

**CONFIGURACIONES CENTRALES Y
ESTABILIDAD DE EQUILIBRIOS RELATIVOS
EN PROBLEMAS CARGADOS**

POR

FELIPE ALFARO AGUILAR

TESIS DE DOCTORADO

**CONFIGURACIONES CENTRALES Y
ESTABILIDAD DE EQUILIBRIOS RELATIVOS
EN PROBLEMAS CARGADOS**

TESIS QUE PRESENTA

FELIPE ALFARO AGUILAR

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

ASESOR: ERNESTO PÉREZ CHAVELA

ABRIL DE 2002

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA**

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo agradecer la colaboración de los sinodales Ernesto Lacomba Zamora, Lidia Jiménez Lara, Manuel Falconi Magaña, Arturo Olvera Chávez y Ernesto Pérez Chavela, por su tiempo, su dedicación y sus valiosas observaciones en la lectura de este trabajo.

Mi sincero agradecimiento para el doctor Arturo Olvera por todas las aportaciones realizadas en el mejoramiento de este trabajo, por su manera tan profunda y diferente de comprender los conceptos matemáticos, y que me han permitido tener una visión más clara de las cosas.

Un reconocimiento especial para el Doctor Ernesto Pérez por su paciencia y dedicación en la dirección de este trabajo de tesis, por sus contribuciones tan diversas que han derivado finalmente en la conclusión de este proyecto, lo que me ha permitido, además, lograr una mayor madurez matemática.

Finalmente, mi agradecimiento para el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento otorgado como parte de su Programa de Becas de Posgrado, así como el apoyo económico que me brindó en la Beca de proyectos de Investigación, lo que resultó fundamental y de gran valía.

*Para toda mi apreciada familia,
en especial a mis padres Victoria
y Guillermo*

Contenido

1	Introducción	3
2	El problema cargado de los n-cuerpos	17
2.1	Ecuaciones de Movimiento	17
2.1.1	Integrales de movimiento en el problema cargado . . .	18
2.1.2	Identidad de Lagrange-Jacobi	21
2.2	El problema romboidal cargado	21
2.2.1	Ecuaciones de movimiento	22
2.2.2	Coordenadas de McGehee	24
2.2.3	La función potencial $\tilde{U}(\theta)$	26
2.2.4	Flujo Global en la variedad de colisión total	33
2.2.5	Flujo Global en $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$	35
2.2.6	Flujo global para $h = 0$	37
3	Configuraciones Centrales	41
3.1	Aspectos Generales	41
3.1.1	Puntos de equilibrio	43
3.2	Un continuo de configuraciones centrales	45
3.3	Familias de continuos de configuraciones centrales	48
4	Estabilidad de Equilibrios Relativos	56
4.1	Definición y aspectos generales	57
4.2	Relación con las configuraciones centrales	58
4.3	Equilibrio relativo no planar	61
4.4	Estabilidad espectral	64
4.4.1	Estabilidad espectral normal	68
4.4.2	Estabilidad espectral planar	70
4.5	El problema cargado de los 3 cuerpos	72

4.5.1	Equilibrios relativos colineales	77
4.5.2	Equilibrios relativos no colineales	87
	Conclusiones	95
	Bibliografía	97

Capítulo 1

Introducción

El problema de los n -cuerpos es un modelo matemático que describe el movimiento de un sistema de n partículas puntuales sujeto a la atracción gravitacional. El origen de este problema se remonta al siglo XVII cuando Isaac Newton dió una fundamentación matemática a toda una serie de observaciones astronómicas. De esta manera, con la invención del cálculo y las leyes de la gravitación universal, el problema de los 2 cuerpos fue una primera aproximación de la Mecánica Clásica para describir la dinámica planetaria de nuestro sistema solar.

En *el problema de los 3 cuerpos* la dinámica es tan compleja que aún tres siglos después continua su estudio; basta hacer notar que las únicas soluciones particulares explícitas que se conocieron por muchos años son aquellas que se generan por *configuraciones centrales*. Al respecto, recientemente apareció un trabajo sorprendente donde se muestra la existencia de una familia nueva de órbitas periódicas [7]; a partir del cual usando las mismas técnicas se han descubierto nuevas familias. La historia de las configuraciones centrales es muy antigua: Euler en 1767 publicó un bello trabajo sobre el problema de los 3 cuerpos [9], en él muestra la existencia de una solución explícita que consiste en 3 masas cualesquiera alineadas sobre una recta en rotación, con un cociente de distancias que depende del valor de las masas; más tarde, en 1772, Lagrange redescubrió las órbitas periódicas de Euler y mostró la existencia de otra familia de órbitas periódicas con características semejantes [12], esto es, una solución periódica donde ahora los 3 cuerpos están colocados sobre los vértices de un triángulo equilátero. Este último tipo de trayectorias conocidas como órbitas Lagrangianas o de Lagrange ya han sido encontradas en la naturaleza, pues se conoce desde principios del siglo XX que el Sol, Júpiter

y los asteroides troyanos (ubicados entre Marte y Júpiter) se encuentran formando una configuración equilátera; por el tiempo involucrado podemos decir que existe cierta estabilidad en el movimiento de este sistema de cuerpos celestes. Esto hace que la estabilidad en la solución de Lagrange sea un problema físicamente interesante.

La estabilidad de las soluciones periódicas circulares del problema de los 3 cuerpos es muy conocida, la solución de Euler es inestable para cualquier selección de masas, en cambio, la solución de Lagrange es estable si las masas satisfacen la desigualdad

$$27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) < (m_1 + m_2 + m_3)^2. \quad (1.1)$$

La desigualdad (1.1) se cumple sólo si una de las tres masas es dominante, y esto es precisamente lo que sucede con el sistema Sol-Júpiter-asteroides, lo cual nos indica que la trayectoria que sigue dicho sistema de cuerpos celestes es estable.

En este trabajo hacemos una generalización del problema de los n -cuerpos, adicionando una carga electrostática a cada partícula, y estudiando el efecto producido al hacer actuar al mismo tiempo, la fuerza Newtoniana de atracción y la fuerza Coulombiana de atracción o repulsión. A este planteamiento lo llamamos *el problema cargado de los n -cuerpos*, y su estudio nos ayudará a comprender mejor diversos aspectos, poco entendidos aún, del problema clásico Newtoniano. En particular, nos interesa lo relacionado con las configuraciones centrales y las soluciones que éstas generan. Nuestro principal objetivo es encontrar órbitas periódicas en el problema cargado y estudiar su estabilidad.

Las razones que nos motivan a plantear esta generalización son diversas, una de ellas se refiere a que el problema clásico Newtoniano es tan antiguo que ahora es muy complicado continuar avanzando en el conocimiento de las diferentes partes que lo constituyen, razón por la cual ha surgido la necesidad por estudiar otros problemas semejantes que nos ayuden a comprender mejor algunos aspectos no resueltos del problema Newtoniano. Otra razón que resalta la importancia de los problemas cargados son las limitaciones que tiene el potencial Newtoniano para explicar el movimiento en ciertos fenómenos de la naturaleza. Esto ha dado lugar al estudio de diferentes tipos de potenciales, algunos homogéneos y otros cuasihomogéneos (sumas de términos homogéneos con diferentes grados de homogeneidad). Un ejemplo muy ilustrativo lo encontramos en la órbita irregular de Mercurio, la cual no puede ser

explicada con el problema clásico de los 2 cuerpos; en cambio, con el potencial de Manev $U = 1/r + k/r^2$ se tiene una mejor descripción, donde $k \approx \frac{1}{c^2}$ y c es la velocidad de la luz, es decir, una perturbación relativista. Como puede observarse, este tipo de perturbaciones son abordadas en el estudio de potenciales cuasihomogéneos.

A otro nivel de escala, partículas subatómicas, iones, etc., la dinámica se desarrolla bajo la acción de una mayor diversidad de fuerzas, razón por la cual el potencial Newtoniano se queda lejos de poder explicar adecuadamente el movimiento de las partículas. En el contexto de la Mecánica Clásica, algunos potenciales propuestos para su estudio consideran principalmente la fuerza Coulombiana, por ejemplo, en [13], el autor analiza la estructura del átomo de Helio usando dos modelos; en el primero, los 2 electrones giran en la misma dirección sobre órbitas concéntricas con el núcleo en el centro, sin embargo, este modelo tiene la desventaja de no reflejar la gran estabilidad que poseen el par de electrones. El segundo modelo para el átomo de Helio es de naturaleza más complicada, ya que los dos electrones se encuentran rotando simétricamente alrededor del núcleo, pero con direcciones opuestas, entonces la simetría del movimiento, su mutua repulsión y la atracción hacia el núcleo, hacen que los electrones oscilen con trayectorias casi semicirculares. Los resultados de su estudio se aproximan mejor a las observaciones.

También relacionado con la estructura atómica, en [8] se modela el movimiento de n electrones negativamente cargados. A partir de considerar su mutua repulsión y la atracción de un núcleo positivamente cargado e infinitamente masivo, los autores encuentran familias de órbitas periódicas que resultan ser una generalización de la solución de Lagrange en el problema de los 3 cuerpos.

Todo esto nos lleva a reflexionar sobre el efecto que pudiera tener en el movimiento de las partículas, la acción combinada de ambas fuerzas: gravitacional y Coulombiana; independientemente de cual sea la fuerza que domina, es decir, consideramos cualesquiera masas y cargas.

En el capítulo 2 desarrollamos el problema cargado de los n -cuerpos, a partir de observar que las dos fuerzas son de naturaleza muy semejante, pues ambas se rigen por la ley inversa del cuadrado. Una partícula A con masa positiva m_a y carga de cualquier signo q_a , recibe de otra partícula B , una atracción gravitacional y una atracción o repulsión electrostática cuya

magnitud esta dada, respectivamente, por

$$F_g = Gm_a m_b \frac{1}{r_{ab}^2}, \quad F_e = Kq_a q_b \frac{1}{r_{ab}^2}.$$

Ya que uno de los objetivos de este trabajo es el estudio de las órbitas periódicas y un análisis cualitativo de la dinámica a su alrededor, entonces con el fin de hacer los cálculos menos tediosos supondremos $G = K = 1$. Uno de nuestros proyectos a futuro es el estudio de ejemplos concretos utilizando las técnicas y resultados aquí presentados, donde por supuesto las constantes G y K siempre pueden considerarse normalizadas.

Dado que la fuerza Newtoniana es atractiva por naturaleza, y la fuerza Coulombiana es atractiva sólo si las cargas tienen signos opuestos, entonces la magnitud de la fuerza resultante entre las partículas A y B , tiene la siguiente expresión

$$F = (m_a m_b - q_a q_b) \frac{1}{r_{ab}^2}. \quad (1.2)$$

El parámetro

$$\lambda_{ab} = m_a m_b - q_a q_b, \quad (1.3)$$

tiene un significado físico directo, pues

$$\lambda_{ab} > 0, \quad \bullet \Rightarrow \Leftarrow \bullet$$

implica que la fuerza resultante entre las partículas A y B es atractiva; por el contrario,

$$\lambda_{ab} < 0, \quad \Leftarrow \bullet \bullet \Rightarrow$$

significa que las partículas A y B se repelen, situación que corresponde al caso en que ambas cargas tienen el mismo signo y la repulsión eléctrica que generan es mayor que la atracción gravitacional.

Una situación realmente excepcional, característica de un problema cargado es el caso degenerado $\lambda_{ab} = 0$, que corresponde a la mutua cancelación de las fuerzas gravitacional atractiva y Coulombiana repulsiva; lo excepcional radica en que la anulación de fuerzas es permanente e independiente de la distancia que separa a las partículas; este hecho como veremos más adelante, resultará de gran importancia por las consecuencias involucradas.

Las implicaciones que surgen con el potencial cargado son muy diversas. Como es natural suponerlo, la dinámica de partículas en un problema cargado es mucho más rica que en el problema clásico. Lo anterior queda de

manifiesto en un ejemplo desarrollado al final del capítulo 2, conocido como *el problema romboidal cargado de 4 cuerpos en el plano*. Este problema es una generalización del trabajo realizado en [11]; las condiciones iniciales se suponen de manera tal que la configuración del sistema de 4 partículas tiene la forma permanente de un rombo regular. Bajo estas consideraciones, el movimiento romboidal queda descrito por una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias con 3 parámetros cuya estructura es la de un sistema Hamiltoniano con 2 grados de libertad.

Nuestro interés en el problema romboidal radica especialmente en aquellas trayectorias que llevan al sistema de partículas cerca de una colisión total. Unas coordenadas apropiadas para el estudio de este tipo de soluciones son las coordenadas de McGehee. Si bien esta transformación no es canónica, implicando con ello la pérdida de la estructura Hamiltoniana, a cambio eliminamos la singularidad por colisión total, a la vez que se crea una variedad invariante bidimensional Λ , la cual se pega analíticamente como frontera común de los niveles de energía. Desde el punto de vista físico, el flujo en Λ es ficticio, pero lo más importante es que brinda información acerca del comportamiento de las 4 partículas cuando éstas se encuentran cerca de una colisión total.

Dado que Λ depende directamente de la forma cualitativa de la gráfica del potencial, y éste a su vez depende del valor de los parámetros, entonces el problema romboidal cargado tiene una diversidad de variedades de colisión total. En esta sección realizamos una clasificación completa de todas ellas. Algunas variedades de colisión están representadas por conjuntos de medida positiva en el espacio de parámetros; en estos casos genéricos analizamos el flujo definido sobre Λ , con lo cual podremos estudiar detalladamente el comportamiento del sistema de partículas ante tal situación.

En el capítulo 3 analizamos el efecto que tiene el potencial cargado sobre las configuraciones centrales, del cual dependen directamente. En el problema clásico, las configuraciones centrales (C.C.) son posiciones especiales del sistema de partículas; intuitivamente hablando corresponden a posiciones donde el vector aceleración de cada partícula se dirige hacia el centro de masa del sistema. La importancia de estas configuraciones radica en sus propiedades, ya que generan soluciones explícitas al problema clásico de los n -cuerpos: las soluciones homotéticas, los equilibrios relativos, y en general, las soluciones homográficas. En el primer caso, la trayectoria de las partículas siempre es homotecia de una C.C.; el segundo se obtiene por rotación rígida

de la C.C. alrededor de su centro de masa; y el tercero es la aplicación conjunta de ambos movimientos [24]. Otra propiedad, importante por su relación con la singularidad por colisión total, tiene lugar cuando el sistema de partículas tiende hacia esta singularidad. Esto sucede de una manera tan especial que al final de la trayectoria, el sistema se dirige asintóticamente hacia una C.C.

Por su importancia, las C.C. se han estudiado desde los inicios de la Mecánica Celeste; en el caso más sencillo $n = 3$, todo está dicho, hay 5 C.C. en total: las 3 soluciones de Euler y las 2 soluciones de Lagrange. En cambio, para $n = 4$, la situación cambia radicalmente, pues es relativamente poco lo que se conoce. Uno de los últimos trabajos importantes en esta dirección es el realizado por Albouy [1], quién recientemente encontró todas las C.C. planares para un conjunto de 4 masas iguales, el autor halló que hay 50 en total; salvo permutaciones la clasificación se reduce a una configuración colineal, un cuadrado, el triángulo equilátero con una partícula en el centro, y un triángulo isósceles con la cuarta partícula sobre el eje de simetría. En cambio, cuando las 4 masas no son todas iguales, ni siquiera sabemos si el número total de C.C. es finito o no.

Uno de los grandes problemas no resueltos sobre C.C. es la conjetura de Wintner [24], la cual dice que el número de C.C. para cualquier conjunto dado de masas positivas debe ser finito; las pruebas numéricas para $n = 4$ así parecen confirmarlo. Sin embargo, hasta el momento, aún en el caso de 4 partículas continua siendo un problema abierto.

¿Qué pasa con las C.C. cuando son definidas con otro tipo de potenciales distintos del potencial clásico Newtoniano? ¿Su conteo es finito? ¿Los equilibrios relativos correspondientes son estables? ¿Bajo que condiciones? Creemos que el responder estas preguntas nos ayudará a comprender mejor la dinámica de las partículas cargadas, y extrapolando un poco nos ayudará a comprender los problemas Newtonianos desde un contexto más amplio como es el de los problemas cargados.

Con respecto a la conjetura de Wintner sobre el número de C.C., en [20] Roberts mostró que si en el problema de 5 cuerpos permitimos que una de las masas sea negativa, entonces el conteo de C.C. degenera en un número infinito para ciertos valores de las masas.

Con el potencial cargado, la acción simultánea de fuerzas atractivas y repulsivas hacen que estos temas sean por demás interesantes, ya que una mayor cantidad de parámetros en el potencial produce cambios muy notables y significativos tanto en el número como en la forma de las C.C.

Un resultado importante sobre C.C. en el problema cargado de los n -cuerpos es la existencia de soluciones en equilibrio (situación imposible en el problema clásico Newtoniano); aquí es de llamar la atención que la posición de las partículas corresponde justamente a una C.C. La existencia de estas soluciones en equilibrio se justifica por la cancelación de fuerzas atractivas y repulsivas entre cualesquiera dos partículas para ciertos valores de las masas y de las cargas. En el caso particular del problema cargado de los 3 cuerpos, los puntos de equilibrio corresponden a C.C. colineales, donde la partícula central repele a las otras dos, mientras éstas se atraen mutuamente, o viceversa. Un estudio detallado al final del capítulo 4 demuestra que estos puntos de equilibrio son inestables.

El mismo capítulo 3 contiene un estudio amplio sobre los continuos de C.C. y se muestra que éstos son muy comunes en los problemas cargados. Para ver esto se consideran dos ejemplos; el primero surge de un caso degenerado del problema romboidal cargado estudiado anteriormente en la sección 2.2, que supone ciertas hipótesis adicionales en los parámetros (la fuerza resultante a lo largo de las diagonales es nula y persiste únicamente la que actúa sobre los lados del rombo). *¡Bajo estas hipótesis, todas las configuraciones de tipo romboidal son C.C.!*

En otro ejemplo se extienden estas ideas dentro de un contexto más amplio, lo que se traduce en una generalización del continuo de C.C. romboidales. En el problema cargado de los $n_1 + n_2 + 1$ cuerpos, consideramos aquellas configuraciones donde las primeras $n_1 + n_2$ partículas se encuentran ubicadas en los vértices de dos polígonos regulares concéntricos de n_1 y n_2 lados, respectivamente; la última partícula se encuentra en el centro común de ambos polígonos. La simetría de esta configuración requiere suponer que $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$. Las partículas en el primer n_1 -polígono tienen la misma carga y la misma masa; igual sucede en el segundo n_2 -polígono; además, si la fuerza resultante sobre cada partícula en uno de los polígonos es atractiva, entonces ésta debe ser repulsiva en el otro polígono, o viceversa. A partir de aquí usando fuertemente las simetrías del problema desarrollamos un algoritmo que permite reducir las originales $2(n_1 + n_2 + 1)$ ecuaciones en \mathbb{R} a únicamente 2. Resolviendo estas ecuaciones *encontramos una solución que genera, no una C.C., sino toda una familia de continuos de C.C., obtenida al rotar un polígono respecto del otro; en dicha rotación, cada configuración es una C.C.* Este es el principal resultado del capítulo 3 y uno de los mejores logros de la tesis.

Es de observar que los dos ejemplos anteriores, el rombo y los polígonos

anidados, muestran la existencia de continuos de C.C. en el problema cargado de los n -cuerpos, para toda $n \geq 4$. El caso $n = 4$ se refiere al problema romboidal cargado, que como veremos más adelante no pertenece a la familia de polígonos anidados. Es claro que la existencia de estos continuos no contradice la conjetura de Wintner sobre la finitud de las C.C., ya que ésta se encuentra plantada para el problema clásico Newtoniano de los n -cuerpos, $n \geq 4$. Sin embargo, sí muestra que usando otros potenciales, distintos del potencial Newtoniano, es relativamente fácil encontrar continuos de C.C.

En el capítulo 4 se estudia la estabilidad de ciertas soluciones periódicas de los problemas cargados, muy relacionadas con las C.C. Estas soluciones se obtienen al hacer rotar uniforme y rígidamente el sistema de partículas alrededor del centro de masa. Por su naturaleza rotacional, ellas pueden ser vistas como puntos de equilibrios en las coordenadas adecuadas, lo que hace natural llamarles *equilibrios relativos*.

En el problema clásico de los n -cuerpos, los equilibrios relativos son precisamente todas las C.C. planares; el conjunto de partículas se halla completamente contenido en el plano de rotación. Los ejemplos tradicionales son las soluciones de Euler y las soluciones de Lagrange correspondientes al problema clásico de los 3 cuerpos; su importancia se ve reflejada en todo el esfuerzo realizado a lo largo del tiempo para comprender la dinámica alrededor de estas soluciones circulares, y otras más generales conocidas como soluciones elípticas. En caso de ser estables, las soluciones periódicas de equilibrio relativo pueden tener aplicaciones prácticas muy interesantes, como es el movimiento de un satélite de comunicaciones cuando es colocado en los puntos Lagrangianos del sistema Tierra-Luna.

Por su parte, los equilibrios relativos en un problema cargado, si bien, se definen de una manera análoga al caso Newtoniano, pueden observarse grandes diferencias en las diversas propiedades que tradicionalmente los han caracterizado. La acción combinada de fuerzas atractivas y repulsivas abre una amplia gama de posibilidades en prácticamente todos los aspectos relacionados con los equilibrios relativos; el efecto es tan marcado que se observa clara e inmediatamente tanto en el conteo como en la forma de sus configuraciones. Al respecto, *un ejemplo que muestra con toda claridad la gran diversidad de formas geométricas es la existencia de equilibrios relativos no planares; este resultado que por sí solo es novedoso, lo es todavía más, si consideramos que no se obtiene por rotación de C.C.!*

Para comprender la importancia que esto significa basta recordar que en

el problema clásico de los n -cuerpos, todos los equilibrios relativos se obtienen por rotación de C.C. planares. Así, mediante un ejemplo de 6 partículas cargadas, mostramos que no necesitan estar todas ellas contenidas en el plano de rotación para generar equilibrios relativos. Esto se logra con una configuración simétrica no planar con forma de trompo, donde 4 partículas se hallan en el plano de rotación y las 2 partículas restantes están colocadas simétricamente en el eje ortogonal al plano.

Una condición necesaria para la existencia de un equilibrio relativo es que el potencial en dicha configuración debe ser positivo; condición que se cumple trivialmente en el caso Newtoniano, no así en los problemas cargados donde el signo puede ser positivo o negativo. Entonces una C.C. con potencial negativo no puede generar equilibrios relativos; esta situación que se explica por la presencia de fuerzas repulsivas dominantes, propias de un potencial negativo, las cuales impiden toda posibilidad de obtener el equilibrio dinámico necesario para generar soluciones de equilibrio relativo, pues la repulsión entre partículas no puede cancelarse con la fuerza centrífuga que también es repulsiva.

Posteriormente analizamos la estabilidad espectral de los equilibrios en el problema cargado de los 3 cuerpos. Esto es la continuación de un trabajo previo de Pérez-Chavela et al [19], en donde los autores hacen una clasificación completa de las C.C. en el problema cargado de los 3 cuerpos; el conteo depende esencialmente de los signos de los parámetros λ_{12} , λ_{23} y λ_{13} ; los signos determinan el carácter atractivo o repulsivo de la fuerza que actúa entre cualesquiera dos partículas. Con esta información obtenemos los equilibrios relativos analizando sólo aquellas C.C. que satisfacen la condición del potencial positivo. De esta manera, concluimos que un sistema de 3 partículas con masas y cargas arbitrarias tiene a lo más 5 equilibrios relativos en total.

Así, en el caso que todos los parámetros λ_{jk} son positivos, lo que corresponde a un sistema atractivo, el número de equilibrios relativos es igual que en el problema clásico Newtoniano, es decir, existen 2 no colineales y 3 colineales (1 por cada ordenación). Si bien, el conteo coincide en ambos problemas no sucede lo mismo con la forma de las configuraciones, pues la fuerza electrostática tiene el efecto de alterar la forma geométrica de los equilibrios relativos. A diferencia del problema clásico donde los equilibrios relativos no colineales tienen, todos ellos, forma de triángulo equilátero; en el problema cargado las configuraciones cambian dependiendo del valor de las masas y

de las cargas. De hecho, *si se escogen adecuadamente estos parámetros, cualquier figura triangular puede ser la configuración de un equilibrio relativo no colineal.*

Un problema cargado con parámetros λ_{jk} de signos diferentes puede generar combinaciones de fuerzas que no existen ni en el problema Newtoniano ni en el problema Coulombiano, por ejemplo, un sistema de 3 partículas donde una de ellas repele a las otras dos, mientras que estas últimas se atraen entre sí. En lo que respecta al conteo de equilibrios relativos, los números cambian radicalmente respecto de lo conocido en el problema Newtoniano. Mientras en este último las soluciones Lagrangianas siempre existen independientemente de los parámetros utilizados, en el problema cargado no sucede lo mismo, pues la presencia de algún λ_{jk} negativo hace imposible la existencia de los equilibrios relativos no colineales.

Por lo tanto, para estos parámetros sólo pueden existir los equilibrios relativos colineales. De las 3 ordenaciones colineales posibles existe una donde no hay equilibrios relativos, y el conteo total para las otras dos ordenaciones varía entre 1 y 5, lo cual supone que hay ordenaciones con al menos 3 equilibrios relativos (en el problema Newtoniano existe exactamente 1 para cada ordenación colineal). Esto queda de manifiesto en un ejemplo que desarrollamos al final del capítulo 4, donde dependiendo del valor de los parámetros encontramos que existen hasta 3 equilibrios relativos con una misma ordenación colineal. En todos ellos analizamos su estabilidad.

Para estudiar la estabilidad de las soluciones periódicas de equilibrio relativo analizamos la parte lineal de las ecuaciones de movimiento. El polinomio propio correspondiente es una función par, razón por la cual cada valor propio λ implica que $-\lambda$ también lo es. Por consecuencia, la sola existencia de un valor propio con parte real no nula implica que hay valores propios con parte real positiva, entonces un equilibrio relativo con estas características es inestable. En esta situación se encuentran los equilibrios relativos colineales del problema clásico de los n -cuerpos, que como es bien sabido, todos ellos son inestables.

Entonces una condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia de estabilidad en un equilibrio relativo es que todos los valores propios sean números imaginarios puros o cerc. Un punto de equilibrio con estos valores propios generalmente resulta muy complejo de analizar, no son puntos hiperbólicos. De aquí que nos limitaremos a revisar un concepto débil de estabilidad que consiste en verificar que todos los valores propios son números

imaginarios puros o cero, y cuando esto sucede se dice que *el equilibrio relativo es espectralmente estable*.

Algunos valores propios son nulos para cualquier equilibrio relativo, y esto es ocasionado por la acción de las primeras integrales. Exceptuando estos valores propios nulos, cuando los restantes son números imaginarios puros no nulos se dice que *el equilibrio relativo es espectralmente estable no degenerado*.

Para calcular el conjunto completo de valores propios usamos fuertemente las ideas desarrolladas por Moeckel en [16]. Este objetivo se puede cumplir satisfactoriamente en el problema cargado de los 3 cuerpos, donde es posible caracterizar la estabilidad espectral en función de las masas y las cargas. Las conclusiones que siguen a estos resultados muestran con toda claridad la fuerte influencia que ejercen las cargas electrostáticas en la dinámica de las partículas. Podemos decir con pleno convencimiento que los resultados del capítulo 4 arrojan información nueva e interesante, en cuanto a lo que usualmente se conoce en esta materia.

En el caso que las masas y las cargas son tales que los 3 parámetros λ_{jk} son positivos, los signos implican que la fuerza resultante entre cualesquiera dos partículas es atractiva. Para este problema atractivo, el conteo de equilibrios relativos coincide con lo que sucede en el caso Newtoniano, hay 2 no colineales y 3 colineales. La estabilidad espectral en el caso no colineal queda determinada por una desigualdad que depende de las masas y de las cargas; para simplificar su escritura usamos los ángulos interiores θ_i de la configuración triangular, donde θ_i es el ángulo correspondiente al vértice donde se encuentra la i -ésima partícula. Entonces un equilibrio relativo no colineal en el problema cargado de los 3 cuerpos es espectralmente estable no degenerado, si y sólo si,

$$36 (m_1 m_2 \text{Sen}^2 \theta_3 + m_1 m_3 \text{Sen}^2 \theta_2 + m_2 m_3 \text{Sen}^2 \theta_1) \leq (m_1 + m_2 + m_3)^2. \quad (1.4)$$

En la desigualdad (1.4) se aprecia claramente la forma como depende la estabilidad espectral de las masas, las cargas (indirectamente) y la forma geométrica de los equilibrios relativos. Hay que hacer notar la semejanza que tiene esta desigualdad con la condición de estabilidad espectral del correspondiente caso Newtoniano (1.1), de hecho, una se obtiene de la otra considerando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/3$, que son los ángulos correspondientes al triángulo equilátero de los equilibrios relativos de Lagrange.

Estudiando la desigualdad anterior se pueden deducir varias conclusiones

muy relevantes; una de ellas se refiere a la gran diversidad de configuraciones que resuelven la condición de estabilidad espectral (1.4). Dado que la forma triangular de un equilibrio relativo en el problema cargado sólo depende de los cocientes carga/masa de las partículas, entonces su existencia es independiente del valor de las masas (exactamente como sucede en el problema Newtoniano). Esto nos lleva a concluir, al considerar una masa dominante, que *en el problema cargado de los 3 cuerpos, los equilibrios relativos no colineales espectralmente estables involucran, no sólo triángulos equiláteros, sino todas las configuraciones triangulares!* Cada configuración requiere de una selección de parámetros diferente.

Otra consecuencia, igualmente interesante, surge de los equilibrios relativos con masas iguales del problema clásico de los 3 cuerpos. Por sustitución directa podemos verificar que la desigualdad (1.1) no se cumple cuando $m_1 = m_2 = m_3$, lo cual implica que los equilibrios relativos de Lagrange con masas iguales son inestables. Esto nos conduce directamente a preguntarnos sobre lo que sucede en el problema cargado, ¿será posible que un equilibrio relativo no colineal con masas iguales sea espectralmente estable si escogemos adecuadamente las cargas? Para dar respuesta a este planteamiento sustituimos $m_1 = m_2 = m_3$ en (1.4), entonces

$$\text{Sen}^2 \theta_1 + \text{Sen}^2 \theta_2 + \text{Sen}^2 \theta_3 \leq \frac{1}{4}.$$

Esta desigualdad se cumple sólo cuando uno de los 3 ángulos interiores en la configuración del equilibrio relativo es cercano a 180° ; la existencia de un equilibrio relativo con estas características está garantizada por un resultado general que dice que cualquier figura triangular puede ser la configuración de un equilibrio relativo no colineal, si se escogen correctamente los parámetros. La conclusión inmediata es que *en el problema cargado de los 3 cuerpos con masas iguales existen equilibrios relativos no colineales espectralmente estables, y sus configuraciones son casi colineales.*

Por otra parte, dado que en el problema cargado de los 3 cuerpos, los equilibrios relativos espectralmente estables pueden ser casi colineales, entonces un siguiente paso consiste en revisar la posible existencia de estabilidad en el caso colineal. Este es un planteamiento que resulta por demás interesante, especialmente si tomamos en cuenta que todos los equilibrios relativos colineales del problema Newtoniano son inestables.

La interacción conjunta de fuerzas atractivas y repulsivas en un problema cargado es una buena razón para pensar que los equilibrios relativos coli-

neales pueden ser espectralmente estables. Para conocer lo que sucede a este respecto establecemos un resultado donde se especifican las condiciones necesarias para que la estabilidad espectral sea posible. Estas condiciones están dadas por cierto conjunto de desigualdades que relacionan de manera compleja las masas y las cargas.

Para analizar estas desigualdades que determinan la estabilidad en el caso colineal estudiamos algunos ejemplos. En uno de ellos, las 3 partículas con una ordenación colineal fija, tienen masas y cargas iguales en las dos partículas laterales; los 3 parámetros independientes que resultan de este planteamiento, proporcionan la suficiente flexibilidad para explorar adecuadamente la estabilidad de los equilibrios relativos colineales; hay dos casos: en el primero, los parámetros λ_{12} , λ_{13} y λ_{23} son positivos (sistema atractivo); y en el segundo, los parámetros tienen signos diferentes.

En el primero de ellos, el caso atractivo, el conteo es igual que en el problema clásico Newtoniano de los 3 cuerpos, pero sobre todo, lo más importante es que si agregamos algunas hipótesis adicionales en los parámetros, entonces lo que obtenemos es un resultado completamente nuevo, interesante e inesperado, que muestra la existencia de *¡equilibrios relativos colineales espectralmente estables!*

El segundo caso, que ya no corresponde a un sistema de tipo atractivo, tiene un conteo de equilibrios relativos colineales diferente. El sistema de fuerzas es tal que la partícula central repele a las dos partículas laterales, las cuales a su vez se atraen con una fuerza aún mayor que la repulsión a que están sujetas, o viceversa. El hecho de que una misma partícula se vea sometida a efectos contrarios, se traduce en la existencia de hasta 3 soluciones de equilibrio relativo, todas ellas con una misma ordenación colineal; dos de ellas son inestables y una es estable.

El átomo de Helio es un buen ejemplo suponiendo que está constituido por 3 partículas (el núcleo y los dos electrones). Para este caso, existe una solución de equilibrio relativo colineal simétrico, donde la partícula central (núcleo) atrae a las dos partículas laterales (electrones), las cuales se repelen entre sí. Para este caso, las desigualdades en los parámetros que condicionan la estabilidad espectral no se cumple, es decir, el equilibrio relativo colineal simétrico es inestable.

Para concluir, al final del capítulo 4, utilizamos el hecho de que el conjunto de equilibrios relativos no colineales con estabilidad espectral del problema cargado de los 3 cuerpos, abarca todas las configuraciones triangulares

posibles, en particular, aquellas que son casi colineales. Esto hace pensar en la existencia de una posible relación entre equilibrios relativos colineales y no colineales espectralmente estables.

Así, al considerar una sucesión de equilibrios relativos no colineales con estabilidad espectral, donde las configuraciones triangulares tienden hacia una configuración colineal, obtenemos que el límite es un equilibrio relativo colineal espectralmente estable, excepto que su estabilidad es degenerada en el sentido que se enunció anteriormente. Esta solución está justo en la frontera que separa los equilibrios relativos colineales, por un lado están aquellos que tienen estabilidad espectral no degenerada, y por el otro, los inestables; éstos últimos incluyen a las soluciones de Euler del problema clásico Newtoniano.

Capítulo 2

El problema cargado de los n -cuerpos

2.1 Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema de n partículas cargadas son semejantes a las ecuaciones del problema Newtoniano de los n -cuerpos; la única diferencia entre ellos es el mayor número de parámetros presentes en la función potencial del problema cargado. Tanto el potencial cargado como el potencial Newtoniano son funciones homogéneas, con grado de homogeneidad -1 .

