede estimarse como

$$\hat{N}_t = \gamma_N(B) Y_t = \frac{1}{\sigma_a^2 \psi(B)} \left[\frac{f_N(B)}{\psi(F)} \right]_{-m} Y_t \quad (2.2.22)$$

Caso b) La serie $\{Y_t\}$ es no estacionaria

En este caso, la serie $\{Y_t\}$ sigue un modelo dado por (2.1.5a), donde el polinomio cuyas raíces están sobre el círculo unitario es diferente a la unidad, esto es, $\delta(B) \neq 1$ y las componentes de Y_t siguen los modelos (2.1.4a) y (2.1.4b), donde al menos uno de los polinomios $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ es diferente a la unidad.

Para obtener el estimador de S_t dada la información $\{Y_{t'}, | t' \leq t + m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$, Pierce (1979) extiende el resultado del caso

estacionario, ecuación (2.2.6a). Como en la presente situación las series $\{Y_t\}$, $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ son no estacionarias, no es posible hablar de una función generadora de covarianzas, por ello se trabaja con una extensión de ésta, llamada seudofunción generadora de covarianzas o seudoespectro (Hillmer y Tiao 1982). Para definirla, primero se escribe a S_t , N_t y Y_t como:

$$S_t = \Psi_S(B)b_{1t} \quad \text{con} \quad \Psi_S(B) = \frac{\psi_S(B)}{\delta_S(B)} \quad (2.2.23a)$$

$$N_t = \Psi_N(B)b_{2t} \quad \text{con} \quad \Psi_N(B) = \frac{\psi_N(B)}{\delta_N(B)} \quad (2.2.23b)$$

$$Y_t = \Psi(B)a_t \quad \text{con} \quad \Psi(B) = \frac{\psi(B)}{\delta(B)} \quad (2.2.23c)$$

DEFINICION: Las seudofunciones generadoras de covarianzas o seudoespectro en el dominio de las frecuencias de $\{S_t\}$, $\{N_t\}$ y $\{Y_t\}$ se definen como:

$$sf_S(Z) = \sigma_1^2 |\Psi_S(Z)|^2 \quad (2.2.24a)$$

$$sf_N(Z) = \sigma_2^2 |\Psi_N(Z)|^2 \quad (2.2.24b)$$

$$sf_Y(Z) = \sigma^2 |\Psi(Z)|^2 \quad (2.2.24c)$$

A partir de esta definición es posible extender el resultado del caso estacionario, cambiando la función generadora de covarianzas por la seudofunción generadora de covarianzas, esto es

$$\hat{S}_t = E(S_t | \{Y_t, \}) = \frac{1}{\sigma^2 \Psi(B)} \left[\frac{sf_S(B)}{\Psi(F)} \right]_{-m} Y_t \quad (2.2.25a)$$

y

$$\hat{N}_t = E(N_t | \{Y_t, \}) = \frac{1}{\sigma^2 \Psi(B)} \left[\frac{sf_N(B)}{\Psi(F)} \right]_{-m} Y_t \quad (2.2.25b)$$

II.3- ESPACIO DE ESTADOS Y FILTRO DE KALMAN

En esta sección se argumenta de acuerdo con Burrige y Wallis (1988), que la extensión propuesta por Pierce (1979) para estimar las componentes no observables de $\{Y_t\}$, en el caso no estacionario (ecuaciones (2.2.25a)-(2.2.25b)), son correctas asintóticamente. Con este propósito se representa la descomposición $Y_t = S_t + N_t$ en forma de un sistema matricial denominado MODELO DE ESPACIO DE ESTADOS. Esto permite utilizar la técnica conocida como FILTRO DE KALMAN para obtener las estimaciones correspondientes a las componentes no observables de $\{Y_t\}$, dada una realización finita de esta serie, posteriormente se procede a estudiar el comportamiento asintótico del estimador.

DEFINICION: Un Modelo de Espacio de Estados es un modelo lineal de la forma:

$$X_{t+1} = FX_t + GW_t \quad (2.3.1)$$

$$Y_t = H^T X_t + e_t \quad (2.3.2)$$

Estas expresiones son conocidas como ecuación de transición y de observación, respectivamente; X_t es el vector de estados, W_t es un vector de ruido blanco con media cero, mientras que la sucesión de e_t 's forman un proceso escalar de ruido blanco. Además la matriz de varianzas y covarianzas del vector (W_t, e_t) está dada por:

$$\text{COV} \begin{pmatrix} W_t \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$$

donde F, G, H, Q, S , y R son matrices que se consideran invariantes en el tiempo.

El modelo (2.3.1)-(2.3.2) representa el comportamiento de un sistema dinámico discreto, con entradas al sistema denotadas por W_t y salida Y_t , el cual se encuentra perturbado por un ruido e_t .

El sistema está regido por su estado interno X_t , cuyo comportamiento se da por la ecuación de transición. Al representar la descomposición de $\{Y_t\}$ como un modelo de espacio de estados, interesa conocer el estado interno del sistema, dado que las salidas de éste son conocidas. Esto proporciona estimaciones de las componentes de $\{Y_t\}$, por lo cual se enfoca el problema a la estimación de dicho estado.

Con este propósito se supone que inicialmente se cuenta con un conjunto finito de observaciones $Y_t^- = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_t\}$ de $\{Y_t\}$ y un estado inicial X_0 , con media $E(X_0) = \hat{X}_0|_{-1}$ y varianza $P_0|_{-1} = E(X_0 - \hat{X}_0|_{-1})^2$, donde X_0 es independiente de W_t y e_t para toda $t = 0, 1, \dots$. Se denotará como $\hat{g}_t|_t$ a la proyección ortogonal de g_t sobre el espacio generado por Y_t^- . De modo que se puede obtener un estimador del estado X_t como:

$$\hat{X}_t|_t = E(X_t | Y_t^-) = E(X_t | Y_{t-1}^-, \tilde{Y}_t) \quad (2.3.3)$$

$\tilde{Y}_t = Y_t - \hat{Y}_t|_{t-1}$ es la innovación de Y_t , o sea es el error de la proyección ortogonal de Y_t sobre Y_{t-1}^- , donde $\tilde{Y}_0 = Y_0$ y a partir de lo cual $E(\tilde{Y}_t) = 0$ para toda t . La proyección ortogonal (2.3.3) se puede obtener del siguiente resultado.

TEOREMA 2.3.1: Si X y Y son vectores conjuntamente distribuidos, tales que $E(X) = m_X$, $E(Y) = m_Y$, $V_{XX} = E[(X - m_X)(X - m_X)^T]$, $V_{YY} = E[(Y - m_Y)(Y - m_Y)^T]$ y $V_{XY} = E[(X - m_X)(Y - m_Y)^T]$, entonces

$$E(X | Y) = m_X + V_{XY} V_{YY}^{-1} (Y - m_Y) \quad (2.3.4)$$

es la proyección ortogonal, que se obtiene por medio de mínimos cuadrados.

DEMOSTRACION: Sea $\hat{X} = E(X | Y) = b + A Y$, si $\delta = \hat{X} - X$ se tiene

$$\begin{aligned}
E(\delta \delta^T) &= E[(b + AY - X)(b + AY - X)^T] \\
&= A V_{YY} A^T - AV_{YX} - V_{XY} A^T + V_{XX} \\
&+ (b + Am_Y - m_X)(b + Am_Y - m_X)^T \\
&= (A - V_{XY} V_{YY}^{-1}) V_{YY} (A - V_{XY} V_{YY}^{-1})^T \\
&+ V_{XX} - V_{XY} V_{YY}^{-1} V_{YX} \\
&+ (b + Am_Y - m_X)(b + Am_Y - m_X)^T \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

donde se supone la existencia de V_{YY}^{-1} . Dicha expresión se minimiza tomando

$$A' = V_{XY} V_{YY}^{-1} \quad y \quad b' = m_X - A' m_Y$$

con lo que se obtiene el resultado deseado. ■

En base al teorema anterior, se considera el vector $(Y^T, \tilde{Y}_t^T)^T$ con media cero, donde $Y^T = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{t-1})$ y \tilde{Y}_t no están correlacionados, así, la proyección ortogonal (2.3.3) se escribe como

$$\begin{aligned}
E(X_t | Y_{t-1}^-, \tilde{Y}_t) &= m_X + (V_{XY}, \theta_t) \begin{bmatrix} V_{YY}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \tilde{Y}_t \end{bmatrix} \\
&= m_X + V_{XY} V_{YY}^{-1} Y + \theta_t \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \\
&= E(X_t | Y_{t-1}^-) + \theta_t \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \\
&= \hat{X}_t |_{t-1} + \theta_t \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \quad (2.3.6a)
\end{aligned}$$

donde

$$\Sigma_t = E(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_t^T) \quad (2.3.6b)$$

y

$$\theta_t = E(X_t \tilde{Y}_t^T) \quad (2.3.6c)$$

A partir de la ecuación de observación (2.3.2), se puede expresar

la innovación de Y_t como

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_t &= Y_t - \hat{Y}_t|_{t-1} \\
 &= Y_t - H^T \hat{X}_t|_{t-1} \\
 &= H^T X_t + e_t - H^T \hat{X}_t|_{t-1} \\
 &= H^T (X_t - \hat{X}_t|_{t-1}) + e_t
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Entonces de (2.3.6b) se sigue

$$\begin{aligned}
 \Sigma_t &= E\{[H^T(X_t - \hat{X}_t|_{t-1}) + e_t][(X_t - \hat{X}_t|_{t-1})^T H + e_t^T]\} \\
 &= H^T P_t|_{t-1} H + R
 \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

y de (2.3.6c)

$$\begin{aligned}
 \theta_t &= E\{X_t (X_t - \hat{X}_t|_{t-1})^T H + X_t e_t\} \\
 &= E\{X_t (X_t - \hat{X}_t|_{t-1})^T\} H \\
 &= \{E(X_t X_t^T) - \hat{X}_t|_{t-1} \hat{X}_t^T|_{t-1}\} H \\
 &= P_t|_{t-1} H
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

donde en (2.3.8) y (2.3.9)

$$P_t|_{t-1} = E\{(X_t - \hat{X}_t|_{t-1})(X_t - \hat{X}_t|_{t-1})^T\}$$

es decir, la covarianza de $X_t - \hat{X}_t|_{t-1}$, la cual hará alusión a la matriz de varianzas y covarianza de $X_t - \hat{X}_t|_{t-1}$. Luego de (2.3.3), (2.3.6a) y (2.3.9) se tiene

$$\hat{X}_t|_t = \hat{X}_t|_{t-1} + P_t|_{t-1} H \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \tag{2.3.10}$$

Además, de la ecuación de transición (2.3.1), se obtiene que:

$$\hat{X}_{t+1}|_t = F \hat{X}_t|_t + G \hat{W}_t|_t \tag{2.3.11}$$

donde, por el teorema 2.3.1

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_t|t &= E(W_t | Y_t^-) \\
 &= E(W_t | Y_{t-1}^-, \tilde{Y}_t) \\
 &= E(W_t | Y_{t-1}^-) + E(W_t \tilde{Y}_t^T) \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \\
 &= E(W_t \tilde{Y}_t^T) \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Por otro lado, debido a la ecuación (2.3.7) se sabe que

$$E(W_t \tilde{Y}_t^T) = E\{W_t (X_t - \hat{X}_t|t-1)^T H + W_t e_t^T\} = S \tag{2.3.13}$$

luego se obtiene

$$\hat{W}_t|t = S \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \tag{2.3.14}$$

y la ecuación (2.3.11) se escribe:

$$\hat{X}_{t+1}|t = F \hat{X}_t|t + G S \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \tag{2.3.15}$$

Esta última proporciona el estimador del estado en el tiempo $t+1$ $\{\hat{X}_{t+1}|t = E(X_{t+1} | Y_t^-)\}$ en forma recursiva iniciando con X_0 . Esta técnica de estimar cualquier estado a partir de uno inicial y de un conjunto finito de observaciones es conocida como el filtro de Kalman. Dicho resultado se presenta a continuación.

FILTRO DE KALMAN: Considérese el modelo de espacio de estados dado por las ecuaciones (2.3.1)-(2.3.2) con un conjunto de observaciones Y_t^- , un estado inicial X_0 , para el cual $E(X_0) = \hat{X}_0|_{-1}$, su varianza $P_0|_{-1}$ y es independiente de W_t y e_t . Entonces $\hat{X}_{t+1}|t = E(X_{t+1} | Y_t^-)$ satisface:

$$\hat{X}_{t+1}|t = F \hat{X}_t|t + G S \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \tag{2.3.15}$$

$$\hat{X}_t|t = \hat{X}_t|t-1 + C_t|t \tilde{V}_t \quad (2.3.10a)$$

$$C_t|t = P_t|t-1 H E_t^{-1} \quad (2.3.10b)$$

$$\Sigma_t = E(\tilde{Y}_t \tilde{Y}_t^T) = H^T P_t|t-1 H + R \quad (2.3.8)$$

donde las covarianzas de $X_t - \hat{X}_t|t-1$, están dadas por

$$P_{t+1}|t = F P_t|t-1 F^T + G Q G^T - K_t \Sigma_t K_t^T \quad (2.3.16a)$$

$$K_t = F C_t|t + G \Sigma_t^{-1} \quad (2.3.16b)$$

$$P_t|t = P_t|t-1 (I - H C_t|t^T) \quad (2.3.17)$$

La ecuación (2.3.16a) es una ecuación en diferencia de Riccati, ésta dicta el comportamiento del filtro y se obtiene de la definición

$$P_{t+1}|t = E\{(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}|t)(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}|t)^T\} \quad (2.3.18a)$$

así como de las ecuaciones (2.3.1), (2.3.15) y (2.3.10a), que permiten obtener la expresión

$$\begin{aligned} X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}|t &= F X_t + G W_t - F \hat{X}_t|t - G \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \\ &= F X_t + G W_t - F(\hat{X}_t|t-1 + C_t|t \tilde{V}_t) - G \Sigma_t^{-1} \tilde{Y}_t \\ &= F(X_t - \hat{X}_t|t-1) + G W_t - (F C_t|t + G \Sigma_t^{-1}) \tilde{V}_t \end{aligned} \quad (2.3.18b)$$

De donde surge (2.3.16a)-(2.3.16b), mientras que la ecuación (2.3.17) se obtiene de (2.3.10a) y (2.1.10b), ya que se tiene

$$P_t|t = E\{(X_t - \hat{X}_t|t)(X_t - \hat{X}_t|t)^T\} \quad (2.3.19a)$$

con

$$X_t - \hat{X}_t|t = X_t - (\hat{X}_t|t-1 + C_t|t \tilde{V}_t)$$

$$= (X_t - \hat{X}_{t|t-1}) - C_{t|t} \tilde{Y}_t \quad (2.3.19b)$$

Nótese que en la ecuación (2.3.15) el estimador depende de la innovación de Y_t , la cual representa información de Y_t que no está contenida en el conjunto Y_{t-1}^- , ésta es necesaria para la estimación del estado en el tiempo $t+1$. Por otro lado, K_t definida en la ecuación (2.3.16b) se denomina ganancia de Kalman, ya que K_t extrae la información necesaria de \tilde{Y}_t o directamente de la observación Y_t , para estimar al estado X_{t+1} , de modo que \hat{X}_{t+1} puede escribirse

$$\hat{X}_{t+1|t} = F\hat{X}_{t|t-1} + K_t \tilde{Y}_t \quad (2.3.20)$$

y

$$\hat{X}_{t+1|t} = \tilde{F}_t \hat{X}_{t|t-1} + K_t Y_t \quad (2.3.21a)$$

donde

$$\tilde{F}_t = F - K_t H^T \quad (2.3.21b)$$

Si además de contar con el conjunto de observaciones Y_t^- , se tiene información adicional de Y_t que conste del conjunto $t^* = t+1, t+2, \dots, t+m$, donde m es un entero no-negativo finito, es posible mejorar la estimación por medio de las recursiones (SUAVIZAMIENTO DE PUNTO FIJO) siguientes (Anderson y Moore, 1979 y Goodwin y Sin, 1984):

$$\hat{X}_{t|t+m} = \hat{X}_{t|t+m-1} + C_{t|t+m} \tilde{Y}_{t+m} \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.22a)$$

$$P_{t|t+m} = P_{t|t+m-1} - C_{t|t+m} \Sigma_{t+m} C_{t|t+m}^T \quad (2.3.22b)$$

$$C_{t|t+m} = \bar{P}_t^T |_{t+m-1} \bar{\Sigma}_{t+m}^{-1} \quad (2.3.22c)$$

$$\bar{P}_t |_{t+m} = \tilde{F}_{t+m} \bar{P}_t |_{t+m-1} \quad \text{con } \bar{P}_t |_{t-1} = P_t |_{t-1} \quad (2.3.22d)$$

donde

$$\bar{P}_t |_{t+m} = E\{(X_{t+m+1} - \hat{X}_{t+m+1|t+m})(X_t - \hat{X}_{t|t+m})^T\}$$

Es importante notar que las recursiones (2.3.22a)-(2.3.22d), son aplicadas cuando se consideran las observaciones Y_{t+m} con $m \neq 0$, para la estimación del vector de estados en el tiempo t , las cuales están conectadas con el filtro de Kalman, por medio del estimador $\hat{X}_t|t$, esto es, cuando $m = 0$. Estas recursiones se obtienen aplicando el filtro de Kalman al espacio de estados

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ X'_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ X'_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} W_t \quad (2.3.23a)$$

$$Y_t = [H^T \ 0] \begin{bmatrix} X_t \\ X'_t \end{bmatrix} + e_t \quad (2.3.23b)$$

con

$$\begin{aligned} X'_t &= X_t && \text{para } t \leq t_f \\ X'_{t+1} &= X'_t && \text{para } t \geq t_f \end{aligned}$$

donde t_f es algún tiempo fijo. Notando que $X'_t = X_{t_f}$ para toda $t \geq t_f$.

Con el propósito de estudiar el comportamiento asintótico del estimador del estado X_t , es necesario conocer algunas propiedades del modelo de espacio de estados, así como algunos resultados sobre el comportamiento asintótico de $P_t|t-1$. Los resultados que se señalan a continuación se obtienen de la Teoría de Control, que pueden encontrarse en Kailath (1980) y Goodwin y Sin (1984).

ESTABILIDAD: El sistema dado por las ecuaciones (2.3.1)-(2.3.2) se dice que es estable si los eigenvalores λ de F se encuentran dentro del círculo unitario, o sea si $|\lambda| < 1$.

Esta propiedad permite reconocer si el sistema es asintóticamente estable. Es decir, si el efecto de las condiciones iniciales

desaparece en el transcurso del tiempo.

DETECTABILIDAD: La pareja de matrices (F, H) se dice que es detectable si F no tiene eigenvalores λ cuyo eigenvector correspondiente $b \neq 0$, sea tal que $|\lambda| \geq 1$ y $H^T b = 0$. Si $H^T b \neq 0$ para toda λ , se dice que la pareja es observable.

CONTROLABILIDAD: La pareja de matrices (F, G) se dice que es estabilizable si F no tiene eigenvalores λ con eigenvectores izquierdos $a^T \neq 0$, tal que $|\lambda| \geq 1$ y $a^T G = 0$. Si $a^T G \neq 0$ para toda λ , se dice que la pareja es controlable.

La propiedad de observabilidad permite recuperar de manera única cualquier estado X_t de X_{t+n} , si la información $\{Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+n-1}\}$ y $\{W_t, W_{t+1}, \dots, W_{t+n-1}\}$ es conocida. Por el contrario, la propiedad de controlabilidad permite moverse de un estado X_t a otro X_{t+n} con $\{W_t, W_{t+1}, \dots, W_{t+n-1}\}$ conocido. Si un sistema es controlable y observable se dice que es un sistema mínimo, esto es, que las matrices involucradas tienen el menor orden posible. Por tanto, la información para moverse de un estado a otro es la mínima necesaria.

Para estudiar el comportamiento del estimador de X_{t+1} obtenido por el filtro de Kalman, es necesario estudiar la convergencia de $P_{t+1|t}$, puesto que éste es el que dicta el comportamiento del filtro. Entonces, si $P_{t+1|t}$ converge a P cuando $t \rightarrow \infty$, P debe satisfacer la ecuación algebraica de Riccati que se obtiene de (2.3.16a), tomando $P_{t+1|t} = P_{t|t-1} = P$

$$P - PPF^T + DD^T - KKK^T = 0 \quad (2.3.24a)$$

donde

$$D = GQ^{1/2} \quad (2.3.24b)$$

Particularmente se busca que la solución de la ecuación algebraica de Riccati sea real, simétrica y positiva definida. Entonces se dice que una matriz con estas características es una solución estabilizadora, si \tilde{F} (ecuación (2.3.21b)) tiene sus eigenvalores dentro del círculo unitario y es una solución fuerte, si \tilde{F} tiene sus eigenvalores dentro o sobre el círculo unitario.

Los siguientes dos resultados establecen el tipo de solución para la ecuación algebraica de Riccati dada por (2.3.24a), su demostración aparece en Caines y Mayne (1970 y 1971).

TEOREMA 2.3.2: Si (F,D) es estabilizable y (F,H) es detectable, entonces, cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} P_{t+1|t} &\rightarrow P && \text{con r.e. (rápidez exponencial)} \\ K_t &\rightarrow K && \text{con r.e.} \\ \tilde{F}_t &\rightarrow \tilde{F} && \text{con r.e.} \end{aligned}$$

para toda condición inicial $P_{0|-1} \geq 0$ y P es una única solución estabilizadora de la ecuación algebraica de Riccati.

TEOREMA 2.3.3: Si $DD^T \geq 0$, (F,D) es controlable y (F,H) es detectable, entonces, cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} P_{t+1|t} &\rightarrow P && \text{con r.e.} \\ K_t &\rightarrow K && \text{con r.e.} \\ \tilde{F}_t &\rightarrow \tilde{F} && \text{con r.e.} \end{aligned}$$

para toda condición inicial $P_{0|-1} \geq 0$ y P es una única solución estabilizadora de la ecuación algebraica de Riccati.

Se procede entonces a construir un modelo de espacio de

estados específicamente para $Y_t = S_t + N_t$, el cual tal vez no sea un sistema mínimo, es decir, el modelo de espacio de estados que se construye, quizá no maneja matrices con el menor orden posible, pero sí permite estudiar el comportamiento del estado interno X_t de una manera sencilla, ya que se trabaja con las variables originales de la descomposición de Y_t (Burridge y Wallis, 1985).

Considere los modelos ARMA de $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ (ecuaciones (2.1.2a) y (2.1.2b)), en los cuales $\phi_S(B)$ y $\theta_S(B)$ son polinomios de grado m y n respectivamente, con coeficientes $\phi_{S,i}$ y $\theta_{S,j}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$; los polinomios $\phi_N(B)$ y $\theta_N(B)$ tienen grado p y q con coeficientes $\phi_{N,i}$ y $\theta_{N,j}$ para $i = 1, 2, \dots, p$ y $j = 1, 2, \dots, q$. Luego, se obtiene la representación de modelo de espacio de estados de la forma (2.3.1)-(2.3.2), si se considera específicamente a

$$X_t = (X_{1,t}^T, X_{2,t}^T)^T \text{ de dimensión } (m+n+p+q) \times 1$$

con

$$X_{1,t} = (S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-m+1}, b_{1,t}, b_{1,t-1}, \dots, b_{1,t-n+1})^T$$

$$X_{2,t} = (N_t, N_{t-1}, \dots, N_{t-p+1}, b_{2,t}, b_{2,t-1}, \dots, b_{2,t-q+1})^T$$

que son de tamaño $(m+n) \times 1$ y $(p+q) \times 1$ respectivamente. La matriz F se escribe

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \quad (m+n+p+q) \times (m+n+p+q)$$

con:

104418

$$F_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \phi_{s,1} & \phi_{s,2} & \dots & \phi_{s,m-1} & \phi_{s,m} & -\theta_{s,1} & -\theta_{s,2} & \dots & -\theta_{s,n-1} & -\theta_{s,n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right]$$

la cual es una matriz de tamaño $(m+n) \times (m+n)$. De manera análoga se construye, con los coeficientes de $\phi_N(B)$ y $\Theta_N(B)$, la matriz F_2 de tamaño $(p+q) \times (p+q)$. Las matrices G y H^T son de tamaño $(m+n+p+q) \times 2$ y $(m+n+p+q) \times 1$ respectivamente, y están dadas por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

col. " 1 2 \dots $\frac{1}{m+1}$ \dots $\frac{1}{m+n+1}$ \dots $\frac{1}{m+n+p+1}$ \dots $\frac{1}{m+n+p+q}$ "

$$H^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Mientras que la matriz de varianzas y covarianzas del modelo se

obtiene a partir de

$$e_t = 0 \text{ y } W_t = (b_{1,t+1}, b_{2,t+1})^T$$

entonces se sigue que

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad R = 0 \quad S = 0$$

Obsérvese que las componentes S_t y N_t son los primeros elementos de los vectores $X_{1,t}$ y $X_{2,t}$ ó los elementos 1 y $m+n+1$ del vector estado X_t respectivamente. Así, los estimadores de dichas componentes estarán dados por los elementos correspondientes en el estimador del estado X_t , que se obtiene al aplicar en particular el filtro de Kalman al modelo de espacio de estados descrito.

Para conocer el comportamiento de la varianza del estado X_t en el modelo, se necesita conocer los eigenvalores de la matriz F . Para ello se observa

$$\begin{aligned} |F - \lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} - \lambda I \right| \\ &= \begin{vmatrix} F_1 - \lambda I & 0 \\ 0 & F_2 - \lambda I \end{vmatrix} \\ &= |F_1 - \lambda I| |F_2 - \lambda I| \end{aligned}$$

De esta relación se deduce que los eigenvalores de F son un conjunto formado por la unión de los eigenvalores de F_1 y F_2 . Para calcular los eigenvalores de F_1 nótese que ésta se puede expresar:

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{13} \end{bmatrix}$$

donde: F_{11} es el bloque superior izquierdo señalado en la descripción de F_1 , y de igual forma se puede identificar a F_{12} y F_{13} , mientras que 0 es una matriz de ceros, por lo que se tiene:

$$| F_1 - \lambda I | = \begin{vmatrix} F_{11} - \lambda I & F_{12} \\ 0 & F_{13} - \lambda I \end{vmatrix}$$

$$= | F_{11} - \lambda I | | F_{13} - \lambda I |$$

F_{11} es la matriz conocida como compañera y la estructura de F_{13} , permite obtener:

$$| F_{11} - \lambda I | = (-\lambda)^m \phi_S \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$$| F_{13} - \lambda I | = (-\lambda)^n$$

así que

$$| F_1 - \lambda I | = (-\lambda)^{m+n} \phi_S \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

Debido a que F_2 tiene las mismas características de F_1 , se tiene de manera análoga que:

$$| F_2 - \lambda I | = (-\lambda)^{p+q} \phi_N \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

Ahora, escribiendo

$$\phi_S(Z) = \prod_{i=1}^m (1 - \lambda_{S1} Z)$$

$$\phi_N(Z) = \prod_{j=1}^p (1 - \lambda_{NJ} Z)$$

se puede ver que los $m+n+p+q$ eigenvalores de F se encuentran dentro o sobre el círculo unitario, y están dados por $\{\lambda_{S1}\}$, $\{\lambda_{NJ}\}$ y $n+q$ eigenvalores iguales a cero.

Con el objeto de establecer condiciones para la existencia de una solución de la ecuación algebraica de Riccati en el sistema que se trabaja (teoremas 2.3.2 y 2.3.3), es necesario estudiar la detectabilidad de (F,H) y la controlabilidad de (F,D) , en donde D está definida por la ecuación (2.3.24b) y toma la forma:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.3.25)$$

Las condiciones para la detectabilidad y la controlabilidad de las parejas correspondientes han sido establecidas por Burrige y Wallis (1988), y son:

DETECTABILIDAD: La pareja (F,H) es detectable si y sólo si los polinomios $\phi_S(Z)$ y $\phi_M(Z)$ no tienen raíces en común que se encuentren sobre o dentro del círculo unitario.

DEMOSTRACION: Para demostrar este resultado, primero adviértase que si c es un eigenvector de la matriz compañera F_{11} (bloque superior izquierdo de F_1), con primer elemento igual a cero, entonces $c = 0$. Ahora, sea b un eigenvector de F , de tal manera que $H^T b = b_1 + b_{m+n+1}$, donde b_1 y b_{m+n+1} son los elementos 1 y $m+n+1$ del eigenvector b . Si λ es un eigenvalor de F_1 ó F_2 , más no de ambas, se tiene que b_1 ó b_{m+n+1} es cero, pero las dos componentes no pueden ser cero al mismo tiempo, ya que ello implicaría que $b = 0$, esto se debe a que los bloques superiores izquierdos de F_1 y F_2 son matrices compañeras. Entonces, si F_1 y F_2 no tienen eigenvalores en común, se tiene que $H^T b \neq 0$ para toda λ y por lo tanto (F,H) es observable.

Si F_1 y F_2 tienen al eigenvalor λ en común, entonces $b = (1, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{-(m-1)}, 0, \dots, -1, -\lambda^{-1}, \dots, -\lambda^{-(p-1)}, 0, \dots, 0)^T$ es un eigenvector de F , y se tiene que $H^T b = 0$, por lo tanto (F,H) sería no detectable.

Luego, F_1 y F_2 tienen el eigenvalor λ en común, si y sólo si $(1 - \lambda Z)$ es factor común de $\phi_S(Z)$ y de $\phi_M(Z)$. ■

CONTROLABILIDAD: La pareja (F,D) es controlable si y sólo si las parejas de polinomios $\{\phi_S(Z), \theta_S(Z)\}$ y $\{\phi_M(Z), \theta_M(Z)\}$ no tienen

factor común, donde D está dada por (2.3.25).

DEMOSTRACION: Si $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_{m+n+p+q})$ es un eigenvector de F, entonces se mostrará que $a^T D = 0$ si y sólo si $\{\phi_s(Z), \theta_s(Z)\}$ ó $\{\phi_n(Z), \theta_n(Z)\}$ tienen factor común.

