



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

“UNA PRIMERA MIRADA A LAS VARIETADES
METRIZABLES Y NO METRIZABLES”

Tesis que presenta:

Lic. Carlos Alberto Rios Mendoza

Matrícula: 2223804717

Correo electrónico: carlos27mate@gmail.com

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Director de Tesis:

Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Jurado

Presidente: Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Secretario: Dr. Josué Meléndez Sánchez

Vocal: Dr. David José Fernández Bretón

Iztapalapa, Ciudad de México a 24 de junio de 2025

A mi esposa Carolina y mi hija Alina

Agradecimientos

Primeramente, quiero agradecer a mi esposa e hija, quienes en este proceso siempre me brindaron su apoyo.

Ser estudiante de posgrado, esposo y padre al mismo tiempo, es algo complicado, ya que siempre falta un poco de tiempo para todo. Pero me siento una persona bendecida, por que siempre tuve el apoyo de Carolina para que pudiera llevar los tres roles de la mejor manera posible. Sin duda alguna, ella y mi hija Alina fueron las principales motivaciones e impulsos que tuve para terminar exitosamente este trabajo.

Mis padres, siempre me han apoyado a lo largo de mi vida y, en esta etapa no fue la excepción. Estoy profundamente agradecido con ellos por todo su apoyo: amor, comprensión y valores que me han inculcado. Y gracias a estos valores, pude hacer las cosas de manera responsable y comprometida con mi posgrado. La persona que soy hoy en día, se lo debo a ellos y les estaré agradecido por el resto de mi vida.

Me encuentro muy agradecido con mis sinodales, los profesores David y Josué por revisar este trabajo. Gracias a sus observaciones y comentarios, pude complementar y concluir esta tesis.

Agradezco también el apoyo de todos los profesores que ayudaron en mi formación como matemático. Aprovecho para agradecer al profesor Mario Pineda por el apoyo que me brindó durante la maestría y, que encuentro en él, no solo un gran matemático, sino un gran ser humano.

Y claro, no pueden faltar mis agradecimientos a la profesora Rosaura Grether, por todo el apoyo que le ha brindado a mi familia, y que influyó de manera importante para poder alcanzar este logro más en mi vida. Siempre está presente en nuestra familia.

Desde luego, quiero agradecer a mi asesor, el profesor Rodrigo Hernández por regalarme muchas horas de su tiempo discutiendo sobre los problemas y dudas que iban surgiendo a lo largo de este trabajo. He encontrado en él, una gran motivación para seguir con mi crecimiento académico. Desde que me dio clase la primera vez (aunque él no recuerde por que fue en pandemia), me transmitió ese amor que siente por las matemáticas. Agradezco toda la paciencia que tuvo conmigo y el empeño que le puso en cada clase que me dio en la licenciatura y en la maestría. Sin duda, es mi inspiración en el mundo de las matemáticas y

para seguir haciendo las cosas de la mejor manera posible. Sin más que decir, gracias profesor Rodrigo.

Por último, quiero agradecer a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por brindarme la beca que fue fundamental para concluir exitosamente mi maestría.

Resumen

Este trabajo pretende dar una pequeña introducción a las variedades topológicas: definición, ejemplos, propiedades y dos teoremas de metrización. Esencialmente esta dividido en tres partes principales:

En la primera parte, se dará la definición de variedad y se presentarán varios ejemplos clásicos: los espacios euclidianos, la circunferencia, la banda de Möbius y el toro. Además se presentarán dos ejemplos que no son tan conocidos: el rayo largo y la línea larga. Y veremos algunas propiedades importantes de estas dos últimas variedades. En esta parte también hablaremos de la construcción de los espacios adjunción, la cual nos permitirá definir algunos ejemplos de variedades.

En la segunda parte, se dará un teorema de caracterización para variedades metrizable, el cual involucra las propiedades de Lindelöf, paracompacidad y segundo numerabilidad. Mientras estudiamos este teorema, también probaremos algunas propiedades importantes de las variedades topológicas, en particular, que son completamente regulares.

En la última parte que corresponde al capítulo 4, definiremos la compactación de Freudenthal de un espacio topológico Tychonoff y de borde compacto, con el objetivo de definir los extremos de una variedad. Daremos tres ejemplos concretos, es decir, describiremos la compactación de Freudenthal de tres espacios topológicos de los cuales dos son variedades y uno que no lo es. Definiremos extremo corto y largo y daremos un ejemplo de una variedad que tiene un extremo corto y uno largo. Y finalizaremos enunciando un teorema de metrización para variedades en términos de sus extremos aunque no lo demostraremos.

Introducción

Las variedades topológicas se pueden estudiar usando las herramientas de la topología algebraica o de la teoría de conjuntos. En este trabajo estudiaremos a las variedades topológicas usando las herramientas de la teoría de conjuntos. Por ese motivo, en el primer capítulo se dan algunos conceptos fundamentales de la topología general, incluyendo una sección de la teoría de conjuntos; conjuntos linealmente ordenados y su topología.

La definición de variedad topológica que usaremos a lo largo de este trabajo es la siguiente, que se presta para estudiar variedades no metrizablees:

Si X es un espacio topológico y $n \in \omega \setminus \{0\}$, diremos que X es una n -variedad si X es conexo, Hausdorff y localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Las variedades resultan ser regulares, más aún, Tychonoff. Así que del famoso teorema de metrización de Urysohn podemos deducir que una variedad segundo numerable es metrizable. De hecho, para variedades la segunda numerabilidad resulta ser equivalente a la metrizabilidad, como veremos en un teorema de caracterización para variedades metrizablees en el capítulo 3.

Es importante mencionar que las variedades pueden clasificarse en dos tipos: las que tienen frontera y las que no tienen. Nosotros estudiaremos las variedades sin frontera, aunque sí definiremos las variedades con frontera, solo con la intención de ilustrar la interpretación geométrica que tiene la frontera en algunos de los ejemplos de variedades que daremos. Pero solo eso y nada más, ya que las variedades con frontera no son de nuestro interés en este trabajo.

Estudiar variedades metrizablees o no metrizablees puede decirse que es una cuestión de gustos, así que nosotros elegimos estudiar las variedades no metrizablees.

Un libro que nos pareció muy importante y que nos motivó para estudiar las variedades no metrizablees es el libro de David Gauld con título “Non-metrizable Manifolds”. En este texto se menciona el rayo largo y la línea larga, espacios que definimos en el capítulo 2 y de los cuales damos varias propiedades importantes. Otra referencia importante para este trabajo es el artículo de David Fernández y Nicholas Vlamis intitolado “Ends of non-metrizable manifolds: A generalized bagpipe theorem”. De este artículo, citamos el teorema más importante de esta tesis: teorema de caracterización para variedades metrizablees en términos de sus extremos.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	5
Introducción	6
1. Preliminares	8
1.1. Hechos básicos de topología	8
1.2. Conexidad	17
1.3. Espacios cociente	20
1.4. Conjuntos linealmente ordenados y su topología	22
2. Conceptos básicos de variedades	27
2.1. Definición y primeros ejemplos	27
2.2. El rayo largo	40
2.3. Ejemplos de espacios adjunción que son variedades	48
2.4. La línea larga	57
3. Caracterización de variedades metrizables	64
3.1. Hechos generales	64
3.2. Paracompacidad	69
3.3. Paracompacidad y Variedades	75
4. La compactación de Freudenthal y extremos de variedades	77
4.1. La compactación de Freudenthal	77
4.2. Ejemplos de compactaciones de Freudenthal metrizables	91
4.3. La compactación de Freudenthal de una variedad que no es metrizable	107
4.4. Extremos de variedades: extremo corto y largo	114
Conclusiones y perspectivas	117
Bibliografía	118

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se pretende dar algunos conceptos y resultados que nos serán fundamentales para el desarrollo de los capítulos posteriores.

Dada una función $f : A \rightarrow B$ y un subconjunto $C \subset B$, se define la **imagen inversa** de C como el conjunto

$$f^{-1}[C] = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$

Observación 1.0.1. Si $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva y $C \subseteq B$, entonces

$$f \upharpoonright f^{-1}[C] : f^{-1}[C] \rightarrow C$$

también es sobreyectiva.

Se dice que dos conjuntos A y B son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. La **cardinalidad** de un conjunto A es el número de elementos de A y se denota como $|A|$. Si existe una función inyectiva de A a los números naturales \mathbb{N} , se dice que A es numerable y se escribe como $|A| \leq \aleph_0$.

1.1. Hechos básicos de topología

Un **espacio topológico** es un par (X, τ) , donde X es un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X tal que cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
2. Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
3. Si $\mathcal{U} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Los elementos de τ son llamados abiertos.

Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces un conjunto A se llama **vecindad del punto** x si existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset A$.

Sea (X, τ) es un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ se dice que es una **base** de τ si, para cada $U \in \tau$ existe una subfamilia $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}'$. Como cada elemento de la topología es una unión de una familia de la base, si conocemos una base, entonces conocemos a todos los abiertos.

Proposición 1.1.1. [11, Teorema 1.1.9, p. 5] *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si \mathcal{B} es una base de τ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

$$(1) \bigcup \mathcal{B} = X, \text{ y}$$

$$(2) \text{ si } U, V \in \mathcal{B} \text{ y } x \in U \cap V, \text{ entonces existe } W \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in W \subset U \cap V.$$

Por otra parte, si X es un conjunto y \mathcal{B} es una familia de subconjuntos de X que cumple las propiedades (1) y (2), entonces existe una única topología τ en X , tal que \mathcal{B} es base para τ .

Si (X, τ) es un espacio topológico y $x \in X$, decimos que una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ es una **base local** para x si, $x \in \bigcap \mathcal{B}$ y para cada abierto U que contenga a x , existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$.

Se dice que un espacio topológico X es **primero numerable** si cada $x \in X$ tiene una base local numerable.

Definición 1.1.2. *Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, se define la **cerradura** de A como el conjunto*

$$cl_X(A) = \bigcap \{F : F \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subset F\}.$$

Notemos que la cerradura de un conjunto A es el cerrado más pequeño que contiene a A . También, de la definición se sigue que si $A \subset B$, entonces $cl_X(A) \subset cl_X(B)$. A continuación enunciamos un par de propiedades importantes acerca de la cerradura de un conjunto.

Proposición 1.1.3. [7, Teorema 17.4, p. 93] *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces,*

$$(1) \text{ si } M \subset A, \text{ entonces } cl_A(M) = A \cap cl_X(M), \text{ y}$$

$$(2) \text{ si } U \text{ es un abierto tal que } U \cap A = \emptyset, \text{ entonces } cl_X(A) \cap U = \emptyset.$$

Teorema 1.1.4. [11, Proposición 1.2.5, p. 12] *Para todo espacio topológico X y todo $A \subset X$ son equivalentes:*

- (1) $x \in cl_X(A)$;
- (2) si U es una vecindad de x en X , entonces $U \cap A \neq \emptyset$.

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Un elemento $x \in X$ se dice que es un **punto de acumulación** de A si $x \in cl_X(A \setminus \{x\})$. Al conjunto de puntos de acumulación de A se denota como A^d .

Proposición 1.1.5. [10, Proposición 1.1.3, p. 24] Un punto $x \in A^d$ si y sólo si cada abierto U de X tal que $x \in U$ contiene al menos un punto de A distinto al punto x .

Definición 1.1.6. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. La **frontera** de A se define como el conjunto

$$Fr_X(A) = cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A).$$

Proposición 1.1.7. [10, Teorema 1.3.1, p. 24] Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Un elemento $x \in Fr_X(A)$ si y sólo si, para toda vecindad U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset \neq U \setminus A$.

Lema 1.1.8. [10, Teorema 1.3.2, p. 24] Si X es un espacio topológico y $A, B \subset X$, entonces

- (1) $cl_X(A) = A \cup Fr_X(A)$, y
- (2) $Fr_X(A \cup B) \subset Fr_X(A) \cup Fr_X(B)$.

Observemos que el inciso 2 del lema anterior, nos permite decir algo más general: la frontera de una unión finita de conjuntos esta contenida en la unión de las fronteras de estos conjuntos.

Definición 1.1.9. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, se define el **interior** de A como el conjunto

$$int_X(A) = \bigcup \{U : U \text{ es abierto en } X \text{ y } U \subset A\}.$$

Notemos que el interior de un conjunto A es el abierto más grande contenido en A . También, de la definición se sigue que si $A \subset B$, entonces $int_X(A) \subset int_X(B)$. A continuación enunciaremos algunas propiedades importantes acerca del interior de un conjunto.

Proposición 1.1.10. Sea X un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Entonces

- 1. [11, Teorema 1.2.11, p. 15] $int_X(A) = X \setminus cl_X(X \setminus A)$, y

2. [2, Teorema 7.2, p. 77] $A \cap \text{int}_X(B) \subset \text{int}_A(B)$.

Teorema 1.1.11. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Si $B = \text{int}_X(\text{cl}_X(A))$, entonces $B = \text{int}_X(\text{cl}_X(B))$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y hagamos $B = \text{int}_X(\text{cl}_X(A))$.

⊂] Como $\text{int}_X(\text{cl}_X(A)) \subset \text{cl}_X(A)$ se tiene que

$$\text{cl}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(A))) \subset \text{cl}_X(\text{cl}_X(A)) = \text{cl}_X(A).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{int}_X(\text{cl}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(A)))) &\subset \text{int}_X(\text{cl}_X(A)) \\ \iff \text{int}_X(\text{cl}_X(B)) &\subset B. \end{aligned}$$

⊃] Como $\text{int}_X(\text{cl}_X(A)) \subset \text{cl}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(A)))$ se tiene que

$$\text{int}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(A))) \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(A)))) \quad (1.1)$$

Ya que B es abierto, se tiene que $\text{int}_X(B) = B$. Y como $B = \text{int}_X(\text{cl}_X(A))$, de 1.1 se tiene que $B \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(B))$.

Y por lo tanto $B = \text{int}_X(\text{cl}_X(B))$ como se quería probar. □

Si X es un espacio topológico, decimos que

- (1) X es **Fréchet** o T_1 si para cada $x \in X$, se tiene que el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X .
- (2) X es **Hausdorff** o T_2 si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $y \in V$ y $x \in U$.
- (3) X es **regular** si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $F \subset V$. Si además X es T_1 se dice que X es un espacio T_3 .
- (4) X es **completamente regular** si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f[F] \subset \{0\}$. Si además X es T_1 se dice que X es un espacio de **Tychonoff** o $T_{3.5}$.
- (5) X es **normal** si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados disjuntos F y G en X , existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Si además X es T_1 se dice que X es un espacio T_4 .

Teorema 1.1.12. *Sea X un espacio topológico.*

1. [11, Teorema 4.1.8, p. 109] Si X es T_i , entonces X es T_j para cualquier $j < i$, $i \in \{2, 3, 3.5\}$.

2. [11, Corolario 4.1.10, p. 114] Todo espacio T_4 es Tychonoff.

Proposición 1.1.13. [2, Teorema 2.2, p. 141] Sea X un espacio topológico. El espacio X es regular si y solo si para cada $x \in X$ y cada abierto V tal que $x \in V$, existe un abierto en U en X tal que

$$x \in U \subset cl_X(U) \subset V.$$

Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} una colección de subconjuntos de X . Se dice que \mathcal{F} es **localmente finita** si para todo punto $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que V intersecciona sólo una cantidad finita de elementos de \mathcal{F} .

Dados espacios topológicos X y Y y una función $f : X \rightarrow Y$, se dice que f es **continua** si y sólo si para cada abierto U en Y , el conjunto $f^{-1}[U]$ es abierto en X . Y decimos que f es **continua en el punto** $x \in X$, si para toda vecindad V del punto $f(x)$ existe una vecindad U del punto x tal que $f[U] \subset V$.

Observación 1.1.14. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua. Si A es un subconjunto abierto en X , entonces $f \upharpoonright A$ es continua si y sólo si f es continua en cada punto de A .

Proposición 1.1.15. [11, Teorema 2.2.3, p. 31] Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) f es continua;
- (2) $cl_X(f^{-1}[B]) \subset f^{-1}[cl_Y(B)]$ para todo $B \subset Y$;
- (3) existe una base \mathcal{B} en Y tal que $f^{-1}[U]$ es un abierto en X para cada $U \in \mathcal{B}$.

Proposición 1.1.16. [7, Teorema 18.2 (d), p. 105] Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, y si A es un subespacio de X , entonces la función restringida $f \upharpoonright A : A \rightarrow Y$ es continua.

Un resultado muy útil para probar que cierto tipo de funciones son continuas es el teorema que presentamos a continuación y que recibe el nombre de **lema de pegado**.

Teorema 1.1.17. [7, Teorema 18.3, p. 106] Sea $X = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos cerrados de X . Sean $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces existe una función continua $h : X \rightarrow Y$, definida como

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

El teorema anterior es el lema de pegado más conocido, pero hay una generalización de este teorema que presentaremos a continuación. Pero antes daremos una definición: Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, una familia $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ de subconjuntos de X se dice que es **cubierta** de A si $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Cabe notar que en el caso que $A = X$, una familia \mathcal{U} es cubierta de A si y sólo si $X = \bigcup \mathcal{U}$.

Teorema 1.1.18. [2, Teorema 9.4, p. 83] Sea X un espacio topológico y $\{A_i : i \in I\}$ una cubierta de X tal que los conjuntos A_i son cerrados y forman una familia localmente finita. Para cada $i \in I$, sea $f_i : A_i \rightarrow Y$ continua tal que

$$f_i \upharpoonright A_i \cap A_j = f_j \upharpoonright A_i \cap A_j \text{ para cada } (i, j) \in I \times I.$$

Entonces existe una única función continua $f : X \rightarrow Y$, la cual es una extensión de cada f_i , es decir, $f \upharpoonright A_i = f_i$ para todo $i \in I$.

Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua, decimos que f es un **homeomorfismo** si f es una biyección y su inversa f^{-1} es continua. Notemos que si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también es un homeomorfismo. Y si f y g son homeomorfismos, entonces $f \circ g$ también es un homeomorfismo.

Decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es **abierto** si, para cada abierto $U \subset X$ se tiene que $f[U]$ es abierto en Y . Y decimos que f es **cerrada** si, para cada cerrado $G \subset X$ se tiene que $f[G]$ es cerrado en Y . Observemos que si f es continua, biyectiva y abierta (cerrada), entonces f es un homeomorfismo.

Definición 1.1.19. Una propiedad \mathcal{P} es llamada **propiedad topológica** si, dado un espacio topológico X que tiene \mathcal{P} , cualquier espacio homeomorfo a X también tiene \mathcal{P} .

