



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA IZTAPALAPA

**Estados estacionarios de equilibrio local  
del proceso de absorción y emisión de  $m$  y  
 $n$  fotones**

Tesis que presenta:

**Marco Antonio Cruz de la Rosa**

para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias (Matemáticas)**

Asesor: Dr. Roberto Quezada Batalla.

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Secretario: Dr. Oswaldo González Gaxiola

Vocal: Dr. Julio César García Corte

Vocal: Dr. Jesús Adrián Espínola Rocha

Vocal: Dr. Gabriel Kantún Montiel

Ciudad de México, julio de 2017



Estados estacionarios de equilibrio local del proceso de  
absorción y emisión de  $m$  y  $n$  fotones

Marco Antonio Cruz de la Rosa

10 de julio de 2017



*Dedico esta tesis a mi familia*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Roberto Quezada, por todo el camino recorrido, por las incontables horas de trabajo que pasamos, por sus enseñanzas, por su paciencia casi infinita, por su apoyo y dedicación, gracias.

Agradezco a mi familia la oportunidad que me dieron de estudiar, en especial a mi madre y a mi padre por su apoyo, a mi hermana Carmen, a mi cuñado Dagoberto a quien extrañamos y esperamos pronto ver, a mi sobrina Ximena y al pequeño Daniel, a mis hermanos Raúl y Paco, a todos ellos por enseñarme y compartir conmigo el amor de familia.

A mis amigos y compañeros; Cecilia, Iván, Mine, Fer y Leo por hacer más ameno el solitario camino del doctorado. A Iván González por su amistad y compañía, a Donaji y a la pequeña Sofía. A Eli, Ángel y Victor mis amigos de vida.

A mis sinodales por sus valiosos comentarios y observaciones, al Dr. Adrián Espínola por las fructíferas charlas que tuvimos en la revisión de la tesis y al Dr. Julio García por sus comentarios, gracias.

Finalmente quiero agradecer a mi *alma máter* la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, a quien le debo en gran parte mi formación académica y humana, en particular al Departamento de Matemáticas, gracias.





# Índice general

Resumen	XI
Introducción	XIII
<b>1. Semigrupos cuánticos de Markov</b>	<b>1</b>
<b>2. Estados estacionarios de equilibrio local del proceso de absorción y emisión de <math>m</math> y <math>n</math> fotones</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. El generador de Markov y estados de balance detallado . . .	8
2.2.1. Balance detallado cuántico . . . . .	13
2.2.2. Balance detallado y el proceso clásico . . . . .	15
2.3. Un generador del tipo de absorción y emisión de $m$ y $n$ fotones	16
2.3.1. Existencia de estados invariantes de equilibrio local que no son de balance detallado . . . . .	19
2.3.2. Regímenes de absorción y emisión . . . . .	24
<b>3. El proceso de absorción de <math>n</math> fotones con bombeo hamiltoniano</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. El generador GKSL y el semigrupo mínimo . . . . .	28
3.3. Vectores pseudo-exponenciales . . . . .	31
3.4. La $C^*$ -álgebra matricial $\mathcal{C}_{0,n}$ . . . . .	33
3.5. Estados estacionarios coherentes . . . . .	35
3.6. Convergencia al estado estacionario . . . . .	40
3.7. Una aplicación a control cuántico . . . . .	44
3.7.1. Absorción de $n$ fotones ( $\gamma = 0$ ): estados invariantes y dominios de atracción . . . . .	44
3.7.2. La estructura $\mathbb{Z}_n$ de los estados invariantes para $\gamma \neq 0$	47
3.7.3. El bombeo hamiltoniano como control . . . . .	48

---

3.8. El caso $n = 2$ . . . . .	49
3.8.1. Proyecciones subarmónicas . . . . .	49
3.8.2. Estructura par-impar . . . . .	50
<b>4. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>53</b>
<b>Apéndices</b>	<b>55</b>
<b>A. Operadores lineales</b>	<b>57</b>
<b>B. Notación bra-ket</b>	<b>61</b>
<b>C. Álgebras de von Neumann</b>	<b>63</b>
<b>D. Vectores exponenciales</b>	<b>65</b>

*Luz y materia son ambas  
entidades individuales,  
y la aparente dualidad  
emerge de las limitaciones  
de nuestro lenguaje*

*W. Heisenberg*



# Resumen

Los semigrupos cuánticos de Markov modelan la evolución de un sistema cuántico que interactúa con su entorno (sistemas cuánticos abiertos). Sus estados estacionarios (invariantes) son de muy diversas clases. Los estados estacionarios que satisfacen una condición de balance detallado se consideran frecuentemente estados de equilibrio. En este trabajo mostramos que existen sistemas cuánticos abiertos con estados estacionarios que no satisfacen una condición de balance detallado. En particular, estudiamos estados estacionarios de balance detallado y estados que no satisfacen dicha condición, de un generador infinito dimensional del tipo de acoplamiento débil, que modela el proceso de absorción y emisión simultánea de  $m$  y  $n$  fotones, con  $m, n \geq 1$ . La diversidad de comportamientos más allá del balance detallado incluye estados estacionarios de muchas clases. Los más cercanos al balance detallado, que llamamos de *equilibrio local* (o *localmente de Gibbs*), son muy interesantes. No obstante su cercanía con el balance detallado, mostraremos que éstos presentan una gran variedad de nuevos fenómenos físicos, incluyendo regímenes de auto-organización que son típicos de los así llamados sistemas complejos. Con el propósito de mostrar otras clases de estados estacionarios, también estudiamos el proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano. Introducimos un conjunto de vectores que llamamos *pseudoexponenciales*, los cuales son muy útiles para calcular explícitamente los estados estacionarios de dicho proceso. Caracterizamos el dominio de atracción de los estados invariantes del proceso de absorción de  $n$  fotones puro, es decir, sin bombeo hamiltoniano, y aplicamos nuestros resultados para dar una interpretación del bombeo hamiltoniano como un control.

*Palabras clave:* Generador de Markov del tipo de acoplamiento débil, estados estacionarios de equilibrio y de equilibrio local, absorción y emisión de  $n$  fotones.



# Introducción

Los semigrupos cuánticos de Markov modelan la evolución de un sistema cuántico que interactúa con su entorno (sistemas cuánticos abiertos). Sus estados estacionarios (o invariantes) son de muy diversas clases. Los estados estacionarios que satisfacen una condición de balance detallado se consideran frecuentemente estados de equilibrio. Este tipo de condiciones han sido ampliamente estudiadas en la literatura, entre otros por Alicki [4], Kosakowski, Frigerio, Gorini and Verri [18, 19, 20] y han motivado la noción de balance detallado cuántico, entre otras. El análogo clásico de esta condición se conoce en la teoría de procesos de Markov clásicos con el nombre de reversibilidad temporal.

En este trabajo mostraremos que existen sistemas cuánticos abiertos con estados estacionarios que no satisfacen una condición de balance detallado. La diversidad de estos estados estacionarios es tan grande que cualquier intento por clasificarlos en términos de unas cuantas propiedades sería infructuoso. Un programa más realista es el que se inició en la referencia [1], donde se identificó la clase de generadores infinitesimales de semigrupos cuánticos de Markov del tipo de acoplamiento débil, una clase que es lo suficientemente rica para incluir estados de balance detallado y otros que no lo son, pero a la vez lo suficientemente simple para permitir el estudio de sus estados invariantes y en algunos casos su cálculo explícito.

La diversidad de comportamientos más allá del balance detallado incluye estados estacionarios de muchas clases. Sin duda los más interesantes son los más cercanos al balance detallado que llamaremos de equilibrio local (o balance detallado generalizado). No obstante su cercanía con el balance detallado, éstos presentan una gran variedad de nuevos fenómenos físicos, incluyendo regímenes de auto-organización que son típicos de los

así llamados sistemas complejos.

El contenido de este trabajo se ha organizado como a continuación se indica. El capítulo 1 contiene una breve introducción a la teoría de semigrupos cuánticos de Markov, que incluye los resultados más importantes que usamos en los capítulos posteriores.

Los generadores de Markov del tipo de acoplamiento débil tienen importantes propiedades estructurales que permiten el cálculo explícito de sus estados invariantes de equilibrio y de equilibrio local como funciones del hamiltoniano o elementos en el conmutador de este operador. Nociones como balance detallado, balance detallado generalizado y estados invariantes de equilibrio local se ilustraron en [1] con ejemplos finito dimensionales.

Nuestro objetivo en el capítulo 2 es estudiar estados estacionarios de equilibrio local, que incluyen estados de balance detallado y estados que no satisfacen la condición balance detallado, de un generador infinito dimensional del tipo de acoplamiento débil, que modela el proceso de absorción y emisión simultánea de  $m$  y  $n$  fotones, con  $m, n \geq 1$ . El interés en los procesos de multi-fotones se debe a sus potenciales aplicaciones por ejemplo, en el procesamiento óptico de datos y emisión de luz coherente (lasing), véase [26, 32, 38] y las referencias ahí mencionadas. Aunque el proceso más estudiado es el de absorción y/o emisión de dos fotones, recientemente los procesos de multi-fotones de orden superior, como absorción y/o emisión de tres o cuatro fotones han recibido una atención considerable.

En la primera parte de ese capítulo estudiamos los estados estacionarios de balance detallado del proceso de absorción y emisión simultánea de  $m$  y  $n$  fotones con tasas de absorción y emisión constantes y  $m, n \geq 1$ . Demostramos que todos los estados estacionarios del semigrupo cuántico de Markov correspondiente son combinaciones lineales convexas de  $r$  estados invariantes mutuamente ortogonales que satisfacen la condición de balance detallado, donde  $r$  es el máximo común divisor de  $m$  y  $n$ . Demostramos también que la condición de *balance detallado cuántico* se satisface.

Posteriormente introducimos un generador de Markov del tipo de límite de acoplamiento débil que modela el proceso de absorción y emisión de  $m$  y  $n$  fotones con tasas de emisión y



---

absorción variables, en la sección 2.3 demostramos la existencia de estados estacionarios que no son de balance detallado para el semigrupo correspondiente, bajo condiciones naturales sobre las tasas de absorción y emisión. En el caso  $n = 4$  y  $m = 2$ , este conjunto de estados invariantes presenta una interesante estructura par-impar, similar a los descritos en [13] para estados de balance detallado. Los estados estacionarios de no balance detallado con estructura par e impar son localmente Gibbs, por esta razón los llamamos de *equilibrio local*, y cada uno está asociado con dos regímenes estacionarios: absorción y emisión.

Con el propósito de mostrar otras clases de estados estacionarios, en el capítulo 3 estudiamos el proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano. Después de algunos preliminares definimos un conjunto de vectores que llamamos *pseudoeexponenciales*, los cuales son muy útiles para calcular explícitamente los estados estacionarios de dicho proceso. En la sección 3.4 introducimos una clase de  $C^*$ -álgebras finito dimensionales y caracterizamos sus elementos positivos. La sección 3.5 contiene el cálculo, parametrización y clasificación, de acuerdo a su rango, del conjunto de estados coherentes invariantes. Las propiedades de aproximación al estado estacionario se establecen en la sección 3.6. En la sección 3.7 caracterizamos el dominio de atracción de los estados invariantes del proceso de absorción de  $n$  fotones puro, es decir, sin bombeo hamiltoniano, y aplicamos nuestros resultados para dar una interpretación del bombeo hamiltoniano como un control. Finalizamos el capítulo ilustrando con el caso  $n = 2$  las propiedades antes mencionadas.

Algunos resultados importantes que se usan a lo largo del trabajo pero no se incluyen en el texto principal se presentan en un apéndice al final del trabajo.



# Capítulo 1

## Semigrupos cuánticos de Markov

La noción de semigrupo de operadores lineales es una extensión natural de la exponencial de una matriz a la exponencial de un operador (posiblemente no acotado). Con la maquinaria del Análisis Funcional, la teoría de semigrupos surgió y se desarrolló principalmente entre los años 1930 y 1960, con importantes contribuciones de Stone, Hille, Yosida y Feller, entre otros. Una clase amplia de estos semigrupos son los *semigrupos cuánticos de Markov* (qms por sus siglas en inglés), introducidos en los años setenta. Desde entonces hasta nuestros días estos semigrupos han sido intensamente estudiados en los campos de la física y la matemática.

Los qms aparecen en el estudio de la evolución irreversible (no unitaria) de los sistemas cuánticos abiertos, aquellos que interactúan con el entorno. En la práctica todos los sistemas cuánticos son abiertos, por lo cual su estudio es de gran interés, véase por ejemplo, [5], [6], [7], [23] y las referencias ahí mencionadas<sup>1</sup>.

Los semigrupos cuánticos de Markov son una extensión no conmutativa de los semigrupos de Markov definidos en probabilidad clásica. Desde el punto de vista matemático, son semigrupos de operadores lineales positivos (completamente positivos) sobre un álgebra de operadores, continuos en la variable temporal con respecto a cierta topología.

En este capítulo además de presentar la definición de semigrupo cuántico de Markov sobre un espacio de Hilbert, daremos algunas de sus propiedades

---

<sup>1</sup>Inclusive se ha utilizado la teoría de los sistemas cuánticos abiertos en las ciencias sociales, por ejemplo, para modelar el proceso de toma de decisiones en las elecciones de Estados Unidos, véase [31].

más importantes. Para esto presentamos a continuación las definiciones y herramientas matemáticas que usaremos a lo largo de la tesis.

Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de von Neumann, el símbolo  $\mathfrak{h}$  denotará un espacio de Hilbert complejo separable con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  antilineal en la primer variable y lineal en la segunda, con norma  $\| \cdot \|$ ;  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  es el álgebra de von Neumann de los operadores lineales acotados en  $\mathfrak{h}$ ;  $L_1(\mathfrak{h})$  es el espacio de los operadores sobre  $\mathfrak{h}$  de traza finita con norma  $\|\rho\|_1 = \text{tr}|\rho|$ , donde  $|\rho| = \sqrt{\rho^* \rho}$  y  $\text{tr}(\rho)$  es la traza del operador  $\rho$ .

**Definición 1.0.1.** *Un semigrupo dinámico cuántico (qds por sus siglas en inglés) sobre  $\mathcal{A}$ , es una familia  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  de operadores lineales que satisfacen las siguientes condiciones*

1.  $\mathcal{T}_0 = I$ ,
2.  $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$  para todo  $t, s \geq 0$ ,
3.  $\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$ ,
4.  $\mathcal{T}_t$  es completamente positivo para todo  $t \geq 0$ ,
5.  $\mathcal{T}_t$  es normal para todo  $t \geq 0$ ,
6. para cada  $a \in \mathcal{A}$ , el mapeo  $t \rightarrow \mathcal{T}_t(a)$  es continuo con respecto a la topología  $\sigma$ -débil sobre  $\mathcal{A}$ ,

donde  $\mathbb{1}$  es el operador identidad en  $\mathcal{A}$ .

**Definición 1.0.2.** *El generador infinitesimal (o simplemente generador) del semigrupo dinámico cuántico  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ , es el operador  $\mathcal{L}$  con dominio  $D(\mathcal{L})$ , donde para cada  $a \in \mathcal{A}$  existe un elemento  $b \in \mathcal{A}$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t a - a}{t} = b \quad (1.1)$$

en la topología  $\sigma$ -débil y  $\mathcal{L}(a) = b$ .

**Observación 1.0.3.** *Si  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow \mathfrak{h}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo, es fácil ver que  $D(\mathcal{L})$  es un subespacio vectorial de  $\mathfrak{h}$ .*

**Definición 1.0.4.** *Un semigrupo dinámico cuántico es de Markov (qms) o conservativo si  $\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  para toda  $t \geq 0$ .*

**Ejemplo 1.0.5.** Sea  $H$  un operador autoadjunto. El semigrupo implementado por el grupo unitario  $(e^{itH})_{t \in \mathbb{R}}$  está definido como

$$\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}, \quad \forall x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$$

Si  $H$  es acotado, entonces el semigrupo es uniformemente continuo, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{T}_t - I\| = 0$$

en la topología inducida por la norma.

En este caso el generador es

$$\mathcal{L}(x) = i(Hx - xH) = i[H, x] \quad \forall x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}).$$

Si  $H$  es no acotado, la expresión anterior debe ser considerada como una forma sesquilineal

$$\mathcal{L}(x)[u, v] = i\langle Hu, xv \rangle - i\langle v, xHu \rangle$$

para cada  $u, v$  en el dominio  $D(H)$  de  $H$  y  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

Otros ejemplos de semigrupos cuánticos de Markov uniformemente continuos se pueden encontrar en [9], [12] y [27].

**Definición 1.0.6.** Al espacio de todos los funcionales  $\sigma$ -débil continuos sobre el álgebra de von Neumann  $\mathcal{A}$  se le llama espacio predual de  $\mathcal{A}$  y se denota por  $\mathcal{A}_*$ .

De la definición anterior es claro que  $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A}^*$ . Además  $\mathcal{A}_*$  es un espacio de Banach en la norma de  $\mathcal{A}$ .

**Definición 1.0.7.** Un estado es un funcional lineal positivo  $\omega$  sobre  $\mathcal{A}$  tal que  $\omega(\mathbb{1}) = 1$ , decimos que es normal si es  $\sigma$ -débil continuo. Además, se dice que es fiel si  $\omega(a) > 0$  para todo  $a \neq 0$ .

Cualquier semigrupo cuántico de Markov  $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$  sobre  $\mathcal{A}$  induce un semigrupo predual  $\mathcal{T}_*$  sobre  $\mathcal{A}_*$  definido mediante

$$\mathcal{T}_{*t}(\omega)(a) = \omega(\mathcal{T}_t(a)),$$

para toda  $\omega \in \mathcal{A}_*$ ,  $a \in \mathcal{A}$  y  $t \geq 0$ .

Los estados normales  $\omega$  de  $\mathcal{A}$  están en correspondencia uno a uno con los operadores de densidad (matrices de densidad)  $\rho$ , es decir, operadores positivos de traza igual a uno, mediante la siguiente relación

$$\omega(a) = \text{tr}(a\rho) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Para una demostración de este hecho véase el Teorema 2.4.21 en [8].

En el caso  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , (Teorema VI.26 en [36]), tenemos que el semigrupo predual está definido en  $L_1(\mathfrak{h})$  mediante la relación

$$\text{tr}(\mathcal{T}_t(x)\rho) = \text{tr}(x\mathcal{T}_{*t}(\rho)) \quad \forall t \geq 0$$

$x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y  $\rho \in L_1(\mathfrak{h})$ .

El generador  $\mathcal{L}_*$  del semigrupo predual  $(\mathcal{T}_{*t})_{t \geq 0}$  y el generador  $\mathcal{L}$  del semigrupo  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  tienen la misma relación de dualidad que la de sus semigrupos,  $\text{tr}(x\mathcal{L}_*\rho) = \text{tr}(\mathcal{L}(x)\rho)$ .

Si el semigrupo  $\mathcal{T}$  es continuo con respecto a la topología débil en  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , el semigrupo predual  $\mathcal{T}_*$  es también continuo respecto a la topología débil en  $L_1(\mathfrak{h})$ . Más aún, por el Corolario 3.1.8 en [8], se tiene que  $\mathcal{T}_*$  es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach  $L_1(\mathfrak{h})$ . Además, si el semigrupo es de Markov, es decir,  $\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $\mathcal{T}_*$  envía estados en estados.

Usualmente se define a los estados como operadores de densidad  $\rho$  en  $L_1(\mathfrak{h})$ , positivos y de traza igual a uno. De ahora en adelante identificaremos los estados  $\omega$  con los operadores de densidad  $\rho$ .

**Definición 1.0.8.** *Un estado  $\rho$  es invariante para el qms  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  si para cada  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y cada  $t \geq 0$  tenemos que  $\text{tr}(\rho\mathcal{T}_t(x)) = \text{tr}(\rho x)$ . Equivalentemente,  $\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \rho$  para todo  $t \geq 0$ .*

Observemos que si  $\rho$  es un estado invariante en el dominio del generador predual  $\mathcal{L}_*$ , entonces

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{T}_{*t}(\rho)|_{t=0} = \mathcal{L}_*(\mathcal{T}_{*t}(\rho))|_{t=0} = \mathcal{L}_*(\rho),$$

por lo tanto tenemos una caracterización de los estados invariantes de un semigrupo.

**Lema 1.0.9.** *Un estado  $\rho$  es invariante para el qms  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  si y solo si  $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$ .*

La ecuación

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}_{*t}(\rho) = \mathcal{L}_*(\mathcal{T}_{*t}(\rho)) \tag{1.2}$$

en la literatura física es conocida como *ecuación maestra*.

El siguiente resultado de Gorini-Kossakowski-Sudrashan y Lindblad, véanse [9, 12], caracteriza al generador infinitesimal de un qms uniformemente continuo sobre el álgebra de von Neumann  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

**Teorema 1.0.10.** *Sea  $\mathcal{T}$  un semigrupo uniformemente continuo de operadores sobre  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Los siguientes enunciados son equivalentes*

i)  $\mathcal{T}$  es un semigrupo cuántico de Markov, es decir,  $\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  para toda  $t \geq 0$ .

ii) El generador infinitesimal  $\mathcal{L}$  puede ser representado en la siguiente forma

$$\mathcal{L}(x) = G^*x + xG + \sum_{\ell \geq 1} L_\ell^*xL_\ell \quad (1.3)$$

donde  $L_\ell, G \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ,  $G + G^* + \sum L_\ell^*L_\ell = 0$  y la serie  $\sum L_\ell^*L_\ell$  converge fuertemente, es decir,  $\sum L_\ell^*L_\ell u < \infty$ ,  $\forall u \in \mathfrak{h}$ .

En la representación predual, cuando el generador  $\mathcal{L}_*$  es acotado, tiene la forma canónica

$$\mathcal{L}_*(\rho) = \Phi_*(\rho) + G\rho + \rho G^*, \quad (1.4)$$

donde  $\Phi_*$  es una transformación lineal completamente positiva y acotada sobre  $L_1(\mathfrak{h})$  y  $G = -\frac{1}{2}\Phi_*(\mathbb{1}) + iH$  es el generador de un semigrupo uniformemente continuo sobre  $\mathfrak{h}$ . En el caso  $\Phi \equiv 0$ , la ecuación maestra (1.2) se reduce a la ecuación de Schrödinger.

La condición de continuidad uniforme resulta muy restrictiva para muchas aplicaciones físicas. Afortunadamente es posible construir un qms asociado a un generador formal  $\mathcal{L}$  no acotado con una estructura que generaliza (1.3), véase [9, 12]. De manera rigurosa el generador formal es la forma sesquilineal

$$\mathcal{E}(x)[u, v] = \langle Gv, xu \rangle + \langle v, xGu \rangle + \sum_{\ell \geq 0} \langle L_\ell v, xL_\ell u \rangle \quad (1.5)$$

con  $u, v \in \text{Dom}(G)$ , donde los operadores  $G$  y  $L_\ell$  satisfacen la siguiente condición:

**Hipótesis A.** El operador  $G$  es el generador de un semigrupo de contracción fuertemente continuo sobre  $\mathfrak{h}$ , los operadores  $L_\ell$  actúan sobre  $\mathfrak{h}$  con  $\text{Dom}(L_\ell) \supseteq \text{Dom}(G)$  y  $\mathcal{E}(\mathbb{1}) = 0$ .