Nótese primero que $a^T D = 0$ implica que $a_1 + a_{m+1} = 0$ y $a_{m+n+1} + a_{m+n+p+1} = 0$. Ahora se escribirán las ecuaciones involucradas en $a^T F = \lambda a^T$, para lo cual se observa que

$$\begin{aligned} a^T F &= a^T \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \\ &= [(a_1, \dots, a_{m+n})F_1, (a_{m+n+1}, \dots, a_{m+n+p+q})F_2] \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

por lo que las ecuaciones resultan dadas por:

$$(a_1, \dots, a_{m+n})F_1 = \lambda(a_1, \dots, a_{m+n}) \quad (2.3.27a)$$

$$(a_{m+n+1}, \dots, a_{m+n+p+q})F_2 = \lambda(a_{m+n+1}, \dots, a_{m+n+p+q}) \quad (2.3.27b)$$

de (2.3.27a) se obtienen $n+m$ ecuaciones que son:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_1 \phi_{s1} + a_2 = \lambda a_1 \\ 2) \quad & a_1 \phi_{s2} + a_3 = \lambda a_2 \\ 3) \quad & a_1 \phi_{s3} + a_4 = \lambda a_3 \\ & \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ n-1) \quad & a_1 \phi_{s_{n-1}} + a_n = \lambda a_{n-1} \\ n) \quad & a_1 \phi_{sn} = \lambda a_n \\ n+1) \quad & -a_1 \theta_{s1} + a_{m+2} = \lambda a_{m+1} \\ n+2) \quad & -a_1 \theta_{s2} + a_{m+3} = \lambda a_{m+2} \\ & \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m+n-1) \quad & -a_1 \theta_{sn-1} + a_{m+n} = \lambda a_{m+n-1} \\ m+n) \quad & -a_1 \theta_{sn} = \lambda a_{m+n} \end{aligned}$$

Ahora, si se multiplica la ecuación j por λ^{-j} para $j = 1, 2, \dots, m$, la ecuación $m+k$ por λ^{-k} para $k = 1, 2, \dots, n$, y luego se suman, se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 \left[\sum_{i=1}^m \frac{\phi_{si}}{\lambda^i} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{si}}{\lambda^i} \right] + \sum_{i=2}^m \frac{a_i}{\lambda^{i-1}} + \sum_{i=2}^n \frac{a_{m+i}}{\lambda^{i-1}} \\ = a_1 + a_{m+1} + \sum_{i=2}^m \frac{a_i}{\lambda^{i-1}} + \sum_{i=2}^n \frac{a_{m+i}}{\lambda^{i-1}} \end{aligned}$$

de donde

$$a_1 \left[\sum_{i=1}^m \frac{\phi_{si}}{\lambda^i} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{si}}{\lambda^i} \right] = a_1 + a_{m+1}$$

y

$$a_1 \left[\phi_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \theta_s \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right] = a_1 + a_{m+1} \quad (2.3.28a)$$

Siguiendo un procedimiento análogo con las $p+q$ ecuaciones que se obtienen de (2.3.27b), se tiene

$$a_{m+n+1} \left[\phi_m \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \theta_m \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right] = a_{m+n+1} + a_{m+n+p+1} \quad (2.3.28b)$$

Luego, de (2.3.28a) y (2.3.28b) se tiene que $a^T D = 0$ si y sólo si $\{\phi_s(Z), \theta_s(Z)\}$ ó $\{\phi_m(Z), \theta_m(Z)\}$ tienen factor común. ■

Se debe de notar primero que el sistema (2.3.1)-2.3.2) será estable asintóticamente, si los polinomios autorregresivos de $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ no tienen raíces sobre el círculo unitario, esto es, si los procesos $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ son estacionarios. Luego adviértase que (F,H) es detectable si los polinomios $\delta_s(Z)$ y $\delta_m(Z)$ (ecuaciones (2.1.4a) y (2.1.4b)) no tienen raíces en común, mientras que la

controlabilidad de (F,D) siempre se tendrá por suposición. Así, se pueden contemplar tres situaciones para la estimación del vector de estados X_t contando con una realización semi-infinita de la serie $\{Y_t\}$; la primera, considerando al sistema estable, (F,H) detectable y (F,D) controlable; la segunda, si se tiene (F,H) detectable y (F,D) controlable. Finalmente, como tercera situación, considerando únicamente (F,D) controlable. Nótese que la primera de éstas situaciones corresponde al caso a) planteado en la sección anterior, mientras que la segunda y tercera corresponden al caso b).

Situación 1) Sistema estable, (F,H) detectable y (F,D) controlable

Como el sistema se considera estable, los eigenvalores de F se encuentran dentro del círculo unitario, luego, $F^t \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y se tiene un desarrollo en una serie convergente para $(I - ZF)^{-1}$ con $|Z| = 1$. Por otro lado, como (F,H) es detectable y (F,D) es controlable, el teorema 2.3.3 establece que, $P_{t+1|t} \rightarrow P$, $K_t \rightarrow K$ y $\tilde{F}_t \rightarrow \tilde{F}$, si $t \rightarrow \infty$. Como P es una solución estabilizadora de la ecuación algebraica de Riccati, también $\tilde{F}^t \rightarrow 0$ y existe una serie convergente para $(I - Z\tilde{F})^{-1}$ con $|Z| = 1$. Considerando estos resultados y la información $\{Y_{t'}, | t' \leq t+m, m \geq 0 \text{ finita}\}$ de la serie $\{Y_t\}$, el filtro de Kalman permite escribir a $\hat{X}_{t|t+m}$ como

$$\hat{X}_{t|t+m} = \gamma_k^{(B)} Y_t \quad (2.3.29a)$$

donde

$$\gamma_k(Z) = Z\gamma_{-1}(Z) + \sum_{i=0}^m P(\tilde{F}^T)^i H \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) Z^{-1} \quad (2.3.29b)$$

$$\gamma_{-1}(Z) = (I - Z\tilde{F})^{-1} K \quad (2.3.29c)$$

$$\tilde{\gamma}_{-1}(Z) = \{ 1 - ZH^T \gamma_{-1}(Z) \} \quad (2.3.29d)$$

que puede obtenerse, escribiendo primero, de la ecuación (2.3.22a)

a $\hat{X}_t|_{t+m}$ como

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_t|_{t+m} &= \hat{X}_t|_{t+m-1} + C_t|_{t+m} \tilde{Y}_{t+m} \\
 &= \hat{X}_t|_{t+m-2} + C_t|_{t+m-1} \tilde{Y}_{t+m-1} + C_t|_{t+m} \tilde{Y}_{t+m} \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &= \hat{X}_t|_{t-1} + \sum_{i=0}^m C_t|_{t+i} \tilde{Y}_{t+i}
 \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

donde, a partir de (2.3.22d)

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_t|_{t+i} &= \tilde{F} \bar{P}_t|_{t+i-1} \\
 &= \tilde{F}^2 \bar{P}_t|_{t+i-2} \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &= \tilde{F}^{i-1} P
 \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

y de (2.3.22c) se expresa a

$$\begin{aligned}
 C_t|_{t+i} &= \bar{P}_t|_{t+i-1} H E^{-1} \\
 &= P(\tilde{F}^T)^{i-1} H E^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

que al ser sustituido en (2.3.30), produce

$$\hat{X}_t|_{t+m} = \hat{X}_t|_{t-1} + \sum_{i=0}^m P(\tilde{F}^T)^{i-1} H E^{-1} \tilde{Y}_{t+i} \tag{2.3.33}$$

Ahora, de la ecuación (2.3.21a) se sigue que

$$\hat{X}_{t+1}|_t = \tilde{F} \hat{X}_t|_{t-1} + K Y_t = \tilde{F}(\tilde{F} \hat{X}_{t-1}|_{t-2} + K Y_{t-1}) + K Y_t$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{F}^2 \hat{X}_{t-1}|_{t-2} + \tilde{F}K Y_{t-1} + K Y_t \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= \tilde{F}^{t+1} \hat{X}_0|_{-1} + \sum_{i=0}^t \tilde{F}^i K Y_{t-i} \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= \gamma_{-1}(B) Y_t \quad \text{con} \quad \gamma_{-1}(Z) = (I - Z\tilde{F})^{-1}K \quad (2.3.34)
\end{aligned}$$

de donde $\hat{X}_t|_{t-1}$ puede escribirse como

$$\hat{X}_t|_{t-1} = B\gamma_{-1}(B)y_t \quad (2.3.35)$$

que, a su vez con la ecuación (2.3.2), permite expresar la innovación de Y_t como

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t &= Y_t - H^T \hat{X}_t|_{t-1} \\
&= Y_t - H^T \{B\gamma_{-1}(B)\} Y_t \\
&= \tilde{\gamma}_{-1}(B) Y_t \quad \text{con} \quad \tilde{\gamma}_{-1}(Z) = \{I - ZH^T\gamma_{-1}(Z)\} \quad (2.3.36)
\end{aligned}$$

Al sustituir ésta junto con la ecuación (2.3.35) en (2.3.33), se obtiene (2.3.29a).

Recuérdese que las componentes S_t y N_t de Y_t son los elementos 1 y $m+n+1$ respectivamente, en el vector de estados X_t , y que en la presente situación se trabaja con series estacionarias, es posible entonces dar una versión matricial del teorema 2.2.2, esto es, donde los elementos 1 y $m+n+1$ de $E(X_t|Y_t)$ correspondan a las estimaciones que se obtienen por medio de (2.2.9a) y (2.2.22) respectivamente. Para obtener dicha versión, es necesario primero, encontrar las fgc de X_t , Y_t y la fgc cruzadas de X_t y Y_t .

Para obtener la fgc de X_t y Y_t , primero se representará al vector de estados y a la salida como un proceso de promedios móviles. Para el caso del vector de estados, hablar de dicho proceso es posible si se observa en la ecuación de transición (2.3.1), que X_t es un proceso estacionario, generado por el vector autorregresivo de orden uno

$$(I - BF)X_t = GW_{t-1} \quad (2.3.37)$$

El proceso X_t es estacionario ya que las raíces de $|I - ZF| = 0$ se encuentran fuera del círculo unitario, debido a que F tiene sus eigenvalores dentro éste. Luego, del teorema de la descomposición de Wold, versión multivariada (Hannan, 1970), X_t se escribe como

$$X_t = \psi_x(B)W_t \quad \text{con} \quad \psi_x(Z) = (I - ZF)^{-1}G \quad (2.3.38a)$$

Para el caso de la salida Y_t , es importante notar que $\{\tilde{Y}_t\}$ por construcción, es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza Σ (Anderson y Moore, 1979). Luego, escribiendo $Y_t = \tilde{Y}_t + \hat{Y}_t|_{t-1}$, de las ecuaciones (2.3.2) y (2.3.20) se tiene que

$$\begin{aligned} Y_t &= \tilde{Y}_t + H^T \hat{X}_t|_{t-1} \\ &= \tilde{Y}_t + H^T (F \hat{X}_{t-1}|_{t-2} + K \tilde{Y}_{t-1}) = \tilde{Y}_t + H^T F \hat{X}_{t-1}|_{t-2} + H^T K \tilde{Y}_{t-1} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= \tilde{Y}_t + \sum_{i=0}^{t-1} H^T F^i K \tilde{Y}_{t-1-i} + H^T F^t X_0|_{-1} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= \psi(B) \tilde{Y}_t \quad \text{con} \quad \psi(Z) = \{1 + ZH^T(I - ZF)^{-1}K\} \quad (2.3.38b) \end{aligned}$$

104418

DEFINICION: Las funciones generadoras de covarianzas de X_t y Y_t están definidas como

$$f_x(Z) = \psi_x(Z)Q\psi_x^T(Z^{-1}) = (I - ZF)^{-1}CQC^T(I - Z^{-1}F^T)^{-1} \quad (2.3.39a)$$

$$f_y(Z) = \psi(Z)\Sigma\psi^T(Z^{-1}) = \{1 + ZH^T(I - ZF)^{-1}K\} \Sigma \{1 + Z^{-1}K^T(I - Z^{-1}F^T)^{-1}H\} \quad (2.3.39b)$$

De estas definiciones es posible encontrar la fgc cruzadas de X_t y Y_t , esto es, encontrar

$$f_{xy}(Z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E(X_t Y_{t-i}^T) Z^i \quad (2.3.40)$$

Esta función se obtiene si se escribe Y_{t-1}^T de la ecuación (2.3.2) como

$$Y_{t-1}^T = X_{t-1}^T H + e_{t-1}^T$$

de donde

$$X_t Y_{t-1}^T = X_t X_{t-1}^T H + X_t e_{t-1}^T$$

y

$$\begin{aligned} E(X_t Y_{t-1}^T) &= E(X_t X_{t-1}^T) H + E(X_t e_{t-1}^T) \\ &= E(X_t X_{t-1}^T) H \end{aligned}$$

multiplicando esta expresión por Z^i y sumando para todo entero i , se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E(X_t Y_{t-1}^T) Z^i &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} E(X_t X_{t-1}^T) Z^i H \\ f_{xy}(Z) &= f_x(Z) H \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

El siguiente resultado, proporciona la versión matricial del teorema 2.2.2

TEOREMA 2.3.4: Si se cuenta con la información $\{Y_t, | t' \leq t+m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$ de la serie $\{Y_t\}$ y si $\{\tilde{Y}_t\}$ es el proceso de innovación generado por $\{Y_t\}$, con

- i) $Y_t = \psi(B)\tilde{Y}_t$
 ii) $E(X_t | \{Y_t\}) = \sum_{i=-m}^{\infty} M_i \tilde{Y}_{t-i}$ donde M_i es una matriz de constantes para toda i

Entonces

$$E(X_t | \{Y_t\}) = \gamma(B)Y_t \quad (2.3.42a)$$

donde

$$\gamma(Z) = \left[f_{xy}(Z) \left\{ \psi^T(Z^{-1}) \right\}^{-1} \right]_{-m} \Sigma^{-1} \left\{ \psi(Z) \right\}^{-1} \quad (2.3.42b)$$

DEMOSTRACION: Para demostrar este resultado, se verá que por medio del filtro de Kalman se obtienen las condiciones i y ii, de igual manera se tiene $\gamma_k(Z) = \gamma(Z)$.

La condición i se obtiene a partir de la ecuación (2.3.38b). Por su parte, la segunda condición, se obtiene al escribir la ecuación (2.3.33) como

$$\hat{X}_{t|t+m} = \hat{X}_{t|t-1} + \sum_{i=0}^m M_i \tilde{Y}_{t+i} \quad (2.3.43)$$

donde $M_i = P(\tilde{F}^T)^i H E^{-1}$, y de la ecuación (2.3.20) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t|t-1} &= F\hat{X}_{t-1|t-2} + K\tilde{Y}_{t-1} \\ &= F^2\hat{X}_{t-2|t-3} + FK\tilde{Y}_{t-2} + K\tilde{Y}_{t-1} \\ &\vdots \\ &= F^t\hat{X}_{0|-1} + \sum_{i=0}^{t-1} F^i K\tilde{Y}_{t-1-i} \end{aligned}$$

$$= M(B)\tilde{Y}_{t-1} \quad \text{con} \quad M(B) = (I - ZF)^{-1}K \quad (2.3.44)$$

que al sustituirse en (2.3.43) determina la condición ii. Así, como las condiciones se obtienen usando el filtro de Kalman, se mostrará que los polinomios matriciales (2.3.29b) y (2.3.42b) coinciden, mostrando explícitamente que (2.2.9a) y (2.2.22) se obtienen mediante esta técnica.

Obsérvese que $C = PHE^{-1}$, $K = FC$ (en el modelo de espacio de estados para (2.1.1), con $S = 0$) y $\tilde{F} = F - KH^T$, que se obtienen de (2.3.10b), (2.3.16b) y (2.3.21b) respectivamente. De este modo la ecuación algebraica de Riccati (2.3.24a), se expresa como

$$\begin{aligned} GQG^T &= P - FPF^T - K\bar{K}K^T \\ &= P - FPF^T - FPHK^T \\ &= P - FP(F^T - HK^T) \\ &= P - FP\tilde{F}^T \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Además, de las ecuaciones (2.3.36) y (2.3.38b) se considera $[\psi(Z)]^{-1} = \tilde{\gamma}_{-1}(Z)$. Entonces, $\gamma_k(Z)$ (ecuaciones (2.3.29b)-(2.3.29d)) se escribe como

$$\begin{aligned} \gamma_k(Z) &= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}K + \sum_{i=0}^m P(\tilde{F}^T)^i H E^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) Z^{-i} \\ &= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}K + P \left[\sum_{i=0}^m (\tilde{F}^T)^i Z^{-i} \right] H E^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\ &= \left[Z(I - Z\tilde{F})^{-1}K\psi(Z)\Sigma + P(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

donde el primer sumando de la expresión encerrada entre corchetes se puede expresar a partir de (2.3.38b), como

$$\begin{aligned}
Z(I - Z\tilde{F})^{-1}K\psi(Z)\Sigma &= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}K\{I + ZH^T(I - ZF)^{-1}K\}\Sigma \\
&= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}\{I + ZKH^T(I - ZF)^{-1}\}K\Sigma \\
&= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}\{(I - ZF) + ZKH^T\}(I - ZF)^{-1}K\Sigma \\
&= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}\{I - Z(F - KH^T)\}(I - ZF)^{-1}K\Sigma \\
&= Z(I - Z\tilde{F})^{-1}(I - Z\tilde{F})(I - ZF)^{-1}K\Sigma \\
&= Z(I - ZF)^{-1}K\Sigma \\
&= Z(I - ZF)^{-1}FPH \tag{2.3.47}
\end{aligned}$$

De esta manera, al sustituir ésta en (2.3.46), se escribe

$$\begin{aligned}
\gamma_k(Z) &= \left[Z(I - ZF)^{-1}FPH + P(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\
&= \left[\{Z(I - ZF)^{-1}FP(I - Z^{-1}\tilde{F}^T) + P\}(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\
&= \left[(I - ZF)^{-1}\{ZFP(I - Z^{-1}\tilde{F}^T) + (I - ZF)P\} \right. \\
&\quad \left. (I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\
&= \left[(I - ZF)^{-1}\{ZFP - FP\tilde{F}^T + P - ZFP\} \right. \\
&\quad \left. (I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\
&= \left[(I - ZF)^{-1}\{P - FP\tilde{F}^T\}(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \tag{2.3.48}
\end{aligned}$$

Ahora, nótese que

$$\begin{aligned}
(I - Z^{-1}F^T)^{-1}H \tilde{\gamma}_{-1}^T(Z^{-1}) &= (I - Z^{-1}F^T)^{-1}H\{I - Z^{-1}K^T(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H\} \\
&= (I - Z^{-1}F^T)^{-1}\{I - Z^{-1}HK^T(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}\}H \\
&= (I - Z^{-1}F^T)^{-1}\{(I - Z^{-1}\tilde{F}^T) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z^{-1}HK^T\{(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \\
& = (I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}\{I - Z^{-1}\tilde{F}^T\}(I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \\
& = (I - Z^{-1}\tilde{F}^T)^{-1}H \quad (2.3.49)
\end{aligned}$$

así pues, al sustituir (2.3.45), (2.3.49), (2.3.39a) y (2.3.41) en la ecuación (2.3.48), se tiene finalmente a (2.3.42b), esto es

$$\begin{aligned}
\gamma_k(Z) &= \left[(I - ZF)^{-1}GQG^T(I - Z^{-1}F^T)^{-1}H\{\tilde{\gamma}_{-1}^T(Z^{-1})\} \right]_{-m} \Sigma^{-1}\tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\
&= \left[f_x(Z)H\{\tilde{\gamma}_{-1}^T(Z^{-1})\} \right]_{-m} \Sigma^{-1}\tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\
&= \left[f_{xy}(Z)\{\psi^T(Z^{-1})\}^{-1} \right]_{-m} \Sigma^{-1}\{\psi(Z)\}^{-1}
\end{aligned}$$

■

Situación 11) (F,H) detectable y (F,D) controlable

La ausencia de estabilidad asintótica en el sistema implica la existencia de eigenvalores de F sobre el círculo unitario. Luego, al menos una de las series $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ es no estacionaria, es decir, éstas siguen los modelos (2.1.3a)-(2.1.3b), y al menos uno de los polinomios $\delta_s(Z)$ y $\delta_n(Z)$ es diferente a la unidad. Entonces, se sigue que la serie $\{Y_t\}$ es no estacionaria y generada por un modelo de la forma (2.1.5a)-(2.1.5c). Ahora, que (F,H) es detectable asegura que los polinomios $\delta_s(Z)$ y $\delta_n(Z)$ no tienen raíces en común, este resultado aunado a la propiedad de controlabilidad (teorema 2.3.3) permiten obtener nuevamente, mediante el filtro de Kalman, un estimador de X_t (ecuaciones (2.3.29a)-(2.3.29d)), aun cuando las componentes son series no estacionarias. Que el estimador se obtenga por medio de γ_k , como en el caso anterior, es debido a que éste depende de la solución estabilizadora de la ecuación algebraica de Riccati, a la existencia de $(I - Z\tilde{F})^{-1}$ como una serie convergente y a la

convergencia de la ganancia de Kalman, condiciones que se obtienen a partir del teorema 2.3.3.

Por otro lado, se obtendrá la versión matricial de las estimaciones a las componentes no observables de Y_t para el caso no estacionario (ecuaciones (2.2.25a)-(2.2.25b)), con el objeto de mostrar que éstas coinciden, en el límite, con las obtenidas a partir del filtro de Kalman.

De manera análoga a como se obtienen las ecuaciones (2.2.25a)-(2.2.25b), es necesario definir las seudofunciones generadoras de covarianzas de X_t y Y_t , así como una seudofunción generadora de covarianzas cruzadas de X_t y Y_t . Para ello, primero se escribe de las ecuaciones (2.3.38a)-(2.3.38b) a

$$X_t = \Psi_X(Z)W_t \quad \text{con} \quad \Psi_X(Z) = \{I + ZF + Z^2F^2 + \dots\}G \quad (2.3.50a)$$

$$Y_t = \Psi(Z)\tilde{Y}_t \quad \text{con} \quad \Psi(Z) = \{1 + ZH^T(I + ZF + Z^2F^2 \dots)K\} \quad (2.3.50b)$$

que se obtienen por el hecho de que F tiene eigenvalores sobre el círculo unitario. Luego $(I - ZF)^{-1}$ se transforma en la serie no convergente $\{I + ZF + Z^2F^2 + \dots\}$. y es remplazada en (2.3.38a)-(2.3.38b), debido a que tanto X_t como Y_t son ahora procesos no estacionarios.

DEFINICION: Las seudofunciones generadoras de covarianzas de X_t y Y_t están definidas como

$$sf_X(Z) = \Psi_X(Z)Q\Psi_X^T(Z^{-1}) \quad (2.3.51a)$$

$$sf_Y(Z) = \Psi(Z)\Sigma\Psi^T(Z^{-1}) \quad (2.3.51b)$$

De estas definiciones y de la ecuación (2.3.41) se encuentra $sf_{XY}(Z)$ como

$$sf_{xy}(Z) = sf_x(Z)H \quad (2.3.51c)$$

La versión matricial de la extensión propuesta por Pierce (1979) (ecuaciones (2.2.25a)-(2.2.25b)) se obtiene cambiando la fgc por la pseudofunción generadora de covarianzas en (2.3.42b), esto es

$$\gamma(Z) = \left[sf_{xy}(Z) \{\Psi^T(Z^{-1})\}^{-1} \right]_{-m} \Sigma^{-1} \{\Psi(Z)\}^{-1} \quad (2.3.52a)$$

que a partir de (2.3.50a), (2.3.51a) y (2.3.51c) se expresa como

$$\gamma(Z) = \left[\{I + ZF + Z^2F^2 + \dots\} G G^T \{I + Z^{-1}F^T + Z^{-2}(F^T)^2 + \dots\} \right. \\ \left. H \{\tilde{\gamma}_{-1}^T(Z^{-1})\} \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \quad (2.3.52b)$$

donde nuevamente se considera $\tilde{\gamma}_{-1}(Z) = \{\Psi(Z)\}^{-1}$ que puede escribirse como

$$\tilde{\gamma}_{-1}(Z) = \{I - ZH^T(I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots)K\} \quad (2.3.53)$$

al cambiar $(I - Z\tilde{F})^{-1}$ por su respectiva serie convergente. Ahora, considérense las siguientes relaciones

$$\{I + ZF + Z^2F^2 + \dots\} K \tilde{\gamma}_{-1}(Z) = \{I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots\} K \quad (2.3.54a)$$

$$\{I + Z^{-1}F^T + Z^{-2}(F^T)^2 + \dots\} H \tilde{\gamma}_{-1}^T(Z^{-1}) = \\ \{I + Z^{-1}\tilde{F}^T + Z^{-2}(\tilde{F}^T)^2 + \dots\} H \quad (2.3.54b)$$

La primera de estas ecuaciones se obtiene al sustituir (2.3.53) en ésta y así, (2.3.54a) se escribe como

$$\{I + ZF + Z^2F^2 + \dots\} K \{I - ZH^T(I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots)K\} \\ = \{I + ZF + Z^2F^2 + \dots\} \{I - ZKH^T(I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots)\} K$$

para que al multiplicar después directamente las series, se tenga

que el coeficiente de Z^j está dado por

$$F^j - \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1-i} K H^T \tilde{F}^i$$

lo cual puede escribirse como

$$\begin{aligned} F^j - \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1-i} K H^T \tilde{F}^i &= F^j - \sum_{i=0}^{j-2} F^{j-1-i} K H^T \tilde{F}^i - K H^T \tilde{F}^{j-1} \\ &= F \left[F^{j-1} - \sum_{i=0}^{j-2} F^{j-1-i-1} K H^T \tilde{F}^i \right] - K H^T \tilde{F}^{j-1} \end{aligned}$$

Nótese en esta expresión, que el coeficiente de Z^j se puede obtener mediante la recursión: Coeficiente de $Z^j = F$ [Coeficiente de $Z^{j-1}] - K H^T \tilde{F}^{j-1} = \tilde{F}^j$, para $j = 1, 2, 3, \dots$ y $Z^0 = I$, puesto que $\tilde{F} = F - K H^T$; de esta forma se obtiene la ecuación (2.3.54a). La ecuación (2.3.54b) se obtiene de manera análoga.

Ahora, se debe tener en cuenta que al pasar de un conjunto finito de observaciones $Y_t^+ = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+m}\}$ al conjunto $\{Y_t, | t' \leq t+m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$ para obtener el estimador de X_t mediante $\gamma_k(Z)$, este último conjunto se determina cuando $Y_0 \rightarrow -\infty$ o $t \rightarrow \infty$. Luego, si $\hat{X}_{t|t+m}^+$ es el estimador de X_t dado el conjunto de observaciones Y_t^+ , con $\hat{X}_{t|t+m}^+ \rightarrow \hat{X}_{t|t+m}$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces existe t_c tal que

$$\| \hat{X}_{t|t+m}^+ - \hat{X}_{t|t+m} \| < \epsilon \quad \text{para toda } t \geq t_c \quad (2.3.55)$$

donde $\| \cdot \|$ es cualquier norma vectorial, puesto que al trabajar con vectores (matrices) de dimensión finita, cualesquiera dos normas son equivalentes (Taylor, 1957).

TEOREMA 2.3.5: Si se cuenta con la información Y_t^+ de la serie $\{Y_t\}$ y $\hat{X}_t^+ = \gamma(B)Y_t$, entonces existe t_c tal que

$$\|\hat{X}_t^+ - \hat{X}_t^+|_{t+m}\| < \epsilon \quad \text{para toda } t \geq t_c \quad (2.3.56)$$

DEMOSTRACION: Para demostrar este resultado se mostrará que $\hat{X}_t^+ = \hat{X}_t^+|_{t+m}$, a partir de que el polinomio $\gamma_k(Z)$ coincide con $\gamma(Z)$ para cualquier t finita. Para ello, nótese que $\gamma_k(Z)$ se puede escribir como

$$\gamma_k(Z) = Z\{I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots\}K + \sum_{i=0}^m Z^{-i}P(\tilde{F}^T)^i H \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) + U(Z)$$

donde $U(Z)$ son potencias de Z mayores que una t fija. De tal forma que los dos primeros sumandos proporcionan $\hat{X}_t^+|_{t+m}$, luego por la ecuación (2.3.54a), se puede escribir

$$\begin{aligned} \gamma_k(Z) &= Z(I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots)K\tilde{\gamma}_{-1}(Z) + \sum_{i=0}^m Z^{-i}P(\tilde{F}^T)^i H \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\ &\quad + U^*(Z) \\ &= \left\{ Z(I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots)FPH + \sum_{i=0}^m Z^{-i}P(\tilde{F}^T)^i H \right\} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\ &\quad + U^*(Z) \\ &= \left\{ (ZFPH + Z^2F^2PH + \dots) + \sum_{i=0}^m Z^{-i}P(\tilde{F}^T)^i H \right\} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \\ &\quad + U^*(Z) \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

Por otro lado, de (2.3.52b) y (2.3.54b) se tiene que $\gamma(Z)$ es igual a

$$\gamma(Z) = \left[\{I + Z\tilde{F} + Z^2\tilde{F}^2 + \dots\}GQG^T\{I + Z^{-1}\tilde{F}^T + Z^{-2}(\tilde{F}^T)^2 + \dots\}H \right]_{-m} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) \quad (2.3.58)$$

donde al multiplicar las series que se encuentran dentro de los corchetes resulta una serie cuyos coeficientes están dados por

$$\text{Coeficiente de } Z^{-j}: \sum_{i=0}^{\infty} F^i GQG^T (\tilde{F}^T)^{i+j} H = \left[\sum_{i=0}^{\infty} F^i GQG^T (\tilde{F}^T)^i \right] (\tilde{F}^T)^j H$$

Coficiente de Z^0 : $\sum_{i=0}^{\infty} F^i G Q G^T (\tilde{F}^T)^i H$

Coficiente de Z^j : $\sum_{i=0}^{\infty} F^{i+j} G Q G^T (\tilde{F}^T)^i H = F^j \left[\sum_{i=0}^{\infty} F^i G Q G^T (\tilde{F}^T)^i \right] H$

para toda j finita. Al notar que los coeficientes dependen de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} F^i G Q G^T (\tilde{F}^T)^i$, si se muestra que la serie converge a P , se tiene que los coeficientes de Z^j y Z^{-j} estarán dados por $F^j P H$ y $P (\tilde{F}^T)^j H$ respectivamente, y asimismo el coeficiente de Z^0 será $P H$. Con esto se demostraría que (2.3.57) y (2.3.58) coinciden para toda t finita. Luego, como existe t_c tal que (2.3.55) se cumple, se tiene que (2.3.56) es válido para toda t finita mayor o igual a t_c . Entonces, para mostrar que la serie en cuestión es convergente, nótese que $r(F) = \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ eigenvalor de } F \} = 1$, y que $r(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^n\|^{1/n}$ (Taylor, 1957), de igual forma se tiene que $r(\tilde{F}) < 1$ y $r(\tilde{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{F}^n\|^{1/n}$. Con base en esto, el criterio de la raíz indica que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \|F^i\| \|\tilde{F}^i\|$, es una serie convergente. Por lo tanto, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} F^i G Q G^T (\tilde{F}^T)^i$ es una serie absolutamente convergente debido a que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \|F^i G Q G^T (\tilde{F}^T)^i\| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|F^i\| \|G Q G^T\| \|(\tilde{F}^T)^i\| \\ &\leq \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \|F^i\| \|(\tilde{F}^T)^i\| \\ &\leq \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \|F^i\| \|\tilde{F}^i\| \end{aligned}$$

donde $0 < \alpha < \infty$. Finalmente, para mostrar que la serie converge a P , se sustituye la ecuación (2.3.45) en la serie para obtener una serie telescópica que converge a este valor. ■

104418

Situación iii) (F,D) controlable

En esta situación se sigue trabajando con series no estacionarias, pero ahora se consideran series donde los polinomios $\delta_s(Z)$ y $\delta_n(Z)$ tienen factores del tipo $(1 - \lambda Z)$ con $|\lambda| = 1$ en común, debido a la falta de detectabilidad. La presencia de dichos factores no permiten solución a la ecuación algebraica de Riccati, lo cual implica que no es posible utilizar el polinomio $\gamma_k(Z)$ para la estimación del vector de estados X_t . Entonces, primero se estudia el comportamiento de $P_{t+1|t}$ antes de presentar alguna relación con la extensión propuesta por Pierce. Con este propósito se encontrará una forma normal de Jordan a partir de una transformación no singular T, que tiene la característica de conservar la propiedad de controlabilidad, la cual se preserva bajo este tipo de transformaciones (Kailath, 1980) y aísla los eigenvalores que ocasionan que el sistema sea no detectable.