Consideremos un sistema de n partículas puntuales con masas positivas m_1, \dots, m_n y cargas electrostáticas q_1, \dots, q_n de cualquier signo. Llamaremos *configuración* o posición del sistema al vector

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

donde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ denota la posición de la k -ésima partícula. El movimiento de las partículas, según las leyes de Newton y de Coulomb, está descrito por un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = \nabla_k U(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

donde el gradiente $\nabla_k U$ representa la fuerza resultante sobre la k -ésima partícula; la función $U : \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ se conoce como *el potencial cargado*

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \frac{\lambda_{ij}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}, \quad (2.2)$$

donde $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$. El conjunto Δ denota todas las colisiones posibles en el sistema de partículas

$$\Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}. \quad (2.3)$$

Las ecuaciones de movimiento (2.1) adquieren una expresión más compacta introduciendo la *matriz de masas* $M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n\}$ y el *momento lineal del sistema* $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{x}}$. Entonces (2.1) se escribe como un conjunto de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \nabla U(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como el campo vectorial (2.4) es analítico en el espacio fase $Y = (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}$, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura la existencia y unicidad de una solución $\varphi(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ real y analítica para cada condición inicial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in Y$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo máximo de definición de φ . En el caso que I tenga algún extremo finito t_α , se dice que la solución tiene una *singularidad* en $t = t_\alpha$. Cuando $t \rightarrow t_\alpha$ se sigue que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Delta$, entonces hay dos opciones: primero, existe $\mathbf{x}_0 \in \Delta$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_\alpha} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$, implicando que al menos dos partículas convergen hacia un mismo punto generando una colisión de partículas; segundo, no existe el punto límite \mathbf{x}_0 , implicando con ello una singularidad sin colisión donde la distancia mínima entre partículas va a cero. La existencia de estas últimas se mostró por primera vez en [25], en un problema Newtoniano de 5 cuerpos.

2.1.1 Integrales de movimiento en el problema cargado

Un método básico para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en hallar *integrales primeras independientes*. En el problema Newtoniano de los n -cuerpos existen 10 integrales que dependen de las posiciones y de los momentos, las cuales no son suficientes para poder obtener una solución global. Estas integrales reciben el nombre de *constantes de movimiento*; su extensión al problema cargado de los n -cuerpos se aplica de manera natural y directa:

1.- Principio de conservación del momento lineal. *El momento lineal total del sistema*, que se define como la suma de los momentos lineales de cada partícula, $A : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A = \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k$, permanece constante a lo largo

de toda solución del sistema (2.4). Esta afirmación se concluye al derivar A respecto al tiempo t sobre tales soluciones:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{p}}_k = \sum_{k=1}^n \nabla_k U = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^3} = 0,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.5)$$

Entonces el momento lineal total proporciona 3 integrales primeras al problema cargado de los n -cuerpos.

2.- Sistema de referencia inercial. Una consecuencia inmediata de (2.5) es que el centro de masa $\sum m_k \mathbf{x}_k / \sum m_k$ del sistema de partículas, se desliza con movimiento rectilíneo uniforme:

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{x}_k = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, el centro de masa es un sistema de referencia inercial y puede suponerse fijo en el origen de coordenadas,

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

3.- Principio de conservación del momento angular. *El momento angular total* C , que mide la rotación del sistema de partículas respecto al origen de coordenadas, se define como

$$C : Y \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad C(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \times \mathbf{p}_k,$$

donde \times significa el producto cruz entre vectores de \mathbb{R}^3 . Derivando C respecto al tiempo t a lo largo de una solución del sistema (2.4), y utilizando las propiedades del producto cruz, obtenemos

$$\frac{dC}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \times \nabla_k U = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \frac{\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^3} = 0,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \times \mathbf{p}_k = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.8)$$

Entonces el momento angular permanece constante sobre cada solución del problema cargado de los n -cuerpos. Por ejemplo, las soluciones con movimiento rectilíneo tienen a la posición \mathbf{x} y al momento \mathbf{p} como vectores paralelos; así que (2.8) implica $\mathbf{c} = 0$.

4.- Principio de conservación de la energía. *La energía total* del sistema es otra de las constantes de movimiento. La energía total H es la suma de la energía cinética $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^t M^{-1}\mathbf{p}$ y la energía potencial $-U(\mathbf{x})$, es decir, $H : Y \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^t M^{-1}\mathbf{p} - U(\mathbf{x}).$$

Derivando la energía H respecto al tiempo t a lo largo de una solución del sistema (2.4), obtenemos

$$\frac{dH}{dt} = \dot{\mathbf{p}}^t M^{-1}\mathbf{p} - \nabla U^t \dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Entonces la energía H es una integral primera, la décima constante de movimiento del problema cargado de los n -cuerpos.

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}^t M^{-1}\mathbf{p} - U(\mathbf{x}) = h, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Esta integral primera produce una foliación del espacio fase en variedades invariantes de codimensión 1 llamadas *niveles de energía* $E_h = H^{-1}(h)$. El nivel de energía E_h está constituido por aquellas soluciones φ tales que $H(\varphi) \equiv h$.

Una característica del problema cargado de los n -cuerpos, fundamental para su estudio, es la estructura Hamiltoniana que tienen las ecuaciones de movimiento (2.4), donde la energía H es la función Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1.2 Identidad de Lagrange-Jacobi

El momento de inercia es una función que mide el tamaño de una configuración; se define como

$$I : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t M \mathbf{x}. \quad (2.11)$$

Para interpretar el momento de inercia observemos los valores extremos de I ; por un lado, $I = 0$ representa una configuración que se encuentran en colisión total; conforme I crece el sistema de partículas se expande, y escapa al infinito cuando $I \rightarrow \infty$.

Derivando sucesivamente el momento de inercia (2.11), y usando posteriormente las ecuaciones de movimiento (2.4), obtenemos

$$\ddot{I} = \ddot{\mathbf{x}}^t M \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^t M \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^t \nabla U + \mathbf{p}^t M^{-1} \mathbf{p}.$$

La expresión $\mathbf{x}^t \nabla U$ puede simplificarse usando el Teorema de Euler, considerando que U es una función homogénea con grado de homogeneidad -1 , entonces $\mathbf{x}^t \nabla U = -U(\mathbf{x})$. Si ahora consideramos que $\mathbf{p}^t M^{-1} \mathbf{p}$ es el doble de la energía cinética, entonces obtenemos una de las identidades más importantes para el estudio de la dinámica de partículas, conocida como la *identidad de Lagrange-Jacobi*:

$$\ddot{I} = 2T - U. \quad (2.12)$$

Dado que $T - U = h$, entonces la identidad se escribe equivalentemente como

$$\ddot{I} = T + h = U + 2h. \quad (2.13)$$

2.2 El problema romboidal cargado

Introducción

En esta sección analizamos un caso particular del problema cargado de los 4 cuerpos en el plano, que generaliza el problema romboidal Newtoniano de los 4 cuerpos [11]. Este problema consiste en estudiar el movimiento de 4 partículas producido por la acción combinada de la fuerza gravitacional y la fuerza electrostática, bajo condiciones muy específicas: las masas, las cargas y las condiciones iniciales, son tales que el sistema de partículas mantiene,

en todo momento, una configuración romboidal. Para que esto sea posible consideramos condiciones iniciales simétricas tanto en la posición como en la velocidad, además de suponer que las masas y las cargas son iguales entre partículas opuestas. El espacio de parámetros que resulta de estas simetrías tiene dimensión 3.

Este modelo tiene la estructura de un sistema Hamiltoniano con 2 grados de libertad. Dado que el Hamiltoniano es una integral primera podemos simplificar el estudio del espacio fase de dimensión 4, analizando el flujo contenido en cada uno de los niveles de energía E_h , los cuales tienen dimensión 3.

Estamos interesados en el comportamiento de las soluciones que empiezan o terminan en colisión total, y las soluciones cercanas. Usando coordenadas de McGehee eliminamos la singularidad debida a colisión total remplazándola por una variedad invariante bidimensional llamada variedad de colisión total Λ , sobre la cual el flujo se extiende suavemente. Las propiedades cualitativas del potencial desempeñan un papel muy importante en todo esto, razón por la cual, hacemos una clasificación detallada de las diferentes gráficas del potencial U , cada una de las cuales genera una variedad de colisión total diferente. El flujo contenido en ellas, si bien es ficticio, permite describir cualitativamente la dinámica de las partículas, cuando éstas se encuentran cerca de una colisión total.

2.2.1 Ecuaciones de movimiento

Sean 4 partículas moviéndose en el plano euclideo sobre los vértices de un rombo regular, con masas iguales y cargas iguales entre partículas opuestas: $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$, $q_1 = q_2$ y $q_3 = q_4$. Si normalizamos las masas tomando $\alpha = m_3/m_1$ como el parámetro de razón de masas, entonces podemos suponer que $m_1 = m_2 = 1$ y $m_3 = m_4 = \alpha$. Por supuesto, es suficiente estudiar el caso $0 < \alpha \leq 1$; el caso $\alpha > 1$ se obtiene del anterior cambiando m_1 por m_3 .

La posición se describe usando un sistema de coordenadas en el plano con el origen fijo en el centro de masa. Sea x la semidistancia entre las partículas del eje horizontal con masas $m_1 = m_2 = 1$ y cargas $q_1 = q_2$; análogamente, sea y la semidistancia entre las partículas del eje vertical con masas $m_3 = m_4 = \alpha$ y cargas $q_3 = q_4$, (Figura 1).

Dado que las coordenadas x y y son positivas por definición, el espacio de configuraciones para este modelo corresponde al primer cuadrante del

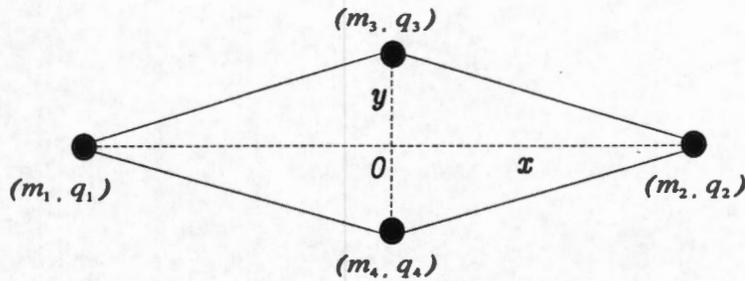


Figura 1. El problema romboidal cargado.

plano $x-y$ sin los ejes, los cuales representan las singularidades del sistema. En la frontera de esta región se encuentran las colisiones dobles y la colisión cuádruple total. El caso $x = 0$ corresponde a la colisión binaria entre las partículas 1 y 2 de la diagonal horizontal del rombo, y el caso $y = 0$ representa la colisión binaria entre las partículas 3 y 4 de la diagonal vertical; finalmente, la colisión cuádruple total está dada por el origen de coordenadas $x = y = 0$.

Las ecuaciones de movimiento en las coordenadas x y y están dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\lambda_{12}}{4x^2} - \frac{2\lambda_{13}x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\lambda_{34}}{4\alpha y^2} - \frac{2\lambda_{13}y}{\alpha(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $x > 0$, $y > 0$.

Observemos que (2.14) con $\lambda_{12} = \lambda_{34} = 0$ y $\alpha = 1$, se reduce a un problema de Kepler Newtoniano o Coulombiano dependiendo del signo de λ_{13} . Cuando $\lambda_{12} = \lambda_{34} = 0$ y $\alpha \neq 1$, las ecuaciones (2.14) describen el problema anisotrópico de Kepler ampliamente estudiado en [5] y [10]. Concluimos entonces que *el problema de Kepler y el problema anisotrópico de Kepler son casos particulares del problema romboidal cargado*.

Las ecuaciones (2.14) tienen estructura de un sistema Hamiltoniano con 2 grados de libertad. Si definimos $\mathbf{x} = (x, y)^t$, $M_1 = \text{diag}\{2, 2\alpha\}$ y $\mathbf{p} = M_1 \dot{\mathbf{x}}$, entonces la función Hamiltoniana H se escribe como

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M_1^{-1} \mathbf{p} - U(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

donde la función potencial U está dada por

$$U = \frac{\lambda_{12}}{2x} + \frac{4\lambda_{13}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\lambda_{34}}{2y}. \quad (2.16)$$

Dado que el espacio de parámetros tiene dimensión 3, entonces α , λ_{12} , λ_{13} y λ_{34} no pueden ser independientes, de hecho, están relacionados por

$$\lambda_{12} = 1 - q_1^2, \quad \lambda_{34} = \alpha^2 - q_3^2, \quad \lambda_{13} = \alpha - q_1 q_3,$$

lo cual implica

$$\lambda_{12} = 1 - \frac{(\alpha - \lambda_{13})^2}{\alpha^2 - \lambda_{34}}. \quad (2.17)$$

Otra observación con respecto a los parámetros es la siguiente restricción:

$$\lambda_{12} > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{34} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{13} > 0. \quad (2.18)$$

Esta relación surge por las simetrías que hay en las masas y las cargas; significa que si en ambas diagonales del rombo las partículas se atraen, entonces sobre los lados también se atraen.

2.2.2 Coordenadas de McGehee

El Hamiltoniano (2.15) al ser una integral primera produce una foliación del espacio fase, donde cada hoja de esta foliación representa un nivel de energía fijo; restringimos el estudio de las órbitas que están cerca de la singularidad por colisión total a valores fijos de $H = h$ llamados niveles de energía E_h . Para eliminar la singularidad por colisión total introducimos las coordenadas de McGehee [14], que para un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad y matriz de masas $M_1 = \text{diag}\{2, 2\alpha\}$, están dadas por

$$r = \sqrt{2x^2 + 2\alpha y^2}, \quad \theta = \arctan \sqrt{\alpha} \frac{y}{x}, \quad v = r^{\frac{1}{2}} \dot{r}, \quad u = r^{\frac{3}{2}} \dot{\theta}.$$

Dado que x y y son positivos tenemos que $\theta \in (0, \pi/2)$; v y u son la velocidad radial y tangencial, respectivamente, reescaladas por el factor $r^{\frac{1}{2}}$; adicionalmente reparametrizamos el tiempo mediante

$$\frac{dt}{d\tau} = r^{3/2}.$$

En estas coordenadas el sistema (2.14) adquiere la forma

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r v, \\ \dot{v} &= u^2 + \frac{v^2}{2} - \tilde{U}(\theta), \\ \dot{\theta} &= u, \\ \dot{u} &= -\frac{u v}{2} + \tilde{U}'(\theta),\end{aligned}\tag{2.19}$$

donde τ es el nuevo tiempo; la función $\tilde{U} : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $\tilde{U}(\theta) = r^{-1}U$, es decir,

$$\tilde{U}(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{8\lambda_{13}}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\lambda_{34}}{\sin \theta} \right].\tag{2.20}$$

Además $\tilde{U}'(\theta)$ significa $\frac{d\tilde{U}}{d\theta}$.

Si bien las ecuaciones (2.19) ya no tienen una estructura Hamiltoniana, la relación de energía $H = h$ se convierte en un elemento fundamental para analizar la dinámica de las partículas. Usando (2.15) obtenemos que la expresión $H = h$ se escribe como

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \tilde{U}(\theta) = hr.\tag{2.21}$$

Las coordenadas de McGehee tienen el efecto de eliminar la singularidad por colisión total, esto se logra extendiendo analíticamente el espacio fase a la frontera donde $r = 0$. Esta frontera se conoce como variedad de colisión total Λ y se obtiene de la relación de energía (2.21) haciendo $r = 0$, es decir,

$$\Lambda = \left\{ (r, v, \theta, u) : r = 0, v^2 + u^2 = 2\tilde{U}(\theta), \theta \in (0, \pi/2) \right\}.\tag{2.22}$$

Dado que $\dot{r} = 0$ cuando $r = 0$ en la primera ecuación de (2.19), tenemos que Λ es invariante bajo el flujo; además Λ es independiente de la constante h , es decir, cualquier superficie de nivel E_h tiene a la variedad de colisión total como su frontera. Observemos que $\tilde{U}(\theta)$ depende de una sola variable, y para su obtención hemos considerado que el potencial (2.16) es una función homogénea con grado de homogeneidad -1 . No perdamos de vista que el flujo sobre la variedad de colisión es ficticio, pero arroja

información importante acerca de la dinámica de las partículas cuando éstas se encuentran cerca de una colisión total.

Los puntos de equilibrio $P_0 = (r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ del sistema de ecuaciones (2.19) se encuentran precisamente en la variedad de colisión total Λ , y están dados por

$$r_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad \tilde{U}'(\theta_0) = 0, \quad v_0 = \pm \sqrt{2\tilde{U}(\theta_0)}. \quad (2.23)$$

Entonces la estabilidad del punto de equilibrio mostrará el comportamiento del sistema de partículas cerca de colisión total. Este análisis lo haremos en la siguiente sección.

2.2.3 La función potencial $\tilde{U}(\theta)$

Dado que la variedad de colisión total (2.22) depende fundamentalmente del potencial $\tilde{U}(\theta)$, es necesario clasificar las diversas gráficas del potencial según el valor de los parámetros. Suponemos que $\lambda_{12} \neq 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$. Para facilitar su estudio introducimos los parámetros β , γ y k que se definen como

$$\beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}}, \quad \gamma = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{34}}, \quad k = 8\gamma(\alpha - 1), \quad (2.24)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$.

Físicamente, estos parámetros se interpretan como sigue: $\beta > 0$ significa que si dos partículas opuestas se atraen (o se repelen), entonces el otro par hace lo mismo; $\beta < 0$ significa lo contrario, es decir, mientras en una diagonal del rombo las partículas se atraen, en la otra diagonal se repelen. El parámetro γ se interpreta de manera análoga, pero ahora comparando dos partículas adyacentes y las dos que se hallan sobre la diagonal vertical. Finalmente, k involucra además de lo anteriormente dicho para γ , la razón de masas.

La derivada de la función potencial $\tilde{U}(\theta)$ dada en (2.20) está dada por

$$\frac{d\tilde{U}}{d\theta} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \lambda_{34} \left[\frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta} + \frac{k \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right]. \quad (2.25)$$

Sea

$$g(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{(\alpha + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\tan^3 \theta},$$

entonces

$$\frac{d\tilde{U}}{d\theta} = \sqrt{\alpha/2} \lambda_{34} \frac{\text{sen } \theta}{\cos^2 \theta} g(\theta). \quad (2.26)$$

Dado que $0 < \theta < \pi/2$, los puntos críticos de $\tilde{U}(\theta)$ están dados por las raíces de la ecuación $g(\theta) = 0$. La función g presenta las siguientes propiedades:

1. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} g(\theta) = -\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(\theta) = \beta \alpha^{-1/2}$.
2. Para $k > 1$, se tiene $g'(\theta_g) = 0$ con $\theta_g = \arctan \alpha^{\frac{1}{2}} (k^{\frac{2}{5}} - 1)^{-\frac{1}{2}}$.
3. $g(\theta_g) = \alpha^{-3/2} [\beta \alpha + (k^{2/5} - 1)^{5/2}]$.
4. Para $\beta > 0$, la función g tiene un cero en $(0, \frac{\pi}{2})$.
5. Para $\beta < 0$, la función g puede tener 0, 1, o 2 ceros en $(0, \frac{\pi}{2})$.

Usando estas propiedades obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. Para $\lambda_{12} \neq 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, la función potencial $\tilde{U}(\theta)$ tiene 0, 1, o 2 puntos críticos en $(0, \frac{\pi}{2})$.

- i) Si $\beta > 0$, \tilde{U} tiene exactamente un punto crítico; éste puede ser máximo o mínimo.
- ii) Si $\beta < 0$, $k > 1$, y $g(\theta_0) = 0$, \tilde{U} tiene un punto crítico; éste es un punto de inflexión.
- iii) Si $\beta < 0$, $k > 1$, y $g(\theta_0) > 0$, \tilde{U} tiene dos puntos críticos; uno es máximo y el otro es mínimo.
- iv) En cualquier otro caso, \tilde{U} no tiene puntos críticos.

La descripción cualitativa del potencial $\tilde{U}(\theta)$ requiere conocer el signo de \tilde{U} en su punto crítico θ_0 . Usando (2.20) y (2.25) encontramos

$$\tilde{U}(\theta_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\cos^3 \theta_0} \left[\frac{8\lambda_{13}}{(\alpha + \tan^2 \theta_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_{34}}{\tan^2 \theta_0} \right]. \quad (2.27)$$

Si ahora despejamos λ_{13} en la ecuación $g(\theta) = 0$ y lo sustituimos en (2.27), obtenemos

$$\tilde{U}(\theta_0) = \frac{\lambda_{34}}{\sqrt{2} \operatorname{sen}^3 \theta_0} \left[\frac{\alpha^{3/2} - \beta \tan^3 \theta_0}{\alpha - 1} \right]. \quad (2.28)$$

Para $\beta < 0$, el potencial $\tilde{U}(\theta)$ tiene hasta 2 puntos críticos, según indica la Proposición 2.2.1; la existencia de estos puntos críticos requiere que $k > 1$, entonces (2.24) implica $\alpha \neq 1$, esto es $\alpha < 1$. Entonces el segundo factor en (2.28) es negativo, por lo tanto,

$$\operatorname{sign} \tilde{U}(\theta_0) = -\operatorname{sign} \lambda_{34}.$$

Una conclusión que se desprende de esta relación es que si $\tilde{U}(\theta)$ tiene 2 puntos críticos, entonces \tilde{U} tiene el mismo signo en ambos puntos.

Para $\beta > 0$, introducimos una nueva función

$$\varphi(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{8\gamma}{(\alpha + \tan^2 \theta)^{1/2}} + \frac{1}{\tan \theta}, \quad \theta \in (0, \pi/2), \quad (2.29)$$

entonces

$$\tilde{U}(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\lambda_{34}}{\cos \theta} \varphi(\theta). \quad (2.30)$$

La función $\varphi(\theta)$ tiene las siguientes propiedades

1. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \varphi(\theta) = +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} > 0$.
2. Para $-8\gamma > 1$, se tiene $\varphi'(\theta_\varphi) = 0$ con $\theta_\varphi = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{(-8\gamma)^{2/3} - 1}}$.
3. $\varphi(\theta_\varphi) = \beta - [(-8\gamma)^{2/3} - 1]^{3/2}$.

Sean U_0 y φ_0 las evaluaciones de \tilde{U} y φ en sus respectivos puntos críticos, es decir,

$$U_0 = \tilde{U}(\theta_0), \quad \varphi_0 = \varphi(\theta_\varphi).$$

Entonces las propiedades de φ y la ecuación (2.30) implican el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2. Sean $\lambda_{12} \neq 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, entonces el signo de U_0 está dado por

- i) $U_0 \lambda_{34} > 0$ si $\beta > 0, -8\gamma \leq 1$, o bien, $\beta > 0, -8\gamma > 1, \varphi_0 > 0$.
- ii) $U_0 \lambda_{34} < 0$ si $\beta > 0, -8\gamma > 1, \varphi_0 < 0$, o bien, $\beta < 0, k > 1$.
- iii) $U_0 = 0$ si $\beta > 0, -8\gamma > 1, \varphi_0 = 0$.

En las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2 se encuentra la información necesaria para caracterizar la forma cualitativa del potencial $\tilde{U}(\theta)$, información que resumimos en la Tabla 1 mostrando las diferentes gráficas de \tilde{U} en función de las masas y de las cargas. Para comprender como son las fuerzas entre partículas en cada una de las gráficas es suficiente analizar los signos de los parámetros β, γ y k definidos en (2.24). Por ejemplo, la gráfica U_1 de la Tabla 1 requiere que $\beta > 0$ y $\lambda_{34} > 0$, entonces (2.24) implica $\lambda_{12} > 0$ y (2.18) implica $\lambda_{13} > 0$, es decir, los tres parámetros λ_{ij} son positivos. Si a lo anterior agregamos que el resto de las gráficas contenidas en la Tabla 1 requieren que al menos uno de los parámetros λ_{ij} sea negativo, entonces U_1 es la gráfica del potencial del problema romboidal cargado atractivo, lo cual incluye al caso Newtoniano.

En otro ejemplo, para obtener la gráfica U_5 se necesita que las masas y cargas sean tales que $\lambda_{34} < 0, \beta < 0$ y $k > 1$, entonces (2.24) implica que $\lambda_{12} > 0$ y $\lambda_{13} > 0$, es decir, la fuerza que prevalece entre partículas es atractiva, con excepción de la repulsión que hay entre las partículas que se hallan en la diagonal vertical del rombo. Considerando que $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$, lo anterior implica que la fuerza Coulombiana es mayor en la diagonal vertical, en cambio la situación se invierte en la diagonal horizontal, ya que la fuerza gravitacional es mayor. Finalmente, sobre los lados del rombo la fuerza que domina entre partículas adyacentes puede ser cualquiera de las dos, gravitacional o Coulombiana.

Nótese que ninguna de las dos gráficas, U_1 y U_5 , pueden ser obtenidas utilizando únicamente cargas. De hecho, el potencial U_5 representa un caso característico del problema romboidal cargado, que no existe ni en el problema Newtoniano ni en el problema Coulombiano.

Estabilidad de los puntos de equilibrio Ahora que conocemos las diferentes formas del potencial \tilde{U} estamos en posibilidad de analizar como es la estabilidad de los puntos de equilibrio $P_0 = (r_0, v_0, \theta_0, u_0)$, determinados en (2.23). Observemos que $\tilde{U}(\theta_0) \geq 0$ es una condición necesaria para la

existencia de puntos de equilibrio; todos ellos están localizados en Λ , y están en correspondencia 2 : 1 con los puntos críticos del potencial $\tilde{U}(\theta)$. Por tal razón, existen dos o cuatro puntos de equilibrio cuando la gráfica del potencial es U_1, U_3, U_5 , o U_{10} , ya que este tiene uno o dos puntos críticos; pero si el potencial es como U_2, U_4, U_6, U_7 , o U_9 , entonces no hay puntos de equilibrio. Ver Tabla 1.

El caso especial U_8 es totalmente degenerado y lo omitiremos.

Dado que la coordenada v se obtiene de la relación de energía (2.21), linealizamos el campo vectorial (2.19) en los puntos de equilibrio en las coordenadas (r, θ, u) . Los valores propios están dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= v_0, \\ \lambda_2 &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16\tilde{U}''(\theta_0)}}{4}, \\ \lambda_3 &= \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 16\tilde{U}''(\theta_0)}}{4}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Entonces un punto de equilibrio $P_0 = (r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ de las ecuaciones de movimiento (2.19) es hiperbólico si λ_1, λ_2 y λ_3 tienen su parte real no nula, es decir, P_0 es hiperbólico si $v_0 \neq 0$ y $\tilde{U}''(\theta_0) \neq 0$.

Entonces los puntos de equilibrio hiperbólicos de (2.19) no pueden ser asintóticamente estables, pues las expresiones $v_0 \neq 0$ y $\tilde{U}''(\theta_0) \neq 0$ impiden que la parte real de los tres valores propios tenga el mismo signo. Esto significa que el conjunto de soluciones que van a colisión total tiene medida cero.

Dado que siempre existe al menos un valor propio con parte real positiva, entonces los puntos de equilibrio P_0 de las ecuaciones de movimiento (2.19) son inestables. El valor propio λ_1 está asociado a la dirección radial del flujo en E_h , en una vecindad de P_0 ; los valores propios λ_2 y λ_3 dan información del flujo en Λ alrededor de P_0 .

En el siguiente resultado indicamos la dimensión de las variedades estable e inestable asociadas al punto de equilibrio.

Teorema 2.2.3. *Sea $P_0 = (r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ un punto de equilibrio para el flujo dado por (2.19), con $\tilde{U}(\theta_0) > 0$ y $\tilde{U}''(\theta_0) \neq 0$. Entonces $P_0 \in \Lambda$. Las dimensiones de las variedades estables e inestables en E_h son*

$$i) \dim W_{P_0}^s = 2 \text{ y } \dim W_{P_0}^u = 1 \text{ si } v_0 \tilde{U}''(\theta_0) < 0,$$

ii) $\dim W_{P_0}^s = 1$ y $\dim W_{P_0}^u = 2$ si $v_0 \tilde{U}''(\theta_0) > 0$.

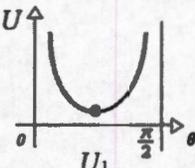
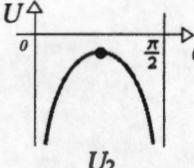
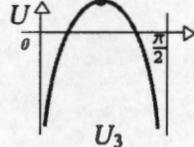
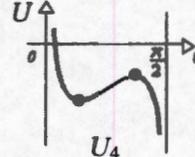
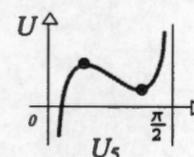
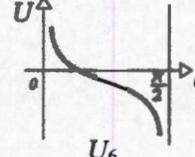
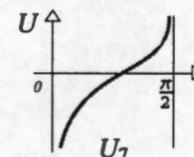
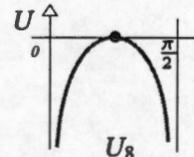
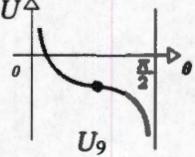
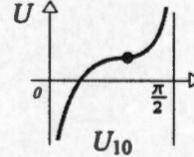
Parámetros	$\lambda_{34} > 0$	$\lambda_{34} < 0$
$\beta > 0$ $8\gamma + 1 > 0$ \circ $\beta > 0$ $8\gamma + 1 < 0$ $\varphi(\theta_0) > 0$	 <p style="text-align: center;">U_1</p>	 <p style="text-align: center;">U_2</p>
$\beta > 0$ $8\gamma + 1 < 0$ $\varphi(\theta_0) < 0$		 <p style="text-align: center;">U_3</p>
$\beta < 0$ $k > 1$ $g(\theta_0) > 0$	 <p style="text-align: center;">U_4</p>	 <p style="text-align: center;">U_5</p>
$\beta < 0$ $k < 1$ \circ $\beta < 0$ $k > 1$ $g(\theta_0) < 0$	 <p style="text-align: center;">U_6</p>	 <p style="text-align: center;">U_7</p>
$\beta > 0$ $8\gamma + 1 < 0$ $\varphi(\theta_0) = 0$		 <p style="text-align: center;">U_8</p>
$\beta < 0$ $k > 1$ $g(\theta_0) = 0$	 <p style="text-align: center;">U_9</p>	 <p style="text-align: center;">U_{10}</p>

Tabla 1. Gráficas de la función potencial $\tilde{U}(\theta)$.

2.2.4 Flujo Global en la variedad de colisión total

En la sección 2.2.2 eliminamos la singularidad por colisión total aplicando las coordenadas de McGehee, sin embargo, el campo vectorial (2.19) aún contiene singularidades por colisión doble. En un problema cargado, las colisiones binarias se presentan sólo cuando la fuerza resultante entre dos partículas es atractiva; en el caso que nos ocupa, hay colisiones binarias entre las partículas 1 y 2 siempre que $\lambda_{12} > 0$ y $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, o bien, las partículas 3 y 4 colisionan cuando $\lambda_{34} > 0$ y $\theta \rightarrow 0$. Para regularizar las colisiones binarias sustituimos la coordenada u por $w = uf(\theta)$, donde la función $f(\theta)$ es esencialmente el producto $f(\theta) = \sin \theta \cos \theta$. En el caso $\lambda_{12} < 0$, no hay colisiones binarias 1-2, razón por la cual reemplazamos $\sin \theta$ por la función constante 1, así que $f(\theta) = \cos \theta$.

Después de reparametrizar el tiempo mediante $\frac{dr}{ds} = f(\theta)$, el sistema (2.19) en coordenadas (r, v, θ, w) toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= rvf(\theta), \\ \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + \tilde{U}(\theta) + 2hr\right]f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + \tilde{U}(\theta) + hr\right]2f(\theta)\frac{df}{d\theta} - f(\theta)\frac{vw}{2} + f^2(\theta)\frac{d\tilde{U}}{d\theta}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

La relación de energía (2.21) se escribe como

$$\frac{1}{2}[w^2 + v^2f^2(\theta)] - \tilde{U}(\theta)f^2(\theta) = hr f^2(\theta).\tag{2.33}$$

Se puede checar fácilmente que $(f\tilde{U})(\theta)$ y $(f^2\tilde{U}')(\theta)$ son funciones analíticas en el intervalo $[0, \pi/2]$, entonces el campo vectorial y la relación de energía son analíticas en $[0, \pi/2]$. Observemos que los puntos de equilibrio de (2.19) son invariantes bajo el último cambio de variables y la reparametrización en el tiempo.

Usaremos ahora el hecho de que el flujo en (2.32) tiene la simetría

$$L : (r, v, \theta, w, s) \longrightarrow (r, -v, \theta, -w, -s).$$

Esto se debe a que el sistema original (2.14) puede ser escrito en forma Hamiltoniana (2.15), en términos de una función que es cuadrática respecto

del momento lineal. Esto implica que el sistema es reversible, propiedad que persiste cuando introducimos las coordenadas de McGehee y cuando regularizamos las colisiones binarias.

En coordenadas r, v, θ, w la variedad de colisión total está dada por

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, w) : r = 0, w^2 + v^2 f^2(\theta) = 2\tilde{U}(\theta) f^2(\theta)\}, \quad (2.34)$$

donde $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. El flujo en Λ está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] 2f(\theta) f'(\theta) - \frac{vw}{2} f(\theta) + \tilde{U}'(\theta) f^2(\theta). \end{aligned} \quad (2.35)$$

El flujo en Λ tiene la siguiente propiedad fundamental.

Definición 2.2.4. *Un campo vectorial F es casi-gradiente con respecto a una función g , si toda solución de $\dot{x} = F(x)$ que no es de equilibrio, se incrementa con respecto a g .*

Lema 2.2.5. *El campo vectorial (2.35) es casi-gradiente con respecto a la coordenada v .*

La demostración es directa.

Del lema anterior se sigue que el flujo en Λ depende en gran medida de la gráfica de $\tilde{U}(\theta)$. Aquí restringimos el análisis a los casos genéricos; en [2] estudiamos los casos no genéricos, entendiendo que un caso es genérico si existe un conjunto abierto Ω en el espacio de parámetros, tal que, para cualquier punto en Ω , la gráfica de $\tilde{U}(\theta)$ es cualitativamente la misma. En el problema romboidal cargado los casos genéricos están dados por $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7$ de la Tabla 1. Esto produce cuatro diferentes variedades de colisión $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$ generadas por los potenciales dados por U_1, U_3, U_5, U_7 , respectivamente (Figura 2). La variedad de colisión total no existe para el potencial negativo U_2 , y las correspondientes a U_4 y U_6 son similares a Λ_7 ,

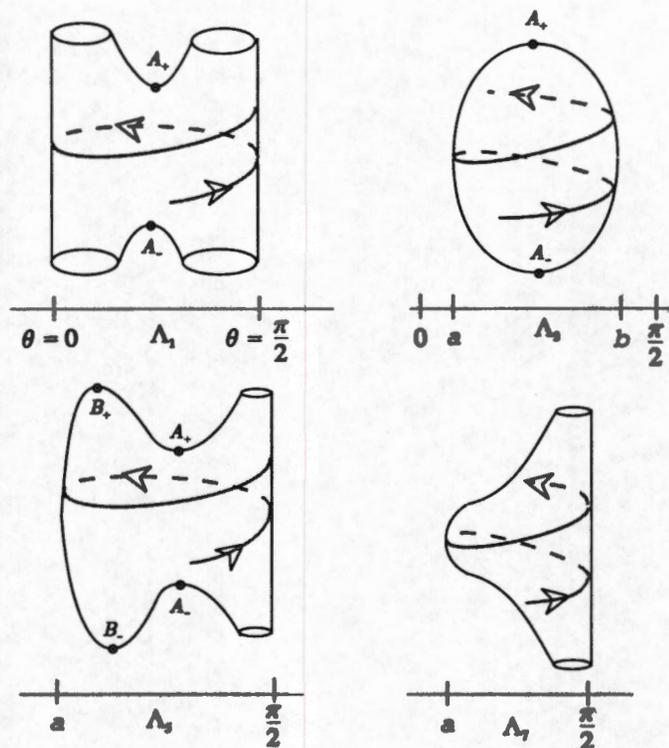


Figura 2. Variedades de colisión total $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$.

2.2.5 Flujo Global en $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$

En el caso Λ_1 , el problema romboidal cargado es atractivo, ya que los tres parámetros λ_{12} , λ_{34} y λ_{13} , son positivos; éste es en esencia el problema romboidal Newtoniano, ampliamente estudiado en [11]. En Λ_1 hay dos puntos de equilibrio A_- y A_+ , correspondientes a $v_0 < 0$ y $v_0 > 0$, respectivamente; ambos son puntos silla. Respecto a las singularidades, la atracción implica la existencia de colisiones dobles y colisión total.