Teorema 1.1.20. [2, Teorema 12.4, p. 89] Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo y $A \subset X$. Entonces las funciones $f \upharpoonright A : A \rightarrow f[A]$ y $f \upharpoonright X \setminus A : X \setminus A \rightarrow Y \setminus f[A]$ son homeomorfismos.

Es bien sabido que los intervalos cerrados en \mathbb{R} son equipotentes entre sí, es decir, existe una función biyectiva entre ellos. Y ya que estamos hablando de homeomorfismos, presentamos una función que es un homeomorfismo entre intervalos cerrados de \mathbb{R} en el siguiente teorema, cuya prueba se puede consultar en [1, Lema 1.0.33, p. 14].

Teorema 1.1.21. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $c < d$. Entonces la función $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ dada por

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c,$$

cumple las siguientes propiedades:

1. $f(a) = c$ y $f(b) = d$,
2. f es creciente,
3. f es sobreyectiva, y
4. f es un homeomorfismo.

Ahora enunciaremos el teorema de **invarianza del dominio de Brouwer** que nos será útil para verificar una de las condiciones para que un espacio sea o no una **variedad**, cuyo concepto se introducirá en el capítulo 2.

Teorema 1.1.22. [6, Teorema 4.6.7, p. 168] Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces para cada función continua inyectiva $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ se cumple lo siguiente:

- (1) $f[U]$ es abierto en \mathbb{R}^n , y
- (2) $f : U \rightarrow f[U]$ es un homeomorfismo.

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Si \mathcal{U} es una cubierta de A , diremos que es **cubierta abierta** de A si todos sus elementos son abiertos. Por otro lado, si \mathcal{V} es otra cubierta de A , diremos que \mathcal{V} es **subcubierta** de \mathcal{U} si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Definición 1.1.23. Diremos que un espacio topológico X es **compacto**, si toda cubierta abierta \mathcal{U} de X tiene una subcubierta finita.

Teorema 1.1.24. Sea X un espacio topológico y \mathcal{B} una base de X . Entonces, X es compacto si y sólo si toda cubierta abierta $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ tiene subcubierta finita.

Demostración. \Rightarrow] Se sigue directamente de la definición de compacidad.

\Leftarrow] Sean \mathcal{U} una cubierta abierta de X y \mathcal{B} una base de X . Como \mathcal{U} es cubierta, para cada $x \in X$, existe un $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Luego, como \mathcal{B} es base, existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U_x$. Notemos que la familia $\{B_x : x \in X\}$ es cubierta abierta de X . Por hipótesis existe una colección finita \mathcal{F} de X tal que $\{B_x : x \in \mathcal{F}\}$ es cubierta. Entonces si tomamos

$$\mathcal{U}' = \{U_x \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{F}\},$$

se tiene que $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y es cubierta abierta finita de X . Por lo tanto X es compacto. \square

A continuación enunciamos más resultados importantes que involucran las propiedades de compacidad, Hausdorff, entre otras.

Teorema 1.1.25. [2, Teorema 2.1, p. 226] Sean X y Y espacios topológicos con X compacto, Y Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ continua. Entonces:

- (1) f es cerrada.
- (2) Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Teorema 1.1.26. [10, Teorema 3.1.6, p. 124] Si A es un subespacio compacto de un espacio regular X , entonces para cada conjunto cerrado B disjunto a A existen conjuntos abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si además B es subespacio compacto de X , entonces es suficiente suponer que X es un espacio Hausdorff.

Teorema 1.1.27. Sea X un espacio topológico Hausdorff.

- (1) [7, Teorema 32.3, p. 200] Si X es compacto, entonces X es normal.
- (2) [2, Teorema 1.5, p. 225] Si $A_1, \dots, A_n \subset X$ tal que A_i es compacto con $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es compacto.

Teorema 1.1.28. [2, Teorema 1.4, p. 224] Un subespacio de un espacio compacto Hausdorff es compacto si y sólo si es cerrado.

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X . Diremos que \mathcal{F} tiene la **propiedad de la intersección finita** (pif) si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y para cada conjunto finito $\{i_0, \dots, i_k\} \subset I$ se tiene que

$$F_{i_0} \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset.$$

Teorema 1.1.29. [10, Teorema 3.1.1, p. 123] Un espacio topológico Hausdorff X es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X con la pif, tiene intersección no vacía.

Si X es un espacio topológico, decimos que una sucesión $\{x_i : i \in \omega\} \subset X$ **converge** a punto x en X si, para cada abierto U que contenga a x existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ para todo $n \leq m$. O equivalentemente, el conjunto $\{i \in \omega : x_i \notin U\}$ es finito.

Proposición 1.1.30. [2, Teorema 6.2, p. 218] Sea X un espacio topológico primero numerable y $A \subset X$. Entonces, $x \in cl_X(A)$ si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x .

Lema 1.1.31. [7, Teorema 17.10, p. 99] Si X es un espacio topológico Hausdorff, toda sucesión convergente en X converge a un único punto en X .

Un teorema importante acerca de las sucesiones en espacios euclidianos, es el teorema de **Bolzano - Weierstrass** que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1.32. [9, Teorema 3.6, p. 51] Toda sucesión acotada en \mathbb{R}^n con $n \in \mathbb{Z}^+$ tiene una subsucesión convergente.

Sea X_i un conjunto no vacío para cada $i \in I$. El **producto cartesiano** de los conjuntos X_i , es el conjunto de todas las funciones

$$x : I \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

tales que $x(i) \in X_i$ para cada $i \in I$. Este conjunto se denota como $\prod_{i \in I} X_i$. Para cada $x \in \prod_{i \in I} X_i$ y cada $i \in I$, el valor $x(i)$ lo llamaremos la **i -ésima coordenada** de x . Se suele denotar a la i -ésima coordenada de x por x_i . Por conveniencia, en ocasiones denotaremos a la función x por $\langle x_i \rangle_{i \in I}$.

Definición 1.1.33. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Sea \mathcal{B} el conjunto de todos los subconjuntos de $\prod_{i \in I} X_i$ de la forma

$$U_{i_0} \times \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i,$$

donde U_{i_0} es un subconjunto abierto de X_{i_0} . La topología en $\prod_{i \in I} X_i$ generada por \mathcal{B} como sub-base recibe el nombre de **topología producto**.

Observemos que la base generada por \mathcal{B} como sub-base, es la colección de todos los subconjuntos de la forma $\prod_{i \in I} U_i$, en donde U_i es abierto en X_i y $U_i = X_i$ salvo un número finito de índices.

Definición 1.1.34. Sea $\prod_{i \in I} X_i$ el producto topológico de una familia $\{X_i : i \in I\}$ de espacios topológicos. Para cada $j \in I$, la función

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$$

dada por $\pi_j(\langle x_i \rangle_{i \in I}) = x_j$ se llama la **j -ésima proyección**.

Proposición 1.1.35. [2, Teorema 2.1, p. 101] Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia espacios topológicos, para cada $j \in I$, la proyección

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j,$$

es una función continua y abierta.

Proposición 1.1.36. Sean X, Y espacios topológicos y $x \in X$. Si consideramos $\{x\} \times Y$ como subespacio de $X \times Y$, entonces los espacios $\{x\} \times Y$ y Y son homeomorfos.

Demostración. Hagamos $Y_x = \{x\} \times Y$ y consideremos la función $\pi_x : Y_x \rightarrow Y$ definida como $\pi_x(\langle x, y \rangle) = y$. Veamos que π_x es un homeomorfismo.

Como π_x es la proyección sobre Y , de la proposición 1.1.35 se sigue que π_x es continua. Además notemos que π_x es biyectiva. Ahora, sea $y \in Y$. Probemos que π_x^{-1} es continua en y : sea U una vecindad abierta de $\pi_x^{-1}(y) = \langle x, y \rangle$ en Y_x . Como U es abierto en Y_x , entonces existe un abierto V en $X \times Y$ tal que $Y_x \cap V = U$. Como la familia

$$\{W \times G : W \text{ es abierto en } X \text{ y } G \text{ es abierto en } Y\}$$

es una base para $X \times Y$, existen abiertos W y G de X y Y respectivamente tales que

$$\langle x, y \rangle \in W \times G \subseteq V.$$

Notemos que $x \in W$ y $y \in G$. Veamos que $\pi_x^{-1}[G] \subset U$: sea $z \in G$. Como $\pi_x^{-1}(z) = \langle x, z \rangle$ tenemos que

$$\langle x, z \rangle \in (W \times G) \cap Y_x \subset V \cap Y_x = U.$$

Y se sigue que $\pi_x^{-1}[G] \subset U$. Por lo tanto π_x^{-1} es continua en y . Así, podemos concluir que π_x es un homeomorfismo. □

1.2. Conexidad

Un espacio topológico X se dice que es **conexo** si cada vez que $X = U \cup V$ donde U y V son abiertos en X tal que $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.

Un ejemplo de espacio conexo es el de los números reales y la prueba se ve en un curso básico, el lector lo puede consultar en [12, Ejemplo 26.9, p. 193].

A continuación daremos algunos resultados importantes acerca de conexidad.

Teorema 1.2.1. La imagen continua de un espacio topológico conexo es conexo.

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos con X conexo y $f : X \rightarrow Y$ continua y sobreyectiva. Supongamos que Y no es conexo, es decir, existen $U, V \subset Y$ abiertos disjuntos no vacíos tales que $Y = U \cup V$. Como f es continua, $f^{-1}[U]$ y $f^{-1}[V]$ son abiertos no vacíos en X . Luego, notamos que

$$f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V] = f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

Por otro lado tenemos que

$$f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V] = f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[Y] = X.$$

Pero esto contradice la conexidad de X . Por lo tanto Y es conexo. □

Teorema 1.2.2. *La unión de subespacios conexos cuya intersección es no vacía, es conexo.*

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea $\{Y_t : t \in T\} \subset X$ una familia de subespacios conexos que se intersecan. Hagamos

$$A = \bigcup_{t \in T} Y_t \quad \text{y} \quad B = \bigcap_{t \in T} Y_t,$$

Probemos que A es conexo: Supongamos que $A = C \cup D$ con $C, D \subset X$ abiertos tales que $C \cap D = \emptyset$. Como $B \neq \emptyset$ podemos tomar un $x \in B$. Entonces $x \in C$ o $x \in D$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in C$. Ahora, fijemos un $t \in T$ y hagamos $C' = Y_t \cap C$ y $D' = Y_t \cap D$. Notemos que C' y D' son abiertos en Y_t . Luego vemos que

$$C' \cap D' = Y_t \cap (C \cap D) = \emptyset.$$

Por otro lado tenemos que

$$C' \cup D' = Y_t \cap (C \cup D) = Y_t \cap A = Y_t.$$

Así, tenemos que C' y D' son abiertos disjuntos en Y_t tales que $C' \cup D' = Y_t$. Pero como Y_t es conexo, se sigue que $C' = \emptyset$ o $D' = \emptyset$. Si $C' = \emptyset$ se sigue que $Y_t \subset D$. Y si $D' = \emptyset$ se sigue que $Y_t \subset C$. Pero como $x \in C$ entonces Y_t no puede estar contenido en D , ya que $x \in Y_t$. Entonces $Y_t \subset C$. De esto se sigue que $Y_t \subset C$ para todo $t \in T$, lo cual implica que $\bigcup_{t \in T} Y_t \subset C$. Así, tenemos que $D = \emptyset$ y por lo tanto A es conexo. □

Teorema 1.2.3. *El producto de dos espacios topológicos conexos es conexo.*

Demostración. Sean X, Y espacios conexos. Para cada $x \in X$, sea $Y_x = \{x\} \times Y$. Fijamos $y_0 \in Y$ y definimos $X_0 = X \times \{y_0\}$. Por la proposición 1.1.36 se tiene que Y y Y_x son homeomorfos. Entonces Y_x es conexo por ser la imagen continua de un conexo. Por un argumento similar al anterior se tiene que X_0 es conexo. Luego vemos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \in X} (Y_x \cup X_0) &= X_0 \cup \left(\bigcap_{x \in X} Y_x \right) \\ &= X_0 \cup \emptyset \\ &= X_0, \end{aligned}$$

es decir, la intersección de los subconjuntos $Y_x \cup X_0$ de $X \times Y$ haciendo variar $x \in X$ es no vacío. Además, notemos que

$$X \times Y = \bigcup \{Y_x \cup X_0 : x \in X\}.$$

Por lo tanto, del teorema 1.2.2 se sigue que $X \times Y$ es conexo. □

Corolario 1.2.4. *El producto finito de espacios conexos es conexo.*

Demostración. Sea X_n conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Hagamos inducción sobre n : para $n = 2$, aplicamos el teorema 1.2.3 y tenemos que $X_1 \times X_2$ es conexo. Ahora supongamos que para $n = k$ el producto de los primeros k -factores es conexo. Notemos que

$$X_1 \times \cdots \times X_{k+1} = (X_1 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1}.$$

Como $X_1 \times \cdots \times X_k$ es conexo (por hipótesis de inducción) y X_{k+1} es conexo, de nuevo aplicando el teorema 1.2.3 se sigue que $X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$ es conexo. Esto completa la inducción. Por lo tanto, el producto finito de espacios conexos es conexo. □

Corolario 1.2.5. \mathbb{R}^n es conexo si $n \in \mathbb{Z}^+$.

Notemos que el corolario anterior se sigue directamente del hecho que \mathbb{R} es conexo y del corolario 1.2.4.

Teorema 1.2.6. [2, Teorema 1.6, p. 109] *Sea $A \subset X$ conexo. Entonces cualquier conjunto B que satisfice que $A \subset B \subset cl_X(A)$ es también conexo. En particular, la cerradura de un conjunto conexo es conexo.*

Hasta ahora, para probar que un espacio topológico es conexo, solo conocemos la definición. El siguiente resultado, nos da una técnica para probar que un espacio topológico es conexo.

Teorema 1.2.7. *Si dos puntos cualesquiera de un espacio topológico X están contenidos en un subespacio conexo de X , entonces el espacio X es conexo.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ fijo. Por hipótesis, para cada $x \in X$ existe un subespacio conexo C_x de X que contiene a x y a x_0 . Luego, como

$$x_0 \in \bigcap_{x \in X} C_x,$$

es decir, la intersección de la familia $\{C_x\}_{x \in X}$ es no vacía y además

$$X = \bigcup_{x \in X} C_x,$$

del teorema 1.2.2 se sigue que X es conexo. □

Con la ayuda del teorema anterior es fácil probar que las bolas abiertas en \mathbb{R}^n son conexas.

Corolario 1.2.8. *Toda bola abierta en \mathbb{R}^n con $n \in \mathbb{Z}^+$ es un conexo.*

Demostración. Consideremos la bola abierta con centro en el origen $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ con $r \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Probemos que $B_r(0)$ es conexa: sean $x, y \in B_r(0)$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$. Hagamos

$$A = \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}.$$

Notemos que x y y están en A . Ahora definimos una función $f : [0, 1] \rightarrow A$ como

$$f(t) = (1-t)x + ty,$$

para cada $t \in [0, 1]$. Notemos que f es sobreyectiva por la definición de A . Para ver que f es continua, basta observar que

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t)x + ty \\ &= ((1-t)x_1 + ty_1, \dots, (1-t)x_n + ty_n). \end{aligned}$$

Es decir, cada componente de $f(t)$ es un polinomio de grado 1 en \mathbb{R} . Por lo tanto cada componente de $f(t)$ es continuo. De esto se sigue que f es continua. Luego, como $[0, 1]$ es conexo, del teorema 1.2.1 se sigue que A es conexo. Veamos que $A \subset B_r(0)$. Sea $p \in A$, entonces $p = (1-t)x + ty$ para algún $t \in [0, 1]$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} \|p\| &= \|(1-t)x + ty\| \\ &\leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \\ &< (1-t) + t \\ &= 1. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $p \in B_r(0)$. Y por lo tanto $A \subset B_r(0)$. De esta manera hemos encontrado un subconjunto conexo en $B_r(0)$ que contiene a x y y . Entonces, por el teorema 1.2.7 se sigue que $B_r(0)$ es conexo.

Por último, observemos que $B_r(0)$ y $B_r(x)$ son homeomorfos para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. De esta última observación se sigue que las bolas abiertas en \mathbb{R}^n son conexos. □

1.3. Espacios cociente

Definición 1.3.1. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Decimos que f es una **identificación** si

$$\forall U \subseteq Y : U \text{ es abierto en } Y \iff f^{-1}[U] \text{ es abierto en } X.$$

Ahora, definiremos dos nociones de saturación de conjuntos:

Sea \mathcal{P} una partición en un conjunto X . Un subconjunto $V \subset X$ se denomina **saturado** para \mathcal{P} si cumple que $B \cap V \neq \emptyset$ implica $B \subset V$ para todo $B \in \mathcal{P}$.

Por otro lado, si X y Y son espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ es una función sobreyectiva, decimos que $A \subset X$ es **saturado** si $A = f^{-1}[B]$ para algún $B \subset Y$.

En realidad las dos nociones de conjuntos saturados que acabamos de dar son equivalentes, ya que si $f : X \rightarrow Y$ es una función sobreyectiva, entonces la familia de fibras $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ es una partición de X .

Una relación de equivalencia en un conjunto dado induce una partición del conjunto. Usaremos este hecho para que, a partir de las particiones de un espacio topológico dado, podamos construir otros espacios topológicos.

Definición 1.3.2. Sea R una relación de equivalencia en un espacio topológico X . Sea $\mathbb{P} = \{[x]_R : x \in X\}$ el conjunto de clases de equivalencia y $\Pi : X \rightarrow \mathbb{P}$ definida por $\Pi(x) = [x]$. Entonces la topología cociente en \mathbb{P} es

$$\{U \subseteq \mathbb{P} : \Pi^{-1}[U] \text{ es abierto en } X\}.$$

A la función Π de la definición anterior se le llama **función cociente**.

Observación 1.3.3. En la definición anterior, Π es una identificación.

Proposición 1.3.4. [10, Proposición 2.4.15, p. 95] Si $f : X \rightarrow Y$ es una identificación, entonces para cualquier conjunto $B \subset Y$ cerrado o abierto, la restricción $f|_{f^{-1}[B]} : f^{-1}[B] \rightarrow B$ es una identificación.

Teorema 1.3.5. [2, Teorema 3.1, p. 123] Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ continua y sobreyectiva. Entonces f es una identificación si y sólo si: para cada espacio topológico Z y cada función $g : Y \rightarrow Z$, la continuidad de $g \circ f$ implica la continuidad de g .