Para construir esta transformación, es necesario encontrar $m+n+p+q$ eigenvectores linealmente independientes (recuérdese que la matriz $F = \text{diagonal}[F_1, F_2]$ tiene $m+p$ eigenvalores diferentes de cero y $n+q$ iguales a cero, de los cuales $m+n$ pertenecen a F_1), que se obtienen de la siguiente manera. Considérese que F_1 tiene los eigenvalores λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) diferentes de cero y n ceros, donde los eigenvectores correspondientes a cada λ_i son de la forma

$$b_{1i}^T = (1, \lambda_i^{-1}, \lambda_i^{-2}, \dots, \lambda_i^{-(m-1)}, 0, \dots, 0)$$

debido a que el bloque superior izquierdo de F_1 es una matriz compañera. Estos vectores son linealmente independientes si todos los eigenvalores λ_i son diferentes. En caso de que alguno de estos eigenvalores tenga multiplicidad R_1^S , se encuentran a partir de b_{11} otros $R_1^S - 1$ eigenvectores, por medio de la recursión $F_1 b_{j,1} - \lambda_i b_{j,1} = b_{j-1,1}$ con $j = 2, 3, \dots, R_1^S$. Ahora, con respecto a los n eigenvalores iguales a cero, se puede encontrar un primer eigenvector a_1 , del cual se encuentran los restantes $n-1$ mediante

$F_1 a_i = a_{i-1}$ con $i = 2, 3, \dots, n$. Como la estructura de F_2 es idéntica a la de F_1 , de igual forma se encuentran los p eigenvectores (d_1) correspondientes a los eigenvalores diferentes de cero y los q eigenvectores (u_1) de los cero.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ los eigenvalores comunes a F_1 y F_2 con multiplicidad R_1^S y R_1^N respectivamente. Si $R_1^* = \min \{R_1^S, R_1^N\}$ tal que $r = \sum_1 R_1^*$, entonces se pueden construir las matrices A, B, D y U de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [B_1 : B_2] &= \{b_1, \dots, b_r : b_{r+1}, \dots, b_m\} \\ [D_1 : D_2] &= \{d_1, \dots, d_r : d_{r+1}, \dots, d_p\} \\ A &= \{a_1, \dots, a_n\} \quad U = \{u_1, \dots, u_q\} \end{aligned}$$

donde B_1 y D_1 son matrices asociadas con los eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. A partir de estas matrices se construye la transformación T como

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} B_2 & 0 & B_1 & B_1 & A & 0 \\ \hline 0 & D_2 & 0 & -D_1 & 0 & E \end{array} \right] \begin{array}{l} m+n \\ p+q \\ m+p-r \quad n+q+r \end{array}$$

tal que $F^* = T^{-1}FT$, $G^* = T^{-1}G$, $(H^*)^T = H^T T$ y $X_{t+1}^* = T^{-1}X_{t+1}$, con lo que se forma el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} 1 \\ X_{t+1}^* \\ 2 \\ X_{t+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X_t^* \\ 2 \\ X_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1^* \\ G_2^* \end{bmatrix} W_t \quad (2.3.59a)$$

$$Y_t = (H^*)^T X_t^* = [(H_1^*)^T, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ X_t^* \\ 2 \\ X_t^* \end{bmatrix} \quad (2.3.59b)$$

donde F_1^* es una matriz de tamaño $(m+p-r) \times (m+p-r)$, de tal modo que los eigenvalores de ésta son los eigenvalores diferentes de F_1 y F_2 . Luego, el subsistema compuesto de F_1^* , G_1^* y $(H_1^*)^T$ es detectable

y controlable. Por otro lado, los eigenvalores de F_2^* (matriz de tamaño $(n+q+r) \times (n+q+r)$) constan de los eigenvalores repetidos, más los ceros de F_1 y F_2 . Ahora, al aplicar el filtro de Kalman al nuevo sistema, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \hat{1}X_{t+1}^* | t \\ \hat{2}X_{t+1}^* | t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{1}X_t^* | t \\ \hat{2}X_t^* | t \end{bmatrix} \quad (2.3.60a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{1}X_t^* | t \\ \hat{2}X_t^* | t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{1}X_t^* | t-1 \\ \hat{2}X_t^* | t-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1C_t^* | t \\ 2C_t^* | t \end{bmatrix} \tilde{Y}_t \quad (2.3.60b)$$

$$\begin{bmatrix} 1C_t^* | t \\ 2C_t^* | t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_t^* | t-1(1,1) & P_t^* | t-1(1,2) \\ P_t^* | t-1(2,1) & P_t^* | t-1(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma_t^{-1} \quad (2.3.60c)$$

$$\Sigma_t = [(H_1^*)^T, 0] \begin{bmatrix} P_t^* | t-1(1,1) & P_t^* | t-1(1,2) \\ P_t^* | t-1(2,1) & P_t^* | t-1(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.60d)$$

que sirven para obtener la estimación del vector de estados X_{t+1}^* , dada la información Y_t^- . Por otro lado, la varianza de éste se obtiene a partir de (2.3.45) como

$$\begin{bmatrix} P_{t+1}^* | t(1,1) & P_{t+1}^* | t(1,2) \\ P_{t+1}^* | t(2,1) & P_{t+1}^* | t(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t^* | t-1(1,1) & P_t^* | t-1(1,2) \\ P_t^* | t-1(2,1) & P_t^* | t-1(2,2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \bar{F}_{1,t}^* & 0 \\ \bar{F}_{2,t}^* & \bar{F}_{3,t}^* \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} Q^*(1,2) & Q^*(1,2) \\ Q^*(2,1) & Q^*(2,2) \end{bmatrix} \quad (2.3.61a)$$

donde

$$\bar{F}_t^* = \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,t}^* \\ K_{2,t}^* \end{bmatrix} [(H_1^*)^T, 0] = \begin{bmatrix} F_1^* - K_{1,t}^* (H_1^*)^T & 0 \\ -K_{2,t}^* (H_1^*)^T & F_2^* \end{bmatrix} \quad (2.3.61b)$$

$$K_t^* = \begin{bmatrix} K_{1,t}^* \\ K_{2,t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1C_t^* | t \\ 2C_t^* | t \end{bmatrix} \quad (2.3.61c)$$

$$G^*Q(G^*)^T = \begin{bmatrix} Q^*(1,1) & Q^*(1,2) \\ Q^*(2,1) & Q^*(2,2) \end{bmatrix} \quad (2.3.61d)$$

Con el fin de estudiar el comportamiento del filtro de Kalman, es necesario trabajar con la ecuación en diferencia de Riccati (2.3.61a), la cual proporciona tres bloques de ecuaciones, que son

$$P_{t+1|t}^*(1,1) = F_1^* P_{t|t-1}^*(1,1) (\bar{F}_{1,t}^*)^T + Q^*(1,1) \quad (2.3.62a)$$

$$P_{t+1|t}^*(2,1) = F_2^* P_{t|t-1}^*(2,1) (\bar{F}_{1,t}^*)^T + Q^*(2,1) \quad (2.3.62b)$$

$$P_{t+1|t}^*(2,2) = F_2^* P_{t|t-1}^*(2,1) (\bar{F}_{2,t}^*)^T + F_2^* P_{t|t-1}^*(2,2) (\bar{F}_{3,t}^*)^T + Q^*(2,2) \quad (2.3.62c)$$

puesto que $P_{t+1|t}^*(1,2) = [P_{t+1|t}^*(2,1)]^T$. Nótese que la ecuación (2.3.62a) es la ecuación en diferencia de Riccati para el subsistema formado por F_1^* , G_1^* y $(H_1^*)^T$, en el cual (F_1^*, H_1^*) es detectable y $\{F_1^*, [Q^*(1,1)]^{1/2}\}$ controlable, donde $([Q^*(1,1)]^{1/2})$ es el bloque superior izquierdo de $G^*Q^{1/2}$. Luego, a partir del teorema 2.3.3 se tiene, $P_{t+1|t}^*(1,1) \rightarrow P^*(1,1)$, $K_{1,t}^* \rightarrow K_1^*$ y $\bar{F}_{1,t}^* \rightarrow \bar{F}_1^*$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde \bar{F}_1^* tiene sus eigenvalores dentro del círculo unitario. Por otro lado, considerando la convergencia de $\bar{F}_{1,t}^*$ a \bar{F}_1^* , la ecuación (2.3.62b) se escribe como

$$P_{t+1|t}^*(2,1) = F_2^* P_{t|t-1}^*(2,1) (\bar{F}_1^*)^T + Q^*(2,1) \quad (2.3.63)$$

Vectorizando ésta, se tiene

$$\text{Vec}\{P_{t+1|t}^{\otimes}(2,1)\} = \{\tilde{F}_1^{\otimes} \otimes F_2^{\otimes}\} \text{Vec}\{P_{t|t-1}^{\otimes}(2,1)\} + \text{Vec}\{Q^{\otimes}(2,1)\}$$

para escribir

$$\{I - (\tilde{F}_1^{\otimes} \otimes F_2^{\otimes})B\} \text{Vec}\{P_{t+1|t}^{\otimes}(2,1)\} = \text{Vec}\{Q^{\otimes}(2,1)\}$$

y poder ver que la ecuación (2.3.63) tiene solución si las raíces de $|I - Z\{\tilde{F}_1^{\otimes} \otimes F_2^{\otimes}\}| = 0$ se encuentran fuera del círculo unitario ó los eigenvalores de $\{\tilde{F}_1^{\otimes} \otimes F_2^{\otimes}\}$ se encuentran dentro de éste. Ya que los eigenvalores del producto Kronecker de \tilde{F}_1^{\otimes} y F_2^{\otimes} , son el producto de los eigenvalores de estas matrices, (2.3.63) tiene una solución $P^{\otimes}(2,1)$. Puesto que los eigenvalores de F_2^{\otimes} se encuentran dentro y sobre, mientras que los correspondientes a \tilde{F}_1^{\otimes} están estrictamente dentro de círculo unitario. Es importante observar que la convergencia de $P_{t+1|t}^{\otimes}(2,1)$ a $P^{\otimes}(2,1)$ no inicia a partir de que $\tilde{F}_{1,t}^{\otimes}$ alcance su límite \tilde{F}_1^{\otimes} , sino en un tiempo $t = \tau$ finito, tal que $\tilde{F}_{1,\tau}^{\otimes}$ tenga sus eigenvalores estrictamente dentro del círculo unitario.

Antes de discutir la ecuación (2.3.62c), nótese que la convergencia de $P_{t+1|t}^{\otimes}(1,1)$ y de $P_{t+1|t}^{\otimes}(2,1)$, ocasiona la convergencia de la ganancia de Kalman (K_t^{\otimes}), de F_t^{\otimes} y de Σ_t . Esto puede verse si se escribe la ecuación (2.3.60d) como

$$\Sigma_t = (H_1^{\otimes})^T P_{t|t-1}^{\otimes}(1,1) H_1^{\otimes} \quad (2.3.64)$$

mientras de las ecuaciones (2.3.60c) y (2.3.61c)

$$K_t^{\otimes} = \begin{bmatrix} K_{1,t}^{\otimes} \\ K_{2,t}^{\otimes} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{\otimes} P_{t|t-1}^{\otimes}(1,1) H_1^{\otimes} \Sigma_t^{-1} \\ F_2^{\otimes} P_{t|t-1}^{\otimes}(2,1) H_1^{\otimes} \Sigma_t^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.3.65)$$

finalmente, mediante esta última expresión se ve la convergencia

de $F_t^{\#}$ (ecuación (2.3.61b)). Ahora, si las ecuaciones (2.3.62a)-(2.3.62b) han alcanzado su solución, la ecuación (2.3.62c) se escribe como

$$\begin{aligned} P_{t+1|t}^{\#}(2,2) &= F_2^{\#} P^{\#}(2,1)(\tilde{F}_2^{\#})^T + F_2^{\#} P_t^{\#}|_{t-1}(2,2)(\tilde{F}_3^{\#})^T + Q^{\#}(2,2) \\ &= F_2^{\#} P^{\#}(2,1)(\tilde{F}_2^{\#})^T + F_2^{\#} P_t^{\#}|_{t-1}(2,2)(F_2^{\#})^T + Q^{\#}(2,2) \end{aligned}$$

de donde

$$P_{t+1|t}^{\#}(2,2) - P_t^{\#}|_{t-1}(2,2) = F_2^{\#} \{ P_t^{\#}|_{t-1}(2,2) - P_{t-1|t-2}^{\#}(2,2) \} (F_2^{\#})^T$$

a partir de la cual

$$\begin{aligned} P_{t+1|t}^{\#}(2,2) &= P_0^{\#}|_{-1}(2,2) + \sum_{i=1}^{t+1} \{ P_i^{\#}|_{i-1}(2,2) - P_{i-1|i-2}^{\#}(2,2) \} \\ &= P_0^{\#}|_{-1}(2,2) + \sum_{i=0}^t (F_2^{\#})^i \{ P_1^{\#}|_0(2,2) - P_0^{\#}|_{-1}(2,2) \} (F_2^{\#})^{iT} \end{aligned}$$

En esta expresión se observa que $P_{t+1|t}^{\#}(2,2)$ tendrá un límite si el segundo sumando es acotado, lo cual no se puede asegurar ya que $F_2^{\#}$ tiene eigenvalores sobre el círculo unitario. Ante esta situación, se considera que la ecuación (2.3.62c) no tiene solución en general.

Tomando en cuenta la discusión anterior con respecto al filtro de Kalman, se mostrará que el estimador que se obtiene mediante éste (después de aplicada la transformación T), coincide en el límite con el obtenido por medio de la extensión de Pierce). Para esto, nótese que (2.3.52a)-(2.3.52b) siguen representando la extensión propuesta por Pierce, sólo que al trabajar con el espacio de estados transformado (2.3.59a)-(2.3.59b), se tiene que cambiar F por $F^{\#}$. Además $\tilde{r}_{-1} = \{\Psi(Z)\}^{-1}$ en (2.3.53) es una serie convergente, aun cuando $\{I + ZF^{\#} + Z^2(\tilde{F}^{\#})^2 + \dots\}$ no lo sea. Esto se puede notar de

$$(H^*)^T \tilde{F}^{-1} K^* = [(H_1^*)^T, 0] \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^{*1} & 0 \\ M_1 & \tilde{F}_2^{*1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1^* \\ K_2^* \end{bmatrix} = (H_1^*)^T \tilde{F}_1^{*1} K_1^*$$

que es el coeficiente de Z^1 en $(H^*)^T \{I + ZF^* + \dots\}K$. De aquí, las relaciones (2.3.54a)-(2.3.54b) también son válidas, pero ahora (2.3.54a) es una serie no convergente, mientras que (2.3.54b) sí lo es.

Del teorema 2.3.5 se sabe que $\hat{X}_t^+ \rightarrow \hat{X}_t = \hat{X}_t|_{t+m}$, con $\hat{X}_t = \gamma(B)Y_t$ dada la información $\{Y_{t'}, | t' \leq t + m, \text{ con } m \geq 0 \text{ finita}\}$. Luego, existe t_ϵ tal que

$$\| (\hat{X}_t^+)^+ - \hat{X}_t^* \| < \epsilon \quad \text{para toda } t \geq t_\epsilon \quad (2.3.66)$$

y se tiene el siguiente resultado

TEOREMA 2.3.6: Sea T una transformación no singular, tal que, el modelo de espacio de estados (2.3.1)-(2.3.2) correspondiente a (2.1.1), es transformado en (2.3.59a)-(2.3.59b) donde $\{F_1^*, (H_1^*)^T\}$ es detectable, $\{F_1^*, [Q^*(1,1)]^{1/2}\}$ controlable, $(H^*)^T = [(H_1^*)^T, 0]$ y los eigenvalores de F_2^* se encuentran dentro o sobre del círculo unitario. Entonces, existe t_ϵ tal que

$$\| \{\hat{X}_t^*|_{t+m}\}^+ - \hat{X}_t^* \| < \epsilon \quad \text{para toda } t \geq t_\epsilon \quad (2.3.67)$$

DEMOSTRACION: Para demostrar este resultado se mostrará, de manera análoga al resultado 2.3.5 que $(\hat{X}_t^*)^+ = \{\hat{X}_t^*|_{t+m}\}^+$, a partir de que los polinomios $\gamma_k(Z)$ y $\gamma(Z)$ nuevamente coinciden para toda t finita. Para esto obsérvese que la ecuación (2.3.54a) se sigue cumpliendo, luego de (2.3.57), $\gamma_k(Z)$ se escribe como

$$\gamma_k(Z) = \left\{ (ZF^*P^*H^* + Z^2(F^*)^2P^*H^* + \dots) + \sum_{i=0}^m Z^{-i}P^*(\tilde{F}^*)^iH^* \right\} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z)$$

$$+ U^{\#}(Z) \quad (2.3.68)$$

donde

$$\begin{aligned} (F^{\#})^{-1} P^{\#} H^{\#} &= \begin{bmatrix} F_1^{\#1} & 0 \\ 0 & F_2^{\#1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{\#}(1,1) & P^{\#}(1,2) \\ P^{\#}(2,1) & P_{1|1-1}^{\#}(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^{\#} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_1^{\#1} & P^{\#}(1,1) & H_1^{\#} \\ F_2^{\#1} & P^{\#}(2,1) & H_1^{\#} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

es el coeficiente de Z^1 , el cual depende únicamente de las soluciones a las ecuaciones algebraicas correspondientes a (2.3.62a) y (2.3.62b), que se obtienen análogamente a (2.3.24) y están dadas por

$$P^{\#}(1,1) = F_1^{\#} P^{\#}(1,1) \tilde{F}_1^{\#T} + Q^{\#}(1,1) \quad (2.3.70a)$$

$$P^{\#}(2,1) = F_2^{\#} P^{\#}(2,1) \tilde{F}_1^{\#T} + Q^{\#}(1,2) \quad (2.3.70b)$$

Mientras que los coeficientes de Z^{-1} , están dados por

$$\begin{aligned} P^{\#} (\tilde{F}^{\#})^{-1T} H &= \begin{bmatrix} P^{\#}(1,1) & P^{\#}(1,2) \\ P^{\#}(2,1) & P_{1|1-1}^{\#}(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{F}_1^{\#})^{-1T} & M_1^T \\ 0 & (\tilde{F}_3^{\#})^{-1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^{\#} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P^{\#}(1,1) & (\tilde{F}_1^{\#})^{-1T} & H_1^{\#} \\ P^{\#}(2,1) & (\tilde{F}_1^{\#})^{-1T} & H_1^{\#} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

Luego, de (2.3.69) y (2.3.71) se puede escribir a (2.3.68) como

$$\begin{aligned} \gamma_k(Z) &= \left\{ \left[Z \begin{bmatrix} F_1^{\#} & P^{\#}(1,1) & H_1^{\#} \\ F_2^{\#} & P^{\#}(2,1) & H_1^{\#} \end{bmatrix} + Z^2 \begin{bmatrix} F_1^{\#2} & P^{\#}(1,1) & H_1^{\#} \\ F_2^{\#2} & P^{\#}(2,1) & H_1^{\#} \end{bmatrix} + \dots \right] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=0}^m Z^{-1} \begin{bmatrix} P^{\#}(1,1) & (\tilde{F}_1^{\#})^{-1T} & H_1^{\#} \\ P^{\#}(2,1) & (\tilde{F}_1^{\#})^{-1T} & H_1^{\#} \end{bmatrix} \right\} \Sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{-1}(Z) + U^{\#}(Z) \quad (2.3.72) \end{aligned}$$

Ahora de (2.3.52b) y (2.3.54b), $\gamma(Z)$ se sigue expresando como (2.3.58), y los coeficientes se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } Z^{-j}: & \sum_{i=0}^{\infty} F_1^{*i} \{G^* Q G^{*T}\} (\tilde{F}_1^*)^{(1+j)T} H_1^* \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} F_1^{*i} Q^*(1,1) (\tilde{F}_1^*)^{(1+j)T} H_1^* \\ F_2^{*i} Q^*(2,1) (\tilde{F}_1^*)^{(1+j)T} H_1^* \end{bmatrix} \quad (2.3.73a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } Z^0: & \sum_{i=0}^{\infty} F_1^{*i} \{G^* Q G^{*T}\} (\tilde{F}_1^*)^{iT} H_1^* \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} F_1^{*i} Q^*(1,1) (\tilde{F}_1^*)^{iT} H_1^* \\ F_2^{*i} Q^*(2,1) (\tilde{F}_1^*)^{iT} H_1^* \end{bmatrix} \quad (2.3.73b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } Z^j: & \sum_{i=0}^{\infty} F_1^{*(1+j)} \{G^* Q G^{*T}\} (\tilde{F}_1^*)^{iT} H_1^* \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} F_1^{*(1+j)} Q^*(1,1) (\tilde{F}_1^*)^{iT} H_1^* \\ F_2^{*(1+j)} Q^*(2,1) (\tilde{F}_1^*)^{iT} H_1^* \end{bmatrix} \quad (2.3.73c) \end{aligned}$$

Que estos coeficientes coinciden con los coeficientes de (2.3.72) para toda j finita, se sigue del hecho que (2.3.73a)-(2.3.73c) son convergentes. Lo que se puede ver, notando primero que las series generadas por los bloques superiores de estos, presentan exactamente la misma situación que los coeficientes de (2.3.58), los cuales se han mostrado que son convergentes, y segundo, la convergencia de las series generadas por los bloques inferiores, se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} \text{Vec}\{F_2^{*i} Q^*(2,1) (\tilde{F}_1^*)^{iT}\} & = \{(\tilde{F}_1^*)^i \bullet F_2^{*i}\} \text{Vec}\{Q^*(2,1)\} \\ & = \{\tilde{F}_1^* \bullet F_2^*\}^i \text{Vec}\{Q^*(2,1)\} \quad (2.3.74) \end{aligned}$$

donde, se ha visto que $\{\tilde{F}_1^* \bullet F_2^*\}$ tiene sus eigenvalores dentro del

círculo unitario. Luego, $\{\bar{F}_1^* \circ F_2^{*i}\} \rightarrow 0$, que implica la convergencia de $\sum \text{Vec} \{\bar{F}_2^{*i} Q^*(2,1) F_1^{*i}\}$ y por lo tanto de $\sum F_2^{*i} Q^*(2,1) (\bar{F}_1^*)^{iT}$, la cual a su vez determina la convergencia de los bloques inferiores para toda j finita. Ahora, si en (2.3.70a) - (2.3.70b) se despejan $Q^*(1,1)$ y $Q^*(2,1)$ para sustituirse en los bloques superior e inferior de (2.3.73a) - (2.3.73c) respectivamente, se obtienen series telescópicas, las cuales convergen a los coeficientes de (2.3.72). Finalmente, (2.3.67) se sigue, puesto que existe t_c tal que (2.3.66) se cumple. ■

104418

CAPITULO III

CONDICIONES INICIALES

Considerando que en la práctica se cuenta con una realización finita de la serie $\{Y_t\}$, el filtro de Kalman proporciona una técnica mediante la cual se puede enfrentar el problema de extracción de señal en la realidad. Puesto que el filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, este capítulo presenta cómo inicializar el filtro en la práctica, de manera que al utilizar éste y el algoritmo de suavizamiento de punto fijo se obtenga el estimador $\hat{X}_t|_{t+m}$ y la covarianza de $X_t - \hat{X}_t|_{t+m}$. Se supone que la información con la que se cuenta son los modelos de las componentes $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$, y una realización finita de la serie observada $\{Y_t\}$.

El capítulo está dividido en cuatro secciones; la primera presenta el modelo de espacio de estados, el cual se considera un sistema mínimo (Aoki, 1987) y (Kohn y Ansley, 1986); las tres secciones subsecuentes corresponden a la obtención de $\hat{X}_t|_{t+m}$ y $P_t|_{t+m}$, considerando las tres situaciones para la estimación del vector de estados presentadas en el capítulo II, lo cual es el enfoque de Bell y Hillmer (1987).

III.1- SISTEMA MÍNIMO

Para construir un modelo de espacio de estados que corresponda a (2.1.1), de tal manera que cuente con el mínimo orden de las matrices involucradas, considérese primero el modelo ARMA de $\{S_t\}$ dado por (2.1.2a), en el cual $\phi_S(B)$ y $\theta_S(B)$ son polinomios de grado m y n respectivamente. Luego, si $h_1 = \max(m, n+1)$ se tiene que

$$X_{1,t+1} = F_1 X_{1,t} + G_1 b_{1,t+1} \quad (3.1.1a)$$

$$S_t = H_1^T X_{1,t} \quad (3.1.1b)$$

es el modelo de espacio de estados para la componente S_t en (2.1.1), $X_{1,t}^1$ es un vector de tamaño $h_1 \times 1$, donde los elementos se definen como

$$X_{1,t}^1 = S_t \quad (3.1.2a)$$

$$X_{1,t}^i = \sum_{j=1}^m \phi_{s,j} S_{t-1+i-j} - \sum_{j=1}^n \theta_{s,j} b_{1,t-1+i-j} \quad \text{con } i=2, \dots, h_1 \quad (3.1.2b)$$

A partir de aquí se definen las matrices F_1 y G_1 de tamaño $(h_1 \times h_1)$ y $(h_1 \times 1)$ respectivamente como

$$F_1 = \begin{bmatrix} \phi_{s,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{s,2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{s,h_1-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \phi_{s,h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\theta_{s,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\theta_{s,h_1-2} \\ -\theta_{s,h_1-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

tomando a $\phi_i = 0$ para $i > m$ y a $\theta_i = 0$ para $i > n$, y $H_1^T = (1, 0, \dots, 0)$ un vector de tamaño $1 \times h_1$. Obsérvese, que de (3.1.2) se tiene $X_{1,t+1}^1 = S_{t+1}$ y del modelo ARMA, S_{t+1} se escribe

$$\begin{aligned} X_{1,t+1}^1 &= \phi_{s,1} S_t + \sum_{j=2}^m \phi_{s,j} S_{t+1-j} - \sum_{j=1}^n \theta_{s,j} b_{1,t+1-j} + b_{1,t+1} \\ &= \phi_{s,1} X_{1,t}^1 + X_{1,t}^2 + b_{1,t+1} \end{aligned} \quad (3.1.4a)$$

Para $i = 2, 3, \dots, h_1-1$, se tiene

$$\begin{aligned} X_{1,t+1}^i &= \sum_{j=1}^m \phi_{s,j} S_{t+1-j} - \sum_{j=1}^n \theta_{s,j} b_{t+1-j} \\ &= \phi_{s,i} S_t + \sum_{j=1+1}^m \phi_{s,j} S_{t+1-j} - \sum_{j=i}^n \theta_{s,j} b_{t+1-j} - \theta_{s,i} b_{1,t+1} \end{aligned}$$

$$= \phi_{s,i} X_{1,t}^1 + X_{1,t}^{1+1} - \theta_{s,i} b_{1,t+1} \quad (3.1.4b)$$

y el elemento h_1 de $X_{1,t+1}$, está dado por $\phi_{s,h_1} S_t - \theta_{s,h_1-1} b_{1,t+1}$. De (3.1.4a), (3.1.4b) y esta última ecuación, se define (3.1.3). Ahora, del modelo ARMA para $\{N_t\}$ dado por (2.1.2b), con $\phi_N(B)$ y $\theta_N(B)$ polinomios de grado p y q respectivamente, se define $h_2 = \max(p, q+1)$ y se construye

$$X_{2,t+1} = F_2 X_{2,t} + G_2 b_{2,t+1} \quad (3.1.5a)$$

$$N_t = H_2^T X_{2,t} \quad (3.1.5b)$$

con $X_{2,t}$, G_2 , H_2^T y F_2 matrices de tamaño $(h_2 \times 1)$, $(h_2 \times 1)$, $(1 \times h_2)$ y $(h_2 \times h_2)$, definidas de manera análoga a las del modelo (3.1.1a)-(3.1.1b). Así, el modelo de espacio de estados para (2.1.1) se forma de (3.1.1)-(3.1.5) como

$$X_t = (X_{1,t}^T, X_{2,t}^T)^T \quad (h \times 1) \quad \text{con } h = h_1 + h_2$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \quad (h \times h) \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \quad (h \times 2)$$

$$H^T = (H_1^T, H_2^T) \quad \text{y} \quad W_t = (b_{1,t}, b_{2,t})^T \quad (3.1.6)$$

Nótese que nuevamente S_t y N_t son los primeros elementos de $X_{1,t}$ y $X_{2,t}$, de tal manera que Y_t se obtiene de la ecuación de observación como, $Y_t = H^T X_t = H_1^T X_{1,t} + H_2^T X_{2,t} = S_t + N_t$. El modelo de espacio de estados (3.1.6) se considera mínimo dimensional, ya que la conversión de los modelos ARMA correspondientes a $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$, a modelos de espacio de estados son de mínima dimensión. La ventaja del espacio de estados que se obtiene de (3.1.5), además de los aspectos numéricos de manejar matrices de menor dimensión, permite seguir las ideas de Bell y Hillmer (1987) para deducir las condiciones que permitirán, mediante el filtro de Kalman obtener $\hat{X}_{t|t+m}$ y $P_{t|t+m}$.