El caso Λ_3 se obtiene cuando $\lambda_{12} < 0$, $\lambda_{34} < 0$ y $\lambda_{13} > 0$, esto es, las partículas opuestas se repelen entre sí, mientras las partículas adyacentes se atraen. La colisión total es posible porque la atracción que hay sobre los lados del rombo es mayor que la repulsión existente en las diagonales. Esta repulsión imposibilita la existencia de colisiones binarias, lo cual ocasiona que Λ_3 sea una variedad compacta. De hecho, Λ_3 es homeomorfa a una esfera. El flujo sobre ella es muy simple, el punto de equilibrio A_- es una fuente, mientras que A_+ es un atractor. Cualquier órbita que no sea punto

de equilibrio en Λ_3 empieza en A_- y termina en A_+ (Figura 2).

Las variedades de colisión Λ_5 y Λ_7 no son compactas; ambas son homeomorfas a una esfera sin dos puntos. En Λ_7 no hay puntos de equilibrio y el flujo sobre ella es muy simple: todas las órbitas son no acotadas y contienen un número infinito de colisiones dobles 1-2. Dado que $\lambda_{34} < 0$, no hay colisiones 3-4 (Figura 2).

El flujo en Λ_5 es el más interesante por la presencia de cuatro puntos de equilibrio, A_- , B_- , A_+ y B_+ ; A_- es punto silla y B_- es una fuente, en ambos $v_0 < 0$. Para $v_0 > 0$ encontramos que A_+ es punto silla y B_+ es atractor. Algunos resultados numéricos nos dan evidencia de que las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, eventualmente se conectan para ciertos valores de los parámetros. Para esto, lo que hacemos es fijar dos parámetros y estudiar la proyección de $W_{A_-}^u$ en el plano $\theta-v$. Variando el tercer parámetro encontramos que para algunos valores, la rama $W_{A_-}^u$ escapa sobre la línea $\theta = \pi/2$ y para otros valores del mismo parámetro encontramos que $W_{A_-}^u$ termina en $W_{B_+}^s$; consecuentemente existen valores del parámetro libre donde las variedades $W_{A_-}^u$ y $W_{A_+}^u$ se conectan (Figura 3). Con estas simulaciones tenemos evidencia numérica para creer que la siguiente afirmación es cierta:

Conjetura. En el subconjunto Ω_5 del espacio de parámetros que determina la gráfica U_5 del potencial, la región en la cual se conectan las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, tiene codimensión 1 en Ω_5 .

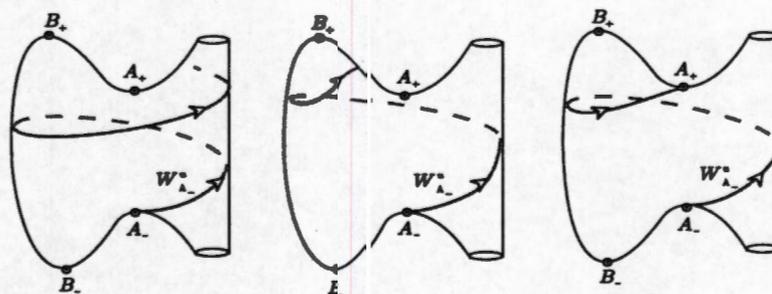


Figura 3. Comportamiento de $W_{A_-}^u$ para diferentes selecciones de los parámetros.

2.2.6 Flujo global para $h = 0$

Podemos observar en la relación de energía (2.21) que la energía cinética es especialmente importante para $h \geq 0$, ya que las posibilidades de escape se incrementan. Los escapes son analizados mediante la técnica de explosión al infinito, en la cual la coordenada radial r se sustituye por su recíproco $1/r$. En lo que sigue analizamos los escapes al infinito sobre el nivel de energía $h = 0$, denotado por E_0 .

En las coordenadas (ρ, v, θ, w) , donde $\rho = 1/r = (\mathbf{x}^t M_1 \mathbf{x})^{-1/2}$ y las variables v, θ y w son definidas como antes, las ecuaciones de movimiento (2.32) en E_0 adquieren la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= -\rho v f(\theta), \\ \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] 2f(\theta)f'(\theta) - \frac{vw}{2}f(\theta) + \tilde{U}'(\theta)f^2(\theta). \end{aligned} \quad (2.36)$$

La relación de energía (2.33) para $h = 0$ está dada por

$$\frac{w^2}{2} + \frac{1}{2}v^2 f^2(\theta) - \tilde{U}(\theta)f^2(\theta) = 0, \quad \rho > 0. \quad (2.37)$$

Definimos la variedad del infinito N_0 como

$$N_0 = \{(\rho, v, \theta, w) : \rho = 0, \frac{w^2}{2} + \frac{1}{2}v^2 f^2(\theta) - \tilde{U}(\theta)f^2(\theta) = 0\}, \quad (2.38)$$

donde $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En este caso, N_0 es idéntica a la variedad de colisión total Λ definida en (2.34). Además los flujos en N_0 y Λ son exactamente iguales, y por tanto las propiedades estudiadas en la sección 2.2.4 se aplican también a la variedad del infinito.

Una observación importante es que la relación de energía (2.37) no depende de ρ . Esto significa que si conocemos el flujo en N_0 , entonces también conocemos el flujo en $E_0 \cup N_0$ dado que ρ se obtiene por integración de la primera ecuación en (2.36). En otras palabras, las órbitas en E_0 se obtienen

levantando las órbitas de N_0 en la dirección radial. Cuando esto sucede decimos que el flujo global de E_0 es proyectable en N_0 .

En resumen, el nivel de energía cero E_0 tiene dos variedades invariantes en su frontera: Λ y N_0 . El flujo en el nivel de energía extendido $E_0 \cup \Lambda \cup N_0$ es proyectable a su frontera Λ o N_0 , en dirección de las coordenadas r o ρ , respectivamente.

La proyectabilidad del flujo permite estudiar órbitas en E_0 muy especiales, como son aquellas cuya proyección a N_0 o Λ son los puntos de equilibrio $(0, v_0, \theta_0, 0)$, donde $v_0 = \pm \sqrt{2\tilde{U}(\theta_0)}$ y θ_0 es un punto crítico del potencial \tilde{U} . Estas órbitas de E_0 se llaman soluciones homotéticas, y como dice su nombre, las configuraciones en todo tiempo son homotecias de una misma. Observemos que las dos últimas componentes del campo vectorial (2.36) se anulan en $(0, v_0, \theta_0, 0)$; de aquí se concluye que el plano r - v , que contiene a los puntos en cuestión, es invariante bajo el flujo. De hecho, sustituyendo $w = 0$ y $\theta = \theta_0$ en la relación de energía (2.37), obtenemos

$$v^2(s) \equiv \tilde{U}(\theta_0),$$

de donde concluimos que el plano r - v está constituido únicamente por órbitas homotéticas, cada una de las cuales une las variedades Λ y N_0 . Para $v_0 > 0$, estas órbitas nacen en Λ y escapan al infinito con velocidad radial constante v_0 ; la coordenada radial se obtiene de la primera ecuación en (2.32)

$$r(s) = c e^{v_0 f(\theta_0) s}, \quad (2.39)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante positiva que depende de las condiciones iniciales.

En lo que resta de esta sección analizamos el flujo global en el nivel de energía E_0 , para la gráfica U_5 del potencial. Con este potencial se observa claramente que tan diferente y complicada puede ser la dinámica en un problema cargado. La gráfica U_5 requiere que $\lambda_{34} < 0$, $\lambda_{12} > 0$ y $\lambda_{13} > 0$, lo cual implica repulsión entre las partículas 3 y 4 y atracción entre las otras dos.

Sea φ_1 una órbita en el nivel de energía E_0 , cuya proyección a la variedad de colisión total Λ_5 , está dada por la curva σ_1 (Figura 4). Haciendo $s^* = -s$ tenemos que $\frac{d\rho}{ds^*} = \rho' = \rho v f(\theta)$. Dado que φ_1 está definida para todo tiempo, y en cualquier punto de ella se tiene $\rho > 0$, $v < 0$ y $f > 0$, entonces

$\rho'(s^*) < 0$, es decir, $\rho(s^*)$ es una función decreciente para toda $s^* \in \mathbb{R}$. Esto implica necesariamente que $\lim_{s^* \rightarrow \infty} \rho(s^*) = 0$.

Entonces $\lim_{s^* \rightarrow \infty} \rho(s^*) = 0$. Esto se demuestra, por contradicción, suponiendo que $\rho(s^*) \rightarrow \mu > 0$ cuando $s^* \rightarrow \infty$; de aquí se sigue que $\rho' \rightarrow \mu v_0 f(\theta_0) < 0$, implicando a su vez, que la órbita φ_1 empieza en N_0 (este tipo de órbitas se conocen como órbitas de captura). De la misma manera probamos que φ_1 termina en Λ_5 (órbita de colisión), esto es, φ_1 es una órbita de captura-colisión.

Lo anterior significa que la órbita φ_1 contenida en el nivel de energía E_0 , viene de infinito sin producirse ninguna colisión binaria, y muere finalmente en colisión total. Físicamente, por la combinación de fuerzas atractivas y repulsivas entre partículas, existe un tiempo a partir del cual las partículas 1 y 2 están cada vez más cerca sin colisionar, mientras que las partículas 3 y 4 tiene un movimiento pulsante; al final de la trayectoria, las cuatro partículas colisionan simultáneamente (Figura 4). Para la órbita φ_2 en E_0 cuya proyección en Λ_5 es σ_2 , el movimiento también termina en colisión total, pero antes de que esto suceda, las partículas 1 y 2 colisionan un número infinito de veces.

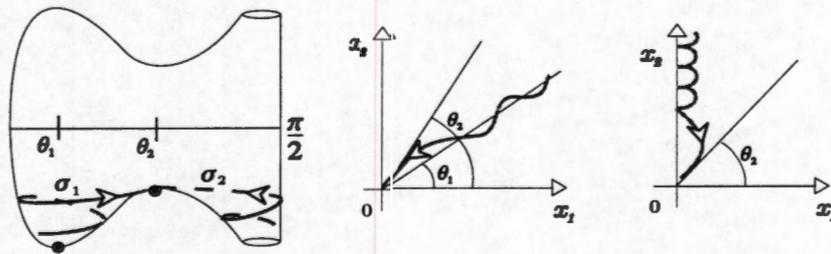


Figura 4. Órbitas en E_0 proyectadas a Λ_5 .

En general, por la proyectabilidad del flujo, existe una subvariedad invariante en E_0 que agrupa a todas las soluciones que conectan a los puntos de equilibrio de N_0 y Λ . En la Figura 5 mostramos una de estas subvariedades cuyas órbitas son proyectables sobre la órbita $\sigma \in \Lambda_5$; empiezan en colisión total y terminan escapando al infinito.

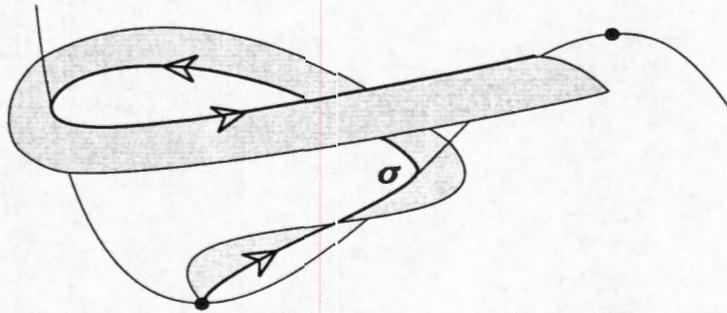


Figura 5. Variedad invariante en E_0 proyectable a $\sigma \in \Lambda_5$.

Capítulo 3

Configuraciones Centrales

3.1 Aspectos Generales

En el problema Newtoniano de los n -cuerpos, las configuraciones centrales representan posiciones especiales del sistema de partículas que generan diferentes tipos de soluciones particulares y explícitas; estas soluciones se obtienen mediante homotecias y/o rotaciones de una configuración central. En lo que sigue analizaremos las configuraciones centrales en el contexto de los problemas cargados.

Definición 3.1.1. *Un punto $\mathbf{x} \in X$ es una configuración central (C.C.) si existe algún escalar λ , tal que*

$$M^{-1}\nabla U(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x} = 0. \quad (3.1)$$

Donde como es usual $M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n\}$ es la matriz de masas del sistema. Usando las ecuaciones de movimiento (2.4) en la ecuación (3.1), se sigue que en una C.C., el vector aceleración de cada partícula es proporcional a su posición, y la constante de proporcionalidad es la misma para las n partículas.

Si definimos $L(\mathbf{x}, \lambda) = M^{-1}\nabla U(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}$, entonces las C.C. son las soluciones de la ecuación $L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$. Notemos que las soluciones de la ecuación algebraica (3.1) pueden agruparse en clases de equivalencia, considerando homotecias y rotaciones como relación de equivalencia, es decir, si $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ es una C.C., entonces por razones de homogeneidad

cualquier homotecia de \mathbf{x} también es una C.C., pues $L(\mathbf{x}, \mu) = 0$ implica $L(k\mathbf{x}, \mu k^{-3}) = 0$, para cualquier $k > 0$. Además, toda rotación de \mathbf{x} alrededor del centro de masa también es una C.C., ya que $L(R\mathbf{x}, \lambda) = RL(\mathbf{x}, \lambda) = 0$ para toda $R \in SO(3)$. Así, el problema de encontrar C.C. se reduce a sus clases de equivalencia.

Interpretación variacional Una versión equivalente y muy útil de las C.C. es su interpretación variacional. Sin pérdida de generalidad fijamos el tamaño de las C.C. considerando sólo aquellas contenidas en la esfera unitaria

$$S = \{\mathbf{x} \in X; \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1, \sum m_i x_i = 0\}, \quad (3.2)$$

donde la métrica está dada por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = u^t M v.$$

En lo que sigue mostraremos que el gradiente del potencial U restringido a la esfera S es un campo vectorial definido en S , más aún, los puntos de equilibrio del flujo definido en $\nabla U|_S$ son precisamente las C.C. del problema cargado de los n -cuerpos. Para demostrar lo anterior, definimos

$$F = M^{-1} \nabla U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) \mathbf{x},$$

entonces el Teorema de Euler para funciones homogéneas implica

$$\langle \mathbf{x}, F(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{x}^t \nabla U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) = -U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S,$$

es decir, F es tangente a la esfera S . Por otra parte, dado que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para toda $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}S$, entonces el producto $\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$ se reduce a la expresión $DU(\mathbf{x})\mathbf{v}$. Lo anterior prueba que $F(\mathbf{x}) = \nabla U|_S$. Para concluir, aplicamos el Teorema de Euler al producto de $\mathbf{x}^t M$ con la ecuación (3.1), entonces

$$\lambda = -\frac{U(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^t M \mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

Entonces para $\mathbf{x} \in S$ se cumple que \mathbf{x} es una C.C., si y sólo si, $\nabla U|_S(\mathbf{x}) = 0$.

Lema 3.1.2. *Las configuraciones centrales son puntos críticos del potencial restringido $U|_S$, o equivalentemente, son puntos de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \nabla U|_S$.*

3.1.1 Puntos de equilibrio

En el problema clásico de los n -cuerpos es claro que la naturaleza atractiva de la fuerza gravitacional, impide la existencia de puntos de equilibrio en las ecuaciones de movimiento. En cambio, en el problema cargado de los n -cuerpos puede ser posible, en principio, que la fuerza gravitacional atractiva y la fuerza Coulombiana repulsiva se anulen mutuamente, dando lugar a la existencia de soluciones (\mathbf{x}, \mathbf{p}) , que anulan el campo vectorial (2.4). Entonces las soluciones en equilibrio de un problema cargado son los puntos que resuelven el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{p} = 0, \quad \nabla U(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.4)$$

Una solución trivial de (3.4) se obtiene escogiendo masas y cargas de tal manera que todos los parámetros λ_{ij} son nulos, lo cual da lugar a un sistema inerte donde la fuerza resultante entre cualesquiera dos partículas es siempre cero.

El caso donde los parámetros λ_{ij} son no nulos es más interesante. Supongamos que (\mathbf{x}, \mathbf{p}) es una solución del sistema (3.4), lo cual equivale a decir que (\mathbf{x}, \mathbf{p}) es una solución de las ecuaciones de movimiento (2.4) que no depende del tiempo. Entonces, para esta solución, el momento de inercia $I(\mathbf{x})$ es constante y la energía cinética $T(\mathbf{p})$ es cero. Por consecuencia, la identidad de Lagrange-Jacobi (2.12) implica $U(\mathbf{x}) = 0$. Entonces (3.1) y (3.3) implican que \mathbf{x} es una C.C. Lo contrario también es cierto, es decir, las C.C. con energía cinética y potencial nulas son puntos de equilibrio. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3. *Los puntos de equilibrio (\mathbf{x}, \mathbf{p}) del problema cargado de los n -cuerpos están dados por*

$$U(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{p} = 0, \quad (3.5)$$

es decir, los puntos de equilibrio son configuraciones centrales con energía cinética y potencial nulas.

Ejemplo 3.1.4. *Puntos de equilibrio en el problema cargado de los 3 cuerpos.* Las ecuaciones $\nabla U(\mathbf{x}) = 0$ y $U(\mathbf{x}) = 0$ de (3.5), para un conjunto dado de 3 partículas en la posición $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{R}^6$, se escriben como

$$\nabla_1 U(\mathbf{x}) = \lambda_{12} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r_{12}^3} + \lambda_{13} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{r_{13}^3} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla_2 U(\mathbf{x}) = \lambda_{12} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}^3} + \lambda_{23} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{r_{23}^3} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla_3 U(\mathbf{x}) = \lambda_{13} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{r_{13}^3} + \lambda_{23} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{r_{23}^3} = 0 \quad (3.8)$$

$$U(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_{12}}{r_{12}} + \frac{\lambda_{13}}{r_{13}} + \frac{\lambda_{23}}{r_{23}} = 0. \quad (3.9)$$

Dado que la ecuación (3.8) se obtiene sumando las dos ecuaciones anteriores, la omitiremos en adelante. Las ecuaciones (3.6) y (3.7) se pueden escribir como

$$\frac{\lambda_{12}}{r_{12}^3} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \frac{\lambda_{13}}{r_{13}^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) = \frac{\lambda_{23}}{r_{23}^3} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2). \quad (3.10)$$

Entonces los vectores $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ y $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$ son paralelos, en otras palabras, la configuración \mathbf{x} es colineal. Supongamos una configuración colineal $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x_1 < x_2 < x_3$, entonces (3.10) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{\lambda_{12}}{r_{12}^2} = -\frac{\lambda_{13}}{r_{13}^2} = \frac{\lambda_{23}}{r_{23}^2}.$$

De esta manera, el sistema (3.6)-(3.9) se simplifica notablemente a un sistema de ecuaciones escalares fácil de resolver:

$$\lambda_{12} = -\frac{\lambda_{13}}{R_{13}^2} = \frac{\lambda_{23}}{R_{23}^2}, \quad (3.11)$$

$$\lambda_{12} + \frac{\lambda_{13}}{R_{13}} + \frac{\lambda_{23}}{R_{23}} = 0, \quad (3.12)$$

donde $R_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{12}}$. Además, la colinealidad de la configuración implica que $R_{13} = 1 + R_{23}$, entonces la solución del sistema (3.11)-(3.12) está dada por

$$R_{23} = \sqrt{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}}, \quad R_{13} = 1 + R_{23}, \quad (3.13)$$

para masas y cargas tales que

$$\sqrt{-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}}. \quad (3.14)$$

En conclusión, el problema cargado de los 3 cuerpos con masas y cargas que satisfacen (3.14), tiene puntos de equilibrio (\mathbf{x}, \mathbf{p}) en sus ecuaciones de movimiento; las configuraciones de estos puntos son configuraciones centrales colineales \mathbf{x} cuyas distancias relativas están dadas en (3.13).

3.2 Un continuo de configuraciones centrales

El problema romboidal analizado en la sección 2.2 nos proporciona información interesante sobre configuraciones centrales en problemas cargados. El problema romboidal es un caso particular del problema cargado de los 4 cuerpos, en el que las simetrías implicadas permiten encontrar todas las configuraciones centrales para cada selección de parámetros.

Según el Lema 3.1.2, las C.C. son puntos críticos del potencial U restringido a la superficie $\mathbf{x}^t M \mathbf{x} = 1$, la cual en coordenadas de McGehee está dada por la ecuación $r = 1$. En estas coordenadas, el potencial sobre la esfera unitaria $r = 1$ reduce su expresión a una función en una variable $\tilde{U} : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{U}(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{8\lambda_{13}}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\lambda_{34}}{\sin \theta} \right].$$

Entonces las C.C. en el problema romboidal cargado se obtienen de los puntos críticos de \tilde{U} , los cuales ya fueron analizados en la sección 2.2.3. En el caso genérico $\lambda_{12} \neq 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, los puntos críticos de $\tilde{U}(\theta)$ están dados por los ceros de la función $g(\theta)$ en (2.26),

$$g(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{(\alpha + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\tan^3 \theta}, \quad \theta \in (0, \pi/2),$$

donde los parámetros β y k están definidos en (2.24). De esta manera, analizando las propiedades de g obtenemos todas sus raíces; o equivalentemente, una clasificación completa de los puntos críticos de \tilde{U} cuyo resultado se muestra en la Proposición 2.2.1. Como consecuencia directa obtenemos una clasificación de las C.C. descrita en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *En el problema romboidal cargado con $\lambda_{34} \neq 0$ y $\lambda_{12} \neq 0$, existen 0, 1, o 2 configuraciones centrales.*

El estudio anterior no incluye los casos no genéricos donde $\lambda_{12} = 0$ y/o $\lambda_{34} = 0$. Estos parámetros están relacionados con las singularidades por colisión doble; el parámetro $\lambda_{12} < 0$ significa que las partículas 1 y 2 se repelen, haciendo imposible que se produzca una colisión binaria entre ellos; el parámetro $\lambda_{12} > 0$ significa que las partículas se atraen y chocan constantemente; finalmente, el caso intermedio $\lambda_{12} = 0$ significa que la fuerza gravitacional de atracción se cancela con la fuerza repulsiva Coulombiana, entonces esta aniquilación de fuerzas entre las partículas 1 y 2 hace que se produzcan colisiones sin que ello implique singularidad alguna en las ecuaciones de movimiento. Casos degenerados como este último son los que ocuparán nuestra atención en lo que resta del capítulo.

Para estudiar las C.C. en los casos degenerados supondremos primero que sólo uno de los parámetros λ_{12} o λ_{34} es cero, y posteriormente analizaremos el caso en que ambos son nulos. Entonces supongamos que $\lambda_{12} = 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, lo cual implica que las partículas 1 y 2 que se encuentran sobre la diagonal horizontal del rombo colisionan sin ocasionar singularidades. Esta circunstancia hace que la variable θ extienda su intervalo de definición a $(0, \pi/2]$, el nuevo valor $\theta = \pi/2$ significa precisamente que las dos partículas mencionadas colisionan. La derivada de $\tilde{U}(\theta)$ se escribe como sigue

$$\frac{d\tilde{U}}{d\theta} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \lambda_{34} \cos \theta \left[\frac{k \operatorname{sen} \theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right],$$

donde $\theta \in (0, \pi/2]$. Una raíz de esta función es el valor extendido $\theta = \pi/2$, esto implica que para la selección de parámetros que estamos considerando ($\lambda_{12} = 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$), la colisión doble entre las partículas 1 y 2 no sólo no representa singularidad alguna, sino que además es una C.C.!

Dada la carencia de fuerza entre las partículas que colisionan, es válido considerarlas como si fueran una sola partícula en el momento del choque binario, lo cual nos permite decir que una C.C. en el problema romboidal cargado con partículas en colisión doble puede interpretarse como una C.C. en el problema colineal de 3 cuerpos.

La derivada de \tilde{U} tiene una segunda raíz en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$, pero sólo si el parámetro k es mayor que 1. Entonces el número total de puntos críticos del potencial \tilde{U} varía entre 1 y 2. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. *En el problema romboidal cargado, si las masas y cargas son tales que $\lambda_{12} = 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, entonces el número de configuraciones centrales varía entre 1 y 2; una de ellas con dos partículas en colisión binaria, y la otra existe sólo si $k > 1$.*

Por (2.24), las 2 configuraciones centrales de la Proposición 3.2.2 requieren que $0 < \alpha < 1$, es decir, las masas en la diagonal vertical del rombo son menores que las otras dos masas, además las partículas adyacentes se atraen (repelen), las partículas opuestas en la diagonal vertical se repelen (atraen), y las partículas en la diagonal horizontal no interaccionan entre si.

Para $\lambda_{34} = 0$ y $\lambda_{12} \neq 0$, las simetrías propias del movimiento romboidal hacen que el análisis sea similar al caso anterior, y lo omitiremos.

Finalmente, sea $\lambda_{34} = 0$ y $\lambda_{12} = 0$, el caso doblemente degenerado. En esta situación, las masas y cargas son tales que la fuerza resultante a lo largo de ambas diagonales del rombo es cero, persistiendo únicamente la fuerza que va en dirección de los lados de dicha figura. Esta doble anulación de fuerzas tiene el efecto de producir colisiones binarias en ambas diagonales del rombo, sin que ello implique singularidad alguna; esto extiende el intervalo de definición de la variable angular θ al intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. Como en los casos anteriores, las C.C. están dadas por los puntos críticos del potencial $\tilde{U}(\theta)$, es decir, por las raíces de la derivada de \tilde{U} ,

$$\frac{d\tilde{U}}{d\theta} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{8\lambda_{13} (\alpha - 1) \sin \theta \cos \theta}{(c\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

donde $\theta \in [0, \pi/2]$.

Adicionalmente, supondremos que $\lambda_{13} \neq 0$, pues lo contrario implica un caso trivial donde todas las fuerzas se anulan. Observemos en la derivada de \tilde{U} que el valor $\alpha = 1$ es especialmente degenerado, ya que cualquier valor de la variable θ representa un punto crítico del potencial \tilde{U} . Dado que $\tilde{U}'(\theta) \equiv 0$ para toda $\theta \in [0, \pi/2]$, entonces *para esta selección de parámetros, cualquier configuración romboidal constituye una C.C., en otras palabras, existe un continuo de C.C. parametrizado por la variable angular θ en todo el intervalo $[0, \pi/2]$.*

Recordemos que $\alpha = 1$ significa que las cuatro masas tienen el mismo valor, esto en combinación con los parámetros nulos $\lambda_{34} = 0$ y $\lambda_{12} = 0$

implica en las masas que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, y en las cargas $q_1 = q_2 = m$, $q_3 = q_4 = -m$, para cualquier m positiva. Esta selección de parámetros es realmente degenerada, ya que la fuerza gravitacional de atracción se anula con la fuerza Coulombiana de repulsión entre las dos parejas de partículas que se mueven sobre las diagonales del rombo. Las ecuaciones de movimiento (2.14) se reducen a un problema de Kepler Newtoniano o Coulombiano dependiendo del signo de λ_{13} .

Teorema 3.2.3. *En el problema romboidal cargado, para cualquier valor positivo m , existe un continuo de configuraciones centrales con masas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ y cargas $q_1 = q_2 = m$, $q_3 = q_4 = -m$.*

Esto es realmente notable si consideramos que en el problema clásico de los n -cuerpos, aún se desconoce para $n \geq 4$, si el número de C.C. para un conjunto dado de masas es finito o no. Este planteamiento es uno de los grandes problemas no resueltos de la Mecánica Clásica, Wintner en [24] conjetura que este número es finito para cualesquiera masas. En el caso más simple $n = 4$, las pruebas numéricas realizadas en diferentes partes del mundo parecen confirmar la finitud de las C.C. Sin embargo, esto continua siendo un problema abierto. Nuestro resultado del continuo de C.C. no contradice la conjetura de Wintner, pues estamos ante problemas diferentes, pero si nos permite comprender mejor esta problemática en un contexto más general.

Resumiendo los resultados de esta sección tenemos lo siguiente.

Corolario 3.2.4. *Para cualquier punto en el espacio de parámetros en el problema romboidal cargado de los 4 cuerpos, genéricamente existen 0, 1, o 2 configuraciones centrales. Para algunos casos degenerados tenemos un continuo de configuraciones centrales.*

3.3 Familias de continuos de configuraciones centrales

En esta sección construimos familias de continuos de C.C., que en algún sentido constituyen una generalización natural del ejemplo estudiado en la sección previa. En esta generalización del modelo romboidal estudiamos el problema de los dos polígonos concéntricos con una partícula adicional en el

centro, es decir, un problema cargado particular de $n_1 + n_2 + 1$ partículas puntuales, donde las primeras n_1 y las siguientes n_2 se encuentran formando dos polígonos regulares: el n_1 -polígono y el n_2 -polígono, respectivamente; ambos con un centro común donde se localiza estratégicamente una de las partículas.

Nuestro principal resultado es que bajo algunas hipótesis adicionales en los parámetros, obtenemos familias de continuos de C.C. cuando rotamos el primer n_1 -polígono con respecto al segundo n_2 -polígono. Más adelante veremos que el continuo de C.C. que hemos encontrado en la sección previa para el problema romboidal cargado de 4 cuerpos, no pertenece a la nueva clase de continuos de C.C., ya que $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$.

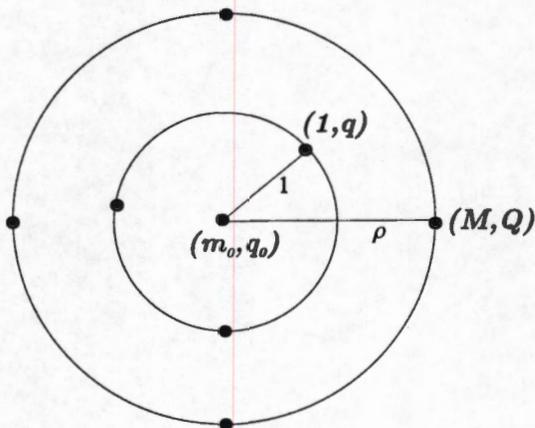


Figura 6. Polígonos concéntricos con una partícula en el centro.

Consideremos n_1 partículas puntuales localizadas en los vértices de un n_1 -polígono regular, y n_2 partículas puntuales localizadas en los vértices de un n_2 -polígono regular, con $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$; en el origen (centro de masas), colocamos una partícula con masa m_0 y carga q_0 . Suponemos sin pérdida de generalidad que las primeras n_1 partículas tienen posiciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1}$, distribuidas uniformemente en un círculo de radio 1; todas ellas tienen masa 1 y carga q . Las otras n_2 -partículas están distribuidas uniformemente en un círculo de radio ρ , con posiciones en $\mathbf{x}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{x}_{n_1+n_2}$, con masa M y carga Q . Ver Figura 6.

Suponemos los parámetros de manera que

$$M - qQ = 0, \quad (3.15)$$

en otras palabras, suponemos que entre cualesquiera dos partículas de polígonos diferentes se anula la fuerza gravitacional atractiva con la fuerza Coulombiana repulsiva. La relación (3.15) implica $M^2 - Q^2 = -\frac{M^2}{q^2}(1 - q^2)$, es decir, los parámetros $M^2 - Q^2$ y $1 - q^2$ tienen signos diferentes. Esto implica que si las partículas de un polígono se atraen, entonces las partículas del otro polígono se repelen.

La función potencial está dada por

$$U = \sum_{k \in A} \frac{m_0 - q_0 q}{r_{k0}} + \sum_{k \in B} \frac{m_0 M - q_0 Q}{r_{k0}} + \sum_{j < k}^A \frac{1 - q^2}{r_{jk}} + \sum_{j < k}^B \frac{M^2 - Q^2}{r_{jk}}, \quad (3.16)$$

donde $r_{jk} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|$, \sum^A significa una suma para $j, k \in A = \{1, \dots, n_1\}$ y \sum^B significa una suma para $j, k \in B = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$. Las C.C. de los polígonos concéntricos están dadas por la ecuación (3.1), es decir,

$$\nabla_k U - \lambda m_k \mathbf{x}_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_1 + n_2. \quad (3.17)$$

Por las simetrías propias de este problema, la suma de fuerzas que ejercen las partículas de cada polígono sobre la partícula central ($k = 0$), como es de esperarse es cero; esto implica que $\nabla_0 U = 0$. Además $\mathbf{x}_0 = 0$, entonces (3.17) se cumple trivialmente para $k = 0$.

Para $k = 1, \dots, n_1 + n_2$, el sistema de ecuaciones (3.17) es más complejo, por lo cual primero realizaremos una serie de simplificaciones en el gradiente $\nabla_k U$ aprovechando las simetrías. Dado que $\nabla_k U$ representa la fuerza resultante ejercida sobre la partícula que se halla en el vértice \mathbf{x}_k en cualquiera de los dos polígonos, entonces

$$\nabla_k U = (m_k^2 - q_k^2) \sum_{j \neq k} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{jk}^3} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k}{r_{0k}^3}, \quad (3.18)$$

donde $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. La sumatoria en (3.18) representa la fuerza total ejercida sobre la partícula en \mathbf{x}_k por las demás partículas del mismo polígono; recordemos que las partículas del otro polígono no interactúan con ella. Entonces los índices j y k de la sumatoria pertenecen al conjunto

$\{1, \dots, n_1\}$, o bien, al conjunto $\{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$ dependiendo de cual sea el polígono que contiene a \mathbf{x}_k . El segundo término en (3.18) representa la influencia de la partícula central.

Sea \mathbf{u}_k el vector unitario que va en dirección de \mathbf{x}_k a \mathbf{x}_0 , entonces

$$\mathbf{u}_k = -\frac{\mathbf{x}_k}{r},$$

donde r es el radio de la circunferencia que contiene a \mathbf{x}_k , es decir, $r = 1$ si $k \in \{1, \dots, n_1\}$, o bien, $r = \rho$ si $k \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$.

Lema 3.3.1. *La ecuación del gradiente dada por (3.18) puede ser escrita como*

$$\nabla_k U = (m_k^2 - q_k^2) \sum_{j \neq k} \frac{\cos \alpha_{jk} \mathbf{u}_k}{r_{jk}^2} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{\mathbf{u}_k}{r^2}, \quad (3.19)$$

donde $\alpha_{jk} = \text{ang}\{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k\}$.