Teorema 1.3.6. [2, Teorema 3.2, p. 123] Sea $\Pi : X \rightarrow Y$ una identificación y $h : X \rightarrow Z$. Supongamos que si $x, y \in X$ y $\Pi(x) = \Pi(y)$ entonces $h(x) = h(y)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Pi} & Y \\ h \downarrow & & \swarrow H \\ & & Z \end{array}$$

- (a) Si h es continua, entonces existe $H : Y \rightarrow Z$ continua tal que $H \circ \Pi = h$.
- (b) La función H es abierta (cerrada) si y sólo si $h[U]$ es abierta (cerrada) para cada abierto (cerrado) saturado U .

1.4. Conjuntos linealmente ordenados y su topología

Consideremos un conjunto X y una relación binaria $<$ entre elementos de X . Diremos que $<$ es un **orden estricto** en X si

- $<$ es **antireflexiva**: $x \not< x$ para todo $x \in X$, y
- $<$ es **transitiva**: si $x, y, z \in X$ son tales que $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

Y diremos que $<$ es un **orden parcial** en X si $<$ es transitiva,

- $<$ es **reflexiva**: $x < x$ para todo $x \in X$, y
- $<$ es **antisimétrica**: si $x, y \in X$ son tales que $x < y$ y $y < x$, entonces $x = y$.

Si $<$ es un orden estricto en X , diremos que es un **orden lineal** si cualesquiera dos elementos son comparables, es decir: si $x, y \in X$ entonces

$$x = y \text{ o } x < y \text{ o } y < x,$$

y solo una de estas tres opciones; diremos también que $(X, <)$ es un conjunto **linealmente ordenado**.

Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Una **cadena** en X es un subconjunto $Y \subset X$ que está linealmente ordenado por \leq , es decir, si $x, y \in Y$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.

Dimos la definición de cadena con la intención de hablar del **lema de Zorn**. Presentaremos el lema de Zorn, como se da en [4, Definición 7.7, p. 146].

Lema 1.4.1 (Lema de Zorn). *Sea $\langle X, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado con $X \neq \emptyset$. Supongamos que toda cadena de X tiene cota superior. Entonces existe un elemento maximal en $\langle X, \leq \rangle$.*

Definición 1.4.2. *Sean $(X, <)$ un conjunto linealmente ordenado y $A \subset X$.*

- (i) *A es un segmento inicial si $\forall a \in A \forall b \in X, (b < a \Rightarrow b \in A)$.*
- (ii) *A es un segmento final si $\forall a \in A \forall b \in X, (a < b \Rightarrow b \in A)$.*

Diremos que $<$ es un **buen orden** en un conjunto X si $<$ es un orden estricto y además, si $A \subset X$ es tal que $A \neq \emptyset$ entonces existe $a \in A$ mínimo con la propiedad de que si $x \in A$ entonces $a \leq x$. En este caso vamos a decir que $\langle X, < \rangle$ es un **conjunto bien ordenado**.

Observación 1.4.3. *Todo buen orden es lineal.*

En efecto, si $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado y $x, y \in X$ entonces el conjunto $A = \{x, y\}$ tiene un elemento mínimo. Si x es el mínimo de A , entonces $x \leq y$. Y si y es el mínimo de A , entonces $y \leq x$.

Proposición 1.4.4. *Sea $(X, <)$ un conjunto bien ordenado y sea J un segmento inicial propio de X . Entonces existe un elemento $x \in X$ tal que*

$$J = \{y \in X : y < x\}.$$

Demostración. Sea J un segmento inicial propio de X y $A = \{y \in X : x \notin J\}$. Como J es segmento inicial propio, se tiene que $A \neq \emptyset$. Entonces, como $A \subset X$ y $A \neq \emptyset$, existe un elemento $x \in A$ tal que $x \leq a$ para todo $a \in A$. Hagamos

$$K = \{y \in X : y < x\}.$$

Probemos que $J = K$.

\supset] Sea $y \in K$. Si $y \notin J$, entonces $y \in A$, lo cual implica que $x \leq y$, pero esto contradice el hecho que $y \in K$. Por lo tanto $y \in J$ y se tiene que $K \subset J$.

\subset] Sea $y \in J$. Como el orden es lineal por la observación 1.4.3, se tiene que $x = y$, o $x < y$, o $y < x$. Como $x \in A$, no puede pasar que $x = y$. Si $x < y$, esto implica que $x \in J$ ya que J es segmento inicial. Pero esto contradice el hecho que $x \in A$. Entonces $y < x$, lo cual implica directamente que $y \in K$. Así, tenemos que $J \subset K$ y por lo tanto $J = K$. □

Corolario 1.4.5. *[4, Proposición 5.13, p. 90] Sean $(X, <)$ un conjunto bien ordenado y $J \subset X$ un segmento inicial. Entonces, J es isomorfo a X si y sólo si $X = J$.*

Es importante mencionar que el corolario anterior se debe al hecho que los isomorfismos entre conjuntos bien ordenados son únicos y la proposición 1.4.4.

Un ejemplo de un conjunto bien ordenado es el conjunto de números naturales \mathbb{N} . También existe una clase de conjuntos bien ordenados, llamados **ordinales**. La definición de ordinal dada por John von Neumann, en este trabajo no es importante darla, pero sí es importante entender cuáles son sus consecuencias. Sucede que la relación \in en un ordinal es una relación de orden estricto, y además cualesquiera dos ordinales distintos son comparables con esta relación. En particular, cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales menores que el. La propiedad más importante de los ordinales es que todo conjunto bien ordenado admite una biyección que preserva el orden sobre un único ordinal [4, Teorema 5.50, p. 107]. Otra propiedad importante acerca de la contención \subset de ordinales es la siguiente:

Lema 1.4.6. *[4, Lema 5.24, p. 97] Sean x, y ordinales. Entonces $x \subset y$ si y sólo si $x = y$ o $x \in y$.*

Sucede que el conjunto \mathbb{N} también es un ordinal, y en la teoría de conjuntos se denota como ω . Además, dado un ordinal α hay uno que es sucesor inmediato el cual denotaremos por $\alpha + 1$. Entonces como ω es un ordinal, tenemos que

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \dots$$

también son ordinales y son mayores que ω . Estos ordinales, aunque no se definirán, son numerables. Sucede que existe un ordinal, denotado por ω_1 , que es igual al conjunto de todos los ordinales numerables. Además existen dos tipos de ordinales, los que son sucesor de algún otro ordinal y los que no lo son. Los ordinales que no son sucesor de otro ordinal son llamados **ordinales límite**.

Proposición 1.4.7. [4, Proposición 5.53, p. 109] *Existe un conjunto bien ordenado ω_1 y es el primer ordinal no numerable.*

No nos detendremos a probar la proposición anterior, ya que no es nuestro propósito probar la existencia de ω_1 , si no más bien, conocer algunas de sus propiedades más importantes.

En el artículo de divulgación [5, Definición 3.2, p. 41] se presenta a ω_1 de manera axiomática. Vamos a basarnos en este trabajo para enunciar algunas propiedades de ω_1 a continuación.

Teorema 1.4.8. *El conjunto bien ordenado $(\omega_1, <)$ cumple las siguientes propiedades:*

- (a) *Cada subconjunto numerable tiene una cota fuera de ese subconjunto, es decir, si $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \omega_1$, entonces existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha_n < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- (b) *Cada segmento inicial propio es numerable, es decir, para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta \leq \alpha\}$ es numerable.*

Demostración. (a) Sean

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha_n : n \in \omega\} \subset \omega_1 \text{ y} \\ S &= \bigcup A. \end{aligned}$$

La prueba de que S es un ordinal se puede encontrar en [4, Lema 5.42, p. 105]. Veamos entonces que S es cota superior de A : sea $\alpha \in A$. Por definición tenemos que $\alpha \subset \bigcup A = S$. Pero como el orden de la contención estricta \subsetneq coincide con el orden \in de los ordinales por el lema 1.4.6, entonces $\alpha \in S$. De esto se sigue que S es cota superior de A .

(b) Sea J un segmento inicial propio de ω_1 . Como J es segmento inicial propio, tenemos que $J \neq \omega_1$ y entonces el corolario 1.4.5 implica que J no es

isomorfo a ω_1 . Luego, como J es bien ordenado se tiene que J es isomorfo a un ordinal, digamos α . La prueba de la última afirmación se puede ver en [4, Teorema 5.50, p. 107]. Por otro lado, como J es subconjunto de ω_1 , hay una función inyectiva de J a ω_1 . Entonces hay una función inyectiva de α a ω_1 , lo cual implica que α es menor que ω_1 . Y como ω_1 es el primer ordinal no numerable por la proposición 1.4.7, se sigue que α es numerable. Y por lo tanto J también es numerable. □

El inciso (a) del teorema anterior, nos habla acerca de sucesiones en ω_1 y nos dice una propiedad importante: que son acotadas. Otra propiedad también importante de las sucesiones es cuando se tiene un ordinal límite en ω_1 , como veremos en la siguiente proposición, existe una sucesión de ordinales que no solo está acotada por este ordinal, si no que además converge a él en el siguiente sentido.

Proposición 1.4.9. [5, Propiedad 3.6, p. 42] *Si $\alpha \in \omega_1$ es límite, entonces existe una colección $\{\alpha_n : n < \omega\} \subset [0, \alpha)$ con las siguientes propiedades:*

(I) *la sucesión es estrictamente creciente, es decir, $m < n < \omega$ implica que $\alpha_m < \alpha_n$, y*

(II) *dado $\beta \in \omega_1$ con $\beta < \alpha$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < \alpha_m$.*

En este momento lo que sigue es darle una topología a los ordinales.

Definición 1.4.10. *Si $\langle X, < \rangle$ es linealmente ordenado, la topología del orden es la generada por los conjuntos*

$$(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}$$

$$(b, \rightarrow) = \{x \in X : b < x\}$$

donde $a, b \in X$.

Observación 1.4.11. *Notemos que si X tiene elemento mínimo, digamos m , entonces el subconjunto $[m, a)$ es abierto en X para todo $a \in X$.*

Terminamos esta sección con una propiedad de los espacios linealmente ordenados que nos será de mucha utilidad en algunos ejemplos que daremos en el próximo capítulo.

Lema 1.4.12. *Todo espacio linealmente ordenado es Hausdorff.*

Demostración. Sea $(X, <)$ un espacio linealmente ordenado y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Existe $z \in X$ tal que $x < z < y$. Entonces tomamos los siguientes abiertos: $U = (\leftarrow, z)$ y $V = (z, \rightarrow)$. Notemos que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Caso 2. No hay elementos entre x y y . Entonces tomamos $U = (\leftarrow, y)$ y $V = (x, \rightarrow)$. Notemos que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

En ambos casos podemos separar los puntos por abiertos ajenos. Por lo tanto X es Hausdorff. □

Definición 1.4.13. Sean $(X, <_X)$, $(Y, <_Y)$ dos conjuntos linealmente ordenados y $f : X \rightarrow Y$. Entonces decimos que

- (i) f es una función **creciente** si para cada $x, y \in X$ tales que $x <_X y$, se tiene que $f(x) <_Y f(y)$.
- (ii) f es una función **decreciente** si para cada $x, y \in X$ tales que $x <_X y$, se tiene que $f(y) <_Y f(x)$.

Capítulo 2

Conceptos básicos de variedades

2.1. Definición y primeros ejemplos

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que X es **localmente homeomorfo** a \mathbb{R}^n si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x , un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$.

Definición 2.1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n -variedad** es un espacio topológico conexo, Hausdorff y localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Un caso particular de variedades son las 2-variedades, a las cuales se les llama **superficies**. A continuación mostramos varios ejemplos clásicos de variedades y espacios que son cercanos a ser variedades pero que no cumplen todas las propiedades de la definición.

Ejemplo 2.1.3. El espacio \mathbb{R}^n es una n -variedad para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Del hecho que \mathbb{R}^n es metrizable se sigue que \mathbb{R}^n es Hausdorff. Luego, del corolario 1.2.5 se sigue que \mathbb{R}^n es conexo.

Por último, veamos que \mathbb{R}^n es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n : sea $x \in \mathbb{R}^n$. Tomemos $U = V = \mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \rightarrow V$ como $\varphi = I_{\mathbb{R}^n}$ (la identidad en \mathbb{R}^n). Evidentemente U es vecindad abierta de x , V es abierto y φ es un homeomorfismo por ser la función identidad.

Por lo tanto \mathbb{R}^n es una n -variedad para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Ahora consideremos $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$, donde $* \notin \mathbb{R}$ y definimos una colección β de subconjuntos de X tal que para cada $V \subset X$;

1. Si $V \subset \mathbb{R}$ entonces $V \in \beta$ si y solo si es abierto en la topología euclidiana.
2. Si $* \in V$ entonces $V \in \beta$ si y solo si $(V \setminus \{*\}) \cup \{0\}$ es abierto en la topología euclidiana.

Notemos que β es una topología en X . Si $U \in \beta$ es como en 1, lo llamaremos abierto de tipo I. Y si $U \in \beta$ es como en 2, lo llamaremos abierto de tipo II.

Ejemplo 2.1.4. *El espacio $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$ con la topología β definida anteriormente es conexo, localmente homeomorfo a \mathbb{R} pero no es Hausdorff.*

Demostración. Primero hagamos la siguiente observación: la topología de \mathbb{R} como subespacio de X esta dada por la colección

$$\tau = \{U \cap \mathbb{R} : U \in \beta\}.$$

Luego, si $\tau_{\mathbb{R}}$ es la topología euclidiana, entonces $\tau_{\mathbb{R}} = \tau$. Probemos esta afirmación. Sea $U \cap \mathbb{R} \in \tau$ con $U \in \beta$. Consideremos dos casos:

Caso 1. Si $U \subset \mathbb{R}$. Entonces $U \cap \mathbb{R} = U \in \tau_{\mathbb{R}}$ ya que U es abierto en la topología euclidiana.

Caso 2. Si $* \in U$. Entonces pensamos en dos casos. Si $0 \in U$ tenemos que

$$U \cap \mathbb{R} = (U \setminus \{*\}) \cup \{0\},$$

el cual es abierto en la topología euclidiana y por lo tanto $U \cap \mathbb{R} \in \tau_{\mathbb{R}}$. Y si $0 \notin U$ tenemos que $U \cap \mathbb{R} = U \setminus \{*\}$. Además notemos que

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap [(U \setminus \{*\}) \cup \{0\}] = U \setminus \{*\},$$

es decir, $U \setminus \{*\}$ es la intersección de dos abiertos en la topología euclidiana, lo cual implica que $U \cap \mathbb{R} \in \tau_{\mathbb{R}}$. Así, tenemos que $\tau \subset \tau_{\mathbb{R}}$.

Por otro lado, si $V \in \tau_{\mathbb{R}}$, entonces V es abierto en la topología euclidiana, lo cual implica que $V \in \beta$ y como $V = V \cap \mathbb{R}$, se sigue que $V \in \tau$. Así, tenemos que $\tau \subset \tau_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto $\tau_{\mathbb{R}} = \tau$, es decir, la topología euclidiana coincide con la topología de \mathbb{R} como subespacio de X .

Veamos que X es localmente homeomorfo a \mathbb{R} : sea $x \in X$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $x \neq *$. Tomamos $U = V = \mathbb{R}$ y $\varphi : U \rightarrow V$ como $\varphi = I_{\mathbb{R}}$. Como la topología de \mathbb{R} como subespacio de X coincide con la topología euclidiana por la observación anterior y, como φ es la función identidad, se sigue que φ es un homeomorfismo. De esta manera, para $x \neq *$ hemos encontrado una vecindad abierta de x que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R} .

Caso 2. Si $x = *$. Tomamos $U = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{*\}$, $V = \mathbb{R}$ y definimos la función $\varphi : U \rightarrow V$ como

$$\varphi(y) = \begin{cases} y, & \text{si } y \neq *, \\ 0, & \text{si } y = *. \end{cases}$$

Veamos que φ es continua: tomemos un abierto W en V . Notemos que si $0 \notin W$ entonces $\varphi^{-1}[W] = W$, el cual es un abierto de tipo I en U . Y si $0 \in W$ entonces $\varphi^{-1}[W] = W \cup \{*\}$, el cual es un abierto de tipo II en U . De esto se sigue que φ es continua. Además notemos que φ es biyectiva. Ahora, si tomamos un abierto W de tipo I en U , entonces $\varphi[W] = W$, el cual es abierto en V . Y si W es un abierto de tipo II en U , entonces $\varphi[W] = (W \setminus \{*\}) \cup \{0\}$, el cual es abierto en V . Por lo tanto φ es abierta y así tenemos que φ es un homeomorfismo y por tanto X es localmente homeomorfo a \mathbb{R} .

Ahora vemos que X es conexo: supongamos que $X = U \cup V$, con $U \cap V = \emptyset$ y U, V abiertos en X . Hagamos $U' = U \cap \mathbb{R}$ y $V' = V \cap \mathbb{R}$. Notemos que

$$U' \cap V' = \mathbb{R} \cap (U \cap V) = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset,$$

y que

$$U' \cup V' = \mathbb{R} \cap (U \cup V) = \mathbb{R} \cap X = \mathbb{R}.$$

Como $U, V \in \beta$, entonces $U', V' \in \tau$. Luego tenemos que $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$ por nuestra observación, lo cual implica que U' y V' son abiertos en \mathbb{R} . Entonces, como \mathbb{R} es conexo tenemos que $U' = \emptyset$ o $V' = \emptyset$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $U' = \emptyset$. Entonces $\mathbb{R} \subseteq V$. Ahora notemos que si $* \in V$ se sigue que $U = \emptyset$ y así X es conexo. Y si $* \in U$, como $U \cap V = \emptyset$, entonces $x \notin U$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y se sigue que $U = \{*\}$, lo que implica que $(U \setminus \{*\}) \cup \{0\} = \{0\}$ es abierto en \mathbb{R} , lo cual es una contradicción. Así concluimos que $U = \emptyset$ y por lo tanto X es conexo.