III.2- Sistema estable, (F,H) detectable y (F,D) controlable

Para inicializar el filtro de Kalman es necesario contar con la media y la covarianza del vector de estados X_0 . El problema se enfrentará considerando que el vector de estados X_0 tiene media igual a cero y se encontrará la solución de la ecuación algebraica de Riccati (cuando ésta exista), lo que permitirá obtener a $\hat{X}_t|t+m$ y $P_t|t+m$ para toda t .

Recuérdese que en este caso se trabaja con series estacionarias y las variables S_t y N_t tienen media cero, luego es posible encontrar la media de X_0 y a la matriz P , al notar de (3.1.2) que el vector de estados $X_{1,t}$ se escribe como

$$X_{1,t} = \phi_{\sim s} S_t^{t+1-m} + \theta_{\sim s} b_{1,t}^{t+1-n} \quad (3.2.1a)$$

donde

$$S_t^{t+1-m} = [S_{t+1-m}, S_{t+2-m}, \dots, S_{t-1}, S_t]^T \quad (3.2.1b)$$

$$b_{1,t}^{t+1-n} = [b_{1,t+1-n}, b_{1,t+2-n}, \dots, b_{1,t-1}, b_{1,t}]^T \quad (3.2.1c)$$

$$\phi_{\sim s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \phi_{s,m} & \phi_{s,m-1} & \dots & \phi_{s,2} & 0 \\ 0 & \phi_{s,m} & \dots & \phi_{s,3} & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \phi_{s,m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_{s,m} & 0 \end{bmatrix} \quad (h_1 \times m) \quad (3.2.1d)$$

$0_{(h_1-m) \times m}$

y

$$\underline{\theta}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\theta_{s,n} & -\theta_{s,n-1} & \dots & -\theta_{s,2} & -\theta_{s,1} \\ 0 & -\theta_{s,n} & \dots & -\theta_{s,3} & -\theta_{s,2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\theta_{s,n} \\ 0_{(h_1-n) \times n} \end{bmatrix} \quad (h_1 \times n) \quad (3.2.1e)$$

Debido a que $X_{2,t}$ se define de manera análoga a $X_{1,t}$, se tiene que

$$X_{2,t} = \underline{\phi}_N N_t^{t+1-p} + \underline{\theta}_N b_{2,t}^{t+1-q} \quad (3.2.2)$$

donde $\underline{\phi}_N$, $\underline{\theta}_N$, N_t^{t+1-p} y $b_{2,t}^{t+1-q}$ están definidos de la misma forma que (3.2.1b)-(3.2.1e). Luego, de (3.2.1)-(3.2.2) se obtiene que

$$X_t = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_S & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_t^{t+1-m} \\ N_t^{t+1-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\theta}_S & 0 \\ 0 & \underline{\theta}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,t}^{t+1-n} \\ b_{2,t}^{t+1-q} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

A partir de donde se observa que $E(X_t) = 0$ y la covarianza de X_t está dada por

$$E(X_t X_t^T) = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_S & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}\{S_t^{t+1-m}\} & 0 \\ 0 & \text{Var}\{N_t^{t+1-p}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\phi}_S & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_N \end{bmatrix}^T \\ + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \underline{\theta}_S \underline{\theta}_S^T & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \underline{\theta}_N \underline{\theta}_N^T \end{bmatrix} + N + N^T \quad (3.2.4a)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} \phi_S \text{Cov}\{S_t^{t+1-m}, b_{1,t}^{t+1-n}\} \theta_S^T & 0 \\ 0 & \phi_N \text{Cov}\{N_t^{t+1-p}, b_{2,t}^{t+1-q}\} \theta_N^T \end{bmatrix} \quad (3.2.4b)$$

En (3.2.4a), $\text{Var}\{S_t^{t+1-m}\}$ es la matriz de covarianzas del modelo ARMA de $\{S_t\}$, $\text{Var}\{N_t^{t+1-p}\}$ es la matriz de covarianzas del modelo ARMA de $\{N_t\}$ y en (3.2.4b) los elementos de $\text{Cov}\{S_t^{t+1-m}, b_{1,t}^{t+1-n}\}$ están dados por

$$\text{Cov}(S_t, b_{1,j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > t \\ \sigma_1^2 \psi_{S,t-j} & \text{si } j \leq t \end{cases} \quad (3.2.4c)$$

con $\psi_S(B) = \frac{\theta_S(B)}{\phi_S(B)} = \{\psi_{S,0} + \psi_{S,1} + \dots\}$, los elementos de

$\text{Cov}\{N_t^{t+1-p}, b_{2,t}^{t+1-q}\}$ están definidos de manera similar por

$\text{Cov}(N_t, b_{2,j})$ y $\psi_N(B) = \frac{\theta_N(B)}{\phi_N(B)}$. Entonces, el vector de estados X_0

tiene media $E(X_0) = \hat{X}_0|_{-1} = 0$ y de (3.2.4) se observa que $E(X_t X_t^T)$ involucra elementos estacionarios y por lo tanto las matrices de covarianzas que se involucran en el cálculo, no dependen del tiempo (Box y Jenkins, 1976). Luego, la solución de la ecuación algebraica de Riccati P, está dada por (3.2.4) y se inicializa el filtro de Kalman y el algoritmo de suavizamiento de punto fijo con $\hat{X}_0|_{-1} = 0$ y $P_0|_{-1} = P$.

III.3- (F,H) detectable y (F,D) controlable

En este caso, se trabaja con series no estacionarias, las cuales están generadas por (2.1.3a)-(2.1.3b) y los polinomios $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ no tienen raíces en común. Ahora el problema que se presenta al tratar de obtener P, se puede ver a partir de (3.2.4a), ya que $E(X_t X_t^T)$ depende de $\text{Var}\{S_t^{t+1-m}\}$ y $\text{Var}\{N_t^{t+1-p}\}$, las cuales a su vez dependen del tiempo ($\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ son series no

estacionarias). Luego, P se podrá calcular si la covarianza del estado inicial es conocida. Así, se enfrenta el problema de la falta de dicha información. En esta situación se encuentra, haciendo uso de la información con la que se cuenta, un estimador del vector de estados, no en $t = 0$ sino en un tiempo $t = d$, esto es, se obtiene $\hat{X}_d|d$ y $P_d|d$. A partir de donde es posible obtener P, la cual se sabe que existe por el teorema 2.3.3. Con este objetivo, primero se presentan las consideraciones para obtener el estimador y posteriormente se presentan algunos resultados que, junto con el modelo de espacio de estados presentado en III.1, permitirán obtener P.

Como las series $\{S_t\}$ y $\{N_t\}$ son no estacionarias, se sigue de (2.1.4a) y (2.1.4b) que

$$\delta_S(B)S_t = U_t \quad \text{con } U_t = \psi_S(B)b_{1,t} \quad (3.3.1a)$$

$$\delta_N(B)N_t = V_t \quad \text{con } V_t = \psi_N(B)b_{2,t} \quad (3.3.1b)$$

donde $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$ son series estacionarias. Luego, si se supone que $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ son polinomios de grado ds y dn respectivamente, se tiene de (3.3.1a)-(3.3.1b) que

$$S_t = \delta_{s,1}S_{t-1} + \delta_{s,2}S_{t-2} + \dots + \delta_{s,ds}S_{t-ds} + U_t \quad (3.3.2a)$$

$$N_t = \delta_{n,1}N_{t-1} + \delta_{n,2}N_{t-2} + \dots + \delta_{n,dn}N_{t-dn} + V_t \quad (3.3.2b)$$

con $\delta_{s,i}$ y $\delta_{n,i}$ coeficientes de $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ respectivamente. De aquí, obsérvese que $\{S_t\}$ se puede obtener recursivamente (para $t > ds$) si se cuenta con ds valores iniciales y con $\{U_t\}$, asimismo $\{N_t\}$ se obtiene contando con dn valores iniciales y con $\{V_t\}$ (para $t > dn$). Entonces, al notar en (3.2.3) que X_t depende de S_t y N_t , se tiene que X_t necesitará de $d = ds + dn$ valores iniciales y de elementos de las series estacionarias $\{U_t\}$ y $\{V_t\}$. Luego, de (3.1.6) se tiene el modelo de espacio de estados

$$X_{t+1} = F X_t + G W_{t+1} \quad (3.3.3a)$$

$$Y_t = H^T X_t \quad (3.3.3b)$$

donde el vector de estados X_t depende de un vector de valores iniciales η de tamaño $d \times 1$, además de elementos estacionarios. Así, el vector de estados en $t = 0$ puede escribirse como

$$X_0 = \phi \eta + \zeta \quad (3.3.4)$$

donde ζ es una combinación de los elementos estacionarios y ϕ es una matriz de tamaño $h \times d$. Se sigue de (3.3.3)-(3.3.4) que

$$X_t = \phi_t \eta + v_t \quad (3.3.5a)$$

$$Y_t = A_t^T \eta + \pi_t \quad (3.3.5b)$$

donde en (3.3.5a)

$$\phi_t = F^t \phi \quad \text{y} \quad v_t = F^t \zeta + \sum_{i=0}^{t-1} F^{t-i-1} G W_{i+1} \quad (3.3.5c)$$

Mientras que en (3.3.5b)

$$\pi_t = H^T v_t \quad \text{y} \quad A_t^T = H^T F^t \phi_t \quad (3.3.5d)$$

Entonces, si se cuenta con $Y_n^1 = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T$ y se construye la matriz A de tamaño $d \times d$, utilizando A_j^T para $j = 1, 2, \dots, d$, como el renglón j (en (3.3.5b) se puede ver que A_j^T es de tamaño $1 \times d$), con el propósito de transformar la información Y_n^1 (suponiendo que A es no singular) como

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -A_{d+1}^T A^{-1} & \\ -A_{d+2}^T A^{-1} & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ -A_n^T A^{-1} & \end{array} \right] Y^1 \quad (3.3.6)$$

donde Z_1 es de tamaño $d \times 1$ y Z_2 es de tamaño $(n-d) \times 1$. A partir de (3.3.5b) se escribe

$$Y_d^1 = A \underset{\sim}{\eta} + \pi_d^1 \quad (3.3.7)$$

para obtener de la transformación (3.3.6), que

$$Z_1 = A^{-1} Y_d^1 = \underset{\sim}{\eta} + A^{-1} \pi_d^1 \quad (3.3.8)$$

de donde se sigue que Z_2 no depende de los valores iniciales (que es información desconocida), así como también

$$\begin{aligned} X_t - \underset{\sim}{\phi}_t Z_1 &= X_t - \underset{\sim}{\phi}_t A^{-1} Y_d^1 \\ &= X_t - \underset{\sim}{\phi}_t \underset{\sim}{\eta} - \underset{\sim}{\phi}_t A^{-1} \pi_d^1 \\ &= v_t - \underset{\sim}{\phi}_t A^{-1} \pi_d^1 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

que se obtiene de (3.3.5a) y (3.3.8), no depende de dichos valores. Que Z_2 no depende de η , se puede ver al escribir, (a partir de (3.3.8)) a $\underset{\sim}{\eta} = A^{-1} Y_d^1 - A^{-1} \pi_d^1$ y notando de (3.3.5b)-(3.3.6) que el elemento i de Z_2 se escribe como

$$Z_2^i = -A_{d+1}^T A^{-1} Y_d^1 + Y_{d+1}$$

$$\begin{aligned}
&= -A_{d+1}^T A^{-1} Y_d^1 + A_{d+1}^T \tilde{\eta} + \pi_{d+1} \\
&= -A_{d+1}^T A^{-1} Y_d^1 + A_{d+1}^T \{A^{-1} Y_d^1 - A^{-1} \pi_d^1\} + \pi_{d+1} \\
&= -A_{d+1}^T A^{-1} \pi_d^1 + \pi_{d+1}
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

La importancia de que (3.3.9) y Z_2 no dependan de $\tilde{\eta}$, asegura que estos dependen únicamente de elementos estacionarios. Luego, se define el estimador de X_t basado en la información Y_n^1 , de tal manera que las primeras d observaciones de Y_t son utilizadas como una primera estimación, para explicar la dependencia de los valores iniciales $\tilde{\eta}$ sobre el estado X_t (ecuación (3.3.8)). El error ocasionado por esta primera estimación (ecuación (3.3.9)), que depende únicamente de los elementos estacionarios, es estimado por la información transformada restante (estimación que no dependerá del tiempo). Esto es

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t|n &= \tilde{\phi}_t Z_1 + E\{X_t - \tilde{\phi}_t Z_1 | Z_2\} \\
&= \tilde{\phi}_t A^{-1} Y_d^1 + E\{v_t - \tilde{\phi}_t A^{-1} \pi_d^1 | Z_2\}
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

de donde también se tiene

$$X_t - \hat{X}_t|n = \{v_t - \tilde{\phi}_t A^{-1} \pi_d^1\} - E\{v_t - \tilde{\phi}_t A^{-1} \pi_d^1 | Z_2\} \tag{3.3.12}$$

la cual sólo depende de los elementos estacionarios, así se puede obtener $P_t|n$ de tal manera que no dependa de t . Ahora, el siguiente resultado permite relacionar el estimador de X_t que se obtiene mediante (3.3.11), con el obtenido por el filtro de Kalman junto con el suavizamiento de punto fijo.

PROPOSICION 3.3.1: Si Y_n^1 es un vector aleatorio con distribución normal, media cero y el vector Y_d^1 es independiente de $\{W_t\}$ y ζ . Entonces $\hat{X}_t|n = E(X_t | Y_n^1)$, donde $\hat{X}_t|n$ está dado por (3.3.11).

DEMOSTRACION: De (3.3.12) se tiene que, si Y_d^1 es independiente de $\{W_t\}$ y ζ , $X_t - \hat{X}_t|_n$ es independiente de Y_d^1 . Para demostrar esto, obsérvese de (3.3.5c), que v_t es una combinación lineal de $\{W_t\}$ y ζ , luego de (3.5.5) π_t y de (3.3.10) Z_2 , son combinaciones lineales de estos. Así que Y_d^1 es independiente de $X_t - \hat{X}_t|_n$. También de (3.3.12) se tiene que Z_2 es independiente de $X_t - \hat{X}_t|_n$, notando la no correlación de $E\{X_t - \hat{X}_t|_n | Z_2\} = 0$, y de (3.3.6) la distribución normal de Z_2 . Ahora, como Y_n^1 es una combinación lineal de Y_d^1 y Z_2 (ecuación (3.3.6)), Y_n^1 es independiente de $X_t - \hat{X}_t|_n$ y se tiene que $E\{X_t - \hat{X}_t|_n | Y_n^1\} = 0$, de donde $\hat{X}_t|_n = E(X_t | Y_n^1)$. ■

A partir de este resultado se sigue que, si las primeras d observaciones de $\{Y_t\}$ son independientes de $\{W_t\}$ y ζ , el estimador dado por (3.3.11) y el obtenido mediante el filtro de Kalman junto con el suavizamiento de punto fijo coinciden. Luego, (3.3.11) se utiliza para obtener $\hat{X}_d|d$ y $P_d|d$ que se empleará para encontrar P . Puede considerarse a (3.3.11) como una alternativa para la estimación del vector de estados, pero el uso de ésta ocasiona serias dificultades numéricas (Ansley y Kohn, 1985 y Kohn y Ansley, 1986). Entonces, para obtener dicho estimador considérese que se cuenta únicamente con las observaciones Y_d^1 , donde $Y_d^1 = A \eta + \pi_d^1$, usando (3.3.11) se tiene

$$\hat{X}_t|d = \Phi_t A^{-1} Y_d^1 = \Phi_t \eta + A^{-1} \pi_d^1 \quad \text{con } t = 1, \dots, d \quad (3.3.13)$$

de donde se observa que, de los d estimadores dados por (3.3.13) únicamente el de $t = d$ es útil para emplear el algoritmo (ver filtro de Kalman), también obsérvese que para obtener $\hat{X}_d|d$ es necesario el conocimiento de Φ_d , que depende de la expresión dada

a X_0 (ecuaciones (3.3.4)-(3.3.5)). Para evitar esta dependencia se considera como el estado inicial a $t = d$, que por (3.3.5a) se escribe como

$$X_d = \phi \eta + \nu \quad (3.3.14)$$

y de (3.3.13) se tiene que

$$\hat{X}_{d|d} = \phi A^{-1} y_d^1 = \phi \eta + \phi A^{-1} \pi_d^1 \quad (3.3.15)$$

es un estimador de X_d con error

$$X_d - \hat{X}_{d|d} = \nu - \phi A^{-1} \pi_d^1 \quad (3.3.16)$$

el cual por (3.3.9), únicamente depende de elementos estacionarios, lo que permite obtener $P_{d|d}$ y considerando la proposición 3.3.1 se tiene que $E(X_d | Y_d^1) = \hat{X}_{d|d}$.

Con el fin de aplicar las ideas expuestas para inicializar el filtro de Kalman, es necesario encontrar una matriz A no singular, de tal forma que permita tener a (3.3.7), así como también la expresión (3.3.14). Para esto, considérese a S_t , y recuérdese que ésta se genera de (3.3.2a) para $t > ds$, si se cuenta con ds valores iniciales y $\{U_t\}$. Ahora se presenta un forma alterna para generar a S_t , que permite encontrar las expresiones mencionadas, así como A no singular (Bell, 1984). Para esto, primero se definen las cantidades $A_{j,t}^S$ para $j = 1, \dots, ds$ y $t \geq 1$ como

$$A_{1,t}^S = \xi_{s,t-1} - \delta_{s,1} \xi_{s,t-2} - \dots - \delta_{s,ds-1} \xi_{s,t-ds}$$

$$A_{2,t}^S = \xi_{s,t-2} - \delta_{s,1} \xi_{s,t-3} - \dots - \delta_{s,ds-2} \xi_{s,t-ds}$$

.

.

.

$$A_{ds-1,t}^S = \xi_{s,t-ds+1} + \delta_{s,1} \xi_{s,t-ds}$$

$$A_{ds,t}^S = \xi_{s,t-ds} \quad (3.3.17a)$$

donde $\xi_{s,i}$ para $i \geq 0$, es el coeficiente de B^i en

$$(\xi_{s,0} + \xi_{s,1}B + \dots)\delta_s(B) = 1 \quad (3.3.17b)$$

y $\xi_{s,i} = 0$ para $i < 0$, $\delta_{s,i}$ son los coeficientes de $\delta_s(B)$. Luego

$$A_{j,t}^S = \begin{cases} 1 & \text{si } j = t \\ 0 & \text{si } j \neq t \\ \delta_{s,1}A_{j,t-1}^S + \dots + \delta_{s,ds}A_{j,t-ds}^S & \text{si } t > ds \end{cases} \quad t = 1, \dots, ds \quad (3.3.18)$$

que se puede ver, si se nota que para $t = 1, \dots, ds$ se tiene $A_{j,t}^S = \delta_s(B)\xi_{s,t-j}$ y de (3.3.17b), se tiene que $\delta_s(B)\xi_{s,i} = 0$ para $i \geq 1$ y $i = 0$ (donde B opera sobre el subíndice i), así $A_{j,t}^S = 0$ si $t \neq j$ y $t = 0$. Ahora, si $t > ds$ se tiene que

$$A_{j,t}^S = \xi_{s,t-j} - \delta_{s,1}\xi_{s,t-j-1} - \dots - \delta_{s,ds-j}\xi_{s,t-ds} \quad (3.3.19)$$

y como $\delta_s(B)\xi_{s,i} = 0$ para $i \geq 1$, se sigue de (3.3.19) que $\delta_s(B)A_{j,t}^S = 0$, luego

$$\delta_s(B)A_{j,t}^S = A_{j,t}^S - \delta_{s,1}A_{j,t-1}^S - \dots - \delta_{s,ds}A_{j,t-ds}^S = 0$$

y

$$A_{j,t}^S = \delta_{s,1}A_{j,t-1}^S + \dots + \delta_{s,ds}A_{j,t-ds}^S \quad (3.3.20)$$

Definidas las cantidades $A_{j,t}^S$ para $t \geq 1$, se puede escribir a S_t , para $t \geq 1$, como

$$S_t = \begin{cases} A_{s,t}^T S_0 & \text{si } t = 1, \dots, ds \\ A_{s,t}^T S_0 + \sum_{i=0}^{t-ds-1} \xi_{s,i} U_{t-1} & \text{si } t > ds \end{cases} \quad (3.3.21)$$

donde $A_{s,t}^T = [A_{1,t}^S, A_{2,t}^S, \dots, A_{ds,t}^S]$ y S_0 son los ds valores iniciales, los cuales se considera que están dados por $S_{ds}^1 =$

$[S_1, S_2, \dots, S_{ds}]^T$, dichos valores pueden ser considerados debido a que no existen supuestos sobre su localización en el tiempo. Para demostrar que S_t se puede generar por (3.2.21), primero se demostrará el siguiente resultado.

LEMA 3.3.2: Para $t > ds$

$$\left\{ \sum_{i=0}^{t-ds-1} \xi_{s,i} B^i \right\} \delta_s(B) = 1 - \sum_{i=1}^{ds} A_{1,t}^s B^{t-i} \quad (3.3.22)$$

DEMOSTRACION: Desarrollando el polinomio del lado izquierdo de (3.3.22), se tiene que el coeficiente de B^0 es $\xi_{s,0} = 1$, los coeficientes de B^j para $j = 1, \dots, t-ds-1$ están dados por

$$\delta_s(B) \xi_{s,j} = \xi_{s,j} - \delta_{s,1} \xi_{s,j-1} - \dots - \delta_{s,ds} \xi_{s,j-ds} \quad (3.3.23)$$

los cuales son iguales a cero ya que $\delta_s(B) \xi_{s,i} = 0$ para $i \geq 1$ y $\xi_{s,i} = 0$ para $i < 0$, mientras los coeficientes de B^j para $j = t-ds, \dots, t-1$, son los coeficientes de B^{t-i} para $i = 1, 2, \dots, ds$, y están dados por

$$-\delta_{s,ds-1+i} \xi_{s,t-ds-1} - \dots - \delta_{s,ds} \xi_{s,t-ds-1} \quad (3.3.24)$$

como $\delta_s(B) \xi_{s,t-1} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_s(B) \xi_{s,t-1} &= \xi_{s,t-1} - \delta_{s,1} \xi_{s,t-2} - \dots - \delta_{s,ds-1} \xi_{s,t-ds} \\ &\quad - \delta_{s,ds-1+i} \xi_{s,t-ds-1} - \dots - \delta_{s,ds} \xi_{s,t-ds-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Luego de (3.3.19), se escribe a (3.3.25) como

$$A_{1,t}^s - \delta_{s,ds-1+i} \xi_{s,t-ds-1} - \dots - \delta_{s,ds} \xi_{s,t-ds-1} = 0 \quad (3.3.26)$$

y de (3.3.24), el coeficiente de B^{t-1} es igual a $-A_{1,t}^s$ ■

TEOREMA 3.3.3: Sea $\delta_s(B)S_t = U_t$, donde $\delta_s(B)$ es un polinomio de grado ds y $\{S_t\}$ es generado por los valores iniciales $S_0 = S_{ds}^1$ y $\{U_t\}$. Entonces, para $t \geq 1$, S_t se escribe como (3.3.21).

DEMOSTRACION: Obsérvese que para $t = 1, \dots, ds$, $A_{s,t}^T = [A_{1,t}^s, \dots, A_{ds,t}^s]$ es un vector cuyo elemento j es 0 si $j \neq t$ y 1 si $j = t$ (ecuación (3.3.18)), luego se sigue que $S_t = A_{s,t}^T S_0$ para $t = 1, \dots, ds$. Ahora, para $t > ds$ se tiene, aplicando el lema 3.3.2, que

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{ds} A_{1,t}^s B^{t-1} \right\} S_t &= S_t - \sum_{i=1}^{ds} A_{i,t}^s S_i \\ &= S_t - A_{s,t}^T S_0 \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

y

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{ds} A_{1,t}^s B^{t-1} \right\} S_t &= \left\{ \sum_{i=0}^{t-ds-1} \epsilon_{s,i} B^i \right\} \delta_s(B) S_t \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{t-ds-1} \epsilon_{s,i} B^i \right\} U_t \\ &= \sum_{i=0}^{t-ds-1} \epsilon_{s,i} U_{t-1} \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

así que, de (3.3.27) y (3.3.28)

$$S_t = A_{s,t}^T S_0 + \sum_{i=0}^{t-ds-1} \epsilon_{s,i} U_{t-1} \quad \blacksquare$$

A partir de (3.3.1a) es posible generar S_t para $t \leq 0$ como

$$S_t = \delta_{s,ds}^{-1} (S_{t+ds} - \delta_{s,1} S_{t+ds-1} - \dots - \delta_{s,ds-1} S_{t+1} - U_{t+ds})$$

para obtener una representación análoga a (3.3.21), que permita generar a S_t para $t \leq 0$ contando con S_0 y U_j con $j \leq ds$, obsérvese que $\delta_s(B)$ es un polinomio cuyas raíces se encuentran sobre el círculo unitario y se puede escribir como $\delta_s(B) = \left[1-B \right]^{d_1} \left[1-B^E \right]^{d_2}$ y $ds = d_1 + d_2 E$, esto es, los factores de $\delta_s(B)$ son diferencias

ordinarias ($\nabla_1^{d_1}$) y diferencias estacionales ($\nabla_E^{d_2}$). Luego, se tiene que $\delta_S(B)$ se factoriza como

$$\begin{aligned} \delta_S(B) &= \left[1-B\right]^{d_1} \left[1-B\right]^{d_2} \left\{ \sum_{i=0}^{E-1} B^i \right\}^{d_2} \\ &= \left[-1\right]^{d_1+d_2} \left[B\right]^{d_1+d_2} \left[1-F\right]^{d_1} \left[1-F\right]^{d_2} \left\{ B^{E-1} \sum_{i=0}^{E-1} F^i \right\}^{d_2} \\ &= \left[-1\right]^{d_1+d_2} \left[B\right]^{d_1+d_2E} \left[1-F\right]^{d_1} \left[1-F\right]^{d_2} \left\{ \sum_{i=0}^{E-1} F^i \right\}^{d_2} \\ &= (-1)^{\rho_S} B^{ds} \delta_S(F) \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

donde $\rho_S = d_1 + d_2$ es el número de veces que aparece el factor $(1-B)$ en $\delta_S(B)$ y $F = B^{-1}$ es el operador de adelanto. Entonces, de (3.3.1a) y (3.3.29) se tiene que $\delta_S(B)S_t = (-1)^{\rho_S} B^{ds} \delta_S(F)S_t = U_t$ y $\delta_S(F)S_t = (-1)^{\rho_S} F^{ds} U_t = (-1)^{\rho_S} U_{t+ds}$, escribiendo $\delta_S(B) = I_t$ y $I_t = (-1)^{\rho_S} U_{t+ds}$, es posible generar a S_t para $t \leq 0$, como $\delta_S(B)S_\ell = I_\ell$ con $\ell = -t+ds+1$, para $\ell > ds$ y S_* valores iniciales. Esto es, en lugar de generar S_t para $t \leq 0$, se genera S_ℓ para $\ell \geq ds + 1$, lo que permite definir $A_{j,\ell}^S$ como en (3.3.18), o sea

$$A_{j,\ell}^S = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \ell \\ 0 & \text{si } j \neq \ell \\ \delta_{s,1} A_{j,\ell-1}^S + \dots + \delta_{s,ds} A_{j,\ell-ds}^S & \text{si } \ell-ds \geq 1 \end{cases} \quad \ell = 1, \dots, ds \quad (3.3.30)$$

y por el teorema 3.3.3 se tiene que

$$S_\ell = \begin{cases} A_{s,\ell}^T S_* & \text{si } \ell = 1, \dots, ds \\ A_{s,\ell}^T S_* + \sum_{i=0}^{\ell-ds-1} \xi_{s,i} I_{\ell-i} & \text{si } \ell-ds \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.31)$$

donde $A_{s,\ell}^T = [A_{1,\ell}^S, \dots, A_{ds,\ell}^S]$. Al notar que S_ℓ para $\ell = 1, \dots, ds$, se tiene a S_t para $t = 1, \dots, ds$, esto es, los valores iniciales S_* . De (3.3.21) y (3.3.31) se sigue

$$S_t = A_{s,t}^T S_* = A_{s,t}^T S_* = S_t \quad \text{para } t = 1, \dots, ds \quad (3.3.32)$$

luego, como $l = -t+ds+1$ de (3.3.30) se tiene para $l-ds \geq 1$, que

$$A_{j,t}^S = \delta_{s,1} A_{s,t+1}^S + \dots + \delta_{s,ds} A_{s,t+ds}^S \quad \text{para } t \leq 0 \quad (3.3.33)$$

y de (3.3.31) para $l-ds \geq 1$ a

$$\begin{aligned} S_t &= A_{s,t}^T S_* + \sum_{i=0}^{-t} \xi_{s,i} I_{t+1} \\ &= A_{s,t}^T S_* + (-1)^{\rho S} \sum_{i=0}^{-t} \xi_{s,i} U_{t+ds+1} \quad \text{para } t \leq 0 \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

esta última se obtiene recordando que $I_t = (-1)^{\rho S} U_{t+ds}$. Entonces, de (3.3.18) y (3.3.33) se definen las cantidades $A_{j,t}^S$ para $j = 1, \dots, ds$ y para toda t como

$$A_{j,t}^S = \begin{cases} 1 & \text{si } j = t & t = 1, \dots, ds \\ 0 & \text{si } j \neq t \\ \delta_{s,1} A_{j,t-1}^S + \dots + \delta_{s,ds} A_{j,t-ds}^S & \text{si } t > ds \\ \delta_{s,1} A_{j,t+1}^S + \dots + \delta_{s,ds} A_{j,t+ds}^S & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.35)$$

A partir de (3.3.21), (3.3.34) y (3.3.35) se genera S_t para toda t , como

$$S_t = \begin{cases} A_{s,t}^T S_* & \text{si } t=1, \dots, ds \\ A_{s,t}^T S_* + \sum_{i=0}^{t-ds-1} \xi_{s,i} U_{t-1} & \text{si } t > ds \\ A_{s,t}^T S_* + (-1)^{\rho S} \sum_{i=0}^{-t} \xi_{s,i} U_{t+ds+1} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.36)$$

donde $A_{s,t}^T = [A_{1,t}^S, \dots, A_{ds,t}^S]$, $S_* = S_d^1$ y $\xi_{s,i}$ es el coeficiente de B^i en $(\xi_{s,0} + \xi_{s,1} B + \dots) \delta_s(B) = 1$. De manera análoga se definen

las cantidades $A_{j,t}^N$ para $j = 1, \dots, dn$ y se genera a N_t como

$$N_t = \begin{cases} A_{N,t}^T N_* & \text{si } t=1, \dots, dn \\ A_{N,t}^T N_* + \sum_{i=0}^{t-dn-1} \xi_{N,i} V_{t-i} & \text{si } t > dn \\ A_{N,t}^T N_* + (-1)^{\rho N} \sum_{i=0}^{-t} \xi_{N,i} V_{t+dn+i} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.37)$$

donde $A_{N,t}^T = [A_{1,t}^N, \dots, A_{dn,t}^N]$, $N_* = N_{dn}^1$, ρN es el número de veces que el factor $(1-B)$ aparece en $\delta_N(B)$ y $\xi_{N,i}$ es el coeficiente de B^i en $(\xi_{N,0} + \xi_{N,1}B + \dots)\delta_N(B) = 1$.