Demostración. Es suficiente mostrar que (3.18) puede modificarse sustituyendo el vector $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ de la sumatoria, por su proyección al vector unitario \mathbf{u}_k . Para esto, descomponemos $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ en su componente radial $\mathbf{r} = r_{jk} \cos \alpha_{jk} \mathbf{u}_k$ y su componente tangencial \mathbf{t} . Entonces la simetría del problema implica que para \mathbf{x}_j existe \mathbf{x}'_j en el mismo polígono localizado simétricamente respecto a \mathbf{x}_k (Figura 7), entonces las componentes tangenciales \mathbf{t} y \mathbf{t}' se cancelan mutuamente. Respecto al último término en (3.18), sustituimos $\mathbf{x}_0 = 0$, $\mathbf{x}_k = -r \mathbf{u}_k$ y $r_{0k} = r$. Esto prueba el resultado, dado que la descomposición anterior es independiente de la circunferencia que contiene a los vectores \mathbf{x}_j y \mathbf{x}_k . \square

Sea T el triángulo con vértices en $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_j$ y \mathbf{x}_k , entonces aplicando la ley de los cosenos con respecto al ángulo α_{jk} , obtenemos la expresión

$$\cos \alpha_{jk} = \frac{r_{jk}}{2r}.$$

De esta manera, las ecuaciones (3.17) de las C.C. adquieren una expresión simplificada, dada por

$$\left((m_k^2 - q_k^2) \sum_{j \neq k} \frac{1}{2 r r_{jk}} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{1}{r^2} + \lambda m_k r \right) \mathbf{u}_k = 0, \quad (3.20)$$

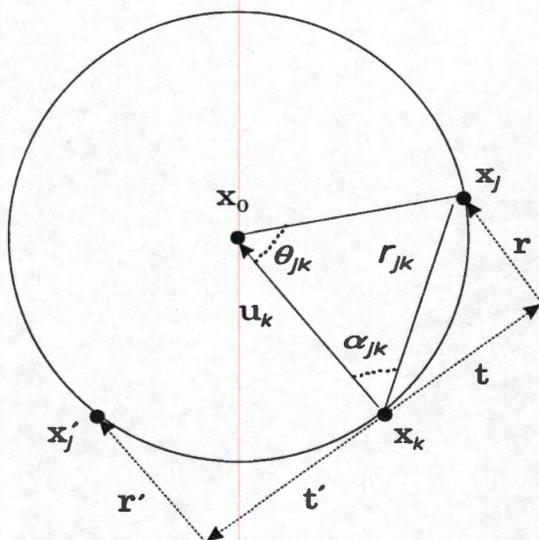


Figura 7. Descomposición del vector $x_j - x_k$.

donde $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. Para continuar simplificando aplicamos nuevamente la ley de los cosenos en el triángulo T con vértices en x_0, x_j y x_k , pero esta vez usando el ángulo central θ_{jk} , esto es, el ángulo interior de T correspondiente al centro de la circunferencia; entonces

$$r_{jk} = r \sqrt{2 - 2 \cos \theta_{jk}}.$$

Para cualquier k fijo definimos

$$s_j = \sqrt{2 - 2 \cos \theta_{jk}},$$

entonces (3.20) se escribe como

$$\left((m_k^2 - q_k^2) \frac{1}{2r^2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{s_j} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{1}{r^2} + \lambda m_k r \right) u_k = 0, \quad (3.21)$$

donde $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. Este sistema de ecuaciones que determina las C.C. en el sistema de polígonos anidados, se resuelve fácilmente analizando la sumatoria que aparece en (3.21). Definimos como S_{n_1} , la sumatoria en (3.21) para $k = 1, \dots, n_1$; esta expresión representa la suma de inversos de distancias entre la partícula k y todas las demás partículas del n_1 -polígono. Dado que las partículas involucradas en esta suma se encuentran sobre los

vértices de un n_1 -polígono regular, entonces la sumatoria S_{n_1} en realidad no depende de la partícula usada como pivote para medir las distancias, es decir, para $k = 1, \dots, n_1$ la suma en (3.21) tiene un valor constante S_{n_1} . Por lo tanto, las primeras n_1 ecuaciones en (3.21) son reducidas a una sola; considerando que $m_k = 1$, $q_k = q$ y $r = 1$, obtenemos

$$\frac{1}{2}(1 - q^2)S_{n_1} + (m_0 - q_0q) + \lambda = 0.$$

Para $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ procedemos análogamente. Sea S_{n_2} la sumatoria en (3.21) para $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, esto es, la suma de las distancias inversas entre la partícula k -ésima y todas las demás partículas contenidas en un n_2 -polígono inscrito sobre una circunferencia de radio 1. Nuevamente, por simetría, S_{n_2} es independiente de la partícula usada como pivote. En este caso $m_k = M$, $q_k = Q$ y $r = \rho$. Con lo anterior, las siguientes n_2 ecuaciones en (3.21) también son reducidas a sólo una,

$$\frac{1}{2}(M^2 - Q^2)S_{n_2} + (m_0M - q_0Q) + \lambda M \rho^3 = 0.$$

Resumiendo, el sistema de ecuaciones (3.21) que determina las C.C. es equivalente a las dos ecuaciones escalares dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - q^2)S_{n_1} + (m_0 - q_0q) + \lambda &= 0, \\ \frac{1}{2}(M^2 - Q^2)S_{n_2} + (m_0M - q_0Q) + \lambda M \rho^3 &= 0. \end{aligned}$$

Definiendo los parámetros A y B como

$$\begin{aligned} A(m_0, q_0, M, q, n_1) &= \frac{1}{2}(1 - q^2)S_{n_1} + (m_0 - q_0q), \\ B(m_0, q_0, M, Q, n_2) &= \frac{1}{2}(M^2 - Q^2)S_{n_2} + (m_0M - q_0Q), \end{aligned} \tag{3.22}$$

concluimos que las C.C. en el sistema de polígonos anidados son las raíces positivas del polinomio cúbico en ρ :

$$AM\rho^3 - B = 0. \tag{3.23}$$

Las raíces se consideran positivas porque ρ es el radio de uno de los polígonos, entonces la ecuación (3.23) tiene exactamente una raíz positiva, y esto sucede

cuando los parámetros A y B tienen el mismo signo. Dado que las partículas de un polígono no interaccionan con las partículas del otro polígono, pues la fuerza gravitacional de atracción se anula con la fuerza Coulombiana de repulsión, entonces la única solución en (3.23) es independiente de la posición que guarda un polígono respecto del otro, por consecuencia, esta solución del polinomio cúbico genera un continuo de C.C. cuando hacemos rotar el n_1 -polígono respecto del n_2 -polígono. Con esto hemos demostrado el siguiente resultado que representa una de las principales aportaciones de esta tesis.

Teorema 3.3.2. *En el problema cargado de los $n_1 + n_2 + 1$ cuerpos, con $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$, si las masas y cargas son tales que A y B tienen el mismo signo, entonces los dos polígonos concéntricos generan un continuo de configuraciones centrales.*

La construcción de polígonos concéntricos con una partícula en el centro y fuerzas que se anulan es una generalización de las ideas empleadas en el problema romboidal cargado, donde existe un caso realmente excepcional que degenera en un continuo de C.C. parametrizado por una variable angular; este continuo mantiene algunas semejanzas y diferencias respecto del continuo que estamos presentando en esta sección. En el caso romboidal tenemos el mínimo número de partículas necesarias para generar continuos de C.C., ya que en el problema cargado de los 3-cuerpos, este número siempre es finito, ver [19]. Esto nos dice que a pesar de la presencia de las masas y las cargas, no basta con tener muchos parámetros para generar continuos de C.C., sino que un aspecto muy importante se refiere a las simetrías que podemos formar con las partículas.

El problema romboidal cargado cuyas simetrías han sido fundamentales para obtener estos resultados, nos proporciona un excelente ejemplo que muestra que la conjetura de Wintner [24] sobre la finitud de las C.C. en el problema Newtoniano, no se cumple cuando estamos en un contexto más general como es el problema cargado de los 4-cuerpos.

Hasta lo que se conoce en este momento, en el problema romboidal cargado tenemos el modelo más simple con el menor número de partículas que genera continuos de C.C., esto entre las diversas generalizaciones del problema Newtoniano de los n -cuerpos. Otro ejemplo, el primero que se conoció corresponde a un problema de 5-cuerpos generalizado de tal manera que las masas pueden ser incluso negativas. En este problema, Roberts mostró que considerando una masa negativa, anulando algunas fuerzas y colocando las

partículas en una configuración simétrica, se puede obtener un continuo de C.C. [20].

Si bien los polígonos concéntricos son una generalización del problema romboidal cargado, el continuo hallado en este último no es un caso particular del obtenido en el problema de los polígonos. Para ver esto, es suficiente mostrar que la partícula ubicada en el centro común de los dos polígonos es indispensable para satisfacer la hipótesis del Teorema 3.3.2. Pero omitir la partícula central implica considerar $m_0 = q_0 = 0$, entonces los parámetros A y B en (3.22) tienen signos diferentes; esto es consecuencia directa del hecho que mientras en un polígono las partículas se atraen, en el otro se repelen. Por lo tanto, la ecuación (3.23) no tiene soluciones positivas cuando se omite la partícula central.

Ahora mostraremos que la hipótesis del Teorema 3.3.2 se satisface para toda $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$. Esto se concluye al observar que si eliminamos la carga Q en (3.22) usando (3.15), entonces los parámetros A y B son positivos para cualesquiera $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$, $M > 0$, $q_0 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, siempre y cuando la masa central m_0 sea lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad

$$m_0 > \max \left\{ \frac{q_0}{q} + (1 - q^2) \frac{MS_{n_2}}{2q^2}, \frac{q_0}{q} - (1 - q^2) \left(\frac{S_{n_1}}{2} + \frac{q_0}{q} \right) \right\}.$$

Dado que esto sucede para cualquier $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$, entonces lo que tenemos es una familia de continuos de C.C. en los polígonos concéntricos, lo cual nos proporciona ejemplos que muestran la existencia de un número infinito no numerable de C.C. en el problema cargado de los n -cuerpos para $n \geq 5$. Estas familias junto con el ejemplo del problema romboidal nos llevan a concluir el siguiente resultado.

Corolario 3.3.3. *En el problema cargado de los n -cuerpos con $n \geq 4$, siempre es posible generar un continuo de C.C. escogiendo adecuadamente las masas y las cargas.*

Este resultado complementa el trabajo de Pérez-Chavela et al [19], donde se estudia con detalle el problema cargado de los 3-cuerpos.

Capítulo 4

Estabilidad de Equilibrios Relativos

Introducción

En esta sección estamos interesados en hallar soluciones periódicas del problema cargado de los n -cuerpos, y analizar su estabilidad. El tipo de soluciones periódicas que estudiaremos a continuación son las llamadas soluciones de equilibrio relativo; en el problema Newtoniano de los n -cuerpos se obtienen por rotación rígida de configuraciones centrales planares alrededor del centro de masa; estas soluciones en un sistema de coordenadas rotatorias uniformes se convierten en puntos de equilibrio del espacio fase, y el análisis de su estabilidad nos proporciona la dinámica existente a su alrededor. Desafortunadamente, no son puntos de equilibrio hiperbólicos, lo cual hace que sea extremadamente complicado determinar su estabilidad. Por tal razón, se introduce un concepto débil de estabilidad llamado estabilidad espectral, el cual consiste en obtener los valores propios de la parte lineal del campo vectorial en el equilibrio relativo.

4.1 Definición y aspectos generales

Sea $R(\theta)$ la matriz $3n \times 3n$, diagonal por bloques, cuyos bloques están dados por la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el producto $R(\theta) \mathbf{x}$ tiene el efecto de rotar la configuración del sistema de partículas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$, alrededor del origen de coordenadas, es decir, alrededor del centro de masa. En las coordenadas

$$\mathbf{s} = R(\omega t) \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = R(\omega t) \mathbf{p}, \quad (4.1)$$

donde ω es la velocidad angular constante, las ecuaciones de movimiento del problema cargado de los n -cuerpos (2.4) se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= K\mathbf{s} + M^{-1}\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \nabla U(\mathbf{s}) + K\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $(\mathbf{s}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n} = Y$. Además, $K = R'(\omega t)R^{-1}(\omega t)$ es una matriz $3n \times 3n$, diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las nuevas coordenadas crean puntos de equilibrio en las ecuaciones de movimiento, los cuales representan soluciones periódicas en las coordenadas originales. Estos puntos de equilibrio están dados por los ceros del campo vectorial (4.2), es decir,

$$\nabla U(\mathbf{s}) - KMK\mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{y} = -MK\mathbf{s}.$$

Dado que $KM = MK$ y $K^2 = -\omega^2 E$, donde E es una matriz $3n \times 3n$, diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces los puntos de equilibrio del sistema (4.2) están dados por

$$\{(s, y) \in Y : M^{-1}\nabla U(s) + w^2 Es = 0, \quad y = -MKs\}. \quad (4.3)$$

Definición 4.1.1. Una configuración $s \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ se llama equilibrio relativo, si es una solución de la ecuación

$$M^{-1}\nabla U(s) + w^2 Es = 0. \quad (4.4)$$

El producto Es que aparece en la ecuación (4.4) representa la proyección del equilibrio relativo s al plano de rotación.

Proposición 4.1.2. En un problema cargado con $\lambda_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$, todos los equilibrios relativos son planares.

Demostración. Dado que en la ecuación (4.4), la matriz E anula la tercera coordenada de cada una de las componentes $s_k \in \mathbb{R}^3$ del equilibrio relativo $s = (s_1, \dots, s_n)$, entonces lo mismo sucede con las componentes del vector $M^{-1}\nabla U(s)$, es decir,

$$\nabla_k U(s) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Si ahora denotamos $s_k = (s_{k1}, s_{k2}, s_{k3}) \in \mathbb{R}^3$, entonces el sistema (4.5) implica

$$\sum_{j \neq k} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} (s_{j3} - s_{k3}) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Así, cuando todos los parámetros λ_{jk} son positivos, y escogemos a s_k como el punto más alejado del plano de rotación, se obtiene del sistema de ecuaciones (4.6) que $s_{13} = \dots = s_{n3}$, es decir, una configuración planar. \square

4.2 Relación con las configuraciones centrales

En el problema Newtoniano de los n -cuerpos, los equilibrios relativos y las configuraciones centrales planares son conceptos que van de la mano, la existencia de uno, implica la presencia del otro. Para comprender la relación que existe entre ambos conceptos, pero ahora, en el contexto del problema cargado de los n -cuerpos, a continuación deducimos una expresión escalar

que se obtiene de la ecuación que define a los equilibrios relativos (4.4). En esta dirección, el resultado de multiplicar $s^t M$ por (4.4) está dado por

$$s^t \nabla U(s) + w^2 s^t M E s = 0.$$

Adicionalmente, si aplicamos el Teorema de Euler en la expresión vectorial $s^t \nabla U(s)$, considerando que $U(s)$ es una función homogénea, con grado de homogeneidad -1 , obtenemos la relación $s^t \nabla U(s) = -U(s)$, entonces

$$w^2 = \frac{U(s)}{s^t M E s}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, todo equilibrio relativo cumple la condición $U(s) > 0$. Esta desigualdad se cumple trivialmente en los problemas Newtonianos donde el potencial es una función positiva, sin embargo, en los problemas cargados la situación es más compleja y el potencial puede tener cualquier signo.

Proposición 4.2.1. *En el problema cargado de los n -cuerpos, una condición necesaria para la existencia de un equilibrio relativo $s \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es que $U(s) > 0$.*

En cuanto a la forma geométrica de los equilibrios relativos, éstos pueden ser, en principio, planares y no planares. Así que para simplificar su estudio, el primer caso lo estudiamos en esta sección, y el segundo en la sección 4.3

Equilibrio relativo planar. Observemos que dada una configuración cualquiera $s = (s_{11}, s_{12}, s_{13}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}) \in \mathbb{R}^{3n}$, el producto $E s$, donde E es la matriz $3n \times 3n$ definida en la sección 4.1, está dado por la configuración planar $E s = (s_{11}, s_{12}, 0, \dots, s_{n1}, s_{n2}, 0)$. Entonces en el caso particular que s es una configuración planar caracterizada por $s_{13} = \dots = s_{n3} = 0$, deducimos inmediatamente que $E s = s$. Esta última expresión nos conduce, finalmente, a concluir que las soluciones planares de las ecuaciones (3.1) y (4.4) son exactamente las mismas, si $U(s) > 0$. En otras palabras, *las configuraciones centrales planares que cumplen la desigualdad $U(s) > 0$, constituyen el conjunto de todos los equilibrios relativos planares, o dicho de otra manera, todos los equilibrios relativos planares son configuraciones centrales.*

En el caso que todos los parámetros λ_{jk} son positivos (problema cargado atractivo), la Proposición 4.1.2 descarta la existencia de equilibrios relativos

no planares, ya que todos los equilibrios relativos son configuraciones centrales planares. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *En un problema cargado todo equilibrio relativo planar es una configuración central. Los equilibrios relativos no planares no existen si $\lambda_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$.*

En el caso general donde algunos parámetros λ_{jk} son negativos, puede suceder que no se cumpla la condición $U(s) > 0$ de la Proposición 4.2.1. En tal situación, es decir, cuando las C.C. son tales que $U(s) \leq 0$, significa que no existe el correspondiente equilibrio relativo. La explicación de este hecho radica en que la rotación de una configuración donde el potencial es negativo, genera una fuerza centrífuga que no tiene manera de ser equilibrada para crear órbitas periódicas, ya que la fuerza entre partículas es principalmente repulsiva.

Energía de un equilibrio relativo. Los resultados obtenidos en esta sección nos permiten conocer los niveles de energía en que se encuentran las soluciones de equilibrio relativo, en el caso más general del problema cargado de los n -cuerpos. Para esto, observemos que dichas soluciones en coordenadas rotatorias (4.1), están dadas por los puntos de equilibrio (4.3). La energía cinética T en tales coordenadas adquiere la forma

$$T = \frac{1}{2} y^t M^{-1} y;$$

en particular, $y = -MKs$ para un equilibrio relativo, entonces

$$T = \frac{1}{2} w^2 s^t M E s.$$

Usando (4.7), obtenemos la siguiente relación entre las energías cinética y potencial

$$T(y) = \frac{1}{2} U(s).$$

Finalmente, la ecuación de energía $T(y) - U(s) = h$, implica

$$h = -\frac{1}{2} U(s).$$

Por lo tanto, haciendo uso de la Proposición 4.2.1 encontramos que la energía h de cualquier equilibrio relativo es negativa.

Proposición 4.2.3. *Las soluciones periódicas generadas por equilibrios relativos en el problema cargado de los n -cuerpos, se encuentran todas ellas, contenidas en niveles de energía negativos.*

4.3 Equilibrio relativo no planar

Un resultado clásico del problema Newtoniano de los n -cuerpos es que todos los equilibrios relativos son planares (Proposición 4.1.2). Sin embargo esta regla, como veremos a continuación, no se aplica al caso general del problema cargado de los n -cuerpos, en el cual existen equilibrios relativos tanto planares como no planares. Este hecho es doblemente relevante si tomamos en cuenta que los equilibrios relativos no planares, no se obtienen por rotación de configuraciones centrales.

Según la ecuación (4.4), para hallar una solución no planar, necesitamos hallar las suficientes simetrías tanto en la posición como en los parámetros, para que la fuerza resultante sobre cada partícula sea paralela a la proyección de su vector de posición al plano de rotación.

Para analizar lo anterior, desarrollamos un ejemplo de 6 partículas, en el cual fijamos parcialmente tanto la posición como las masas y las cargas. En lo que respecta a la posición, fijamos 4 partículas en los vértices de un cuadrado, y 2 partículas más, colocadas simétricamente en el eje ortogonal que pasa por el centro del cuadrado. La configuración anteriormente descrita $s = (s_1, \dots, s_6)$ está dada por

$$s_1 = -s_2 = (1, 0, 0), \quad s_3 = -s_4 = (0, 1, 0), \quad s_5 = -s_6 = (0, 0, c),$$

donde c es un número real positivo que escogemos en forma adecuada. Ver Figura 8.

Además, suponemos que entre partículas opuestas las masas son iguales y también las cargas, es decir, $m_i = m_j$ y $q_i = q_j$, para $(i, j) = (1, 2)$ o $(3, 4)$ o $(5, 6)$. De esta manera, al escribir la ecuación (4.4) de los equilibrios relativos por componentes

$$L_k = m_k^{-1} \nabla_k U(s) + w^2 I_0 s_k = 0, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (4.8)$$

obtenemos que $L_1 = -L_2$, $L_3 = -L_4$ y $L_5 = -L_6$. Entonces el sistema (4.8) se reduce a la mitad, es decir, los equilibrios relativos están dados por el sistema

$$L_1 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_5 = 0.$$

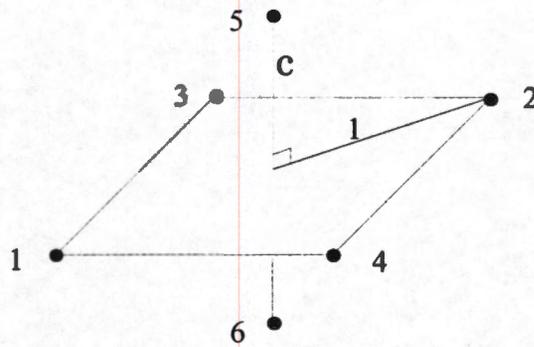


Figura 8. Ejemplo de un equilibrio relativo no planar.

Calculando estas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} (-2m_1^{-1}\sum_1 + w^2)s_1 &= 0, \\ (-2m_3^{-1}\sum_3 + w^2)s_3 &= 0, \\ (-2m_5^{-1}\sum_5) s_5 &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\sum_1 = \sum_{k=2,3,5} \frac{\lambda_{1k}}{r_{1k}^3}$, $\sum_3 = \sum_{k=1,4,5} \frac{\lambda_{3k}}{r_{3k}^3}$ y $\sum_5 = \sum_{k=1,3,6} \frac{\lambda_{5k}}{r_{5k}^3}$. El sistema (4.9) se reduce, después de eliminar w^2 , a sólo 2 ecuaciones escalares dadas por

$$m_1^{-1}\sum_1 = m_3^{-1}\sum_3 \quad \text{y} \quad \sum_5 = 0. \quad (4.10)$$

Si tomamos en consideración que $r_{51} = r_{53}$, entonces la segunda ecuación de (4.10) se resuelve fácilmente suponiendo a los parámetros de manera que $\lambda_{51} + \lambda_{53} = 0$ y $\lambda_{56} = 0$; esto implica agregar las siguientes hipótesis en las masas y las cargas:

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = 1, \quad m_3 = m_4 = m, \quad m_5 = m_6 = \mu, \\ q_1 = q_2 = q, \quad q_3 = q_4 = m + 1 - q, \quad q_5 = q_6 = \mu, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $m \in \mathbb{R}^+$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{R}$. Con estos parámetros la primera ecuación de (4.10) se escribe como

$$\frac{(m-1)(q+1) + 2(m+1)}{4} + \frac{(m-1)(m-q)}{\sqrt{2}} + \frac{2\mu(m+1)}{(c^2+1)^{3/2}} = 0. \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) junto con la condición $U > 0$, caracteriza completamente a los equilibrios relativos. Esta condición de potencial positivo está dada por la desigualdad

$$U(s) = (2\sqrt{2} - 1)(1 - q)(m - q) > 0. \quad (4.13)$$

Las soluciones del sistema (4.12)-(4.13) son las que determinan la existencia de los equilibrios relativos no planares. Dado que el tercer término en (4.12) es positivo, entonces la suma de los primeros dos términos debe ser negativa, lo que equivale a decir,

$$(m-1)q > \frac{\sqrt{8}m^2 + (3 - \sqrt{8})m + 1}{(\sqrt{8} - 1)}. \quad (4.14)$$

Entonces la existencia de equilibrios relativos no planares depende únicamente de que existan parámetros $m \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{R}$ que satisfagan el sistema de desigualdades (4.13)-(4.14). Resolviendo este sistema encontramos que las 6 partículas cargadas forman un equilibrio relativo no planar, si m y q son tales que

$$0 < m < 1, q < P(m), \quad \text{o bien,} \quad m > 1, q > P(m),$$

donde

$$P(m) = \frac{\sqrt{8}m^2 + (3 - \sqrt{8})m + 1}{(\sqrt{8} - 1)(m - 1)}.$$

Con la segunda de estas dos opciones, $m > 1$ y $q > P(m)$, el equilibrio dinámico en la rotación del equilibrio relativo se logra en la siguiente forma: las 4 partículas que forman el cuadrado se repelen sobre las diagonales, lo que se compensa con la atracción que existe sobre los lados del cuadrado; respecto a las 2 partículas que se hallan en el eje ortogonal que pasa sobre el centro del cuadrado, la fuerza entre ellas es nula, además ambas son repelidas por las dos partículas que se encuentran sobre una de las diagonales, a la vez que son atraídas por las que están en la otra diagonal.

Una consecuencia adicional a la existencia de equilibrios relativos no planares, en el problema cargado de los n -cuerpos, se deriva del siguiente hecho: en la ecuación (4.4) que define a los equilibrios relativos s , el producto Es anula la tercera coordenada del vector de posición de cada una de las partículas, es decir, Es tiene la forma

$$\{s_{11}, s_{12}, 0, \dots, s_{n1}, s_{n2}, 0\}.$$

Pero $M^{-1}\nabla U(s)$ y Es son vectores paralelos, entonces $M^{-1}\nabla U(s)$ también tiene las mismas coordenadas nulas que Es . Esto implica que los vectores s y $M^{-1}\nabla U(s)$ no pueden ser paralelos, pues s representa una configuración no planar. Entonces las soluciones no planares de (4.4), no resuelven la ecuación (3.1) que define a las C.C. En otras palabras, *los equilibrios relativos no planares no se obtienen por rotación de configuraciones centrales.*

Esta notable característica acentúa aún más la diferencia que existe entre el problema Newtoniano y el problema cargado, ya que en el primero es bien conocida la relación que hay entre equilibrios relativos y configuraciones centrales. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. *En el problema cargado de los n -cuerpos existen soluciones periódicas generadas por equilibrios relativos no planares; para ellas no existen las correspondientes soluciones homotéticas.*

4.4 Estabilidad espectral

Para analizar la estabilidad de los equilibrios relativos, linealizamos el campo vectorial (4.2) alrededor de sus puntos de equilibrio (4.3); lo que resulta es el sistema lineal Hamiltoniano: $\dot{z} = \mathfrak{R}z$, $z \in \mathbb{R}^{6n}$, donde

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} K & M^{-1} \\ D\nabla U(s) & K \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

La función Hamiltoniana de este sistema está dada por el producto de matrices $G = \mathbf{J}\mathfrak{R}$, donde \mathbf{J} es la matriz $6n \times 6n$ definida por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $G^t = G$ y $J^2 = -I$, lo cual implica $\mathfrak{R} = -JG$. Al sustituir estas relaciones en el polinomio característico de \mathfrak{R} , $p(\lambda) = |\mathfrak{R} - \lambda I|$, resulta

$$p(\lambda) = | -JG + \lambda J^2 | = | G - \lambda J | = | G^t - \lambda J^t | = | G + \lambda J | = p(-\lambda),$$

es decir, el polinomio propio $p(\lambda)$ es función de λ^2 . Dado que sus coeficientes son reales, pues \mathfrak{R} es real, entonces los complejos conjugados también son raíces de p . Por lo tanto, si λ es un valor propio de \mathfrak{R} , entonces

$$\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda},$$

también lo son. Una consecuencia inmediata de lo anterior es que *los puntos de equilibrio en (4.2) son inestables, si al menos un valor propio tiene parte real no nula.*

Por lo tanto, una condición necesaria, pero no suficiente para la existencia de estabilidad en los equilibrios relativos, es que todos los valores propios sean números imaginarios puros o cero. Cuando esta condición débil se cumple, es decir, cuando las raíces de la ecuación $p(\lambda) = 0$ son tales que $\lambda^2 \leq 0$, se dice que *el equilibrio relativo es espectralmente estable.*

En un concepto más general, cuando el origen del espacio \mathbb{R}^{6n} es un punto de equilibrio estable en la ecuación linealizada $\dot{z} = \mathfrak{R}z$, se dice que el punto de equilibrio es linealmente estable. La estabilidad lineal implica estabilidad espectral, y lo recíproco requiere adicionalmente que \mathfrak{R} sea una matriz diagonalizable en su forma canónica de Jordan.

Para estudiar los valores propios de \mathfrak{R} desarrollamos la ecuación característica $\mathfrak{R}u = \lambda u$, donde \mathfrak{R} esta dada por (4.15) y $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{6n}$, entonces

$$\begin{aligned} Ku_1 + M^{-1}u_2 - \lambda u_1 &= 0, \\ D\nabla U(s)u_1 + Ku_2 - \lambda u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

De aquí se sigue que los valores propios de \mathfrak{R} son los valores de λ que generan soluciones no nulas, $(u_1, u_2) \neq 0$, en el sistema de ecuaciones (4.16). Si despejamos u_2 de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda, encontramos que los valores propios de \mathfrak{R} son las raíces de la ecuación

$$\det A(\lambda) = 0, \quad (4.17)$$

donde A es una matriz $3n \times 3n$ dada por

$$A = M^{-1}D\nabla U(s) + 2\lambda K + w^2 E - \lambda^2 I. \quad (4.18)$$

Entonces un equilibrio relativo s es espectralmente estable, si $\lambda^2 \leq 0$ en todas las raíces de la ecuación (4.17).

Un método básico en Algebra Lineal usado para resolver la ecuación (4.17), consiste en factorizar dicha expresión por medio de un análisis de los subespacios vectoriales correspondientes. Como es sabido, para una transformación lineal $A : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$, la descomposición del espacio \mathbb{R}^{3n} en suma directa de subespacios A -invariantes, proporciona una factorización del polinomio $\det A(\lambda)$, cuyos factores corresponden al determinante de la matriz A restringida a los subespacios A -invariantes. Con este objetivo definimos la matriz B , $3n \times 3n$, dada por

$$B = M^{-1}D\nabla U(s), \quad (4.19)$$

cuyos bloques B_{jk} de tamaño 3×3 , están dados por

$$B_{jk} = m_j^{-1} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} (I - 3 u_{jk} u_{jk}^t) \quad \text{para } j \neq k, \quad (4.20)$$

$$B_{jj} = -\sum_{k \neq j} B_{jk},$$

donde $u_{jk} \in \mathbb{R}^3$ es el vector unitario $u_{jk} = (s_j - s_k) r_{jk}^{-1}$.

Estabilidad en equilibrios relativos planares. Observemos que los bloques B_{jk} adquieren una forma más simple cuando todas las partículas se hallan sobre el plano de rotación. En este caso, $s_k \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ para $k = 1, \dots, n$ (lo cual supondremos en adelante), entonces las matrices (4.20) adquieren la siguiente estructura diagonal por bloques

$$B_{jk} = \begin{pmatrix} L_{jk} & 0 \\ 0 & c_{jk} \end{pmatrix},$$

donde L_{jk} es una matriz 2×2 definida como sigue

$$L_{jk} = m_j^{-1} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} (I - 3 u_{jk} u_{jk}^t) \quad \text{para } j \neq k, \quad (4.21)$$

$$L_{jj} = -\sum_{k \neq j} L_{jk},$$

donde $u_{jk} \in \mathbb{R}^2$ es el vector unitario $u_{jk} = (s_j - s_k) r_{jk}^{-1}$; los escalares c_{jk} están dados por

$$\begin{aligned} c_{jk} &= m_j^{-1} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} \quad \text{para } j \neq k, \\ c_{jj} &= -\sum_{k \neq j} c_{jk}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

El objetivo de considerar únicamente equilibrios relativos planares es aprovechar la estructura diagonal que adquiere B_{jk} , pues al cambiar el orden de las coordenadas con la transformación

$$(s_{11}, s_{12}, s_{13}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}) \rightarrow (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{13}, \dots, s_{n3}),$$

la matriz $B = (B_{jk})$, $3n \times 3n$, se escribe como una matriz diagonal por bloques

$$B = \text{diag}\{L, C\}, \tag{4.23}$$

donde $L = (L_{jk})$ es la matriz $2n \times 2n$ definida en (4.21), y $C = (c_{jk})$ es la matriz $n \times n$ definida en (4.22). En las nuevas coordenadas, todas las matrices que aparecen en (4.18) tienen la misma forma diagonal que B en (4.23); $E = \text{diag}\{I, 0\}$ y $K = \text{diag}\{J, 0\}$, donde J es la matriz $2n \times 2n$ diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}.$$

Por consecuencia, la matriz A definida en (4.18), cuyas raíces de su determinante determinan la estabilidad espectral del equilibrio relativo, también adquiere una forma diagonal por bloques, dada por

$$A = \text{diag}\{A_1, A_2\},$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= L + 2\lambda J + (w^2 - \lambda^2)I, & 2n \times 2n \\ A_2 &= C - \lambda^2 I, & n \times n. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dado que el determinante de una matriz es invariante bajo cambios de base, entonces la ecuación (4.17) de la estabilidad espectral, adquiere la forma

$$\det A_1(\lambda) \cdot \det A_2(\lambda) = 0.$$

Desde el punto de vista geométrico, el reacomodo de coordenadas realizado anteriormente, tiene el efecto de analizar las órbitas cercanas a un equilibrio relativo, considerando separadamente la proyección del sistema de partículas al plano de rotación, y luego su proyección al eje ortogonal de dicho plano, es decir, la dinámica de partículas es analizada considerando la estabilidad sobre ambas proyecciones. De lo anterior, surgen de manera natural las siguientes definiciones:

En lo que respecta a la dinámica generada por la proyección al plano de rotación, se dice que *un equilibrio relativo tiene estabilidad espectral planar*, si y sólo si, todas las raíces de la ecuación

$$\det A_1(\lambda) = 0, \quad (4.25)$$

satisfacen la desigualdad $\lambda^2 \leq 0$.

Similarmente, para la dinámica inducida por la proyección al eje ortogonal, se dice que *un equilibrio relativo tiene estabilidad espectral normal*, si y sólo si, todas las raíces de la ecuación

$$\det A_2(\lambda) = 0, \quad (4.26)$$

son tales que $\lambda^2 \leq 0$.

Dado que ambos conceptos son complementarios, entonces *un equilibrio relativo es espectralmente estable, si y sólo si, tiene estabilidad espectral planar y estabilidad normal*. Por el contrario, un equilibrio relativo que no posee alguna de las dos características es inestable.

Para el análisis de estas propiedades en el problema cargado, en la primera parte, relativa a la factorización del polinomio característico haremos uso de las ideas desarrolladas por Moeckel en [17].

4.4.1 Estabilidad espectral normal

Según la definición de A_2 en (4.24), un equilibrio relativo es normal espectralmente estable, si y sólo si, $\lambda^2 \leq 0$ en todas las raíces de la ecuación

$$\det(C - \lambda^2 I) = 0.$$

En otras palabras, existe estabilidad espectral normal si todos los valores propios μ de C son reales y no positivos. Para analizar los valores propios es necesario observar que C es una matriz simétrica respecto al producto

existencia de puntos de equilibrio; todos ellos están localizados en Λ , y están en correspondencia 2 : 1 con los puntos críticos del potencial $\tilde{U}(\theta)$. Por tal razón, existen dos o cuatro puntos de equilibrio cuando la gráfica del potencial es U_1, U_3, U_5 , o U_{10} , ya que este tiene uno o dos puntos críticos; pero si el potencial es como U_2, U_4, U_6, U_7 , o U_9 , entonces no hay puntos de equilibrio. Ver Tabla 1.

El caso especial U_8 es totalmente degenerado y lo omitiremos.

Dado que la coordenada v se obtiene de la relación de energía (2.21), linealizamos el campo vectorial (2.19) en los puntos de equilibrio en las coordenadas (r, θ, u) . Los valores propios están dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= v_0, \\ \lambda_2 &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16\tilde{U}''(\theta_0)}}{4}, \\ \lambda_3 &= \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 16\tilde{U}''(\theta_0)}}{4}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Entonces un punto de equilibrio $P_0 = (r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ de las ecuaciones de movimiento (2.19) es hiperbólico si λ_1, λ_2 y λ_3 tienen su parte real no nula, es decir, P_0 es hiperbólico si $v_0 \neq 0$ y $\tilde{U}''(\theta_0) \neq 0$.

Entonces los puntos de equilibrio hiperbólicos de (2.19) no pueden ser asintóticamente estables, pues las expresiones $v_0 \neq 0$ y $\tilde{U}''(\theta_0) \neq 0$ impiden que la parte real de los tres valores propios tenga el mismo signo. Esto significa que el conjunto de soluciones que van a colisión total tiene medida cero.

Dado que siempre existe al menos un valor propio con parte real positiva, entonces los puntos de equilibrio P_0 de las ecuaciones de movimiento (2.19) son inestables. El valor propio λ_1 está asociado a la dirección radial del flujo en E_h , en una vecindad de P_0 ; los valores propios λ_2 y λ_3 dan información del flujo en Λ alrededor de P_0 .

En el siguiente resultado indicamos la dimensión de las variedades estable e inestable asociadas al punto de equilibrio.