La fórmula (1.5) es una generalización de la ecuación (1.3), para operadores  $G$  y  $L_\ell$  no acotados.

Se sabe que, véase [9, 12], dado un dominio  $D \subset \text{Dom}(G)$ , el cual es un dominio esencial para  $G$ , es posible construir un semigrupo cuántico, llamado *mínimo* que se denota por  $\mathcal{T}^{(min)}$ , que satisface la ecuación

$$\langle u, \mathcal{T}_t^{(min)}(x)u \rangle = \langle v, xu \rangle + \int_0^t \langle v, \mathcal{L}(\mathcal{T}_s^{(min)}(x))u \rangle ds, \quad (1.6)$$

para toda  $u, v \in D$ .

Puesto que  $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = 0$ , se verifica fácilmente que  $\mathcal{T}_t^{(min)}(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$ . La ecuación (1.6) determina un único qms si y solo si  $\mathcal{T}_t^{(min)}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ .

El semigrupo es mínimo puesto que para cualquier familia  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  de operadores positivos  $\sigma$ -débil continua sobre  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  que satisfacen (1.6) se tiene que  $\mathcal{T}_t^{(min)}(x) \leq \mathcal{T}_t(x)$ , para todo elemento positivo en  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y para toda  $t \geq 0$ , (véase [12], Teorema 3.22).

Sea  $\mathcal{T}_*^{(min)}$  el semigrupo predual sobre  $L_1(\mathfrak{h})$  con generador  $\mathcal{L}_*^{(min)}$ . Observemos que  $\mathcal{T}_*^{(min)}$  es un semigrupo débilmente continuo sobre el espacio de Banach  $L_1(\mathfrak{h})$ , por lo tanto es fuertemente continuo. El espacio lineal  $\Omega$  generado por los elementos de  $L_1(\mathfrak{h})$  de la forma  $|u\rangle\langle v|$  está contenido en el dominio de  $\mathcal{L}_*^{(min)}$ . Así pues, la ecuación (1.6) puede escribirse en la forma

$$\text{tr}(|u\rangle\langle v|\mathcal{T}_t(x)) = \text{tr}(|u\rangle\langle v|x) + \int_0^t \text{tr}(\mathcal{L}_*^{(min)}(|u\rangle\langle v|)\mathcal{T}_s(x)) ds \quad (1.7)$$

A continuación presentamos la siguiente caracterización para la conservatividad, es decir,  $\mathcal{T}_t^{(min)}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ , del semigrupo mínimo, [9, 12, 15].

**Proposición 1.0.11.** *Bajo la Hipótesis A, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *El semigrupo cuántico mínimo es de Markov, es decir,  $\mathcal{T}_t^{(min)}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ .*
- ii)  *$(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  es la única familia de operadores de contracción positivos  $\sigma$ -débil continuos sobre  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  satisfaciendo (1.6) para todo elemento positivo  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y para toda  $t \geq 0$ .*
- iii) *El dominio  $\Omega$  es un dominio esencial para  $\mathcal{L}_*^{(min)}$ .*

En algunas aplicaciones las condiciones anteriores resultan extremadamente difíciles de verificar. Una condición suficiente para la conservatividad, se basa en la existencia de un operador  $C$  positivo autoadjunto satisfaciendo

$$\mathcal{L}(C) \leq bC$$

con  $b > 0$ , véase la Hipótesis C en [12] pp 59.



## Capítulo 2

# Estados estacionarios de equilibrio local del proceso de absorción y emisión de $m$ y $n$ fotones

### 2.1. Introducción

El contenido de este capítulo se publicó recientemente en [11]. Los generadores de Markov del tipo de acoplamiento débil se introdujeron recientemente en [1]. Los generadores de esta clase tienen importantes propiedades estructurales que permiten el cálculo explícito de sus estados invariantes de equilibrio y de equilibrio local como funciones del hamiltoniano o elementos en el conmutador de este operador. Nociones como balance detallado, balance detallado generalizado y estados invariantes de equilibrio local se ilustraron en la referencia anterior con ejemplos finito dimensionales.

Nuestro objetivo es estudiar estados estacionarios de equilibrio local, que incluyen estados de balance detallado y estados que no satisfacen la condición balance detallado, de un generador infinito dimensional del tipo de acoplamiento débil que modela el proceso de absorción y emisión simultánea de  $m$  y  $n$  fotones, con  $m, n \geq 1$ . El interés en los procesos de multi-fotones se debe a sus potenciales aplicaciones por ejemplo, en el procesamiento óptico de datos y emisión de luz coherente (lasing), véase [26, 32, 38] y las referencias ahí mencionadas. Aunque el proceso más estudiado es el de absorción y/o emisión de dos fotones, recientemente los procesos de multi-fotones de orden superior, como absorción y/o emisión de tres o cuatro fotones han

recibido una atención considerable.

En la siguiente sección estudiamos los estados estacionarios de balance detallado del proceso de absorción y emisión simultánea de  $m$  y  $n$  fotones con tasas de absorción y emisión constantes.

## 2.2. El generador de Markov y estados de balance detallado

El generador formal de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad (GKSL) del proceso de absorción y emisión de  $n$  fotones con tasas de absorción y emisión constantes  $\mu_n^2 > 0$  y  $\lambda_n^2 > 0$ , respectivamente, actuando sobre el espacio  $L_1(\mathfrak{h})$  de los operadores de traza finita sobre  $\mathfrak{h} = \ell_2(\mathbb{N})$  (en la representación predual), tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{*n}\rho = & -\frac{\mu_n^2}{2} \left( a^{\dagger n} a^n \rho + \rho a^{\dagger n} a^n - 2a^n \rho a^{\dagger n} \right) \\ & - \frac{\lambda_n^2}{2} \left( a^n a^{\dagger n} \rho + \rho a^n a^{\dagger n} - 2a^{\dagger n} \rho a^n \right) - i\omega[H_n, \rho] \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $\lambda_n < \mu_n$ ,  $n$  es el número de fotones,  $\rho \in L_1(\ell_2(\mathbb{N}))$  es un estado del sistema,  $a^\dagger$ ,  $a$  son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente,  $\omega \in \mathbb{R}$  y el hamiltoniano es  $H_n = a^{\dagger n} a^n$ .

El generador formal del proceso de absorción y emisión simultánea de  $m$  y  $n$  fotones, con  $1 \leq m < n$ , está dado por

$$\mathcal{L}_* = \mathcal{L}_{*n} + \mathcal{L}_{*m} \quad (2.2)$$

Se puede verificar que todas las condiciones para existencia y conservatividad del semigrupo mínimo asociado con el generador formal  $\mathcal{L}_*$  se satisfacen, denotaremos por  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  al semigrupo (dual) mínimo actuando sobre el álgebra de von Neumann  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , de los operadores acotados sobre  $\mathfrak{h}$ . Y usaremos  $\mathcal{T}_* = (\mathcal{T}_{*t})_{t \geq 0}$  para denotar el semigrupo predual actuando sobre  $L_1(\mathfrak{h})$ .

La siguiente definición fue dada en la referencia [1].

**Definición 2.2.1.** *Un estado  $\rho$  se dice que satisface la condición de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado generalizado ( $\mathcal{L}_*$ -GDB por sus siglas en inglés) con respecto al generador de Markov (2.2) si  $\mathcal{L}_{*k}(\rho) = 0$ , para  $k = n, m$ .*

Claramente, cualquier estado que satisface la condición de  $\mathcal{L}_*$ -GDB con respecto a  $\mathcal{L}_*$  es invariante. El recíproco en general es falso, véase ejemplo (6.2.3) en [1].

Los operadores de creación y aniquilación actúan sobre la base canónica  $\{e_k\}_{k \geq 0}$  de  $\ell_2(\mathbb{N})$  de la siguiente manera:

$$ae_k = \sqrt{k}e_{k-1} \quad a^\dagger e_k = \sqrt{k+1}e_{k+1}$$

La acción del generador  $\mathcal{L}_{*n}$ , sobre un operador  $\rho = \sum_{j,k \geq 0} \rho_{jk} |e_j\rangle\langle e_k|$ , puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{*n}(\rho) = \sum_{j,k \geq 0} |e_j\rangle\langle e_k| \left\{ \lambda_n^2 \rho_{j-n,k-n} \sqrt{[j]_n [k]_n} + \mu_n^2 \rho_{j+n,k+n} \sqrt{[j+n]_n [k+n]_n} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \rho_{jk} \lambda_n^2 ([j+n]_n + [k+n]_n) - \frac{1}{2} \rho_{jk} \mu_n^2 ([j]_n + [k]_n) + i\omega([k]_n - [j]_n) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} [x]_n &= x(x-1)(x-2) \cdots (x-(n-1)) = \frac{x!}{(x-n)!} \\ [x+n]_n &= (x+1)(x+2) \cdots (x+n) = \frac{(x+n)!}{x!} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para un estado diagonal  $\rho = \sum_j \rho_j |e_j\rangle\langle e_j|$ , la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{*n}(\rho) = \sum_{j \geq 0} \left( \mu_n^2 [j+n]_n \rho_{j+n} \right. \\ \left. + \lambda_n^2 [j]_n \rho_{j-n} - \mu_n^2 [j]_n \rho_j - \lambda_n^2 [j+n]_n \rho_j \right) |e_j\rangle\langle e_j|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Definición 2.2.2.** Decimos que un estado diagonal  $\rho$  satisface la condición de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado si las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \rho_{m+j} &= \nu_m^2 \rho_j, \\ \rho_{n+j} &= \nu_n^2 \rho_j, \end{aligned} \quad (2.6)$$

son válidas para toda  $j \geq 1$ , donde  $\nu_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}$ , para  $k = m, n$ .

Probaremos que cualquier estado diagonal de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado es un estado  $\mathcal{L}_*$ -GDB y, entonces, un estado  $\mathcal{L}_*$ -invariante. Para esto necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 2.2.3.** *Si las condiciones de balance detallado (2.6) se satisfacen, entonces para cualquier  $q, j \geq 0$  tenemos que*

$$\rho_{kq+j} = \nu_k^{2q} \rho_j, \quad k = m, n \quad (2.7)$$

*Demostración.* Tomemos  $k = m$  en la primera ecuación de (2.6). Entonces tenemos que

$$\rho_{mq+j} = \rho_{m+(q-1)m+j} = \nu_m^2 \rho_{(q-1)m+j} = \nu_m^2 (\nu_m^2 \rho_{(q-2)m+j}) = \cdots = \nu_m^{2q} \rho_j.$$

□

Sea  $r$  el máximo común divisor (MCD) de  $m$  y  $n$ . Podemos calcular  $r$  usando el algoritmo de Euclides. En efecto,

$$\begin{aligned} n &= mq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < m \\ m &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ &\vdots \\ r_{i_0-2} &= r_{i_0-1}q_{i_0} + r, \quad 0 \leq r < r_{i_0-1}, \\ r_{i_0-1} &= rq_{i_0+1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

es decir,  $r = r_{i_0} < m$  para algún  $i_0$ .

A continuación presentamos algunos cálculos con el fin de encontrar en forma explícita estados  $\rho$  de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado. Con la notación anterior, de (2.6) tenemos que

$$\nu_m^{2q_1} \rho_{r_1+j} = \rho_{mq_1+r_1+j} = \rho_{n+j} = \nu_n^2 \rho_j$$

para toda  $j \geq 0$ . Por lo tanto

$$\rho_{r_1+j} = \gamma_1^2 \rho_j, \quad j \geq 0, \quad (2.9)$$

donde  $\gamma_1 = \nu_n / \nu_m^{q_1}$ . De (2.9), (2.8) y de la prueba del Lema 2.2.3 se sigue que

$$\nu_m^2 \rho_j = \rho_{m+j} = \rho_{r_1q_2+r_2+j} = \gamma_1^{2q_2} \rho_{r_2+j}, \quad j \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\rho_{r_2+j} = \gamma_2^2 \rho_j \quad j \geq 0$$

donde  $\gamma_2 = \nu_m / \gamma_1^{q_2}$ . De manera análoga, repitiendo los argumentos previos con los correspondientes cambios, tenemos que

$$\rho_{r_3+j} = \gamma_3^2 \rho_j \quad j \geq 0$$

donde  $\gamma_3 = \gamma_1/\gamma_2^{q_3}$ , etcétera.

De esta manera obtenemos

$$\rho_{r_i+j} = \gamma_i^2 \rho_j, \quad 1 \leq i \leq i_0, \quad (2.10)$$

con  $\gamma_i = \gamma_{i-2}/\gamma_{i-1}^{q_i}$ ,  $2 \leq i \leq i_0$  y  $\gamma_1 = \nu_n/\nu_m^{q_1}$ . De ahora en adelante escribiremos simplemente  $\gamma$  en lugar de  $\gamma_{i_0}$ , i.e.,  $\gamma = \gamma_{i_0-2}/\gamma_{i_0-1}^{q_{i_0}}$ . Así en particular,

$$\begin{aligned} \rho_{r+j} &= \gamma^2 \rho_j, & 0 \leq j < r \\ \rho_{2r+j} &= \gamma^4 \rho_j, & 0 \leq j < r \\ &\vdots \\ \rho_{sr+j} &= \gamma^{2s} \rho_j, & 0 \leq j < r \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Entonces, puesto que cada  $k \geq 0$  puede escribirse como  $k = rs + j$ ,  $0 \leq j < r$ , cualquier valor propio  $\rho_k$  puede escribirse en términos de los primeros  $r$  valores propios de  $\rho$ . Consecuentemente,

$$\rho = \sum_{j=0}^{r-1} \rho_j \sum_{s \geq 0} \gamma^{2s} |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}|. \quad (2.12)$$

Puesto que  $r$  es el MCD de  $n$  y  $m$ , existe  $q \geq 1$  tal que  $n = rq$ , entonces de (2.11) y (2.7) tenemos que

$$\nu_n^{2l} \rho_j = \rho_{nl+j} = \rho_{qrl+j} = \gamma^{2ql} \rho_j, \quad 0 \leq j < r$$

para cualquier  $l \geq 1$ , por lo tanto  $\gamma^q = \nu_n$  si  $\rho_j > 0$  para algún  $0 \leq j \leq r$ . Esto implica que  $\gamma < 1$  y por lo tanto cada una de las series  $\sum_{q \geq 0} \gamma^{2q} |e_{rq+j}\rangle \langle e_{rq+j}|$ ,  $0 \leq j < r$ , en (2.12) converge y define un operador positivo de traza finita.

Tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.4.** *Con la notación anterior,*

(i) *Los siguientes  $r$  estados diagonales de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado son  $\mathcal{L}_*$ -invariantes*

$$\rho^{(j)} = (1 - \gamma^2) \sum_{s \geq 0} \gamma^{2s} |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}| \quad 0 \leq j \leq r - 1 \quad (2.13)$$

(ii) La proyección soporte de cada estado diagonal  $\rho^{(j)}$  de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado, para  $0 \leq j \leq r-1$

$$p_j = \sum_{s \geq 0} |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}|$$

es la proyección ortogonal sobre el espacio soporte  $h_j = p_j h$  de  $h$ . Los semigrupos duales reducidos  $\mathcal{T}^{(j)}$  actuando sobre  $p_j \mathcal{B}(h) p_j \cong \mathcal{B}(h_j)$  definido como  $\mathcal{T}^{(j)} p_j x p_j = p_j \mathcal{T}(x) p_j$  son irreducibles, es decir, no tienen proyecciones subarmónicas no triviales.

(iii) Un estado  $\rho$  es  $\mathcal{L}_*$ -invariante si y solo si es una combinación lineal convexa de los  $r$  estados invariantes en el inciso (i), es decir,

$$\rho = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j \rho^{(j)}. \quad (2.14)$$

$$\text{con } \sum_{0 \leq j \leq r-1} \alpha_j = 1.$$

*Demostración.* Para cada  $0 \leq j < r$ , consideremos las aproximaciones  $\rho_l^{(j)} = (1 - \gamma^2) \sum_{s=0}^l \gamma^{2s} |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}|$  de  $\rho^{(j)}$  por operadores de rango finito. Los operadores  $\rho_l^{(j)}$  están en el dominio  $\mathcal{L}_{*n}$ , el generador del proceso absorción y emisión de  $n$  fotones. Evaluando en el generador obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{*n}(\rho_l^{(j)}) = \sum_{s=0}^l \gamma^{2s} \left\{ -\mu_n^2 [rs+j]_n |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}| + \mu_n^2 [rs+j]_n |e_{rs+j-n}\rangle \langle e_{rs+j-n}| \right. \\ \left. - \lambda_n^2 ([rs+j+n]_n |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}| + \lambda_n^2 [rs+j+n]_n |e_{rs+j+n}\rangle \langle e_{rs+j+n}|) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Después de algunos cambios de variables la expresión anterior se reduce a los dos siguientes términos acotados, cada uno con  $q$  sumandos, donde  $n = rq$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{*n}(\rho_l^{(j)}) = \sum_{s=l+1}^{l+q} \lambda_n^2 \gamma^{2(s-q)} [rs+j]_n |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}| \\ - \sum_{s=l-q+1}^l \lambda_n^2 \gamma^{2s} [rs+j+n]_n |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}| \end{aligned} \quad (2.16)$$

Puesto que  $q$  es fijo, se sigue de (2.16) que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{*n}(\rho_l^{(j)}) = 0$  en la norma de  $L_1(h)$ . Por consiguiente, siendo  $\mathcal{L}_{*n}$  un operador cerrado tenemos

que  $\rho^{(j)}$  pertenece al dominio de  $\mathcal{L}_{*n}$  y  $\mathcal{L}_{*n}(\rho^{(j)}) = 0$ . Lo mismo se tiene para  $\mathcal{L}_{*m}$ . Esto prueba (i).

Para (ii), de acuerdo al Teorema III.1 en [14] es suficiente mostrar que  $a^{\dagger n} \neq p_j a^{\dagger n}$  para todo  $0 \leq j \leq r-1$  sobre  $Dom(a^{\dagger n}) \cap Ran(p_j)$ . Sea  $p_j = \sum_{s=0}^l |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}|$  una proyección no trivial y  $e_{rl+j}$  un elemento en  $Dom(a^{\dagger n}) \cap Ran(p_j)$ , un cálculo sencillo muestra que

$$p_j a^{\dagger n} e_{rl+j} = [rl+j+n]_n^{\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^l |e_{rs+j}\rangle \langle e_{rs+j}| e_{rl+n+j} = 0. \quad (2.17)$$

Por otro lado  $a^{\dagger n} e_{rl+j} = [rl+j+n]_n^{\frac{1}{2}} e_{rl+j+n}$ , entonces  $a^{\dagger n} \neq p_j a^{\dagger n}$  y por lo tanto las únicas proyecciones subarmónicas son las triviales.

De manera análoga a la demostración del Teorema 3.6 en [28], se prueba que el álgebra de los puntos fijos del semigrupo cuántico de Markov  $\mathcal{T}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{T}) &= \{x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}) : \mathcal{T}_t(x) = x\} = \{p_j : 0 \leq j \leq r-1\}'' \\ &= \left\{ \sum_{0 \leq j < r} \lambda_j p_j : \lambda_j \in \mathbb{C}, 0 \leq j < r \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

el cual es isomorfo a  $l_\infty(\Omega)$  como álgebras de von Neumann, con  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$ . Por lo tanto, el inciso (iii) se sigue del Teorema 2.1 en [28].

□

**Observación 2.2.5.** *Los  $r$  estados invariantes  $\rho^{(j)}$ ,  $0 \leq j \leq r-1$ , son mutuamente ortogonales con respecto al producto interno de Hilbert-Schmidt. Además, si  $m$  y  $n$  son coprimos, es decir, si  $r = 1$ , entonces existe un único estado  $\mathcal{L}_*$ -invariante.*

### 2.2.1. Balance detallado cuántico

La noción de balance detallado para sistemas cuánticos abiertos ha sido estudiada por Alicki en [4], Frigerio y Gorini en [20] y Kossakowski, Frigerio, Verri y Gorini en [19], para un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo con un estado fiel invariante  $\rho$ , ahí se formula como una propiedad del generador  $\mathcal{L}$  del semigrupo.

En esta sección mostraremos la relación que hay entre la condición de balance detallado (2.6) y la condición de balance detallado cuántico para qms's uniformemente continuos dada por F. Fagnola y V. Umanitá en [16, 17], es decir, mostraremos que (2.6) implica que nuestro generador formal

(no acotado)  $\mathcal{L}$  y su  $s$ -adjunto  $\mathcal{L}^{(s)}$  definido para cada estado fiel invariante  $\rho$  y para cada  $s \in [0, 1]$  por medio de la relación de dualidad

$$\text{tr}(\rho^{1-s} y \rho^s \mathcal{L}(x)) = \text{tr}(\rho^{1-s} \mathcal{L}^{(s)} y \rho^s x) \quad (2.19)$$

satisface la condición de balance detallado cuántico

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}^{(s)}(x) = 2i[K, x] \quad (2.20)$$

para algún operador no acotado autoadjunto  $K$ .

Lo anterior generaliza la noción de balance detallado (reversibilidad) para un semigrupo de Markov clásico, el cual es llamado reversible cuando es autoadjunto en el espacio  $L^2$  de alguna medida invariante.

El generador formal no acotado  $\mathcal{L}$  es la suma de dos generadores no acotados  $\mathcal{L}_n$  y  $\mathcal{L}_m$ , cada uno con la estructura de GKSL

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(x) = & -\frac{1}{2}L_{1n}^*L_{1n}x - \frac{1}{2}xL_{1n}^*L_{1n} + L_{1n}^*xL_{1n} \\ & -\frac{1}{2}L_{2n}^*L_{2n}x - \frac{1}{2}xL_{2n}^*L_{2n} + L_{2n}^*xL_{2n}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $L_{1n} = \mu_n a^n$  y  $L_{2n} = \lambda_n a^{\dagger n}$ .

Usando  $\gamma^q = \nu_n$  y la notación anterior, un cálculo directo muestra que para cada  $\rho = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j \rho^{(j)}$  con  $\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j = 1$  y cada  $k \geq 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \rho^s L_{1n}^* e_k &= \left( \alpha_{k'} (1 - \gamma^2) \gamma^{2(l+q)} \right)^s \mu_n e_{k+n} \\ &= (\alpha_{k'} (1 - \gamma^2) \gamma^{2l})^s \nu_n^{2s} \nu_n e_{k+n} = \nu_n^{2s} L_{1n}^* \rho^s e_k \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $k = rl + k'$ . Así obtenemos

$$\rho^s L_{1n}^* = \nu_n^{2s} L_{1n}^* \rho^s. \quad (2.23)$$

Tomando adjuntos en la ecuación anterior

$$L_{1n} \rho^s = \nu_n^{2s} \rho^s L_{1n}, \quad s \in [0, 1]. \quad (2.24)$$

Usando que  $L_{2n} = \nu_n L_{1n}^*$ , de (2.23) y (2.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \rho^s L_{2n} &= \nu_n^{2s} L_{2n} \rho^s. \\ L_{2n}^* &= \nu_n^{2s} \rho^s L_{2n}^*. \end{aligned} \quad (2.25)$$



De las relaciones (2.23) y (2.24) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^sL_{1n}^*L_{1n}x) &= \text{tr}(\rho^{1-s}yL_{1n}^*L_{1n}\rho^s x). \\
 \text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^s xL_{1n}^*L_{1n}) &= \text{tr}(\rho^{1-s}L_{1n}^*L_{1n}y\rho^s x). \\
 \text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^sL_{1n}^*xL_{1n}) &= \text{tr}(\rho^{1-s}L_{2n}^*yL_{2n}\rho^s x).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

y de (2.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^sL_{2n}^*L_{2n}x) &= \text{tr}(\rho^{1-s}yL_{1n}^*L_{1n}\rho^s x). \\
 \text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^s xL_{2n}^*L_{2n}) &= \text{tr}(\rho^{1-s}L_{2n}^*L_{2n}y\rho^s x). \\
 \text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^sL_{2n}^*xL_{2n}) &= \text{tr}(\rho^{1-s}L_{1n}^*yL_{1n}\rho^s x).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Además

$$\text{tr}(\rho^{1-s}y\rho^s[H_n, x]) = -\text{tr}(\rho^{1-s}[H_n, y]\rho^s x).$$

De lo anterior se sigue que,

$$\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_n^{(s)} = 2i\omega_n[H_n, x].$$

De manera análoga se obtiene un resultado para  $\mathcal{L}_m$ .