Generar a S_t y N_t mediante (3.3.36) y (3.3.37), permitirá obtener $\hat{X}_{d|d}$ y $P_{d|d}$ de acuerdo a los requerimientos presentados. Para esto se considera que se cuenta con las primeras d observaciones de la serie $\{Y_t\}$ y que las posteriores observaciones siguen el modelo de espacio de estados dado por (3.1.6). Por conveniencia se toman como los ds valores iniciales para generar S_t a $S_* = S_d^{d+1-ds} = [S_{d+1-ds}, \dots, S_d]^T$ y como los dn valores iniciales para generar N_t a $N_* = N_d^{d+1-dn}$. Luego, (3.3.36) y (3.3.37) se escriben como

$$S_t = \begin{cases} A_{S,t+ds-d}^T S_* & \text{si } t = d+1-ds, \dots, d \\ A_{S,t+ds-d}^T S_* + \sum_{i=0}^{t-d-1} \xi_{S,i} U_{t-i} & \text{si } t > d \\ A_{S,t+ds-d}^T S_* + (-1)^{\rho S} \sum_{i=0}^{d-ds-t} \xi_{S,i} U_{t+ds+i} & \text{si } t \leq d-ds \end{cases} \quad (3.3.38)$$

$$N_t = \begin{cases} A_{N,t+dn-d}^T S_* & \text{si } t = d+1-dn, \dots, d \\ A_{N,t+dn-d}^T S_* + \sum_{i=0}^{t-d-1} \xi_{N,i} V_{t-i} & \text{si } t > d \\ A_{N,t+dn-d}^T S_* + (-1)^{\rho N} \sum_{i=0}^{d-dn-t} \xi_{N,i} V_{t+dn+i} & \text{si } t \leq d-dn \end{cases} \quad (3.3.39)$$

Como $Y_t = S_t + N_t$, se tiene que $Y_d^1 = S_d^1 + N_d^1$ y de (3.3.38)

$$S_d^1 = \begin{bmatrix} S_{d-ds}^1 \\ S_{d-ds+1}^1 \\ \vdots \\ S_*^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{d-ds}^1 \\ S_*^1 \end{bmatrix} = A_d^S S_* + C_d^S U_d^{ds+1} \quad (3.3.40a)$$

donde

$$A_d^S = \begin{bmatrix} A_{s,1+ds-d}^T \\ A_{s,2+ds-d}^T \\ \vdots \\ A_{s,0}^T \\ I_{ds \times ds} \end{bmatrix} \quad d \times ds \quad (3.3.40b)$$

y

$$C_d^S = (-1)^{ps} \begin{bmatrix} \xi_{s,0} & \xi_{s,1} & \cdots & \xi_{s,d-ds-1} \\ 0 & \xi_{s,0} & \cdots & \xi_{s,d-ds-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_{s,0} \\ & & & 0_{ds \times (d-ds)} \end{bmatrix} \quad d \times (d-ds) \quad (3.3.40c)$$

De manera análoga se escribe N_d^1 mediante (3.3.39) como

$$N_d^1 = A_d^N N_* + C_d^N V_d^{dn+1} \quad (3.3.41)$$

donde A_d^N y C_d^N , son matrices de tamaño $(d \times dn)$ y $(d \times (d-dn))$ que se obtienen en forma similar a (3.3.40b) y (3.3.40c) respectivamente. Luego, de (3.3.40a) y (3.3.41), Y_d^1 dado por (3.3.7) se escribe como

$$Y_d^1 = A \begin{bmatrix} S_* \\ N_* \end{bmatrix} + [C_d^S, C_d^N] \begin{bmatrix} U_d^{ds+1} \\ V_d^{dn+1} \end{bmatrix} \quad (3.3.42)$$

con $A = [A_d^S, A_d^N]$ una matriz de tamaño $(d \times d)$, la cual es no singular cuando los polinomios $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ no tienen raíces en común, lo que sucede en la presente situación, y que permite escribir a $\hat{X}_d|_d$ y a $X_d - \hat{X}_d|_d$ de acuerdo a las ecuaciones (3.3.15) y (3.3.16) respectivamente.

PROPOSICION 3.3.4: La matriz $A = [A_d^S, A_d^N]$ es no singular, si los polinomios $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ no tienen raíces en común.

DEMOSTRACION: Véase al final de la sección.

Ahora, para escribir (3.3.14), se utiliza el modelo de espacio de estados que se obtiene de (3.1.6) para escribir a X_t como en (3.2.3) y en particular a X_d como

$$X_d = \begin{bmatrix} \phi_S & 0 \\ \tilde{\sim}_S & \\ 0 & \phi_N \\ & \tilde{\sim}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_d^{d+1-m} \\ N_d^{d+1-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_S & 0 \\ \tilde{\sim}_S & \\ 0 & \theta_N \\ & \tilde{\sim}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,d}^{d+1-n} \\ b_{2,d}^{d+1-q} \end{bmatrix} \quad (3.3.43)$$

para después, mediante (3.3.38) escribir a S_d^{d+1-m} como

$$S_d^{d+1-m} = \begin{bmatrix} S_d^{d+1-m} \\ S_d^{d-ds} \\ S_d^{d+1-ds} \end{bmatrix} = A_m^S S_0 + C_m^S U_d^{d+1-(m-ds)} \quad (3.3.44a)$$

donde

$$A_m^S = \begin{bmatrix} A_{s,1-(m-ds)}^T \\ A_{s,2-(m-ds)}^T \\ \vdots \\ A_{s,0}^T \\ I_{ds \times ds} \end{bmatrix} \quad m \times ds \quad (3.3.44b)$$

y

$$C_m^S = (-1)^{ps} \begin{bmatrix} \xi_{s,0} & \xi_{s,1} & \cdots & \xi_{s,(m-ds)-1} \\ 0 & \xi_{s,0} & \cdots & \xi_{s,(m-ds)-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_{s,0} \\ & & & 0_{ds \times (m-ds)} \end{bmatrix} \quad m \times (m-ds) \quad (3.3.44c)$$

y escribir de (3.3.39), a N_d^{d+1-p} como

$$N_d^{d+1-p} = A_p^N N_e + C_p^N V_d^{d+1-(p-dn)} \quad (3.3.45)$$

con A_p^N y C_p^N matrices de tamaño $(p \times dn)$ y $(p \times (p-dn))$ que se obtienen de manera similar a (3.3.44b) y (3.3.44c) respectivamente. Luego, de (3.3.44) y (3.3.45) se tiene que

$$\begin{bmatrix} S_d^{d+1-m} \\ N_d^{d+1-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m^S & 0 \\ 0 & A_p^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_e \\ N_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m^S & 0 \\ 0 & C_p^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^{d+1-(m-ds)} \\ V_d^{d+1-(p-dn)} \end{bmatrix} \quad (3.3.46)$$

que al ser sustituida en (3.3.43), permite escribir X_d como

$$\begin{aligned} X_d &= \phi \begin{bmatrix} S_e \\ N_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_S & 0 \\ 0 & \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m^S & 0 \\ 0 & C_p^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^{d+1-(m-ds)} \\ V_d^{d+1-(p-dn)} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \theta_S & 0 \\ 0 & \theta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_d^{d+1-n} \\ b_{2,d}^{d+1-q} \end{bmatrix} \\ &= \phi \begin{bmatrix} S_e \\ N_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_S C_m^S & 0 \\ 0 & \phi_N C_p^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^{d+1-(m-ds)} \\ V_d^{d+1-(p-dn)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_S b_{1,d}^{d+1-n} \\ \theta_N b_{1,d}^{d+1-q} \end{bmatrix} \quad (3.3.47a) \end{aligned}$$

donde

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_S & 0 \\ 0 & \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m^S & 0 \\ 0 & A_p^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_S A_m^S & 0 \\ 0 & \phi_N A_p^N \end{bmatrix} \quad (3.3.47b)$$

Por otro lado, de (3.3.42) y (3.3.47) se obtiene como estimador de X_d a

$$\hat{X}_d|d = \underset{\sim}{\Phi} \Lambda^{-1} Y_d^1 \quad (3.3.48)$$

y el error de estimación respectivo

$$X_d - \hat{X}_d|d = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_S C_m^S & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\Phi}_N C_p^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d^{d+1-(m-ds)} \\ V_d^{d+1-(p-dn)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Theta}_S^{b_{1,d}^{d+1-n}} \\ \underset{\sim}{\Theta}_N^{b_{1,d}^{d+1-q}} \end{bmatrix} - \underset{\sim}{\Phi} \Lambda^{-1} [C_d^S, C_d^N] \begin{bmatrix} U_d^{ds+1} \\ V_d^{dn+1} \end{bmatrix} \quad (3.3.49)$$

Nótese que (3.3.49) no depende de los valores iniciales, por ello es posible calcular $P_d|d$ a partir de esta ecuación. Para esto se define primero $ks = \min \{ds, d-(m-ds)\}$ y $kn = \min \{dn, d-(p-dn)\}$, de tal forma que se contruyen las matrices

$$\underset{\sim}{C}_m^S = [0_{m \times \{d-(m-ds)-ks\}}, C_m^S] \quad m \times (d-ks) \quad (3.3.50a)$$

$$\underset{\sim}{C}_d^S = [0_{d \times \{d-(ds-ks)\}}, C_d^S] \quad d \times (d-ks) \quad (3.3.50b)$$

$$\underset{\sim}{C}_p^N = [0_{p \times \{d-(p-dn)-kn\}}, C_p^N] \quad p \times (d-kn) \quad (3.3.50c)$$

$$\underset{\sim}{C}_d^N = [0_{d \times \{d-(dn-kn)\}}, C_d^N] \quad d \times (d-kn) \quad (3.3.50d)$$

y al definir

$$M = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}_S & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\Phi}_N \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \underset{\sim}{C}_m^S & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{C}_p^N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda_m^S & 0 \\ 0 & \Lambda_p^N \end{bmatrix} \Lambda^{-1} [\underset{\sim}{C}_d^S, \underset{\sim}{C}_d^N] \right\} \quad (3.3.51)$$

se puede escribir (3.3.49) como

$$X_d - \hat{X}_d|d = M \begin{bmatrix} U_d^{ks+1} \\ V_d^{kn+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_S b_{1,d}^{d+1-n} \\ \Theta_N b_{2,d}^{d+1-q} \end{bmatrix} \quad (3.3.52)$$

de donde

$$\begin{aligned} P_d|d &= E\{(X_d - \hat{X}_d|d)(X_d - \hat{X}_d|d)^T\} \\ &= M \begin{bmatrix} \text{Var}\{U_d^{ks+1}\} & 0 \\ 0 & \text{Var}\{V_d^{kn+1}\} \end{bmatrix} M^T + \\ &\quad \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \Theta_S \Theta_S^T & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \Theta_N \Theta_N^T \end{bmatrix} + \Gamma + \Gamma^T \end{aligned} \quad (3.3.53a)$$

con

$$\Gamma = M \begin{bmatrix} \text{Cov}\{U_d^{ks+1}, b_{1,d}^{d+1-n}\} \Theta_S^T & 0 \\ 0 & \text{Cov}\{V_d^{kn+1}, b_{2,d}^{d+1-q}\} \Theta_N^T \end{bmatrix} \quad (3.3.53b)$$

En (3.3.53a), $\text{Var}\{U_d^{ks+1}\}$ es la matriz de covarianzas del modelo ARMA(m-ds,n) de U_t , $\text{Var}\{V_d^{kn+1}\}$ es la matriz de covarianzas del modelo ARMA(p-dn,q) de V_t (ver ecuaciones (2.1.2)-(2.1.3)) y en (3.3.53b), $\text{Cov}\{U_d^{ks+1}, b_{1,d}^{d+1-n}\}$ contiene los elementos

$$\text{Cov}\{U_t, b_{1,j}\} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > t \\ \sigma_1^2 \psi_{S,t-j} & \text{si } j \leq t \end{cases} \quad (3.3.53c)$$

con $\psi_S(B)$ dado en (2.1.4a) y $\text{Cov}\{V_d^{kn+1}, b_{2,d}^{d+1-q}\}$ contiene elementos $\text{Cov}\{V_t, b_{2,j}\}$ definidos de manera similar a (3.3.53c), con $\psi_N(B)$ dado por (2.1.4b).

Al calcular a $P_d|d$ mediante (3.3.53a), es posible también calcular la solución de la ecuación algebraica de Riccati, debido a que ésta no depende de las observaciones (ver filtro de Kalman). Luego, de las ecuaciones del filtro de Kalman y recordando que $S = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
P_{t+1|t} &= F P_{t|t-1} F^T + G Q G^T - F C_{t|t} \Sigma_t C_{t|t}^T F^T \\
&= F \{ P_{t|t-1} - C_{t|t} \Sigma_t C_{t|t}^T \} F^T + G Q G^T \\
&= F \{ P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H C_{t|t}^T \} F^T + G Q G^T \\
&= F P_{t|t} F^T + G Q G^T
\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

que junto con las ecuaciones (2.3.8), (2.3.10b) y (2.3.17) sirve para construir un algoritmo inicializado en $P_{d|d}$, que permite encontrar a P (el teorema 2.3.3. asegura la existencia de éste), luego el filtro de Kalman se inicializa en $\hat{X}_{d|d} = \Phi A^{-1} Y_d^1$ y $P_{d|d} = P$.

Obsérvese que inicializar el filtro en $\hat{X}_{d|d}$ y $P_{d|d}$ ocasionará no poder obtener estimadores de los vectores de estados en los periodos $t = 1, \dots, d$ y por lo tanto tampoco se obtendrán los estimadores de S_t y N_t en estos tiempos.

Para finalizar esta sección, se presenta la demostración de la proposición 3.3.4, que fué omitida para no interrumpir la continuidad de los argumentos expuestos.

DEMOSTRACION: Primero, escribase la matriz A de (3.3.42) como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_{ds \times ds} & I_{dn \times dn} \\ A_{S, ls+dn}^T & A_{N, lN+ds}^T \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ A_{S, ls+2}^T & A_{S, lN+2}^T \\ A_{S, ls+1}^T & A_{N, lN+1}^T \end{array} \right] \tag{3.3.55}$$

donde $l_s = ds - d$ y $l_s + i \leq 0$ para toda $i = 1, \dots, dn$, $l_N = dn - d$ y $l_N + i \leq 0$ para toda $i = 1, \dots, ds$. Luego, de (3.3.36) y (3.3.37), A se escribe como

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ A_{1,ts+dn}^S & \cdots & A_{ds,ts+dn}^S & A_{1,\ell N+ds}^N & \cdots & A_{dn,\ell N+ds}^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,ts+2}^S & \cdots & A_{ds,ts+2}^S & A_{1,\ell N+2}^N & \cdots & A_{dn,\ell N+2}^N \\ A_{1,ts+1}^S & \cdots & A_{ds,ts+1}^S & A_{1,\ell N+1}^N & \cdots & A_{dn,\ell N+1}^N \end{array} \right] \quad (3.3.56)$$

Ahora, recordando que la matriz A es de tamaño $d \times d$, se demostrará que esta matriz es de rango d . Con este objetivo, se construye la matriz Δ_S de tamaño $d \times dn$, como

$$\Delta_S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\delta_{S,ds} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\delta_{S,ds-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\delta_{S,ds} & \cdot & \cdot & 1 \\ -\delta_{S,ds} & -\delta_{S,ds-1} & \cdot & \cdot & 0 \\ -\delta_{S,ds-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right] \quad (3.3.57)$$

de tal manera que, si Δ_S^i es la columna i de Δ_S y A_d^{Sj} es la columna j de A_d^S , se tiene que $[\Delta_S^i]^T \cdot A_d^{Sj} = \delta_S(F) A_{j,ts+i}$, como $ts + i \leq 0$ para $i = 1, \dots, dn$, se tiene de (3.3.33) que $\delta_S(F) A_{j,ts+i} = 0$.

Entonces el espacio generado por las columnas de Δ_S , es ortogonal al espacio generado por las columnas de A_d^S , esto es, $\mathcal{Y}(\Delta_S) = \mathcal{Y}(A_d^S)^\perp$, donde $\mathcal{Y}(\cdot)$ denota el espacio generado por las columnas de una matriz y $\mathcal{Y}(\cdot)^\perp$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{Y}(\cdot)$ en un

espacio d - dimensional. Por otro lado, la ecuación en diferencias

$$\delta_s(B)Z_t = Z_t - \delta_{s,1}Z_{t-1} - \dots - \delta_{s,ds}Z_{t-ds} = 0 \quad (3.3.58)$$

cuyas raíces están dados por $\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_r^s$, con multiplicidad R_1^s, \dots, R_r^s y $\sum_1^r R_i^s = ds$, tiene soluciones de la forma

$$Z_t = \sum_{i=1}^r g_i(t) \{\lambda_i^s\}^{-t} \quad t = 0, 1, \dots \quad (3.3.59)$$

donde g_i es un polinomio de grado $R_i^s - 1$, las cuales forman un espacio lineal de dimensión ds , cuya base está dada por

$$t^j \{\lambda_i^s\}^{-t} \quad j = 0, \dots, R_i^s - 1 \quad i = 1, \dots, r \quad t \geq 0 \quad (3.3.60)$$

que son ds soluciones particulares de (3.3.58) (Henrici, 1974). Ahora, si α_t^i para $i = 1, \dots, ds$ y $t \geq 0$, es la base del espacio de soluciones dada por (3.3.60) y se toman los primeros d elementos de cada una de estas soluciones para construir la matriz $\Omega_s = \{\alpha_t^i\}$ (de tamaño $d \times ds$), por construcción se tiene que $\mathcal{Y}(\Omega_s) = \mathcal{Y}(\Delta_s)^\perp$. Esto es, el espacio generado por las columnas de Ω_s es ortogonal al generado por las columnas de Δ_s . También se tiene que el rango de Ω_s es ds . Para demostrar esto, obsérvese que como α_t^i es una solución particular de (3.3.58), α_t^i para $t > d$ se escribe como

$$\alpha_t^i = \delta_{s,1} \alpha_{t-1}^i + \delta_{s,2} \alpha_{t-2}^i + \dots + \delta_{s,ds} \alpha_{t-ds}^i \quad (3.3.61)$$

entonces, si $\sum_{i=1}^{ds} c_i \alpha_t^i = 0$ para $t = 1, \dots, d$, de (3.3.61) se tiene

que $\sum_{i=1}^{ds} c_i \alpha_t^i = 0$ para toda t y como α_t^i para $i = 1, \dots, ds$ forman

una base del espacio de soluciones de (3.3.58). Se sigue entonces que $c_i = 0$ para $i = 1, \dots, ds$, esto es, las ds columnas de Ω_s son linealmente independientes y por lo tanto el rango de Ω_s es ds .

Luego, $\mathcal{Y}(\Omega_s) = \mathcal{Y}(\Delta_s)^\perp = \{\mathcal{Y}(A_d^s)^\perp\}^\perp = \mathcal{Y}(A_d^s)$, así que el espacio

generado por las columnas de Ω_S coincide con el espacio generado por las columnas de A_d^S , de donde se sigue que el rango de A_d^S es igual al rango de Ω_S , igual a ds . De igual manera se construye una matriz $\Omega_N = \{\beta_t^i\}$ de tamaño $d \times dn$ y rango dn , donde β_t^i para $i = 1, \dots, dn$ son las soluciones particulares que forman la base del espacio de soluciones a la ecuación en diferencias

$$\delta_N(B)Z_t = Z_t - \delta_{N,1}Z_{t-1} - \dots - \delta_{N,dN}Z_{t-dN} = 0 \quad (3.3.62)$$

De tal manera que $\mathcal{Y}(\Omega_N) = \mathcal{Y}(A_d^N)$ y se tiene que $\mathcal{Y}(\Omega_S, \Omega_N) = \mathcal{Y}(A_d^S, A_d^N)$, de donde se mostrará que si no existen raíces comunes entre $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$, el rango de la matriz (de tamaño $d \times d$) $\Omega = [\Omega_S, \Omega_N]$ y por lo tanto de $A = [A_d^S, A_d^N]$, es d . Para esto, primero obsérvese que si λ es una raíz de $\delta_S(B)$ y de $\delta_N(B)$, se tiene que al menos una de las soluciones α_t^i será igual a una de las soluciones β_t^i , debido a que las β_t^i están dadas de manera análoga a (3.3.60), luego se tendrá que al menos una de las columnas de Ω_S y de Ω_N serán iguales y entonces Ω no tiene d columnas linealmente independientes. Ahora, si $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ no tienen raíces en común, las soluciones del polinomio $\delta(B) = \delta_S(B)\delta_N(B)$ de grado d , forman un espacio lineal de dimensión d , que es generado por d soluciones particulares linealmente independientes de la forma (3.3.60), las cuales por la construcción de $\delta(B)$ se tiene que están dadas por la unión de las ds α_t^i y las dn β_t^i . Entonces, tomando los primeros d elementos de estas soluciones, se construye la matriz Ω que será de rango d . ■

III.4- (F,D) controlable

En la presente situación se consideran series no estacionarias, con la restricción de que los polinomios $\delta_S(B)$ y $\delta_N(B)$ tienen factores en común del tipo $(1-\lambda Z)$ con $|\lambda| = 1$. Se presenta además el problema de que la matriz A en la ecuación

(3.3.42) es singular. Para ver por qué es problema la singularidad de A, considérese la ecuación matricial

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{\beta} \quad (3.4.1)$$

donde A es una matriz de tamaño d x d y rango $c \leq d$. entonces, la solución general a (3.4.1) está dada por

$$\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{\beta} + (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A}) \underset{\sim}{\tau} \quad (3.4.2)$$

donde $\underset{\sim}{\tau}$ es un vector arbitrario y $\underset{\sim}{A}^+$ es la matriz conocida como la pseudoinversa de A, la cual cumple con

- a) $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$
- b) $\underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^+ = \underset{\sim}{A}^+$
- c) $(\underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A})^T = \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A}$
- d) $(\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^+) = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^+$
- e) $\underset{\sim}{A}^+$ es única
- f) si $c = d$ se tiene que $\underset{\sim}{A}^+ = \underset{\sim}{A}^{-1}$
- g) La mejor solución a la ecuación (3.4.1), está dada por

$$\underset{\sim}{\eta}_0 = \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{\beta} \quad (3.4.3)$$

Por la propiedad (a), se tiene que el segundo sumando de (3.4.2) cumple con

$$\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A}) \underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\tau} - \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\tau} = 0 \quad (3.4.4)$$

y la solución (3.4.2) se puede escribir como

$$\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{A}^+ \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{L} \quad \text{con } \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{L} = 0 \quad (3.4.5)$$

y L arbitrario (Boullion y Odell, 1971). Ahora, de (3.3.7) se tiene

$$A \underset{\sim}{\eta} = \{Y_d^1 - \pi_d^1\} \quad (3.4.6)$$

cuya solución está dada por

$$\underset{\sim}{\eta} = A^+ \{Y_d^1 - \pi_d^1\} + L \quad \text{con } AL = 0 \quad (3.4.7)$$

debido a que A es una matriz singular y L refleja la falta de información para conocer a $\underset{\sim}{\eta}$. Por ello, se trabaja con la mejor solución a la ecuación (3.4.6) que, por la propiedad (g), se tiene está dada por

$$\underset{\sim}{\eta}_0 = A^+ Y_d^1 - A^+ \pi_d^1 \quad (3.4.8)$$

Luego, $\hat{X}_{d|d}$ (ecuación (3.3.15)) se escribe como

$$\hat{X}_{d|d} = \underset{\sim}{\phi} A^+ Y_d^1 = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\eta}_0 + \underset{\sim}{\phi} A^+ \pi_d^1 \quad (3.4.9)$$

de esta ecuación y de (3.3.14) se tiene

$$\begin{aligned} X_d - \hat{X}_{d|d} &= \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\eta} + \underset{\sim}{\nu} - \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\eta}_0 - \underset{\sim}{\phi} A^+ \pi_d^1 \\ &= \underset{\sim}{\phi} \{ \underset{\sim}{\eta} - \underset{\sim}{\eta}_0 \} + \underset{\sim}{\nu} - \underset{\sim}{\phi} A^+ \pi_d^1 \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

y de las ecuaciones (3.4.7)-(3.4.8), ésta última se escribe como

$$X_d - \hat{X}_{d|d} = \underset{\sim}{\phi} L + \underset{\sim}{\nu} - \underset{\sim}{\phi} A^+ \pi_d^1 \quad (3.4.11)$$

Obsérvese que ahora no es posible calcular $P_{d|d}$ a partir de (3.4.11), debido a que involucra información desconocida, dicha información refleja que no es posible eliminar completamente la dependencia de los valores iniciales.

De la discusión presentada en esta situación en el capítulo II, la presencia de factores comunes en los polinomios $\delta_s(B)$ y

$\delta_n(B)$ no permiten dar solución a la ecuación algebraica de Riccati, así que para inicializar el filtro de Kalman es necesario encontrar la transformación T, de tal manera que se pueda construir un algoritmo (como en el caso anterior) con las ecuaciones (2.3.8), (2.3.10b), (2.3.16a) y (2.3.16b) (ver filtro de Kalman) transformadas. El objetivo es encontrar la solución a las dos de las tres ecuaciones en diferencias, que se obtienen de aplicar la transformación en la ecuación en diferencias de Riccati (ver ecuaciones (2.3.62a), (2.3.62b) y (2.3.62c)), las cuales se sabe que tienen solución.

El problema que se presenta es conocer $P_{0|-1}^*$ con la cual inicializar el algoritmo. Recuerdese que la ecuación (2.3.62a) corresponde a una ecuación en diferencias para el subsistema F_1^* , G_1^* y $(H_1^*)^T$, en el cual (F_1^*, H_1^*) es detectable y $\{F_1^*, [Q^*(1,1)]^{1/2}\}$ es controlable y del teorema 2.3.3 se sabe que para cualquier $P_{0|-1}^*(1,1) \geq 0$ (la componente (1,1) en $P_{0|-1}$ transformada (2.3.61a)) $P_{t+1|t}^*(1,1)$ converge a la solución $P^*(1,1)$ de la ecuación algebraica correspondiente a (2.3.62a). Luego, si se selecciona $P_{0|-1}^*(1,1) = 0$, esto representaría el conocimiento perfecto del vector de estado ${}_1X_0^*$, mientras que el desconocimiento de la covarianza de ${}_1X_0^*$ se refleja seleccionando a $P_{0|-1}^*(1,1) \gg P^*(1,1)$. El procedimiento estándar es seleccionar $P_{0|-1}^*(1,1) = \kappa I$ con $\kappa = 10^{12}$ (Burrige y Wallis, 1985).