Teorema 2.2.3. *Sea $P_0 = (r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ un punto de equilibrio para el flujo dado por (2.19), con $\tilde{U}(\theta_0) > 0$ y $\tilde{U}''(\theta_0) \neq 0$. Entonces $P_0 \in \Lambda$. Las dimensiones de las variedades estables e inestables en E_h son*

$$i) \dim W_{P_0}^s = 2 \text{ y } \dim W_{P_0}^u = 1 \text{ si } v_0 \tilde{U}''(\theta_0) < 0,$$

ii) $\dim W_{P_0}^s = 1$ y $\dim W_{P_0}^u = 2$ si $v_0 \tilde{U}''(\theta_0) > 0$.

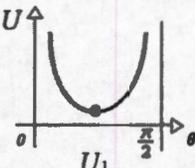
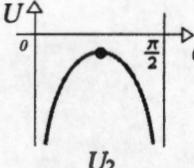
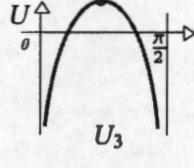
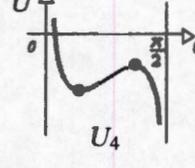
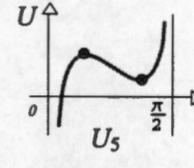
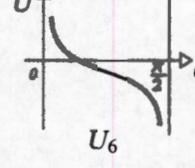
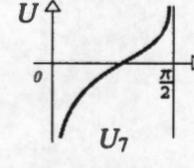
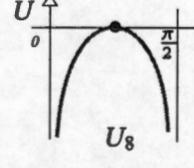
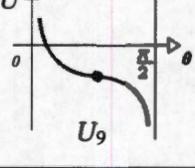
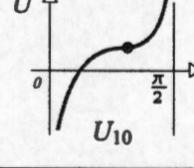
Parámetros	$\lambda_{34} > 0$	$\lambda_{34} < 0$
$\beta > 0$ $8\gamma + 1 > 0$ \circ $\beta > 0$ $8\gamma + 1 < 0$ $\varphi(\theta_0) > 0$	 <p style="text-align: center;">U_1</p>	 <p style="text-align: center;">U_2</p>
$\beta > 0$ $8\gamma + 1 < 0$ $\varphi(\theta_0) < 0$		 <p style="text-align: center;">U_3</p>
$\beta < 0$ $k > 1$ $g(\theta_0) > 0$	 <p style="text-align: center;">U_4</p>	 <p style="text-align: center;">U_5</p>
$\beta < 0$ $k < 1$ \circ $\beta < 0$ $k > 1$ $g(\theta_0) < 0$	 <p style="text-align: center;">U_6</p>	 <p style="text-align: center;">U_7</p>
$\beta > 0$ $8\gamma + 1 < 0$ $\varphi(\theta_0) = 0$		 <p style="text-align: center;">U_8</p>
$\beta < 0$ $k > 1$ $g(\theta_0) = 0$	 <p style="text-align: center;">U_9</p>	 <p style="text-align: center;">U_{10}</p>

Tabla 1. Gráficas de la función potencial $\tilde{U}(\theta)$.

2.2.4 Flujo Global en la variedad de colisión total

En la sección 2.2.2 eliminamos la singularidad por colisión total aplicando las coordenadas de McGehee, sin embargo, el campo vectorial (2.19) aún contiene singularidades por colisión doble. En un problema cargado, las colisiones binarias se presentan sólo cuando la fuerza resultante entre dos partículas es atractiva; en el caso que nos ocupa, hay colisiones binarias entre las partículas 1 y 2 siempre que $\lambda_{12} > 0$ y $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, o bien, las partículas 3 y 4 colisionan cuando $\lambda_{34} > 0$ y $\theta \rightarrow 0$. Para regularizar las colisiones binarias sustituimos la coordenada u por $w = uf(\theta)$, donde la función $f(\theta)$ es esencialmente el producto $f(\theta) = \sin \theta \cos \theta$. En el caso $\lambda_{12} < 0$, no hay colisiones binarias 1-2, razón por la cual reemplazamos $\sin \theta$ por la función constante 1, así que $f(\theta) = \cos \theta$.

Después de reparametrizar el tiempo mediante $\frac{dr}{ds} = f(\theta)$, el sistema (2.19) en coordenadas (r, v, θ, w) toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= rvf(\theta), \\ \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + \tilde{U}(\theta) + 2hr\right]f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + \tilde{U}(\theta) + hr\right]2f(\theta)\frac{df}{d\theta} - f(\theta)\frac{vw}{2} + f^2(\theta)\frac{d\tilde{U}}{d\theta}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

La relación de energía (2.21) se escribe como

$$\frac{1}{2}[w^2 + v^2f^2(\theta)] - \tilde{U}(\theta)f^2(\theta) = hr f^2(\theta).\tag{2.33}$$

Se puede checar fácilmente que $(f\tilde{U})(\theta)$ y $(f^2\tilde{U}')(\theta)$ son funciones analíticas en el intervalo $[0, \pi/2]$, entonces el campo vectorial y la relación de energía son analíticas en $[0, \pi/2]$. Observemos que los puntos de equilibrio de (2.19) son invariantes bajo el último cambio de variables y la reparametrización en el tiempo.

Usaremos ahora el hecho de que el flujo en (2.32) tiene la simetría

$$L : (r, v, \theta, w, s) \longrightarrow (r, -v, \theta, -w, -s).$$

Esto se debe a que el sistema original (2.14) puede ser escrito en forma Hamiltoniana (2.15), en términos de una función que es cuadrática respecto

del momento lineal. Esto implica que el sistema es reversible, propiedad que persiste cuando introducimos las coordenadas de McGehee y cuando regularizamos las colisiones binarias.

En coordenadas r, v, θ, w la variedad de colisión total está dada por

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, w) : r = 0, w^2 + v^2 f^2(\theta) = 2\tilde{U}(\theta) f^2(\theta)\}, \quad (2.34)$$

donde $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. El flujo en Λ está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] 2f(\theta)f'(\theta) - \frac{vw}{2}f(\theta) + \tilde{U}'(\theta)f^2(\theta). \end{aligned} \quad (2.35)$$

El flujo en Λ tiene la siguiente propiedad fundamental.

Definición 2.2.4. *Un campo vectorial F es casi-gradiente con respecto a una función g , si toda solución de $\dot{x} = F(x)$ que no es de equilibrio, se incrementa con respecto a g .*

Lema 2.2.5. *El campo vectorial (2.35) es casi-gradiente con respecto a la coordenada v .*

La demostración es directa.

Del lema anterior se sigue que el flujo en Λ depende en gran medida de la gráfica de $\tilde{U}(\theta)$. Aquí restringimos el análisis a los casos genéricos; en [2] estudiamos los casos no genéricos, entendiendo que un caso es genérico si existe un conjunto abierto Ω en el espacio de parámetros, tal que, para cualquier punto en Ω , la gráfica de $\tilde{U}(\theta)$ es cualitativamente la misma. En el problema romboidal cargado los casos genéricos están dados por $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7$ de la Tabla 1. Esto produce cuatro diferentes variedades de colisión $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$ generadas por los potenciales dados por U_1, U_3, U_5, U_7 , respectivamente (Figura 2). La variedad de colisión total no existe para el potencial negativo U_2 , y las correspondientes a U_4 y U_6 son similares a Λ_7 ,

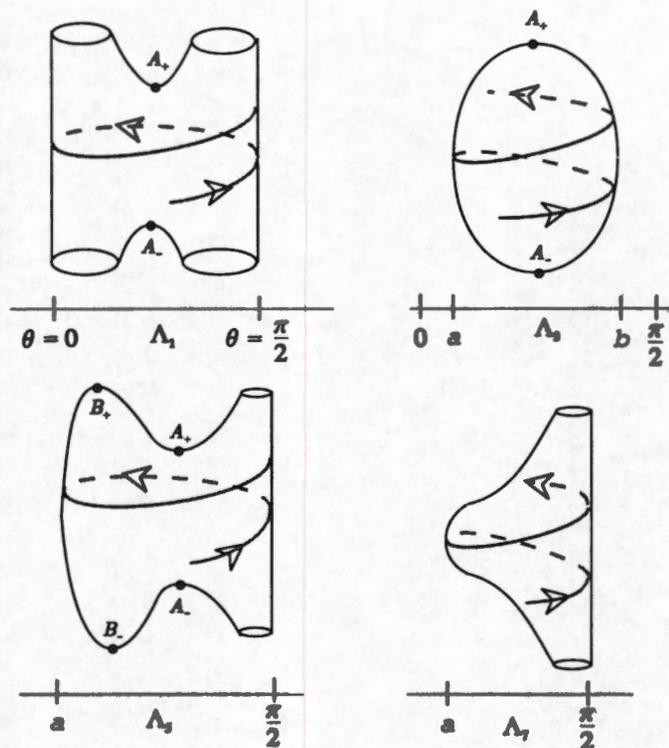


Figura 2. Variedades de colisión total $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$.

2.2.5 Flujo Global en $\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_7$

En el caso Λ_1 , el problema romboidal cargado es atractivo, ya que los tres parámetros λ_{12} , λ_{34} y λ_{13} , son positivos; éste es en esencia el problema romboidal Newtoniano, ampliamente estudiado en [11]. En Λ_1 hay dos puntos de equilibrio A_- y A_+ , correspondientes a $v_0 < 0$ y $v_0 > 0$, respectivamente; ambos son puntos silla. Respecto a las singularidades, la atracción implica la existencia de colisiones dobles y colisión total.

El caso Λ_3 se obtiene cuando $\lambda_{12} < 0$, $\lambda_{34} < 0$ y $\lambda_{13} > 0$, esto es, las partículas opuestas se repelen entre sí, mientras las partículas adyacentes se atraen. La colisión total es posible porque la atracción que hay sobre los lados del rombo es mayor que la repulsión existente en las diagonales. Esta repulsión imposibilita la existencia de colisiones binarias, lo cual ocasiona que Λ_3 sea una variedad compacta. De hecho, Λ_3 es homeomorfa a una esfera. El flujo sobre ella es muy simple, el punto de equilibrio A_- es una fuente, mientras que A_+ es un atractor. Cualquier órbita que no sea punto

de equilibrio en Λ_3 empieza en A_- y termina en A_+ (Figura 2).

Las variedades de colisión Λ_5 y Λ_7 no son compactas; ambas son homeomorfas a una esfera sin dos puntos. En Λ_7 no hay puntos de equilibrio y el flujo sobre ella es muy simple: todas las órbitas son no acotadas y contienen un número infinito de colisiones dobles 1-2. Dado que $\lambda_{34} < 0$, no hay colisiones 3-4 (Figura 2).

El flujo en Λ_5 es el más interesante por la presencia de cuatro puntos de equilibrio, A_- , B_- , A_+ y B_+ ; A_- es punto silla y B_- es una fuente, en ambos $v_0 < 0$. Para $v_0 > 0$ encontramos que A_+ es punto silla y B_+ es atractor. Algunos resultados numéricos nos dan evidencia de que las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, eventualmente se conectan para ciertos valores de los parámetros. Para esto, lo que hacemos es fijar dos parámetros y estudiar la proyección de $W_{A_-}^u$ en el plano $\theta-v$. Variando el tercer parámetro encontramos que para algunos valores, la rama $W_{A_-}^u$ escapa sobre la línea $\theta = \pi/2$ y para otros valores del mismo parámetro encontramos que $W_{A_-}^u$ termina en $W_{B_+}^s$; consecuentemente existen valores del parámetro libre donde las variedades $W_{A_-}^u$ y $W_{A_+}^u$ se conectan (Figura 3). Con estas simulaciones tenemos evidencia numérica para creer que la siguiente afirmación es cierta:

Conjetura. En el subconjunto Ω_5 del espacio de parámetros que determina la gráfica U_5 del potencial, la región en la cual se conectan las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, tiene codimensión 1 en Ω_5 .

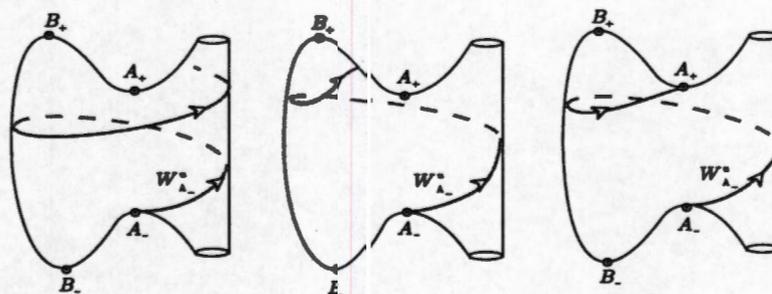


Figura 3. Comportamiento de $W_{A_-}^u$ para diferentes selecciones de los parámetros.

2.2.6 Flujo global para $h = 0$

Podemos observar en la relación de energía (2.21) que la energía cinética es especialmente importante para $h \geq 0$, ya que las posibilidades de escape se incrementan. Los escapes son analizados mediante la técnica de explosión al infinito, en la cual la coordenada radial r se sustituye por su recíproco $1/r$. En lo que sigue analizamos los escapes al infinito sobre el nivel de energía $h = 0$, denotado por E_0 .

En las coordenadas (ρ, v, θ, w) , donde $\rho = 1/r = (\mathbf{x}^t M_1 \mathbf{x})^{-1/2}$ y las variables v, θ y w son definidas como antes, las ecuaciones de movimiento (2.32) en E_0 adquieren la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= -\rho v f(\theta), \\ \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + \tilde{U}(\theta)\right] 2f(\theta)f'(\theta) - \frac{vw}{2}f(\theta) + \tilde{U}'(\theta)f^2(\theta). \end{aligned} \quad (2.36)$$

La relación de energía (2.33) para $h = 0$ está dada por

$$\frac{w^2}{2} + \frac{1}{2}v^2 f^2(\theta) - \tilde{U}(\theta)f^2(\theta) = 0, \quad \rho > 0. \quad (2.37)$$

Definimos la variedad del infinito N_0 como

$$N_0 = \{(\rho, v, \theta, w) : \rho = 0, \frac{w^2}{2} + \frac{1}{2}v^2 f^2(\theta) - \tilde{U}(\theta)f^2(\theta) = 0\}, \quad (2.38)$$

donde $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En este caso, N_0 es idéntica a la variedad de colisión total Λ definida en (2.34). Además los flujos en N_0 y Λ son exactamente iguales, y por tanto las propiedades estudiadas en la sección 2.2.4 se aplican también a la variedad del infinito.

Una observación importante es que la relación de energía (2.37) no depende de ρ . Esto significa que si conocemos el flujo en N_0 , entonces también conocemos el flujo en $E_0 \cup N_0$ dado que ρ se obtiene por integración de la primera ecuación en (2.36). En otras palabras, las órbitas en E_0 se obtienen

levantando las órbitas de N_0 en la dirección radial. Cuando esto sucede decimos que el flujo global de E_0 es proyectable en N_0 .

En resumen, el nivel de energía cero E_0 tiene dos variedades invariantes en su frontera: Λ y N_0 . El flujo en el nivel de energía extendido $E_0 \cup \Lambda \cup N_0$ es proyectable a su frontera Λ o N_0 , en dirección de las coordenadas r o ρ , respectivamente.

La proyectabilidad del flujo permite estudiar órbitas en E_0 muy especiales, como son aquellas cuya proyección a N_0 o Λ son los puntos de equilibrio $(0, v_0, \theta_0, 0)$, donde $v_0 = \pm \sqrt{2\tilde{U}(\theta_0)}$ y θ_0 es un punto crítico del potencial \tilde{U} . Estas órbitas de E_0 se llaman soluciones homotéticas, y como dice su nombre, las configuraciones en todo tiempo son homotecias de una misma. Observemos que las dos últimas componentes del campo vectorial (2.36) se anulan en $(0, v_0, \theta_0, 0)$; de aquí se concluye que el plano r - v , que contiene a los puntos en cuestión, es invariante bajo el flujo. De hecho, sustituyendo $w = 0$ y $\theta = \theta_0$ en la relación de energía (2.37), obtenemos

$$v^2(s) \equiv \tilde{U}(\theta_0),$$

de donde concluimos que el plano r - v está constituido únicamente por órbitas homotéticas, cada una de las cuales une las variedades Λ y N_0 . Para $v_0 > 0$, estas órbitas nacen en Λ y escapan al infinito con velocidad radial constante v_0 ; la coordenada radial se obtiene de la primera ecuación en (2.32)

$$r(s) = c e^{v_0 f(\theta_0) s}, \quad (2.39)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante positiva que depende de las condiciones iniciales.

En lo que resta de esta sección analizamos el flujo global en el nivel de energía E_0 , para la gráfica U_5 del potencial. Con este potencial se observa claramente que tan diferente y complicada puede ser la dinámica en un problema cargado. La gráfica U_5 requiere que $\lambda_{34} < 0$, $\lambda_{12} > 0$ y $\lambda_{13} > 0$, lo cual implica repulsión entre las partículas 3 y 4 y atracción entre las otras dos.

Sea φ_1 una órbita en el nivel de energía E_0 , cuya proyección a la variedad de colisión total Λ_5 , está dada por la curva σ_1 (Figura 4). Haciendo $s^* = -s$ tenemos que $\frac{d\rho}{ds^*} = \rho' = \rho v f(\theta)$. Dado que φ_1 está definida para todo tiempo, y en cualquier punto de ella se tiene $\rho > 0$, $v < 0$ y $f > 0$, entonces

$\rho'(s^*) < 0$, es decir, $\rho(s^*)$ es una función decreciente para toda $s^* \in \mathbb{R}$. Esto implica necesariamente que $\lim_{s^* \rightarrow \infty} \rho(s^*) = 0$.

Entonces $\lim_{s^* \rightarrow \infty} \rho(s^*) = 0$. Esto se demuestra, por contradicción, suponiendo que $\rho(s^*) \rightarrow \mu > 0$ cuando $s^* \rightarrow \infty$; de aquí se sigue que $\rho' \rightarrow \mu v_0 f(\theta_0) < 0$, implicando a su vez, que la órbita φ_1 empieza en N_0 (este tipo de órbitas se conocen como órbitas de captura). De la misma manera probamos que φ_1 termina en Λ_5 (órbita de colisión), esto es, φ_1 es una órbita de captura-colisión.

Lo anterior significa que la órbita φ_1 contenida en el nivel de energía E_0 , viene de infinito sin producirse ninguna colisión binaria, y muere finalmente en colisión total. Físicamente, por la combinación de fuerzas atractivas y repulsivas entre partículas, existe un tiempo a partir del cual las partículas 1 y 2 están cada vez más cerca sin colisionar, mientras que las partículas 3 y 4 tiene un movimiento pulsante; al final de la trayectoria, las cuatro partículas colisionan simultáneamente (Figura 4). Para la órbita φ_2 en E_0 cuya proyección en Λ_5 es σ_2 , el movimiento también termina en colisión total, pero antes de que esto suceda, las partículas 1 y 2 colisionan un número infinito de veces.

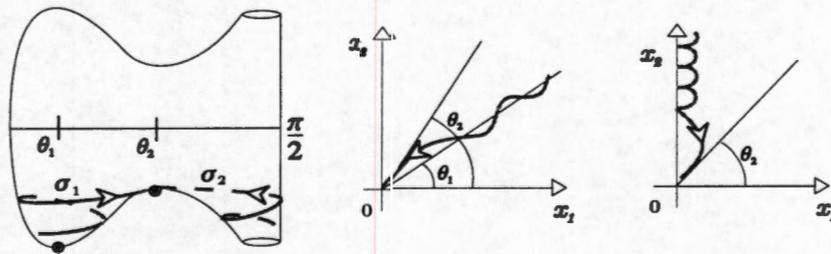


Figura 4. Órbitas en E_0 proyectadas a Λ_5 .

En general, por la proyectabilidad del flujo, existe una subvariedad invariante en E_0 que agrupa a todas las soluciones que conectan a los puntos de equilibrio de N_0 y Λ . En la Figura 5 mostramos una de estas subvariedades cuyas órbitas son proyectables sobre la órbita $\sigma \in \Lambda_5$; empiezan en colisión total y terminan escapando al infinito.

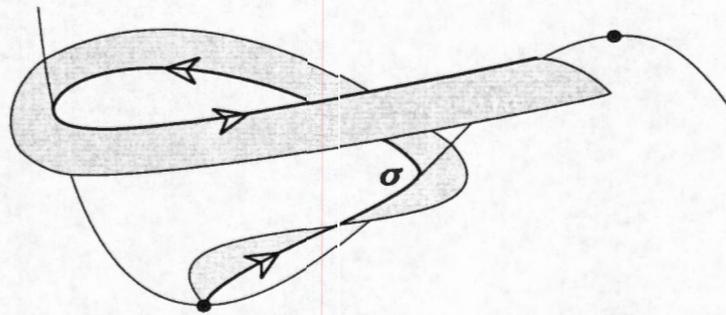


Figura 5. Variedad invariante en E_0 proyectable a $\sigma \in \Lambda_5$.

Capítulo 3

Configuraciones Centrales

3.1 Aspectos Generales

En el problema Newtoniano de los n -cuerpos, las configuraciones centrales representan posiciones especiales del sistema de partículas que generan diferentes tipos de soluciones particulares y explícitas; estas soluciones se obtienen mediante homotecias y/o rotaciones de una configuración central. En lo que sigue analizaremos las configuraciones centrales en el contexto de los problemas cargados.

Definición 3.1.1. *Un punto $\mathbf{x} \in X$ es una configuración central (C.C.) si existe algún escalar λ , tal que*

$$M^{-1}\nabla U(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x} = 0. \quad (3.1)$$

Donde como es usual $M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n\}$ es la matriz de masas del sistema. Usando las ecuaciones de movimiento (2.4) en la ecuación (3.1), se sigue que en una C.C., el vector aceleración de cada partícula es proporcional a su posición, y la constante de proporcionalidad es la misma para las n partículas.

Si definimos $L(\mathbf{x}, \lambda) = M^{-1}\nabla U(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}$, entonces las C.C. son las soluciones de la ecuación $L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$. Notemos que las soluciones de la ecuación algebraica (3.1) pueden agruparse en clases de equivalencia, considerando homotecias y rotaciones como relación de equivalencia, es decir, si $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ es una C.C., entonces por razones de homogeneidad

cualquier homotecia de \mathbf{x} también es una C.C., pues $L(\mathbf{x}, \mu) = 0$ implica $L(k\mathbf{x}, \mu k^{-3}) = 0$, para cualquier $k > 0$. Además, toda rotación de \mathbf{x} alrededor del centro de masa también es una C.C., ya que $L(R\mathbf{x}, \lambda) = RL(\mathbf{x}, \lambda) = 0$ para toda $R \in SO(3)$. Así, el problema de encontrar C.C. se reduce a sus clases de equivalencia.

Interpretación variacional Una versión equivalente y muy útil de las C.C. es su interpretación variacional. Sin pérdida de generalidad fijamos el tamaño de las C.C. considerando sólo aquellas contenidas en la esfera unitaria

$$S = \{\mathbf{x} \in X; \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1, \sum m_i \mathbf{x}_i = 0\}, \quad (3.2)$$

donde la métrica está dada por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = u^t M v.$$

En lo que sigue mostraremos que el gradiente del potencial U restringido a la esfera S es un campo vectorial definido en S , más aún, los puntos de equilibrio del flujo definido en $\nabla U|_S$ son precisamente las C.C. del problema cargado de los n -cuerpos. Para demostrar lo anterior, definimos

$$F = M^{-1} \nabla U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) \mathbf{x},$$

entonces el Teorema de Euler para funciones homogéneas implica

$$\langle \mathbf{x}, F(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{x}^t \nabla U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) = -U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S,$$

es decir, F es tangente a la esfera S . Por otra parte, dado que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para toda $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}S$, entonces el producto $\langle F(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$ se reduce a la expresión $DU(\mathbf{x})\mathbf{v}$. Lo anterior prueba que $F(\mathbf{x}) = \nabla U|_S$. Para concluir, aplicamos el Teorema de Euler al producto de $\mathbf{x}^t M$ con la ecuación (3.1), entonces

$$\lambda = -\frac{U(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^t M \mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

Entonces para $\mathbf{x} \in S$ se cumple que \mathbf{x} es una C.C., si y sólo si, $\nabla U|_S(\mathbf{x}) = 0$.

Lema 3.1.2. *Las configuraciones centrales son puntos críticos del potencial restringido $U|_S$, o equivalentemente, son puntos de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \nabla U|_S$.*

3.1.1 Puntos de equilibrio

En el problema clásico de los n -cuerpos es claro que la naturaleza atractiva de la fuerza gravitacional, impide la existencia de puntos de equilibrio en las ecuaciones de movimiento. En cambio, en el problema cargado de los n -cuerpos puede ser posible, en principio, que la fuerza gravitacional atractiva y la fuerza Coulombiana repulsiva se anulen mutuamente, dando lugar a la existencia de soluciones (\mathbf{x}, \mathbf{p}) , que anulan el campo vectorial (2.4). Entonces las soluciones en equilibrio de un problema cargado son los puntos que resuelven el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{p} = 0, \quad \nabla U(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.4)$$

Una solución trivial de (3.4) se obtiene escogiendo masas y cargas de tal manera que todos los parámetros λ_{ij} son nulos, lo cual da lugar a un sistema inerte donde la fuerza resultante entre cualesquiera dos partículas es siempre cero.

El caso donde los parámetros λ_{ij} son no nulos es más interesante. Supongamos que (\mathbf{x}, \mathbf{p}) es una solución del sistema (3.4), lo cual equivale a decir que (\mathbf{x}, \mathbf{p}) es una solución de las ecuaciones de movimiento (2.4) que no depende del tiempo. Entonces, para esta solución, el momento de inercia $I(\mathbf{x})$ es constante y la energía cinética $T(\mathbf{p})$ es cero. Por consecuencia, la identidad de Lagrange-Jacobi (2.12) implica $U(\mathbf{x}) = 0$. Entonces (3.1) y (3.3) implican que \mathbf{x} es una C.C. Lo contrario también es cierto, es decir, las C.C. con energía cinética y potencial nulas son puntos de equilibrio. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3. *Los puntos de equilibrio (\mathbf{x}, \mathbf{p}) del problema cargado de los n -cuerpos están dados por*

$$U(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{p} = 0, \quad (3.5)$$

es decir, los puntos de equilibrio son configuraciones centrales con energía cinética y potencial nulas.

Ejemplo 3.1.4. *Puntos de equilibrio en el problema cargado de los 3 cuerpos.* Las ecuaciones $\nabla U(\mathbf{x}) = 0$ y $U(\mathbf{x}) = 0$ de (3.5), para un conjunto dado de 3 partículas en la posición $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{R}^6$, se escriben como

$$\nabla_1 U(\mathbf{x}) = \lambda_{12} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r_{12}^3} + \lambda_{13} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{r_{13}^3} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla_2 U(\mathbf{x}) = \lambda_{12} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}^3} + \lambda_{23} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{r_{23}^3} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla_3 U(\mathbf{x}) = \lambda_{13} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{r_{13}^3} + \lambda_{23} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{r_{23}^3} = 0 \quad (3.8)$$

$$U(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_{12}}{r_{12}} + \frac{\lambda_{13}}{r_{13}} + \frac{\lambda_{23}}{r_{23}} = 0. \quad (3.9)$$

Dado que la ecuación (3.8) se obtiene sumando las dos ecuaciones anteriores, la omitiremos en adelante. Las ecuaciones (3.6) y (3.7) se pueden escribir como

$$\frac{\lambda_{12}}{r_{12}^3} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \frac{\lambda_{13}}{r_{13}^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) = \frac{\lambda_{23}}{r_{23}^3} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2). \quad (3.10)$$

Entonces los vectores $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ y $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$ son paralelos, en otras palabras, la configuración \mathbf{x} es colineal. Supongamos una configuración colineal $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x_1 < x_2 < x_3$, entonces (3.10) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{\lambda_{12}}{r_{12}^2} = -\frac{\lambda_{13}}{r_{13}^2} = \frac{\lambda_{23}}{r_{23}^2}.$$

De esta manera, el sistema (3.6)-(3.9) se simplifica notablemente a un sistema de ecuaciones escalares fácil de resolver:

$$\lambda_{12} = -\frac{\lambda_{13}}{R_{13}^2} = \frac{\lambda_{23}}{R_{23}^2}, \quad (3.11)$$

$$\lambda_{12} + \frac{\lambda_{13}}{R_{13}} + \frac{\lambda_{23}}{R_{23}} = 0, \quad (3.12)$$

donde $R_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{12}}$. Además, la colinealidad de la configuración implica que $R_{13} = 1 + R_{23}$, entonces la solución del sistema (3.11)-(3.12) está dada por

$$R_{23} = \sqrt{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}}, \quad R_{13} = 1 + R_{23}, \quad (3.13)$$

para masas y cargas tales que

$$\sqrt{-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}}. \quad (3.14)$$

En conclusión, el problema cargado de los 3 cuerpos con masas y cargas que satisfacen (3.14), tiene puntos de equilibrio (\mathbf{x}, \mathbf{p}) en sus ecuaciones de movimiento; las configuraciones de estos puntos son configuraciones centrales colineales \mathbf{x} cuyas distancias relativas están dadas en (3.13).

3.2 Un continuo de configuraciones centrales

El problema romboidal analizado en la sección 2.2 nos proporciona información interesante sobre configuraciones centrales en problemas cargados. El problema romboidal es un caso particular del problema cargado de los 4 cuerpos, en el que las simetrías implicadas permiten encontrar todas las configuraciones centrales para cada selección de parámetros.

Según el Lema 3.1.2, las C.C. son puntos críticos del potencial U restringido a la superficie $\mathbf{x}^t M \mathbf{x} = 1$, la cual en coordenadas de McGehee está dada por la ecuación $r = 1$. En estas coordenadas, el potencial sobre la esfera unitaria $r = 1$ reduce su expresión a una función en una variable $\tilde{U} : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{U}(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{8\lambda_{13}}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\lambda_{34}}{\sin \theta} \right].$$

Entonces las C.C. en el problema romboidal cargado se obtienen de los puntos críticos de \tilde{U} , los cuales ya fueron analizados en la sección 2.2.3. En el caso genérico $\lambda_{12} \neq 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, los puntos críticos de $\tilde{U}(\theta)$ están dados por los ceros de la función $g(\theta)$ en (2.26),

$$g(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{(\alpha + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\tan^3 \theta}, \quad \theta \in (0, \pi/2),$$

donde los parámetros β y k están definidos en (2.24). De esta manera, analizando las propiedades de g obtenemos todas sus raíces; o equivalentemente, una clasificación completa de los puntos críticos de \tilde{U} cuyo resultado se muestra en la Proposición 2.2.1. Como consecuencia directa obtenemos una clasificación de las C.C. descrita en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *En el problema romboidal cargado con $\lambda_{34} \neq 0$ y $\lambda_{12} \neq 0$, existen 0, 1, o 2 configuraciones centrales.*

El estudio anterior no incluye los casos no genéricos donde $\lambda_{12} = 0$ y/o $\lambda_{34} = 0$. Estos parámetros están relacionados con las singularidades por colisión doble; el parámetro $\lambda_{12} < 0$ significa que las partículas 1 y 2 se repelen, haciendo imposible que se produzca una colisión binaria entre ellos; el parámetro $\lambda_{12} > 0$ significa que las partículas se atraen y chocan constantemente; finalmente, el caso intermedio $\lambda_{12} = 0$ significa que la fuerza gravitacional de atracción se cancela con la fuerza repulsiva Coulombiana, entonces esta aniquilación de fuerzas entre las partículas 1 y 2 hace que se produzcan colisiones sin que ello implique singularidad alguna en las ecuaciones de movimiento. Casos degenerados como este último son los que ocuparán nuestra atención en lo que resta del capítulo.

Para estudiar las C.C. en los casos degenerados supondremos primero que sólo uno de los parámetros λ_{12} o λ_{34} es cero, y posteriormente analizaremos el caso en que ambos son nulos. Entonces supongamos que $\lambda_{12} = 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, lo cual implica que las partículas 1 y 2 que se encuentran sobre la diagonal horizontal del rombo colisionan sin ocasionar singularidades. Esta circunstancia hace que la variable θ extienda su intervalo de definición a $(0, \pi/2]$, el nuevo valor $\theta = \pi/2$ significa precisamente que las dos partículas mencionadas colisionan. La derivada de $\tilde{U}(\theta)$ se escribe como sigue

$$\frac{d\tilde{U}}{d\theta} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \lambda_{34} \cos \theta \left[\frac{k \operatorname{sen} \theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right],$$

donde $\theta \in (0, \pi/2]$. Una raíz de esta función es el valor extendido $\theta = \pi/2$, esto implica que para la selección de parámetros que estamos considerando ($\lambda_{12} = 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$), la colisión doble entre las partículas 1 y 2 no sólo no representa singularidad alguna, sino que además es una C.C.!

Dada la carencia de fuerza entre las partículas que colisionan, es válido considerarlas como si fueran una sola partícula en el momento del choque binario, lo cual nos permite decir que una C.C. en el problema romboidal cargado con partículas en colisión doble puede interpretarse como una C.C. en el problema colineal de 3 cuerpos.

La derivada de \tilde{U} tiene una segunda raíz en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$, pero sólo si el parámetro k es mayor que 1. Entonces el número total de puntos críticos del potencial \tilde{U} varía entre 1 y 2. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. *En el problema romboidal cargado, si las masas y cargas son tales que $\lambda_{12} = 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, entonces el número de configuraciones centrales varía entre 1 y 2; una de ellas con dos partículas en colisión binaria, y la otra existe sólo si $k > 1$.*

Por (2.24), las 2 configuraciones centrales de la Proposición 3.2.2 requieren que $0 < \alpha < 1$, es decir, las masas en la diagonal vertical del rombo son menores que las otras dos masas, además las partículas adyacentes se atraen (repelen), las partículas opuestas en la diagonal vertical se repelen (atraen), y las partículas en la diagonal horizontal no interaccionan entre si.

Para $\lambda_{34} = 0$ y $\lambda_{12} \neq 0$, las simetrías propias del movimiento romboidal hacen que el análisis sea similar al caso anterior, y lo omitiremos.

Finalmente, sea $\lambda_{34} = 0$ y $\lambda_{12} = 0$, el caso doblemente degenerado. En esta situación, las masas y cargas son tales que la fuerza resultante a lo largo de ambas diagonales del rombo es cero, persistiendo únicamente la fuerza que va en dirección de los lados de dicha figura. Esta doble anulación de fuerzas tiene el efecto de producir colisiones binarias en ambas diagonales del rombo, sin que ello implique singularidad alguna; esto extiende el intervalo de definición de la variable angular θ al intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. Como en los casos anteriores, las C.C. están dadas por los puntos críticos del potencial $\tilde{U}(\theta)$, es decir, por las raíces de la derivada de \tilde{U} ,

$$\frac{d\tilde{U}}{d\theta} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{8\lambda_{13} (\alpha - 1) \sin \theta \cos \theta}{(c\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

donde $\theta \in [0, \pi/2]$.

Adicionalmente, supondremos que $\lambda_{13} \neq 0$, pues lo contrario implica un caso trivial donde todas las fuerzas se anulan. Observemos en la derivada de \tilde{U} que el valor $\alpha = 1$ es especialmente degenerado, ya que cualquier valor de la variable θ representa un punto crítico del potencial \tilde{U} . Dado que $\tilde{U}'(\theta) \equiv 0$ para toda $\theta \in [0, \pi/2]$, entonces *para esta selección de parámetros, cualquier configuración romboidal constituye una C.C., en otras palabras, existe un continuo de C.C. parametrizado por la variable angular θ en todo el intervalo $[0, \pi/2]$.*

Recordemos que $\alpha = 1$ significa que las cuatro masas tienen el mismo valor, esto en combinación con los parámetros nulos $\lambda_{34} = 0$ y $\lambda_{12} = 0$

implica en las masas que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, y en las cargas $q_1 = q_2 = m$, $q_3 = q_4 = -m$, para cualquier m positiva. Esta selección de parámetros es realmente degenerada, ya que la fuerza gravitacional de atracción se anula con la fuerza Coulombiana de repulsión entre las dos parejas de partículas que se mueven sobre las diagonales del rombo. Las ecuaciones de movimiento (2.14) se reducen a un problema de Kepler Newtoniano o Coulombiano dependiendo del signo de λ_{13} .