Esto significa que (2.20) se satisface para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_m$  con  $K = \omega_n H_n + \omega_m H_m$ . Por lo tanto, la condición de balance detallado cuántico presentada en [16, 17] se satisface separadamente para cada frecuencia de Bohr.

### 2.2.2. Balance detallado y el proceso clásico

La restricción del generador  $\mathcal{L}$  a la subálgebra diagonal determina el generador infinitesimal de un proceso clásico de nacimiento y muerte, con tasa de nacimiento  $\lambda_m^2$  y  $\lambda_n^2$  y tasas de mortalidad  $\mu_m^2$  y  $\mu_n^2$ , el cual tiene la forma  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_n + \mathcal{Q}_m$  donde

$$\mathcal{Q}_n(x) = \lambda_n^2[j+n]_n(x_{j+n} - x_j) + \mu_n^2[j]_n(x_{j-n} - x_j) \tag{2.28}$$

con  $x = (x_j)_{j \geq 0} \in l_\infty(\mathbb{N})$ .  $\mathcal{Q}_m$  tiene una forma similar con las respectivas sustituciones. Cualquier estado invariante de la forma (2.14) induce una medida invariante del correspondiente proceso clásico.

**Proposición 2.2.6.** *Cada medida invariante  $\rho$  de la forma (2.14) satisface la condición de balance detallado clásico*

$$\rho_j q_{jk} = \rho_k q_{kj}, \quad \forall j, k \geq 0 \tag{2.29}$$

donde  $\mathcal{Q} = (q_{jk})$  es el generador (matriz de transición) del proceso.

*Demostración.* Mediante un cálculo directo podemos ver que la matriz de transición  $\mathcal{Q} = (q_{jk})$  para este proceso está dada por

$$q_{jk} = \begin{cases} -\mu_n^2[j]_n - \lambda_n^2[n+j]_n - \mu_m^2[j]_m - \lambda_m^2[m+j]_m & \text{si } j = k, \text{ con } j \geq 0, \\ \lambda_m^2[m+j]_m & \text{si } k = m+j, \text{ con } j \geq 0, \\ \lambda_n^2[n+j]_n & \text{si } k = n+j, \text{ con } j \geq 0, \\ \mu_m^2[m+k]_m & \text{si } j = m+k, \text{ con } k \geq 0, \\ \mu_n^2[n+k]_n & \text{si } j = n+k, \text{ con } k \geq 0, \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$$

Esto es,  $\mathcal{Q}$  tiene elementos distintos de cero en la diagonal principal así como en dos diagonales superiores y dos diagonales inferiores. Para un estado invariante  $\rho$  de la forma (2.14)) que satisface la condición de  $\mathcal{L}_*$ -balance detallado, se verifica fácilmente, usando la igualdad  $\nu_m^n = \nu_n^m$ , que la condición

$$\rho_j q_{jk} = \rho_k q_{kj}, \quad \forall j, k \geq 0 \quad (2.30)$$

se cumple. □

### 2.3. Un generador del tipo de absorción y emisión de $m$ y $n$ fotones

En esta sección presentamos un generador de Markov del tipo de límite estocástico, modelando el proceso de absorción y emisión simultánea de  $n$  y  $m$  fotones,  $n, m \geq 1$ , con tasas de absorción y emisión *variables*.

Para cualquier entero positivo  $n$  y cualquier función positiva  $\alpha : \mathbb{N} \mapsto [0, \infty)$  definimos los operadores no acotados  $L_n(\alpha)$  actuando sobre  $\mathfrak{h}$  mediante

$$L_n(\alpha)e_k = \alpha(k-n)e_{k-n}, \quad \forall k \geq n$$

y  $L_n(\alpha)e_k = 0$  si  $k < n$ , donde  $(e_k)_{k \geq 0}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h}$ . Se verifica fácilmente que el operador adjunto  $L_n(\alpha)^*$  de  $L_n(\alpha)$  actúa sobre los elementos básicos de  $\mathfrak{h}$  como  $L_n(\alpha)^*e_k = \alpha(k)e_{k+n}$ ,  $k \geq 0$ .

Dadas dos funciones positivas  $0 < \lambda_n < \mu_n$  definidas sobre  $\mathbb{N}$ , consideraremos los operadores  $L_n(\mu_n)$  y  $L_n(\lambda_n)$  como operadores de Kraus del generador formal de Lindblad-Gorini-Kossakowski y Sudarshan definido para cualquier  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(x) &= L_n(\mu_n)^*xL_n(\mu_n) + L_n(\lambda_n)xL_n(\lambda_n)^* \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( L_n(\mu_n)^*L_n(\mu_n)x + xL_n(\mu_n)^*L_n(\mu_n) \right. \\ &\quad \left. + L_n(\lambda_n)L_n(\lambda_n)^*x + xL_n(\lambda_n)L_n(\lambda_n)^* \right) - i\omega[H_n, x]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $H_n$ , es el operador de multiplicación  $[N]_n = (N - n + 1)(N - n + 2) \cdots N$ , con  $N$  el operador de número que actuando en los elementos básicos de la siguiente forma:

$$[N]_n e_k = [k]_n e_k = (k - n + 1)(k - n + 2) \cdots k e_k, \quad \forall k \geq 0.$$

Los operadores  $L_n(\mu_n)$  y  $L_n(\lambda_n)$  son no acotados, su dominio es

$$Dom(L_n(\alpha)) = \{u \in \mathfrak{h} : \|L_n(\alpha)u\| = \left\| \sum_{k \geq 0} u_{k+n} \alpha(k) e_k \right\| = \sum_{k \geq 0} |u_{k+n}|^2 |\alpha(k)|^2 < \infty\},$$

$\alpha = \mu_n, \lambda_n$ . El subconjunto denso  $Span\{e_k : k \geq 0\}$  está contenido en  $Dom(L_n(\alpha))$  para  $\alpha = \mu_n, \lambda_n$ . Así, los operadores  $L_n(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu_n, \lambda_n$  están densamente definidos. Además, los operadores adjuntos están también densamente definidos y

$$L_n(\alpha)^* u = \sum_{k \geq 0} u_k \alpha(k) e_{k+n}$$

para cualquier

$$u \in Dom(L_n(\alpha)^*) = \{u \in \mathfrak{h} : \sum_{k \geq 0} |u_k|^2 |\alpha(k)|^2 < \infty\}$$

$\alpha = \mu_n, \lambda_n$ . Puesto que  $0 < \lambda_n(k) < \mu_n(k)$  para toda  $k \geq 0$ , claramente tenemos que  $Dom(L_n(\mu_n)) \subset Dom(L_n(\lambda_n))$ .

Puesto que los operadores de Kraus  $L_n(\alpha)$  son no acotados, el generador formal tiene que ser considerado como un mapeo, asociando cada  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , una forma sesquilineal  $\mathcal{E}_n(x)$  definida por medio de

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(x)[u, v] &= \langle L_n(\mu_n)u, xL_n(\mu_n)v \rangle \\ &+ \langle L_n(\lambda_n)^*u, xL_n(\lambda_n)^*v \rangle + \langle G_n u, xv \rangle + \langle u, xG_n v \rangle \end{aligned} \quad (2.32)$$

para  $u, v \in Dom(G_n)$ , donde  $Dom(G_n) = Dom(L_n(\mu_n)^*L_n(\mu_n))$  y

$$\begin{aligned} G_n &= -\frac{1}{2}(L_n(\mu_n)^*L_n(\mu_n) + L_n(\lambda_n)L_n(\lambda_n)^*) + i\omega H_n \\ &= -\frac{1}{2}\mu_n(N - n)^2 - \frac{1}{2}\lambda_n(N)^2 - i\omega[N]_n, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde  $N$  es el operador de número y establecemos que  $\mu_n(N - n)e_k = \mu_n(k - n)e_k$ ,  $\lambda_n(N)e_k = \lambda(k)e_k$ ,  $\forall k \geq 0$ .

En esta sección vamos a considerar el generador no acotado de GKSL del tipo de límite estocástico

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_m \quad (2.34)$$

con  $m, n$  dos enteros positivos fijos,  $m < n$ . La representación de GKSL de  $\mathcal{L}$  involucra al operador

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2}(L_n(\mu_n)^*L_n(\mu_n) + L_n(\lambda_n)L_n(\lambda_n)^*) \\ &\quad - \frac{1}{2}(L_m(\mu_m)^*L_m(\mu_m) + L_m(\lambda_m)L_m(\lambda_m)^*) + i\omega H \\ &= -\frac{1}{2}\mu_n(N-n)^2 - \frac{1}{2}\lambda_n(N)^2 - \frac{1}{2}\mu_m(N-m)^2 - \frac{1}{2}\lambda_m(N)^2 \\ &\quad - i\omega([N]_n + [N]_m) \end{aligned} \quad (2.35)$$

y los cuatro operadores de Kraus  $L_n(\mu_n)$ ,  $L_m(\mu_m)$ ,  $L_n(\lambda_n)^*$ ,  $L_m(\lambda_m)^*$ .

Claramente  $\Re\langle u, Gu \rangle \leq 0$  para toda  $u \in \text{Dom}(G) = \text{Dom}(L_n(\mu_n)^*L_n(\mu_n))$  si  $\mu_m(k) < \mu_n(k)$  para toda  $k \geq 0$ , que asumiremos de ahora en adelante. Entonces  $G$  es un operador disipativo, de hecho,  $G$  es un operador disipativo maximal, y por lo tanto, el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones sobre  $\mathfrak{h}$ . Además la condición

$$\begin{aligned} 2\Re\langle u, Gu \rangle + \langle L_n(\mu_n)u, L_n(\mu_n)u \rangle + \langle L_m(\mu_m)u, L_m(\mu_m)u \rangle \\ + \langle L_n(\lambda_n)^*u, L_n(\lambda_n)^*u \rangle + \langle L_m(\lambda_m)^*u, L_m(\lambda_m)^*u \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

claramente se satisface para toda  $u \in \text{Dom}(G)$ . Por lo tanto, las condiciones para la existencia del semigrupo mínimo asociado con el generador formal anterior, es decir, **Hipótesis A** en [12], se satisfacen. Además, la conservatividad y, consecuentemente, la unicidad del semigrupo mínimo se siguen de la existencia de un estado invariante fiel, lo cual estableceremos en las siguientes secciones, y por la Proposición 4.2 en [34].

2.3.1. Existencia de estados invariantes de equilibrio local que no son de balance detallado

Sobre cualquier  $\rho = \sum_{j,k \geq 0} \rho_{jk} |e_j\rangle\langle e_k|$  el generador predual  $\mathcal{E}_{n*}$  actúa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n*}(\rho) = & \sum_{j,k \geq 0} \\ & \left( -\frac{\mu_n^2(j)}{2} \rho_{j+n,k} |e_{j+n}\rangle\langle e_k| - \frac{\mu_n^2(k)}{2} \rho_{j,k+n} |e_j\rangle\langle e_{k+n}| + \mu_n(j)\mu_n(k) \rho_{j+n,j+k} |e_j\rangle\langle e_k| \right) \\ & + \left( -\frac{\lambda_n^2(j)}{2} \rho_{j,k} |e_j\rangle\langle e_k| - \frac{\lambda_n^2(k)}{2} \rho_{j,k} |e_j\rangle\langle e_k| + \lambda_n(j)\lambda_n(k) \rho_{j,k} |e_{j+n}\rangle\langle e_{k+n}| \right) \end{aligned}$$

Observemos que el proceso de absorción y emisión de  $n$  fotones con tasas de absorción y emisión constantes  $\mu_n$ ,  $\lambda_n$ , respectivamente, se obtiene cuando  $\lambda_n(j) = \lambda_n[j+n]_n^{\frac{1}{2}}$  y  $\mu_n(j) = \mu_n[j+n]_n^{\frac{1}{2}}$ , con  $\lambda_n < \mu_n$  números reales positivos.

Si el estado  $\rho$  es diagonal, después de algunos cambios de variable la ecuación anterior puede escribirse como

$$\mathcal{E}_{n*}(\rho) = \sum_{j \geq 0} (J_n(j-n) - J_n(j)) |e_j\rangle\langle e_j|, \quad (2.37)$$

donde

$$J_n(j) = \lambda_n^2(j) \rho_j - \mu_n^2(j) \rho_{j+n}. \quad (2.38)$$

Los estados invariantes del generador del tipo de límite estocástico  $\mathcal{E}$  son soluciones de la ecuación

$$\mathcal{E}_*(\rho) = \mathcal{E}_{n*}(\rho) + \mathcal{E}_{m*}(\rho) = 0. \quad (2.39)$$

A partir de ahora buscamos soluciones a la ecuación anterior para el caso  $n = 4$  y  $m = 2$ . Así, la ecuación (2.39) toma la forma

$$\mathcal{E}_*(\rho) = \sum_{j \geq 0} \left\{ J_4(j-4) - J_4(j) + J_2(j-2) - J_2(j) \right\} |e_j\rangle\langle e_j| = 0 \quad (2.40)$$

con

$$J_i(j) = \lambda_i^2(j) \rho_j - \mu_i^2(j) \rho_{i+j}, \quad i = 4, 2, \quad j \geq 0 \quad (2.41)$$

Para violar la condición de balance detallado necesitamos tener  $J_n(j) \neq 0$  para algún  $j \geq 0$ ,  $n = 2, 4$ . Así que supondremos lo siguiente

**Hipótesis C:**

$$(C.1) \quad J_2(j) = 0 \text{ para toda } j \geq 4$$

$$(C.2) \quad J_4(j) = 0 \text{ para toda } j \geq 2,$$

los valores  $J_2(j)$ ,  $0 \leq j \leq 3$  y  $J_4(0), J_4(1)$  permanecerán indeterminados por el momento.

**Observación 2.3.1.** *Notemos que la **Hipótesis C** es equivalente con las siguientes “condiciones de balance detallado parcial”:*

$$(i) \quad \frac{\rho_{j+2}}{\rho_j} = \left( \frac{\lambda_2(j)}{\mu_2(j)} \right)^2 = \nu_2(j)^2 \text{ para toda } j \geq 4,$$

$$(ii) \quad \frac{\rho_{j+4}}{\rho_j} = \left( \frac{\lambda_4(j)}{\mu_4(j)} \right)^2 = \nu_4(j)^2 \text{ para toda } j \geq 2.$$

Por simplicidad, de ahora en adelante supondremos que las sucesiones  $(\lambda_2(j))_{j \geq 0}$ ,  $(\lambda_4(j))_{j \geq 0}$  y  $(\mu_2(j))_{j \geq 0}$ ,  $(\mu_4(j))_{j \geq 0}$  satisfacen

$$(i) \quad \lambda_2(j) = \lambda_2[j + 2]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{ y } \mu_2(j) = \mu_2[j + 2]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \text{ para toda } j \geq 4, \text{ y las constantes } 0 < \lambda_2 < \mu_2.$$

$$(ii) \quad \lambda_4(j) = \lambda_4[j + 4]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \text{ y } \mu_4(j) = \mu_4[j + 4]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}, \text{ para toda } j \geq 2, \text{ y las constantes } 0 < \lambda_4 < \mu_4.$$

y dejamos indeterminados, de momento, los valores de  $\lambda_2(j)$ ,  $\mu_2(j)$ ,  $0 \leq j < 4$  y  $\lambda_4(j)$ ,  $\mu_4(j)$ ,  $0 \leq j < 2$ .

Por lo tanto ambas *condiciones de balance detallado parcial* (equilibrio local) en la Observación 2.3.1 y, por consiguiente, la **Hipótesis C** se satisfacen. Además  $\nu_2(j) = \nu_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$  es constante para  $j \geq 4$  y  $\nu_4(j) = \nu_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4}$  es constante para  $j \geq 2$ .

De la ecuación (2.40) obtenemos las siguientes condiciones sobre  $J_4(0), J_4(1)$  y  $J_2(j)$ ,  $0 \leq j \leq 3$ ,

$$\begin{aligned} J_4(0) = -J_2(0) & \quad \text{y} & \quad J_2(2) = J_2(0) \\ J_4(1) = -J_2(1) & \quad \text{y} & \quad J_2(3) = J_2(1) \end{aligned} \tag{2.42}$$

Debido a la estructura par-impar del generador (2.40), podemos calcular primero los valores propios  $\rho_j$  del estado diagonal  $\rho$  para  $j$  par, y así obtener el estado par  $\rho_e = \sum_{j \geq 0} \rho_{2j} |e_{2j}\rangle \langle e_{2j}|$ . De las ecuaciones (2.41) con  $j = 0, 2, 4$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 j = 0, \quad \rho_4 &= \nu_4^2(0)\rho_0 - \frac{J_4(0)}{\mu_4^2(0)}, & \rho_2 &= \nu_2^2(0)\rho_0 - \frac{J_2(0)}{\mu_2^2(0)}. \\
 j = 2, \quad \rho_6 &= \nu_4^2\rho_2, & \rho_4 &= \nu_2^2(2)\rho_2 - \frac{J_2(2)}{\mu_2^2(2)}. \\
 j = 4, \quad \rho_8 &= \nu_4^2\rho_4, & \rho_6 &= \nu_2^2\rho_4.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Después de algunos cálculo directos, podemos ver fácilmente de (2.42) y (2.43) que los valores propios del estado  $\rho_e$  pueden ser escritos en términos de  $\lambda_i^2(j)$ ,  $\mu_i^2(j)$  y  $J_2(0)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= \frac{J_2(0)}{\kappa(0)} \left\{ \frac{\nu_2^2(2)}{\mu_2^2(0)} + \frac{1}{\mu_2^2(2)} + \frac{1}{\mu_4^2(0)} \right\}, \\
 \rho_2 &= \frac{J_2(0)}{\mu_2^2(2)\kappa(2)}, \\
 \rho_{2k} &= \nu_2^2\rho_{2(k-1)}, \quad \forall k \geq 2.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

con  $\kappa(0) = \nu_2^2(0)\nu_2^2(2) - \nu_4^2(0)$ ,  $\kappa(2) = \nu_2^2(2) - \nu_2^2$  y  $\lambda_i^2(j)$ ,  $\mu_i^2(j)$  satisfaciendo las condiciones

$$\begin{aligned}
 \frac{\nu_2^2}{\mu_2^2(2)\kappa(2)} &= \frac{\nu_4^2(0)}{\kappa(0)} \left[ \frac{\nu_2^2(2)}{\mu_2^2(0)} + \frac{1}{\mu_2^2(2)} + \frac{1}{\mu_4^2(0)} \right] + \frac{1}{\mu_4^2(0)}, \\
 \frac{1}{\mu_2^2(2)\kappa(2)} &= \frac{\nu_2^2(0)}{\kappa(0)} \left[ \frac{\nu_2^2(2)}{\mu_2^2(0)} + \frac{1}{\mu_2^2(2)} + \frac{1}{\mu_4^2(0)} \right] - \frac{1}{\mu_2^2(0)},
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

las cuales son equivalentes a

$$\nu_2^2 = \frac{\lambda_2^2(2)\lambda_4^2(0) + \mu_2^2(0)\lambda_4^2(0) + \lambda_2^2(0)\lambda_2^2(2)}{\lambda_2^2(0)\mu_2^2(2) + \mu_2^2(2)\lambda_4^2(0) + \lambda_2^2(0)\mu_4^2(0)}. \tag{2.46}$$

De manera similar, calculamos los elementos  $\rho_j$  para  $j$  impar, obteniendo así el estado impar  $\rho_o = \sum_{j \geq 0} \rho_{2j+1} |e_{2j+1}\rangle \langle e_{2j+1}|$ , de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{J_2(1)}{\kappa(1)} \left\{ \frac{\nu_2^2(3)}{\mu_2^2(1)} + \frac{1}{\mu_2^2(3)} + \frac{1}{\mu_4^2(1)} \right\}, \\
 \rho_3 &= \frac{J_2(1)}{\mu_2^2(3)\kappa(3)}, \\
 \rho_{2k+1} &= \nu_2^2\rho_{2k-1} \quad \text{para } k \geq 2.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

con  $\kappa(1) = \nu_2^2(1)\nu_2^2(3) - \nu_4^2(1)$ ,  $\kappa(3) = \nu_2^2(3) - \nu_2^2$  y condiciones análogas al caso par,

$$\begin{aligned} \frac{\nu_2^2}{\mu_2^2(3)\kappa(3)} &= \frac{\nu_4^2(1)}{\kappa(1)} \left[ \frac{\nu_2^2(3)}{\mu_2^2(1)} + \frac{1}{\mu_2^2(3)} + \frac{1}{\mu_4^2(1)} \right] + \frac{1}{\mu_4^2(1)}, \\ \frac{1}{\mu_2^2(3)\kappa(3)} &= \frac{\nu_2^2(1)}{\kappa(1)} \left[ \frac{\nu_2^2(3)}{\mu_2^2(1)} + \frac{1}{\mu_2^2(3)} + \frac{1}{\mu_4^2(1)} \right] - \frac{1}{\mu_2^2(1)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

las cuales son equivalentes a

$$\nu_2^2 = \frac{\lambda_2^2(3)\lambda_4^2(1) + \mu_2^2(1)\lambda_4^2(1) + \lambda_2^2(1)\lambda_2^2(3)}{\lambda_2^2(1)\mu_2^2(3) + \mu_2^2(3)\lambda_4^2(1) + \lambda_2^2(1)\mu_4^2(1)}. \quad (2.49)$$

De lo anterior obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.2.** (i)  $\rho_e = \sum_{j \geq 0} \rho_{2j} |e_{2j}\rangle \langle e_{2j}|$  con  $\rho_{2j}$ ,  $j \geq 0$  dado por (2.44) es un estado invariante si  $J_2(0)$  satisface

$$J_2(0) \left( \frac{1}{\kappa(0)} \left[ \frac{\nu_2^2(2)}{\mu_2^2(0)} + \frac{1}{\mu_2^2(2)} + \frac{1}{\mu_4^2(0)} \right] + \frac{1}{\mu_2^2(2)\kappa(2)(1 - \nu_2^2)} \right) = 1, \quad (2.50)$$

los números reales  $J_2(0)$ ,  $\kappa(0) = \nu_2^2(0)\nu_2^2(2) - \nu_4^2(0)$  y  $\kappa(2) = \nu_2^2(2) - \nu_2^2$  son distintos de cero y con el mismo signo,  $\nu_4^2 = \nu_2^4$ ,  $\nu_2^2 < 1$  y la condición (2.46) se cumplen.