Por último mostramos que X no es Hausdorff: probemos que los elementos 0 y $*$ no se pueden separar por abiertos ajenos. Sean U, V vecindades abiertas de x y y respectivamente. Como $* \in V$, entonces $(V \setminus \{*\}) \cup \{0\}$ es abierto en \mathbb{R} y además es vecindad abierta de 0 . Pero también $0 \in U$, entonces $U \cap [(V \setminus \{*\}) \cup \{0\}]$ también es una vecindad abierta de 0 . Luego, como $U \cap [(V \setminus \{*\}) \cup \{0\}]$ es abierto en \mathbb{R} , existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(-\epsilon, \epsilon) \subset U \cap [(V \setminus \{*\}) \cup \{0\}].$$

Luego notamos que $\frac{\epsilon}{2} \in (-\epsilon, \epsilon)$ y como $\frac{\epsilon}{2} \neq 0$ entonces $\frac{\epsilon}{2} \in V \setminus \{*\}$, y se sigue que $\frac{\epsilon}{2} \in V$. Entonces $\frac{\epsilon}{2} \in U \cap V$ y se sigue que X no es Hausdorff. Y por lo tanto $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$ no es una variedad. □

Un ejemplo clásico de variedad es el toro. Nuestra intención es presentar al toro como una 2-variedad, pero para ello haremos uso de un teorema y un ejemplo que presentamos a continuación.

Ejemplo 2.1.5. La *circunferencia* $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ es una 1-variedad.

Demostración. Del hecho que \mathbb{S}^1 es subespacio métrico de \mathbb{R}^2 , se sigue que \mathbb{S}^1 es Hausdorff.

Ahora veamos que \mathbb{S}^1 es conexo: consideremos $H = [0, 2\pi]$ y la función $\varphi : H \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in H. \quad (2.1)$$

Como cada componente de la función φ es una función continua, entonces φ es continua. Luego notamos que $\varphi[H] = \mathbb{S}^1$, es decir, φ es sobreyectiva. Por lo tanto, como H es conexo y \mathbb{S}^1 es la imagen continua de H , por el teorema 1.2.1 se sigue que \mathbb{S}^1 es conexo.

Por último veamos que \mathbb{S}^1 es localmente homeomorfo a \mathbb{R} : sea $x \in \mathbb{S}^1$, $y = \langle 1, 0 \rangle$ y $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{y\}$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $x \neq y$. Notemos que $x \in U$ y que U es abierto en \mathbb{S}^1 . Consideremos $V = (0, 2\pi)$ y $\varphi \upharpoonright V : V \rightarrow U$ la restricción de la función definida como en 2.1. Como φ es continua y $\varphi[V] = U$, por la proposición 1.1.16 se sigue que $\varphi \upharpoonright V$ es continua. Además notemos que la función $\varphi \upharpoonright V$ es biyectiva. Ahora tomemos $W = (t_1, t_2) \subset (0, 2\pi)$. Notemos que geoméricamente se puede notar que

$$\varphi[W] = \mathbb{S}^1 \cap B_\epsilon(\varphi((t_1 + t_2)/2)) \quad \text{donde } \epsilon = \|\varphi((t_1 + t_2)/2) - \varphi(t_1)\|,$$

es decir, la imagen de W es la intersección de la circunferencia \mathbb{S}^1 con una bola abierta en \mathbb{R}^2 y, por lo tanto $\varphi[W]$ es abierto.

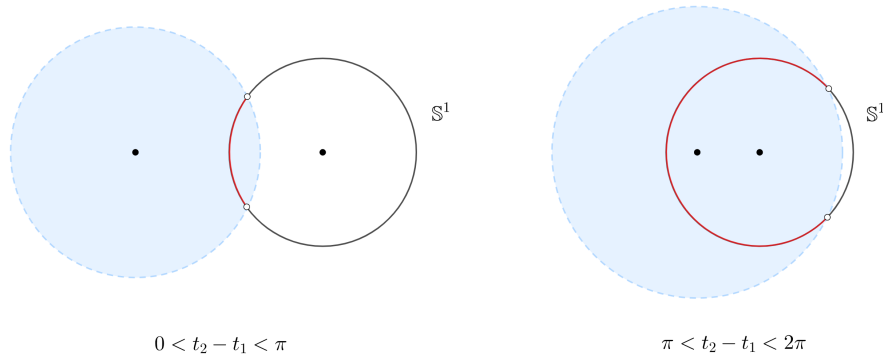


Figura 2.1: Representación geométrica de $\varphi[W]$

En la figura 2.1, el arco de la circunferencia de color rojo representa al conjunto abierto $\varphi[W]$. Representamos al abierto $\varphi[W]$ de dos maneras distintas,

dependiendo de los valores de $t_2 - t_1$. Luego, como W es un abierto básico, se sigue que la función φ es abierta. Así, como $\varphi \upharpoonright V$ es biyectiva y abierta, entonces $\varphi \upharpoonright V$ es un homeomorfismo.

Caso 2. $x = y$. Tomemos $z = \langle 0, 1 \rangle$, $H = \mathbb{S}^1 \setminus \{z\}$ y definimos $\sigma : U \rightarrow H$ como $\sigma(u) = R_{\frac{\pi}{2}}u$, donde $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $R_{\frac{\pi}{2}}$ es la matriz de rotación en \mathbb{R}^2 dada por

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos que

$$\sigma(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

para cada $u = \langle u_1, u_2 \rangle \in U$. Como σ es restricción de una transformación lineal del plano, entonces σ es continua. Notemos también que σ es biyectiva. Además, como la inversa de una transformación lineal es una transformación lineal, la inversa también es continua y se sigue que σ es un homeomorfismo. Así, tenemos que $(0, 2\pi)$ es homeomorfo a U y U es homeomorfo a H , lo que implica que $(0, 2\pi)$ es homeomorfo a H .

Por lo tanto \mathbb{S}^1 es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^1 y entonces ya podemos concluir que \mathbb{S}^1 es una 1-variedad. □

A continuación damos un teorema que nos permite dar muchos ejemplos de variedades, en particular nos ayudará a presentar el ejemplo del toro como una 2-variedad como mencionamos anteriormente.

Teorema 2.1.6. Sean X y Y espacios topológicos. Si X es una n -variedad y Y es una m -variedad, entonces $X \times Y$ es una $(n + m)$ -variedad.

Demostración. Sean X una n -variedad y Y una m -variedad. Como X y Y son conexos, del teorema 1.2.3 se sigue que $X \times Y$ es conexo.

Veamos que $X \times Y$ es Hausdorff: sean $\langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle \in X \times Y$ con $\langle x_1, x_2 \rangle \neq \langle y_1, y_2 \rangle$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1 \neq y_1$. Como X es Hausdorff, existen vecindades abiertas U' y V' de x_1 y y_1 respectivamente tales que $U' \cap V' = \emptyset$. Ahora hagamos $U = U' \times Y$, $V = V' \times Y$. Notamos que U' y V' son vecindades de $\langle x_1, x_2 \rangle$ y $\langle y_1, y_2 \rangle$ respectivamente. Como U' es abierto en X y Y es abierto, se sigue que U es abierto en $X \times Y$. Por un argumento similar, V es abierto en $X \times Y$. Luego, si existe $\langle z_1, z_2 \rangle \in U \cap V$, entonces $\langle z_1, z_2 \rangle \in U$ y $\langle z_1, z_2 \rangle \in V$, es decir $z_1 \in U'$ y $z_1 \in V'$ lo cual es una contradicción ya que U' y V' son disjuntos. Así tenemos que $U \cap V = \emptyset$ y por lo tanto $X \times Y$ es Hausdorff.

Ahora veamos que $X \times Y$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{n+m} : sea $\langle x_1, x_2 \rangle \in X \times Y$. Como X es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , existe una vecindad abierta

U' de x_1 y un abierto $V' \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi : U' \rightarrow V'$ es homeomorfismo. De la misma manera, como Y es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , existe una vecindad abierta W' de x_2 y un abierto $G' \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\psi : W' \rightarrow G'$ es homeomorfismo. Notamos que $U' \times W'$ y $V' \times G'$ son abiertos de $X \times Y$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ respectivamente, además $U' \times W'$ es vecindad abierta del punto $\langle x_1, x_2 \rangle$. Definimos $\sigma : U' \times W' \rightarrow V' \times G'$ como $\sigma(\langle y_1, y_2 \rangle) = \langle \varphi(y_1), \psi(y_2) \rangle$ para cada $\langle y_1, y_2 \rangle \in U' \times W'$. Del hecho que φ y ψ son homeomorfismos se sigue que σ es homeomorfismo. Así, tenemos que $X \times Y$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pero como los espacios $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y \mathbb{R}^{n+m} son homeomorfos, se sigue que $X \times Y$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{n+m} . Por lo tanto $X \times Y$ es una $(n + m)$ -variedad. □

Ejemplo 2.1.7. El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto es una 2-variedad.

Demostración. En el ejemplo 2.1.5 se probó que \mathbb{S}^1 es una 1-variedad. Entonces por el teorema 2.1.6 se sigue que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una 2-variedad. □

Otro ejemplo clásico de variedad (con frontera) es la **banda de Möbius**. Probaremos que la banda de Möbius menos su frontera es una 2-variedad, pero antes de esto, definiremos este espacio topológico y tomaremos en cuenta algunas consideraciones.

Consideramos a $\mathbb{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ como subespacio topológico. Definimos una relación \sim en \mathbb{I}^2 de la siguiente manera: diremos que dos elementos $\langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle \in \mathbb{I}^2$ están relacionados si y solo si

- (i) $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$, o
- (ii) $\{x_1, y_1\} = \{0, 1\} \wedge x_2 + y_2 = 1$.

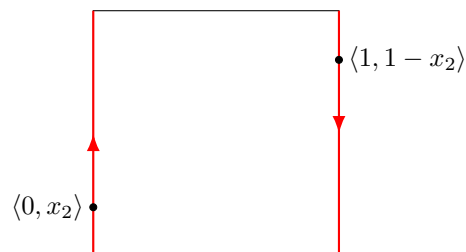


Figura 2.2: Relación de equivalencia para la banda de Möbius

Es fácil verificar que la relación \sim es de equivalencia. Denotaremos simplemente $[x]$ en lugar de $[x]_{\sim}$ a la clase de equivalencia de x . Ahora, hagamos $\mathbb{M} = \{[x] : x \in \mathbb{I}^2\}$ y definimos la función $\Pi : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ como $\Pi(x) = [x]$. El conjunto \mathbb{M} con la topología cociente es llamada **banda de Möbius**.

La función Π es una función cociente (por definición) y notemos que Π es sobreyectiva, es decir $\Pi[\mathbb{I}^2] = \mathbb{M}$. Ahora, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} L &= \Pi[\{0, 1\} \times [0, 1]] \\ F &= \Pi[[0, 1] \times \{0, 1\}]. \end{aligned}$$

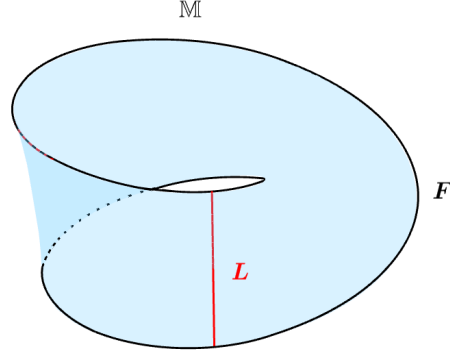


Figura 2.3: Banda de Möbius

En la figura 2.3 podemos ver geoméricamente a los conjuntos L y F los cuales son subconjuntos de \mathbb{M} . El conjunto F es llamado la frontera de \mathbb{M} . Antes de probar que $\mathbb{M} \setminus F$ es una 2-variedad, hacemos una última observación: sea $[\langle x_1, x_2 \rangle] \in \mathbb{M}$, entonces

1. si $[\langle x_1, x_2 \rangle] \in L$, entonces $\Pi^{-1}[[\langle x_1, x_2 \rangle]] = \{\langle x_1, x_2 \rangle, \langle 1 - x_1, 1 - x_2 \rangle\}$,
2. si $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin L$, entonces $\Pi^{-1}[[\langle x_1, x_2 \rangle]] = \{\langle x_1, x_2 \rangle\}$.

Ejemplo 2.1.8. La banda de Möbius \mathbb{M} menos su frontera, es decir $\mathbb{M} \setminus F$, es una 2-variedad.

Demostración. Veamos que $\mathbb{M} \setminus F$ es conexo: primero notemos que

$$\mathbb{I}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0, 1\}) = [0, 1] \times (0, 1).$$

Como $[0, 1]$ y $(0, 1)$ son conexos, por el teorema 1.2.3 se sigue que $[0, 1] \times (0, 1)$ es conexo, es decir, $\mathbb{I}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0, 1\})$ es conexo.

Por otro lado tenemos que Π es continua por ser función cociente. Entonces

$$\Pi|_{\mathbb{I}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0, 1\})} : \mathbb{I}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{M} \setminus F$$

es continua por la proposición 1.1.16. Además, como Π es sobreyectiva entonces $\Pi|_{\Pi^{-1}[\mathbb{M} \setminus F]}$ es sobreyectiva por la observación 1.0.1. Así, tenemos que $\mathbb{M} \setminus F$ es la imagen continua del conexo $\mathbb{I}^2 \setminus ([0, 1] \times \{0, 1\})$. Entonces, por el teorema 1.2.1 se sigue que $\mathbb{M} \setminus F$ es conexo.

Veamos que $\mathbb{M} \setminus F$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 : sea $[x] \in \mathbb{M} \setminus F$. Vamos a considerar dos casos:

Caso 1. $[x] \notin L$. Hagamos $U = \mathbb{M} \setminus (L \cup F)$. Veamos que $\Pi^{-1}[U] = (0, 1) \times (0, 1)$: sea $\langle x_1, x_2 \rangle \in \Pi^{-1}[U]$. Entonces $[\langle x_1, x_2 \rangle] = \Pi(\langle x_1, x_2 \rangle) \in U$, lo que implica que $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin L$ y $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin F$. Como $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin L$ se tiene que

$$0 < x_1 < 1. \quad (2.2)$$

Por otro lado, como $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin F$ se tiene que

$$0 < x_2 < 1. \quad (2.3)$$

Entonces de (2.2) y (2.3) se sigue que $x_1 \in (0, 1)$ y $x_2 \in (0, 1)$ es decir, $\langle x_1, x_2 \rangle \in (0, 1) \times (0, 1)$. Y por tanto $\Pi^{-1}[U] \subseteq (0, 1) \times (0, 1)$.

Ahora tomemos $\langle x_1, x_2 \rangle \in (0, 1) \times (0, 1)$. Como $0 < x_1 < 1$ entonces $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin L$. También como $0 < x_2 < 1$ se sigue que $[\langle x_1, x_2 \rangle] \notin F$. Por lo tanto $\Pi(\langle x_1, x_2 \rangle) = [\langle x_1, x_2 \rangle] \in \mathbb{M} \setminus (L \cup F) = U$. Entonces, como $\Pi(\langle x_1, x_2 \rangle) \in U$ se sigue que $\langle x_1, x_2 \rangle \in \Pi^{-1}[U]$ y por lo tanto $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \Pi^{-1}[U]$.

Entonces ya podemos concluir que $\Pi^{-1}[U] = (0, 1) \times (0, 1)$. Ahora hagamos

$$g = \Pi|_{\Pi^{-1}[U]} : \Pi^{-1}[U] \rightarrow U.$$

Veamos que g es un homeomorfismo: como Π es continua, por la proposición 1.1.16 se sigue que g también es continua. Además Π es sobreyectiva y, por la observación 1.0.1 se sigue que g también es sobreyectiva. Ahora veamos que g es inyectiva: tomemos $\langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle \in \Pi^{-1}[U]$ tal que $g(\langle x_1, x_2 \rangle) = g(\langle y_1, y_2 \rangle)$. Luego, como $[\langle x_1, x_2 \rangle]$ y $[\langle y_1, y_2 \rangle]$ no están en L se sigue que

$$\begin{aligned} \Pi^{-1}[[\langle x_1, x_2 \rangle]] &= \{\langle x_1, x_2 \rangle\} \\ \Pi^{-1}[[\langle y_1, y_2 \rangle]] &= \{\langle y_1, y_2 \rangle\}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\Pi^{-1}[\Pi(\langle x_1, x_2 \rangle)] = \Pi^{-1}[[\langle x_1, x_2 \rangle]] = \{\langle x_1, x_2 \rangle\} \quad (2.4)$$

$$\Pi^{-1}[\Pi(\langle y_1, y_2 \rangle)] = \Pi^{-1}[[\langle y_1, y_2 \rangle]] = \{\langle y_1, y_2 \rangle\}. \quad (2.5)$$

De (2.4), (2.5) y del hecho que $\Pi(\langle x_1, x_2 \rangle) = \Pi(\langle y_1, y_2 \rangle)$ se sigue que

$$\{\langle x_1, x_2 \rangle\} = \{\langle y_1, y_2 \rangle\}$$

lo que implica que $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle$. Y por tanto g es inyectiva.

Por otro lado, como U es abierto en \mathbb{M} y Π es función cociente y en particular una identificación por la observación 1.3.3, entonces por la proposición 1.3.4, se tiene que g es una identificación. Luego, si g^{-1} es la inversa de g entonces

$$g^{-1} \circ g = I_{\Pi^{-1}[U]}.$$

Como $I_{\Pi^{-1}[U]}$ es continua y g es una identificación, por el teorema 1.3.5 se sigue que g^{-1} es continua. Por lo tanto g es un homeomorfismo.

Caso 2. Si $[x] \in L \setminus F$. Sea $x = \langle x_1, x_2 \rangle$. Como $[x] \in L$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\Pi^{-1}([x]) = \{\langle 0, x_2 \rangle, \langle 1, 1 - x_2 \rangle\}$.

Sea

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{x_2}{2}, \frac{1 - x_2}{2} \right\}.$$

Notemos que, como $\epsilon < \frac{1}{2}$, se tiene que $B_\epsilon(\langle 0, x_2 \rangle) \cup B_\epsilon(\langle 1, 1 - x_2 \rangle) \subset \mathbb{R} \times (0, 1)$ y además

$$B_\epsilon(\langle 0, x_2 \rangle) \cap B_\epsilon(\langle 1, 1 - x_2 \rangle) = \emptyset.$$

Ahora hagamos

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{I}^2 \cap B_\epsilon(\langle 0, x_2 \rangle), \\ V_2 &= \mathbb{I}^2 \cap B_\epsilon(\langle 1, 1 - x_2 \rangle), \\ V &= V_1 \cup V_2, \end{aligned}$$

y definimos una función $\varphi : V \rightarrow B_\epsilon(\langle 0, 0 \rangle)$ como

$$\varphi(\langle y_1, y_2 \rangle) = \begin{cases} \langle y_1, y_2 - x_2 \rangle, & \text{si } \langle y_1, y_2 \rangle \in V_1, \\ \langle y_1 - 1, 1 - y_2 - x_2 \rangle, & \text{si } \langle y_1, y_2 \rangle \in V_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Véase la figura 2.4.