Teorema 3.2.3. *En el problema romboidal cargado, para cualquier valor positivo m , existe un continuo de configuraciones centrales con masas $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ y cargas $q_1 = q_2 = m$, $q_3 = q_4 = -m$.*

Esto es realmente notable si consideramos que en el problema clásico de los n -cuerpos, aún se desconoce para $n \geq 4$, si el número de C.C. para un conjunto dado de masas es finito o no. Este planteamiento es uno de los grandes problemas no resueltos de la Mecánica Clásica, Wintner en [24] conjetura que este número es finito para cualesquiera masas. En el caso más simple $n = 4$, las pruebas numéricas realizadas en diferentes partes del mundo parecen confirmar la finitud de las C.C. Sin embargo, esto continúa siendo un problema abierto. Nuestro resultado del continuo de C.C. no contradice la conjetura de Wintner, pues estamos ante problemas diferentes, pero si nos permite comprender mejor esta problemática en un contexto más general.

Resumiendo los resultados de esta sección tenemos lo siguiente.

Corolario 3.2.4. *Para cualquier punto en el espacio de parámetros en el problema romboidal cargado de los 4 cuerpos, genéricamente existen 0, 1, o 2 configuraciones centrales. Para algunos casos degenerados tenemos un continuo de configuraciones centrales.*

3.3 Familias de continuos de configuraciones centrales

En esta sección construimos familias de continuos de C.C., que en algún sentido constituyen una generalización natural del ejemplo estudiado en la sección previa. En esta generalización del modelo romboidal estudiamos el problema de los dos polígonos concéntricos con una partícula adicional en el

centro, es decir, un problema cargado particular de $n_1 + n_2 + 1$ partículas puntuales, donde las primeras n_1 y las siguientes n_2 se encuentran formando dos polígonos regulares: el n_1 -polígono y el n_2 -polígono, respectivamente; ambos con un centro común donde se localiza estratégicamente una de las partículas.

Nuestro principal resultado es que bajo algunas hipótesis adicionales en los parámetros, obtenemos familias de continuos de C.C. cuando rotamos el primer n_1 -polígono con respecto al segundo n_2 -polígono. Más adelante veremos que el continuo de C.C. que hemos encontrado en la sección previa para el problema romboidal cargado de 4 cuerpos, no pertenece a la nueva clase de continuos de C.C., ya que $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$.

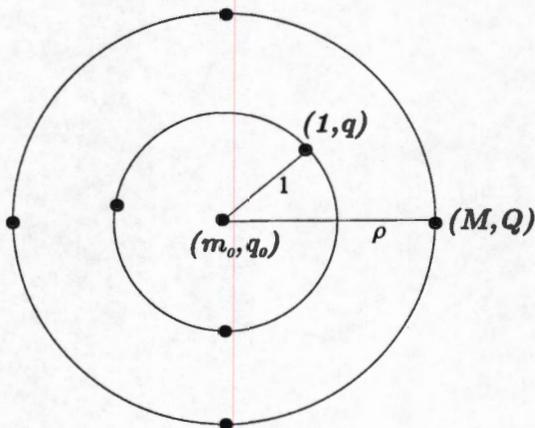


Figura 6. Polígonos concéntricos con una partícula en el centro.

Consideremos n_1 partículas puntuales localizadas en los vértices de un n_1 -polígono regular, y n_2 partículas puntuales localizadas en los vértices de un n_2 -polígono regular, con $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$; en el origen (centro de masas), colocamos una partícula con masa m_0 y carga q_0 . Suponemos sin pérdida de generalidad que las primeras n_1 partículas tienen posiciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1}$, distribuidas uniformemente en un círculo de radio 1; todas ellas tienen masa 1 y carga q . Las otras n_2 -partículas están distribuidas uniformemente en un círculo de radio ρ , con posiciones en $\mathbf{x}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{x}_{n_1+n_2}$, con masa M y carga Q . Ver Figura 6.

Suponemos los parámetros de manera que

$$M - qQ = 0, \quad (3.15)$$

en otras palabras, suponemos que entre cualesquiera dos partículas de polígonos diferentes se anula la fuerza gravitacional atractiva con la fuerza Coulombiana repulsiva. La relación (3.15) implica $M^2 - Q^2 = -\frac{M^2}{q^2}(1 - q^2)$, es decir, los parámetros $M^2 - Q^2$ y $1 - q^2$ tienen signos diferentes. Esto implica que si las partículas de un polígono se atraen, entonces las partículas del otro polígono se repelen.

La función potencial está dada por

$$U = \sum_{k \in A} \frac{m_0 - q_0 q}{r_{k0}} + \sum_{k \in B} \frac{m_0 M - q_0 Q}{r_{k0}} + \sum_{j < k}^A \frac{1 - q^2}{r_{jk}} + \sum_{j < k}^B \frac{M^2 - Q^2}{r_{jk}}, \quad (3.16)$$

donde $r_{jk} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|$, \sum^A significa una suma para $j, k \in A = \{1, \dots, n_1\}$ y \sum^B significa una suma para $j, k \in B = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$. Las C.C. de los polígonos concéntricos están dadas por la ecuación (3.1), es decir,

$$\nabla_k U - \lambda m_k \mathbf{x}_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_1 + n_2. \quad (3.17)$$

Por las simetrías propias de este problema, la suma de fuerzas que ejercen las partículas de cada polígono sobre la partícula central ($k = 0$), como es de esperarse es cero; esto implica que $\nabla_0 U = 0$. Además $\mathbf{x}_0 = 0$, entonces (3.17) se cumple trivialmente para $k = 0$.

Para $k = 1, \dots, n_1 + n_2$, el sistema de ecuaciones (3.17) es más complejo, por lo cual primero realizaremos una serie de simplificaciones en el gradiente $\nabla_k U$ aprovechando las simetrías. Dado que $\nabla_k U$ representa la fuerza resultante ejercida sobre la partícula que se halla en el vértice \mathbf{x}_k en cualquiera de los dos polígonos, entonces

$$\nabla_k U = (m_k^2 - q_k^2) \sum_{j \neq k} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{jk}^3} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k}{r_{0k}^3}, \quad (3.18)$$

donde $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. La sumatoria en (3.18) representa la fuerza total ejercida sobre la partícula en \mathbf{x}_k por las demás partículas del mismo polígono; recordemos que las partículas del otro polígono no interactúan con ella. Entonces los índices j y k de la sumatoria pertenecen al conjunto

$\{1, \dots, n_1\}$, o bien, al conjunto $\{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$ dependiendo de cual sea el polígono que contiene a \mathbf{x}_k . El segundo término en (3.18) representa la influencia de la partícula central.

Sea \mathbf{u}_k el vector unitario que va en dirección de \mathbf{x}_k a \mathbf{x}_0 , entonces

$$\mathbf{u}_k = -\frac{\mathbf{x}_k}{r},$$

donde r es el radio de la circunferencia que contiene a \mathbf{x}_k , es decir, $r = 1$ si $k \in \{1, \dots, n_1\}$, o bien, $r = \rho$ si $k \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$.

Lema 3.3.1. *La ecuación del gradiente dada por (3.18) puede ser escrita como*

$$\nabla_k U = (m_k^2 - q_k^2) \sum_{j \neq k} \frac{\cos \alpha_{jk} \mathbf{u}_k}{r_{jk}^2} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{\mathbf{u}_k}{r^2}, \quad (3.19)$$

donde $\alpha_{jk} = \text{ang}\{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k\}$.

Demostración. Es suficiente mostrar que (3.18) puede modificarse sustituyendo el vector $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ de la sumatoria, por su proyección al vector unitario \mathbf{u}_k . Para esto, descomponemos $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ en su componente radial $\mathbf{r} = r_{jk} \cos \alpha_{jk} \mathbf{u}_k$ y su componente tangencial \mathbf{t} . Entonces la simetría del problema implica que para \mathbf{x}_j existe \mathbf{x}'_j en el mismo polígono localizado simétricamente respecto a \mathbf{x}_k (Figura 7), entonces las componentes tangenciales \mathbf{t} y \mathbf{t}' se cancelan mutuamente. Respecto al último término en (3.18), sustituimos $\mathbf{x}_0 = 0$, $\mathbf{x}_k = -r \mathbf{u}_k$ y $r_{0k} = r$. Esto prueba el resultado, dado que la descomposición anterior es independiente de la circunferencia que contiene a los vectores \mathbf{x}_j y \mathbf{x}_k . \square

Sea T el triángulo con vértices en $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_j$ y \mathbf{x}_k , entonces aplicando la ley de los cosenos con respecto al ángulo α_{jk} , obtenemos la expresión

$$\cos \alpha_{jk} = \frac{r_{jk}}{2r}.$$

De esta manera, las ecuaciones (3.17) de las C.C. adquieren una expresión simplificada, dada por

$$\left((m_k^2 - q_k^2) \sum_{j \neq k} \frac{1}{2 r r_{jk}} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{1}{r^2} + \lambda m_k r \right) \mathbf{u}_k = 0, \quad (3.20)$$

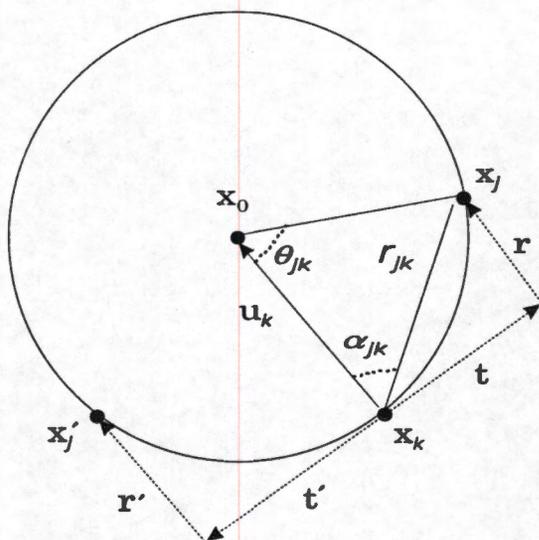


Figura 7. Descomposición del vector $x_j - x_k$.

donde $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. Para continuar simplificando aplicamos nuevamente la ley de los cosenos en el triángulo T con vértices en x_0, x_j y x_k , pero esta vez usando el ángulo central θ_{jk} , esto es, el ángulo interior de T correspondiente al centro de la circunferencia; entonces

$$r_{jk} = r \sqrt{2 - 2 \cos \theta_{jk}}.$$

Para cualquier k fijo definimos

$$s_j = \sqrt{2 - 2 \cos \theta_{jk}},$$

entonces (3.20) se escribe como

$$\left((m_k^2 - q_k^2) \frac{1}{2r^2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{s_j} + (m_0 m_k - q_0 q_k) \frac{1}{r^2} + \lambda m_k r \right) u_k = 0, \quad (3.21)$$

donde $k = 1, \dots, n_1 + n_2$. Este sistema de ecuaciones que determina las C.C. en el sistema de polígonos anidados, se resuelve fácilmente analizando la sumatoria que aparece en (3.21). Definimos como S_{n_1} , la sumatoria en (3.21) para $k = 1, \dots, n_1$; esta expresión representa la suma de inversos de distancias entre la partícula k y todas las demás partículas del n_1 -polígono. Dado que las partículas involucradas en esta suma se encuentran sobre los

vértices de un n_1 -polígono regular, entonces la sumatoria S_{n_1} en realidad no depende de la partícula usada como pivote para medir las distancias, es decir, para $k = 1, \dots, n_1$ la suma en (3.21) tiene un valor constante S_{n_1} . Por lo tanto, las primeras n_1 ecuaciones en (3.21) son reducidas a una sola; considerando que $m_k = 1$, $q_k = q$ y $r = 1$, obtenemos

$$\frac{1}{2}(1 - q^2)S_{n_1} + (m_0 - q_0q) + \lambda = 0.$$

Para $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ procedemos análogamente. Sea S_{n_2} la sumatoria en (3.21) para $k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, esto es, la suma de las distancias inversas entre la partícula k -ésima y todas las demás partículas contenidas en un n_2 -polígono inscrito sobre una circunferencia de radio 1. Nuevamente, por simetría, S_{n_2} es independiente de la partícula usada como pivote. En este caso $m_k = M$, $q_k = Q$ y $r = \rho$. Con lo anterior, las siguientes n_2 ecuaciones en (3.21) también son reducidas a sólo una,

$$\frac{1}{2}(M^2 - Q^2)S_{n_2} + (m_0M - q_0Q) + \lambda M \rho^3 = 0.$$

Resumiendo, el sistema de ecuaciones (3.21) que determina las C.C. es equivalente a las dos ecuaciones escalares dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - q^2)S_{n_1} + (m_0 - q_0q) + \lambda &= 0, \\ \frac{1}{2}(M^2 - Q^2)S_{n_2} + (m_0M - q_0Q) + \lambda M \rho^3 &= 0. \end{aligned}$$

Definiendo los parámetros A y B como

$$\begin{aligned} A(m_0, q_0, M, q, n_1) &= \frac{1}{2}(1 - q^2)S_{n_1} + (m_0 - q_0q), \\ B(m_0, q_0, M, Q, n_2) &= \frac{1}{2}(M^2 - Q^2)S_{n_2} + (m_0M - q_0Q), \end{aligned} \tag{3.22}$$

concluimos que las C.C. en el sistema de polígonos anidados son las raíces positivas del polinomio cúbico en ρ :

$$AM\rho^3 - B = 0. \tag{3.23}$$

Las raíces se consideran positivas porque ρ es el radio de uno de los polígonos, entonces la ecuación (3.23) tiene exactamente una raíz positiva, y esto sucede

cuando los parámetros A y B tienen el mismo signo. Dado que las partículas de un polígono no interaccionan con las partículas del otro polígono, pues la fuerza gravitacional de atracción se anula con la fuerza Coulombiana de repulsión, entonces la única solución en (3.23) es independiente de la posición que guarda un polígono respecto del otro, por consecuencia, esta solución del polinomio cúbico genera un continuo de C.C. cuando hacemos rotar el n_1 -polígono respecto del n_2 -polígono. Con esto hemos demostrado el siguiente resultado que representa una de las principales aportaciones de esta tesis.

Teorema 3.3.2. *En el problema cargado de los $n_1 + n_2 + 1$ cuerpos, con $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$, si las masas y cargas son tales que A y B tienen el mismo signo, entonces los dos polígonos concéntricos generan un continuo de configuraciones centrales.*

La construcción de polígonos concéntricos con una partícula en el centro y fuerzas que se anulan es una generalización de las ideas empleadas en el problema romboidal cargado, donde existe un caso realmente excepcional que degenera en un continuo de C.C. parametrizado por una variable angular; este continuo mantiene algunas semejanzas y diferencias respecto del continuo que estamos presentando en esta sección. En el caso romboidal tenemos el mínimo número de partículas necesarias para generar continuos de C.C., ya que en el problema cargado de los 3-cuerpos, este número siempre es finito, ver [19]. Esto nos dice que a pesar de la presencia de las masas y las cargas, no basta con tener muchos parámetros para generar continuos de C.C., sino que un aspecto muy importante se refiere a las simetrías que podemos formar con las partículas.

El problema romboidal cargado cuyas simetrías han sido fundamentales para obtener estos resultados, nos proporciona un excelente ejemplo que muestra que la conjetura de Wintner [24] sobre la finitud de las C.C. en el problema Newtoniano, no se cumple cuando estamos en un contexto más general como es el problema cargado de los 4-cuerpos.

Hasta lo que se conoce en este momento, en el problema romboidal cargado tenemos el modelo más simple con el menor número de partículas que genera continuos de C.C., esto entre las diversas generalizaciones del problema Newtoniano de los n -cuerpos. Otro ejemplo, el primero que se conoció corresponde a un problema de 5-cuerpos generalizado de tal manera que las masas pueden ser incluso negativas. En este problema, Roberts mostró que considerando una masa negativa, anulando algunas fuerzas y colocando las

partículas en una configuración simétrica, se puede obtener un continuo de C.C. [20].

Si bien los polígonos concéntricos son una generalización del problema romboidal cargado, el continuo hallado en este último no es un caso particular del obtenido en el problema de los polígonos. Para ver esto, es suficiente mostrar que la partícula ubicada en el centro común de los dos polígonos es indispensable para satisfacer la hipótesis del Teorema 3.3.2. Pero omitir la partícula central implica considerar $m_0 = q_0 = 0$, entonces los parámetros A y B en (3.22) tienen signos diferentes; esto es consecuencia directa del hecho que mientras en un polígono las partículas se atraen, en el otro se repelen. Por lo tanto, la ecuación (3.23) no tiene soluciones positivas cuando se omite la partícula central.

Ahora mostraremos que la hipótesis del Teorema 3.3.2 se satisface para toda $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$. Esto se concluye al observar que si eliminamos la carga Q en (3.22) usando (3.15), entonces los parámetros A y B son positivos para cualesquiera $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$, $M > 0$, $q_0 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, siempre y cuando la masa central m_0 sea lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad

$$m_0 > \max \left\{ \frac{q_0}{q} + (1 - q^2) \frac{MS_{n_2}}{2q^2}, \frac{q_0}{q} - (1 - q^2) \left(\frac{S_{n_1}}{2} + \frac{q_0}{q} \right) \right\}.$$

Dado que esto sucede para cualquier $n_1 \geq 2$ y $n_2 \geq 2$, entonces lo que tenemos es una familia de continuos de C.C. en los polígonos concéntricos, lo cual nos proporciona ejemplos que muestran la existencia de un número infinito no numerable de C.C. en el problema cargado de los n -cuerpos para $n \geq 5$. Estas familias junto con el ejemplo del problema romboidal nos llevan a concluir el siguiente resultado.

Corolario 3.3.3. *En el problema cargado de los n -cuerpos con $n \geq 4$, siempre es posible generar un continuo de C.C. escogiendo adecuadamente las masas y las cargas.*

Este resultado complementa el trabajo de Pérez-Chavela et al [19], donde se estudia con detalle el problema cargado de los 3-cuerpos.

Capítulo 4

Estabilidad de Equilibrios Relativos

Introducción

En esta sección estamos interesados en hallar soluciones periódicas del problema cargado de los n -cuerpos, y analizar su estabilidad. El tipo de soluciones periódicas que estudiaremos a continuación son las llamadas soluciones de equilibrio relativo; en el problema Newtoniano de los n -cuerpos se obtienen por rotación rígida de configuraciones centrales planares alrededor del centro de masa; estas soluciones en un sistema de coordenadas rotatorias uniformes se convierten en puntos de equilibrio del espacio fase, y el análisis de su estabilidad nos proporciona la dinámica existente a su alrededor. Desafortunadamente, no son puntos de equilibrio hiperbólicos, lo cual hace que sea extremadamente complicado determinar su estabilidad. Por tal razón, se introduce un concepto débil de estabilidad llamado estabilidad espectral, el cual consiste en obtener los valores propios de la parte lineal del campo vectorial en el equilibrio relativo.

4.1 Definición y aspectos generales

Sea $R(\theta)$ la matriz $3n \times 3n$, diagonal por bloques, cuyos bloques están dados por la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el producto $R(\theta) \mathbf{x}$ tiene el efecto de rotar la configuración del sistema de partículas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$, alrededor del origen de coordenadas, es decir, alrededor del centro de masa. En las coordenadas

$$\mathbf{s} = R(\omega t) \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = R(\omega t) \mathbf{p}, \quad (4.1)$$

donde ω es la velocidad angular constante, las ecuaciones de movimiento del problema cargado de los n -cuerpos (2.4) se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= K\mathbf{s} + M^{-1}\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \nabla U(\mathbf{s}) + K\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $(\mathbf{s}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n} = Y$. Además, $K = R'(\omega t)R^{-1}(\omega t)$ es una matriz $3n \times 3n$, diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las nuevas coordenadas crean puntos de equilibrio en las ecuaciones de movimiento, los cuales representan soluciones periódicas en las coordenadas originales. Estos puntos de equilibrio están dados por los ceros del campo vectorial (4.2), es decir,

$$\nabla U(\mathbf{s}) - KMK\mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{y} = -MK\mathbf{s}.$$

Dado que $KM = MK$ y $K^2 = -\omega^2 E$, donde E es una matriz $3n \times 3n$, diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces los puntos de equilibrio del sistema (4.2) están dados por

$$\{(s, y) \in Y : M^{-1}\nabla U(s) + w^2 Es = 0, \quad y = -MKs\}. \quad (4.3)$$

Definición 4.1.1. Una configuración $s \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ se llama equilibrio relativo, si es una solución de la ecuación

$$M^{-1}\nabla U(s) + w^2 Es = 0. \quad (4.4)$$

El producto Es que aparece en la ecuación (4.4) representa la proyección del equilibrio relativo s al plano de rotación.

Proposición 4.1.2. En un problema cargado con $\lambda_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$, todos los equilibrios relativos son planares.

Demostración. Dado que en la ecuación (4.4), la matriz E anula la tercera coordenada de cada una de las componentes $s_k \in \mathbb{R}^3$ del equilibrio relativo $s = (s_1, \dots, s_n)$, entonces lo mismo sucede con las componentes del vector $M^{-1}\nabla U(s)$, es decir,

$$\nabla_k U(s) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Si ahora denotamos $s_k = (s_{k1}, s_{k2}, s_{k3}) \in \mathbb{R}^3$, entonces el sistema (4.5) implica

$$\sum_{j \neq k} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} (s_{j3} - s_{k3}) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Así, cuando todos los parámetros λ_{jk} son positivos, y escogemos a s_k como el punto más alejado del plano de rotación, se obtiene del sistema de ecuaciones (4.6) que $s_{13} = \dots = s_{n3}$, es decir, una configuración planar. \square

4.2 Relación con las configuraciones centrales

En el problema Newtoniano de los n -cuerpos, los equilibrios relativos y las configuraciones centrales planares son conceptos que van de la mano, la existencia de uno, implica la presencia del otro. Para comprender la relación que existe entre ambos conceptos, pero ahora, en el contexto del problema cargado de los n -cuerpos, a continuación deducimos una expresión escalar

que se obtiene de la ecuación que define a los equilibrios relativos (4.4). En esta dirección, el resultado de multiplicar $s^t M$ por (4.4) está dado por

$$s^t \nabla U(s) + w^2 s^t M E s = 0.$$

Adicionalmente, si aplicamos el Teorema de Euler en la expresión vectorial $s^t \nabla U(s)$, considerando que $U(s)$ es una función homogénea, con grado de homogeneidad -1 , obtenemos la relación $s^t \nabla U(s) = -U(s)$, entonces

$$w^2 = \frac{U(s)}{s^t M E s}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, todo equilibrio relativo cumple la condición $U(s) > 0$. Esta desigualdad se cumple trivialmente en los problemas Newtonianos donde el potencial es una función positiva, sin embargo, en los problemas cargados la situación es más compleja y el potencial puede tener cualquier signo.

Proposición 4.2.1. *En el problema cargado de los n -cuerpos, una condición necesaria para la existencia de un equilibrio relativo $s \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es que $U(s) > 0$.*

En cuanto a la forma geométrica de los equilibrios relativos, éstos pueden ser, en principio, planares y no planares. Así que para simplificar su estudio, el primer caso lo estudiamos en esta sección, y el segundo en la sección 4.3

Equilibrio relativo planar. Observemos que dada una configuración cualquiera $s = (s_{11}, s_{12}, s_{13}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}) \in \mathbb{R}^{3n}$, el producto $E s$, donde E es la matriz $3n \times 3n$ definida en la sección 4.1, está dado por la configuración planar $E s = (s_{11}, s_{12}, 0, \dots, s_{n1}, s_{n2}, 0)$. Entonces en el caso particular que s es una configuración planar caracterizada por $s_{13} = \dots = s_{n3} = 0$, deducimos inmediatamente que $E s = s$. Esta última expresión nos conduce, finalmente, a concluir que las soluciones planares de las ecuaciones (3.1) y (4.4) son exactamente las mismas, si $U(s) > 0$. En otras palabras, *las configuraciones centrales planares que cumplen la desigualdad $U(s) > 0$, constituyen el conjunto de todos los equilibrios relativos planares, o dicho de otra manera, todos los equilibrios relativos planares son configuraciones centrales.*

En el caso que todos los parámetros λ_{jk} son positivos (problema cargado atractivo), la Proposición 4.1.2 descarta la existencia de equilibrios relativos

no planares, ya que todos los equilibrios relativos son configuraciones centrales planares. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *En un problema cargado todo equilibrio relativo planar es una configuración central. Los equilibrios relativos no planares no existen si $\lambda_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$.*

En el caso general donde algunos parámetros λ_{jk} son negativos, puede suceder que no se cumpla la condición $U(s) > 0$ de la Proposición 4.2.1. En tal situación, es decir, cuando las C.C. son tales que $U(s) \leq 0$, significa que no existe el correspondiente equilibrio relativo. La explicación de este hecho radica en que la rotación de una configuración donde el potencial es negativo, genera una fuerza centrífuga que no tiene manera de ser equilibrada para crear órbitas periódicas, ya que la fuerza entre partículas es principalmente repulsiva.

Energía de un equilibrio relativo. Los resultados obtenidos en esta sección nos permiten conocer los niveles de energía en que se encuentran las soluciones de equilibrio relativo, en el caso más general del problema cargado de los n -cuerpos. Para esto, observemos que dichas soluciones en coordenadas rotatorias (4.1), están dadas por los puntos de equilibrio (4.3). La energía cinética T en tales coordenadas adquiere la forma

$$T = \frac{1}{2} y^t M^{-1} y;$$

en particular, $y = -MKs$ para un equilibrio relativo, entonces

$$T = \frac{1}{2} w^2 s^t M E s.$$

Usando (4.7), obtenemos la siguiente relación entre las energías cinética y potencial

$$T(y) = \frac{1}{2} U(s).$$

Finalmente, la ecuación de energía $T(y) - U(s) = h$, implica

$$h = -\frac{1}{2} U(s).$$

Por lo tanto, haciendo uso de la Proposición 4.2.1 encontramos que la energía h de cualquier equilibrio relativo es negativa.

Proposición 4.2.3. *Las soluciones periódicas generadas por equilibrios relativos en el problema cargado de los n -cuerpos, se encuentran todas ellas, contenidas en niveles de energía negativos.*

4.3 Equilibrio relativo no planar

Un resultado clásico del problema Newtoniano de los n -cuerpos es que todos los equilibrios relativos son planares (Proposición 4.1.2). Sin embargo esta regla, como veremos a continuación, no se aplica al caso general del problema cargado de los n -cuerpos, en el cual existen equilibrios relativos tanto planares como no planares. Este hecho es doblemente relevante si tomamos en cuenta que los equilibrios relativos no planares, no se obtienen por rotación de configuraciones centrales.

Según la ecuación (4.4), para hallar una solución no planar, necesitamos hallar las suficientes simetrías tanto en la posición como en los parámetros, para que la fuerza resultante sobre cada partícula sea paralela a la proyección de su vector de posición al plano de rotación.

Para analizar lo anterior, desarrollamos un ejemplo de 6 partículas, en el cual fijamos parcialmente tanto la posición como las masas y las cargas. En lo que respecta a la posición, fijamos 4 partículas en los vértices de un cuadrado, y 2 partículas más, colocadas simétricamente en el eje ortogonal que pasa por el centro del cuadrado. La configuración anteriormente descrita $s = (s_1, \dots, s_6)$ está dada por

$$s_1 = -s_2 = (1, 0, 0), \quad s_3 = -s_4 = (0, 1, 0), \quad s_5 = -s_6 = (0, 0, c),$$

donde c es un número real positivo que escogemos en forma adecuada. Ver Figura 8.

Además, suponemos que entre partículas opuestas las masas son iguales y también las cargas, es decir, $m_i = m_j$ y $q_i = q_j$, para $(i, j) = (1, 2)$ o $(3, 4)$ o $(5, 6)$. De esta manera, al escribir la ecuación (4.4) de los equilibrios relativos por componentes

$$L_k = m_k^{-1} \nabla_k U(s) + w^2 I_0 s_k = 0, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (4.8)$$

obtenemos que $L_1 = -L_2$, $L_3 = -L_4$ y $L_5 = -L_6$. Entonces el sistema (4.8) se reduce a la mitad, es decir, los equilibrios relativos están dados por el sistema

$$L_1 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_5 = 0.$$

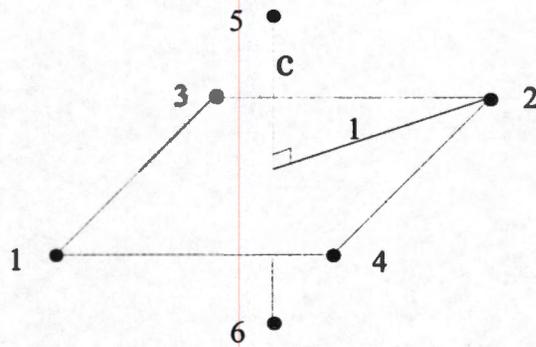


Figura 8. Ejemplo de un equilibrio relativo no planar.

Calculando estas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} (-2m_1^{-1}\sum_1 + w^2)s_1 &= 0, \\ (-2m_3^{-1}\sum_3 + w^2)s_3 &= 0, \\ (-2m_5^{-1}\sum_5) s_5 &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\sum_1 = \sum_{k=2,3,5} \frac{\lambda_{1k}}{r_{1k}^3}$, $\sum_3 = \sum_{k=1,4,5} \frac{\lambda_{3k}}{r_{3k}^3}$ y $\sum_5 = \sum_{k=1,3,6} \frac{\lambda_{5k}}{r_{5k}^3}$. El sistema (4.9) se reduce, después de eliminar w^2 , a sólo 2 ecuaciones escalares dadas por

$$m_1^{-1}\sum_1 = m_3^{-1}\sum_3 \quad \text{y} \quad \sum_5 = 0. \quad (4.10)$$

Si tomamos en consideración que $r_{51} = r_{53}$, entonces la segunda ecuación de (4.10) se resuelve fácilmente suponiendo a los parámetros de manera que $\lambda_{51} + \lambda_{53} = 0$ y $\lambda_{56} = 0$; esto implica agregar las siguientes hipótesis en las masas y las cargas:

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = 1, \quad m_3 = m_4 = m, \quad m_5 = m_6 = \mu, \\ q_1 = q_2 = q, \quad q_3 = q_4 = m + 1 - q, \quad q_5 = q_6 = \mu, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $m \in \mathbb{R}^+$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{R}$. Con estos parámetros la primera ecuación de (4.10) se escribe como

$$\frac{(m-1)(q+1) + 2(m+1)}{4} + \frac{(m-1)(m-q)}{\sqrt{2}} + \frac{2\mu(m+1)}{(c^2+1)^{3/2}} = 0. \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) junto con la condición $U > 0$, caracteriza completamente a los equilibrios relativos. Esta condición de potencial positivo está dada por la desigualdad

$$U(s) = (2\sqrt{2} - 1)(1 - q)(m - q) > 0. \quad (4.13)$$

Las soluciones del sistema (4.12)-(4.13) son las que determinan la existencia de los equilibrios relativos no planares. Dado que el tercer término en (4.12) es positivo, entonces la suma de los primeros dos términos debe ser negativa, lo que equivale a decir,

$$(m-1)q > \frac{\sqrt{8}m^2 + (3 - \sqrt{8})m + 1}{(\sqrt{8} - 1)}. \quad (4.14)$$

Entonces la existencia de equilibrios relativos no planares depende únicamente de que existan parámetros $m \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{R}$ que satisfagan el sistema de desigualdades (4.13)-(4.14). Resolviendo este sistema encontramos que las 6 partículas cargadas forman un equilibrio relativo no planar, si m y q son tales que

$$0 < m < 1, q < P(m), \quad \text{o bien,} \quad m > 1, q > P(m),$$

donde

$$P(m) = \frac{\sqrt{8}m^2 + (3 - \sqrt{8})m + 1}{(\sqrt{8} - 1)(m - 1)}.$$

Con la segunda de estas dos opciones, $m > 1$ y $q > P(m)$, el equilibrio dinámico en la rotación del equilibrio relativo se logra en la siguiente forma: las 4 partículas que forman el cuadrado se repelen sobre las diagonales, lo que se compensa con la atracción que existe sobre los lados del cuadrado; respecto a las 2 partículas que se hallan en el eje ortogonal que pasa sobre el centro del cuadrado, la fuerza entre ellas es nula, además ambas son repelidas por las dos partículas que se encuentran sobre una de las diagonales, a la vez que son atraídas por las que están en la otra diagonal.

Una consecuencia adicional a la existencia de equilibrios relativos no planares, en el problema cargado de los n -cuerpos, se deriva del siguiente hecho: en la ecuación (4.4) que define a los equilibrios relativos s , el producto Es anula la tercera coordenada del vector de posición de cada una de las partículas, es decir, Es tiene la forma

$$\{s_{11}, s_{12}, 0, \dots, s_{n1}, s_{n2}, 0\}.$$

Pero $M^{-1}\nabla U(s)$ y Es son vectores paralelos, entonces $M^{-1}\nabla U(s)$ también tiene las mismas coordenadas nulas que Es . Esto implica que los vectores s y $M^{-1}\nabla U(s)$ no pueden ser paralelos, pues s representa una configuración no planar. Entonces las soluciones no planares de (4.4), no resuelven la ecuación (3.1) que define a las C.C. En otras palabras, *los equilibrios relativos no planares no se obtienen por rotación de configuraciones centrales*.

Esta notable característica acentúa aún más la diferencia que existe entre el problema Newtoniano y el problema cargado, ya que en el primero es bien conocida la relación que hay entre equilibrios relativos y configuraciones centrales. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. *En el problema cargado de los n -cuerpos existen soluciones periódicas generadas por equilibrios relativos no planares; para ellas no existen las correspondientes soluciones homotéticas.*

4.4 Estabilidad espectral

Para analizar la estabilidad de los equilibrios relativos, linealizamos el campo vectorial (4.2) alrededor de sus puntos de equilibrio (4.3); lo que resulta es el sistema lineal Hamiltoniano: $\dot{z} = \mathfrak{R}z$, $z \in \mathbb{R}^{6n}$, donde

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} K & M^{-1} \\ D\nabla U(s) & K \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

La función Hamiltoniana de este sistema está dada por el producto de matrices $G = J\mathfrak{R}$, donde J es la matriz $6n \times 6n$ definida por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $G^t = G$ y $J^2 = -I$, lo cual implica $\mathfrak{R} = -JG$. Al sustituir estas relaciones en el polinomio característico de \mathfrak{R} , $p(\lambda) = |\mathfrak{R} - \lambda I|$, resulta

$$p(\lambda) = | -JG + \lambda J^2 | = | G - \lambda J | = | G^t - \lambda J^t | = | G + \lambda J | = p(-\lambda),$$

es decir, el polinomio propio $p(\lambda)$ es función de λ^2 . Dado que sus coeficientes son reales, pues \mathfrak{R} es real, entonces los complejos conjugados también son raíces de p . Por lo tanto, si λ es un valor propio de \mathfrak{R} , entonces

$$\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda},$$

también lo son. Una consecuencia inmediata de lo anterior es que *los puntos de equilibrio en (4.2) son inestables, si al menos un valor propio tiene parte real no nula.*

Por lo tanto, una condición necesaria, pero no suficiente para la existencia de estabilidad en los equilibrios relativos, es que todos los valores propios sean números imaginarios puros o cero. Cuando esta condición débil se cumple, es decir, cuando las raíces de la ecuación $p(\lambda) = 0$ son tales que $\lambda^2 \leq 0$, se dice que *el equilibrio relativo es espectralmente estable.*

En un concepto más general, cuando el origen del espacio \mathbb{R}^{6n} es un punto de equilibrio estable en la ecuación linealizada $\dot{z} = \mathfrak{R}z$, se dice que el punto de equilibrio es linealmente estable. La estabilidad lineal implica estabilidad espectral, y lo recíproco requiere adicionalmente que \mathfrak{R} sea una matriz diagonalizable en su forma canónica de Jordan.