(ii)  $\rho_o = \sum_{j \geq 0} \rho_{2j+1} |e_{2j+1}\rangle \langle e_{2j+1}|$  con  $\rho_{2j+1}$ ,  $j \geq 0$  dado por (2.47) es un estado invariante si  $J_2(1)$  satisface

$$J_2(1) \left( \frac{1}{\kappa(1)} \left[ \frac{\nu_2^2(3)}{\mu_2^2(1)} + \frac{1}{\mu_2^2(3)} + \frac{1}{\mu_4^2(1)} \right] + \frac{1}{\mu_2^2(3)\kappa(3)(1 - \nu_2^2)} \right) = 1 \quad (2.51)$$

los números reales  $J_2(1)$ ,  $\kappa(1) = \nu_2^2(1)\nu_2^2(3) - \nu_4^2(1)$ ,  $\kappa(3) = \nu_2^2(3) - \nu_2^2$  son distintos de cero y con el mismo signo,  $\nu_4^2 = \nu_2^4$ ,  $\nu_2^2 < 1$  y la condición (2.49) se cumplen.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{L}_*$  el generador del semigrupo mínimo asociado con el generador formal  $\mathcal{E}_*$ . La demostración de la invarianza del estado  $\rho_e$  es similar a la demostración del inciso (i) en el Teorema 2.2.4. Además, bajo las condiciones (2.45), para las aproximaciones de rango finito  $\rho_{em} = \sum_{j=0}^m \rho_{2j} |e_{2j}\rangle \langle e_{2j}|$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_*(\rho_{em}) &= [2m+2]_2 \lambda_2^2 \nu_2^{2m-2} \rho_2 (|e_{2m+2}\rangle \langle e_{2m+2}| - |e_{2m}\rangle \langle e_{2m}|) \\ &\quad + [2m+2]_4 \lambda_4^2 \nu_2^{2m-4} \rho_2 (|e_{2m+2}\rangle \langle e_{2m+2}| - |e_{2m-2}\rangle \langle e_{2m-2}|) \\ &\quad + [2m+4]_4 \lambda_4^2 \nu_2^{2m} \rho_2 (|e_{2m+4}\rangle \langle e_{2m+4}| - |e_{2m}\rangle \langle e_{2m}|) \end{aligned} \quad (2.52)$$



si  $m$  es suficientemente grande. Puesto que  $\nu_2 < 1$ , un cálculo sencillo muestra que  $\mathcal{L}_*(\rho_{em}) \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$  en la norma de  $L_1(\mathfrak{h})$ . Claramente  $\rho_{em} \in \text{Dom}(\mathcal{L}_*)$  para cada  $m \geq 1$ , por lo tanto, siendo  $\mathcal{L}_*$  un operador cerrado concluimos que  $\rho_e \in \text{Dom}(\mathcal{L}_*)$  y  $\mathcal{L}_e(\rho_e) = 0$ . La ecuación (2.50) se obtiene de la condición de la traza para  $\rho_e$ . El operador  $\rho_e$  es positivo si y solo si los dos cocientes  $\frac{J_2(0)}{\kappa(0)}$  y  $\frac{J_2(0)}{\kappa(2)}$  son positivos, es decir, si  $J_2(0)$ ,  $\kappa(0)$  y  $\kappa(2)$ , tienen el mismo signo. La prueba para el inciso (ii) es similar.  $\square$

**Proposición 2.3.3.** *Sea  $\nu_2^2$  dada por (2.46), entonces tenemos que*

- (i)  $\kappa(2) \geq 0$  si y solo si  $\kappa(0) \geq 0$ . Además, si cualesquiera de las condiciones anteriores se cumple y  $0 < \nu_2^2 < 1$ , entonces  $J_2(0) \geq 0$ .
- (ii)  $\kappa(3) \geq 0$  si y solo si  $\kappa(1) \geq 0$ . Además, si cualesquiera de las condiciones anteriores se cumple y  $0 < \nu_2^2 < 1$ , entonces  $J_2(1) \geq 0$ .

*Demostración.* De la ecuación (2.46), obtenemos que la condición  $\nu_2^2 \leq \nu_2^2(2)$  es equivalente con

$$\mu_2^2(0)\lambda_4(0) \leq (\lambda_2^2(0) + \lambda_4^2(0))(\nu_2^2(2)\mu_2^2(2) - \lambda_2^2(2)) + \lambda_2^2(0)\mu_4^2(0)\nu_2^2(2)$$

la cual es equivalente con

$$\nu_4^2(0) \leq \nu_2^2(2)\nu_2^2(0).$$

La parte restante de (i) se sigue de (2.50). La demostración de (ii) es similar.  $\square$

**Observación 2.3.4.** (i) *El estado  $\rho_e$  es un estado estacionario en equilibrio (balance detallado) si y solo si las condiciones de balance detallado*

$$\rho_{i+j} = \nu_i^2(j)\rho_j, \quad i = 2, 4, \quad j = 0, 2$$

*se satisfacen. Equivalentemente,  $J_2(0) = J_2(2) = J_4(0) = 0$ . Lo mismo podemos decir del estado impar  $\rho_o$  con las correspondientes sustituciones.*

- (ii) *Del inciso (i), las ecuaciones (2.42) y la Proposición 2.3.3, la **Condición de reversibilidad de Kolmogorov**  $\kappa(0) = 0$ , equivalentemente  $\nu_2^2(0)\nu_2^2(2) = \nu_4^2(0)$ , es necesaria y suficiente para que  $\rho_e$  sea un estado estacionario de balance detallado. Se tiene un resultado análogo para el estado  $\rho_o$  con las correspondientes sustituciones.*

(iii) Sea  $\nu_2^2$  dado por (2.46). La condición  $\nu_2^2 < 1$  se satisface si y solo si

$$\nu_4^2(0) < (\mu_2^2(2) - \lambda_2^2(2)) \left( \frac{\nu_2^2(0)}{\mu_4^2(0)} + \frac{\nu_4^2(0)}{\mu_2^2(0)} \right) + \nu_2^2(0)$$

lo cual claramente se cumple si, por ejemplo,  $\nu_4^2(0) \leq \nu_2^2(0)$ . Además, puesto que  $\nu_2^2(2) < 1$ , la última condición se satisface si  $\nu_4^2(0) < \nu_2^2(2)\nu_2^2(0)$ . Por lo tanto, la condición  $\kappa(0) > 0$  es suficiente para obtener  $\nu_2^2 < 1$ . Condiciones similares se satisfacen para el estado impar  $\rho_o$ .

**Corolario 2.3.5.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2, el semigrupo mínimo construido a partir del generador del tipo de acoplamiento débil  $\mathcal{E}_*$  tiene una infinidad de estados invariantes de equilibrio local que no satisfacen la condición de balance detallado, dados explícitamente por*

$$\rho = \alpha\rho_e + (1 - \alpha)\rho_o, \quad \alpha \in [0, 1].$$

### 2.3.2. Regímenes de absorción y emisión

En esta sección mostraremos que para los estados estacionarios de equilibrio local como  $\rho_e$  o  $\rho_o$  existen dos regímenes, absorción y emisión. Estos regímenes son similares a los encontrados en [2] para un átomo de tres niveles interactuando con un campo de radiación. A continuación describimos, sin entrar en detalles, la existencia de estos regímenes para el generador del tipo de límite de acoplamiento débil  $\mathcal{E}_*$ .

Del inciso (ii) en la Observación 2.3.4, sabemos que  $\kappa(0) = \nu_2^2(2)\nu_2^2(0) - \nu_4^2(0) \neq 0$  si y solo si  $\rho_e$  es un estado invariante de equilibrio local que no satisface la condición de balance detallado. Sea  $H_S = E(N)$  una función lineal del operador de número  $N$ , con  $E : \mathbb{N} \cup \{0\} \mapsto \mathbb{R}_+$ , y consideremos dos frecuencias de Bohr  $\omega = E(2) - E(0)$  y  $2\omega = E(4) - E(0)$ . Haciendo  $\nu_2^2(0) = \nu_2^2(2) = e^{-\omega\beta(\omega)}$  y  $\nu_4^2(0) = e^{-2\omega\beta(2\omega)}$  la condición  $\kappa(0) \neq 0$  queda de la siguiente forma

$$e^{-2\omega\beta(\omega)} - e^{-2\omega\beta(2\omega)} \neq 0,$$

lo cual se satisface si la función de la temperatura inversa  $\beta$  no es constante. En el caso más simple  $E(k) = k$ , tenemos que  $\omega = 1$ .

- (i) **Régimen de Absorción:**  $\kappa(0) > 0$  si y solo si  $\beta(2\omega) > \beta(\omega)$ . Esta desigualdad indica que la radiación de frecuencia  $\omega$  se convierte en radiación de frecuencia  $2\omega$ .

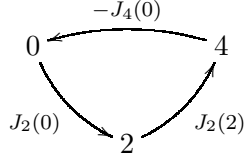


Figura 2.1: Régimen de absorción

- (ii) **Régimen de Emisión:**  $\kappa(0) < 0$  si y solo si  $\beta(2\omega) < \beta(\omega)$ . Esta desigualdad indica que la radiación de frecuencia  $2\omega$  se convierte en radiación de frecuencia  $\omega$ .

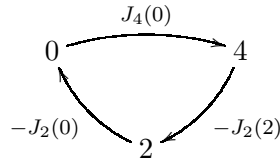


Figura 2.2: Régimen de emisión

Observemos que de (2.44), haciendo  $\nu_2^2 = e^{-2\beta}$ , donde ahora la temperatura inversa  $\beta$  es constante, se sigue que el estado par  $\rho_e$  tiene la forma de Gibbs localmente:

$$\begin{aligned}
 \rho_e &= \rho_0|e_0\rangle\langle e_0| + \rho_2|e_2\rangle\langle e_2| + \sum_{k \geq 2} \nu_2^{2(k-1)} \rho_2|e_{2k}\rangle\langle e_{2k}| \\
 &= \rho_0|e_0\rangle\langle e_0| + \rho_2 \nu_2^{-2} \sum_{k \geq 1} \nu_2^{2k} |e_{2k}\rangle\langle e_{2k}| \\
 &= (\rho_0 - \rho_2 \nu_2^{-2})|e_0\rangle\langle e_0| + \rho_2 \nu_2^{-2} (e^{-\beta H})_e
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde  $(e^{-\beta H})_e = \sum_{k \geq 0} e^{-2k\beta} |e_{2k}\rangle\langle e_{2k}|$  denota la parte par de  $e^{-\beta H}$ . Para el estado impar  $\rho_o$  tenemos un resultado similar con las correspondientes sustituciones.



## Capítulo 3

# El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

### 3.1. Introducción

Un átomo o una molécula pueden absorber o emitir dos, tres o más fotones simultáneamente en el mismo evento cuántico. Este fenómeno natural fue predicho originalmente por Maria Goeppert-Mayer<sup>1</sup> en 1931, véase [24], la primera evidencia experimental llegó treinta años después, cuando la tecnología láser permitió verificar la excitación de dos fotones en cristales de europio [30], siendo subsecuentemente observada en un vapor de cesio [3]. Aunque el proceso de multifotones más estudiado es el de absorción y/o emisión de dos fotones, recientemente estudios de procesos de multifotones de orden mayor, en particular absorción y/o emisión de tres y cuatro fotones, han recibido una atención considerable. Además del interés puramente matemático que subyace en el estudio de estos procesos, su potencial aplicación, por ejemplo, en el almacenamiento de datos en medios ópticos y emisión de luz coherente (láser), véase [26, 32, 38], ha incrementado el interés en su estudio. Los procesos de multifotones pueden ser modelados como sistemas cuánticos abiertos, cuya evolución a través del tiempo es descrita por un semigrupo cuántico de Markov. El estudio de estados invariantes de un semigrupo y sus propiedades de convergencia a los estados estacionarios, proporciona información teórica importante que puede ser usada para

---

<sup>1</sup>Maria Goeppert-Mayer fue la segunda mujer en ganar el Premio Nobel de Física, después de Marie Curie.

diseñar, por ejemplo, estrategias de control. Uno de los objetivos de este capítulo es contribuir al estudio de estados estacionarios coherentes de un qms asociado con el proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano. El caso de absorción de dos fotones fue estudiado en [22]. En este capítulo hacemos un análisis más profundo de la estructura del conjunto de los estados coherentes invariantes para  $n$  arbitrario  $n \in \mathbb{N}$ . Aunque estos estados son operadores actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión infinita, pueden ser representados en términos de los vectores coherentes, por medio de matrices complejas de tamaño  $n \times n$ , donde  $n$  es el número de fotones. Esta representación nos permite clasificarlos de acuerdo al rango de la correspondiente matriz. Resulta que los estados coherentes invariantes están parametrizados por los puntos de un subconjunto cerrado convexo  $S_\gamma \subset \mathbb{R}^{n^2-1}$ , donde  $\gamma$  es un parámetro que mide la intensidad del bombeo hamiltoniano. Los estados puros (operadores de rango uno) corresponden a los puntos en la frontera  $\partial S_\gamma$  de  $S_\gamma$ . También estudiamos las propiedades de convergencia a los estados estacionarios de este qms y, como una aplicación, mostramos cómo el bombeo hamiltoniano puede ser considerado como un control (hamiltoniano) que combinado con las propiedades de convergencia a los estados estacionarios del semigrupo nos permite llevar (preparar) el sistema a su estado base cuando iniciamos en cualquier estado en el dominio de atracción de un estado coherente invariante dado.

### 3.2. El generador GKSL y el semigrupo mínimo

El generador formal de Gorini-Kosakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) para el proceso de absorción de  $n$  fotones con tasa de absorción  $\mu^2 > 0$  y bombeo hamiltoniano, actuando sobre el espacio  $L_1(\mathfrak{h})$ , donde  $\mathfrak{h} = \ell_2(\mathbb{N})$  (en la representación predual), tiene la forma

$$\mathcal{L}_*\rho = -\frac{\mu^2}{2} \left( a^\dagger n a^n \rho + \rho a^\dagger n a^n - 2a^n \rho a^\dagger n \right) - i[H_\gamma, \rho], \quad (3.1)$$

donde  $n$  es el número de fotones,  $\rho \in L_1(\mathfrak{h})$  es un estado del sistema,  $a^\dagger$ ,  $a$ , son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, y el término

$$H_\gamma = \frac{i}{2}(\gamma a^n - \bar{\gamma} a^\dagger n)$$

describe el bombeo hamiltoniano con un parámetro complejo  $\gamma$  (intensidad).

Si quitamos el bombeo hamiltoniano ( $\gamma = 0$ ), se verifica fácilmente que el generador dual

$$\mathcal{L}^{(\gamma=0)}x = -\frac{\mu^2}{2}\left(a^\dagger n a^n x + x a^\dagger n a^n - 2a^\dagger n x a^n\right) \quad (3.2)$$

actuando sobre  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  satisface la **Hipótesis A** para la existencia del semigrupo mínimo dual  $(\mathcal{T}_t^{(\gamma=0)})_{t \geq 0}$ . En efecto, puesto que  $G = -\frac{\mu^2}{2}a^\dagger n a^n$ , se tiene que  $\Re\langle u, Gu \rangle \leq 0$  para toda  $u \in \text{Dom}(G)$ , entonces  $G$  es un operador disipativo maximal, y por lo tanto genera un semigrupo fuertemente continuo  $(P_t)_{t \geq 0}$  de contracciones sobre  $\mathfrak{h} = l_2(\mathbb{N})$ , de hecho,

$$(P_t)_{t \geq 0} = (e^{-\frac{\mu^2}{2}[N]_n t})_{t \geq 0}$$

donde  $[N]_n$  es el operador de multiplicación  $[N]_n = N(N-1) \cdots (N-n+1)$ . Además la condición  $\mathcal{L}^{\gamma=0}(\mathbb{1}) = 0$  claramente se satisface. Por lo tanto la **Hipótesis A** se cumple.

El semigrupo predual  $(\mathcal{T}_{*t}^{(\gamma=0)})_{t \geq 0}$  satisface la ecuación maestra.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}_{*t}^{(\gamma=0)} \sigma = \mathcal{L}_*^{(\gamma=0)}(\mathcal{T}_{*t}^{(\gamma=0)} \sigma), \quad \mathcal{T}_{*0}^{(\gamma=0)} \sigma = \sigma \in L_1(\mathfrak{h}) \quad (3.3)$$

En el caso  $\gamma \neq 0$ , usaremos que el hamiltoniano  $H$  es una perturbación pequeña del operador  $G = -\frac{\mu^2}{2}a^\dagger n a^n$ . Demostramos esto en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.1.** *Existen dos constantes positivas  $a < 1$  y  $b$  tales que para cualquier  $u \in \text{Dom}(G)$ , se tiene*

$$\|Hu\| \leq a\|Gu\| + b\|u\|. \quad (3.4)$$

*Demostración.* Obsérvese que para cada  $n$  fija,

$$\lim_k \frac{[k+n]_n^{\frac{1}{2}}}{[k]_n} = 0.$$

Entonces para cada entero positivo  $m$ , existe un entero positivo  $K = K(m)$  tal que

$$\frac{[k]_n}{[k]_n^2} \leq \frac{[k+n]_n}{[k]_n^2} < \frac{1}{m} \quad (3.5)$$

si  $k \geq K$ .

### 30 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

Sea  $u = \sum_{k \geq 0} u_k e_k \in \text{Dom}(G)$ , entonces tomando en cuenta que para cada elemento  $e_k$  de la base ortonormal:  $a^n e_k = [k]_n^{\frac{1}{2}} e_{k-n}$ ,  $a^{\dagger n} e_k = [k+n]_n^{\frac{1}{2}} e_{k+n}$  y  $a^{\dagger n} a^n e_k = [k]_n e_k$ , donde  $[k]_n = k(k-1) \cdots (k-n+1)$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|Hu\| &= \left\| \frac{i}{2}(\gamma a^n - \bar{\gamma} a^{\dagger n})u \right\| \leq \frac{|\gamma|}{2} \left( \sum_{k=n}^K |u_k|^2 [k]_n \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\gamma|}{2} \left( \sum_{k \geq K+1} |u_k|^2 [k]_n \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{|\gamma|}{2} \left( \sum_{k=0}^K |u_k|^2 [k+n]_n \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\gamma|}{2} \left( \sum_{k \geq K+1} |u_k|^2 [k+n]_n \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{|\gamma|}{2} ([K]_n^{\frac{1}{2}} + [K+n]_n^{\frac{1}{2}}) \left( \sum_{k=0}^K |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\gamma|}{m} \left( \sum_{k \geq K+1} |u_k|^2 [k]_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6) \\
 &\leq \frac{|\gamma|}{2} ([K]_n^{\frac{1}{2}} + [K+n]_n^{\frac{1}{2}}) \|u\| + \frac{|\gamma|}{m} \|a^{\dagger n} a^n u\| \\
 &\leq \frac{|\gamma|}{2} ([K]_n^{\frac{1}{2}} + [K+n]_n^{\frac{1}{2}}) \|u\| + \frac{2|\gamma|}{\mu^2 m} \|Gu\|.
 \end{aligned}$$

Tomando  $m$  tal que  $a = \frac{2|\gamma|}{\mu^2 m} < 1$ , se obtiene el resultado.  $\square$

Como corolario obtenemos que el operador  $\tilde{G} = G + H$  es generador de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo sobre  $\mathfrak{h}$ , ver por ejemplo el Teorema X.50 p. 244 de [36] y su corolario. Como la **Hipótesis A** se sigue cumpliendo para  $\gamma \neq 0$ , el semigrupo mínimo dual  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  se puede construir como en el caso  $\gamma = 0$ , véase [9]. Otra manera de construir este semigrupo es usar la fórmula de Trotter-Kato, (Teorema X.51 de la referencia anterior), usando los semigrupos  $(\mathcal{T}_t^{(\gamma=0)})_{t \geq 0}$  y el grupo unitario (de Heisenberg) generado por  $[H, \cdot]$ , es decir,  $\mathcal{T}_{Ht}\sigma = e^{-itH}\sigma e^{itH}$ .

La unicidad de la solución para la ecuación maestra que satisface el predual de  $(\mathcal{T}_{*t})_{t \geq 0}$ ,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}_{*t}\sigma = \mathcal{L}(\mathcal{T}_{*t}\sigma), \quad \mathcal{T}_{*0}\sigma = \sigma \in L_1(\mathfrak{h}) \quad (3.7)$$

se sigue de la conservatividad del semigrupo dual. Mostramos a continuación que la condición  $\mathcal{L}(N) \leq \mu^2 N$  se satisface, y entonces  $\mathcal{L}$  satisface el criterio ya mencionado en el capítulo anterior para la conservatividad, véase también **Hipótesis C** en [12]. Observemos que si

$$\mathcal{L}(N) := \lim_l \mathcal{L}(N_l)$$



donde  $(N_l)_{l \geq 0}$  es la sucesión de operadores de rango finito definida por  $N_l e_k = k e_k$  si  $k \leq l$  y cero en otro caso, entonces para cada  $u = \sum_k u_k e_k$  tal que  $\sum_{k \geq 0} k^2 |u_k|^2 < \infty$ , un cálculo directo muestra que

$$\mathcal{L}(N)u = -\mu^2 \sum_{k \geq 0} u_k n[k]_n e_k$$

De lo anterior se sigue que  $0 \leq \mu^2 N - \mathcal{L}(N)$  en un subconjunto denso de  $\mathfrak{h}$ .

Nuestro objetivo será encontrar estados invariantes  $\rho$ , es decir, estados que satisfacen la ecuación  $\mathcal{L}_* \rho = 0$ , para el semigrupo generado por (3.1). Para este cálculo es conveniente usar el sistema de vectores exponenciales de  $\ell_2(\mathbb{N})$ .

### 3.3. Vectores pseudo-exponenciales

En esta sección introducimos una clase de vectores que llamamos *pseudo-exponenciales* que generalizan a la ya conocida clase de los vectores exponenciales  $\{\varepsilon(z)\}_{z \in \mathbb{C}}$ , sobre el espacio de Fock simétrico  $\Gamma_s(\mathbb{C})$ , véase apéndice D para una descripción de este espacio.

Observemos que para cada  $z \in \mathbb{C}$ , el operador  $K_z = i(\bar{z}a - za^\dagger)$  con dominio  $Dom(N^{\frac{1}{2}})$ , donde  $N = a^\dagger a$  es el operador de número, es auto-adjunto. Por lo tanto tenemos que el operador  $e^{iK_z} = e^{(za^\dagger - \bar{z}a)}$  es unitario.

El siguiente lema da una representación interesante para estados coherentes, utilizados frecuentemente en óptica cuántica.

**Lema 3.3.1.** *Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos*

$$e^{(za^\dagger - \bar{z}a)} e_0 = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varepsilon(z).$$

Por lo tanto,  $\varepsilon_0(z) := e^{(za^\dagger - \bar{z}a)} e_0 = \frac{1}{\|\varepsilon(z)\|} \varepsilon(z)$  es un vector coherente.