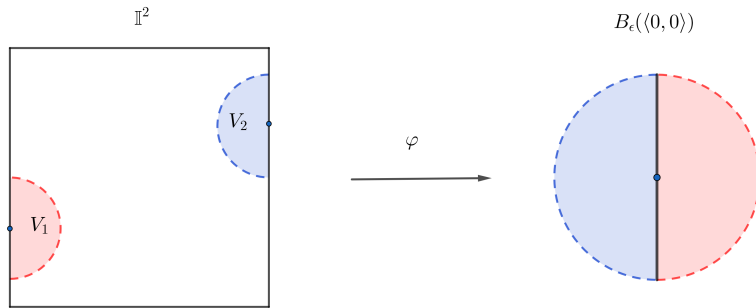


Figura 2.4: Dominio e imagen de φ

A continuación hacemos algunas observaciones acerca de la función φ :

Observación 2.1.9. La función φ es sobreyectiva, es decir, $\varphi[V] = B_\epsilon(\langle 0, 0 \rangle)$.

Observación 2.1.10. Si $U \subset V$ es un abierto tal que $U = \Pi^{-1}[\Pi[U]]$, entonces $\varphi[U]$ es abierto en $B_\epsilon(\langle 0, 0 \rangle)$.

La observación anterior se debe al hecho que los abiertos U en V de la forma $U = \Pi^{-1}[\Pi[U]]$ no intersectan al conjunto

$$(\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1]).$$

Observación 2.1.11. La función φ es continua.

Demostración. Como el conjunto V_1 es abierto en \mathbb{I}^2 y $V_1 = V_1 \cap V$, entonces V_1 es abierto en V y por lo tanto $V \setminus V_1$ es cerrado en V . Pero como $V \setminus V_1 = V_2$, se sigue que V_2 es cerrado en V . Por un argumento similar al anterior se llega a que V_1 es cerrado en V . Luego, notemos que para el conjunto V_1 la función φ hace una traslación de los puntos. Y como las traslaciones son continuas, se sigue que $\varphi \upharpoonright V_1$ es continua. Para el conjunto V_2 la función φ hace una traslación y una reflexión de los puntos. Y como las traslaciones y reflexiones son continuas, se sigue que $\varphi \upharpoonright V_2$ es continua. Además, por vacuidad se tiene que $\varphi \upharpoonright V_1(x) = \varphi \upharpoonright V_2(x)$ para cada $x \in V_1 \cap V_2$ ya que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Entonces, por teorema 1.1.17 (lema de pegado) se sigue que φ es continua. \square

Lo que haremos ahora será utilizar el teorema 1.3.6 para construir un homeomorfismo entre el abierto $B_\epsilon(\langle 0, 0 \rangle)$ de \mathbb{R}^2 y un abierto alrededor de $[x]$.

Notemos que V es abierto en \mathbb{I}^2 y además es saturado, es decir, $V = \Pi^{-1}[\Pi[V]]$. Entonces por el teorema 1.3.4, se sigue que $\Pi \upharpoonright V$ es una identificación. Veamos que se cumple la hipótesis del teorema 1.3.6. Sean $y = \langle y_1, y_2 \rangle, z = \langle z_1, z_2 \rangle \in V$ tales que $\Pi \upharpoonright V(y) = \Pi \upharpoonright V(z)$, es decir $[y] = [z]$. Como la clase de equivalencia de y es igual a la clase de equivalencia de z , entonces $y \sim z$ y debe cumplirse una de las siguientes condiciones (por definición de \sim):

- (i) $y_1 = z_1 \wedge y_2 = z_2$, o
- (ii) $\{y_1, z_1\} = \{0, 1\} \wedge y_2 + z_2 = 1$.

Si se cumple la condición (i), es decir, $y = z$, evidentemente $\varphi(y) = \varphi(z)$. Supongamos que se cumple la condición (ii). Si $y_1 = 0$, entonces $z_1 = 1$ y se sigue que $y \in V_1$ y $z \in V_2$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \langle y_1, y_2 - x_2 \rangle \\ &= \langle 0, y_2 - x_2 \rangle \\ &= \langle 1 - 1, (1 - z_2) - x_2 \rangle \\ &= \langle z_1 - 1, 1 - z_2 - x_2 \rangle \\ &= \varphi(z), \end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi(y) = \varphi(z)$. Para el caso $y_1 = 0$ y $z_1 = 1$, de manera similar al caso anterior se llega a que $\varphi(y) = \varphi(z)$. Así, hemos probado que para todo $y, z \in V$ tal que $\Pi \upharpoonright V(y) = \Pi \upharpoonright V(z)$, implica que $\varphi(y) = \varphi(z)$. Entonces, por el teorema 1.3.6 (a), existe una función continua $H : \Pi[V] \rightarrow B_\epsilon(\langle 0, 0 \rangle)$ tal que $H \circ \Pi \upharpoonright V = \varphi$. Probaremos que la función H es un homeomorfismo. Primero probemos que H es biyectiva: sean $[y], [z] \in \Pi[V]$ con $y = \langle y_1, y_2 \rangle, z = \langle z_1, z_2 \rangle \in V$ tal que $H([y]) = H([z])$. Entonces

$$\begin{aligned} H([y]) = H([z]) &\iff H(\Pi \upharpoonright V(y)) = H(\Pi \upharpoonright V(z)) \\ &\iff (H \circ \Pi \upharpoonright V)(y) = (H \circ \Pi \upharpoonright V)(z) \\ &\iff \varphi(y) = \varphi(z). \end{aligned}$$

Ahora consideremos los subconjuntos $A \subset V_1$ y $B \subset V_2$ definidos como

$$\begin{aligned} A &= \{ \langle y_1, y_2 \rangle \in V_1 : y_1 = 0 \} \\ B &= \{ \langle y_1, y_2 \rangle \in V_2 : y_1 = 1 \}. \end{aligned}$$

Por definición de la función φ , se tiene que $\varphi(y) = \varphi(z)$ si y solo si

- (1) $y = z$, o
- (2) $y \in A, z \in B$ y $z_2 = 1 - y_2$, o
- (3) $z \in A, y \in B$ y $y_2 = 1 - z_2$,

Si se cumple la condición (1), es decir $y = z$, evidentemente $[y] = [z]$. Ahora notemos que cualquiera de las dos condiciones (2) y (3) es equivalente a que $y \sim z$ y $y \neq z$. Entonces si se cumple la condición (2) o (3) tenemos que

$$[y] = \{y, z\} = [z],$$

y se sigue que $[y] = [z]$. Y por lo tanto la función H es inyectiva.

Ahora, sea $y \in B_\epsilon(\langle 0, 0 \rangle)$. Por la observación 2.1.9 se tiene que φ es sobreyectiva, entonces existe $z \in V$ tal que $\varphi(z) = y$. Luego, vemos que

$$H([z]) = H(\Pi \upharpoonright V(z)) = (H \circ \Pi \upharpoonright V)(z) = \varphi(z) = y.$$

Así, tenemos que H es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. Ahora probemos que H es abierta: sea K un abierto en $\Pi[V]$. Como $\Pi \upharpoonright V$ es una identificación se sigue que $\Pi \upharpoonright V^{-1}[K]$ es abierto en V . Sea $G = \Pi \upharpoonright V^{-1}[K]$. Notemos que G es abierto saturado. Luego, por la observación 2.1.10 se tiene que $\varphi[G]$ es abierto. Así, por el teorema 1.3.6 (b) se sigue que H es abierta. Y por lo tanto H es un homeomorfismo.

De esta manera, para cualquier $x \in \mathbb{M} \setminus F$ pudimos encontrar una vecindad abierta de x homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Entonces ya podemos concluir que $\mathbb{M} \setminus F$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Veamos que $\mathbb{M} \setminus F$ es Hausdorff: sean $[x], [y] \in \mathbb{M} \setminus F$ con $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ y $y = \langle y_1, y_2 \rangle$ tales que $[x] \neq [y]$. Solo usaremos figuras para mostrar como deben ser las vecindades abiertas de los puntos x y y , ya que son muchos casos para analizar y además, en cada caso habría que hacer muchos detalles.

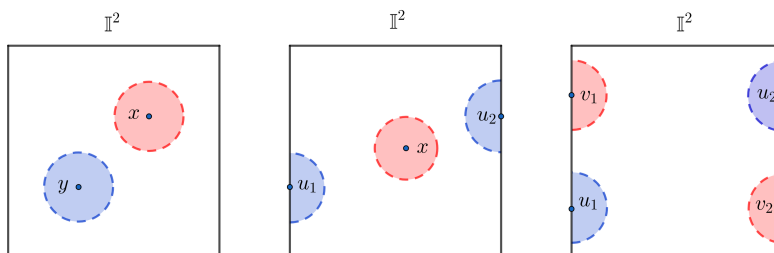


Figura 2.5: Imagen inversa de $[x]$ y $[y]$

En el primer cuadro de la izquierda de la figura 2.5, se muestran las imágenes inversas de $[x]$ y $[y]$ cuando $[x], [y] \notin L$. En el cuadro de en medio, se muestran las imágenes inversas de $[x]$ y $[y]$ cuando $[x] \notin L$ y $[y] \in L$, donde $\Pi^{-1}[[y]] = \{u_1, u_2\}$, $u_1 = \langle 0, y_2 \rangle$ y $u_2 = \langle 1, 1 - y_2 \rangle$. Y en el último cuadro (de izquierda a derecha), se muestran las imágenes inversas de $[x]$ y $[y]$ cuando $[x], [y] \in L$, donde $\Pi^{-1}[[y]] = \{u_1, u_2\}$, $\Pi^{-1}[[x]] = \{v_1, v_2\}$,

$$\begin{aligned} u_1 &= \langle 0, y_2 \rangle, \quad u_2 = \langle 1, 1 - y_2 \rangle, \\ v_1 &= \langle 0, x_2 \rangle \text{ y } v_2 = \langle 1, 1 - x_2 \rangle. \end{aligned}$$

En los 3 casos, notemos que basta elegir el ϵ de manera adecuada para que los abiertos en \mathbb{I}^2 (los discos y semidiscos en rojo y azul) que contienen a los puntos no se intersecten. Una vez elegido el ϵ adecuado, como Π es una identificación, las imágenes de estos abiertos también son abiertos en $\mathbb{M} \setminus F$. Más aún, son abiertos disjuntos en $\mathbb{M} \setminus F$. De las observaciones anteriores podemos concluir que $\mathbb{M} \setminus F$ es Hausdorff. Y por lo tanto $\mathbb{M} \setminus F$ es una 2-variedad. \square

En el ejemplo anterior, hablamos de la **frontera de una variedad**, pero solo tenemos la idea intuitiva de lo que significa. Daremos la definición de **frontera de una variedad** y para ello, definiremos **variedad con frontera**, pero cabe aclarar que solo es con la intención de dejar claro que tiene un significado diferente a la definición de frontera de un conjunto dada en 1.1.6 (página 4).

Definición 2.1.12. Sea X un espacio topológico X y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que X es una **n -variedad con frontera** si X es conexo, Hausdorff y para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta $U \subset X$ de x , un abierto

$$V \subset \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$. Y se dice que un elemento $x \in X$ está en la frontera de X si

$$\varphi(x) \in \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

El conjunto de puntos frontera de una variedad X se suele denotar como ∂X .

Retomando la banda de Möbius \mathbb{M} del ejemplo anterior, es importante mencionar qué sucede si tomamos un elemento en su frontera. Como veremos a continuación, cualquier elemento en F no tiene una vecindad que sea homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 . Sea $[x] \in F$ y U una vecindad abierta de $[x]$ en \mathbb{M} . Consideremos dos casos:

Caso 1. $[x] \notin F \cap L$. Siempre podemos encontrar un abierto U' tal que $[x] \in U' \subset U$ y que su imagen inversa bajo Π es de tipo I o de tipo II como se muestra en la figura 2.6.

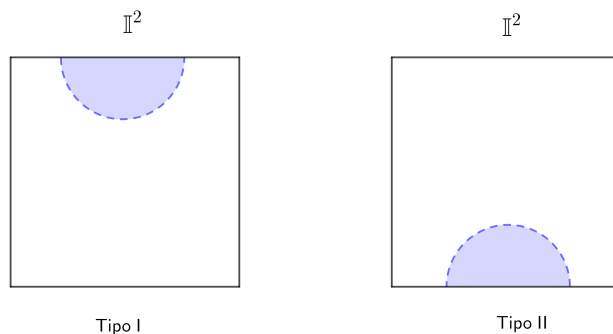


Figura 2.6: Imagen inversa de U'

Sea K un abierto de \mathbb{I}^2 de tipo I (o tipo II) tal que $K = \Pi^{-1}[U']$. Hagamos $g = \Pi \upharpoonright K$. Notemos que $g : K \rightarrow U'$ es un homeomorfismo. Ahora supongamos que existe un abierto V en \mathbb{R}^2 (con la topología euclidiana) y un homeomorfismo $\psi : U \rightarrow V$. Hagamos $h = \psi \upharpoonright U'$. Entonces $h : U' \rightarrow h[U']$ también es un homeomorfismo. Así, tenemos que

$$h \circ g : K \rightarrow h[U']$$

es un homeomorfismo. Entonces la función

$$f = g^{-1} \circ h^{-1} : h[U'] \rightarrow K,$$

también es un homeomorfismo. Luego, como $h[U']$ es abierto en \mathbb{R}^2 y f es biyectiva (en particular inyectiva), por el teorema de la invarianza del dominio de Brouwer (teorema 1.1.22), tenemos que $f[h[U']]$ es abierto en \mathbb{R}^2 , lo cual es una contradicción, ya que $f[h[U']] = K$, el cual no es abierto en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto no

puede existir el homeomorfismo ψ .

Caso 2. $[x] \in F \cap L$. Siempre podemos encontrar un abierto U' tal que $[x] \in U' \subset U$ y que su imagen inversa bajo Π es de tipo III o de tipo IV como se muestra en la figura 2.7.

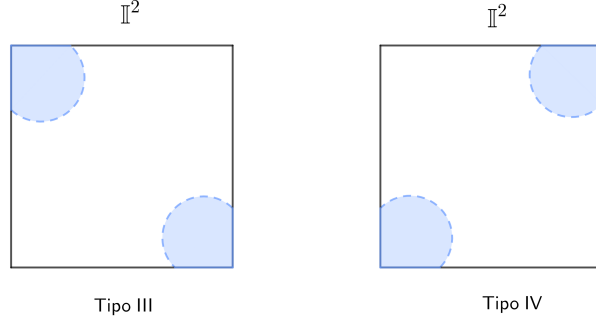


Figura 2.7: Imagen inversa de U'

Sea K_1 un abierto de \mathbb{I}^2 de tipo III (o tipo IV) como en la figura 2.7 y sea K_3 un abierto de tipo I (o tipo II) como en la figura 2.6. Podemos definir una función

$$\psi : K_1 \rightarrow K_3$$

similar a la función φ dada en la página 28 (ecuación 2.6) tal que cumpla con las hipótesis del teorema 1.1.22. Y así, encontrar una función h tal que $h : \Pi[U'] \rightarrow K_3$ sea un homeomorfismo. Lo que queremos decir, es que este caso es equivalente al anterior, ya que un abierto de tipo III o tipo IV es homeomorfo a un abierto de tipo I o II de la figura 2.6.

Entonces \mathbb{M} no es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 en los puntos de su frontera F .

2.2. El rayo largo

Consideremos el espacio $\mathbb{L}^{\geq 0} = \omega_1 \times [0, 1)$, donde ω_1 está equipado con la topología de orden y el $[0, 1)$ tiene la topología de subespacio de \mathbb{R} . Definimos el orden $<$ en $\mathbb{L}^{\geq 0}$ de la siguiente manera: dados $\langle \alpha_1, t_1 \rangle, \langle \alpha_2, t_2 \rangle \in \mathbb{L}^{\geq 0}$, decimos que $\langle \alpha_1, t_1 \rangle < \langle \alpha_2, t_2 \rangle$ si y sólo si

$$\alpha_1 < \alpha_2 \text{ ó } (\alpha_1 = \alpha_2 \text{ y } t_1 < t_2).$$

Este orden es llamado **orden lexicográfico**. De ahora en adelante vamos a pensar al espacio $\mathbb{L}^{\geq 0}$ como un espacio topológico con la topología del orden

(lexicográfico). Al espacio topológico $\mathbb{L}^{\geq 0}$ se le conoce como **rayo largo cerrado**. Ahora, sea $\langle \alpha, t \rangle \in \mathbb{L}^{\geq 0}$. Definimos una colección $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ de subconjuntos de $\mathbb{L}^{\geq 0}$ alrededor de $\langle \alpha, t \rangle$ de la siguiente manera:

- (1) Si $\langle \alpha, t \rangle = \langle 0, 0 \rangle$, los elementos de $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ son de la forma

$$[\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, s \rangle) = \{0\} \times [0, s),$$

donde $0 < s < 1$.

- (2) Si $0 < t < 1$, los elementos de $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ son de la forma

$$(\langle \alpha, r \rangle, \langle \alpha, s \rangle) = \{\alpha\} \times (r, s),$$

donde $0 < r < t < s < 1$.

- (3) Si $\alpha = \beta + 1$ y $t = 0$, los elementos de $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ son de la forma

$$(\langle \beta, r \rangle, \langle \alpha, s \rangle) = (\{\beta\} \times (r, 1)) \cup (\{\alpha\} \times [0, s)),$$

donde $0 < r < 1$ y $0 < s < 1$.

- (4) Si α es límite y $t = 0$, los elementos de $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ son de la forma

$$\begin{aligned} (\langle \beta, 0 \rangle, \langle \alpha, s \rangle) &= (\{\beta\} \times (0, 1)) \cup \left(\bigcup \{ \{\gamma\} \times [0, 1) : \beta < \gamma < \alpha \} \right) \\ &\cup (\{\alpha\} \times [0, s)), \end{aligned}$$

donde $0 < s < 1$ y $\beta < \alpha$.