Para estudiar los valores propios de \mathfrak{R} desarrollamos la ecuación característica $\mathfrak{R}u = \lambda u$, donde \mathfrak{R} esta dada por (4.15) y $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{6n}$, entonces

$$\begin{aligned} Ku_1 + M^{-1}u_2 - \lambda u_1 &= 0, \\ D\nabla U(s)u_1 + Ku_2 - \lambda u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

De aquí se sigue que los valores propios de \mathfrak{R} son los valores de λ que generan soluciones no nulas, $(u_1, u_2) \neq 0$, en el sistema de ecuaciones (4.16). Si despejamos u_2 de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda, encontramos que los valores propios de \mathfrak{R} son las raíces de la ecuación

$$\det A(\lambda) = 0, \tag{4.17}$$

donde A es una matriz $3n \times 3n$ dada por

$$A = M^{-1}D\nabla U(s) + 2\lambda K + w^2 E - \lambda^2 I. \quad (4.18)$$

Entonces un equilibrio relativo s es espectralmente estable, si $\lambda^2 \leq 0$ en todas las raíces de la ecuación (4.17).

Un método básico en Algebra Lineal usado para resolver la ecuación (4.17), consiste en factorizar dicha expresión por medio de un análisis de los subespacios vectoriales correspondientes. Como es sabido, para una transformación lineal $A : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$, la descomposición del espacio \mathbb{R}^{3n} en suma directa de subespacios A -invariantes, proporciona una factorización del polinomio $\det A(\lambda)$, cuyos factores corresponden al determinante de la matriz A restringida a los subespacios A -invariantes. Con este objetivo definimos la matriz B , $3n \times 3n$, dada por

$$B = M^{-1}D\nabla U(s), \quad (4.19)$$

cuyos bloques B_{jk} de tamaño 3×3 , están dados por

$$\begin{aligned} B_{jk} &= m_j^{-1} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} (I - 3 u_{jk} u_{jk}^t) \quad \text{para } j \neq k, \\ B_{jj} &= -\sum_{k \neq j} B_{jk}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $u_{jk} \in \mathbb{R}^3$ es el vector unitario $u_{jk} = (s_j - s_k) r_{jk}^{-1}$.

Estabilidad en equilibrios relativos planares. Observemos que los bloques B_{jk} adquieren una forma más simple cuando todas las partículas se hallan sobre el plano de rotación. En este caso, $s_k \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ para $k = 1, \dots, n$ (lo cual supondremos en adelante), entonces las matrices (4.20) adquieren la siguiente estructura diagonal por bloques

$$B_{jk} = \begin{pmatrix} L_{jk} & 0 \\ 0 & c_{jk} \end{pmatrix},$$

donde L_{jk} es una matriz 2×2 definida como sigue

$$\begin{aligned} L_{jk} &= m_j^{-1} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} (I - 3 u_{jk} u_{jk}^t) \quad \text{para } j \neq k, \\ L_{jj} &= -\sum_{k \neq j} L_{jk}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde $u_{jk} \in \mathbb{R}^2$ es el vector unitario $u_{jk} = (s_j - s_k) r_{jk}^{-1}$; los escalares c_{jk} están dados por

$$\begin{aligned} c_{jk} &= m_j^{-1} \lambda_{jk} r_{jk}^{-3} \quad \text{para } j \neq k, \\ c_{jj} &= -\sum_{k \neq j} c_{jk}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

El objetivo de considerar únicamente equilibrios relativos planares es aprovechar la estructura diagonal que adquiere B_{jk} , pues al cambiar el orden de las coordenadas con la transformación

$$(s_{11}, s_{12}, s_{13}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}) \rightarrow (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{n1}, s_{n2}, s_{13}, \dots, s_{n3}),$$

la matriz $B = (B_{jk})$, $3n \times 3n$, se escribe como una matriz diagonal por bloques

$$B = \text{diag}\{L, C\}, \tag{4.23}$$

donde $L = (L_{jk})$ es la matriz $2n \times 2n$ definida en (4.21), y $C = (c_{jk})$ es la matriz $n \times n$ definida en (4.22). En las nuevas coordenadas, todas las matrices que aparecen en (4.18) tienen la misma forma diagonal que B en (4.23); $E = \text{diag}\{I, 0\}$ y $K = \text{diag}\{J, 0\}$, donde J es la matriz $2n \times 2n$ diagonal por bloques, con bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}.$$

Por consecuencia, la matriz A definida en (4.18), cuyas raíces de su determinante determinan la estabilidad espectral del equilibrio relativo, también adquiere una forma diagonal por bloques, dada por

$$A = \text{diag}\{A_1, A_2\},$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= L + 2\lambda J + (w^2 - \lambda^2)I, & 2n \times 2n \\ A_2 &= C - \lambda^2 I, & n \times n. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dado que el determinante de una matriz es invariante bajo cambios de base, entonces la ecuación (4.17) de la estabilidad espectral, adquiere la forma

$$\det A_1(\lambda) \cdot \det A_2(\lambda) = 0.$$

Desde el punto de vista geométrico, el reacomodo de coordenadas realizado anteriormente, tiene el efecto de analizar las órbitas cercanas a un equilibrio relativo, considerando separadamente la proyección del sistema de partículas al plano de rotación, y luego su proyección al eje ortogonal de dicho plano, es decir, la dinámica de partículas es analizada considerando la estabilidad sobre ambas proyecciones. De lo anterior, surgen de manera natural las siguientes definiciones:

En lo que respecta a la dinámica generada por la proyección al plano de rotación, se dice que *un equilibrio relativo tiene estabilidad espectral planar*, si y sólo si, todas las raíces de la ecuación

$$\det A_1(\lambda) = 0, \quad (4.25)$$

satisfacen la desigualdad $\lambda^2 \leq 0$.

Similarmente, para la dinámica inducida por la proyección al eje ortogonal, se dice que *un equilibrio relativo tiene estabilidad espectral normal*, si y sólo si, todas las raíces de la ecuación

$$\det A_2(\lambda) = 0, \quad (4.26)$$

son tales que $\lambda^2 \leq 0$.

Dado que ambos conceptos son complementarios, entonces *un equilibrio relativo es espectralmente estable, si y sólo si, tiene estabilidad espectral planar y estabilidad normal*. Por el contrario, un equilibrio relativo que no posee alguna de las dos características es inestable.

Para el análisis de estas propiedades en el problema cargado, en la primera parte, relativa a la factorización del polinomio característico haremos uso de las ideas desarrolladas por Moeckel en [17].

4.4.1 Estabilidad espectral normal

Según la definición de A_2 en (4.24), un equilibrio relativo es normal espectralmente estable, si y sólo si, $\lambda^2 \leq 0$ en todas las raíces de la ecuación

$$\det(C - \lambda^2 I) = 0.$$

En otras palabras, existe estabilidad espectral normal si todos los valores propios μ de C son reales y no positivos. Para analizar los valores propios es necesario observar que C es una matriz simétrica respecto al producto

interior $\langle u, v \rangle = u^t M v$, donde $M = \text{diag}\{m_1, \dots, m_n\}$, es decir, C es una matriz simétrica porque

$$\langle Cu, v \rangle = \langle u, Cv \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces por ser una matriz simétrica todos los valores propios μ de C son números reales; por lo tanto, para mostrar la existencia de estabilidad espectral normal, sólo se tiene que probar que estos números reales son negativos o cero.

De la definición de C en (4.22), se sigue inmediatamente que el vector $(1, \dots, 1)^t$ pertenece al núcleo de C , entonces un valor propio de C es cero. Este valor propio es común para cualquier equilibrio relativo en el problema cargado de n -cuerpos, y se encuentra relacionado con la integral primera del centro de masa. Cuando los restantes $n - 1$ valores propios son negativos, decimos que *la estabilidad espectral normal es no degenerada*.

Para estudiar los $n - 1$ valores propios de C , desarrollaremos el j -ésimo renglón de la ecuación característica $Cu = \mu u$, donde $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\sum_{k \neq j} c_{jk}(u_k - u_j) = \mu u_j, \quad (4.27)$$

donde $j = 1, \dots, n$. En particular, si escogemos a u_j como la componente de u con mayor valor absoluto (supongamos $u_j > 0$), entonces $u_k - u_j \leq 0$ para toda $k \neq j$. Esto es especialmente útil cuando el problema cargado es atractivo, ya que todos los parámetros λ_{jk} son positivos y la sumatoria en (4.27) es menor o igual que cero, implicando con ello que $\mu \leq 0$. Pero suponer $\mu = 0$ en (4.27), considerando $c_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$, implica $u_1 = \dots = u_n$, lo cual corresponde al vector propio del párrafo anterior, entonces para un problema cargado atractivo los restantes $n - 1$ valores propios son negativos. Esto implica el siguiente resultado.

Proposición 4.4.1. *En el problema cargado de los n -cuerpos con $\lambda_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$, todos los equilibrios relativos tienen estabilidad espectral normal no degenerada.*

4.4.2 Estabilidad espectral planar

Para determinar la estabilidad espectral planar de un equilibrio relativo es necesario mostrar que $\lambda^2 \leq 0$ en todas las raíces de la ecuación

$$\det A_1(\lambda) = 0,$$

donde A_1 es la matriz definida en (4.24). Dado que $A_1 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, la idea es descomponer el espacio \mathbb{R}^{2n} en suma directa de subespacios vectoriales A_1 -invariantes de dimensión par, con lo cual la matriz A_1 adquiere una forma diagonal por bloques. Esta estructura diagonal de A_1 permite expresar el determinante de A_1 como el producto de los determinantes de cada uno de los bloques.

Para determinar subespacios A_1 -invariantes hay que observar que el subespacio más simple debe tener dimensión 2, esto es porque sabemos que la expresión $\det A_1(\lambda)$ es función de λ^2 , implicando con ello que la factorización de este polinomio sólo contiene factores de grado par. Sea S un espacio invariante bajo L y J simultáneamente, entonces S es un espacio A_1 -invariante.

Dado que todo espacio invariante de una matriz contiene al menos uno de sus vectores propios, sea $u \in S$ un vector propio de L . Como S es J -invariante y $u \in S$, entonces $Ju \in S$. Por otra parte, un simple cálculo muestra que $J^t M = -MJ$, entonces J es una matriz antisimétrica respecto del producto interior $\langle v, w \rangle = v^t M w$. Esta propiedad implica $\langle u, Ju \rangle = -\langle Ju, u \rangle$, entonces $\langle u, Ju \rangle = 0$, en otras palabras, los vectores u y Ju son M -ortogonales. Por lo tanto, $\{u, Ju\}$ es una base M -ortogonal de S .

Para complementar la información se usa la relación $L^t M = ML$, que se obtiene por cálculo directo, para mostrar que L es una matriz simétrica respecto del producto interior definido por M . La simetría de L tiene varias implicaciones; la primera es directa e indica que todos los valores propios de L son reales; la segunda se refiere a que Ju , al igual que u , también es un vector propio de L .

Para demostrar esto último procedemos en dos partes. Primero, la simetría de L y el hecho de que u es un vector propio de esta matriz implican directamente que $\langle u, LJ u \rangle = 0$. Segundo, dado que el espacio S generado por u y Ju es L -invariante, entonces el vector $LJ u$ es una combinación lineal de u y Ju , es decir, existen escalares c_1 y c_2 tales que $LJ u = c_1 u + c_2 Ju$;

entonces $\langle u, LJ u \rangle = c_1 \langle u, u \rangle$. Finalmente, la combinación de ambos resultados implica $c_1 = 0$, lo cual concluye la demostración.

Por lo tanto, el espacio S está generado por una base de vectores propios, $\{u, Ju\}$, de la matriz L . Este espacio es A_1 -invariante y la restricción de A_1 a S en la base $\{u, Ju\}$, esta dada por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & -w^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (w^2 - \lambda^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde a y b son los valores propios de u y Ju , respectivamente. El determinante de esta matriz es un factor de cuarto orden de la ecuación $\det A_1(\lambda) = 0$, cuyas raíces determinan la estabilidad espectral planar del equilibrio relativo; el factor de cuarto orden es

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta, \quad (4.28)$$

donde

$$\alpha = 2w^2 - a - b \quad \text{y} \quad \beta = (a + w^2)(b + w^2).$$

El criterio de estabilidad espectral $\lambda^2 \leq 0$, que deben cumplir las raíces del polinomio $Q(\lambda)$, implica los siguientes casos:

i) Q tiene 4 raíces imaginarias puras, si

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta \geq 0, \quad (4.29)$$

ii) Q tiene 2 raíces imaginarias puras y 2 raíces nulas, si

$$\alpha > 0, \quad \beta = 0,$$

iii) Q tiene 4 raíces nulas, si

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

iv) *Cualquier otro caso implica inestabilidad en el equilibrio relativo.*

En lo que sigue aplicaremos sucesivamente este resultado para factorizar completamente la ecuación de estabilidad espectral planar $\det A_1 = 0$. Dos de tales factores son comunes a cualquier equilibrio relativo:

1.- El primero se deduce al observar que $u = (1, 0, \dots, 1, 0)^t \in \mathbb{R}^{2n}$ y Ju pertenecen al kernel de L , es decir, u y Ju son vectores propios de L con valores propios $a = b = 0$. Entonces el polinomio (4.28) adquiere la expresión

$$Q_1 = (\lambda^2 + w^2)^2.$$

2.- Aquí, se usa fuertemente que el equilibrio relativo s es un vector propio de L , lo cual se demuestra aplicando en $L = M^{-1}D\nabla U(s)$, el Teorema de Euler y la ecuación de equilibrio relativo (4.4), entonces

$$Ls = M^{-1}D\nabla U(s)s = M^{-1}(-2)\nabla U(s) = (-2)(-w^2s) = 2w^2s.$$

Observemos que la rotación del equilibrio relativo, $R(\theta)s$, no modifica las distancias mutuas entre partículas, entonces $\nabla U(R(\theta)s) = R(\theta)\nabla U(s)$. Si derivamos esta última expresión respecto a la variable θ en $\theta = 0$, obtenemos $D\nabla U(s)Js = J\nabla U(s)$. Entonces

$$L(Js) = M^{-1}J\nabla U(s) = JM^{-1}\nabla U(s) = J(-w^2s) = -w^2(Js),$$

es decir, $a = 2w^2$ y $b = -w^2$ son los valores propios correspondientes a los vectores propios s y Js , respectivamente. Sustituyendo en (4.28), obtenemos

$$Q_2 = \lambda^2(\lambda^2 + w^2).$$

3.- Por lo tanto, los dos resultados anteriores implican que cualquier equilibrio relativo planar tiene la siguiente factorización

$$\det A_1 = Q_1Q_2Q_3 = \lambda^2(\lambda^2 + w^2)^3Q_3(\lambda) = 0, \quad (4.30)$$

donde Q_3 es un polinomio de grado $4(n-2)$. Las raíces de Q_3 si dependen de cada equilibrio relativo, y cuando todas ellas cumplen con la condición $\lambda^2 < 0$, se dice que *el equilibrio relativo tiene estabilidad espectral planar no degenerada*.

4.5 El problema cargado de los 3 cuerpos

En esta sección estamos interesados en estudiar la estabilidad espectral de equilibrios relativos en el problema cargado de los 3 cuerpos. Los resultados que obtenemos a este respecto nos permiten caracterizar a los equilibrios

relativos espectralmente estables, ya sean colineales o no colineales. Las conclusiones son muy interesantes y novedosas, basta mencionar la existencia de equilibrios relativos colineales espectralmente estables, lo cual marca una diferencia sustancial respecto del problema Newtoniano, donde todos los equilibrios relativos colineales son inestables.

Este trabajo es una continuación al esfuerzo realizado en [19], en el cual los autores hacen un estudio muy detallado sobre el número total de C.C. en el problema cargado de los tres cuerpos. Estos resultados muestran con toda claridad la magnitud de los efectos que produce en las C.C., la acción combinada de fuerzas atractivas y repulsivas. El hecho de que las partículas sean atraídas en una dirección y repelidas en otra, ocasiona una mayor variabilidad tanto en el número como en la forma de las C.C.

A continuación hacemos un resumen de los resultados obtenidos en dicho trabajo, para lo cual suponemos que al menos uno de los parámetros λ_{jk} es positivo; lo contrario implica suponer que el potencial es negativo y para ello no existen equilibrios relativos (Proposición 4.2.1). Con esto en cuenta, existen dos casos y para simplificar su descripción introducimos los parámetros

$$\delta_{jk} = \frac{\lambda_{jk}}{m_j m_k} = 1 - \delta_j \delta_k, \quad \delta_k = \frac{q_k}{m_k}.$$

Nótese que δ_{jk} tiene el mismo signo que λ_{jk} .

A) $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$ signos diferentes. Para esta selección de parámetros, la fuerza de repulsión domina entre algunas partículas, mientras que la atracción domina en otras. Esta combinación de fuerzas, muy propia de los problemas cargados, tiene consecuencias sustanciales sobre las C.C., ya que *para esta selección de parámetros no existen C.C. planares, todas ellas tienen configuraciones colineales*. En cada ordenación colineal el número de C.C. varía desde 0 hasta 3, y el conteo total, considerando las diferentes ordenaciones, no es mayor que 5.

En una de las ordenaciones colineales existen hasta 3 C.C. Si este es el caso, entonces hay dos más en otra de las ordenaciones, y cero en la ordenación colineal restante. Cabe hacer notar la diferencia que tiene este conteo respecto de lo que sucede en el problema clásico de los 3 cuerpos, donde hay exactamente 1 C.C. para cada ordenación colineal.

Para obtener los equilibrios relativos correspondientes a esta selección de parámetros, es necesario considerar la Proposición 4.2.1 que relaciona

los equilibrios relativos y las C.C. con potencial positivo. Por lo tanto, al aplicar esta restricción en las C.C. encontramos que hay tantos equilibrios relativos como C.C., es decir, cuando algunos parámetros δ_{jk} son negativos, no existen equilibrios relativos no colineales, todos son colineales, y el conteo total varía entre 1 y 5.

B) $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$ positivos. Dado que los tres parámetros son positivos, entonces el sistema de partículas es atractivo, esto es, la fuerza que domina entre cualesquiera dos partículas es la atracción. La semejanza que este problema cargado tiene respecto del problema clásico (también de tipo atractivo) se ve reflejada en el número de C.C., pero no en las configuraciones mismas. Hay tantas C.C. en el problema cargado atractivo como en el problema Newtoniano, es decir, hay 3 colineales (1 por cada ordenación colineal) y 2 no colineales.

Lo que marca la diferencia, respecto del problema Newtoniano, es la posición de las partículas. Esto se aprecia más claramente en el caso no colineal, donde el triángulo equilátero de la solución de Lagrange es sustituido por triángulos de muy diversas formas en el problema cargado. La forma triangular que tienen las C.C. no colineales en el problema cargado, depende de las masas y las cargas, de acuerdo a la siguiente relación

$$r_{jk} = \sqrt[3]{\frac{\delta_{jk}}{\delta_{12}}}, \quad \delta_{jk} > 0, \quad j \neq k, \quad (4.31)$$

para lo cual se requiere adicionalmente que los tres parámetros $\delta_{12}^{1/3}$, $\delta_{13}^{1/3}$ y $\delta_{23}^{1/3}$ satisfagan la desigualdad del triángulo. Observemos en (4.31) que las distancias r_{jk} generan triángulos con formas muy diversas, dependiendo en cada caso de las masas y las cargas.

Los equilibrios relativos no colineales son analizados en el siguiente resultado.

Proposición 4.5.1. *En el problema cargado de 3 cuerpos con $\delta_{jk} > 0$ para toda $j \neq k$, dada una figura triangular arbitraria A , existen masas y cargas para las cuales A es la configuración un equilibrio relativo no colineal.*

Demostración. Sea A un triángulo con lados $r_{12} = 1, r_{13} > 1, r_{23} > 1$. Para esta configuración hay que probar que existen masas m_i y cargas q_i

que resuelven el sistema (4.31). Sea k_0 una constante definida como

$$k_0 = \min \{1 - r_{13}^{-3}, 1 - r_{23}^{-3}\}, \quad (4.32)$$

entonces $0 < k_0 < 1$. Sean B y C funciones escalares con valores en el intervalo $(0, k_0)$, dadas por

$$B(k) = r_{13}^3(1 - k) - 1, \quad C(k) = (r_{23}^3(1 - k) - 1)k^{-1}. \quad (4.33)$$

Para $k \in (0, k_0)$, la expresión (4.32) implica

$$k < 1 - r_{13}^{-3} \quad \text{y} \quad k < 1 - r_{23}^{-3}.$$

La primera desigualdad implica $B(k) > 0$, y la segunda implica $C(k) > 0$, ambas para $k \in (0, k_0)$.

Sean los parámetros δ_1, δ_2 y δ_3 definidos por el siguiente arco de trayectoria

$$\delta_1(k) = \sqrt{B/C}, \quad \delta_2(k) = k\sqrt{C/B}, \quad \delta_3(k) = -\sqrt{BC}, \quad (4.34)$$

donde $k \in (0, k_0)$. Si escogemos a las masas y las cargas tales que sus cocientes $\delta_i = q_i/m_i$ están dados por (4.34), entonces la relación $\delta_{ij} = 1 - \delta_i\delta_j$ satisface el sistema (4.31) para la configuración triangular A predeterminada. \square

Observación 4.5.2. A pesar de que la Proposición 4.5.1 se demostró con cargas de diferente signo en (4.34), el mismo resultado se obtiene considerando a las tres cargas con el mismo signo. Para ver esto, basta modificar la definición de k_0 en (4.32) por

$$k_0 = \max \{1 - r_{13}^{-3}, 1 - r_{23}^{-3}\}.$$

Esto implica que las funciones B y C en (4.33), definidas ahora en el intervalo $k \in (k_0, 1)$, satisfacen las desigualdades $-1 < B(k) < 0$ y $-\frac{1}{k} < C(k) < 0$. Entonces la selección de parámetros

$$\delta_1(k) = \sqrt{B/C}, \quad \delta_2(k) = k\sqrt{C/B}, \quad \delta_3(k) = \sqrt{BC},$$

permite concluir el mismo resultado, es decir, δ_1, δ_2 y δ_3 cumplen (4.31). Aquí las cargas claramente son positivas, ya que $q_i = m_i\delta_i$.

Estabilidad Normal. Dado que los equilibrios relativos no colineales del problema cargado de los 3 cuerpos tienen sus tres parámetros λ_{jk} positivos, entonces la Proposición (4.4.1) implica que todos ellos tienen estabilidad espectral normal no degenerada.

Para los equilibrios relativos colineales se procede de otra manera, pues los parámetros λ_{jk} pueden ser negativos. De acuerdo a lo establecido en la sección 4.4.1, un equilibrio relativo tiene estabilidad espectral normal no degenerada, si y sólo si, los valores propios de C son números reales negativos, con excepción de uno que es nulo; en la misma sección se determinó que todos los valores propios de C son reales.

El polinomio característico de la matriz C definida en (4.22), es un polinomio de grado 3 con raíces reales, una de las cuales es nula, dado por

$$q(\mu) = \mu^3 + a_1 \mu^2 + a_2 \mu = 0, \quad (4.35)$$

donde

$$a_1 = c_{12} + c_{21} + c_{13} + c_{31} + c_{23} + c_{32} = -\text{tr} C,$$

$$a_2 = c_{12}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{32} + c_{21}c_{31} + c_{21}c_{32} + c_{23}c_{31} + c_{12}c_{23} + c_{13}c_{21} + c_{13}c_{23}.$$

Dado que las raíces del polinomio $q(\mu)$ sólo pueden ser reales, entonces hay dos raíces negativas en (4.35), si y sólo si, $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$. El cumplimiento de estas desigualdades proporciona la estabilidad espectral normal del equilibrio relativo.

Proposición 4.5.3. *En el problema cargado de los 3 cuerpos, un equilibrio relativo colineal tiene estabilidad espectral normal no degenerada, si y sólo si, las masas y las cargas son tales que $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$.*

Estabilidad Planar. Según (4.30), un equilibrio relativo en el problema cargado de los 3 cuerpos tiene estabilidad espectral planar no degenerada, si y sólo si, $\lambda^2 < 0$ en todas las raíces del polinomio $Q_3(\lambda)$. Para determinar Q_3 hallaremos los 2 valores propios a y b de la matriz L , de tamaño 6×6 , que aún se desconocen,

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\} = \{0, 0, 2w^2, -w^2, a, b\}. \quad (4.36)$$

Los valores propios a y b se deducen hallando dos relaciones que involucran a las trazas de L y L^2 . Para esto, usamos el hecho de que la traza de una matriz es la suma de sus valores propios, entonces

$$\operatorname{tr} L = \sum_{i=1}^6 \lambda_i = w^2 + a + b. \quad (4.37)$$

Para hallar la traza de la matriz L^2 , calculamos el cuadrado de la ecuación (4.37),

$$\operatorname{tr}^2 L = \sum_{k=1}^6 \lambda_k^2 + 2 \sum_{j < k} \lambda_j \lambda_k = \operatorname{tr} L^2 + 2 \sum_{j < k} \lambda_j \lambda_k.$$

Entonces

$$\operatorname{tr}^2 L = \operatorname{tr} L^2 - 4w^4 + 2w^2(a + b) + 2ab,$$

pero $a + b = \operatorname{tr} L - w^2$,

$$2ab = (\operatorname{tr} L - w^2)^2 + 5w^4 - \operatorname{tr} L^2. \quad (4.38)$$

Por lo tanto, dado que $Q_3(\lambda)$ es un caso particular de $Q(\lambda)$ en (4.28), sustituimos en esta última, las expresiones obtenidas en (4.37) y (4.38), entonces

$$Q_3 = \lambda^4 + (3w^2 - \operatorname{tr} L) \lambda^2 + (3w^4 + \frac{1}{2} \operatorname{tr}^2 L - \frac{1}{2} \operatorname{tr} L^2). \quad (4.39)$$

La conclusión es que un equilibrio relativo del problema cargado de los 3 cuerpos tiene estabilidad espectral planar no degenerada, si y sólo si, todas las raíces de Q_3 son números imaginarios puros. Para que esto suceda, los coeficientes de este polinomio deben satisfacer las desigualdades (4.29).

En lo que sigue estudiamos la estabilidad espectral planar, por separado, en equilibrios relativos colineales y no colineales.

4.5.1 Equilibrios relativos colineales

Es bien conocido que en el problema Newtoniano de los n -cuerpos todos los equilibrios relativos colineales son inestables, en cambio, en el problema cargado resulta tan preponderante el papel que juegan las cargas en la estabilidad de un equilibrio relativo, que inclusive hasta *los equilibrios relativos colineales pueden ser espectralmente estables no degenerados*.

En esta sección damos un criterio para determinar las condiciones que un equilibrio relativo colineal debe cumplir, para tener estabilidad espectral planar; la estabilidad espectral normal se determina usando la Proposición 4.5.3

Proposición 4.5.4. *En el problema cargado de los 3 cuerpos un equilibrio relativo colineal tiene estabilidad espectral planar, si y sólo si, las masas, cargas y posiciones satisfacen la relación*

$$\begin{aligned} w^{-2} \operatorname{tr} C &\in (-2, -17/9] \cup [-1, -1/2), & \text{no degenerado,} \\ w^{-2} \operatorname{tr} C &\in \{-2, -1/2\}, & \text{degenerado.} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Demostración. Sea $(s_1, 0, s_2, 0, s_3, 0)$ una configuración colineal de tres partículas, con la ordenación $s_1 < s_2 < s_3$. Dado que los bloques L_{jk} en (4.21) son diagonales para configuraciones colineales, pues $u_{jk} = (\pm 1, 0)$, entonces cambiando el orden de las coordenadas mediante la transformación

$$(s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{31}, s_{32}) \rightarrow (s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{12}, s_{22}, s_{32}),$$

la matriz L se transforma en una matriz diagonal por bloques,

$$L = \operatorname{diag}\{-2C, C\}, \quad (4.41)$$

donde $C = (c_{jk})$ es la matriz 3×3 definida en (4.22). Esta relación entre L y C , permite hallar los valores propios de una matriz a partir de la otra. Para esto observemos que la ecuación característica $Cu = \lambda u$ implica $Lx = \lambda x$, donde $x = (0, u^t)^t$. Pero si x es un vector propio de L , entonces Jx también lo es, donde J es la matriz 6×6 dada por

$$J = w \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $L(Jx) = -2\lambda(Jx)$. Esta relación $-2 : 1$ entre los valores propios a y b de L , y la expresión $\operatorname{tr} L = -\operatorname{tr} C$, implican en (4.37) que

$$a = w^2 + \operatorname{tr} C, \quad b = -2a. \quad (4.42)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (4.28), se obtiene

$$Q_3(\lambda) = \lambda^4 + (3w^2 + \operatorname{tr} C)\lambda^2 - (2w^2 + \operatorname{tr} C)(w^2 + 2\operatorname{tr} C). \quad (4.43)$$

Según (4.30), las raíces de Q_3 determinan que un equilibrio relativo tiene estabilidad espectral planar no degenerada, si y sólo si, los parámetros

$$\alpha = 3w^2 + \text{tr}C \quad \text{y} \quad \beta = -(2w^2 + \text{tr}C)(w^2 + 2\text{tr}C)$$

satisfacen las desigualdades (4.29), es decir,

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta \geq 0.$$

La primera de ellas implica $w^{-2}\text{tr}C \in (-3, +\infty)$; la segunda implica $w^{-2}\text{tr}C \in (-2, -0.5)$; y en la tercera $w^{-2}\text{tr}C \in (-\infty, -17/9] \cup [-1, +\infty)$. Finalmente, la intersección implica (4.40). La estabilidad degenerada se obtiene de (4.29) suponiendo $\beta = 0$ y $\alpha \geq 0$, es decir, $w^{-2}\text{tr}C = -2, -\frac{1}{2}$. \square

En general, la distancia entre partículas depende de una manera complicada de las masas y cargas, razón por la cual no es posible obtener explícitamente la razón de las distancias entre partículas en un equilibrio relativo colineal. Si bien esto dificulta el cálculo de la expresión escalar $w^{-2}\text{tr}C$ que determina la estabilidad espectral planar, a continuación establecemos algunas relaciones, que al menos simplifican su obtención.

Sea $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ una configuración colineal de 3 partículas, tal que $s_1 < s_2 < s_3$ y $s_3 - s_1 = 1$. Usando como coordenadas el inverso de las distancias entre la partícula central y las dos partículas laterales, es decir, sean x y y tales que

$$x = (s_2 - s_1)^{-1}, \quad y = (s_3 - s_2)^{-1}, \quad (4.44)$$

donde

$$x^{-1} + y^{-1} = 1, \quad x > 1, \quad y > 1. \quad (4.45)$$

En estas coordenadas, la ecuación de equilibrios relativos (4.4) se escribe como

$$\begin{aligned} w^2 x^{-1} &= \delta_{12}(m_1 + m_2)x^2 - \delta_{23}m_3 y^2 + \delta_{13}m_3, \\ w^2 y^{-1} &= \delta_{23}(m_2 + m_3)y^2 - \delta_{12}m_1 x^2 + \delta_{13}m_1, \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sumando ecuaciones en (4.46) se obtiene

$$w^2 = m_2 \delta_{12} x^2 + m_2 \delta_{23} y^2 + m_1 \delta_{13} + m_3 \delta_{13}. \quad (4.47)$$

En lo que respecta a la traza de C , (4.22) implica

$$\text{tr}C = c_{11} + c_{22} + c_{33} = -c_{12} - c_{13} - c_{21} - c_{23} - c_{31} - c_{32},$$

$$-\text{tr}C = \delta_{12}(m_1 + m_2)x^3 + \delta_{23}(m_2 + m_3)y^3 + \delta_{13}(m_1 + m_3), \quad (4.48)$$

y por (4.46) tenemos

$$-\text{tr}C = 2w^2 + m_1(\delta_{13} - \delta_{13}y + \delta_{12}x^2y) + m_3(\delta_{13} - \delta_{13}x + \delta_{23}xy^2).$$

Si ahora consideramos que (4.45) implica $x^2y = x^2 + x + y$, $xy^2 = y^2 + y + x$, obtenemos finalmente la expresión

$$w^{-2}\text{tr}C = -2 - \frac{c_1 p(x) + c_2 p(y) + c_3 q(x) + c_4 q(y)}{m_2 \delta_{12} x^2 + m_2 \delta_{23} y^2 + m_1 \delta_{13} + m_3 \delta_{13}}, \quad (4.49)$$

donde $x > 1$, $y > 1$; las funciones positivas p , q , y los coeficientes c_i están dados respectivamente por

$$p(x) = x^2 + x + 1, \quad q(x) = x - 1,$$

$$c_1 = m_1 \delta_{12}, \quad c_2 = m_3 \delta_{23}, \quad c_3 = m_3(\delta_{23} - \delta_{13}), \quad c_4 = m_1(\delta_{12} - \delta_{13}).$$

Ejemplo 4.5.5. Como un caso particular, supongamos que las masas y las cargas son tales que $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} > 0$ en el problema cargado de los 3 cuerpos; esto incluye, por supuesto, al problema clásico Newtoniano, pues todos sus parámetros δ_{jk} son iguales a 1. Consecuentemente, los equilibrios relativos colineales considerados en este ejemplo, son esencialmente las soluciones de Euler del problema clásico. Para analizar la estabilidad espectral es suficiente sustituir $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23}$ en (4.49), entonces

$$w^{-2}\text{tr}C = -2 - \frac{m_1 p(x) + m_3 p(y)}{m_2 x^2 + m_2 y^2 + m_1 + m_3}.$$

Dado que el segundo término en el lado derecho de esta última ecuación es positivo, obtenemos

$$w^{-2}\text{tr}C < -2. \quad (4.50)$$

La desigualdad (4.50) implica, por la Proposición 4.5.4, que todos los equilibrios relativos colineales de este ejemplo son inestables. Según se desprende de lo anterior, observemos que las soluciones de Euler del problema Newtoniano de los 3 cuerpos, justamente quedan fuera de la región de estabilidad.

Ejemplo 4.5.6. *Un equilibrio relativo colineal con estabilidad espectral.* Consideremos 3 partículas con masas y cargas dadas por

$$m_1 = m_3 = 1, \quad q_1 = q_3 \in \mathbb{R}, \quad m_2 = m \in \mathbb{R}^+, \quad q_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.51)$$

Entonces $\delta_{12} = \delta_{23}$. En la sección 4.5, incisos A y B, se describe de manera resumida el conteo de equilibrios relativos para un conjunto dado de 3 partículas. Los resultados a que estamos haciendo referencia indican que para la ordenación colineal 1-2-3, existen hasta 3 equilibrios relativos colineales; su estabilidad espectral se analiza a continuación.