*Demostración.* Puesto que el vector  $e_0$  es analítico para  $K_z$ , podemos calcular  $e^{(za^\dagger - \bar{z}a)} e_0$  usando la serie de potencias. Desarrollando algunos términos de la serie obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} e^{(za^\dagger - \bar{z}a)} e_0 &= \left(1 - \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{|z|^4}{4} - \frac{1}{3!} \frac{|z|^6}{8} + \dots\right) e_0 \\ &+ \left(1 - \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{|z|^4}{4} + \dots\right) z e_1 + \dots = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \varepsilon(z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

La conclusión se obtiene notando que  $\|\varepsilon(z)\| = e^{\frac{1}{2}|z|^2}$ . □

## 32 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

**Proposición 3.3.2.** *Con la notación del lema anterior, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y tomando  $iK_z = T_z = (za^\dagger - \bar{z}a)$ , lo siguiente se satisface*

$$a^n e^{T_z} e_0 = a^n \varepsilon_0(z) = e^{T_z} (a + z)^n e_0. \quad (3.9)$$

$$a^{\dagger n} e^{T_z} e_0 = a^{\dagger n} \varepsilon_0(z) = e^{T_z} (a^\dagger + \bar{z})^n e_0. \quad (3.10)$$

*Demostración.* Es fácil verificar que  $[a, T_z] = z$  sobre el dominio del operador  $N^{\frac{1}{2}}$ . Se puede probar por inducción que

$$aT_z^n = T_z^n a + n z T_z^{n-1}$$

sobre el dominio de  $N^{\frac{1}{2}}$ .

Después de realizar algunos cálculos obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} a e^{T_z} e_0 &= a e_0 + a T_z e_0 + \frac{a T_z^2}{2!} e_0 + \frac{a T_z^3}{3!} e_0 + \dots \\ &= a e_0 + z e_0 + T_z a e_0 + \frac{T_z^2 a}{2!} e_0 + z \frac{T_z^2}{2!} e_0 + \frac{T_z^3 a}{3!} e_0 + \dots \\ &= e^{T_z} a e_0 + z e^{T_z} e_0. \end{aligned}$$

En general, por inducción tenemos que

$$a^n e^{T_z} e_0 = e^{T_z} (a + z)^n e_0.$$

De manera análoga se prueba que  $a^{\dagger n} e^{T_z} e_0 = e^{T_z} (a^\dagger + \bar{z})^n e_0$ . □

**Definición 3.3.3.** *Para cada  $k \geq 0$ , definimos  $\varepsilon_k(z) := e^{T_z} e_k$ . Llamamos vectores pseudo-exponenciales asociados con  $z \in \mathbb{C}$ , a los elementos del conjunto  $\{\varepsilon_k(z)\}_{k \geq 0}$ .*

**Observación:** Notemos que para cada  $z \in \mathbb{C}$  fijo, el conjunto  $\{\varepsilon_k(z)\}_{k \geq 0}$  es linealmente independiente, de hecho es ortonormal, puesto que es la imagen de la base ortonormal canónica bajo la acción del operador unitario  $e^{T_z}$ . Además, para  $k = 0$  obtenemos el conjunto usual de vectores coherentes.

Utilizando el lema anterior y después de algunos cálculos, tenemos que para cada  $n \geq 1$  las potencias de los operadores de creación y aniquilación actúan sobre los vectores coherentes  $\varepsilon_0(z)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a^n \varepsilon_0(z) &= e^{T_z} (a + z)^n e_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} e^{T_z} a^k e_0 = z^n \varepsilon_0(z). \\ a^{\dagger n} \varepsilon_0(z) &= e^{T_z} (a^\dagger + \bar{z})^n e_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bar{z}^{n-k} e^{T_z} a^{\dagger k} e_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k!} \bar{z}^{n-k} \varepsilon_k(z). \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.4. La $C^*$ -álgebra matricial $\mathcal{C}_{0,n}$

En esta sección revisaremos algunas propiedades de las  $C^*$ -álgebras definidas para cada  $n \geq 1$  de la siguiente forma

$$\mathcal{C}_{0,n} = \text{span}\{|\varepsilon_0(z_k)\rangle\langle\varepsilon_0(z_{k'})| : z_k \in \mathbb{C}, z_k \neq z_{k'}, k \neq k', 0 \leq k \leq n-1\}$$

De la definición anterior, tenemos lo siguiente

**Proposición 3.4.1.** *El conjunto  $\{|\varepsilon_0(z_k)\rangle\langle\varepsilon_0(z_{k'})| : z_k \in \mathbb{C}, z_k \neq z_{k'}, k \neq k', 0 \leq k \leq n-1\}$  es linealmente independiente.*

*Demostración.* Sea  $\sum \alpha_{kk'} |\varepsilon_0(z_k)\rangle\langle\varepsilon_0(z_{k'})| = 0$ , multiplicando el lado derecho por  $\varepsilon_0(z_l)$ , con  $0 \leq l \leq n-1$ , obtenemos

$$0 = \sum_{k,k'} \alpha_{kk'} \langle\varepsilon_0(z_{k'}), \varepsilon_0(z_l)\rangle \varepsilon_0(z_k) = \sum_k \left( \sum_{k'} \alpha_{kk'} \langle\varepsilon_0(z_{k'}), \varepsilon_0(z_l)\rangle \right) \varepsilon_0(z_k).$$

Puesto que cualquier subconjunto  $\{|\varepsilon_0(z_k)\rangle : z_k \in \mathbb{C}, z_k \neq z_{k'}, k \neq k'\}$  de  $\{|\varepsilon_0(z)\rangle\}_{z \in \mathbb{C}}$  es linealmente independiente, ver apéndice, tenemos que

$$\sum_{k'} \alpha_{kk'} \langle\varepsilon_0(z_{k'}), \varepsilon_0(z_l)\rangle = 0 \quad \forall k. \quad (3.12)$$

El determinante de Gram  $\det\left(\langle\varepsilon_0(z_{k'}), \varepsilon_0(z_{l'})\rangle\right)_{0 \leq k', l' \leq n-1}$  es diferente de cero, pues el conjunto de vectores exponenciales  $\{|\varepsilon_0(z_{k'})\rangle : z_{k'} \neq z_k, k' \neq k, z_{k'} \in \mathbb{C}\}$  es linealmente independiente, por lo tanto  $\alpha_{kk'} = 0$  para todo  $0 \leq k, k' \leq n-1$ .  $\square$

Evidentemente  $(\mathcal{C}_{0,n})_{n \geq 1}$  es una sucesión creciente, es decir,  $\mathcal{C}_{0,n} \subset \mathcal{C}_{0,n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Ahora caracterizaremos los elementos positivos en el álgebra  $\mathcal{C}_{0,n}$ .

**Lema 3.4.2.** *Un elemento  $x \in \mathcal{C}_{0,n}$  es positivo si y solo si tiene la forma*

$$x = \sum_{0 \leq k, k' \leq n-1} x_{kk'} |\varepsilon_0(z_k)\rangle\langle\varepsilon_0(z_{k'})|$$

donde  $(x_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq n-1}$  es una matriz hermitiana positiva semidefinida.

*Demostración.* Un elemento  $x \in \mathcal{C}_{0,n}$  es positivo si y sólo si tiene la forma  $x = y^*y$  para algún  $y \in \mathcal{C}_{0,n}$ . Por lo tanto, un cálculo simple muestra que cada elemento de matriz  $x_{kk'}$  puede ser escrito en la siguiente forma

$$x_{kk'} = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \bar{y}_{ik} y_{jk'} \langle\varepsilon_0(z_i), \varepsilon_0(z_j)\rangle = \langle v_k(y), v_{k'}(y) \rangle, \quad (3.13)$$

### 34 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

donde  $v_k(y) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} y_{ik} \varepsilon_0(z_i)$ . Esto significa que la matriz  $x = (x_{kk'})$  es la matriz de Gram para el conjunto de vectores  $(v_k(y))_{0 \leq k \leq n-1}$ , pero las matrices de Gram son positivas semidefinidas, y viceversa, cualquier matriz positiva semidefinida es una matriz de Gram. Esto finaliza la demostración.  $\square$

Finalizamos la sección con un resultado sencillo pero muy útil para nuestros propósitos.

**Lema 3.4.3.** *El rango de una matriz de Gram  $\rho = (\langle v_k, v_{k'} \rangle)_{0 \leq k, k' \leq n-1}$  es igual al máximo número de vectores linealmente independientes en el conjunto  $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ .*

*Demostración.* Si  $\rho = (\langle v_k, v_{k'} \rangle)_{0 \leq k, k' \leq n-1}$  donde  $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$  es un conjunto finito de vectores en  $\mathbb{C}^n$ , entonces se tiene que para cada  $u \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\langle u, \rho u \rangle = \left\| \sum_{0 \leq k \leq n-1} u_k v_k \right\|^2 \quad (3.14)$$

Se sigue que  $\text{rank}(\rho) = n$  si y sólo si el subconjunto de vectores  $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$  es linealmente independiente. Sea  $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_{m-1}}\}$  con  $i_0 < i_1 < \dots < i_{m-1}$  un subconjunto maximal de vectores linealmente independientes en  $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ , entonces  $r = \text{rank}(\rho) \geq m$ , puesto que existe un menor distinto de cero de orden  $m$ , además el menor

$$\rho \begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \cdots & i_{m-1} \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_{m-1} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (3.15)$$

Puesto que  $\rho$  es un operador autoadjunto, existe un operador unitario  $U$  tal que  $U^* \rho U = \text{diag}(\rho_0, \dots, \rho_{n-1})$ . Claramente  $r = \text{rank}(\rho) = \text{rank}(U^* \rho U) = \text{card}\{\rho_j > 0\}$ . Sea  $\mathfrak{h}_r = \text{span}\{u_0, \dots, u_{r-1}\}$  donde  $u_j$  es el eigenvector asociado con el eigenvalor positivo  $\rho_j$ ,  $0 \leq j \leq r-1$ . Si  $u = \sum_{0 \leq j \leq r-1} c_j u_j \in \mathfrak{h}_r$ , entonces un sencillo cálculo, usando el hecho de que los  $u_j$ 's forman un sistema ortonormal, muestra que

$$\langle u, \rho u \rangle = \sum_{0 \leq j \leq r-1} |c_j|^2 \rho_j.$$

Se sigue que  $\langle u, \rho u \rangle > 0$ ,  $\forall u \in \mathfrak{h}_r \setminus \{0\}$ . Ahora, tomando cualquier  $u \in \mathfrak{h}_r \setminus \{0\}$  y considerando el elemento  $\tilde{u} = (u_0, \dots, u_{r-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ , tenemos que

$$0 < \langle u, \rho u \rangle = \langle \tilde{u}, \rho \tilde{u} \rangle = \left\| \sum_{0 \leq k \leq r-1} u_k v_k \right\|^2$$

para toda  $u \in \mathfrak{h}_r \setminus \{0\}$ . Esto implica que el subconjunto  $\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$  es linealmente independiente. Por lo tanto  $r \leq m$  y esto prueba el lema.  $\square$

### 3.5. Estados estacionarios coherentes

Los siguientes cálculos formales nos permiten encontrar estados estacionarios para el proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano. El caso  $n = 2$ , como ya hemos mencionado, fue estudiado en [22], aquí obtenemos el resultado para  $n$  arbitrario.

Consideremos elementos positivos  $\rho$  de la  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{C}_{0,l}$ , para algún  $l \geq 1$  suficientemente grande, es decir,

$$\rho = \sum_{0 \leq k, k' \leq l-1} \rho_{kk'} |\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})| \quad (3.16)$$

con  $\rho = (\rho_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq l-1}$  una matriz de Gram. Evaluando el generador  $\mathcal{L}_*$  en  $\rho$ , obtenemos para  $l \geq n$  lo siguiente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_* \rho &= \sum_{0 \leq k, k' \leq l-1} \rho_{kk'} \left( -\frac{\mu^2 \bar{z}_{k'}^n}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sqrt{k!} z_{k'}^{n-k} |\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_k(z_{k'})| \\ &+ \sum_{0 \leq k, k' \leq l-1} \rho_{kk'} \left( -\frac{\mu^2 z_k^n}{2} - \frac{\bar{\gamma}}{2} \right) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sqrt{k!} \bar{z}_k^{n-k} |\varepsilon_k(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})| \\ &+ \sum_{0 \leq k, k' \leq l-1} \rho_{kk'} \left( \mu^2 (z_k^n z_{k'}^n - \frac{|z_k|^{2n} + |z_{k'}|^{2n}}{2}) + \frac{\gamma}{2} (z_k^n - z_{k'}^n) + \frac{\bar{\gamma}}{2} (\bar{z}_{k'}^n - \bar{z}_k^n) \right) \times \\ &|\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})|. \end{aligned}$$

Claramente,  $\rho$  pertenece al dominio de  $\mathcal{L}_*$  y la ecuación  $\mathcal{L}_* \rho = 0$  tiene soluciones no triviales  $\rho$ , si para toda  $0 \leq k, k' \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} \mu^2 (z_k^n z_{k'}^n - \frac{|z_k|^{2n} + |z_{k'}|^{2n}}{2}) + \frac{\gamma}{2} (z_k^n - z_{k'}^n) + \frac{\bar{\gamma}}{2} (\bar{z}_{k'}^n - \bar{z}_k^n) &= 0 \\ \left( -\frac{\mu^2 \bar{z}_{k'}^n}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) &= 0 \\ \left( -\frac{\mu^2 z_k^n}{2} - \frac{\bar{\gamma}}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Además, bajo las condiciones anteriores podemos tomar  $\rho_{kk'} \neq 0$  para  $0 \leq k, k' \leq n-1$  y  $\rho_{kk'} = 0$  para  $n \leq k, k' \leq l-1$ . Ahora observemos que el sistema (3.17) tiene solución si y solo si,

### 36 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

$$z_k^n = -\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2}, \quad \forall 0 \leq k \leq n-1.$$

Por lo tanto, si  $\gamma = |\gamma|e^{i\theta}$ , las  $n$  raíces complejas de  $-\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2}$ :

$$z_k = \left| -\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2} \right|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{-\theta-\pi+2\pi k}{n}\right)} \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (3.18)$$

son soluciones de (3.17).

Así, tenemos lo siguiente:

**Proposición 3.5.1.** *Para cada  $\gamma \in \mathbb{C}$  fija, todos los elementos positivos de  $\mathcal{C}_{0,n}$  de la forma*

$$\rho_\gamma = \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{kk'} |\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})| \quad (3.19)$$

con  $z_k$  dado por (3.18) para  $0 \leq k \leq n-1$ , satisfaciendo la condición

$$e^{-\alpha_n} \sum_{k,k'=0}^n \rho_{k,k'} e^{z_k \bar{z}_{k'}} = 1 \quad (3.20)$$

son estados invariantes.

*Demostración.* Es claro que cada  $\rho_\gamma$  pertenece al dominio de  $\mathcal{L}_*$ . En términos de la base ortonormal  $(e_m)_{m \geq 0}$  los operadores  $\rho_\gamma$  tienen la forma

$$\rho_\gamma = e^{-\alpha_n} \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{kk'} \left| \sum_m \frac{z_k^m}{\sqrt{m!}} e_m \right\rangle \left\langle \sum_{m'} \frac{z_{k'}^{m'}}{\sqrt{m'!}} e_{m'} \right| = e^{-\alpha_n} \sum_{m,m'} \eta_{mm'} |e_m\rangle \langle e_{m'}| \quad (3.21)$$

donde  $\alpha_n = \left| \frac{\gamma}{\mu^2} \right|^{\frac{2}{n}}$  y

$$\eta_{mm'} = \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{kk'} \frac{z_k^m \bar{z}_{k'}^{m'}}{\sqrt{m!m'!}}. \quad (3.22)$$

Un cálculo directo muestra que,

$$\text{tr}(\rho_\gamma) = e^{-\alpha_n} \sum_{l \geq 0} \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{kk'} \frac{(z_k \bar{z}_{k'})^l}{l!} = e^{-\alpha_n} \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{k,k'} e^{z_k \bar{z}_{k'}}.$$

Por lo tanto, un operador  $\rho_\gamma$  de la forma (3.19) es un estado si es un elemento positivo de  $\mathcal{C}_{0,n}$  y satisface la condición de la traza (3.20). Consecuentemente, todos los elementos positivos  $\rho_\gamma \in \mathcal{C}_{0,n}$  de la forma (3.19) que satisfacen la condición anterior de la traza son estados invariantes del proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano.  $\square$

**Observación 3.5.2.** *Observemos que los  $\rho_\gamma$ 's dados por (3.19) son operadores no diagonales de dimensión infinita en la base canónica de  $\mathfrak{h}$  pero están representados como matrices finitas con respecto al sistema de vectores coherentes.*

**Definición 3.5.3.** *Llamamos **estados estacionarios coherentes** del proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano, a cualquier elemento de la forma (3.19) que satisface la condición de la traza (3.20) y las condiciones de positividad (D.2).*

De acuerdo al Teorema D.0.22 del apéndice D, la aplicación

$$\sum_{0 \leq k, k' \leq n-1} \rho_{kk'} |\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})| \mapsto (\rho_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq n-1}$$

establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de estados estacionarios coherentes y un subconjunto  $S_\gamma$  de las matrices hermitianas complejas positivas semidefinidas, de hecho:

$$S_\gamma := \{\rho = (\rho_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq n-1} : \rho_{k'k} = \bar{\rho}_{kk'}, \text{ satisfaciendo (3.20) y (D.2)}\}$$

La condición de la traza nos permite escribir una de las  $n^2$  variables reales asociadas con los elementos  $\rho_{kk'}$ 's, en términos de las restantes  $n^2 - 1$  variables reales, por lo tanto a  $S_\gamma$  lo podemos considerar como un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2-1}$ . Sea  $S_{\gamma,r}$  el subconjunto de todos los elementos  $\rho = (\rho_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq n-1} \in S_\gamma$  con  $\text{rango}(\rho) = r$ . Claramente obtenemos la descomposición

$$S_\gamma = \cup_{r=1}^n S_{\gamma,r}.$$

De ahora en adelante denotaremos por  $S(\rho)$  al estado estacionario coherente correspondiente al elemento  $\rho \in S_\gamma$ , es decir,

$$S(\rho) = \sum_{0 \leq k, k' \leq n-1} \rho_{kk'} |\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})|$$

si  $\rho = (\rho_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq n-1} \in S_\gamma$ . Algunas veces escribiremos simplemente  $\rho$  en lugar  $S(\rho)$ , si no hay lugar a confusión.

### 38 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

**Lema 3.5.4.** Para cada  $1 \leq r \leq n$ ,  $\rho \in S_{\gamma,r}$  si y solo si  $\rho$  es una matriz hermitiana  $\rho = (\rho_{kk'})_{0 \leq k,k' \leq n-1}$  que satisface la condición de la traza (3.20), las condiciones de positividad (D.2) con

$$\rho \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = 0, \quad 0 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n-1, \quad r+1 \leq p \leq n \quad (3.23)$$

y existe un menor principal estrictamente positivo de orden  $r$ .

*Demostración.* La condición de la traza y las condiciones de positividad (D.2) son condiciones suficientes para que  $\rho \in S_{\gamma}$ . Además, si las condiciones (3.23) se cumplen y existe un menor principal de orden  $r$  estrictamente positivo, entonces  $\rho \in S_{\gamma,r}$ .

Inversamente, si  $\rho \in S_{\gamma}$  y tiene rango  $r$ , entonces la condición de la traza y las condiciones de positividad con (3.23) se satisfacen. Además  $\rho$  es una matriz de Gram, puesto que es un elemento positivo en  $\mathcal{C}_{0,n}$ , véase la ecuación (3.13) en la prueba del Lema 3.4.2. Existe un conjunto de vectores  $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$  tal que  $\rho_{kk'} = \langle v_k, v_{k'} \rangle$ . Todos los menores principales también son determinantes de Gram. Por el Lema 3.4.3,  $\rho \in S_{\gamma,r}$  implica que existe un subconjunto  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$  de  $r$  vectores linealmente independiente en el conjunto  $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ . Equivalentemente el menor principal

$$\rho \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} > 0. \quad (3.24)$$

Esto prueba el lema. □

**Teorema 3.5.5.** El conjunto  $S_{\gamma}$  es un subconjunto compacto convexo del espacio de matrices hermitianas complejas de  $n \times n$ .

*Demostración.* El conjunto de matrices hermitianas complejas positivas semidefinidas es un cono cerrado convexo en el espacio de Banach de las matrices complejas de  $n \times n$ . Por lo tanto, cualquier combinación lineal convexa de dos elementos  $\rho_1, \rho_2 \in S_{\gamma}$  es positiva semidefinida. Además, si  $\rho_1 = (\rho_{kk'}^{(1)})_{0 \leq k,k' \leq n-1}$ ,  $\rho_2 = (\rho_{kk'}^{(2)})_{0 \leq k,k' \leq n-1}$  son elementos de  $S_{\gamma}$  y

$$\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2 = (\rho_{kk'})_{0 \leq k,k' \leq n-1}$$

donde  $\rho_{kk'} = \lambda \rho_{kk'}^{(1)} + (1 - \lambda) \rho_{kk'}^{(2)}$ . Entonces, tenemos que

$$\sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{k,k'} e^{z_k \bar{z}_{k'}} = \lambda \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{k,k'}^{(1)} e^{z_k \bar{z}_{k'}} + (1 - \lambda) \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{k,k'}^{(2)} e^{z_k \bar{z}_{k'}} = 1 \quad (3.25)$$



Esto prueba que  $S_\gamma$  es convexo.

Para  $z_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  fija y  $\alpha_n$  dadas por (3.18) y (3.21), la función traza definida sobre el conjunto de matrices complejas de  $n \times n$  por medio de

$$f(\rho) = e^{-\alpha_n} \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_{k,k'} e^{z_k \bar{z}_{k'}}$$

es una función continua del espacio de Banach de las matrices complejas de  $n \times n$  en  $\mathbb{C}$ . De esta forma  $f^{-1}(\{1\})$  es un subconjunto cerrado. Además,  $S_\gamma$  es la intersección de  $f^{-1}(\{1\})$  y el cono cerrado de las matrices complejas positivas semidefinidas de  $n \times n$  y por lo tanto es cerrado. Finalmente, las condiciones de positividad (D.2) y de la traza implican que  $S_\gamma$  es acotado; en efecto, la frontera  $\partial S_\gamma$  es un subespacio cerrado definido por las ecuaciones (D.2) reemplazando la desigualdad por la igualdad.  $\square$

**Teorema 3.5.6.** (i) *Los estados invariantes coherentes extremos (o puros) del proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano tienen la forma  $S(\rho)$ , con  $\rho$  un punto extremo de  $S_\gamma$  caracterizado por la condición de la traza, las condiciones (3.23) con  $r = 1$  y  $\rho_{kk} > 0$  para algún  $0 \leq k \leq n-1$ . Además, si la matriz  $(\rho_{kk'})_{0 \leq k,k' \leq n-1}$  es diagonal, entonces existe un único elemento diagonal positivo  $\rho_{kk} = 1$ , es decir, en este caso,  $S(\rho) = |\varepsilon_0(z_k)\rangle\langle\varepsilon_0(z_k)|$ .*

(ii) *Los estados estacionarios coherentes mezclados  $\rho$  del proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano tienen la forma  $S(\rho)$ , donde  $\rho \in S_\gamma$  es una combinación lineal convexa de puntos extremos de  $S_\gamma$ .*

*Demostración.* Claramente  $S(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) = \lambda S(\rho_1) + (1-\lambda)S(\rho_2)$ . Por lo tanto,  $S(\rho)$  es un estado estacionario coherente extremo si y solo si  $\rho$  es un punto extremo de  $S_\gamma$ . Además, los extremos de  $S_\gamma$  coinciden con su frontera. Puesto que los estados puros son operadores de rango uno, la primera parte del inciso (i) es una consecuencia directa del Lema 3.5.4.