A los elementos de $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ de la definición (1), los llamaremos de tipo I, a los de la definición (2) de tipo II y así sucesivamente. Ahora hagamos algunas observaciones acerca de la colección $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$: sea $U \in \mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$. Como $\langle 0, 0 \rangle$ es mínimo en $\mathbb{L}^{\geq 0}$, si U es de tipo I, entonces por la observación 1.4.11, se tiene que U es un abierto. Si U es de tipo II, es decir $U = (\langle \alpha, r \rangle, \langle \alpha, s \rangle)$, donde $0 < r < t < s < 1$, entonces

$$U = (\leftarrow, \langle \alpha, s \rangle) \cap (\langle \alpha, r \rangle, \rightarrow).$$

Y por lo tanto U es abierto. Si U es de tipo III o tipo IV, de manera similar al caso anterior se justifica que U es abierto. Así, tenemos que los elementos de $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ son abiertos de $\mathbb{L}^{\geq 0}$, más aún, $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ es una base local para $\langle \alpha, t \rangle$. Éste resultado lo enunciamos a continuación pero sin demostración ya que después de un momento de reflexión esto resulta ser muy claro.

Lema 2.2.1. *Sea $\langle \alpha, t \rangle \in \mathbb{L}^{\geq 0}$. La colección $\mathcal{B}_{\langle \alpha, t \rangle}$ definida anteriormente es una base local para $\langle \alpha, t \rangle$.*

Lo que hemos hecho hasta ahora es conocer los tipos de vecindades abiertas de un punto dado en $\mathbb{L}^{\geq 0}$. Esto nos ayudará para probar una de las propiedades de $\mathbb{L}^{\geq 0}$ para que sea una 1-variedad, que es uno de nuestros objetivos

principales de este capítulo. Entonces, a partir de ahora probaremos que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es una 1-variedad y para ello comenzaremos probando un lema que enunciamos a continuación.

Lema 2.2.2. *Para cada $\alpha \in \omega_1$ con $0 < \alpha$, existe un homeomorfismo creciente $h : [0, 1] \rightarrow [\langle 0, 0 \rangle, \langle \alpha, 0 \rangle]$ tal que*

$$h(0) = \langle 0, 0 \rangle \text{ y } h(1) = \langle \alpha, 0 \rangle. \quad (2.7)$$

Demostración. Sea $\alpha \in \omega_1$ con $0 < \alpha$. Haremos la prueba por inducción sobre α :

Caso base. $\alpha = 1$: definimos $h : [0, 1] \rightarrow [\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle]$ como

$$h(t) = \begin{cases} \langle 0, t \rangle, & \text{si } 0 \leq t < 1, \text{ y} \\ \langle 1, 0 \rangle, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Por definición de h tenemos que $h(0) = \langle 0, 0 \rangle$ y $h(1) = \langle \alpha, 0 \rangle$. Además notemos que h es biyectiva y creciente. Ahora tomemos un abierto V en $[\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle]$. Si V es de tipo I, es decir $V = [\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, s \rangle]$ con $0 < s < 1$, tenemos que

$$h^{-1}[V] = [0, s] = (-1, s) \cap [0, 1],$$

el cual es abierto en $[0, 1]$. Si V es de tipo II, es decir $V = \{0\} \times (r, s)$ con $0 < r < s < 1$, tenemos que

$$h^{-1}[V] = (r, s) = (r, s) \cap [0, 1],$$

el cual es abierto en $[0, 1]$. Y si V es de tipo III, es decir $V = (\{0\} \times (r, 1)) \cup \{\langle 1, 0 \rangle\}$ con $0 < r < 1$, tenemos que

$$h^{-1}[V] = (r, 1] = (r, 2) \cap [0, 1],$$

el cual es abierto en $[0, 1]$. Así, tenemos que para cualquier abierto V en el conjunto $[\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle]$ se tiene que $h^{-1}[V]$ es abierto en $[0, 1]$, lo cual implica que h es continua. Por otro lado, como $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es linealmente ordenado, por el lema 1.4.12 se tiene que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es Hausdorff. Luego, como $[\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle]$ es subespacio de $\mathbb{L}^{\geq 0}$ se sigue que $[\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle]$ es Hausdorff. Y como $[0, 1]$ es compacto, por el lema 1.1.25 se sigue que h es un homeomorfismo y cumple con la condición 2.7.

Para el paso inductivo vamos a considerar dos casos:

Caso 1. α es sucesor. Sea $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha = \beta + 1$. Supongamos que existe un homeomorfismo creciente $\varphi : [0, 1] \rightarrow [\langle 0, 0 \rangle, \langle \beta, 0 \rangle]$ con $\varphi(0) = \langle 0, 0 \rangle$ y $\varphi(1) = \langle \beta, 0 \rangle$. Luego, si definimos $\rho : [0, 1] \rightarrow [\langle \beta, 0 \rangle, \langle \alpha, 0 \rangle]$ como

$$\rho(t) = \begin{cases} \langle \beta, t \rangle, & \text{si } 0 \leq t < 1, \text{ y} \\ \langle \alpha, 0 \rangle, & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

de manera similar a la del caso base, se prueba que ρ es un homeomorfismo creciente tal que $\rho(0) = \langle \beta, 0 \rangle$ y $\rho(1) = \langle \alpha, 0 \rangle$. Ahora definimos $h : [0, 1] \rightarrow [(0, 0), \langle \alpha, 0 \rangle]$ como

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ y} \\ \rho(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que si $h(t_1) = \varphi(2t_1)$ y $h(t_1) = \rho(2t_1 - 1)$, por definición de h se tiene que $t_1 = \frac{1}{2}$. Luego, vemos que

$$\varphi(2t)|_{t=\frac{1}{2}} = \langle \beta, 0 \rangle = \rho(2t - 1)|_{t=\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Por lo que h es función. Además h esta bien definida, ya que en $t_0 = \frac{1}{2}$ las dos opciones nos dan el mismo resultado, como se muestra en 2.8.

Hagamos otras observaciones acerca de h : es biyectiva y además es creciente, ya que tanto φ como ρ son crecientes. Luego, tenemos que la función $\varphi(2t)$ es continua, ya que es la composición de la función φ con la función que manda $t \mapsto 2t$, la cual es continua en $[0, \frac{1}{2}]$. También la función $\rho(2t - 1)$ es continua, ya que es la composición de la función ρ con la función que manda $t \mapsto 2t - 1$, la cual es continua en $[\frac{1}{2}, 1]$. Ahora notemos que los conjuntos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ son cerrados en $[0, 1]$ y además $[0, \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2}, 1] = \{\frac{1}{2}\}$. Luego, como $\varphi(2t)|_{t=\frac{1}{2}} = \rho(2t - 1)|_{t=\frac{1}{2}}$ por 2.8, el teorema 1.1.17 (lema de pegado) implica que h es continua.

Por otro lado, como $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es linealmente ordenado, por el lema 1.4.12 se tiene que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es Hausdorff. Entonces el subespacio $[(0, 0), \langle \alpha, 0 \rangle]$ también es Hausdorff. Y como $[0, 1]$ es compacto, por el teorema 1.1.25 se sigue que h es un homeomorfismo. Por último vemos que

$$\begin{aligned} h(0) &= \varphi(2 \cdot 0) = \varphi(0) = \langle 0, 0 \rangle \\ h(1) &= \rho(2 \cdot 1 - 1) = \rho(1) = \langle \alpha, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Y por tanto h también cumple la condición 2.7.

Caso 2. α es límite. Supongamos que existe un homeomorfismo creciente $h_\lambda : [0, 1] \rightarrow [(0, 0), \langle \lambda, 0 \rangle]$ tal que $h_\lambda(0) = \langle 0, 0 \rangle$ y $h_\lambda(1) = \langle \lambda, 0 \rangle$ para cada $\lambda < \alpha$. Como α es límite, por la proposición 1.4.9, existe una sucesión creciente $\{\alpha_n\}_{n \in \omega}$ cuyo límite es α . Podemos suponer que $\alpha_0 = 0$.

Ahora, notemos que para cada homeomorfismo creciente $h_{\alpha_n} : [0, 1] \rightarrow [(0, 0), \langle \alpha_n, 0 \rangle]$ con $n \in \omega \setminus \{0\}$, existe $t_{\alpha_n} \in [0, 1]$ tal que

$$h_{\alpha_n}[[t_{\alpha_n}, 1]] = [\langle \alpha_{n-1}, 0 \rangle, \langle \alpha_n, 0 \rangle].$$

Y por el teorema 1.1.20 se sigue que

$$h_{\alpha_n} \upharpoonright [t_{\alpha_n}, 1] : [t_{\alpha_n}, 1] \rightarrow [\langle \alpha_{n-1}, 0 \rangle, \langle \alpha_n, 0 \rangle]$$

es un homeomorfismo. Hagamos $g_{\alpha_n} = h_{\alpha_n} \upharpoonright [t_{\alpha_n}, 1]$. Notemos que por definición g_{α_n} es creciente y

$$g_{\alpha_n}(t_{\alpha_n}) = \langle \alpha_{n-1}, 0 \rangle \quad \text{y} \quad g_{\alpha_n}(1) = \langle \alpha_n, 0 \rangle.$$

Por otro lado, del teorema 1.1.21 se tiene que existe un homeomorfismo creciente

$$f_n : \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right] \rightarrow [t_{\alpha_n}, 1]$$

tal que

$$f_n \left(1 - \frac{1}{n} \right) = t_{\alpha_n} \quad \text{y} \quad f_n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Así, se tiene que la función

$$g_{\alpha_n} \circ f_n : \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right] \rightarrow [\langle \alpha_{n-1}, 0 \rangle, \langle \alpha_n, 0 \rangle]$$

es un homeomorfismo creciente para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Ahora observemos que

$$[0, 1] = \left(\bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right] \right) \cup \{1\}.$$

Entonces definimos $h : [0, 1] \rightarrow [\langle 0, 0 \rangle, \langle \alpha, 0 \rangle]$ como

$$h(x) = \begin{cases} (g_{\alpha_n} \circ f_n)(x), & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ con } 0 < n < \omega, \text{ y} \\ \langle \alpha, 0 \rangle, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Notemos que si $h(x_1) = (g_{\alpha_n} \circ f_n)(x_1)$ y $h(x_1) = (g_{\alpha_m} \circ f_m)(x_1)$, por definición de h se tiene que

- (1) $\left[\left(x = 1 - \frac{1}{n} \right) \text{ y } (n = m + 1 \text{ o } m = n + 1) \right]$, o
- (2) $\left(x = 1 - \frac{1}{n+1} \right) \text{ y } (n = m + 1 \text{ o } m = n + 1)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x = 1 - \frac{1}{n+1}$ y $m = n + 1$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} (g_{\alpha_n} \circ f_n) \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) &= g_{\alpha_n} \left(f_n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right) \\ &= g_{\alpha_n}(1) \\ &= \langle \alpha_n, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
 (g_{\alpha_m} \circ f_m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) &= g_{\alpha_m} \left(f_m \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \\
 &= g_{\alpha_m}(t_{\alpha_m}) \\
 &= \langle \alpha_{m-1}, 0 \rangle. \\
 &= \langle \alpha_n, 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$(g_{\alpha_m} \circ f_m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) = (g_{\alpha_n} \circ f_n) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \quad (2.9)$$

Por lo que h es función. Y además esta bien definida, ya que la función h evaluada en los extremos de los intervalos manda a un solo valor.

Probemos que h es biyectiva y creciente: notemos que por definición, h es sobreyectiva en $[0, 1]$ e inyectiva en $[0, 1)$. Luego, si tomamos $x \in [0, 1)$ y $y = 1$, tenemos que existe $m \in \omega \setminus \{0\}$ tal que

$$1 - \frac{1}{m} \leq x \leq 1 - \frac{1}{m+1},$$

lo cual implica que

$$\langle \alpha_{m-1}, 0 \rangle \leq h(x) \leq \langle \alpha_m, 0 \rangle < \langle \alpha, 0 \rangle = h(y). \quad (2.10)$$

Así, tenemos que $h(x) \neq h(y)$ y se sigue que h es inyectiva en $[0, 1]$ y por lo tanto biyectiva en $[0, 1]$. Notemos que por definición, h es creciente en $[0, 1)$. Ahora, si tomamos $x \in [0, 1)$ y $y = 1$, de la desigualdad 2.10 se sigue que $h(x) < h(y)$ y por lo tanto h es creciente en $[0, 1]$.

Ahora probaremos que h es continua, y para esto, vamos a probar dos cosas; la continuidad de h en $[0, 1)$ y la continuidad puntual de h en 1.

Veamos que h es continua en $[0, 1)$: hagamos

$$\mathcal{F} = \{F_n : n \in \omega \setminus \{0\}\} \quad \text{donde} \quad F_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right].$$

Entonces

$$[0, 1) = \bigcup \mathcal{F},$$

es decir, \mathcal{F} es una cubierta para $[0, 1)$ y además los elementos de \mathcal{F} son cerrados en $[0, 1)$. Ahora veamos que \mathcal{F} es una familia localmente finita en $[0, 1)$. Sea $x \in [0, 1)$. Analizaremos 4 casos y, en cada caso, elegiremos una vecindad adecuada V_x de x que intersecta solo una cantidad finita de F_n .

- Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$. Elegimos

$$V_x = F_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Y en este caso, V_x interseca a 2 elementos de \mathcal{F} : a F_1 y F_2 .

- Si $x = \frac{1}{2}$. Elegimos

$$V_x = F_1 \cup F_2 = \left[0, \frac{2}{3}\right].$$

Y en este caso, V_x interseca a 3 elementos de \mathcal{F} : a F_1 , F_2 y F_3 .

- Si $1 - \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n+1}$, con $1 < n$. Elegimos $V_x = F_n$ y en este caso V_x interseca a 3 elementos de \mathcal{F} : a F_{n-1} , F_n y F_{n+1} .

- Si $x = 1 - \frac{1}{n+1}$, con $1 < n$. Elegimos $V_x = F_n \cup F_{n+1}$ y en este caso V_x interseca a 4 elementos de \mathcal{F} : a F_{n-1} , F_n , F_{n+1} y F_{n+2} .

Por lo tanto \mathcal{F} es una familia localmente finita en $[0, 1)$. Hagamos otra observación: sean $n, m \in \omega \setminus \{0\}$ con $n \neq m$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n < m$. Entonces tenemos que

$$F_n \cap F_m = \begin{cases} \left\{1 - \frac{1}{m}\right\}, & \text{si } m = n + 1, \text{ y} \\ \emptyset, & \text{si } n + 1 < m. \end{cases}$$

Además ya hemos visto (en 2.9) que las funciones son iguales en el punto de intersección $1 - \frac{1}{m}$ con $m = n + 1$. Y si $F_n \cap F_m = \emptyset$, por vacuidad las funciones coinciden en la intersección. Así, tenemos que

$$(g_{\alpha_n} \circ f_n) \upharpoonright F_n \cap F_m = (g_{\alpha_m} \circ f_m) \upharpoonright F_n \cap F_m$$

para cada $n, m \in \omega \setminus \{0\}$. Por lo tanto, del teorema 1.1.18 se sigue que $h \upharpoonright [0, 1)$ es continua. Y como $[0, 1)$ es abierto en $[0, 1]$, de la observación 1.1.14 se sigue que h es continua en cada punto de $[0, 1)$.

Veamos que h es continua en 1: sea V una vecindad abierta básica de $h(1) = \langle \alpha, 0 \rangle$ en $[(0, 0), \langle \alpha, 0 \rangle]$. Notemos que existe una vecindad abierta básica U de tipo IV en $\mathbb{L}^{\geq 0}$ tal que

$$\begin{aligned} V &= U \cap [(0, 0), \langle \alpha, 0 \rangle] \\ &= (\{\beta\} \times (0, 1)) \cup \left(\bigcup \{ \{\gamma\} \times [0, 1) : \beta < \gamma < \alpha \} \right) \cup \{ \langle \alpha, 0 \rangle \}, \end{aligned}$$

donde $\beta < \alpha$. Como $\beta < \alpha$, existe $\alpha_m \in \{\alpha_n\}_{n \in \omega \setminus \{0\}}$ tal que $\beta < \alpha_m < \alpha$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
h^{-1}(\langle \alpha_m, 0 \rangle) &= (f_m^{-1} \circ g_{\alpha_m}^{-1})(\langle \alpha_m, 0 \rangle) \\
&= f_m^{-1}(g_{\alpha_m}^{-1}(\langle \alpha_m, 0 \rangle)) \\
&= f_m^{-1}(1) \\
&= 1 - \frac{1}{m+1}.
\end{aligned}$$

Entonces tomamos $U = \left(1 - \frac{1}{m+1}, 1\right]$. Luego, por la elección de U , se tiene que es vecindad abierta de 1 en $[0, 1]$ y además

$$\begin{aligned}
h[U] &= (\{\alpha_m\} \times (0, 1)) \cup \left(\bigcup \{\{\gamma\} \times [0, 1) : \alpha_m < \gamma < \alpha\}\right) \cup \{\langle \alpha, 0 \rangle\} \\
&\subset V.
\end{aligned}$$

De este modo hemos probado que h es continua en 1. Y entonces ya podemos concluir que h es continua en $[0, 1]$. Luego, como $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es linealmente ordenado, por el lema 1.4.12 se sigue que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es Hausdorff y como $[\langle 0, 0 \rangle, \langle \alpha, 0 \rangle]$ es subespacio de $\mathbb{L}^{\geq 0}$, se sigue que $[\langle 0, 0 \rangle, \langle \alpha, 0 \rangle]$ es Hausdorff. Por otro lado, tenemos que h es continua en $[0, 1]$, biyectiva y como $[0, 1]$ es compacto, por el teorema 1.1.25 se sigue que h es un homeomorfismo. Solo falta probar que h cumple la condición 2.7. Notemos que

$$h(0) = (g_{\alpha_1} \circ f_1)(0) = g_{\alpha_1}(f_1(0)) = g_{\alpha_1}(t_{\alpha_1}) = \langle \alpha_0, 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle.$$

Y por definición de h se tiene que $h(1) = \langle \alpha, 0 \rangle$. Por lo tanto h cumple con la condición 2.7 como se quería probar. Y esto termina la prueba del lema. \square

Con el lema anterior, ya estamos listos para probar que el rayo largo cerrado menos su frontera es una 1-variedad, pero antes, hagamos algunos comentarios. A partir de ahora, cada elemento $\langle \alpha, t \rangle \in \mathbb{L}^{\geq 0}$ lo denotaremos como $\alpha + t$ donde $\alpha \in \omega_1$ y $t \in [0, 1)$.