Al eliminar la velocidad angular en (4.46), se encuentra que los equilibrios relativos colineales son las soluciones del sistema

$$(y - x) [\delta_{12} (m + 1) (x^2 + xy + y^2) + \delta_{12} xy + \delta_{13}] = 0, \quad (4.52)$$

$$x + y = xy,$$

donde $x > 1$, $y > 1$ y $U = m\delta_{12}(x+y) + \delta_{13} > 0$. Las diferentes soluciones de este sistema se analizan en dos partes, estudiando primero la solución simétrica y después las soluciones no simétricas.

i) Una solución trivial de (4.52) es el *equilibrio relativo colineal simétrico* $x = y = 2$, cuyas masas y cargas son tales que $4m\delta_{12} + \delta_{13} > 0$. Aquí, la partícula central equidista de la dos partículas laterales. Según lo establecido, la solución simétrica es espectralmente estable si tiene tanto estabilidad planar como estabilidad normal.

La estabilidad planar depende de la expresión $w^{-2} \text{tr} C$ que adquiere por (4.49), la expresión

$$w^{-2} \text{tr} C = - \frac{8(m+1)\delta_{12} + \delta_{13}}{4m\delta_{12} + \delta_{13}}.$$

Según la Proposición 4.5.4, un equilibrio relativo colineal tiene estabilidad espectral planar no degenerada, si y sólo si, $w^{-2} \text{tr} C \in [-1, -1/2)$, o bien, $w^{-2} \text{tr} C \in (-2, -17/9]$. Estas restricciones, considerando $4m\delta_{12} + \delta_{13} > 0$, implican en el orden respectivo lo siguiente:

$$\delta_{12} = \delta_{23} < 0, \quad \delta_{13} > 0, \quad -\frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} > 12m + 16, \quad (4.53)$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} > 0, \quad \delta_{13} > 0, \quad 8 < \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} \leq 9 + \frac{m}{2}. \quad (4.54)$$

En el primer caso, si las masas y las cargas satisfacen las desigualdades (4.53), entonces el sistema de fuerzas en el equilibrio relativo colineal, de acuerdo a los signos de los parámetros δ_{jk} correspondientes, es tal que la partícula central repele a las dos partículas laterales, el equilibrio dinámico se logra cuando éstas últimas se atraen con una fuerza aún mayor que la repulsión a que están sujetas. En la segunda región de estabilidad planar (4.54), todas las partículas se atraen. Por otra parte, si las masas y las cargas no satisfacen (4.53) o (4.54), entonces el equilibrio relativo colineal simétrico es inestable.

Un ejemplo de inestabilidad se obtiene al suponer al átomo de Helio como si fuera una configuración colineal de 3 partículas, el núcleo y los 2 electrones; en este sistema, la partícula central (núcleo) atrae a las dos partículas laterales (electrones), las cuales se repelen entre sí.

La estabilidad normal, la segunda de las dos propiedades exigidas a un equilibrio relativo espectralmente estable, existe si los parámetros a_1 y a_2 de la Proposición 4.5.3 son tales que $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$. Estos parámetros están expresados en términos de los coeficientes c_{jk} , los cuales a su vez dependen de las posiciones de las partículas. Entonces con las masas y las cargas dadas en (4.51), y las distancias entre partículas $r_{12} = r_{23} = 0.5$ y $r_{13} = 1$, se obtiene de (4.22) que

$$c_{12} = c_{32} = 8m\delta_{12}, \quad c_{21} = c_{23} = 8\delta_{12}, \quad c_{13} = c_{31} = \delta_{13},$$

lo cual implica

$$a_1 = 16(m+1)\delta_{12} + 2\delta_{13}, \quad a_2 = 16\delta_{12}(m+2)(4m\delta_{12} + \delta_{13}).$$

Entonces $a_2 < 0$ para las desigualdades (4.53); esto significa, por la Proposición 4.5.3, que el equilibrio relativo colineal simétrico no tiene estabilidad espectral normal, por consecuencia, es inestable.

Por el contrario, si las masas y las cargas satisfacen (4.54), entonces a_1 y a_2 son evidentemente positivos, entonces existen tanto la estabilidad planar como la estabilidad normal, en otras palabras, el equilibrio relativo colineal simétrico es espectralmente estable no degenerado. A este respecto es importante señalar que la conclusión a que hemos llegado, sencillamente es imposible en el contexto del problema clásico Newtoniano, pues es bien conocido que todos sus equilibrios relativos colineales son inestables. Esto nos da el siguiente resultado.

Proposición 4.5.7. *En el problema cargado de los 3 cuerpos existen equilibrios relativos colineales con estabilidad espectral no degenerada.*

Otra consecuencia que se deriva del ejemplo que estamos analizando, es sobre las masas y las cargas que hacen espectralmente estable a un equilibrio relativo. Para comprender la importancia que esto significa es necesario remitirnos al problema Newtoniano, donde los pocos equilibrios relativos espectralmente estables que se conocen hasta ahora, tienen todos ellos, una masa significativamente mayor que las demás; se cree que esta es una regla general que se aplica a todos los equilibrios relativos con estabilidad espectral del problema clásico de los n -cuerpos. Este es un problema abierto conocido como *la conjetura de Moeckel* [18].

Por lo tanto, una pregunta natural que surge a este respecto, consiste en determinar si la conjetura de Moeckel, se aplica o se extiende de alguna manera a los problemas cargados. Tal extensión en caso de existir, afirmarí­a que todo equilibrio relativo con estabilidad espectral tiene un valor dominante en el conjunto de masas y/o cargas.

Para analizar este cuestionamiento es suficiente considerar, en el ejemplo que estamos estudiando, el caso particular en que las 3 masas son iguales entre sí. Por (4.51) se tiene $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ y $m = 1$, entonces la condición de estabilidad espectral no degenerada (4.54), implica

$$\delta_{12} = 1 - q_1 q_2 > 0, \quad \delta_{23} = \delta_{12}, \quad \delta_{13} = 1 - q_1^2 > 0, \quad 8 < \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} \leq \frac{19}{2}.$$

Estos parámetros corresponden a un problema cargado de tipo atractivo, donde las cargas q_1 , q_2 y q_3 están determinadas por la desigualdad

$$\frac{q_1^2 + 7}{8} < q_1 q_2 < \frac{2q_1^2 + 17}{19}, \quad (4.55)$$

donde $0 < q_1^2 < 1$. Dado que la desigualdad (4.55) tiene solución para toda $q_1 \in (0, 1)$, entonces también la tiene para q_1 cercano a 1, lo cual implica que q_2 es aproximadamente igual a q_1 ; además $q_3 = q_1$. En conclusión, para esta selección de parámetros el equilibrio relativo colineal es espectralmente estable, con la característica de que todas las masas y cargas pueden tomar valores muy cercanos entre sí.

Con esto último estamos dando una respuesta concluyente al planteamiento sobre la validez de la conjetura de Moeckel cuando ésta es extendida a los

problemas cargados, pues como acabamos de mostrar, *la estabilidad espectral en los problemas cargados no requiere la presencia de un valor dominante en el conjunto de masas y cargas; consecuentemente, la conjetura de Moeckel postulada para el problema Newtoniano, no se aplica en el problema cargado de los 3 cuerpos.*

ii) Para hallar otras soluciones en (4.52) distintas de la configuración simétrica que ya hemos analizado en la primera parte, es necesario considerar que los parámetros δ_{jk} tienen signos diferentes, pues sólo de esta forma pueden existir más de 1 equilibrio relativo colineal con una misma ordenación. De esta manera, supongamos en (4.52) que δ_{12} y δ_{13} tienen signos opuestos, y además $x \neq y$. Si ahora usamos la relación $x^2 + xy + y^2 = (xy)^2 - xy$, obtenida de la segunda ecuación en (4.52), con el objetivo de modificar la ecuación que le antecede, obtenemos un sistema con las mismas soluciones no simétricas ($x \neq y$),

$$x + y = P, \quad x + y = xy, \quad (4.56)$$

donde

$$P = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4(m+1)Q}}{2(m+1)}, \quad Q = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{12}} > 0. \quad (4.57)$$

Entonces los equilibrios relativos colineales no simétricos son aquellos que resuelven el sistema de ecuaciones (4.56), siempre y cuando, la solución se encuentre en la región determinada por $x > 1$, $y > 1$, $x \neq y$, $U > 0$. Por consiguiente, después de hacer el análisis correspondiente, encontramos que hay 2 equilibrios relativos colineales no simétricos; su existencia requiere suponer que las masas y las cargas son tales que $P > 4$ y $U > 0$. Estas desigualdades, en términos de los parámetros δ_{jk} se escriben como

$$\delta_{12} = \delta_{23} < 0, \quad \delta_{13} > 0, \quad \delta_{13} > -\delta_{12}(12m + 16).$$

Para calcular el rango de valores que tiene la expresión escalar $w^{-2}\text{tr}C$, que determina la estabilidad espectral planar, sustituimos los parámetros (4.51) en la ecuación (4.49), entonces

$$w^{-2}\text{tr}C = -2 + \frac{p(x) + p(y) + (Q + 1)(q(x) + q(y))}{2Q - m(x^2 + y^2)},$$

donde $p(x) = x^2 + x + 1$, $q(x) = x - 1$. El sistema (4.56) que determina los valores de x y y , implica las siguientes relaciones

$$p(x) + p(y) = P^2 - P + 2,$$

$$q(x) + q(y) = P - 2,$$

$$x^2 + y^2 = P^2 - 2P.$$

Entonces $w^{-2}trC$ adquiere una expresión que sólo depende de las masas y las cargas,

$$w^{-2}trC = -2 + \frac{P^2 - P + 2 + (Q + 1)(P - 2)}{2Q - m(P^2 - 2P)}.$$

Finalmente, la relación $Q = (m + 1)P^2 - mP$, obtenida de (4.57), implica

$$w^{-2}trC = -\frac{1}{2} + \frac{(P - 4)[m(P - \frac{1}{2}) + P]}{m(P + 2)}.$$

Pero $P > 4$, así que $w^{-2}trC > -1/2$. Entonces aplicando la Proposición 4.5.4 concluimos que no hay estabilidad espectral planar. Por lo tanto, los equilibrios relativos colineales no simétricos de este ejemplo son inestables.

Ejemplo 4.5.8. Puntos de equilibrio. Un caso degenerado de equilibrios relativos se obtiene al suponer nula la velocidad angular $w = 0$. Para comprender lo que esto significa, sustituimos $w = 0$ en la ecuación (4.4) de los equilibrios relativos s , entonces

$$\nabla U(s) = 0.$$

Si ahora multiplicamos el gradiente por s^\dagger y aplicamos el Teorema de Euler para funciones homogéneas, obtenemos

$$U(s) = 0.$$

Además, los equilibrios relativos, por definición, son los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones (4.2); un sistema que se reduce, para $w = 0$, al problema cargado de los n -cuerpos,

$$\begin{aligned} \dot{s} &= M^{-1}y, \\ \dot{y} &= \nabla U(s). \end{aligned}$$

Entonces las soluciones de equilibrio relativo con velocidad angular cero son precisamente los puntos de equilibrio del problema cargado de los n -cuerpos, cuya existencia se demostró en la sección 3.1.1. Estas soluciones especiales, donde el sistema de partículas está en reposo permanente, existen únicamente en los problemas cargados no atractivos, ya que sólo en ellas, las fuerzas atractivas y repulsivas pueden ser lo suficientemente importantes como para anularse entre sí.

Al respecto, en la sección 3.1.1 mostramos que los puntos de equilibrio de un problema cargado, están dados por configuraciones centrales con energía cinética y potencial cero. Así, por ejemplo, en el problema cargado de los 3 cuerpos, los puntos de equilibrio corresponden a configuraciones centrales colineales, las cuales se encuentran determinadas por el sistema (3.13)-(3.14). Esto implica una configuración central colineal donde las masas y cargas satisfacen la relación

$$\sqrt{-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}},$$

y cuyas distancias relativas entre partículas están dadas por

$$r_{23} = \sqrt{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}}, \quad r_{13} = 1 + r_{23}, \quad r_{12} = 1.$$

De lo anterior se desprende que el parámetro λ_{13} tiene signo opuesto a λ_{12} y λ_{23} , implicando con ello que la combinación de fuerzas entre partículas sea de tal forma que la partícula central repele a las otras dos, y éstas a su vez se atraen entre sí, o viceversa.

Esta configuración es un ejemplo de equilibrio relativo colineal con velocidad angular cero; para analizar su estabilidad espectral consideramos $w = 0$ en la matriz A definida en (4.18), es decir,

$$A = M^{-1}D\nabla U(s) - \lambda^2 I.$$

Así, un equilibrio relativo con velocidad angular cero es espectralmente estable, si y sólo si, $\lambda^2 \leq 0$ en todas las raíces de la ecuación

$$\det A(\lambda) = 0.$$

Esta condición de estabilidad espectral equivale a decir que todos los valores propios de la matriz

$$B = M^{-1}D\nabla U(s)$$

son reales y no positivos. A continuación se muestra que lo anterior no puede suceder, es decir, la matriz B tiene al menos un valor propio negativo. Para lograr esto expresamos a B como una matriz diagonal por bloques, utilizando los cambios de coordenadas realizados en (4.23) y (4.41), es decir,

$$B = \text{diag}\{C, C, -2C\}. \quad (4.58)$$

La relación entre los valores propios de C es inmediata. El polinomio característico de C en (4.35) está dado por

$$q(\mu) = \mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu.$$

Dado que el coeficiente a_2 tiene una expresión evidentemente positiva,

$$a_2 = \frac{(m_2 + m_3) \lambda_{12}^2}{m_1 m_2 m_3 r_{13} r_{23}},$$

entonces el polinomio $q(\mu)$ tiene raíces no nulas. En otras palabras, la matriz C tiene al menos un valor propio no nulo μ_0 , que es real porque C es simétrica respecto al producto interior definido por la matriz de masas. Por otra parte, dada la forma diagonal por bloques de la matriz B en (4.58), donde C es uno de los bloques, se sigue entonces que μ_0 y $-2\mu_0$ son valores propios de B , uno de los cuales es un número real negativo. Por lo tanto, no hay estabilidad espectral. En conclusión, el equilibrio relativo colineal, con velocidad angular cero, del problema cargado de los 3 cuerpos es inestable.

4.5.2 Equilibrios relativos no colineales

Un conjunto de 3 partículas constituye equilibrios relativos no colineales, según (4.31), únicamente en el caso atractivo, es decir, cuando los tres parámetros δ_{12} , δ_{13} y δ_{23} son positivos. Entonces la Proposición 4.4.1 implica que *todos los equilibrios relativos no colineales tienen estabilidad espectral normal*.

Así que sólo falta analizar la estabilidad espectral planar. En la sección 4.5 se observa claramente el efecto tan notable que tiene la fuerza Coulombiana, al modificar gran parte de lo que usualmente se conoce sobre equilibrios relativos en el problema Newtoniano de los 3 cuerpos. Por ejemplo, un aspecto

relevante en el problema cargado es la notable diversidad de configuraciones que tienen los equilibrios relativos no colineales, pues cualquier figura triangular es configuración de algún equilibrio relativo no colineal (Proposición 4.5.1). El siguiente resultado determina la estabilidad espectral de estos equilibrios relativos, donde θ_i es el ángulo interior correspondiente al vértice del triángulo donde se encuentra la i -ésima partícula.

Teorema 4.5.9. *En el problema cargado de los 3 cuerpos, un equilibrio relativo no colineal es espectralmente estable no degenerado, si y sólo si, las masas y las cargas satisfacen la desigualdad*

$$36 (m_1 m_2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 + m_1 m_3 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + m_2 m_3 \operatorname{sen}^2 \theta_1) \leq (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

Demostración. Dado que un equilibrio relativo no colineal siempre tiene estabilidad espectral normal, únicamente se analizará la estabilidad espectral planar. Para esto se requiere calcular, según (4.39), w^2 y la traza de las matrices L y L^2 .

Cálculo de w^2 . Para este equilibrio relativo, (4.7) se reduce a la expresión $w^2 = U(s)/s^t M s$. La función potencial $U(s)$, por (4.31) está dada por

$$U(s) = m_1 m_2 \delta_{12} + m_1 m_3 \delta_{12}^{1/3} \delta_{13}^{2/3} + m_2 m_3 \delta_{12}^{1/3} \delta_{23}^{2/3}.$$

Para calcular $s^t M s$ se considera que el centro de masa está fijo en el origen de coordenadas, pues el momento de inercia puede escribirse como función de las distancias mutuas

$$s^t M s = \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Aplicando (4.31) se obtiene

$$s^t M s = \frac{m_1 m_2 \delta_{12} + m_1 m_3 \delta_{12}^{1/3} \delta_{13}^{2/3} + m_2 m_3 \delta_{12}^{1/3} \delta_{23}^{2/3}}{\delta_{12} (m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Finalmente, se obtiene

$$w^2 = \delta_{12} (m_1 + m_2 + m_3). \quad (4.59)$$

Cálculo de la traza de L . Usando (4.21) se deduce la relación

$$\operatorname{tr} L = \operatorname{tr}(L_{11} + L_{22} + L_{33}) = -\operatorname{tr}(L_{12} + L_{13} + L_{21} + L_{23} + L_{31} + L_{32}),$$

donde L_{jk} es una matriz 2×2 , que para $j \neq k$ se escribe como

$$L_{jk} = m_k D_{jk}, \quad D_{jk} = \delta_{jk} r_{jk}^{-3} (I - 3u_{jk}u_{jk}^t),$$

donde u_{jk} es un vector unitario en \mathbb{R}^2 . Por (4.31) se sigue que $\delta_{jk} r_{jk}^{-3} = \delta_{12}$ para toda $j \neq k$, entonces

$$D_{jk} = \delta_{12} (I - 3u_{jk}u_{jk}^t), \quad j \neq k. \quad (4.60)$$

Dado que $\operatorname{tr}(uu^t) = |u|^2$ para toda $u \in \mathbb{R}^2$, al aplicar esta relación al caso particular del vector unitario u_{jk} , se obtiene

$$\operatorname{tr}(u_{jk}u_{jk}^t) = 1, \quad j \neq k. \quad (4.61)$$

Por lo tanto, $\operatorname{tr} D_{jk} = -\delta_{12}$ y $\operatorname{tr} L_{jk} = -m_k \delta_{12}$. Finalmente,

$$\operatorname{tr} L = 2(m_1 + m_2 + m_3) \delta_{12}. \quad (4.62)$$

Cálculo de la traza de L^2 . Después de desarrollar L^2 por bloques y considerar que el producto $L_{jk}L_{kj}$ conmuta, obtenemos

$$\operatorname{tr} L^2 = \operatorname{tr} P,$$

donde P es la matriz 2×2 dada por

$$P = (L_{12} + L_{21})^2 + (L_{13} + L_{31})^2 + (L_{23} + L_{32})^2 + 2(L_{12}L_{13} + L_{21}L_{23} + L_{31}L_{32})$$

pero $L_{jk} = m_k D_{jk}$, entonces

$$P = (m_1 + m_2)^2 D_{12}^2 + (m_1 + m_3)^2 D_{13}^2 + (m_2 + m_3)^2 D_{23}^2 + 2m_2m_3 D_{12}D_{13} + 2m_1m_3 D_{21}D_{23} + 2m_1m_2 D_{31}D_{32}. \quad (4.63)$$

Usando (4.60) y (4.61) expresamos la traza de los productos $D_{jk}D_{jl}$ como

$$\operatorname{tr} D_{jk}D_{jl} = \delta_{12}^2 (-4 + 9 \operatorname{tr}(u_{jk}u_{jk}^t)(u_{jl}u_{jl}^t)),$$

pero $\text{tr}(uu^t)(vv^t) = (u \cdot v)^2$ para cualesquiera vectores en \mathbb{R}^2 , entonces

$$\delta_{12}^{-2} \text{tr} D_{jk} D_{jl} = -4 + 9(u_{jk} \cdot u_{jl})^2.$$

Además, $u_{jk} \cdot u_{jl} = \cos \theta_j$, donde $\theta_j = \text{ang}\{u_{jk}, u_{jl}\}$, pues los vectores u_{jk} y u_{jl} son unitarios, entonces

$$\delta_{12}^{-2} \text{tr} D_{jk} D_{jl} = 5 - 9 \text{sen}^2 \theta_j,$$

en el caso particular $k = l$, se escribe

$$\text{tr} D_{jk}^2 = 5 \delta_{12}^2.$$

Finalmente,

$$\text{tr} L^2 = \text{tr} P = 10 \delta_{12}^2 \left(\sum_{i=1}^3 m_i \right)^2 - 18 \delta_{12}^2 \sum_{i \neq j \neq k} m_i m_j \text{sen}^2 \theta_k. \quad (4.64)$$

Por lo tanto, las expresiones obtenidas para w^2 , $\text{tr} L$ y $\text{tr} L^2$ implican en el polinomio Q_3 en (4.39), lo siguiente

$$Q_3 = \lambda^4 + (\delta_{12} \sum m_i) \lambda^2 + (9 \delta_{12} \sum m_i m_j \text{sen}^2 \theta_k).$$

El criterio de estabilidad espectral implica que las 4 raíces de Q_3 son números imaginarios puros, entonces usando (4.29) se concluye la demostración. \square

Ejemplo 4.5.10. (Caso Newtoniano) Según (4.31), un equilibrio relativo no colineal tiene forma de triángulo equilátero si las masas y las cargas son tales que $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} > 0$. Esto incluye por supuesto, al sistema Newtoniano donde las cargas son nulas, pues en tal caso, $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 1$. Entonces aplicando el Teorema 4.5.9, tenemos que este equilibrio relativo es espectralmente estable no degenerado, si se cumple la desigualdad de masas:

$$27(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) < (m_1 + m_2 + m_3)^2. \quad (4.65)$$

Este es un resultado bien conocido en el problema clásico Newtoniano de los 3 cuerpos, y conocidas son también las consecuencias que se derivan de esta desigualdad de masas. *En el caso que las 3 masas son iguales entre sí,*

no se cumple la desigualdad (4.65), es decir, el equilibrio relativo equilátero con masas iguales es inestable. Por lo contrario, cuando una masa es significativamente mayor que las demás, se concluye que el equilibrio relativo triangular equilátero es espectralmente estable.

Este último resultado lo podemos observar en el sistema de cuerpos celestes formado por el Sol, Jupiter y los asteroides troyanos, pues la trayectoria Lagrangiana de este sistema, donde el Sol tiene la masa dominante, se ha mostrado estable desde la época en que se descubrió.

Ejemplo 4.5.11. (Caso General) Aquí se generaliza el resultado obtenido en el ejemplo 4.5.10, de manera que ahora estudiamos la estabilidad de los equilibrios relativos no colineales cuyas configuraciones triangulares no son equiláteras.

La Proposición 4.5.1 afirma que cualquier figura triangular A fijada previamente es la configuración de un equilibrio relativo no colineal, para lo cual se escogen adecuadamente las masas y las cargas. La forma de seleccionar estos parámetros es con los cocientes $\delta_i = q_i/m_i$, $i = 1, 2, 3$, que deben satisfacer (4.3.4) en la Proposición 4.5.1. Dado que este proceso sólo restringe los cocientes q_i/m_i , entonces los equilibrios relativos existen para cualquier selección de masas.

Esto permite utilizar el Teorema 4.5.9 para analizar la estabilidad espectral de un equilibrio relativo no colineal, cuya configuración triangular tiene ángulos interiores θ_1 , θ_2 y θ_3 arbitrarios, pero fijos, con cualesquiera masas m_1 , m_2 y m_3 . De manera análoga al caso del triángulo equilátero, la desigualdad del Teorema 4.5.9 se cumple cuando una de las masas es dominante. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado que complementa lo expresado en la Proposición 4.5.1

Proposición 4.5.12. *En el problema cargado de los 3 cuerpos, dada una figura triangular arbitraria A , existen masas y cargas para las cuales A es la configuración de un equilibrio relativo no colineal espectralmente estable no degenerado.*

Equilibrio relativo con 3 masas iguales En el problema clásico Newtoniano es bastante conocido que todo equilibrio relativo con las 3 masas iguales entre sí, es inestable. La estabilidad espectral sólo existe si una de las masas es dominante.

Ahora revisamos lo anterior en el contexto de los problemas cargados. La Proposición 4.5.12 afirma que existen equilibrios relativos no colineales espectralmente estables para cualquier configuración triangular fijada previamente, para cualesquiera masas. En particular, consideramos aquellos equilibrios relativos con las tres masas iguales; la condición de estabilidad espectral del Teorema 4.5.9 se reduce a la siguiente expresión

$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 \leq 1/4. \quad (4.66)$$

Entonces la identidad trigonométrica $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, implica que la desigualdad (4.66) se cumple sólo si uno de los 3 ángulos interiores es cercano a π . De aquí se concluye que un equilibrio relativo no colineal con masas iguales también es espectralmente estable no degenerado, y su configuración triangular es casi colineal.

Con estas masas, las cargas necesarias para satisfacer la desigualdad (4.66) se encuentran usando la ley de los cosenos en (4.31). Un ejemplo corresponde al caso en que las 3 partículas tienen masas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ y cargas $q_1 = q_2 = 0.90$ y $q_3 = 1.08$. Para esta selección de parámetros existe un equilibrio relativo no colineal espectralmente estable, donde los ángulos interiores son $\theta_1 = \theta_2 = 5^\circ$ y $\theta_3 = 170^\circ$. Observemos en este caso particular que las masas y las cargas son aproximadamente iguales entre sí, lo cual implica que la estabilidad espectral en un equilibrio relativo no colineal, no requiere necesariamente de la presencia de una masa dominante o una carga dominante.

Un resultado semejante se obtiene en el caso más general, donde en lugar de considerar que las 3 masas son iguales entre sí, ahora suponemos una selección arbitraria de masas. Es claro por el Teorema 4.5.9 que para cualesquiera masas siempre existen equilibrios relativos no colineales espectralmente estables no degenerados, para esto las cargas deben ser tales que la configuración triangular sea lo suficientemente cercana a una configuración colineal.

Equilibrio relativo asintótico Según la Proposición 4.5.12, en el problema cargado de los 3 cuerpos, dada una configuración triangular arbitraria,

siempre es posible encontrar masas y cargas para las cuales existe un equilibrio relativo no colineal espectralmente estable no degenerado con la configuración fijada previamente. Inclusive hasta los equilibrios relativos colineales también pueden ser espectralmente estables. Estos dos hechos, que por si mismos son muy notables, indican la posible presencia de alguna relación entre ellos.

Para analizar esta situación considérese una sucesión S de equilibrios relativos no colineales cuyas formas triangulares tienden hacia una configuración colineal. Dado que la estabilidad de los equilibrios relativos colineales fue analizada con la ordenación $s_1 < s_2 < s_3$ y $s_3 - s_1 = 1$, es necesario considerar, para la sucesión S , un cambio de índices $2 \leftrightarrow 3$ en (4.31), y suponer el límite colineal de manera que las partículas tengan la ordenación $s_1 < s_2 < s_3$.

De acuerdo a estas consideraciones, la sucesión S de equilibrios relativos no colineales tiene un límite colineal, donde las partículas se encuentran ordenadas por la relación $s_1 < s_2 < s_3$, con $s_3 - s_1 = 1$, y las distancias entre ellas están dadas por

$$r_{12} = \sqrt[3]{\frac{\delta_{12}}{\delta_{13}}}, \quad r_{23} = \sqrt[3]{\frac{\delta_{23}}{\delta_{13}}}, \quad r_{13} = 1, \quad (4.67)$$

donde los parámetros δ_{jk} son tales que

$$\sqrt[3]{\frac{\delta_{12}}{\delta_{13}}} + \sqrt[3]{\frac{\delta_{23}}{\delta_{13}}} = 1. \quad (4.68)$$

Para ver si este límite corresponde a un equilibrio relativo colineal aplicamos las coordenadas x y y usadas en la sección 4.5.1, es decir,

$$x = (s_2 - s_1)^{-1}, \quad y = (s_3 - s_2)^{-1}.$$

En estas coordenadas las ecuaciones (4.67) se escriben como

$$x = \sqrt[3]{\frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{\delta_{13}}{\delta_{23}}}, \quad (4.69)$$

donde $x^{-1} + y^{-1} = 1$, $x > 1$, $y > 1$. Ahora puede verificarse con relativa facilidad que la configuración asintótica dada por (4.68) y (4.69) satisface el sistema de ecuaciones (4.46), esto significa que *la configuración asintótica es un equilibrio relativo colineal*.

En lo que respecta a su estabilidad espectral usamos las Proposiciones 4.4.1 y 4.5.4; la primera implica que existe estabilidad espectral normal, pues el problema cargado es de tipo atractivo; para utilizar la segunda proposición es necesario calcular las expresiones w^2 y la traza de C , que por (4.47) y (4.48) se obtiene, respectivamente

$$\begin{aligned}w^2 &= (m_1 + m_2 + m_3) \delta_{13}, \\ \text{tr} C &= -2(m_1 + m_2 + m_3) \delta_{13},\end{aligned}$$

es decir,

$$w^{-2} \text{tr} C = -2.$$

Entonces la Proposición 4.5.4 implica que el equilibrio relativo colineal asintótico es planar espectralmente estable, pero degenerado. Por lo tanto, existe estabilidad espectral normal y también planar, en otras palabras, *el equilibrio relativo colineal asintótico es espectralmente estable degenerado.*

Esto llama la atención porque estas soluciones quedan ubicadas justo en la frontera de dos regiones importantes; por un lado, en la región donde $w^{-2} \text{tr} C < 2$ se encuentran los equilibrios relativos colineales inestables, que contienen, entre otras, a las soluciones de Euler del problema Newtoniano de los 3 cuerpos; por el otro extremo, en la región donde $w^{-2} \text{tr} C > 2$ están contenidos los equilibrios relativos colineales con estabilidad espectral no degenerada. Esto nos permite concluir lo siguiente:

El equilibrio relativo colineal asintótico separa dos conjuntos de equilibrios relativos colineales: las soluciones de Euler del problema clásico Newtoniano y los equilibrios relativos colineales con estabilidad espectral no degenerada.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis hablan por sí mismos de la gran importancia que tienen los problemas cargados. Aquí obtenemos resultados novedosos y sorprendentes, por lo inesperado, y queda una clara idea de lo mucho que se puede investigar en este tipo de problemas. Las expectativas a futuro en este campo son amplias y muy diversas. Este es un trabajo de investigación que estamos seguros será abordado cada vez con mayor frecuencia, dado el interés que están despertando en la comunidad los escasos artículos de investigación que tratan esta temática. El estudio de los problemas cargados es reciente, y por lo mismo, es poca la literatura que trata la dinámica producida por las partículas cargadas en el contexto de la Mecánica Clásica.

Las principales aportaciones de este trabajo son las siguientes:

1. *Hemos encontrado una clasificación completa de los equilibrios relativos espectralmente estables en el problema cargado de los tres cuerpos.*
2. *A diferencia del problema clásico Newtoniano, en los problemas cargados los equilibrios relativos colineales, sí pueden ser espectralmente estables.*
3. *En los problemas cargados existen puntos de equilibrio, los cuales están dados por configuraciones centrales donde la energía cinética y potencial son nulas.*
4. *Existen equilibrios relativos no planares (lo que no sucede en el problema clásico), los cuales, además, no se obtienen por la rotación de configuraciones centrales.*
5. *Los continuos de configuraciones centrales son muy comunes en el problema cargado de los n -cuerpos, y existen para toda $n \geq 4$.*

Estos resultados, si bien son importantes, es necesario complementarlos. Por ejemplo, en lo que respecta al estudio de la estabilidad espectral, ahora sabemos que los equilibrios relativos colineales también son espectralmente estables, pero falta un estudio mas amplio donde se aborde la dinámica de las partículas en un sentido mas profundo. Esto involucraría dos etapas: la parte numérica y la parte analítica que muestren hasta que grado son estables las soluciones de equilibrio relativo. No sabemos si sólo son estables para tiempos pequeños, o tal vez, como frecuentemente sucede con la estabilidad espectral, son estables para tiempos lo suficientemente grandes para lo que usualmente se requiere en un trabajo numérico. En cuanto a la parte analítica, la herramienta mas natural para su estudio es la teoría KAM, y ésta nos podría decir si los equilibrios relativos colineales son estables en el sentido de Liapunov.

Por otra parte, en lo que respecta a los puntos de equilibrio del problema cargado hace falta analizar la dinámica a su alrededor. Estos puntos tienen el inconveniente de no ser puntos de equilibrio aislados, ya que están dados por configuraciones centrales, lo cual dificulta su estudio. Pero creemos que de aquí pueden surgir resultados valiosos.

Respecto a los continuos de configuraciones centrales habrá que pensar si tienen alguna importancia mayor, alguna utilidad, o simplemente quedarán como una mera curiosidad matemática.

Bibliografía

- [1] A. Albouy, *The symmetric central configurations of four equal masses*, Contemporary Mathematics **198**, 131–135 (1996).
- [2] F. Alfaro, and E. Pérez-Chavela, *The Rhomboidal Charged Four Body Problem*, Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics (HAMSYS-98), Proc. of the III Int. Symp., 1–19 (2000).
- [3] A. Atela, *The Charged Isosceles 3-Body Problem*, Contemporary Mathematics **81**, 43–58 (1988).
- [4] P. Atela and R. McLachlan, *Global Behavior of the Charged Isosceles Three-Body Problem*, International Journal of Bifurcation and Chaos **4**, 865–884 (1994).
- [5] J. Casasayas and J. Llibre, *Qualitative analysis of the anisotropic Kepler problem*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. **52**, No. 312, (1984).
- [6] J. Casasayas and A. Nunes, *A restricted charged four-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **47**, 245–266 (1990).
- [7] A. Chenciner and R. Montgomery, *A remarkable solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Annals of Mathematics **152**, No. 3, 881–901 (2000).

- [8] I. Davies, A. Truman and D. Williams, *Classical periodic solutions of the equal-mass $2n$ -body problem, $2n$ -ion problem and the n -electron atom problem*, Physics Letters A **99**, No. 1, 15-18 (1983).
- [9] L. Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. **11**, 144-151 (1767).
- [10] C. Gutzwiller, *The anisotropic Kepler problem in two dimensions*, J. Math. Physics **14**, 139-152 (1973).
- [11] E. Lacombe and E. Pérez-Chavela, *Motions Close to Escapes in the Rhomboidal Four Body Problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **57**, 411-437 (1993).
- [12] J. Lagrange, *Essai sur le probleme des trois corps*, Euvres, vol **6**, 272-292, Paris, (1872).
- [13] I. Langmuir, *The structure of the helium atom*, Research Laboratory, General Electric, **XVII**, No. 3, 339-353 (1920).
- [14] R. McGehee, *Triple collisions in the collinear three body problem*, Invention Math. **27**, 191-227 (1974).
- [15] K. Meyer and G. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the n -Body Problem*, Applied Mathematical Science **90**, Springer-Verlag (1992).
- [16] R. Moeckel, *Relative equilibria of the four-body problem*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **5**, 417-435 (1985).
- [17] R. Moeckel, *Linear Stability Analysis of Some Symmetrical Classes of Relative Equilibria*, Applied Mathematical **63**, 291-317 (1995).

- [18] R. Moeckel, *Linear stability of relative equilibria with a dominant mass*, J. Dynam. Diff. Eqns. **6**, 37–51 (1994).
- [19] E. Pérez-Chavela, D. Saari, A. Susin and Z. Yan, *Central Configuration in the Charged three body problem*, Contemporary Mathematics **198**, 137–155 (1996).
- [20] G. E. Roberts, *A continuum of relative equilibria in the five-body problem*, Physica D. Nonlinear Phenomena **127**, no. 3-4, 141–145 (1999).
- [21] D. Saari, *On the role and properties of n -body central configurations*, Celestial Mechanics **21**, 9–20 (1980).
- [22] S. Smale, *Problems on the nature of relative equilibria in celestial mechanics*, Lecture Notes in Math. **197**, 194–198 (1971).
- [23] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20**, No. 2, 7–15 (1998).
- [24] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Math. Series **5**, Princeton Univ. Press, N.J. 1941.
- [25] Z. Xia, *Central Configurations with Many Small Masses*, Journal of Differential Equations **91**, 168–179 (1991).