Si  $\rho$  es diagonal, es decir,  $\rho_{kk'} = 0$  para toda  $k \neq k'$ , y  $\rho_{ll} > 0$  para algún  $0 \leq l \leq n-1$ , entonces para cualquier  $l' > l$ , el menor

$$\rho \begin{pmatrix} l & l' \\ l & l' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} l & l' \\ l & l' \end{vmatrix} = \rho_{ll}\rho_{l'l'} - |\rho_{ll'}|^2 = \rho_{ll}\rho_{l'l'} \quad (3.26)$$

debe ser cero. Esto implica que  $\rho_{l'l'} = 0$ . El caso  $l' < l$  es similar. Por lo tanto  $\rho_{ll}$  es el único elemento distinto de cero. La condición de la traza implica que  $\rho_{ll} = e^{-\alpha_n} e^{|z_l|^2} = 1$ . Esto completa la prueba de (i).

Por el Teorema 3.5.5, el conjunto  $S_\gamma$  es compacto y convexo y, por el Teorema de Krein-Milman, coincide con la envolvente convexa de sus puntos extremos. Así, (ii) es una consecuencia de (i).  $\square$

### 3.6. Convergencia al estado estacionario

El concepto de irreducibilidad en la teoría de procesos clásicos de Markov significa, a grandes rasgos, que la dinámica del semigrupo no puede terminar eventualmente en un subespacio más pequeño, allí la ausencia de proyecciones subarmónicas no triviales es equivalente al concepto de irreducibilidad. En [14] Fagnola y Rebolledo caracterizan las proyecciones soporte de un estado invariante a través de sus proyecciones subarmónicas.

En esta sección definimos, para cada  $\rho \in S_{\gamma,r}$ , el álgebra hereditaria mediante las proyecciones soportes del estado, esta álgebra es invariante bajo la dinámica del semigrupo dual  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ , también definimos el semigrupo reducido actuando sobre esta álgebra y demostramos que es irreducible.

El subespacio soporte de un estado invariante es la cerradura de su rango. En el siguiente teorema caracterizamos los subespacios soporte de los estados coherentes estacionarios.

**Teorema 3.6.1.** *El subespacio soporte de un estado coherente estacionario  $S(\rho)$  con  $\rho \in S_{\gamma,r}$  es generador por el conjunto de vectores  $\{\omega_j(\rho) : 0 \leq j \leq r-1\}$ , donde*

$$\omega_j(\rho) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \varepsilon_0(z_k) = \varepsilon_0(z_j) + \sum_{r \leq k \leq n-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \varepsilon_0(z_k) \quad (3.27)$$

con  $(\alpha_{jk}(\rho))_{0 \leq j \leq r-1, 0 \leq k \leq n-1}$  la matriz de  $r \times n$  asociada con  $\rho = (\langle v_k, v_{k'} \rangle)_{0 \leq k, k' \leq n-1}$  de tal manera que, si  $\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$  es el correspondiente  $r$ -referencial no singular de  $\rho$ , entonces para toda  $0 \leq k \leq n-1$

$$v_k = \sum_{0 \leq j \leq r-1} \alpha_{jk}(\rho) v_j.$$

Para  $0 \leq k \leq r-1$  tenemos  $\alpha_{jk}(\rho) = \delta_{jk}$ ,  $0 \leq j \leq r-1$ .

*Demostración.* Si  $\rho \in S_{\gamma,r}$ , entonces existe un  $r$ -referencial no singular  $\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$  tal que  $\rho = (\langle v_k, v_{k'} \rangle)_{0 \leq k, k' \leq n-1}$  donde para  $r \leq k \leq n-1$ ,  $v_k \in \text{span}\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$ . De esta forma podemos escribir  $v_k = \sum_{0 \leq j \leq r-1} \alpha_{jk}(\rho) v_j$  para toda  $0 \leq k \leq n-1$  y, entonces,

$$\langle v_k, v_{k'} \rangle = \sum_{0 \leq j, j' \leq r-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \alpha_{j'k'}(\rho) \langle v_j, v_{j'} \rangle$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{0 \leq k, k' \leq n-1} \sum_{0 \leq j, j' \leq r-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \alpha_{j'k'}(\rho) \langle v_j, v_{j'} \rangle |\varepsilon_0(z_k)\rangle \langle \varepsilon_0(z_{k'})| \\ &= \sum_{0 \leq j, j' \leq r-1} \left| \langle v_j, v_{j'} \rangle^{\frac{1}{2}} w_j(\rho) \right\rangle \left\langle \langle v_{j'}, v_j \rangle^{\frac{1}{2}} w_{j'}(\rho) \right|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned} w_j(\rho) &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \varepsilon_0(z_k) = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \delta_{jk} \varepsilon_0(z_k) + \sum_{r \leq k \leq n-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \varepsilon_0(z_k) \\ &= \varepsilon_0(z_j) + \sum_{r \leq k \leq n-1} \bar{\alpha}_{jk}(\rho) \varepsilon_0(z_k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

y  $\langle v_j, v_{j'} \rangle^{\frac{1}{2}}$  denota la raíz cuadrada con argumento mínimo. El subconjunto  $\{w_j(\rho) : 0 \leq j \leq r-1\}$  es linealmente independiente, puesto que

$$0 = \sum_{0 \leq l \leq r-1} \xi_l w_l(\rho) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left( \sum_{0 \leq l \leq r-1} \xi_l \bar{\alpha}_{lk}(\rho) \right) \varepsilon_0(z_k)$$

La independencia lineal de los vectores exponenciales implica que

$$\sum_{0 \leq l \leq r-1} \xi_l \bar{\alpha}_{lk}(\rho) = 0.$$

Así que,  $\xi_l = 0$  para toda  $0 \leq l \leq r-1$ . Finalmente, de (3.28) obtenemos que para cada  $u \in \mathfrak{h}$ ,

$$\rho u = \sum_{0 \leq j, j' \leq r-1} \langle v_j, v_{j'} \rangle \langle w_{j'}, u \rangle w_j(\rho)$$

para toda  $0 \leq k \leq r-1$ . Esto finaliza la prueba.  $\square$

La proyección soporte de un estado  $\rho$  es la proyección ortogonal sobre su espacio soporte. La proyección soporte  $p$  de un estado invariante es  $\mathcal{T}$ -subarmónica (resp.  $\mathcal{T}$ -superarmónica, resp.  $\mathcal{T}$ -armónica) si  $\mathcal{T}_t(p) \geq p$  (resp.  $\mathcal{T}_t(p) \leq p$ , resp.  $\mathcal{T}_t(p) = p$ ), para todo  $t \geq 0$ , donde  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  es el semigrupo dual (o adjunto) actuando sobre  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Las proyecciones subarmónicas juegan un papel importante para establecer propiedades de aproximación al equilibrio de un qms. El Teorema II.1 en [14] afirma que las proyecciones soporte de estados invariantes son subármonicas.

Para cada  $0 \leq r \leq n-1$ , sea  $W_r(\rho) = \{w_j(\rho) : 0 \leq j \leq r-1\}$  el  $r$ -referencial generador del supespacio soporte del estado  $\rho = (\langle v_k, v_{k'} \rangle)_{0 \leq k \leq n-1} \in$

## 42 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

$S_{\gamma,r}$  dado por el Teorema 3.6.1. Denotamos por  $\tilde{W}_r(\rho) = \{\tilde{w}_j(\rho) : 0 \leq j \leq r-1\}$  el correspondiente  $r$  referencial ortogonal que resulta de  $W_r(\rho)$  después de aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. En este caso,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0(\rho) &= w_0(\rho), \\ \tilde{w}_j(\rho) &= \left( \mathbb{1} - \sum_{0 \leq k \leq j-1} \frac{1}{\|\tilde{w}_k(\rho)\|^2} |\tilde{w}_k(\rho)\rangle\langle\tilde{w}_k(\rho)| \right) w_j(\rho), \quad 1 \leq j \leq r-1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para cada  $\rho \in S_{\gamma,r}$ , la subálgebra hereditaria se define como

$$\mathcal{A}_{W_r(\rho)} = p_{W_r(\rho)} \mathcal{B}(\mathfrak{h}) p_{W_r(\rho)}$$

donde  $p_{W_r(\rho)}$  es la proyección soporte de  $\rho$ ,

$$p_{W_r(\rho)} = p_{\tilde{W}_r(\rho)} = \sum_{0 \leq j \leq r-1} |\tilde{w}_j(\rho)\rangle\langle\tilde{w}_j(\rho)|. \quad (3.31)$$

Esta subálgebra es invariante bajo la acción del semigrupo dual y uno puede definir el semigrupo reducido  $\mathcal{T}_{W_r(\rho),t}$ , actuando sobre  $\mathcal{A}_{W_r(\rho)}$  por medio de

$$\mathcal{T}_{W_r(\rho),t} p_{W_r(\rho)} x p_{W_r(\rho)} := p_{W_r(\rho)} \mathcal{T}_t x p_{W_r(\rho)},$$

para todo  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ,  $t \geq 0$ .

**Teorema 3.6.2.** *Para cada  $\rho \in S_{\gamma,r}$ ,  $0 \leq r \leq n-1$  tenemos:*

- (i) *El semigrupo hereditario es irreducible, es decir, no existen proyecciones subarmónicas no triviales en  $\mathcal{A}_{W_r(\rho)}$ .*
- (ii) *Para cada estado normal inicial  $\sigma \in \mathcal{A}_{W_r(\rho)}$ , la evolución del semigrupo predual heredado  $\mathcal{T}_{W_r(\rho),t}(\sigma)$  converge a  $\rho$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$  en la norma de la traza.*

*Demostración.* Por el Teorema III.1 en [14], es suficiente probar que  $a^{\dagger n} \neq p_l a^{\dagger n}$  sobre  $\text{Dom}(a^{\dagger n}) \cap \text{Ran}(p_l)$ , para cada proyección no trivial  $p_l = p_l(\rho) = \sum_{0 \leq j \leq l-1} |\tilde{w}_j(\rho)\rangle\langle\tilde{w}_j(\rho)|$ ,  $0 \leq l < r-1$ . Observemos que para cada  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$a^n \varepsilon_0(z_k) = z_k^n \varepsilon_0(z_k) = -\frac{\tilde{\gamma}}{\mu^2} \varepsilon_0(z_k)$$

Entonces, los vectores  $\{\varepsilon_0(z_k) : 0 \leq k \leq n-1\}$  son vectores propios de  $a^n$  asociados con el valor  $-\frac{\tilde{\gamma}}{\mu^2}$ . La ecuación (3.27) muestra que cada vector

$w_j(\rho)$  para  $0 \leq j \leq r-1$  pertenece al espacio propio asociado con el valor propio  $-\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2}$ , y por (3.30), lo mismo se cumple para cada elemento  $\tilde{w}_j(\rho)$  en el correspondiente  $r$ -referencial ortogonal. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} p_l a^{\dagger n} \tilde{w}_l(\rho) &= \sum_{0 \leq j \leq l-1} |\tilde{w}_j(\rho)\rangle \langle a^n \tilde{w}_j(\rho) | \tilde{w}_l(\rho) = -\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2} \sum_{0 \leq j \leq l-1} \delta_{jl} \tilde{w}_j(\rho) \\ &= -\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2} \tilde{w}_l(\rho) \neq a^{\dagger n} \tilde{w}_l(\rho), \quad \forall 0 \leq l < r-1. \end{aligned}$$

Se sigue que los  $\tilde{w}_j$ 's no son eigenvectores de  $a^{\dagger n}$ , puesto que los  $\varepsilon_0(z_k)$ 's tampoco lo son, (véase 3.11). Esto demuestra (i).

El inciso (ii) es consecuencia directa de (i) y del Corolario III.1 en [14].  $\square$

**Corolario 3.6.3.** *Sea  $\rho \in S_{\gamma,r}$  un estado invariante, entonces*

- (i) *Si  $r = 1$ , el semigrupo reducido es el trivial, esto es, todos los  $x \in \mathcal{A}_{W_1(\rho)}$  son puntos fijos ( $\mathcal{T}_{W_1(\rho),t} x = x$ ) del semigrupo dual.*
- (ii) *Si  $r \geq 2$ , existen estados puros  $\sigma \in \mathcal{A}_{W_r(\rho)}$  tales que  $\mathcal{T}_{W_r(\rho),t}(\sigma)$  converge a  $\rho$  cuando  $t$  tiende a infinito. En otras palabras, el rango no se preserva durante la evolución.*

*Demostración.* Si  $r = 1$ , un simple cálculo usando (3.31) muestra que el subálgebra hereditaria es

$$\mathcal{A}_{W_1(\rho)} = \{x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}) : x = p_{W_1(\rho)} x p_{W_1(\rho)}\} = \{x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}) : x = \text{tr}(x p_{W_1(\rho)}) p_{W_1(\rho)}\}. \quad (3.32)$$

Consecuentemente, puesto que el semigrupo es conservativo, tenemos que para cada  $x \in \mathcal{A}_{W_1(\rho)}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{W_1(\rho),t} x &= \text{tr}(x p_{W_1(\rho)}) \mathcal{T}_{W_1(\rho),t} p_{W_1(\rho)} = \text{tr}(x p_{W_1(\rho)}) \mathcal{T}_{W_1(\rho),t} (p_{W_1(\rho)} \mathbb{1}_{p_{W_1(\rho)}}) \\ &= \text{tr}(x p_{W_1(\rho)}) p_{W_1(\rho)} \mathcal{T}_{W_1(\rho),t} (\mathbb{1}) p_{W_1(\rho)} = \text{tr}(x p_{W_1(\rho)}) p_{W_1(\rho)} = x. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por lo tanto,  $\mathcal{A}_{W_1(\rho)}$  coincide con la subálgebra de los puntos fijos de  $\mathcal{T}_{W_1(\rho)}$ . El único estado en  $\mathcal{A}_{W_1(\rho)}$  es el estado invariante  $\rho$ , el cual coincide con la proyección ortogonal  $p_{W_1(\rho)}$ , pues tenemos que  $\rho = \text{tr}(\rho p_{W_1(\rho)}) p_{W_1(\rho)}$ , pero  $1 = \text{tr}(\rho) = \text{tr}(\rho p_{W_1(\rho)})$  entonces obtenemos  $\rho = p_{W_1(\rho)}$ . Esto prueba (i).

Para cada  $0 \leq j \leq r-1$ , el estado puro  $\sigma_j = |\tilde{w}_j(\rho)\rangle \langle \tilde{w}_j(\rho)| \in \mathcal{A}_{W_r(\rho)}$  es llevado a  $\rho$  con el semigrupo heredado  $\mathcal{T}_{W_r(\rho)}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Observación 3.6.4.** *Como una consecuencia del inciso (i) en el Corolario 3.6.3, el semigrupo dual actúa trivialmente sobre  $\cup_{\rho \in S_{\gamma,1}} \mathcal{A}_{W_1(\rho)}$ .*

### 3.7. Una aplicación a control cuántico

Recordemos que  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  denota al qms del proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano de intensidad  $\gamma \in \mathbb{C}$ , estudiado en la sección anterior y  $\rho_\gamma$  denota cualquier estado invariante de  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  de la forma (3.21). Además utilizamos los símbolos  $\mathcal{L}^{(\gamma=0)}$  y  $\mathcal{T}^{(\gamma=0)} = (\mathcal{T}_t^{(\gamma=0)})_{t \geq 0}$  para el generador y el semigrupo del proceso de absorción de  $n$  fotones correspondiente al valor  $\gamma = 0$ , respectivamente.

#### 3.7.1. Absorción de $n$ fotones ( $\gamma = 0$ ): estados invariantes y dominios de atracción

Las siguientes proposiciones caracterizan a los estados invariantes y establecen las propiedades de aproximación al equilibrio de los qms  $(\mathcal{T}_t^{(\gamma=0)})_{t \geq 0}$  para  $n$  arbitrario. Omitimos sus demostraciones pues son extensiones naturales del correspondiente resultado para  $n$  en [13].

**Proposición 3.7.1.** *Para el proceso de absorción de  $n$  fotones ( $\gamma = 0$ ), los estados estacionarios tienen la forma*

$$\rho = \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} \rho_{jk} |e_j\rangle \langle e_k| \quad (3.34)$$

y  $\rho_{jk} = 0$  if  $j \geq n$  o  $k \geq n$ , con  $(\rho_{jk})_{0 \leq j, k \leq n-1}$  satisfaciendo la condición de la traza

$$\sum_{1 \leq j \leq n-1} \rho_{jj} = 1$$

y las condiciones de positividad (D.2).

**Proposición 3.7.2.** (i) *Las proyecciones subarmónicas para el proceso de absorción de  $n$  fotones son  $0, \mathbb{1}$ , y las proyecciones  $p_r$  donde*

$$p_r = \sum_{q \geq 0} |e_{nq+r}\rangle \langle e_{nq+r}|$$

y

$$\sum_{q=1}^m |e_{nq+r}\rangle \langle e_{nq+r}|$$

con  $0 \leq r < n$ ,  $m \geq 1$ , y sumas de proyecciones ortogonales de la clase anterior. Las proyecciones  $p_r$  son  $\mathcal{T}$ -invariantes y las subálgebras hereditarias  $\mathcal{A}_r = p_r \mathcal{B}(\mathfrak{h}) p_r$  son  $\mathcal{T}$ -invariantes.

(ii) Para cualquier estado normal  $\sigma$  tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e_j, \mathcal{T}_{*t}(\sigma)e_k \rangle = 0$  para toda  $j, k$  tal que  $\max\{j, k\} \geq n$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e_j, \mathcal{T}_{*t}(\sigma)e_j \rangle = \text{tr}(\sigma p_j), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\langle e_j, \mathcal{T}_{*t}(\sigma)e_k \rangle|^2 \leq \text{tr}(\sigma p_j)\text{tr}(\sigma p_k),$$

con  $0 \leq j, k < n$ .

Aunque el siguiente Teorema 3.7.5 es una generalización de la Proposición 7.3 en [13], incluimos aquí una demostración, puesto que a diferencia del caso  $n = 2$ , para el caso de  $n$  arbitrario aparecen algunos aspectos interesantes.

Introducimos la siguiente notación que nos será útil para cálculos posteriores

$$[k, l] := (k+1)(k+2) \cdots (k+l) \quad 0 \leq k, l \leq n-1.$$

Antes del teorema tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.7.3.** Para cada  $n \geq 2$  fijo y  $0 \leq k, l \leq n-1$  la sucesión  $(d_{n,k,l}(m))_{m \geq 1}$  definida por

$$\begin{aligned} d_{n,k,l}(m) = & \left( \frac{[k, l] + [n+k, l]}{2[k, l]^2} \right) \left( \frac{[k, l] + [n+k, l]}{2[n+k, l]} \right) \left( \frac{[n+k, l] + [2n+k, l]}{2[n+k, l]} \right) \left( \frac{[n+k, l] + [2n+k, l]}{2[2n+k, l]} \right) \\ & \cdots \left( \frac{[(m-1)n+k, l] + [mn+k, l]}{2[(m-1)n+k, l]} \right) \left( \frac{[(m-1)n+k, l] + [mn+k, l]}{2[mn+k, l]} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

es acotada.

*Demostración.* En esta demostración seguimos una idea de [37]. Para cada  $n \geq 2$  fijo y  $0 \leq k \leq l \leq n-1$ , consideremos la sucesión  $(s_{n,k,l}(m))_{m \geq 1}$  definida como

$$s_{n,k,l}(m) = \left( \frac{2[n+k, l]}{[k, l] + [n+k, l]} \right) \left( \frac{2[2n+k, l]}{[n+k, l] + [2n+k, l]} \right) \cdots \left( \frac{2[mn+k, l]}{[(m-1)n+k, l] + [mn+k, l]} \right)$$

Observemos que la sucesión  $(s_{n,k,l}(m))_{m \geq 1}$  es creciente. Los productos parciales de (3.35) con un número impar  $2m+1$  de factores pueden escribirse de la siguiente forma

$$o_m = \frac{[nm+k, l] + [n(m+1)+k, l]}{2[k, l]^2 s_{n,k,l}(m)^2} \quad m \geq 1, \quad (3.36)$$

y aquellos con un número par  $2m$  de factores son de la forma

$$e_m = \frac{2[nm+k, l]}{2[k, l]^2 s_{n,k,l}(m)^2} \quad m \geq 1. \quad (3.37)$$

## 46 El proceso de absorción de $n$ fotones con bombeo hamiltoniano

Claramente para cada  $m \geq 1$ ,  $e_m < o_m$ . Además, un cálculo sencillo muestra que  $e_m < e_{m+1}$  y  $o_{m+1} < o_m$ . Por lo tanto tenemos que

$$e_1 < e_2 < e_3 < \cdots < o_3 < o_2 < o_1.$$

Esto implica que

$$e_1 < d_{n,k,l}(m) < o_1$$

para todo  $m \geq 1$  y así terminamos la prueba.  $\square$

**Observación 3.7.4.** *Observemos que para  $n = 2, k = 0$  y  $l = 1$ , la fórmula (3.35) se reduce al conocido producto de Wallis  $2\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\frac{2m}{2m+1}$ . Por lo tanto, podemos decir que el producto (3.35) es una interesante generalización del producto de Wallis.*

**Teorema 3.7.5.** *El dominio de atracción del estado invariante  $\rho$  en la Proposición 3.7.1, está dado por*

$$\begin{aligned} D(\rho) = \left\{ \sigma \in L_1(\mathfrak{h}) \text{ estado} : \rho_{kk} = \sum_{m \geq 0} \sigma_{nm+k, nm+k}, \right. \\ \left. \rho_{kl} = \sum_{m \geq 0} c_{nm+k, l} ((nm+k+1) \cdots (nm+k+l))^{\frac{1}{2}} \sigma_{nm+k, nm+k+l}, 0 \leq k, l \leq n-1 \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde la sucesión  $(c_{nm+k, l})_{m \geq 0}$  satisface la relación de recurrencia (3.40).