La segunda ecuación que se sabe tiene solución (ecuación (2.3.62b)) se puede inicializar de forma análoga, pero hay que tener en cuenta que la solución a esta ecuación se obtiene como consecuencia de la solución a la ecuación (2.3.62a). La ecuación (2.3.62c) se sabe que no tiene solución y que no afectará a la estimación del vector de estado. Entonces se puede inicializar la recursión para la covarianza con

$$P_{0|-1}^* = \begin{bmatrix} P_{0|-1}^*(1,1) & P_{0|-1}^*(1,2) \\ P_{0|-1}^*(2,1) & P_{0|-1}^*(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{12} I & 10^{12} I \\ 10^{12} I & 10^{12} I \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

dado que $P_{t+1|t}^*(1,2) = [P_{t+1|t}^*(2,1)]^T$ y que se busca la convergencia de las componentes (1,1) y (2,1), que son las que influirán en la estimación de X_t . Luego el filtro de Kalman se inicializa en $X_{d|d}^* = T^{-1} \Phi A^+ Y_d^1$ y

$$P_{d|d}^* = P^* = \begin{bmatrix} P^*(1,1) & P^*(1,2) \\ P^*(2,1) & P_{1|1-1}^*(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.4.13)$$

CAPITULO IV

MODELOS

En el capítulo I se menciona el problema que se enfrenta al definir cada una de las componentes no observables de una serie $\{Y_t\}$, por ello es esencial que los modelos de las componentes sean especificados con precisión, de lo contrario no se conocerá qué es lo que se está estimando. En primer lugar se presenta una aproximación para definir las componentes estacional, de tendencia (tendencia-ciclo) e irregular para una descomposición aditiva, para lo cual se supone que los efectos deterministas que se presenten en la serie observada $\{Y_t\}$ han sido removidos de ésta. Las definiciones de las componentes están basadas en supuestos considerados por Burman (1980) y Hillmer y Tiao (1982), entre otros. Dichos supuestos son el punto de partida para determinar una descomposición específica, llamada canónica, y que es considerada frecuentemente en los métodos de ajuste estacional que hacen uso de la teoría de extracción de señal. Posteriormente se presenta, siguiendo los trabajos de Maravall y Pierce (1987) y Maravall (1988), el problema de estimación de la descomposición canónica.

IV.1 - DESCOMPOSICION CANONICA

Los supuestos que se consideran básicos para realizar un ajuste estacional basado en modelos y que hacen uso de la teoría de extracción de señal son:

- 1) $Y_t = S_t + T_t + I_t$
- 2) $\{S_t\}$, $\{T_t\}$ y $\{I_t\}$ son independientes
- 3) Y_t es generado por un modelo ARMA conocido $\phi(B) Y_t = \theta(B)a_t$
- 4) La componente estacional S_t , es generada por un modelo ARMA

desconocido $\phi_S(B)S_t = \theta_S(B)b_{1t}$

- 5) La componente de tendencia-ciclo T_t , es generada por un modelo ARMA desconocido $\phi_T(B)T_t = \theta_T(B)b_{2t}$
- 6) La componente de irregularidad I_t , es generada por un modelo ARMA desconocido $\phi_I(B)I_t = \theta_I(B)b_{3t}$
- 7) Los polinomios $\phi_S(B)$, $\phi_T(B)$ y $\phi_I(B)$ no tienen raíces en común.

Los supuestos 1-2, definen el problema del ajuste estacional (véase el capítulo I), mientras que el supuesto 3 considera que un modelo ARMA puede ser construido a partir de los datos observados. Considerando que los efectos deterministas han sido removidos de $\{Y_t\}$, los modelos ARMA permiten manejar una gran cantidad de series que presentan movimientos estacionales. Asimismo permite suponer que las componentes son generadas por modelos ARMA con las siguiente características:

MODELO ARMA DE LA COMPONENTE ESTACIONAL

El modelo ARMA del supuesto 4 puede escribirse como

$$\phi_S^*(B)\delta_S(B)S_t = \theta_S(B)b_{1t} \quad (4.1.1a)$$

donde

$$\phi_S^*(B) = 1 \text{ y } \delta_S(B) = (1 + B + B^2 + \dots + B^{E-1}) \quad (4.1.1b)$$

y el orden del polinomio de promedios móviles es menor o igual a $E-1$, con E denotando el periodo estacional. Obsérvese que las raíces del polinomio $\delta_S(Z)$ están dadas por $Z = e^{iw}$ con $w = 2k\pi/n$ y $n = 1, \dots, E-1$, lo que ocasiona que el seudoespectro de la componente estacional

$$sf_S(e^{iw}) = \sigma_1^2 \left| \frac{\theta_S(e^{iw})}{\delta_S(e^{iw})} \right|^2 \quad 0 \leq w \leq \pi \quad (4.1.2)$$

tenga ceros en el denominador y provoque los picos "infinitos" que se presentan en $w = 1, \dots, [E/2]$ del seudoespectro de la serie observada, cuando se detecta la presencia de una componente estacional en ésta (véase el capítulo I). La elección de un polinomio de promedios móviles de orden menor o igual a $E - 1$ implica que la función de predicción de (4.1.1a) tiene la propiedad que la suma sobre E valores consecutivos de S_t es igual a cero (véase Box y Jenkins, 1976), lo cual se considera deseable de un ajuste estacional.

MODELO ARMA DE LA COMPONENTE DE TENDENCIA

El modelo ARMA del supuesto 5 puede escribirse como

$$\phi_T^*(B)\delta_T(B)T_t = \theta_T(B)b_{2t} \quad (4.1.3a)$$

donde

$$\phi_T^*(B) = 1 \quad \text{y} \quad \delta_T(B) = (1 - B)^d \quad (4.1.3b)$$

y el orden del polinomio de promedios móviles es menor o igual a d . Ahora obsérvese que la raíz de $\delta_T(Z)$ está dada por $Z = e^{i\omega}$ con $w = 0$, luego el seudoespectro de la componente de tendencia

$$sf_T(e^{i\omega}) = \sigma_2^2 \left| \frac{\theta_T(e^{i\omega})}{\delta_T(e^{i\omega})} \right|^2 \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (4.1.4)$$

tiene un pico "infinito" en $w = 0$, el cual se presentará en el seudoespectro de la serie observada, si ésta contiene la componente de tendencia. Ahora, con respecto a que el polinomio de promedios móviles sea de orden menor o igual a d , Box y Jenkins (1976) muestran que la función de pronóstico con error cuadrático medio mínimo de un proceso generado por un modelo del tipo (4.1.3a), es un polinomio de grado d cuyos coeficientes son actualizados cuando el origen de predicción cambia, esto es, el modelo considera que una tendencia polinomial adaptiva se encuentra presente en la serie observada.

Por lo que respecta al modelo ARMA que genera a la componente de irregularidad, se supone que el polinomio autorregresivo $\phi_1(Z)$ no tiene raíces en común con $\delta_s(B)$ o $\delta_T(B)$ ya que de lo contrario implicaría la existencia de una componente estacional o de tendencia en esta componente, que debería ser considerada en el respectivo modelo. Luego, la componente de irregularidad se considera un proceso estacionario y los polinomios autorregresivos no comparten raíces en común.

Una vez especificadas las características de los modelos ARMA que generan las componentes no observables de la serie observable, es posible determinar dichos modelos a partir de la construcción de un modelo ARMA para la serie observada $\{Y_t\}$, modelo que puede escribirse como

$$\phi^*(B)(1-B)^{d-1} (1-B^E)^D Y_t = \theta(B)a_t \quad (4.1.5)$$

donde se supone que el orden de la diferencia estacional D es igual a 1, que según Bell y Hillmer (1984) es lo que se presenta con mayor frecuencia en la práctica. Luego, el polinomio autorregresivo de (4.1.5) se escribe como

$$\begin{aligned} \phi^*(B)(1-B)^{d-1} (1-B^E) &= \phi^*(B)(1-B)^d (1+B+B^2+\dots+B^{E-1}) \\ &= \phi^*(B) \delta_T(B) \delta_S(B) \\ &= \phi_1^*(B) \delta_T(B) \delta_S(B) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

donde los tres factores de (4.1.6) no tienen ceros en común y los polinomios autorregresivos de los modelos ARMA que generan a las componentes quedan determinados de manera única (ver ecuación (2.1.5)). Ahora, para determinar los polinomios de promedios móviles, se sabe que si S_t , T_t e I_t son independientes (supuesto 2), se tiene que (véase Granger y Newbold, 1986)

$$sf(B) = sf_S(B) + sf_T(B) + sf_I(B) \quad (4.1.7a)$$

esto es

$$\frac{\theta(B)\theta(F) \sigma^2}{\phi_I(B)\phi_I(F)\delta_S(B)\delta_S(F)\delta_T(B)\delta_T(F)} = \frac{\theta_S(B)\theta_S(F)}{\delta_S(B)\delta_S(F)} \sigma_1^2 + \frac{\theta_T(B)\theta_T(F)}{\delta_T(B)\delta_T(F)} \sigma_2^2 + \frac{\theta_I(B)\theta_I(F)}{\phi_I(B)\phi_I(F)} \sigma_3^2 \quad (4.1.7b)$$

Esta ecuación permite determinar los polinomios $\theta_S(B)$, $\theta_T(B)$ y $\theta_I(B)$, así como las varianzas σ_1^2 , σ_2^2 y σ_3^2 , de tal manera que la estructura de covarianzas de las componentes no observadas sea consistente con la respectiva estructura de covarianzas de la serie observada. Con el fin de presentar una condición necesaria y suficiente que permita determinar la existencia de los polinomios de promedios móviles y las varianzas que satisfagan la ecuación (4.1.7), se presenta la siguiente definición (Hillmer y Tiao, 1982).

DEFINICION: Una descomposición de la serie de tiempo $\{Y_t\}$ se llama aceptable, si los modelos ARMA que generan a las componentes no observables satisfacen la ecuación (4.1.7).

Una vez determinados los polinomios autorregresivos de los modelos, es posible escribir a $sf(B)$ de manera única mediante fracciones parciales como

$$\frac{\theta(B)\theta(F) \sigma^2}{\phi_I(B)\phi_I(F)\delta_S(B)\delta_S(F)\delta_T(B)\delta_T(F)} = \frac{Q_S(B)}{\delta_S(B)\delta_S(F)} + \frac{Q_T(B)}{\delta_T(B)\delta_T(F)} + \frac{Q_I(B)}{\phi_I(B)\phi_I(F)} \quad (4.1.8)$$

donde

$$Q_S(B) = q_{0s} + \sum_{i=1}^{E-2} q_{is}(B^i + F^i)$$

$$Q_I(B) = q_{0I} + \sum_{i=1}^{d-1} q_{iI}(B^i + F^i)$$

y $Q_I(B)$ se puede obtener por diferencia. Ahora, en el dominio de las frecuencias se determinan, para $0 \leq w \leq \pi$, los valores

$$\epsilon_1 = \min \frac{Q_S(e^{iw})}{|\delta_S(e^{iw})|^2} \quad (4.1.9a)$$

$$\epsilon_2 = \min \frac{Q_I(e^{iw})}{|\delta_I(e^{iw})|^2} \quad (4.1.9b)$$

$$\epsilon_3 = \min \frac{Q_I(e^{iw})}{|\phi_I(e^{iw})|^2} \quad (4.1.9c)$$

para presentar la siguiente proposición, debida a (Hillmer y Tiao, 1982)

PROPOSICION 4.1.1: Una descomposición aceptable existe si y sólo si $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \geq 0$

DEMOSTRACION: En el dominio de las frecuencias, es posible a partir de (4.1.7) y (4.1.8), escribir

$$\frac{|\theta_S(e^{iw})|^2}{|\delta_S(e^{iw})|^2} \sigma_1^2 = \frac{Q_S(e^{iw})}{|\delta_S(e^{iw})|^2} + \gamma_1 \quad (4.1.10a)$$

$$\frac{|\theta_I(e^{iw})|^2}{|\delta_I(e^{iw})|^2} \sigma_2^2 = \frac{Q_I(e^{iw})}{|\delta_I(e^{iw})|^2} + \gamma_2 \quad (4.1.10b)$$

$$\frac{|\theta_I(e^{iw})|^2}{|\phi_I(e^{iw})|^2} \sigma_3^2 = \frac{Q_I(e^{iw})}{|\phi_I(e^{iw})|^2} + \gamma_3 \quad (4.1.10c)$$

donde γ_1 , γ_2 y γ_3 son tres constantes tales que $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Obsérvese que dichas constantes son el medio para obtener una

descomposición aceptable (si ésta existe), a partir de la descomposición en fracciones parciales (4.1.8), esto se debe a que los órdenes de $\Theta_S(Z)$ y $\Theta_T(Z)$ son menores o iguales a $E-1$ y d respectivamente. Ahora, como los seudoespectros son mayores o iguales a cero, una descomposición aceptable existe si y sólo si $\epsilon_1 + \gamma_1 \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$ o sea que $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \geq 0$ ■

De la proposición se tiene que, cuando $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \geq 0$, existen un gran cantidad de ternas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ que cumplen la condición $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, de tal manera que cada terna determina una descomposición aceptable única (ecuaciones, (4.1.10a)-(4.1.10c)). Esto es, existe un conjunto infinito de polinomios de promedios móviles Θ_S , Θ_T y Θ_I , y varianzas σ_1^2 , σ_2^2 y σ_3^2 que cumplen con (4.1.7). En particular se fijará la atención en una descomposición, la cual es denominada canónica, debido a las propiedades que dicha descomposición presenta.

DEFINICION: Una descomposición canónica es la descomposición aceptable que maximiza la varianza σ_3^2

PROPOSICION 4.1.2: La descomposición canónica tiene las siguiente propiedades:

- a) La descomposición es única
- b) Minimiza las varianzas σ_1^2 y σ_2^2
- c) Los polinomios $\Theta_S(Z)$ y $\Theta_T(Z)$ son no invertibles
- d) Si \bar{S}_t y \bar{T}_t son las componentes canónicas, entonces para cualquier otra selección de S_t y T_t se tiene que

$$S_t = \bar{S}_t + \alpha_{1t} \quad \text{y} \quad T_t = \bar{T}_t + \alpha_{2t}$$

donde α_{1t} y α_{2t} son procesos de ruido blanco

e) La varianza de $\delta_s(B)S_t$ se minimiza.

DEMOSTRACION: a) De las ecuaciones (4.1.10) se tiene que

$$\begin{aligned} |\theta_s(e^{iw})|^2 \sigma_1^2 &= Q_s(e^{iw}) + \gamma_1 |\delta_s(e^{iw})|^2 \\ &= g_s(w, \gamma_1) \end{aligned} \quad (4.1.11a)$$

$$\begin{aligned} |\theta_I(e^{iw})|^2 \sigma_2^2 &= Q_I(e^{iw}) + \gamma_2 |\delta_I(e^{iw})|^2 \\ &= g_I(w, \gamma_2) \end{aligned} \quad (4.1.11b)$$

$$\begin{aligned} |\theta_I(e^{iw})|^2 \sigma_3^2 &= Q_I(e^{iw}) + \gamma_3 |\phi_I(e^{iw})|^2 \\ &= g_I(w, \gamma_3) \end{aligned} \quad (4.1.11c)$$

de donde se sabe que (véase Granger y Newbold, 1986)

$$\sigma_1^2(\gamma_1) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln g_s(w, \gamma_1) dw \right] \quad (4.1.12a)$$

$$\sigma_2^2(\gamma_2) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln g_I(w, \gamma_2) dw \right] \quad (4.1.12b)$$

$$\sigma_3^2(\gamma_3) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln g_I(w, \gamma_3) dw \right] \quad (4.1.12c)$$

Obsérvese de (4.1.11c) que $g_I(w, \gamma_3)$ es una función creciente de γ_3 y, de la ecuación (4.1.12c), se obtiene el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \max \sigma_3^2 &= \max \gamma_3 \\ \text{sujeto a} & \\ c_1 + \gamma_1 &\geq 0 \\ c_2 + \gamma_2 &\geq 0 \\ c_3 + \gamma_3 &\geq 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

el cual es equivalente al problema

$$\begin{aligned} \max \gamma_3 &= \min (\gamma_1 + \gamma_2) \\ \text{sujeto a} & \\ & \epsilon_1 + \gamma_1 \geq 0 \\ & \epsilon_2 + \gamma_2 \geq 0 \\ & \epsilon_3 + \gamma_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

que tiene como solución $\gamma_1 = -\epsilon_1$ y $\gamma_2 = -\epsilon_2$, de donde se sigue que $\gamma_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Luego, la descomposición canónica se obtiene seleccionando la terna $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-\epsilon_1, -\epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2)$, la cual una vez obtenida, determina la descomposición única (ecuaciones (4.1.10)).

b) De las ecuaciones (4.1.11a)-(4.1.11b) y ecuaciones (4.1.12a)-(4.1.12b) se obtiene el problema (4.1.14) que determina la descomposición canónica.

c) De la ecuación (4.1.11a) se tiene que

$$g_S(w, -\epsilon_1) = Q_S(e^{iw}) - \epsilon_1 \left| \delta_S(e^{iw}) \right|^2 \quad (4.1.15)$$

y de la ecuación (4.1.9a) se sigue que existe una w en $[0, \pi]$, tal que

$$g_S(w, -\epsilon_1) = \left| \Theta_S(e^{iw}) \right|^2 \sigma_1^2 = 0$$

de donde se obtiene que $\Theta_S(e^{iw}) = 0$ para alguna w en $[0, \pi]$, que implica que $\Theta_S(B)$ no es invertible. De manera análoga se tiene que $\Theta_T(B)$ no es invertible.

d) Si $\bar{s}f_S(e^{iw})$ es el seudoespectro de \bar{S}_t , entonces de (4.1.9a) se tiene que

$$\bar{s}f_S(e^{iw}) = \frac{Q_S(e^{iw})}{\left| \delta_S(e^{iw}) \right|} - \epsilon_1 \quad (4.1.16)$$

luego, si $sf_S(e^{i\omega})$ es el pseudoespectro de cualquier otra descomposición S_t , se sigue que $\gamma_1 > -\epsilon_1$ y $sf_S(e^{i\omega}) = \overline{sf_S}(e^{i\omega}) + \sigma_{\alpha_1}^2$, con $\sigma_{\alpha_1}^2 = \gamma_1 + \epsilon_1 > 0$, lo que implica que $S_t = \overline{S}_t + \alpha_{1t}$. De igual manera se tiene que $T_t = \overline{T}_t + \alpha_{2t}$.

e) De las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.11a) se tiene que

$$\text{Var} [\delta_S(B)S_t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [Q_S(e^{i\omega}) + \gamma_1 |\delta_S(e^{i\omega})|^2] d\omega$$

la cual es minimizada haciendo γ_1 tan pequeño como sea posible o $\gamma_1 = -\epsilon_1$, el valor correspondiente a la descomposición canónica ■

La propiedades presentadas en la proposición 4.1.2 podrían justificar la elección de la descomposición canónica. En particular se deduce de la propiedad (b), que la aleatoriedad que se presenta en S_t y T_t debido a los procesos de ruido blanco b_{1t} y b_{2t} es minimizada, tratando de hacer que dichas componentes sean lo más determinista posible. También, de la propiedad (d) se tiene que cualquier otra componente aceptable se puede obtener como la suma de la componente canónica y un proceso de ruido blanco, haciendo que las componentes S_t y T_t sean menos predecibles. La propiedad (e) hace que el comportamiento de la componente estacional sea lo más estable posible, esto es, de (4.1.1) se tiene que $E[\delta_S(B)S_t] = 0$ y de la propiedad (e) $\text{Var}[\delta_S(B)S_t]$ es minimizada, lo que permite asegurar que la suma de E valores consecutivos de S_t sea lo más cercano a cero.

IV.1 - ESTIMACION DE LA DESCOMPOSICION CANONICA

Hillmer y Tiao (1982) encuentran que la estimación de los modelos correspondientes a la descomposición canónica representa dificultades de carácter analítico, sin embargo, en los trabajos de Maravall y Pierce (1987) y Maravall (1988) se propone

descomponer la serie observada en componentes, de tal manera que cada una de ellas corresponda a uno de los picos "infinitos" presentes en el espectro de la serie observada. Esto es, si el modelo que genera a la serie observada tiene un polinomio autorregresivo dado por (4.1.6), con periodo estacional $E = 12$, éste se puede escribir como

$$\phi_1(B)(1-B)^d(1+B+B^2+\dots+B^{11}) = \phi_1(B)(1-B)^d(1+B) \times (1+B^2)(1+B+B^2)(1-B+B^2)(1+\sqrt{3}B+B^2)(1+\sqrt{3}B+B^2)$$

donde cada uno de los factores (excepto $\phi_1(B)$) ocasionará un pico "infinito" en el seudoespectro de Y_t , y que en este caso se presentan en $w = 0$, $w = \pi/6$, $w = \pi/3$, $w = \pi/2$, $w = 2\pi/3$, $w = 5\pi/6$ y $w = \pi$. Luego, Y_t se puede descomponer como

$$Y_t = S_{1t} + S_{2t} + S_{3t} + S_{4t} + S_{5t} + S_{6t} + T_t + I_t \quad (4.2.1)$$

donde las componentes se generan por los modelos

$$(1+B)S_{1t} = (1-\theta_1 B)b_{1t} \quad (4.2.2a)$$

$$(1+B^2)S_{2t} = (1-\theta_{21}B - \theta_{22}B^2)b_{2t} \quad (4.2.2b)$$

$$(1+B+B^2)S_{3t} = (1-\theta_{31}B - \theta_{32}B^2)b_{3t} \quad (4.2.2c)$$

$$(1-B+B^2)S_{4t} = (1-\theta_{41}B - \theta_{42}B^2)b_{4t} \quad (4.2.2d)$$

$$(1+\sqrt{3}B+B^2)S_{5t} = (1-\theta_{51}B - \theta_{52}B^2)b_{5t} \quad (4.2.2e)$$

$$(1-\sqrt{3}B+B^2)S_{6t} = (1-\theta_{61}B - \theta_{62}B^2)b_{6t} \quad (4.2.2f)$$

$$(1-B)^d T_t = \theta_1(B)b_{7t} \quad (4.2.2g)$$

$$\phi_1(B)I_t = \theta_1(B)b_{8t} \quad (4.2.2h)$$

Ahora, mediante fracciones parciales, $sf(B)$ (el seudoespectro de Y_t) se escribe como

$$\begin{aligned}
sf(B) = & \frac{Q_{s1}(B)}{|(1+B)|^2} + \frac{Q_{s2}(B)}{|(1+B^2)|^2} + \frac{Q_{s3}(B)}{|(1+B+B^2)|^2} + \\
& \frac{Q_{s4}(B)}{|(1-B+B^2)|^2} + \frac{Q_{s5}(B)}{|(1+\sqrt{3}B+B^2)|^2} + \frac{Q_{s6}(B)}{|(1-\sqrt{3}B+B^2)|^2} + \\
& \frac{Q_I(B)}{|(1-B)^d|^2} + \frac{Q_I(B)}{|\phi_I(B)|^2} \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

donde $Q_{s1}(B) = q_{0s1} + q_{1s1}(B + F)$ para $i = 1, \dots, 6$, $Q_I(B)$ está dado por (4.1.8) y $Q_I(B)$ se obtiene por diferencia. Luego, calculando los valores $\epsilon_i = 1, \dots, 8$ (definidos análogamente a (4.1.9)) en el dominio de las frecuencias y en el intervalo $[0, \pi]$, permiten una extensión de la proposición 4.1.1.

PROPOSICION 4.2.1: Una descomposición aceptable existe si y sólo si $\sum \epsilon_i \geq 0$.

DEMOSTRACION: Análoga a la de la proposición 4.1.1.

Una vez determinada la existencia de una descomposición aceptable, los modelos correspondientes a la descomposición que maximiza la varianza de b_{gt} (el proceso de ruido blanco de la componente irregular), es decir los modelos de la descomposición canónica, se obtienen a partir de los seudoespectros

$$sf_{s1}(e^{i\omega}) = \frac{Q_{s1}(e^{i\omega})}{|(1 + e^{i\omega})|^2} - \epsilon_1 \tag{4.2.4a}$$

$$sf_{s2}(e^{i\omega}) = \frac{Q_{s2}(e^{i\omega})}{|(1 + e^{i2\omega})|^2} - \epsilon_2 \tag{4.2.4b}$$

$$sf_{s3}(e^{i\omega}) = \frac{Q_{s3}(e^{i\omega})}{|(1 + e^{i\omega} + e^{i2\omega})|^2} - \epsilon_3 \tag{4.2.4c}$$

$$sf_{s4}(e^{iw}) = \frac{Q_{s4}(e^{iw})}{|(1 - e^{iw} + e^{i2w})|^2} - \epsilon_4 \quad (4.2.4d)$$

$$sf_{s5}(e^{iw}) = \frac{Q_{s5}(e^{iw})}{|(1 + \sqrt{3} e^{iw} + e^{i2w})|^2} - \epsilon_5 \quad (4.2.4e)$$

$$sf_{s6}(e^{iw}) = \frac{Q_{s6}(e^{iw})}{|(1 - \sqrt{3} e^{iw} + e^{i2w})|^2} - \epsilon_6 \quad (4.2.4f)$$

$$sf_I(e^{iw}) = \frac{Q_I(e^{iw})}{|(1 - e^{iw})^d|^2} - \epsilon_7 \quad (4.2.4g)$$

$$sf_I(e^{iw}) = \frac{Q_I(e^{iw})}{|\phi_I(e^{iw})|^2} + \sum_{i=1}^7 \epsilon_i \quad (4.2.4h)$$

que corresponden a las componentes de dicha descomposición y que se obtienen al extender los resultados de la proposición 4.1.2.(a), en donde se determinan las constantes, para obtener de la descomposición en fracciones parciales (4.2.3), la descomposición canónica (4.2.4).

Una vez determinados los modelos que generan a cada una de las componentes de Y_t en (4.2.1), la estimación de las componentes para cada uno de los periodos de observación de Y_t surge de los resultados presentados en los capítulos II y III, los cuales pueden ser extendidos a tres o más componentes no observables. Esto es, se construye un modelo de espacio de estados para la descomposición (4.2.1), en donde los modelos de las componentes son de la forma (4.2.2). Construido el modelo de espacio de estados, las componentes serán estimadas mediante la estimación de un vector de estados, empleando la técnica del filtro de Kalman y el suavizamiento de punto fijo, dicha estimación presenta tres casos posibles, los cuales son tratados en la sección II.3. Con respecto a estos casos, obsérvese que:

1) Siete de los modelos en (4.2.2) tienen raíces sobre el círculo

unitario.

- 2) Los polinomios autorregresivos de los modelos dados por (4.2.2) no tienen raíces en común.
- 3) Los polinomios autorregresivos y de promedios móviles en cada uno de los modelos ARMA dados por (4.2.2), no comparten raíces en común.

La observación 1, establece que la matriz F de la ecuación de transición que se construye (ecuación (2.3.1)) tiene eigenvalores sobre el círculo unitario, por lo que el sistema se considera no estable, la observación 2 asegura que la pareja de matrices (F,H) es detectable y la observación 3 asegura que la pareja de matrices (F,D) es controlable. Luego, trabajar con la descomposición canónica es trabajar con el caso presentado en la sección II.3 situación ii, donde las condiciones iniciales son obtenidas extendiendo los resultados presentados en la sección III.3.

CAPITULO V

EJEMPLOS

En este capítulo se intenta ilustrar la aplicación de la técnica de extracción de señal, para la estimación de la descomposición canónica de una serie de tiempo $\{Y_t\}$ o alguna transformación de $\{Y_t\}$.

V.1- EJEMPLO 1

Considere que $\{Y_t\}$ es la serie G de Box y Jenkins (1976), la cual consta de 144 observaciones que denotan el número de pasajeros mensuales en vuelos internacionales ($\times 1000$), durante el periodo de enero de 1949 a diciembre de 1960.

MODELOS

Box y Jenkins (1976) estiman para la serie $\{\ln(Y_t)\}$ un modelo de la forma

$$(1 - B)(1 - B^{12})[\ln(Y_t)] = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^{12})a_t$$

con

$$\hat{\theta}_1 = .4 \quad \hat{\theta}_2 = .61 \quad \hat{\sigma}^2 = .00134$$

Estos valores estimados serán considerados en lo subsecuente como los valores reales de los parámetros. A partir de ellos se tiene que el seudoespectro de la serie $\{\ln(Y_t)\}$ está dado por

$$sf(e^{iw}) = \frac{|(1 - \theta_1 e^{iw})(1 - \theta_2 e^{i12w})|^2}{|(1 - e^{iw})(1 - e^{i12w})|^2} \sigma^2$$

el cual presenta picos en $w = 0$, $w = \pi/6$, $w = \pi/3$, $w = \pi/2$, $w = 2\pi/3$, $w = 5\pi/6$, $w = \pi$, los cuales se pueden observar en la gráfica 1. Así que, $\{\ln(Y_t)\}$ se descompone como en (4.2.1) y los modelos

que generan a cada componente están dados por (4.2.2), con $d = 2$ en (4.2.2g) y $\phi_I(B) = 1$ en (4.2.2h). Ahora, por fracciones parciales, $sf(e^{iw})$ se escribe como

$$sf(e^{iw}) = h_{s1}(e^{iw}) + h_{s2}(e^{iw}) + h_{s3}(e^{iw}) + h_{s4}(e^{iw}) \\ + h_{s5}(e^{iw}) + h_{s6}(e^{iw}) + h_T(e^{iw}) + h_I(e^{iw}) \quad (5.1.1)$$

donde

$$h_{s1}(e^{iw}) = \frac{0.051805}{(1 + \cos w)} (0.1521/32) \sigma^2$$

$$h_{s2}(e^{iw}) = \frac{0.04 \cos w + 0.128888}{\cos^2 w} (0.1521/32) \sigma^2$$

$$h_{s3}(e^{iw}) = \frac{0.286535 \cos w + 0.489769}{(2 \cos w + 1)^2} (0.1521/32) \sigma^2$$

$$h_{s4}(e^{iw}) = \frac{0.149782 \cos w + 0.456487}{(2 \cos w - 1)^2} (0.1521/32) \sigma^2$$

$$h_{s5}(e^{iw}) = \frac{0.402101 \cos w + 0.456487}{(2 \cos w + \sqrt{3})^2} (0.1521/32) \sigma^2$$

$$h_{s6}(e^{iw}) = \frac{1.233821 \cos w - 0.652318}{(2 \cos w - \sqrt{3})^2} (0.1521/32) \sigma^2$$

$$h_T(e^{iw}) = \frac{0.225637 \cos w - 0.225397}{(1 - \cos w)^2} (1/2) \sigma^2$$

$$h_I(e^{iw}) = 0.244 \sigma^2$$

que corresponde a la ecuación (4.2.3) en el dominio de las frecuencias, esto es, como $B = e^{i\omega}$ y $F = e^{-i\omega}$, se tiene que $(B + F) = 2 \cos \omega$, de donde se obtiene

TABLA I

| $P(B)$ | $P(e^{i\omega})P(e^{-i\omega})$ |
|--------------------------|---------------------------------|
| $(1 - B)$ | $2(1 - \cos \omega)$ |
| $(1 + B)$ | $2(1 + \cos \omega)$ |
| $(1 + B^2)$ | $4 \cos^2 \omega$ |
| $(1 + B + B^2)$ | $(2 \cos \omega + 1)^2$ |
| $(1 - B + B^2)$ | $(2 \cos \omega - 1)^2$ |
| $(1 + \sqrt{3} B + B^2)$ | $(2 \cos \omega + \sqrt{3})^2$ |
| $(1 - \sqrt{3} B + B^2)$ | $(2 \cos \omega - \sqrt{3})^2$ |

que son los factores que se presentan en los denominadores de las h 's en (5.1.1).