Cualquier número real no negativo $x \in [0, \infty)$ se puede representar como $x = m + t$ donde $m \in \omega$ y $t \in [0, 1)$, de manera única. Entonces, si tomamos $\alpha \in \omega_1$ podemos definir

$$\alpha + x = (\alpha + m) + t,$$

donde $\alpha + m \in \omega_1$ es el m -ésimo sucesor de α . Con esta notación, podemos dar un encaje $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{L}^{\geq 0}$ como $\varphi(x) = 0 + x$. De esta manera, $\mathbb{L}^{\geq 0}$ tiene un segmento inicial isomorfo a los reales no negativos $[0, \infty)$.

Ejemplo 2.2.3. *El espacio $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es una 1-variedad.*

Demostración. Como $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es linealmente ordenado, del lema 1.4.12 se sigue que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es Hausdorff.

Veamos que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R} : sea $\alpha + t \in \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ con $\alpha \in \omega_1$ y $t \in [0, 1)$. Por el lema anterior, existe un homeomorfismo creciente

$$h : [0, \alpha + 1] \rightarrow [0, 1]$$

tal que

$$h(0) = 0 \quad \text{y} \quad h(\alpha + 1) = 1.$$

Luego, notemos que, como h es creciente, se tiene que $h[(0, \alpha + 1)] = (0, 1)$. Entonces, por el teorema 1.1.20, la función

$$h \upharpoonright (0, \alpha + 1) : (0, \alpha + 1) \rightarrow (0, 1)$$

es un homeomorfismo y además el subconjunto $(0, \alpha + 1)$ es vecindad abierta de $\alpha + t$ en $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R} .

Por último, veamos que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es conexo: veamos que para cualesquiera dos elementos distintos de $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$, existe un subconjunto conexo que los contiene. Sean $\alpha + s, \beta + t \in \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. Consideremos el caso en que $\alpha + s \neq \beta + t$, ya que si $\alpha + s = \beta + t$ simplemente tomamos el singulete $\{\alpha + s\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha + s < \beta + t$. Por el lema 2.2.2, existe un homeomorfismo

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, \beta + 1]$$

tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = \beta + 1$. Luego, por el teorema 1.1.20 se tiene que $h_{(0,1]} : (0, 1] \rightarrow (0, \beta + 1]$ es un homeomorfismo. Así, como $(0, 1]$ es conexo, del teorema 1.2.1 se sigue que $(0, \beta + 1]$ es conexo y además $\alpha + s, \beta + t \in (0, \beta + 1]$. Por lo tanto, del teorema 1.2.7 se sigue que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es conexo. Por lo tanto $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es una 1-variedad. □

De los ejemplos 2.1.5, 2.2.3 y del teorema 2.1.6 se sigue que $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\})$ es una 2-variedad. Esta variedad la retomaremos en el capítulo 4, ya que tiene una propiedad importante; un **extremo corto** y un **extremo largo**. Estos conceptos también los definiremos en el capítulo 4.

2.3. Ejemplos de espacios adjunción que son variedades

En esta sección formalizaremos el concepto de **pegar** dos espacios topológicos. A manera de motivación comenzaremos dando un ejemplo de manera informal. Consideremos los intervalos $[2, 3]$, $[5, 7]$ con la topología de subespacio de \mathbb{R} y consideremos la circunferencia

$$\mathbb{S}^1 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

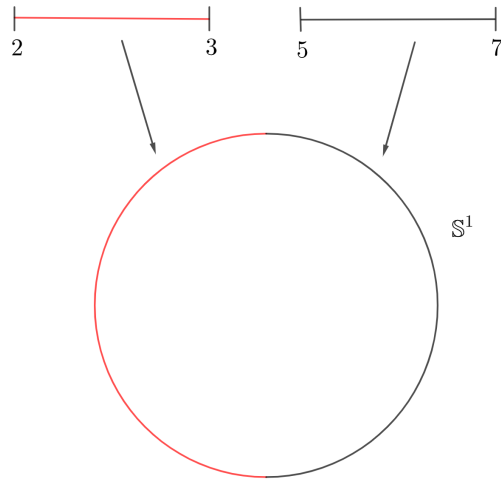


Figura 2.8: Representación geométrica

En la figura 2.8 podemos ver geoméricamente que \mathbb{S}^1 es la unión de sus arcos que están de color rojo y negro. Como los intervalos $[2, 3]$ y $[5, 7]$ son homeomorfos a los arcos rojo y negro, podríamos decir que la circunferencia \mathbb{S}^1 es el resultado de **pegar** dos intervalos cerrados disjuntos por sus extremos. Como hemos mencionado anteriormente, pretendemos que este ejemplo sirva de motivación para tener una idea de lo que significa **pegar** dos espacios topológicos. Sean X y Y espacios topológicos disjuntos. Se define el espacio topológico $X \oplus Y$ como el conjunto $X \cup Y$ con la topología: $U \subset X \oplus Y$ es abierto si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y .

Definición 2.3.1. Sean X y Y espacios topológicos disjuntos, $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : A \rightarrow Y$ continua. Definimos una relación de equivalencia \sim en $X \oplus Y$ de la siguiente manera: diremos que dos elementos $x, y \in X \oplus Y$ están relacionados si y sólo si

- (i) $x = y$, o
- (ii) $x \in A \wedge y = f(x)$, o
- (iii) $y \in A \wedge x = f(y)$, o
- (iv) $x, y \in A \wedge f(x) = f(y)$.

Al espacio $(X \oplus Y)/\sim$ se le llama **espacio adjunción**. A este espacio también se le denota como $X \cup_f Y$ y a la función f se le llama **función de pegado**.

La idea de espacio adjunto es bastante intuitiva, ya que como su nombre lo dice, adjuntamos o pegamos dos espacios topológicos. Nuestra intención en este capítulo es presentar un par de ejemplos de espacios adjunción que además

son variedades. Pero antes, es importante hacer algunos comentarios; en la definición anterior se pide que los espacios topológicos sean disjuntos, pero hay ejemplos clásicos donde se adjunta un espacio consigo mismo. Lo que queremos decir es que, si consideramos un espacio topológico X y lo queremos adjuntar consigo mismo, esto a primera instancia no es posible, pero hay manera sutil de hacerlo, que es tomar dos copias homeomorfas de X : $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$. De este modo, tenemos que $(X \times \{0\}) \cap (X \times \{1\}) = \emptyset$ y podemos adjuntar estas dos copias de X .

Hagamos algunas observaciones acerca del espacio adjunción: consideremos la función cociente (natural) $\Pi : X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$, donde $f : A \rightarrow Y$ es continua y $A \subset X$ es cerrado. Entonces, tenemos que

- (i) $X \cup_f Y = \Pi[X \setminus A] \cup \Pi[Y]$ y $\Pi[X \setminus A] \cap \Pi[Y] = \emptyset$.
- (ii) $\Pi \upharpoonright X \setminus A : X \setminus A \rightarrow X \cup_f Y$ es un encaje y $\Pi[X \setminus A]$ es abierto.
- (iii) $\Pi \upharpoonright Y : Y \rightarrow X \cup_f Y$ es un encaje y $\Pi[Y]$ es cerrado.

El inciso (i) es bastante claro y la prueba de los incisos (ii) y (iii) se puede encontrar en [2, teorema 6.3, p. 128].

Ahora, es natural preguntarse ¿qué propiedades topológicas preserva el espacio adjunción con la función cociente natural? Aunque no entraremos en detalle con esta pregunta, ya que se sale de nuestro objetivo, vamos a dar un teorema que nos da condiciones bajo las cuales el espacio adjunción es Hausdorff y conexo, pero necesitaremos hacer uso de un lema que damos a continuación.

Teorema 2.3.2. Sean X, Y espacios topológicos y $p : X \rightarrow Y$ una función cerrada y sobreyectiva. Si X es Hausdorff y para cada $y \in Y$ se tiene que $p^{-1}(y)$ es compacto, entonces Y es Hausdorff.

Demostración. Sean $y_0, y_1 \in Y$ con $y_0 \neq y_1$. Hagamos

$$A_i = p^{-1}[\{y_i\}], \text{ con } i \in \{1, 2\}.$$

Notemos que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Luego, como X es Hausdorff y A_1 y A_2 son compactos en X , el teorema 1.1.26 implica que existen abiertos disjuntos U_1, U_2 en X tales que $A_1 \subset U_1$ y $A_2 \subset U_2$. Hagamos

$$V_i = Y \setminus p[X \setminus U_i], \text{ con } i \in \{1, 2\}.$$

Como U_i es abierto, entonces $X \setminus U_i$ es cerrado y se sigue que $p[X \setminus U_i]$ es cerrado, ya que p es cerrada. Por lo tanto $V_i = Y \setminus p[X \setminus U_i]$ es abierto en Y .

Notemos que $y_i \notin p[X \setminus U_i]$. Suponiendo por contrario que $y_i \in p[X \setminus U_i]$, por ser p sobreyectiva, existe $z_i \in X \setminus U_i$ tal que $p(z_i) = y_i$. Pero por definición de A_i se tiene que $z_i \in A_i$. Y como $A_i \subset U_i$ se sigue que $z_i \in U_i$ lo cual es una contradicción. Así, tenemos $y_i \notin p[X \setminus U_i]$, lo cual implica que

$$y_i \in Y \setminus p[X \setminus U_i] = V_i.$$

Ahora veamos que $p^{-1}[V_i] \subset U_i$: sea $x \in p^{-1}[V_i]$. Entonces $p(x) \in V_i$, lo cual implica que $p(x) \notin p[X \setminus U_i]$ y entonces $x \notin X \setminus U_i$. Así, tenemos que $x \in U_i$ y por lo tanto $p^{-1}[V_i] \subset U_i$. Notemos también que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ya que si existe $x \in V_1 \cap V_2$, entonces

$$\emptyset \neq p^{-1}(x) \subset p^{-1}[V_1] \cap p^{-1}[V_2] \subset U_1 \cap U_2,$$

lo cual es una contradicción, ya que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Así, tenemos que V_1 y V_2 son abiertos disjuntos en Y que contienen a y_1 y y_2 respectivamente. Por lo tanto Y es Hausdorff. □

Teorema 2.3.3. Sean X, Y espacios topológicos disjuntos, A un subespacio cerrado de X y $f : A \rightarrow Y$ continua. Entonces

- (a) $X \cup_f Y$ es Hausdorff si X y Y son Hausdorff y A es compacto.
- (b) $X \cup_f Y$ es conexo si X y Y son conexos.

Demostración. Consideremos la función cociente $\Pi : X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$.

(a) Sean X y Y espacios Hausdorff. Notemos que del hecho que X y Y son Hausdorff se sigue que $X \oplus Y$ es Hausdorff. Para poder aplicar el teorema 2.3.2, probemos que Π es cerrada, sobreyectiva y que para cada $[y] \in X \cup_f Y$ se tiene que $\Pi^{-1}[\{[y]\}]$ es compacto. La sobreyectividad de Π se sigue directamente de la definición, ya que dada una clase $[x] \in X \cup_f Y$, al menos el elemento $x \in X \oplus Y$ es tal que $\Pi(x) = [x]$.

Veamos que para cada $[y] \in X \cup_f Y$ se tiene que $\Pi^{-1}[\{[y]\}]$ es compacto. Sea $[y] \in X \cup_f Y$. Analicemos dos casos:

Caso 1. Si $\Pi^{-1}[\{[y]\}] \cap A = \emptyset$. Entonces $\Pi^{-1}[\{[y]\}] = \{y\}$ y sigue que $\Pi^{-1}[\{[y]\}]$ es compacto por ser finito.

Caso 2. Si $\Pi^{-1}[\{[y]\}] \subset A \cup f[A]$. Entonces

$$\Pi^{-1}[\{[y]\}] = f^{-1}(z) \cup \{z\},$$

para algún $z \in Y$. Como $z \in [y]$ podemos suponer que $z = y$. Notemos que $\{y\}$ es compacto por ser finito. Luego, como $X \oplus Y$ es Hausdorff, entonces en particular es T_1 y se sigue que $\{y\}$ es cerrado en $X \oplus Y$. Además como f es continua se sigue que $f^{-1}[\{y\}]$ cerrado en A y como A es compacto, del teorema 1.1.28 se sigue que $f^{-1}[\{y\}]$ es compacto. Así tenemos que $\Pi^{-1}[\{[y]\}]$ es la unión de dos compactos que esta contenido en el espacio Hausdorff $X \oplus Y$. Por lo tanto, del teorema 1.1.27 se sigue que $\Pi^{-1}[\{[y]\}]$ es compacto.

Ahora veamos que Π es cerrada. Sea $F \subset X \oplus Y$ cerrado. Hagamos

$$\begin{aligned} D_0 &= f[F \cap A], \\ D_1 &= F \cap f[A] \\ D &= D_0 \cup D_1 \text{ y} \\ C &= f^{-1}[D]. \end{aligned}$$

Tomemos $G = \Pi[F]$ y probemos que $\Pi^{-1}[G] = F \cup D \cup C$.

Veamos que $\Pi^{-1}[G] \supset F \cup D \cup C$. Sea $x \in F \cup D \cup C$. Analicemos los 3 casos.
 Caso 1. $x \in F$. Entonces $\Pi[x] \in \Pi[F] = G$ y se sigue que $x \in \Pi^{-1}[G]$.
 Caso 2. $x \in D$. Si $x \in D_1$, entonces $x \in F$ y tenemos el caso anterior. Si $x \in D_0$, entonces existe $y \in F \cap A$ tal que $x = f(y)$. Como $y \in A$ y $x = f(y)$, entonces $x \sim y$ y se tiene que $\Pi(x) = \Pi(y)$. Luego, como $y \in F$ se tiene que

$$\Pi(x) = \Pi(y) \in \Pi[F] = G,$$

lo cual implica que $x \in \Pi^{-1}[G]$.

Caso 3. $x \in C$. Entonces $x \in \text{dom}(f) = A$ y $f(x) \in D$. Luego, por el caso 2, se tiene que $\Pi(f(x)) \in G$. Y como $x \sim f(x)$ se tiene que $\Pi(x) = \Pi(f(x)) \in G$, lo cual implica que $x \in \Pi^{-1}[G]$.

Entonces ya podemos concluir que $\Pi^{-1}[G] \supset F \cup D \cup C$.

Ahora veamos que $\Pi^{-1}[G] \subset F \cup D \cup C$: sea $x \in \Pi^{-1}[G]$. Entonces $\Pi(x) \in G = \Pi[F]$ por lo que existe $y \in F$ tal que $\Pi(x) = \Pi(y)$. Si $x = y$, se tiene directamente que $x \in F$. Entonces consideremos el caso $x \neq y$. Por definición de Π , se tiene que $x \sim y$. Notemos que por definición de la relación de equivalencia, ambos x y y no pueden estar en Y . Analicemos todos los casos.

Caso 1. $x \in X$ y $y \in Y$. Entonces $x \in A$ y $y = f(x)$. Entonces $y \in f[A]$ y como $y \in F$, se sigue que $y \in f[A] \cap F = D_1$. Entonces

$$x \in f^{-1}[\{y\}] \subset f^{-1}[D_1] \subset f^{-1}[D] = C.$$

Así, tenemos que $x \in C$.

Caso 2. $x \in Y$ y $y \in X$. Entonces $y \in A$ y $x = f(y) \in f[A]$. Como $y \in A \cap F$, se tiene que

$$x = f(y) \in f[A \cap F] = D_0 \subset D.$$

Así, tenemos que $x \in D$.

Caso 3. $x, y \in X$. Entonces x y y están en A y $f(x) = f(y)$. Como $y \in F \cap A$, se tiene que

$$f(x) = f(y) \in f[F \cap A] = D_0,$$

lo cual implica que

$$x \in f^{-1}[D_0] \subset f^{-1}[D] = C.$$

Así, tenemos que $x \in C$.

Entonces ya podemos concluir que $\Pi^{-1}[G] \subset F \cup D \cup C$ y por lo tanto $\Pi^{-1}[G] = F \cup D \cup C$.

Ahora afirmamos que los conjuntos D_0 , D_1 y D son cerrados. Probemos esta afirmación. Como A es compacto, $f[A]$ es Hausdorff y $f : A \rightarrow f[A]$ es continua,

por el teorema 1.1.25 se tiene que f es cerrada. Entonces como $F \cap A$ es cerrado en A , se sigue que $f[F \cap A]$ es cerrado en $f[A]$. Y como $f[A]$ es cerrado en Y , se sigue que D_0 es cerrado en Y . Y por lo tanto, D_0 es cerrado en $X \oplus Y$. Notemos que D_1 es cerrado por ser la intersección de los cerrados F y $f[A]$. Notemos también que D es cerrado por ser la unión de los cerrados D_0 y D_1 . Por lo tanto D_0 , D_1 y D son cerrados.

Por otro lado, como f es continua y D es cerrado, se tiene que $f^{-1}[D] = C$ es cerrado. Entonces $\Pi^{-1}[G]$ es cerrado por ser la unión de los cerrados F , D y C . Y como Π es una identificación, se sigue que $\Pi[F]$ es cerrado en $X \cup_f Y$. Entonces, como Π es cerrada y para cada $[y] \in X \cup_f Y$ se tiene que $p^{-1}[\{[y]\}]$ es compacto, por el teorema 2.3.2 se sigue que $X \cup_f Y$ es Hausdorff.

(b) Sean X y Y espacios conexos. Como X es conexo y Π es continua, el teorema 1.2.1 implica que $\Pi[X]$ es conexo. Por un argumento similar al anterior, se tiene que $\Pi[Y]$ es conexo. Además tenemos que

$$X \cup_f Y = \Pi[X] \cup \Pi[Y].$$

Y como

$$\Pi[X] \cap \Pi[Y] = \Pi[A] \neq \emptyset,$$

del teorema 1.2.2 se sigue que $X \cup_f Y$ es conexo. Esto completa la demostración del teorema. □

En los ejemplos que daremos a continuación, vamos a omitir algunos detalles en la demostración, ya que nuestra intención está más enfocada en mostrar la aplicación e interpretación geométrica de la adjunción de dos espacios.

Ejemplo 2.3.4. *La adjunción de dos copias homeomorfas del espacio*

$$D_2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

por su frontera, mediante la función identidad, da como resultado la esfera \mathbb{S}^2 .