*Demostración.* Para cualquier estado inicial  $\sigma$  usamos la notación  $p_{ij}(t) = \langle e_i, \mathcal{T}_{*t}(\sigma)e_j \rangle$ . Utilizaremos la notación del Lema 3.7.3. Para cualquier par  $(k, l)$ ,  $0 \leq k, l \leq n-1$  fijo, definiremos  $\theta_{k, l}(t) = [k, l]^{\frac{1}{2}} p_{k, k+l}(t)$ . Entonces  $\theta_{k, l}(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \theta'_{k, l}(t) = \mu^2 [k, n] \theta_{k+n, l}(t) \\ - \frac{\mu^2}{2} k(k-1) \cdots (k+l-n+1) ([k-n, l] + [k, l]) \theta_{k, l}(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

El espacio generado por los vectores de rango finito  $\mathcal{M} = \text{span}\{|e_i\rangle\langle e_j| : i, j \geq 0\}$  es  $\mathcal{T}_{*t}$ -invariante. Para  $\sigma \in \mathcal{M}$  definiremos la función  $f(\sigma, t) = \sum_{m \geq 0} c_{nm+k, l} \theta_{nm+k, l}(t)$  donde  $c_{nm+k, l}$  son los coeficientes a determinar. Después de algunos cálculos obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(\sigma, t) = \\ \sum_{m \geq 0} \left( c_{nm+k-n, l} \mu^2 (nm+k-n+1) \cdots (nm+k) \right. \\ \left. - c_{nm+k, l} \frac{\mu^2}{2} (nm+k) \cdots (nm+k+l-n+1) ([n(m-1)+k, l] \right. \\ \left. + [nm+k, l]) \right) \theta_{nm+k, l}(t). \end{aligned}$$



Por lo tanto  $f'(\sigma, t) = 0$  para cada  $\sigma \in \mathcal{M}$  y para todo  $t \geq 0$ , si y solo si

$$\frac{c_{nm+k,l}}{c_{n(m-1)+k,l}} = \frac{2[n(m-1) + k, l]}{[n(m-1) + k, l] + [nm + k, l]} \quad (3.40)$$

para  $m \geq 0$ ,  $0 \leq k, l \leq n-1$ . Así que tomando  $c_{k,l} = 1$  tenemos que

$$c_{nm+k,l} = 2^m \prod_{j=0}^{m-1} \frac{[nj + k, l]}{[nj + k, l] + [n(j+1) + k, l]} \quad (3.41)$$

El Lema 3.7.3 asegura que la sucesión  $([nm + k, l]^{\frac{1}{2}} c_{nm+k,l})_{m \geq 0}$  está acotada por una constante positiva  $c$ , para cada  $n \geq 2$ ,  $0 \leq k, l \leq n-1$  fijos, puesto que  $d_{n,k,l}(m) = [nm + k, l]^{-1} c_{nm+k,l}^{-2}$ .

Así, para un elemento positivo  $\sigma \in \mathcal{M}$ , de la desigualdad de Schwarz y de  $|p_{jk}(t)|^2 \leq p_{jj}(t)p_{kk}(t)$ , como en la Proposición 7.3 en [13], obtenemos que  $f(\sigma, t) \leq c \operatorname{tr}(\sigma)$ .

Puesto que cada elemento positivo  $\sigma \in L_1(\mathfrak{h})$  puede ser aproximado por una sucesión creciente de elementos positivos  $(\sigma_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{M}$ , entonces  $f(\sigma, t)$  puede extenderse continuamente a todo el espacio  $L_1(\mathfrak{h})$ . Además, se sigue que  $f(\sigma, t)$  es una función constante de  $t$ . Por lo tanto, por el inciso (ii) en la Proposición 3.7.2, obtenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{nm+k,l}(t) = 0$  para toda  $m \geq 1$ . Así obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{k,l}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\sigma, t) = f(\sigma, 0) = \\ &= \sum_{m \geq 0} c_{nm+k,l} ((nm + k + 1) \cdots (nm + k + l))^{\frac{1}{2}} \sigma_{nm+k, nm+k+l}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

La conclusión de la demostración se sigue del inciso (ii) en la Proposición 3.7.2 anterior.  $\square$

### 3.7.2. La estructura $\mathbb{Z}_n$ de los estados invariantes para $\gamma \neq 0$

A continuación describimos la estructura  $\mathbb{Z}_n$  de cada estado estacionario  $\rho_\gamma$  del proceso de absorción de  $n$  fotones con un bombeo hamiltoniano ( $\gamma \neq 0$ ).

**Proposición 3.7.6.** *El estado invariante  $\rho_\gamma$  es una combinación lineal de estados puros:*

$$\rho_\gamma = e^{-\alpha_n} \sum_{0 \leq r, r' \leq n-1} c_{rr'} |v_r\rangle \langle v_{r'}|, \quad (3.43)$$

donde

$$v_r = \sum_{m \geq 0} \frac{(-\bar{\gamma}/\mu^2)^m}{\sqrt{(nl+r)!}} e_{nm+r} \quad y \quad c_{rr'} = \sum_{0 \leq k, k' \leq n-1} \rho_{kk'} z_k^r z_{k'}^{r'} \quad (3.44)$$

para  $0 \leq r \leq n-1$ , con  $\alpha_n = |\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2}|^{\frac{2}{n}}$  y  $z_k, \rho_{kk'}$  como en (3.18) y (3.19), respectivamente.

*Demostración.* De acuerdo a (3.21) y (3.22), con  $m = nl+r$  y  $m' = nl'+r'$ , después de un cálculo directo, usando que  $z_k^{nl+r} = (-\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2})^l z_k^r$ , podemos ver que el estado coherente invariante  $\rho_\gamma$  toma la forma

$$\begin{aligned} \rho_\gamma = & e^{-\alpha_n} \sum_{r, r'=0}^{n-1} \sum_{k, k'=0}^{n-1} \rho_{kk'} \left| \sum_{l \geq 0} \frac{z_k^{nl+r}}{\sqrt{(nl+r)!}} e_{nl+r} \right\rangle \left\langle \sum_{l' \geq 0} \frac{z_{k'}^{nl'+r'}}{\sqrt{(nl'+r')!}} e_{nl'+r'} \right| = \\ & e^{-\alpha_n} \sum_{r, r'=0}^{n-1} \sum_{k, k'=0}^{n-1} \rho_{kk'} z_k^r z_{k'}^{r'} \left| \sum_{l \geq 0} \frac{(-\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2})^l}{\sqrt{(nl+r)!}} e_{nl+r} \right\rangle \left\langle \sum_{l' \geq 0} \frac{(-\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2})^{l'}}{\sqrt{(nl'+r')!}} e_{nl'+r'} \right|. \end{aligned} \quad (3.45)$$

de esta manera obtenemos (3.43).  $\square$

### 3.7.3. El bombeo hamiltoniano como control

Observemos que de (3.43), al tomar el límite cuando  $\gamma \rightarrow 0$ , el estado invariante  $\rho_\gamma$  converge al estado base invariante  $|e_0\rangle\langle e_0|$ . De hecho, si  $\gamma \rightarrow 0$  entonces  $v_0 \rightarrow e_0$  y  $v_r \rightarrow 0$  para  $0 < r \leq n-1$ . Por lo tanto, si el bombeo hamiltoniano se enciende con una intensidad fija  $\gamma$ , cualquier estado inicial  $\sigma$  en el dominio de atracción del estado coherente invariante  $\rho_\gamma$  de la forma (3.21) o (3.43), por la propiedad de aproximación al equilibrio establecida en el inciso (ii) del Teorema 3.6.2, será llevado por el semigrupo a  $\rho_\gamma$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Después de esto, dejando que la intensidad  $\gamma \rightarrow 0$  el sistema puede ser llevado al estado base  $|e_0\rangle\langle e_0|$ . Se espera que el tiempo de relajación sea exponencial, así, la estrategia de control anterior que combina la propiedad de aproximación al equilibrio con el apagado del bombeo hamiltoniano puede llevarse a cabo en el laboratorio.

En cambio, si el bombeo hamiltoniano se apaga, entonces comenzando en cualquier estado en el dominio de atracción de un estado invariante  $\rho \neq |e_0\rangle\langle e_0|$  dado en la Proposición 3.7.1, cuando  $t \rightarrow \infty$  el sistema conduce al estado inicial a  $\rho$ . En este sentido, el bombeo hamiltoniano puede ser considerado como un hamiltoniano de control.

### 3.8. El caso $n = 2$

Todos los estados estacionarios coherentes  $\rho$  del proceso de absorción de dos fotones con un bombeo hamiltoniano de parámetro complejo  $\gamma = |\gamma|e^{i\theta}$ , tienen la forma (3.19) con  $z_0 = |\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2}|^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\theta+\pi}{2}}$ ,  $z_1 = -z_0$ . De la condición de la traza obtenemos

$$\rho_{11} = 1 - 2xe^{-2\alpha} - \rho_{00}$$

con  $\alpha = |\frac{\bar{\gamma}}{\mu^2}|$  y  $\rho_{01} = x + iy$ . Por lo tanto, la matriz  $\rho = (\rho_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq 1}$  está dado por

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & x + iy \\ x - iy & 1 - 2xe^{-2\alpha} - \rho_{00} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

las condiciones de positividad implican

$$\begin{aligned} \rho_{00}(1 - 2xe^{-2\alpha} - \rho_{00}) - x^2 - y^2 &\geq 0, \\ \rho_{00} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La región determinada por las condiciones (3.47) es un elipsoide sólido  $S_\gamma \subset \mathbb{R}^3$  tangente al plano  $\rho_{00} = 0$  en  $(0, 0, 0)$ , Figura 3.1. De acuerdo al Lema 3.5.4 y al Teorema 3.5.6 los estados puros corresponden con los puntos en el conjunto  $\partial S_\gamma$  y los puntos de  $\text{int } S_\gamma$  corresponden con estados mezclados.

#### 3.8.1. Proyecciones subarmónicas

Sea  $\rho \in S_\gamma$ . En términos del sistema de vectores exponenciales,  $\rho$  tiene la forma

$$\rho = \rho_{00}|\varepsilon_0(z_0)\rangle\langle\varepsilon_0(z_0)| + \rho_{01}|\varepsilon_0(z_0)\rangle\langle\varepsilon_0(z_1)| + \bar{\rho}_{01}|\varepsilon_0(z_1)\rangle\langle\varepsilon_0(z_0)| + \rho_{11}|\varepsilon_0(z_1)\rangle\langle\varepsilon_0(z_1)|.$$

Para cada  $v = \sum v_k e_k \in \mathfrak{h}$  un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{aligned} \rho v &= \sum_k \frac{z_0^{2k} v_{2k}}{\sqrt{2k!}} ((\rho_{00} + \rho_{01})\varepsilon_0(z_0) + (\bar{\rho}_{01} + \rho_{11})\varepsilon_0(z_1)) + \\ &\quad \sum_k \frac{z_0^{2k+1} v_{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)!}} ((\rho_{00} - \rho_{01})\varepsilon_0(z_0) + (\bar{\rho}_{01} - \rho_{11})\varepsilon_0(z_1)). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Los vectores  $\{w_0(\rho) = (\rho_{00} + \rho_{01})\varepsilon_0(z_0) + (\bar{\rho}_{01} + \rho_{11})\varepsilon_0(z_1), w_1(\rho) = (\rho_{00} - \rho_{01})\varepsilon_0(z_0) + (\bar{\rho}_{01} - \rho_{11})\varepsilon_0(z_1)\}$  son linealmente independientes si y solo si

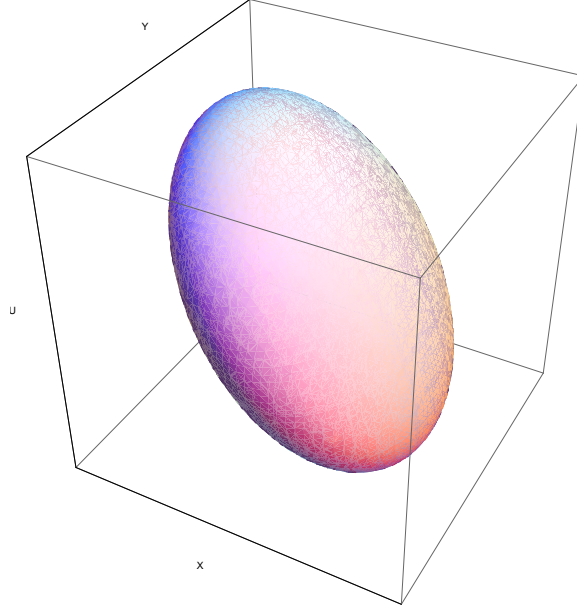


Figura 3.1: Elipsoide con parámetro  $\alpha = \frac{1}{2}$

la primera condición en (3.47) es una identidad. Consecuentemente, cualquier  $\rho \in \partial S_\gamma$  es un operador de rango uno y, entonces, coincide con la proyección sobre su subespacio soporte. Además, usando (3.47) para este caso obtenemos que para  $\rho_{00} > 0$ ,

$$\rho = \rho_{00}^{-1} |\rho_{00}\varepsilon_0(z_0) + \bar{\rho}_{01}\varepsilon_0(z_1)\rangle \langle \rho_{00}\varepsilon_0(z_0) + \bar{\rho}_{01}\varepsilon_0(z_1)|$$

y para  $\rho_{00} = 0$ ,  $\rho = |\varepsilon_0(z_1)\rangle \langle \varepsilon_0(z_1)|$ .

Cualquier  $\rho \in \text{int}(S_\gamma)$  tiene rango dos y el correspondiente subespacio soporte está generador por  $\{w_0(\rho), w_1(\rho)\}$ , que en este caso son linealmente independientes. La proyección soporte es la proyección ortogonal

$$|\tilde{w}_0(\rho)\rangle \langle \tilde{w}_0(\rho)| + |\tilde{w}_1(\rho)\rangle \langle \tilde{w}_1(\rho)|$$

con  $\tilde{w}_j(\rho)$ ,  $j = 0, 1$ , los vectores ortogonales se obtienen aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

### 3.8.2. Estructura par-impar

De acuerdo al Teorema 3.7.6, el estado  $\rho_\gamma$  es un combinación lineal de los siguientes cuatro operadores autoadjuntos,

$$\rho_\gamma = \eta_{00}\rho_{ee} + \eta_{11}\rho_{oo} + \eta_{01}\rho_{eo} + \bar{\eta}_{01}\rho_{oe}, \quad (3.49)$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho_{ee} &= \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha^{2k}}{2k!} |e_{2k}\rangle \langle e_{2k}| + \sum_{j, k \geq 1} \frac{\alpha^{2k+j} (-1)^j}{\sqrt{2k!(2k+2j)!}} \left( e^{i\theta j} |e_{2k}\rangle \langle e_{2k+2j}| + e^{-i\theta j} |e_{2k+2j}\rangle \langle e_{2k}| \right), \\
\rho_{oo} &= \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha^{2k}}{(2k+1)!} |e_{2k+1}\rangle \langle e_{2k+1}| \\
&\quad + \sum_{j, k \geq 1} \frac{\alpha^{2k+j} (-1)^j}{\sqrt{(2k+1)!(2k+2j+1)!}} \left( e^{i\theta j} |e_{2k+1}\rangle \langle e_{2k+2j+1}| + e^{-i\theta j} |e_{2k+2j+1}\rangle \langle e_{2k+1}| \right) \quad (3.50) \\
\rho_{eo} &= \sum_{j, k \geq 0} \frac{\alpha^{2k+j} (-1)^j}{\sqrt{2k!(2k+2j+1)!}} \left( e^{i\theta j} |e_{2k}\rangle \langle e_{2k+(2j+1)}| + e^{-i\theta j} |e_{2k+(2j+1)}\rangle \langle e_{2k}| \right), \\
\rho_{oe} &= \sum_{j, k \geq 0} \frac{\alpha^{2k+j} (-1)^j}{\sqrt{(2k+1)!(2k+2j)!}} \left( e^{i\theta j} |e_{2k+1}\rangle \langle e_{2k+2j}| + e^{-i\theta j} |e_{2k+2j}\rangle \langle e_{2k+1}| \right),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\eta_{00} &= 1 + 2x(1 - e^{-2\alpha}), \\
\eta_{01} &= \sqrt{\alpha} e^{\frac{i(\theta+\pi)}{2}} (2u - 2iy - 1 + 2x e^{-2\alpha}), \\
\eta_{11} &= \alpha(1 - 2x(1 + e^{-2\alpha})).
\end{aligned} \quad (3.51)$$

Para mostrar la estructura par-impar del estado coherente estacionario  $\rho_\gamma$ , escribimos a continuación algunos elementos de matriz (en la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ ).

$$\rho_\gamma = \begin{pmatrix}
\eta_{00} & \eta_{01} & -\frac{\alpha e^{i\theta}}{\sqrt{2!}} \eta_{00} & -\frac{\alpha e^{i\theta}}{\sqrt{3!}} \eta_{01} & \frac{\alpha^2 e^{2i\theta}}{\sqrt{4!}} \eta_{00} & \frac{\alpha^2 e^{2i\theta}}{\sqrt{5!}} \eta_{01} & \dots \\
\bar{\eta}_{01} & \eta_{11} & -\frac{\alpha e^{i\theta}}{\sqrt{2!}} \bar{\eta}_{01} & -\frac{\alpha e^{i\theta}}{\sqrt{3!}} \eta_{11} & \frac{\alpha^2 e^{2i\theta}}{\sqrt{4!}} \bar{\eta}_{01} & \frac{\alpha^2 e^{2i\theta}}{\sqrt{5!}} \eta_{11} & \dots \\
-\frac{\alpha e^{-i\theta}}{\sqrt{2!}} \eta_{00} & -\frac{\alpha e^{-i\theta}}{\sqrt{2!}} \eta_{01} & \frac{\alpha^2}{2!} \eta_{00} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!3!}} \eta_{01} & -\frac{\alpha^3 e^{i\theta}}{\sqrt{2!4!}} \eta_{00} & -\frac{\alpha^3 e^{i\theta}}{\sqrt{2!5!}} \eta_{01} & \dots \\
-\frac{\alpha e^{-i\theta}}{\sqrt{3!}} \bar{\eta}_{01} & -\frac{\alpha e^{-i\theta}}{\sqrt{3!}} \eta_{11} & \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!3!}} \bar{\eta}_{01} & \frac{\alpha^2}{3!} \eta_{11} & -\frac{\alpha^3 e^{i\theta}}{\sqrt{3!4!}} \bar{\eta}_{01} & -\frac{\alpha^3 e^{i\theta}}{\sqrt{3!5!}} \eta_{11} & \dots \\
\frac{\alpha^2 e^{-2i\theta}}{\sqrt{4!}} \eta_{00} & \frac{\alpha^2 e^{-2i\theta}}{\sqrt{4!}} \eta_{01} & -\frac{\alpha^3 e^{-i\theta}}{\sqrt{2!4!}} \eta_{00} & -\frac{\alpha^3 e^{-i\theta}}{\sqrt{3!4!}} \eta_{01} & \frac{\alpha^4}{4!} \eta_{00} & \frac{\alpha^4}{\sqrt{4!5!}} \eta_{01} & \dots \\
\frac{\alpha^2 e^{-2i\theta}}{\sqrt{5!}} \bar{\eta}_{01} & \frac{\alpha^2 e^{-2i\theta}}{\sqrt{5!}} \bar{\eta}_{11} & -\frac{\alpha^2}{\sqrt{2!5!}} \bar{\eta}_{01} & -\frac{\alpha^3 e^{-i\theta}}{\sqrt{3!5!}} \bar{\eta}_{11} & \frac{\alpha^4}{\sqrt{4!5!}} \bar{\eta}_{01} & \frac{\alpha^4}{5!} \bar{\eta}_{11} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

52El proceso de absorción de  $n$  fotones con bombeo hamiltoniano

## Capítulo 4

# Conclusiones y perspectivas

La clase de generadores infinitesimales del tipo de acoplamiento débil de semigrupos cuánticos de Markov es suficientemente rica para incluir estados estacionarios de balance detallado y estados estacionarios que no son de balance detallado. Hemos demostrado con un generador de Markov de este tipo, que modela absorción y emisión simultánea de 2 y 4 fotones con tasas de absorción y emisión variables, que más allá del balance detallado, los estados de equilibrio local (localmente de Gibbs), tienen asociada una dinámica estacionaria con dos regímenes (absorción y emisión) y con la presencia de flujos (o corrientes).

En el caso de intensidades de absorción y emisión constantes, para  $m$  y  $n$  enteros positivos arbitrarios, hemos caracterizado los estados invariantes de un generador de este tipo en términos de  $r$  estados mutuamente ortogonales, donde  $r$  es el máximo común divisor de  $m$  y  $n$ .

Una extensión posible de este trabajo sería estudiar la estructura de los estados estacionarios y los regímenes asociados con ellos para otros valores de  $m$  y  $n$  en el caso de intensidades de absorción y emisión variables. En esta dirección, podemos plantear algunas preguntas abiertas:

- Si  $m$  y  $n$  son enteros positivos arbitrarios y las intensidades de absorción y emisión son variables. ¿Se preserva la estructura de los estados invariantes obtenida en el caso de intensidades constantes?
- ¿Qué tipo de dinámica estacionaria (regímenes, flujos o corrientes) aparece en el caso de un generador con  $m$  y  $n$  enteros positivos arbitrarios e intensidades variables? Se podrían estudiar primero algunos casos, por ejemplo  $m = 4$  y  $n = 6$ .

Nuestro análisis de los estados coherentes estacionarios del proceso de absorción de  $n$ -fotones con un bombeo hamiltoniano, extiende y profundiza el desarrollado en la referencia [22] para el caso  $n = 2$ . En relación con nuestro conjunto de vectores pseudo-exponenciales  $\{\varepsilon_k(z)\}_{k \geq 0}$ , cabe preguntar si pueden ser usados en otros contextos para caracterizar estados estacionarios de otros procesos.

La fórmula (3.35) es un subproducto de este trabajo que generaliza el producto de Wallis y es interesante por sí misma. Podría estudiarse con mayor detalle para ver si tiene propiedades similares a las del producto de Wallis.



# Apéndices



# Apéndice A

## Operadores lineales

Sea  $X$  un espacio de Banach sobre los números complejos  $\mathbb{C}$ , con norma  $\| \cdot \|$ .

**Definición A.0.1.** *Un operador lineal sobre  $X$  es un par ordenado  $(D, A)$ , donde  $D$  es un subespacio de  $X$  y  $A : D \rightarrow X$  es una aplicación lineal, es decir,*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y),$$

para cada  $x, y \in D$  y cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . El operador es acotado si

$$\sup\{\|A(x)\| : x \in D, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

En otro caso, decimos que el operador es no acotado.

Sea  $(D, A)$  un operador lineal, llamaremos a los conjuntos  $D = D(A)$ ,  $A(D) = R(A)$ , y  $Ker(A) = \{x \in D : Ax = 0\}$ : dominio, rango y kernel, respectivamente, del operador  $(D, A)$ . A partir de ahora nos referiremos a un operador lineal simplemente como operador.

Se acostumbra denotar al operador  $(D, A)$  por  $A : D(A) \rightarrow X$  y decir que  $D(A)$  es su dominio o que  $A$  está definido sobre  $D(A)$ . Denotamos por  $\mathcal{B}(X)$  al conjunto de todos los operadores acotados de  $X$  en  $X$ . Sobre este espacio definimos la norma  $\| \cdot \|_{\mathcal{B}(X)} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  por medio de

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\}.$$

La topología generada por esta norma se llama la *topología uniforme*.