Calculando el mínimo para cada una de las fracciones en (5.1.1), dentro del intervalo $[0, \pi]$, se tiene que

$$\epsilon_1 = \min h_{s1}(e^{i\omega}) = 0.025902 (0.1521/32) \sigma^2$$

$$\epsilon_2 = \min h_{s2}(e^{i\omega}) = 0.088888 (0.1521/32) \sigma^2$$

$$\epsilon_3 = \min h_{s3}(e^{i\omega}) = 0.086256 (0.1521/32) \sigma^2$$

$$\epsilon_4 = \min h_{s4}(e^{i\omega}) = 0.031387 (0.1521/32) \sigma^2$$

$$\epsilon_5 = \min h_{s5}(e^{i\omega}) = 0.061643 (0.1521/32) \sigma^2$$

$$\epsilon_6 = \min h_{s6}(e^{i\omega}) = -0.228602 (0.1521/32) \sigma^2$$

$$\epsilon_7 = \min h_r(e^{i\omega}) = 0.122758 (1/2) \sigma^2$$

$$\epsilon_8 = \min h_l(e^{i\omega}) = .244 \sigma^2$$

de donde se observa que $\sum \epsilon_1 \geq 0$, lo cual implica la existencia de una descomposición aceptable (proposición 4.1.1). Luego, los modelos de la descomposición canónica se determinan mediante (4.2.4) y la tabla I, esto es

COMPONENTE S_{1t}

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_{s1}(e^{iw}) &= h_{s1}(e^{iw}) - \epsilon_1 \\ &= \frac{(1 - \cos w)}{(1 + \cos w)} (0.000123) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_{s1}(B) = \frac{|(1 - B)|^2}{|(1 + B)|^2} (0.000123) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$(1 + B)S_{1t} = (1 - B)b_{1t} \quad \sigma_1^2 = 0.000123 \sigma^2$$

COMPONENTE S_{2t}

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_{s2}(e^{iw}) &= h_{s2}(e^{iw}) - \epsilon_2 \\ &= \frac{(0.128889 - 0.088888 \cos w)(1 + \cos w)}{\cos^2 w} (0.004753) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_{s2}(B) = \frac{|(1 - 0.4B)(1 + B)|^2}{|(1 + B^2)|^2} (0.001056) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$(1 + B^2)S_{2t} = (1 + 0.6B - 0.4B^2)b_{2t} \quad \sigma_2^2 = 0.001056 \sigma^2$$

COMPONENTE S_{3t}

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_{s_3}(e^{iw}) &= h_{s_3}(e^{iw}) - \varepsilon_3 \\ &= \frac{(3.631617 + 3.105218 \cos w)(1 - \cos w)}{(2 \cos w + 1)^2} (0.000528) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_{s_3}(B) = \frac{|(1 + 0.563073B)(1 - B)|^2}{|(1 + B + B^2)|^2} (0.000728) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$\begin{aligned} (1 + B + B^2)S_{3t} &= (1 - 0.436926B - 0.563073B^2)b_{3t} \\ \sigma_3^2 &= 0.000728 \sigma^2 \end{aligned}$$

COMPONENTE S_{4t}

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_{s_4}(e^{iw}) &= h_{s_4}(e^{iw}) - \varepsilon_4 \\ &= \frac{(3.607923 - 1.129942 \cos w)(1 + \cos w)}{(2 \cos w - 1)^2} (0.000528) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_{s_4}(B) = \frac{|(1 - 0.016063B)(1 + B)|^2}{|(1 - B + B^2)|^2} (0.000928) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$\begin{aligned} (1 - B + B^2)S_{4t} &= (1 + 0.839367B - 0.16063B^2)b_{4t} \\ \sigma_4^2 &= 0.000928 \sigma^2 \end{aligned}$$

COMPONENTE S_{5t}

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_{s5}(e^{i\omega}) &= h_{s5}(e^{i\omega}) - \varepsilon_5 \\ &= \frac{(3.782289 + 3.434356 \cos \omega)(1 - \cos \omega)}{(2 \cos \omega + \sqrt{3})^2} (0.000341) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_{s5}(B) = \frac{|(1 + 0.639917B)(1 - B)|^2}{|(1 + \sqrt{3}B + B^2)|^2} (0.000457) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}B + B^2)S_{5t} &= (1 - 0.360082B - 0.639917B^2)b_{5t} \\ \sigma_5^2 &= 0.000457 \sigma^2 \end{aligned}$$

COMPONENTE S_{6t}

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_{s6}(e^{i\omega}) &= h_{s6}(e^{i\omega}) - \varepsilon_6 \\ &= \frac{(6.089257 \cos^2 \omega - 2.330607 \cos \omega + 0.223004)}{(2 \cos \omega - \sqrt{3})^2} (0.000713) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_{s6}(B) = \frac{|(1 + 0.382740B + B^2)|^2}{|(1 - \sqrt{3}B + B^2)|^2} (0.001086) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}B + B^2)S_{6t} &= (1 + 0.382740B + B^2)b_{6t} \\ \sigma_6^2 &= 0.001086 \sigma^2 \end{aligned}$$

COMPONENTE T_t

seudoespectro

$$\begin{aligned} sf_T(e^{i\omega}) &= h_T(e^{i\omega}) - \epsilon_7 \\ &= \frac{(0.225757 - 0.225517 \cos \omega)(1 + \cos \omega)}{(1 - \cos \omega)^2} (0.25) \sigma^2 \end{aligned}$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_T(B) = \frac{|(1 - 0.954889B)(1 + B)|^2}{|(1 - B)|^2} (0.059042) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$\begin{aligned} (1 - 2B + B^2)T_t &= (1 + 0.045110B - 0.954889B^2)b_{7t} \\ \sigma_7^2 &= 0.059042 \sigma^2 \end{aligned}$$

COMPONENTE I_t

espectro

$$sf_I(e^{i\omega}) = h_I(e^{i\omega}) + \Sigma \epsilon_i$$

función generadora de covarianzas

$$sf_I(B) = 0.300690 \sigma^2$$

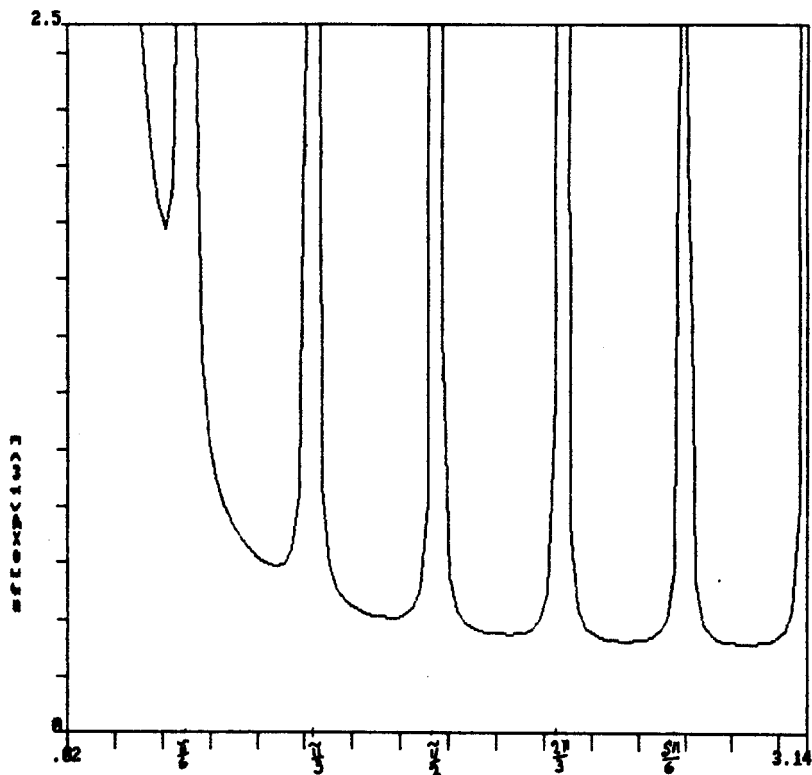
modelo

$$I_t = b_{8t} \quad \sigma_8^2 = 0.300690 \sigma^2$$

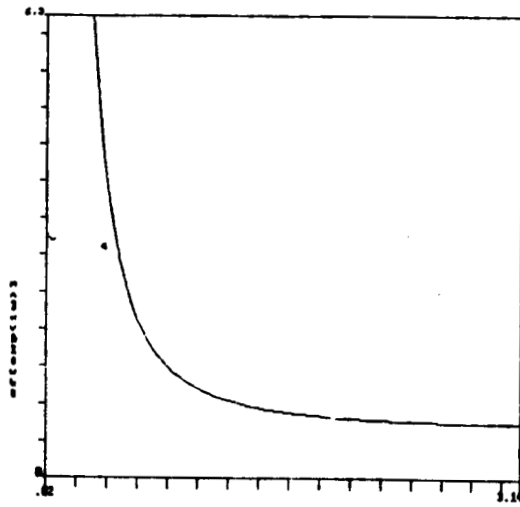
En la gráfica 2, se presenta el pseudoespectro de la componente de tendencia, más el espectro de la componente irregular, esto es, el pseudoespectro de la serie desestacionalizada, donde se observa la presencia de la componente de tendencia (un pico en $\omega = 0$). Mientras que en la gráfica 3, se presenta el pseudoespectro de $\{\ln(Y_t)\}$ y de la serie

desestacionalizada, y se observa que lo único que se ha removido de la serie $\{\ln(Y_t)\}$ son los efectos estacionales, que son representados por los picos en $w = \pi/6$, $w = \pi/3$, $w = \pi/2$, $w = 2\pi/3$, $w = 5\pi/6$ y $w = \pi$.

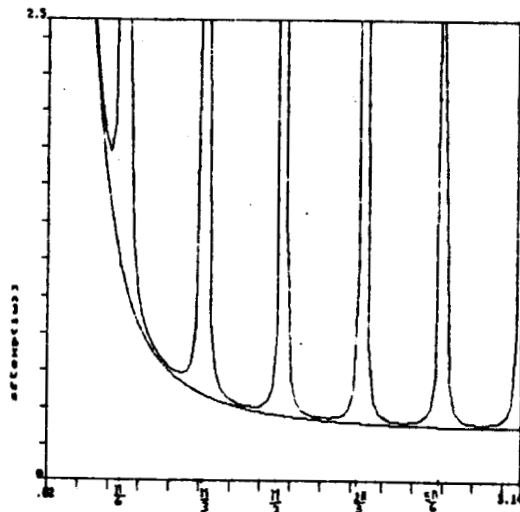
GRAFICA 1
SEUDOESPECTRO DE $\{\ln(Y_t)\}$



GRAFICA 2
SEUDESPECTRO DE SERIE DESESTACIONALIZADA



GRAFICA 3
SEUDESPECTRO DE $(LH(Y_t))$ Y SERIE DESESTACIONALIZADA



MODELO DE ESPACIO DE ESTADOS

Una vez determinados los modelos de la descomposición canónica, se construye el modelo de espacio de estados presentado en la sección III.1, para cada modelo de las componentes.

COMPONENTE S_{1t}

$$(1 + B)S_{1t} = (1 - B)b_{1t} \quad \sigma_1^2 = .000123 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{1,t+1} \\ X_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} b_{1t+1}$$

COMPONENTE S_{2t}

$$(1 + B^2)S_{2t} = (1 + 0.6B - 0.4B^2)b_{2t} \quad \sigma_2^2 = .001056 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{3,t+1} \\ X_{4,t+1} \\ X_{5,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{3,t} \\ X_{4,t} \\ X_{5,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.4 \end{bmatrix} b_{2t+1}$$

COMPONENTE S_{3t}

$$(1 + B + B^2)S_{3t} = (1 - 0.436926B - 0.563073B^2)b_{3t}$$

$$\sigma_3^2 = 0.000728 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{6,t+1} \\ X_{7,t+1} \\ X_{8,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{6,t+1} \\ X_{7,t+1} \\ X_{8,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.436926 \\ -0.563073 \end{bmatrix} b_{3t+1}$$

COMPONENTE S_{4t}

$$(1 - B + B^2)S_{4t} = (1 + 0.839367B - 0.160632B^2)b_{4t}$$

$$\sigma_4^2 = 0.000928 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{9,t+1} \\ X_{10,t+1} \\ X_{11,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{9,t+1} \\ X_{10,t+1} \\ X_{11,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.839367 \\ -0.160632 \end{bmatrix} b_{4t+1}$$

COMPONENTE $S_{5,t}$

$$(1 + \sqrt{3} B + B^2)S_{5,t} = (1 - 0.360082B - 0.639917B^2)b_{5t}$$

$$\sigma_5^2 = 0.000457 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{12,t+1} \\ X_{13,t+1} \\ X_{14,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{12,t+1} \\ X_{13,t+1} \\ X_{14,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.360082 \\ -0.639917 \end{bmatrix} b_{5t+1}$$

COMPONENTE S_{6t}

$$(1 - \sqrt{3} B + B^2)S_{6t} = (1 + 0.382740B + B^2)b_{6t}$$

$$\sigma_6^2 = 0.001086 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{15,t+1} \\ X_{16,t+1} \\ X_{17,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{15,t+1} \\ X_{16,t+1} \\ X_{17,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.382740 \\ 1 \end{bmatrix} b_{6t+1}$$

COMPONENTE T_t

$$(1 - 2B + B^2)T_t = (1 + 0.045110B - 0.954889B^2)b_{7t}$$

$$\sigma_7^2 = 0.059042 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{18,t+1} \\ X_{19,t+1} \\ X_{20,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{18,t} \\ X_{19,t} \\ X_{20,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.045110 \\ -0.954889 \end{bmatrix} b_{7t+1}$$

a partir de donde, el modelo de espacios de estados para la descomposición (4.2.1), se escribe como en (2.3.1) y (2.3.2), donde

X_{t+1} es un vector de tamaño (20 x 1)

$F = \text{diag} [F_{s1}, F_{s2}, \dots, F_{s6}, F_T]$ es una matriz de tamaño (20 x 20)

G es una matriz de tamaño (20 x 7) de la forma

$G = \text{diag} [G_{s1}, G_{s2}, \dots, G_{s6}, G_T]$

H^T es un vector de tamaño (1 x 20) con 1's en las entradas 1, 3, 6, 9, 12, 15 y 18, y ceros en las demás. Obsérvese que dichas entradas corresponden a los elementos $X_{1,t} = S_{1t}$, $X_{3,t} = S_{2t}$, $X_{6,t} = S_{3t}$, $X_{9,t} = S_{4t}$, $X_{12,t} = S_{5t}$, $X_{15,t} = S_{6t}$ y $X_{18,t} = T_t$, finalmente las matrices Q y R están dadas por

$$Q = \text{diag} [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_7^2] \quad \text{y} \quad R = \sigma_8^2 = 0.300690 \sigma^2$$

CONDICIONES INICIALES

Recuérdese que se trabaja con el caso tratado en la sección III.3, esto es, cuando (F,H) es detectable y (F,D) es controlable, para tal caso el filtro de Kalman se inicializa en

$$\hat{X}_{13|13} = \underset{\sim}{\Phi} A^{-1} Y_{13}^1 \quad \text{y} \quad P_{13|13} = P$$

debido a que los modelos de la descomposición canónica presentan 13 raíces sobre el círculo unitario. En el presente caso, la matriz $\underset{\sim}{\Phi}$ definida por (3.3.47b), se escribe como

$$\underset{\sim}{\Phi} = \text{diag} [\underset{\sim}{\Phi}_{s1}, \dots, \underset{\sim}{\Phi}_{s6}, \underset{\sim}{\Phi}_T]$$

donde las ϕ_1 son de la forma (ecuación (3.2.1d))

$$\phi_{s1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \phi_T = \phi_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } i = 2, \dots, 6$$

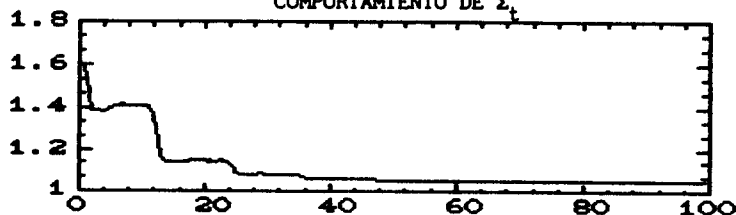
el vector Y_{13}^1 consta de las 13 primeras observaciones de la serie $\{\ln(Y_t)\}$, mientras que la matriz A definida en (3.3.42), adquiere la forma

$$A = [A_{13}^{s1}, A_{13}^{s2}, \dots, A_{13}^{s6}, A_{13}^T]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 12 & -11 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -\sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 11 & -10 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{3} & 2 & -\sqrt{3} & 2 & 10 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -\sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} & 9 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & 1 & 8 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 7 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} & -2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & \sqrt{3} & 2 & -\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con respecto al cálculo de la matriz P, se empleó el algoritmo descrito en III.3, en el cual se observó el comportamiento de Σ_t para la determinación de P, según se muestra en la gráfica 4, debido a que el límite de Σ_t se presenta una vez que $P_t|_{t-1}$ alcanza su límite (véase el teorema 2.3.3)

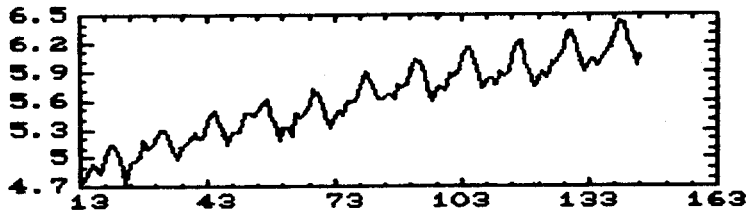
GRAFICA 4
COMPORTAMIENTO DE Σ_t



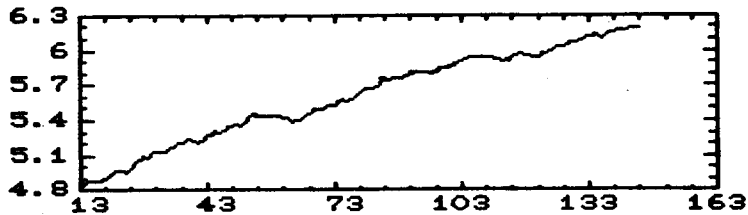
ESTIMACION DE LAS COMPONENTES CANONICAS

Una vez conocido el modelo de espacio de estados y las condiciones iniciales, se empleó el filtro de Kalman para la estimación de las componentes de la serie $\{\ln(Y_t)\}$, a partir de la observación $t = 13$. La descomposición obtenida de $\{\ln(Y_t)\}$ en sus componentes, puede visualizarse en la siguientes gráficas.

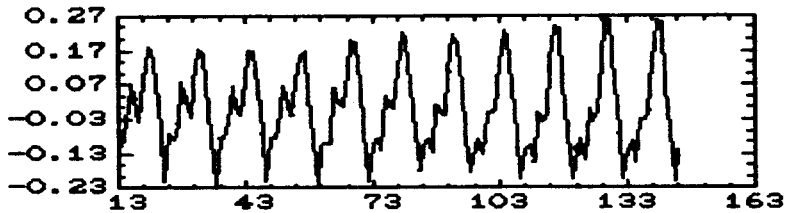
SERIE LN(Y)



TENDENCIA

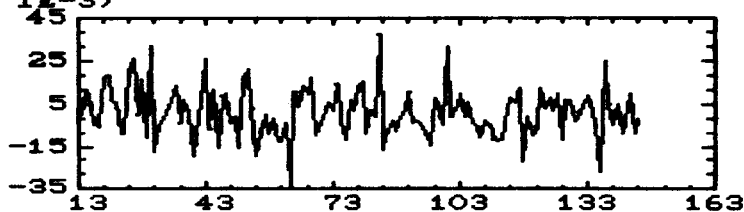


ESTACIONALIDAD



($\times 10^{-3}$)

IRREGULARIDAD



V.2- EJEMPLO 2

Considérese ahora que $\{Y_t\}$ es la serie del Indicador Trimestral de las Importaciones de Bienes y Servicios, durante el periodo que va del primer trimestre de 1980 al tercer trimestre de 1989, por lo que se cuenta con un total de 39 observaciones (los datos y la fuente de información se proporcionan al final de la sección).

MODELOS

Un modelo ARIMA para $\{Y_t\}$ fue construido utilizando la estrategia de Box y Jenkins (1976), teniendo como resultado

$$(1 - \phi B^4)(1 - B)Y_t = (1 - \theta B^2)a_t \quad (5.2.1)$$

con

$$\hat{\phi} = 0.3668 \quad \hat{\theta} = -0.4374 \quad \hat{\sigma} = 7.4474$$

en donde no se apreció ninguna evidencia de inadecuación en los residuales y el estadístico Q' tomó el valor 23.0 con 22 grados de libertad. A partir de este modelo se tiene que el pseudoespectro de la serie $\{Y_t\}$ está dado por

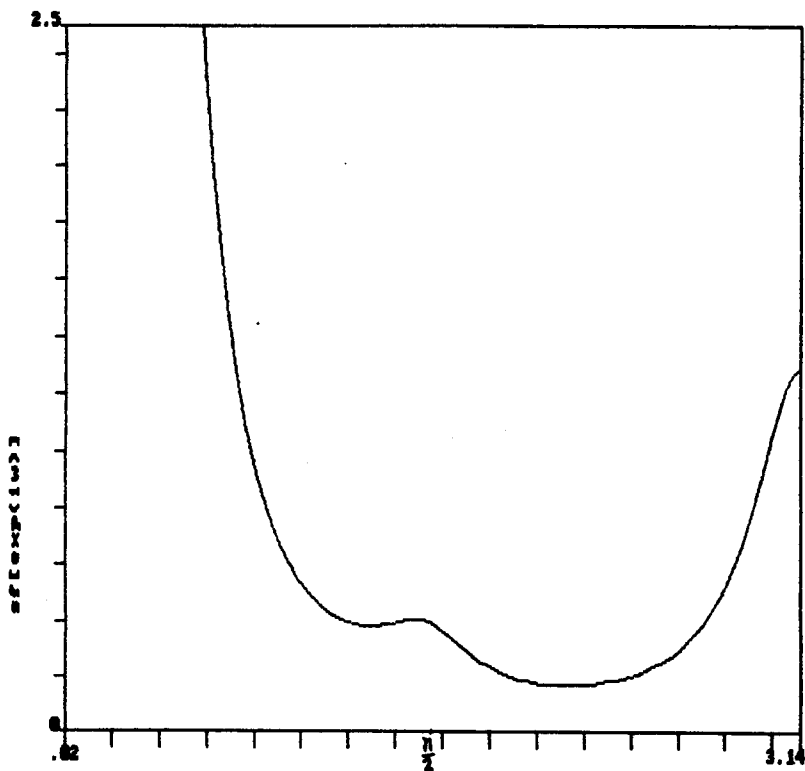
$$sf(e^{iw}) = \frac{|(1 - \theta e^{i2w})|}{|(1 - \phi e^{i4w})(1 - e^{iw})|} \sigma^2 \quad (5.2.2)$$

el cual presenta un pico único en $w = 0$, que se puede observar en la gráfica 5. Luego, la serie $\{Y_t\}$ presenta una componente de tendencia; la ausencia de picos "infinitos" en $w = \pi/2$ y $w = \pi$ ($E = 4$) indica la carencia de una componente estrictamente estacional, sin embargo la presencia del polinomio $(1 - \phi B^4)$ en (5.2.1) determina que si existe un efecto estacional aunque éste cambie de alguna manera año con año.

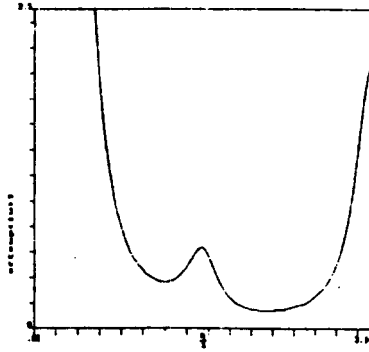
En vista de que no se tiene una definición de la componente estacional, el problema es determinar cuándo estos cambios deben

tenerse en cuenta para considerar la presencia de S_t , esto es, si $\{Y_t\}$ se descompone como $Y_t = S_t + T_t + I_t$ o como $Y_t = T_t + I_t$. Es claro que el valor del parámetro ϕ proporciona un medio para tratar el problema, debido a que los cambios que se presenten en la componente se minimizarán a medida que el valor de ϕ sea cercano a 1 y se podría considerar la presencia de S_t , mientras que se maximizarán a medida que ϕ se aleje de la unidad y se considera que dichos cambios son debidos a elementos aleatorios. El efecto de ϕ sobre el seudoespectro de la serie se puede observar gráficamente $sf(e^{i\omega})$ (dado por (5.2.2)) para $\phi = .5$, $\phi = .65$ y $\phi = .8$, según se muestra en las gráficas 6, 7, y 8 respectivamente.

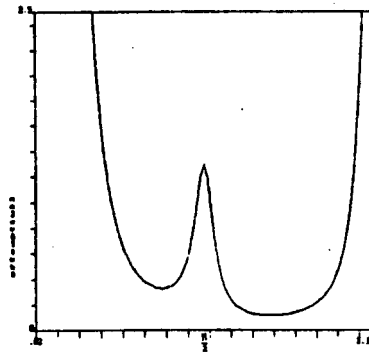
GRAFICA 5
SEUDOESPECTRO DE $\{Y_t\}$ CON $\phi = 0.3668$



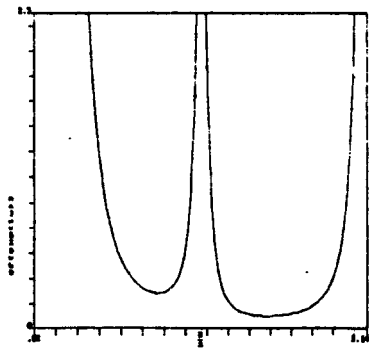
GRAFICA 6
SELODOSPECTRO CON $\phi = 0.5$



GRAFICA 7
SELODOSPECTRO CON $\phi = 0.65$



GRAFICA 8
SELODOSPECTRO CON $\phi = 0.8$



De lo anterior y puesto que el valor de ϕ en el modelo de la serie $\{Y_t\}$ tiene un valor alejado de la unidad, se considera que los cambios en la componente estacional son debidos a elementos aleatorios, por lo tanto la serie $\{Y_t\}$ se debe descomponer como $Y_t = T_t + I_t$. Con el fin de apreciar visualmente el comportamiento de la componente estacional, se considerará la descomposición $Y_t = S_t + T_t + I_t$, de manera tentativa.

Los modelos que generan a cada una de las componentes son de la forma

$$(1 + \mu B)S_{1t} = (1 - \theta_{11}B)b_{1t} \quad (5.2.3a)$$

$$(1 + \mu^2 B^2)S_{2t} = (1 - \theta_{21}B - \theta_{22}B^2)b_{2t} \quad (5.2.3b)$$

$$(1 - \mu B)(1 - B)T_t = (1 - \theta_{31}B - \theta_{32}B^2)b_{3t} \quad (5.2.3c)$$

$$I_t = b_{4t} \quad (5.2.3d)$$

donde $\mu^4 = \phi$, en el modelo (5.2.1). Las representaciones (5.2.3) son consideradas tomando en cuenta que son las que generarían a las componentes correspondientes, para el caso en el que $\phi = 1$.