**Definición A.0.2.** *La gráfica de un operador  $A$  es el conjunto de pares*

$$\{(x, y) \in X \times X : x \in D(A), Ax = y\}.$$

La gráfica de  $A$  se denota por  $\Gamma(A)$ . Decimos que  $A$  es un operador cerrado si  $\Gamma(A)$  es un subconjunto cerrado de  $X \times X$ .

**Definición A.0.3.** Sean  $A_1$  y  $A$  operadores sobre  $X$ . Si  $\Gamma(A) \subset \Gamma(A_1)$ , entonces se dice que  $A_1$  es una extensión de  $A$  y escribimos  $A \subset A_1$ . Equivalentemente,  $A \subset A_1$  si y solo si  $D(A) \subset D(A_1)$  y  $Ax = A_1(x)$  para todo  $x \in D(A)$ .

**Definición A.0.4.** Un operador  $A$  es cerrable si tiene una extensión cerrada. Cada operador cerrable tiene una extensión cerrada mínima, llamada cerradura, la cual denotamos por  $\bar{A}$ .

A continuación presentamos la definición de operador adjunto sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  para el caso no acotado.

**Definición A.0.5.** Sea  $A$  un operador lineal densamente definido sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ . Sea  $D(A^*)$  el conjunto de  $\phi \in \mathfrak{h}$  para los cuales existe un  $\eta \in \mathfrak{h}$  tal que

$$\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \quad \forall \psi \in D(A), \quad (\text{A.1})$$

para tales  $\phi \in D(A^*)$ , definimos  $A^*\phi = \eta$  y llamaremos al operador  $A^*$  el adjunto de  $A$ .

Se verifica fácilmente que  $A \subset B$  implica  $B^* \subset A^*$ . Notemos que para que  $\eta$  esté determinada de manera única por la ecuación (A.1) es necesario que  $D(A)$  sea denso. El operador adjunto  $A^*$  es cerrado.

**Definición A.0.6.** Un operador lineal  $A$  densamente definido sobre  $\mathfrak{h}$  es simétrico (hermitiano) si  $A \subset A^*$ , es decir,  $D(A) \subset D(A^*)$  y  $Ax = A^*x$  para todo  $x \in D(A)$ . Equivalentemente,  $A$  es simétrico si y solo si

$$\langle A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in D(A).$$

**Definición A.0.7.** El operador  $A$  es autoadjunto si  $A = A^*$ , es decir, si y solo si  $A$  es simétrico y  $D(A) = D(A^*)$ .

**Definición A.0.8.** Un operador simétrico  $A$  es esencialmente autoadjunto si su cerradura  $\bar{A}$  es autoadjunta. Si  $A$  es cerrado, un subconjunto  $D \subset D(A)$  es una esencia para  $A$  si  $\bar{A}|_D = A$

**Proposición A.0.9.** Sea  $A$  un operador simétrico sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ , lo siguiente es equivalente

- i)  $A$  es esencialmente autoadjunto.

ii)  $\text{Ker}(A \pm i) = \{0\}$ .

iii)  $\text{Ran}(A \pm i)$  es denso.

Sea  $A$  un operador autoadjunto y definimos  $U_t = e^{itA}$ , entonces se tiene lo siguiente

- a) Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $U_t$  es un operador unitario y  $U_{t+s} = U_t U_s$  para cada  $s, t \in \mathbb{R}$ .
- b) Si  $\phi \in \mathfrak{h}$  y  $t \rightarrow t_0$ , entonces  $U_t(\phi) \rightarrow U_{t_0}(\phi)$ .
- c) Para cada  $\psi \in D(A)$ ,  $(U_t(\psi) - \psi)/t \rightarrow iA(\psi)$  cuando  $t \rightarrow 0$ .
- d) Si  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t \psi - \psi}{t}$  existe, entonces  $\psi \in D(A)$ .

Una función operador valuada satisfaciendo a) y b) es llamada *grupo unitario fuertemente continuo*.

**Teorema A.0.10. (Teorema de Stone)** Sea  $U_t$  un grupo unitario fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ , entonces, existe un operador adjunto  $A$  sobre  $\mathfrak{h}$  tal que  $U_t = e^{itA}$ .

**Definición A.0.11.** Sea  $(x_\alpha)$  una red en  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Decimos que:

- a)  $(x_\alpha)$  converge en la norma a  $x$  si y solo si  $\|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$ .
- b)  $(x_\alpha)$  fuertemente a  $x$  si y solo si  $\|(x_\alpha - x)u\| \rightarrow 0$  para cada  $u \in \mathfrak{h}$ .
- c)  $(x_\alpha)$  converge débilmente a  $x$  si y solo si  $\langle u, (x_\alpha - x)v \rangle \rightarrow 0$  para cada  $u, v \in \mathfrak{h}$ .
- d)  $(x_\alpha)$  converge  $\sigma$ -fuertemente (ultrafuertemente) a  $x$  si y solo si

$$\sum_{n \geq 0} \|(x_\alpha - x)u_n\|^2 \rightarrow 0,$$

para cada  $u_n \in \mathfrak{h}$  tal que  $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|^2 < \infty$ .

- e)  $(x_\alpha)$  converge  $\sigma$ -débilmente (ultradébilmente) a  $x$  si y solo si

$$\sum_{n \geq 0} \langle v_n, (x_\alpha - x)u_n \rangle \rightarrow 0,$$

para cada sucesión  $u_n, v_n \in \mathfrak{h}$  tal que

$$\sum_{n \geq 0} \|u_n\|^2 < \infty \quad \sum_{n \geq 0} \|v_n\|^2 < \infty.$$



## Apéndice B

# Notación bra-ket

**Definición B.0.12.** Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert complejo separable y sean  $u, v \in \mathfrak{h}$ , definimos el operador lineal  $|u\rangle\langle v|$  de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{h}$  mediante

$$|u\rangle\langle v|w = \langle v, w\rangle u, \quad \forall w \in \mathfrak{h}.$$

Mediante cálculos directos se verifica que la función  $(u, v) \mapsto |u\rangle\langle v|$  de  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  a  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  satisface lo siguiente:

- a)  $|u\rangle\langle v|$  es lineal en  $u$  y lineal conjugada en  $v$ .
- b)  $(|u\rangle\langle v|)^* = |v\rangle\langle u|$ .
- c)  $|u\rangle\langle v||w\rangle\langle z| = \langle v, w\rangle |u\rangle\langle z|$ .
- d) Para todo  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ,  $x|u\rangle\langle v| = |xu\rangle\langle v|$  y  $|u\rangle\langle v|x = |u\rangle\langle x^*v|$ .

**Definición B.0.13.** Un operador  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  es positivo si

$$0 \leq \langle xu, u\rangle \quad \forall u \in \mathfrak{h},$$

en tal caso escribimos  $0 \leq x$ . Si además se tiene que  $\langle xu, u\rangle = 0$  si y solo si  $u = 0$ , decimos que  $x$  es un operador positivo definido.

Ejemplos:

- $\forall u \in \mathfrak{h}$ ,  $|u\rangle\langle u|$  es positivo.
- $\forall x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ,  $x^*x$  y  $xx^*$  son positivos y  $x \geq 0 \Leftrightarrow x^* \geq 0$ .

**Definición B.0.14.** La transformación  $\text{tr} : \mathcal{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathbb{C}$  definida mediante  $\text{tr} A = \sum_n \langle e_n, Ae_n\rangle$ , donde  $\{e_n\}$  es cualquier base ortonormal de  $\mathfrak{h}$ , se llama la traza de  $A$ .

La traza de un operador tiene las siguientes propiedades:

1. La traza es una función lineal continua con la norma de operadores.
2.  $\text{tr } A^* = \overline{\text{tr } A}$ .
3.  $\text{tr } (AB) = \text{tr } (BA)$ , cuando  $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$
4. Si  $0 \leq A$ , entonces  $0 \leq \text{tr } A$ .
5.  $\text{tr } A =$  suma de valores propios de  $A$ , incluyendo multiplicidades.
6.  $\text{tr } A|u\rangle\langle v| = \langle v, Au\rangle$  para todo  $u, v \in \mathfrak{h}$ .



## Apéndice C

# Álgebras de von Neumann

**Definición C.0.15.** Una  $C^*$ -álgebra es un álgebra  $\mathcal{A}$  de Banach sobre los números complejos  $\mathbb{C}$ , equipada con una involución  $x \mapsto x^*$  y una norma  $\|\cdot\|$  satisfaciendo para todo  $x, y \in \mathcal{A}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  lo siguiente:

a)  $x^{**} = x$ ,

b)  $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*$ ,

c)  $(xy)^* = y^*x^*$ ,

d)  $\|xx^*\| = \|x\|^2$ ,

una álgebra que satisface a), b) y c) se llama  $*$ -álgebra.

**Definición C.0.16.** Un álgebra de von Neumann es una  $C^*$ -álgebra, cerrada en la topología débil que contiene al operador identidad  $\mathbb{1}$  de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

El ejemplo típico de un álgebra de von Neumann no conmutativa es  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  si el espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$  tiene dimensión mayor que uno. El espacio  $L^\infty(\mathbb{R})$  de las funciones esencialmente acotadas sobre los números reales es un álgebra conmutativa de von Neumann, actuando sobre el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  mediante la multiplicación puntual.

**Definición C.0.17.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos  $*$ -álgebras, una aplicación  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es

- a) positiva si  $\Phi(aa^*) \geq 0$ , es decir, es un elemento positivo para todo  $a \in \mathcal{A}$ ,

b)  $n$ -positiva si para cada familia  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$  y cada  $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$  tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^n b_i^* \Phi(a_i^* a_j) b_j \geq 0,$$

c) completamente positivo si  $\Phi$  es  $n$ -positivo para todo  $n \geq 1$ .

Los elementos positivos en una  $*$ -álgebra son de la forma  $aa^*$  con  $a \in \mathcal{A}$ .

**Definición C.0.18.** Un operador  $T : \mathcal{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  se dice que es normal si es  $\sigma$ -débil continuo, es decir, si para cada red creciente  $(x_\alpha)_\alpha$  de operadores positivos en  $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$  tal que existe el operador positivo  $x = \sup_\alpha x_\alpha$ , se tiene

$$\sup_\alpha \langle u, (Tx_\alpha)v \rangle = \langle u, Txv \rangle, \quad \forall u, v \in \mathfrak{h}.$$

Los operadores normales y completamente positivos tienen una representación relativamente simple llamada representación de Kraus. Para una demostración del siguiente teorema, en el caso de espacios de Hilbert de dimensión infinita, el lector interesado puede consultar [12].

**Teorema C.0.19. (Kraus)** Sea  $\mathcal{A}$  una subálgebra de von Neumann de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y sea  $\mathcal{K}$  otro espacio de Hilbert. Una transformación lineal  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$  es normal y completamente positiva si y solo si se puede escribir en la forma

$$Tx = \sum_{j \geq 1} V_j^* x V_j,$$

donde  $(V_j)_{j \geq 1}$  es una sucesión de operadores en  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  y la serie en el lado derecho converge fuertemente.

# Apéndice D

## Vectores exponenciales

Dado  $h$  un espacio de Hilbert separable complejo, definimos

$$h^{\otimes n} = \underbrace{h \otimes \cdots \otimes h}_{n\text{-veces}}$$

como el  $n$ -ésimo producto tensorial de  $h$ , es decir, el espacio de Hilbert que se obtiene al completar el espacio de las combinaciones lineales finitas de la forma  $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ , con producto escalar dado por

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle \cdots \langle u_n, v_n \rangle.$$

Para  $u_1, \dots, u_n \in h$  definimos el producto tensorial simétrico

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)},$$

donde  $S_n$  es el grupo de permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$ .

A la cerradura del subespacio de  $h^{\otimes n}$  generado por  $u_1 \circ \cdots \circ u_n$  se le llama el  $n$ -ésimo producto tensorial simétrico de  $h$  y se denota por  $h^{\circ n}$ . Además, se establece que  $h^{\circ 0} = \mathbb{C}$ .

El espacio de Fock simétrico sobre  $h$  es

$$\Gamma_s(h) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} h^{\circ n}.$$

Un elemento general en este espacio tiene la forma  $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ ,  $f_n \in h^{\circ n}$ , y satisface

$$\|f\|_{\circ}^2 = \sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\otimes n}^2 < \infty.$$

El producto interno de  $f, g \in \Gamma_s(\mathfrak{h})$  se define mediante

$$\langle f, g \rangle_{\Gamma_s(\mathfrak{h})} = \sum_n \langle f_n, g_n \rangle_{\otimes n}.$$

Y  $f_n, g_m$  son ortogonales si  $n \neq m$ . Observemos que para  $u \in \mathfrak{h}$  se tiene que  $u \circ \cdots \circ u = u \otimes \cdots \otimes u$ .

**Definición D.0.20.** *El vector exponencial sobre el espacio de Fock simétrico  $\Gamma_s(\mathfrak{h})$  asociado con cada  $u \in \mathfrak{h}$ , se define por medio de*

$$\varepsilon(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{u^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \quad (\text{D.1})$$

si el vector  $\varepsilon(u)$  tiene norma igual a uno, el vector es llamado vector coherente.

Lo siguiente es un resultado conocido sobre vectores exponenciales, véase [35] para una demostración.

**Teorema D.0.21.** *Los vectores exponenciales satisfacen*

- (i)  $\langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\Gamma_s(\mathfrak{h})} = e^{\langle u, v \rangle}$ ,
- (ii) Cada subconjunto finito de vectores coherentes  $\{\varepsilon(u_k) : u_k \in \mathfrak{h}\}$  es linealmente independiente si  $u_k \neq u_{k'}, k \neq k'$ .
- (iii) El conjunto generador por el sistema de vectores exponenciales es denso en  $\mathfrak{h}$ .

Para cada  $u \in \mathfrak{h}$ , los operadores de creación y aniquilación sobre  $\Gamma_s(\mathfrak{h})$  están densamente definidos sobre el subconjunto generado por los vectores exponenciales, actuando sobre ellos por medio de

$$a(u)\varepsilon(v) = \langle u, v \rangle \varepsilon(v), \quad a^\dagger(u)\varepsilon(v) = \frac{d}{dt} \varepsilon(v + tu)|_{t=0}.$$

$a^\dagger(u)$  ( $a(u)$ ) depende linealmente (antilinealmente) sobre la variable  $u$ .

Puesto que  $\mathbb{C}^{\otimes n} = \mathbb{C}$  para todo  $n \geq 0$ , en el caso  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$ , tenemos que

$$\Gamma_s(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots = \ell_2(\mathbb{N}).$$

Para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ , el vector exponencial asociado  $\varepsilon(z)$  es el elemento  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} e_n$ , donde  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ . En este caso, tenemos esencialmente un operador de creación y uno de aniquilación

$a^\dagger(z) = za^\dagger(1)$  y  $a(z) = \bar{z}a(1)$ . Además,  $a(1)\varepsilon(z) = \langle 1, z \rangle \varepsilon(z) = z\varepsilon(z)$ . Escribiremos simplemente  $a$  en lugar de  $a(1)$  y  $a^\dagger$  en lugar de  $a^\dagger(1)$ .

A continuación presentamos la siguiente caracterización de matrices hermitianas positivas semidefinidas. Véase Teorema 20 en [21], pp 337, para una demostración.

**Teorema D.0.22.** *Una matriz hermitiana  $x = (x_{kk'})_{0 \leq k, k' \leq n-1}$  es positiva semidefinida si y solo si todos sus menores principales son no negativos:*

$$x \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall 0 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n-1, \quad 1 \leq p \leq n \quad (\text{D.2})$$

donde

$$x \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{i_1, i_1} & x_{i_1, i_2} & \cdots & x_{i_1, i_p} \\ x_{i_2, i_1} & x_{i_2, i_2} & \cdots & x_{i_2, i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_p, i_1} & x_{i_p, i_2} & \cdots & x_{i_p, i_p} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \\ 1 \leq p \leq n. \end{matrix} \quad (\text{D.3})$$



# Bibliografía

- [1] Accardi, L., Fagnola F. and Quezada R. *On 3 news principles in non-equilibrium statistical mechanics and Markov semigroups of weak coupling limit type*, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, Vol 19, No 2 (2016) 1650009. DOI: 10.1142/S0219025716500090.
- [2] Accardi, L., Imafuku K. and Kozyrev, S.V. *Interaction of 3-level atom with radiation*, *Optics and Spectroscopy* **94** (6) (2003) 904–910. [quant-ph/01-04118](#)
- [3] Abella I.D., *Optical double-quantum absorption in cesium vapor*, *Physical Review Letters* 9, 453, 1962.
- [4] Alicki R., *On detailed balance condition for non-Hamiltonian systems*, *Rep. Math. Phys.* **10** (1976), 249-258.
- [5] Alli, G. and Sewell, G., *New methods and structure in the theory of the multi-mode Dicke laser model*, *Journal of Mathematical Physics*, **36** 1995.
- [6] Bagarello, F. and Sewell, G., *New structures in the theory of the laser model II. Microscopic dynamics and a nonequilibrium*, *American Institute of Physics*, **39** 1998. entropy principle
- [7] Blanchard, Ph. and Olkiewicz, R., *Effectively classical quantum states for open systems*, *Phys. Lett. A* **273** (2000), 223-231.
- [8] Bratteli, O and Robinson, D., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Second Edition 1987, Springer.
- [9] Chebotarev, A.M., *Lectures on Quantum Probability; SMM Aportaciones Matemáticas* (Textos nivel avanzado) 14: México, 2000.

- [10] Chebotarev, A.M. and Fagnola, F., *Sufficient Conditions on Conservativity of Quantum Dynamical Semigroups*, Journal of function Analysis, **118**, 131-153 (1993).
- [11] Cruz-de la Rosa, M. and Quezada, R., *Non-equilibrium steady states of a Markov generator of weak coupling limit type modeling absorption-emission of  $m$  and  $n$  photons*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol 19, No 4 (2016) 1650023. DOI: 10.1142/S0219025716500235.
- [12] Fagnola, F., *Quantum Markov semigroups and quantum flows*, Proyecciones **18** (1999) 1144.
- [13] Fagnola, F. and Quezada, R., *Two Photon absorption and emission process*. Infinite dimensional Analysis, Quantum probability and Related topics Vol. 8, No. 4 (2005) 573-591. World Scientific Publishing Company.
- [14] Fagnola, F. and Rebolledo, R., *Subharmonic projections for a quantum Markov semigroup*. J. Math. Phys. Vol. 43, No. 2, 1074 (2002).
- [15] Fagnola, F. and Rebolledo, R., *Quantum Markov semigroups and their stationary states*.
- [16] Fagnola, F. and Umanitá, V., *Generators of Detailed Balance Quantum Markov Semigroups*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **10**, (2007) 335-363.
- [17] Fagnola, F. and Umanitá, V., *Generators of KMS Symmetric Markov Semigroups on  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  Symmetry and Quantum Detailed Balance*. Commun. Math. Phys. **298** (2010) 523-547.
- [18] Frigerio A., Gorini V. and Verri, M., *The zeroth law of thermodynamics*, *Physica* **137** A (1986) 573-602
- [19] Frigerio, A., Kossakowski, A., Gorini, V. and Verri, M., *Quantum detailed balance and KMS condition*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 97-110. Erratum: *Commun. Math. Phys.* **60** (1978), 96-98.
- [20] Frigerio, A. and Gorini, V., *Markov dilations and quantum detailed balance*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 517-532.
- [21] Gantmacher F.R., *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company New York, N.Y. Vol. 1.



- [22] Gilles L., Garraway B.M. and Knight P.L., *Generation of non-classical light by dissipative two-photon process*, Physical Review A 49, 2785–2799, 1994.
- [23] Gisin, N. and Percival, I., *The quantum-state diffusion model applied to open systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **25**. (1992), 5677-5691.
- [24] Goeppert-Mayer, M. *Elementary processes with two quantum transitions*. Historic Article. Ann. Phys. (Berlin)**18**. No.7-8, 466-479(2009). DOI 10.1002/andp.200910358.
- [25] Gorini, V., Kossakowski, A. and Sudarshan, E.C.G., *Completely positive dynamical semigroups of N-level systems*, J. Math. Phys. **17**, 821-825, 1976.
- [26] He G.S., Markowicz P.P., Lin T.C. and Prasad P.N., *Observation of stimulated emission by direct three-photon excitation*, Nature (London) 415, 767-770, 2001.
- [27] García, J.C., *Una Clase de Transformaciones Completamente Positivas no Acotadas y Conservatividad de la Solución Minimal de la Ecuación Maestra*, tesis de doctorado, UAM-Iztapalapa, 1998.
- [28] García, J.L., Pantaleón, L. and Quezada, R. *Sufficient condition for all invariant states of a QMS to be diagonal*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics **14** (2) (2011) 337–343.
- [29] Hermida, R. and Quezada, R., *On the spectral gap of the n-photon absorption-emission process*, in *Quantum probability and related topics, QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal.* **29** (2013) 143–159
- [30] Kaiser W. and Garrett C.G.B., *Two-photon excitation in CaF<sub>2</sub>:Eu<sup>2+</sup>*, Phys. Rev. Lett. 7, 229, 1961.
- [31] Kherennikova, P., Haven, E. and Khrennikov, A. *An Application of the Theory of Open Quantum Systems to Model the Dynamics of Party Governance in the US Political System*, International Journal of Theoretical Physics, Vol 53, pp 1346-1360, 2014.
- [32] Larson, D.R., Zipfel, W.R., Williams, R.M., Clark, S.W., Bruchez M.P., Wise, F.W. and Webb, W.W., *Water-soluble quantum dots for multi-photon fluorescence imaging in vivo*, Science 300, 1434, 2003.

- 
- [33] Lindblad, L., *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. 48, 119-130, 1976.
- [34] Pantaleón, L. and Quezada, R., *The Asymmetric Exclusion Quantum Markov Semigroup, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **12** (3) (2009) 367-385.
- [35] Parthasaraty K., *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monographs in Mathematics vol. 85, Birkhauser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.
- [36] Reed, M. and Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vols. I y II, Academic Press, Inc., 2nd. ed., 1975.
- [37] Wästlund J., *An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for  $\pi$* , Montly 114 (Notes), The Mathematical Association of America, 914–917, 2007.
- [38] Zeng, Q., Zhu H., Chen, SC., Tang C., Ma E. and Chen, X., *Frequency-upconverted stimulated emission by simultaneous five-photon absorption*, Nature Photonics 7, DOI: 10.1038/NPHOTON.2012.344, 2013.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00053

Matrícula: 208180149

Estados estacionarios de equilibrio local del proceso de absorción y emisión de  $m$  y  $n$  fotones

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 17 del mes de julio del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. OCTAVIO ARIZMENDI ECHEGARAY
- DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE
- DR. JESUS ADRIAN ESPINOLA ROCHA
- DR. GABRIEL KANTUN MONTIEL
- DR. OSWALDO GONZALEZ GAXIOLA



MARCO ANTONIO CRUZ DE LA ROSA  
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: MARCO ANTONIO CRUZ DE LA ROSA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

  
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

  
DR. OCTAVIO ARIZMENDI ECHEGARAY

VOCAL

  
DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE

VOCAL

  
DR. JESUS ADRIAN ESPINOLA ROCHA

VOCAL

  
DR. GABRIEL KANTUN MONTIEL

SECRETARIO

  
DR. OSWALDO GONZALEZ GAXIOLA