Ahora, por fracciones parciales, $sf(e^{iw})$ en (5.2.2) se escribe como

$$sf(e^{iw}) = h_{s1}(e^{iw}) + h_{s2}(e^{iw}) + h_T(e^{iw}) + h_I(e^{iw}) \quad (5.2.4)$$

donde

$$h_{s1}(e^{iw}) = \frac{0.1220}{(1.6055 + 1.5564 \cos w)} (1/2) \sigma^2$$

$$h_{s2}(e^{iw}) = \frac{0.0702 (1 + \cos w)}{(0.1555 + 2.4224 \cos^2 w)} (1/2) \sigma^2$$

$$h_T(e^{iw}) = \frac{0.4208 - 0.1675 \cos w}{(1 - \cos w)(1.6055 - 1.5564 \cos w)} (1/2) \sigma^2$$

$$h_I(e^{i\omega}) = 0$$

Calculando el mínimo para cada una de las fracciones de (5.2.4) en el intervalo $[0, \pi]$, se tiene

$$\epsilon_1 = \min h_{s1}(e^{i\omega}) = (0.0385/2) \sigma^2$$

$$\epsilon_2 = \min h_{s2}(e^{i\omega}) = 0$$

$$\epsilon_3 = \min h_T(e^{i\omega}) = (0.0930/2) \sigma^2$$

$$\epsilon_4 = \min h_I(e^{i\omega}) = 0$$

en donde se observa que $\sum \epsilon_i \geq 0$, lo que implica la existencia de una descomposición aceptable (proposición 4.1.1). Luego, los modelos de la descomposición se determinan mediante (4.2.4), esto es

COMPONENTE S_{1t}

espectro

$$\begin{aligned} f_{s1}(e^{i\omega}) &= h_{s1}(e^{i\omega}) - \epsilon_1 \\ &= \frac{0.0600(1 - \cos \omega)}{(1.6055 + 1.5564 \cos \omega)} (1/2) \sigma^2 \end{aligned}$$

función generadora de covarianzas

$$f_{s1}(B) = \frac{|(1 - B)|^2}{|(1 + 0.7782 B)|^2} (0.0150) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$(1 + 0.7782 B)S_{1t} = (1 - B)b_{1t} \quad \sigma_1^2 = 0.0150 \sigma^2$$

COMPONENTE S_{2t}

espectro

$$f_{s_2}(e^{i\omega}) = h_{s_2}(e^{i\omega}) - \epsilon_2$$

$$= \frac{0.0702(1 + \cos \omega)}{(0.1555 + 2.4224 \cos^2 \omega)} (1/2) \sigma^2$$

función generadora de covarianzas

$$f_{s_2}(e^{i\omega}) = \frac{|(1 + B)|^2}{|(1 + 0.6056 B^2)|^2} (0.0175) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$(1 + 0.6056 B^2)S_{2t} = (1 + B)b_{2t} \quad \sigma_2^2 = 0.0175 \sigma^2$$

COMPONENTE T_t

seudoespectro

$$sf_T(e^{i\omega}) = h_T(e^{i\omega}) - \epsilon_3$$

$$= \frac{(1 + \cos \omega)(0.2714 - 0.1447 \cos \omega)}{(1 - \cos \omega)(1.6055 - 1.5564 \cos \omega)} (1/2) \sigma^2$$

seudofunción generadora de covarianzas

$$sf_T(B) = \frac{|(1 + B)(1 - 0.2846 B)|^2}{|(1 - B)(1 - 0.7782 B)|^2} (0.2521/2) \sigma^2$$

modelo ARMA

$$(1 - B)(1 - 0.7782 B)T_t = (1 + 0.7154 B - 0.2846 B^2)b_{3t}$$

$$\sigma_3^2 = 0.1260 \sigma^2$$

COMPONENTE I_t

espectro

$$f_I(e^{i\omega}) = h_I(e^{i\omega}) + \sum \epsilon_1$$

función generadora de covarianzas

$$f_I(e^{i\omega}) = 0.0657 \sigma^2$$

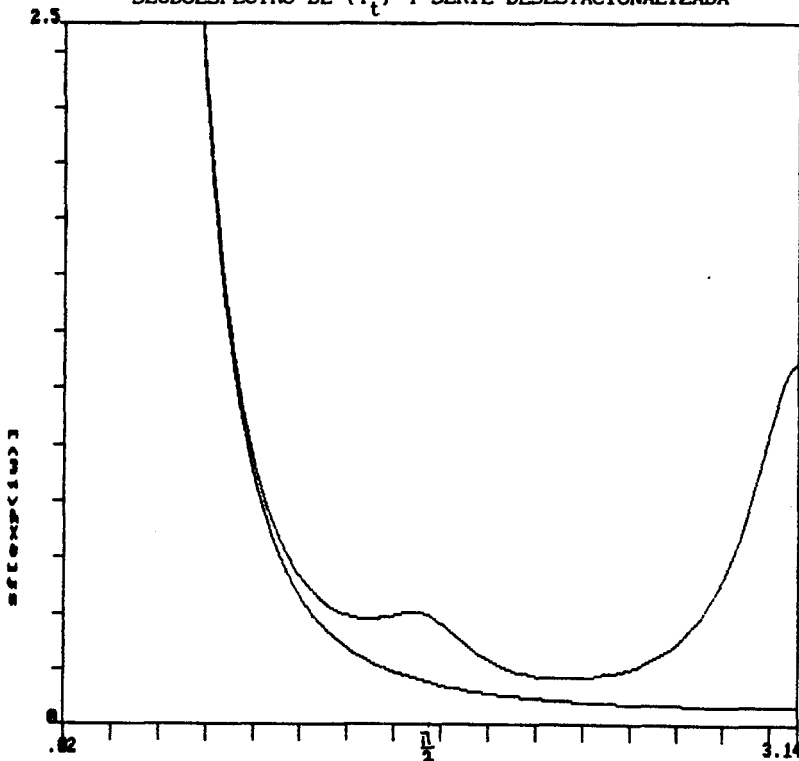
modelo

$$I_t = b_4 t \quad \sigma_4^2 = 0.0657 \sigma^2$$

En la gráfica 9 se presenta el seudoespectro de $\{Y_t\}$ y el de la serie desestacionalizada, donde se puede observar que lo único que se ha removido de la serie $\{Y_t\}$ son los efectos estacionales, que están asociadas con las "deformaciones" que se presentan en $\omega = \pi/2$ y $\omega = \pi$.

GRAFICA 9

SEUDOESPECTRO DE $\{Y_t\}$ Y SERIE DESESTACIONALIZADA



MODELO DE ESPACIO DE ESTADOS

Los modelos de espacio de estados para cada componente son

COMPONENTE S_{1t}

$$(1 + 0.7782 B)S_{1t} = (1 - B)b_{1t} \quad \sigma_1^2 = 0.0150 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{1,t+1} \\ X_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7782 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} b_{1t+1}$$

COMPONENTE S_{2t}

$$(1 + 0.6056 B^2)S_{2t} = (1 + B)b_{2t} \quad \sigma_2^2 = 0.0175 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{3,t+1} \\ X_{4,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6056 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{3,t} \\ X_{4,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} b_{2t+1}$$

COMPONENTE T_t

$$(1 - 1.7782 B + 0.7782 B^2)T_t = (1 + 0.7154 B - 0.2846 B^2)b_{3t} \\ \sigma_3^2 = 0.1260 \sigma^2$$

$$\begin{bmatrix} X_{5,t+1} \\ X_{6,t+1} \\ X_{7,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7782 & 1 & 0 \\ -0.7782 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{5,t+1} \\ X_{6,t+1} \\ X_{7,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7154 \\ -0.2846 \end{bmatrix} b_{3t+1}$$

y el modelo correspondiente a la descomposición toma entonces la forma

$$F = \text{diag} [F_{s1}, F_{s2}, F_T] \text{ matriz de tamaño } (7 \times 7)$$

$$G = \text{diag} [G_{s1}, G_{s2}, G_T]$$

H^T es un vector de tamaño (1×7) con 1's en las entradas 1, 3 y 5 que corresponden a S_{1t} , S_{2t} y T_t respectivamente, y cero en las demás. Las matrices Q y R están dadas por

$$Q = \text{diag} [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2] \quad \text{y} \quad R = \sigma_4^2 = 0.0657$$

CONDICIONES INICIALES

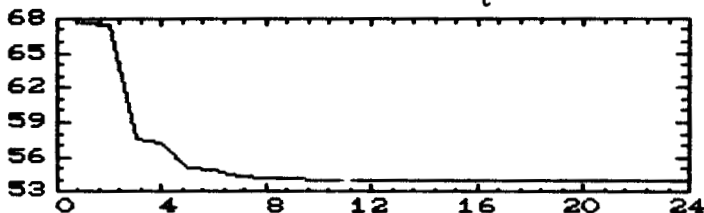
Debido a que los modelos de la descomposición presentan una raíz sobre el círculo unitario, se tiene que

$$\hat{X}_{1|1} = \hat{\Phi} A^{-1} Y_1 = [0, 0, 0, 0, 80.60, 62.72, 0]^T$$

$$P_{1|1} = P$$

donde, para calcular la matriz P , se observó nuevamente el comportamiento de Σ_t , mostrado en la gráfica 10.

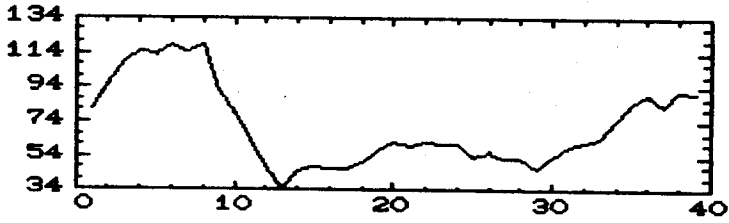
GRAFICA 10
COMPORTAMIENTO DE Σ_t



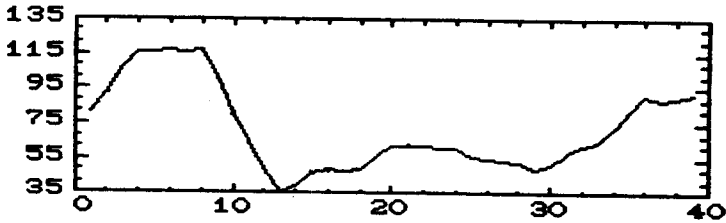
ESTIMACION DE LAS COMPONENTES

La descomposición obtenida de $\{Y_t\}$ se puede visualizar en las siguientes gráficas

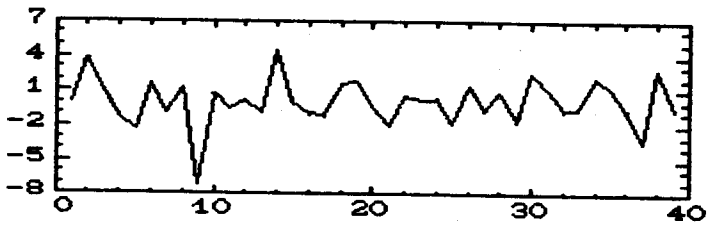
SERIE Y



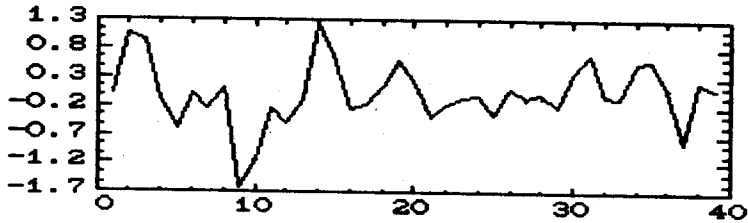
TENDENCIA



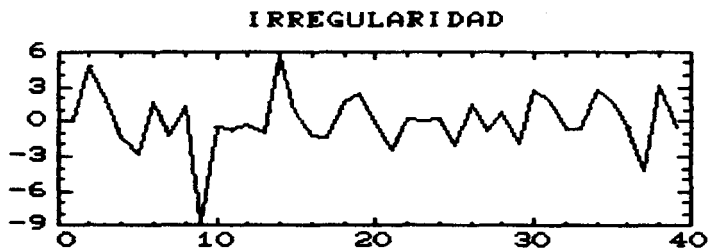
ESTACIONALIDAD



IRREGULARIDAD



Obsérvese que la componente estacional está lejos de presentar el comportamiento característico de esta componente y más bien refleja un comportamiento similar al de la irregularidad, por lo que se considera que la descomposición de $\{Y_t\}$ debe ser de la forma $Y_t = T_t + I'_t$ con $I'_t = S_t + I_t$, la cual se presenta en la siguiente gráfica.



Para finalizar este ejemplo, se presenta a continuación la tabla de valores observados de la serie utilizada.

**INDICADOR TRIMESTRAL DE IMPORTACIONES
DE BIENES Y SERVICIOS**

| AÑO | TRIMESTRE | | | |
|------|-----------|-------|-------|-------|
| | I | II | III | IV |
| 1980 | 80.6 | 96.1 | 108.9 | 114.3 |
| 1981 | 112.9 | 118.7 | 114.5 | 118.3 |
| 1982 | 92.1 | 79.3 | 63.4 | 47.8 |
| 1983 | 34.9 | 45.0 | 47.5 | 46.8 |
| 1984 | 45.9 | 50.3 | 57.7 | 61.9 |
| 1985 | 60.0 | 61.8 | 60.9 | 60.4 |
| 1986 | 54.2 | 56.6 | 52.4 | 52.8 |
| 1987 | 46.9 | 53.3 | 59.9 | 61.7 |
| 1988 | 63.9 | 74.7 | 84.4 | 90.1 |
| 1989 | 83.5 | 92.4 | 91.1 | --- |

Fuente: Indicadores Económicos. Banco de México.
Diciembre de 1989.

DISCUSION

En este trabajo se ha presentado la conexión entre las soluciones obtenidas por la teoría clásica de extracción de señal y las obtenidas mediante la técnica recursiva denominada filtro de Kalman. Dicha conexión es presentada considerando que en la práctica el filtro de Kalman proporciona una alternativa viable para enfrentar el problema de extracción de señal, cuando se cuenta con una realización finita de una serie. Puesto que el filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, es importante dar atención al aspecto de las condiciones iniciales, principalmente al tratar con series de tiempo no estacionarias, las cuales aparecen con mayor frecuencia en la práctica.

Se presentan tres casos dentro del problema de extracción de señal, para cada uno de los cuales se considera el problema de las condiciones iniciales; esto permite relacionar los diferentes tratamientos con los que se ha estudiado la extracción de señal.

- 1) Caso estacionario. Los polinomios autorregresivos de las componentes presentan únicamente raíces dentro del círculo unitario o equivalentemente el sistema es estable, (F,H) es detectable y (F,D) es controlable.

Este caso ha sido ampliamente tratado por diferentes autores y los resultados obtenidos, tanto teórica como prácticamente, coinciden. Dichos resultados sin embargo, fueron presentados con el fin de dar pie al tratamiento del caso no estacionario.

- 2) Caso no estacionario. En este caso se tratan dos situaciones que se presentan como:

- a) Los polinomios autorregresivos de las componentes no tienen raíces sobre el círculo unitario o equivalentemente (F,H) es detectable y (F,D) es controlable.

En esta situación, al emplear el filtro de Kalman en la

práctica, Burridge y Wallis (1985) y Kitagawa y Gersch (1984) inicializan el filtro en $\hat{X}_{0|-1} = 0$ y $P_{0|-1} \gg P$, dichas condiciones iniciales presentan inestabilidades numéricas, causadas por la dependencia que el vector de estados presenta con los valores iniciales (véase 3.3.4), dichas inestabilidades son denominadas por Burridge y Wallis (1985) como periodo de aprendizaje. Ansley y Kohn (1985) y Kohn y Ansley (1986) desarrollan, con el fin de eliminar este periodo de aprendizaje, un algoritmo que denominan "Filtro de Kalman Modificado", que permite determinar el estimador del vector de estados expresado en (3.3.11) en forma eficiente a partir de dichas condiciones iniciales, pero con la desventaja de que el Filtro de Kalman Modificado que desarrollan es conceptualmente complejo. Por otro lado, Bell y Hillmer (1987) siguiendo los trabajos de Harvey y Pierse (1984) y Jones (1980), proponen inicializar el filtro de Kalman en un tiempo $t = d$ en lugar de $t = 0$, para lo cual se emplean los resultados de Bell (1984), con la desventaja de que no será posible obtener estimadores de las primeras d componentes. En el trabajo se ha empleado esta última propuesta tomando en cuenta lo siguiente:

i) Ansley y Kohn (1985) y Kohn y Ansley (1986) muestran que su Filtro de Kalman Modificado se reduce a un filtro de Kalman ordinario a partir del periodo de observación $t = d$, lo que implica, que los resultados obtenidos con el Filtro de Kalman Modificado coinciden con los obtenidos mediante la teoría clásica de extracción de señal, lo cual se puede observar en los resultados presentados en el capítulo II y en la proposición 3.3.1.

ii) Al emplear los resultados de Bell (1984) para la estimación del vector de estados $\hat{X}_{d|d}$ y $P_{d|d}$, se obtiene la equivalencia de estos (que son presentados considerando una realización infinita de la serie observada $\{Y_t\}$), con los obtenidos por Pierce (1979) mediante el filtro de Kalman.

b) Los polinomios autorregresivos de las componentes tienen raíces en común sobre el círculo unitario o equivalentemente (F,D)

es controlable

En la sección III.4 se observó que el problema que se enfrenta en la determinación de las condiciones iniciales, es la falta de información para eliminar completamente el periodo de aprendizaje, y que está reflejada en el vector L (véase la ecuación (3.4.10)). En esta situación se encuentra un estimador para las componentes (estimando el vector de estados) que Pierce (1979) define como óptimo, aun cuando su ECM no existe (la ecuación algebraica de Riccati no tiene solución).

En esta situación, la discusión que se presenta es referente a la existencia del ECM de las componentes. En los trabajos de Bell (1984) y Bell (1988) se supone que la información L debe ser independiente de $\{Y_t\}$, lo que permite obtener estimadores de las componentes, de tal forma que no dependan de ninguna información sobre L , sin embargo la expresión que se obtiene para el ECM depende de $\text{Var}(L)$, la cual se supone conocida (véase Bell (1988)). Así pues, se requiere que L tenga una distribución bien definida y una vez determinada ésta, encontrar una técnica que permita emplear los estimadores en la práctica, debido a que estos se obtienen a partir de una realización infinita $\{Y_t\}$.

Bell (1988) menciona que sus resultados pueden ser obtenidos en la práctica empleando el filtro de Kalman, sin embargo en el capítulo II se encuentra que la ecuación algebraica de Riccati no presenta solución y el conocimiento de la distribución de L no influye para la determinación de la solución. Esto último se puede observar a partir de que la solución a la ecuación algebraica de Riccati depende de la solución a la ecuación (2.3.62c) y ésta a su vez depende de los eigenvalores de F_2^* y no del conocimiento de la distribución de L .

Ahora, con respecto a la determinación de L , Kohn y Ansley (1987) proponen unas restricciones que permiten determinarlo, de tal forma que se pueden redefinir los modelos ARMA que generan a las componentes, para que, los polinomios autorregresivos no

tengan raíces en común sobre el círculo unitario y la determinación de la distribución de L se reemplaza por la determinación de la distribución de otro vector. Luego, empleando el Filtro Modificado de Kalman se obtienen los estimadores correspondientes a las componentes generadas por los nuevos modelos. Este procedimiento tiene la inconveniencia de modificar la dinámica de la componente estacional; para ver esto, considérese el modelo que proponen Cleveland y Tiao (1976) para explicar el comportamiento del método X-11 para desestacionalizar una serie de tiempo. En dicho modelo se considera que la componente estacional tiene un polinomio autorregresivo de la forma $(1 - Z^{12})$ y la componente de tendencia tiene un polinomio de la forma $(1 - Z)^2$, por lo cual se observa que los polinomios tienen la raíz $Z = 1$ en común. Ahora, para emplear los resultados de Kohn y Ansley (1987) se reemplaza el polinomio autorregresivo $(1 - B^{12})$ por uno de la forma $(1 - B - B^2 - \dots - B^{11})$ con lo cual se elimina la presencia de la raíz en común, pero se modifica el comportamiento de la componente estacional. Tanto Bell (1988), como Kohn y Ansley (1987), hacen mención a una distribución bien definida, pero ninguno presenta o considera la determinación de ella.

Una vez tratado el problema de extracción de señal, se presentó el problema de la estimación de los modelos ARMA que generan a cada componente no observable. Los resultados presentados están basados en el trabajo de Hillmer y Tiao (1982), en donde primero se determinan las características de los modelos considerando supuestos de lo que debe representar cada una de las componentes involucradas, y mediante la proposición 4.1.1 se determina si tales modelos son consistentes con la información contenida en la serie observada $\{Y_t\}$. Obsérvese que para demostrar dicha consistencia es necesaria la construcción de un modelo ARMA para la serie observada, de tal forma que si la estimación del modelo es mala, los resultados obtenidos serán erróneos. Esta consistencia se puede considerar que proporciona a la metodología solidez teórica. Es importante mencionar que Bell y Hillmer (1984) aclaran que dicha consistencia es una condición necesaria para

considerar a un método de desestacionalización como "bueno". La consistencia no es exclusiva de los métodos que hacen uso de la teoría de extracción de señal, sin embargo ésta se determina (cuando es posible) después de haber realizado la desestacionalización de la serie.

Se ha mencionado que los modelos con los que se trabaja son obtenidos del supuesto de lo que debe representar cada una de las componentes involucradas, sin embargo, al no tener una definición de cada componente (véase el capítulo I), diferentes supuestos llevarán a diferentes modelos, en particular se puede mencionar como ejemplo a Burman (1980), quien en lugar de trabajar con la descomposición canónica, trabaja con la descomposición aceptable que se obtiene al considerar $\sigma_1^2 = \sigma^2$ para toda i . Entonces, en los supuestos que se considere, se debe precisar qué es lo que se desea estimar.

Por lo que respecta a la estimación de los modelos, se menciona que se presentan dificultades de carácter analítico, que aún siguiendo las ideas propuestas por Maravall (1988) y Maravall y Pierce (1987) se siguen presentando. Este hecho se puede considerar como factor decisivo, que limita el empleo de esta metodología para la desestacionalización de series de tiempo de manera rutinaria.

Finalmente, conviene señalar que en este trabajo se ha considerado que la serie de tiempo está constituida sólo por tres componentes, sin embargo, existen posiblemente más componentes en la serie que podrían explicar parte de su comportamiento (véase Guerrero 1983a y 1983b), esto desde luego volvería más compleja la metodología, pero la enriquecería. Aunque no se haya tocado el aspecto de otras componentes adicionales en el modelo, se considera que la argumentación aquí expuesta puede ser extendida de manera relativamente sencilla para tener en cuenta otras componentes, en especial si éstas son deterministas (del tipo de intervenciones o de efectos del calendario).

BIBLIOGRAFIA

- Anderson, B.D.O. y Moore, J.B. (1979). Optimal Filtering. Inglewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Ansley, C.F. y Kohn, R. (1985). "Estimation, Filtering, and Smoothing in State Space Models with Incompletely Specified Initial Conditions", Annals of Statistics, 13, 1286-1316.
- Aoki, M. (1987). State Space Modeling of Time series. Berlin: Springer-Verlag.
- Ash, B.R. (1972). Real Analysis and Probability. New York: Academic Press.
- Bell, W.R. (1984). "Signal Extraction for Nonstationary Time Series", Annals of Statistics, 12, 646-664.
- Bell, W.R. (1988). "Signal Extraction for Nonstationary Time Series: a Correction", SRD, U.S. Bureau of the Census.
- Bell, W.R. y Hillmer, S.C. (1984). "Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Journal of Business and Economic Statistics, 2, 291-320.
- Bell, W.R. y Hillmer, S.C. (1987). "Initializing the Kalman Filter in the Nonstationary Case". SRD Research Report Number: CENSUS/SRD/RR-87/33, U.S. Bureau of the Census.
- Boullion, L.T. y Odell, L.P. (1971). Generalized Inverse Matrices. New York: Wiley.
- Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco: Holden Day.
- Box, G.E.P.; Hillmer, S.C. y Tiao, G.C. (1978). "Analysis of Modeling of Seasonal Time Series", en A. Zellner (eds), Seasonal

Analysis of Economic Time Series. (U.S. Bureau of the Census), 309-344.

Burman, J.P. (1980). "Seasonal Adjustment by Signal Extraction", Journal of the Royal Statistical Society, A-143, 321-337.

Burrige, P. y Wallis, K.F. (1985). "Calculating the Variance of Seasonally Adjusted Series", Journal of the American Statistical Association, 80, 541-552.

Burrige, P. y Hall, A.R. (1987). "Convergence of the Kalman Filter Gain for a Class of Nondetectable Signal Extraction Problems", IEEE Transactions on Automatic Control, 32, 1036-1039.

Burrige, P. y Wallis, K.F. (1988). "Prediction Theory for Autoregressive-Moving Average Processes". Artículo presentado en la Reunión de la Sociedad Latinoamericana de Econometría, San José, Costa Rica.

Caines, P.E. y Mayne, D.Q. (1970). "On the Discrete Time Matrix Riccati Equation of Optimal Control", International Journal of Control, 12, 785-794.

Caines, P.E. y Mayne, D.Q. (1971). "On the Discrete Time Matrix Riccati Equation of Optimal Control: a Correction", International Journal of Control, 14, 205-207.

Cleveland, W.P. y Tiao, G.C. (1976). "Decomposition of Seasonal Time Series: A Model for the Census X-11 Program", Journal of the American Statistical Association, 71, 581-587.

Cowden, D.J. (1942). "Moving Seasonal Indexes", Journal of the American Statistical Association, 37, 523-524.

Dagum, E.B. (1978). "A Comparison and Assessment of Seasonal Adjustment Methods for Employment and Unemployment Statistics", Background Paper No 5, National Commission on Employment and

Unemployment Statistics.

Fisher, A. (1937). "A Brief Note on Seasonal Variation", Journal of Accountancy, 64, 174-199.

Gihman, I.I. y Skorohod, A.V. (1974). The Theory of Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag.

Goodwin, G.C. y Sin, K.S. (1984). Adaptive Filtering Prediction and Control. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Granger, C.W.J. (1978). "Seasonality: Causation, Interpretation, and Implications", en A. Zellnar (eds), Seasonal Analysis of Economic Time Series, (U.S. Bureau of the Census), 33-55.

Granger, C.W.J. y Newbold, P. (1986). Forecasting Economic Time Series. San Diego: Academic Press.

Grether, D.M. y Nerlove, M. (1970). "Some Properties of Optimal Seasonal Adjustment", Econometrica, 38, 682-703.

Guerrero, V.M. (1983a). "Desestacionalización de Series de Tiempo Económicas: Parte I, Una Introducción a la Metodología", Documento de Investigación No 54, Banco de México.

Guerrero, V.M. (1983b). "Desestacionalización de Series de Tiempo Económicas: Parte II, Ajustes Previos a la Desestacionalización", Documento de Investigación No 55, Banco de México.

Hannan, E.J. (1970). Multiple Time Series. New York: Wiley.

Hart, W.L. (1922). "The Method of Monthly Means for Determination of a Seasonal Variation", Journal of the American Statistical Association, 18, 341- 349.

Harvey, A.C. y Pierse, R.G. (1984). "Estimating Missing Observations in Economic Time Series", Journal of the American

Statistical Association, 79, 125-131.

Henrici, P. (1974). Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1. New York: Wiley.

Hillmer, S.C. y Tiao G.C. (1982). "An ARIMA-Model-Based Approach to Seasonal Adjustment", Journal of the American Statistical Association, 77, 63-70.

Jones, H.L. (1943). "Fitting Polynomial Trends to Seasonal Data by the Method of Least Squares", Journal of the American Statistical Association, 38, 453-465.

Jones, R.H. (1980). "Maximum Likelihood Fitting of ARMA Models to Time Series with Missing Observations", Technometrics, 22, 389-395

Jorgenson, D.W. (1964). "Minimum Variance, Linear, Unbiased Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Journal of the American Statistical Association, 59, 681-724.

Jorgenson, D.W. (1967). "Seasonal Adjustment of Data for Econometric Analysis", Journal of the American Statistical Association, 62, 137-140.

Kailath, P.D. (1980). Linear Systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Kallek, S. (1978). "An Overview of the Objectives and Framework of Seasonal Adjustment", en A. Zellnar (eds), Seasonal Analysis of Economic Time Series, (U.S. Bureau of the Census), 3-32.

Kitagawa, G. y Gersch, W. (1984). "A Smoothness Priors-State Space Modeling of Time series with Trend and Seasonality", Journal of the American Statistical Association, 79, 378-389.

Kohn, R. y Ansley, C.F. (1986). "Estimation, Prediction, and

Interpolation for ARIMA Models with Missing Data", Journal of the American Statistical Association, 81, 751-761.

Kohn, R. y Ansley, C.F. (1987). "Signal Extraction for Finite Nonstationary Time Series", Biometrika, 74, 411-421.

Lovell, M.C. (1963). "Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, 58, 993-1010.

Lovell, M.C. (1967). "Alternative Axiomatizations of Seasonal Adjustment", Journal of the American Statistical Association, 61, 800-802.

Macaulay, F.R. (1931). The Smoothing of Time Series. National Bureau of Economic Research.

Maravall, A. (1986). "Revision in Signal Extraction", Journal of the American Statistical Association, 81, 736-740.

Maravall, A. (1988). "On the Dynamic Structure of A Seasonal Component", Documento de Trabajo No 8801, Banco de España.

Maravall, A. (1988). "A Note on Mean Squared Error Estimation of Signal with Unit Roots", Documento de Trabajo No 8801, Banco de España.

Maravall, A. y Pierce, D. (1987). "A Prototypical Seasonal Adjustment Model", Journal of the Series Analysis, 8, 177-193.

Mendershausen, H. (1939). "Eliminating Changing Seasonal by Multiple Regression Analysis", Review of Economics and Statistics, 21, 171-177.

Nerlove, M.; Grether, D. M. y Carvalho, J. L. (1979). Analysis of Economic Time Series, A Synthesis. Academic Press.

Persons, W.M. (1919). "Indices of Business Conditions", Review of Economics and Statistics, 1, 5-107.

Pierce, D. (1979). "Signal Extraction Error in Nonstationary Time Series", Annals of Statistics, 7, 1303-1320.

Pierce, D. y Maravall, A. (1984). "Advances in Model-Based Seasonal Adjustment", Proceedings of the Business and Economic Statistics Section of ASA.

Shiskin, J. (1978). "Time Series: Seasonal Adjustment", en W.H. Kruskal y J.M. Tanur (eds), International Encyclopedia of Statistics Vol. 2, the Free Press, 1202-1210.

Shiskin, J.; Young, A.H. y Musgrave, J.C. (1967). "The X-11 Variation of the Census Method II Seasonal Adjustment Program", Technical Paper No 15, U.S. Bureau of the Census.

Snow, E.C. (1923). "Trade Forecasting and Prices", Journal of the Royal Statistical Society, 86, 332-376.

Stephenson, J.A. y Farr, H.T. (1972). "Seasonal Adjustment of Economic Data by Application of the General Linear Statistical Model", Journal of the American Statistical Association, 67, 37-45.

Taylor, A.E. (1957). Introduction to Funcional Analysis. New York: Wiley.

Whittle, P. (1983). Prediction and Regulation by Linear Least-Square Methods. Second edition, Minneapolis: University of Minnesota Press.

Wold, H. (1954). A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Second edition, Uppsala: Almqvist and Wicksell.