Demostración. Hagamos

$$\begin{aligned} X &= D_2 \times \{0\}, \\ Y &= D_2 \times \{1\}, \text{ y} \\ A &= \mathbb{S}^1 \times \{0\}. \end{aligned}$$

Notemos que A es subconjunto cerrado de X . Ahora consideremos la función $f : A \rightarrow Y$ definida como $f(\langle x, y, 0 \rangle) = \langle x, y, 1 \rangle$. Notemos que la función f es continua, ya que es la suma de la función identidad $Id_A : A \rightarrow A$ con una función constante c que manda $\langle x, y, 0 \rangle \mapsto \langle 0, 0, 1 \rangle$, esto es

$$f(\langle x, y, 0 \rangle) = (Id_A + c)(\langle x, y, 0 \rangle) = \langle x, y, 0 \rangle + \langle 0, 0, 1 \rangle = \langle x, y, 1 \rangle.$$

Además, por definición de f se tiene que $f[A] = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$. De este modo, podemos entonces considerar el espacio $X \cup_f Y$ con la topología cociente.

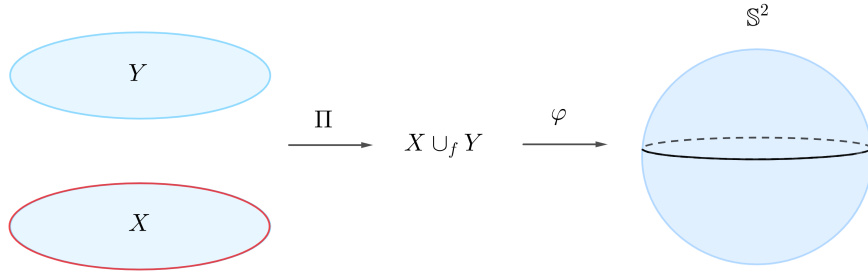


Figura 2.9: Representación geométrica de $X \cup_f Y$

En la figura 2.8, la circunferencia de color rojo que aparece en el conjunto X es el subconjunto cerrado A . Además aparecen dos funciones; una es la función cociente $\Pi : X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$ dada por $\Pi(x) = [x]$, y la otra es la función $\varphi : X \cup_f Y \rightarrow \mathbb{S}^2$ que está definida como

$$\varphi([\langle x, y, i \rangle]) = \begin{cases} \langle x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \rangle, & \text{si } i = 1, \text{ y} \\ \langle x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \rangle, & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Notemos que cuando $i = 1$, los puntos de $X \cup_f Y$ son enviados al hemisferio superior de la esfera y cuando $i = 0$, los puntos son enviados al hemisferio inferior. Entonces, de la observación anterior, es claro que la función φ es biyectiva, más aún, es un homeomorfismo. □

En el ejemplo anterior, adjuntamos dos copias homeomorfas a D_2 por su frontera, pero pudimos haberlo hecho por algún otro subconjunto cerrado. En el siguiente ejemplo, adjuntamos dos copias homeomorfas de $\mathbb{T} \setminus \text{int}(D)$ por la frontera de D , donde D es un disco cerrado. Pero antes de dar el ejemplo, vamos a identificar el subconjunto D por el que haremos la adjunción. Y esto lo haremos por medio de otro subconjunto cerrado del toro que es homeomorfo a D . Entonces, hagamos la siguiente observación:

Consideremos la función $\varphi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada como

$$\varphi(t) = \langle \cos(t), \text{sen}(t) \rangle.$$

Notemos que si tomamos el subconjunto cerrado $[-1, 1] \subset [-\pi, \pi]$, tenemos que $\varphi[[-1, 1]]$ es cerrado y es un arco de \mathbb{S}^1 . Ahora, si hacemos $I = \varphi[[-1, 1]]$, tenemos que $I \times I \subset \mathbb{T}$ y además es cerrado, ya que I es cerrado.

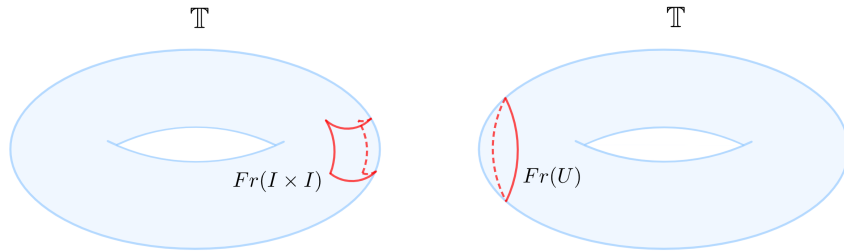


Figura 2.10: Subconjunto de adjunción

En el toro del lado izquierdo de la figura 2.10, está representado con rojo la frontera del conjunto $I \times I$. Y en el toro del lado derecho, la frontera del disco cerrado D . Dado que existe un homeomorfismo $\psi : I \times I \rightarrow D$ tal que

$$\psi[\text{Fr}(I \times I)] = \text{Fr}(D),$$

podemos pensar a D como subconjunto de \mathbb{T} y de esta manera podemos hacer la adjunción de dos copias homeomorfas del espacio $\mathbb{T} \setminus \text{int}(D)$. Notemos que geoméricamente, el espacio $\mathbb{T} \setminus \text{int}(D)$ resulta de quitarle a \mathbb{T} la cúpula que forma con el disco cerrado D .

Con las observaciones anteriores, ya tenemos clara la idea geométrica de lo que se quiere hacer. Entonces ya podemos dar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.5. *Sea D un disco cerrado contenido en \mathbb{T} . La adjunción de dos copias homeomorfas del espacio $\mathbb{T} \setminus \text{int}(D)$, por la frontera de D es una superficie conocida como “toro de género 2”, que geoméricamente se ve como un toro con dos agujeros.*

Demostración. Hagamos

$$\begin{aligned} Z &= \mathbb{T} \setminus (\text{int } D), \\ X &= Z \times \{0\} \text{ y} \\ Y &= Z \times \{1\}. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el subconjunto cerrado $A = \text{Fr}(D) \times \{0\}$ de X y la función $g : A \rightarrow Y$ definida como $g(\langle z, 0 \rangle) = \langle z, 1 \rangle$. Veamos que g es continua. Por la

proposición 1.1.36 se tiene que las funciones $\varphi : X \rightarrow Z$ y $\psi : Y \rightarrow Z$ dadas por $\varphi(\langle z, 0 \rangle) = z$ y $\psi(\langle z, 1 \rangle) = z$ respectivamente son homeomorfismos. Luego, la inversa de ψ es la función $\psi^{-1} : Z \rightarrow Y$ dada por $\psi^{-1}(z) = \langle z, 1 \rangle$. Entonces como ψ^{-1} es homeomorfismo, se tiene que la función $\psi^{-1} \circ \varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo. Tomemos $\langle z, 0 \rangle \in X$. Vemos que

$$\psi^{-1} \circ \varphi(\langle z, 0 \rangle) = \psi^{-1}(\varphi(\langle z, 0 \rangle)) = \psi^{-1}(z) = \langle z, 1 \rangle.$$

Como $A \subset X$, por la proposición 1.1.20 se tiene que

$$\psi^{-1} \circ \varphi \upharpoonright A : A \rightarrow \varphi \circ \psi^{-1}[A]$$

es un homeomorfismo. Pero notemos que precisamente $g = \psi^{-1} \circ \varphi \upharpoonright A$ y además $g[A] = \text{Fr}(D) \times \{1\}$. Por lo tanto g es continua. De este modo, podemos entonces considerar el espacio $X \cup_g Y$ con la topología cociente.

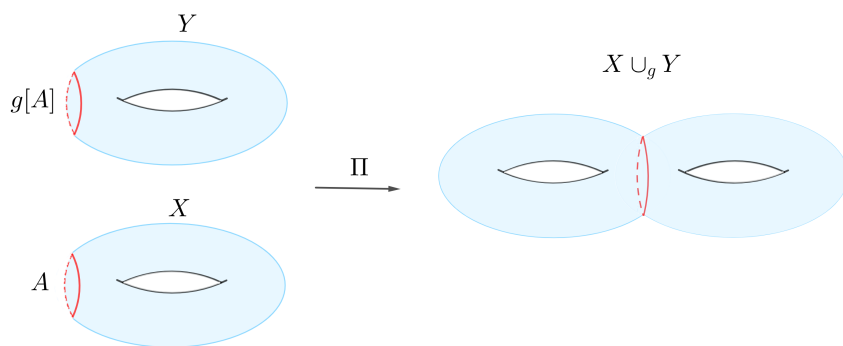


Figura 2.11: Representación geométrica del espacio adjunción

En la figura 2.10, los subespacios cerrados A y $g[A]$ de X y Y respectivamente están representados de color rojo. Y la función $\Pi : X \oplus Y \rightarrow X \cup_g Y$ es la función cociente dada por $\Pi(x) = [x]$.

□

El siguiente ejemplo de espacio adjunción es la **botella de Klein** que, como veremos a continuación, es resultado de hacer la adjunción por la frontera de dos copias homeomorfas de la banda de Möbius \mathbb{M} . La banda de Möbius la definimos en el ejemplo 2.1.8. Solo hagamos un pequeño recordatorio: la banda de Möbius es el conjunto $\mathbb{M} = \{[x] : x \in \mathbb{I}^2\}$ con la topología cociente, donde \mathbb{I}^2 es el cuadrado unitario de \mathbb{R}^2 . La frontera de \mathbb{M} es el subconjunto $F = \Pi[[0, 1] \times \{0, 1\}]$, donde $\Pi : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ es la función cociente. Ver figura 2.3 (página 26).

En el ejemplo 2.1.8 también se probó que

$$\Pi^{-1}[\mathbb{M} \setminus F] = (0, 1) \times (0, 1).$$

Entonces, como $(0, 1) \times (0, 1)$ es abierto en \mathbb{I}^2 , se sigue que $\mathbb{M} \setminus F$ es abierto en \mathbb{M} y por lo tanto F es cerrado en \mathbb{M} . De esta manera, ya tenemos claro cual es el subconjunto cerrado de \mathbb{M} por el que haremos la adjunción.

Ejemplo 2.3.6. *La adjunción de dos copias homeomorfas de la banda de Möbius \mathbb{M} por su frontera mediante la función identidad, da como resultado la **botella de Klein**.*

Demostración. Hagamos

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{M} \times \{0\}, \\ Y &= \mathbb{M} \times \{1\}, \end{aligned}$$

y consideremos el subconjunto cerrado $G = F \times \{0\}$ de X . Ahora, definimos una función $f : G \rightarrow Y$ como $f(\langle x, 0 \rangle) = \langle x, 1 \rangle$. Un argumento similar al que dimos en el ejemplo 2.3.5 para que la función g fuera continua, muestra que f es continua y además $f[G] = G \times \{1\}$.

De esta manera, podemos entonces considerar el espacio adjunción $X \cup_f Y$.

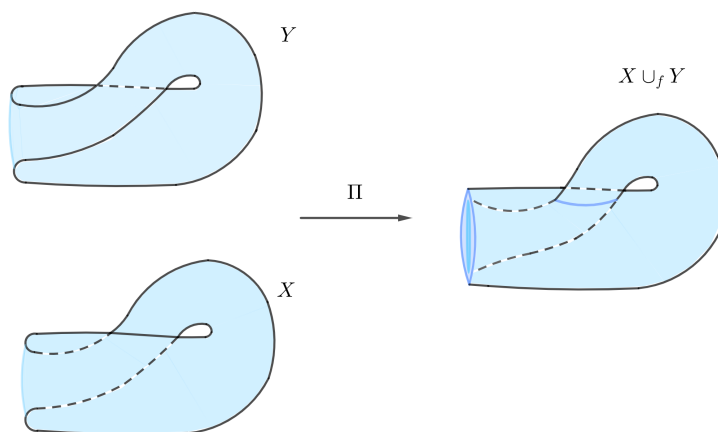


Figura 2.12: Representación geométrica de la botella de Klein

En la figura 2.11, los conjuntos G y $f[G]$ los cuales representan la frontera de X y Y respectivamente, están representados de color negro. Y la función $\Pi : X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$ es la función cociente dada por $\Pi(x) = [x]$.

□

2.4. La línea larga

En términos generales, la **línea larga** es la unión de dos copias homeomorfas de $\mathbb{L}^{\geq 0}$. Una de estas copias es precisamente $\mathbb{L}^{\geq 0}$ y la otra copia la vamos a definir a continuación.

Definición 2.4.1. Sea $(X, <)$ un conjunto linealmente ordenado. Se define el **orden reverso** $<^*$ en X de la siguiente manera: si $x, y \in X$, diremos que $x <^* y$ si y sólo si $y < x$.

Dado que ω_1 es linealmente ordenado, podemos considerar el orden reverso en este conjunto. Al conjunto $\langle \omega_1, <^* \rangle$ se le denota por ω_1^* . Si pensamos en los reales positivos \mathbb{R}^+ con su orden usual y consideramos el conjunto $\langle \mathbb{R}^+, <^* \rangle$, este conjunto es isomorfo de manera natural al de los reales negativos. Entonces es natural pensar en los elementos de ω_1^* como “los negativos” del conjunto ω_1 . Con esta idea escribiremos a ω_1^* como

$$\omega_1^* = \{-\alpha : \alpha \in \omega_1\}.$$

Por convención, supondremos que $-0 = 0$, $\omega_1 \cap \omega_1^* = \{0\}$ y que se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Si $\alpha, \beta \in \omega_1$ con $\alpha < \beta$, entonces $-\beta < -\alpha$.
- (ii) Si $\alpha, \beta \in \omega_1$, entonces $-\alpha \leq \beta$.

Notemos que el conjunto $\langle \omega_1, <^* \rangle$ cumple una propiedad dual a la del conjunto $\langle \omega_1, < \rangle$: para todo $A \subset \omega_1^*$, existe un $a \in A$ tal que $x \leq a$ para cada $x \in A$; es decir, todo subconjunto de ω_1 tiene máximo.

Con la definición del orden reverso y las observaciones anteriores, ya podemos definir el otro conjunto que, como veremos es homeomorfo a $\mathbb{L}^{\geq 0}$. Hagamos

$$\mathbb{L}^{\leq 0} = \omega_1^* \times (-1, 0]. \quad (2.11)$$

Para escribir a los elementos de $\mathbb{L}^{\leq 0}$ utilizaremos la misma notación que usamos con los elementos de $\mathbb{L}^{\geq 0}$. Entonces si tomamos $\langle \alpha, t \rangle \in \mathbb{L}^{\leq 0}$ con $\langle \alpha, t \rangle = \langle -\beta, -s \rangle$ para algunos $\beta \in \omega_1$ y $s \in [0, 1)$, escribiremos $\alpha + t$ en lugar de $\langle \alpha, t \rangle$. Notemos que $\mathbb{L}^{\leq 0} \cap \mathbb{L}^{\geq 0} = \{0\}$ y que del hecho que podamos escribir a los elementos de ω_1^* como $-\alpha$ con $\alpha \in \omega$, junto con la definición de $\mathbb{L}^{\leq 0}$ en 2.11, podemos escribir a $\mathbb{L}^{\leq 0}$ como

$$\mathbb{L}^{\leq 0} = \{-x : x \in \mathbb{L}^{\geq 0}\}.$$

Lo que hacemos ahora es extender el orden en $\mathbb{L}^{\geq 0}$ en el conjunto $\mathbb{L}^{\leq 0}$ de la siguiente manera: sean $\alpha_1 + t_1, \alpha_2 + t_2 \in \mathbb{L}^{\leq 0}$. Diremos que $\alpha_1 + t_1 < \alpha_2 + t_2$ si y sólo si

$$\alpha_1 <^* \alpha_2 \text{ ó } (\alpha_1 = \alpha_2 \text{ y } t_1 < t_2).$$

De esta manera, se define la **línea larga** \mathbb{L} como el conjunto $\mathbb{L} = \mathbb{L}^{\leq 0} \cup \mathbb{L}^{\geq 0}$ con el orden definido de la siguiente manera:

- (i) Si $x, y \in \mathbb{L}^{\geq 0}$ entonces $x < y$ en el sentido del orden de $\mathbb{L}^{\geq 0}$.

- (ii) Si $x, y \in \mathbb{L}^{\leq 0}$ entonces $x < y$ si y sólo si $x <^* y$.
- (iii) Si $x \in \mathbb{L}^{\leq 0}$ y $y \in \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ se define $x < y$ en el sentido del orden de $\mathbb{L}^{\geq 0}$.

Notemos que por definición, el orden en \mathbb{L} es lineal.

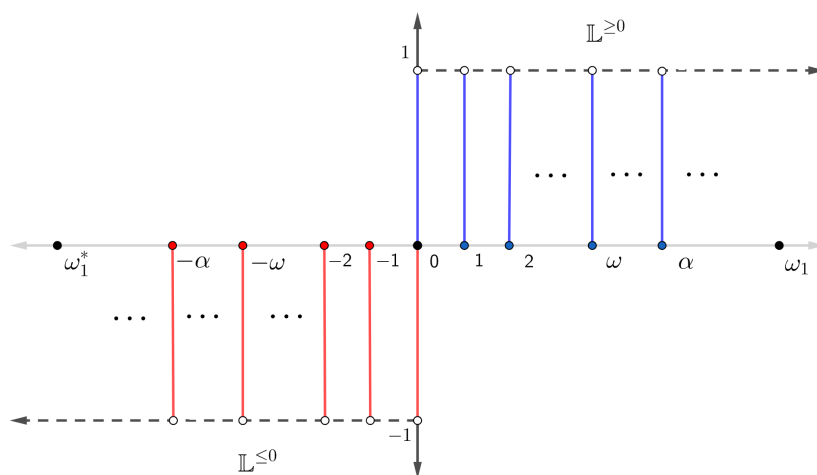


Figura 2.13: Cómo imaginamos a \mathbb{L}

Las líneas verticales de color rojo y azul de la figura 2.11 representan a los conjuntos $\mathbb{L}^{\leq 0}$ y $\mathbb{L}^{\geq 0}$ respectivamente. El punto en el cero representa el punto de intersección de estos dos conjuntos. Ahora hagamos una observación; si consideramos la función $f : \mathbb{L}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{L}^{\leq 0}$ dada por $f(x) = -x$, esta función resulta ser un homeomorfismo que, geoméricamente podemos imaginar de la misma manera que multiplicar por -1 en el plano: una reflexión con respecto al origen.

Lo que sigue, es dar algunas propiedades importantes de la línea larga. Comenzamos con la más importante de este capítulo, que es el de variedad.

Proposición 2.4.2. *La línea larga \mathbb{L} es una 1-variedad.*

Demostración. Por definición, \mathbb{L} es linealmente ordenado, entonces por el lema 1.4.12 se sigue que \mathbb{L} es Hausdorff .

Veamos que \mathbb{L} es localmente homeomorfo a \mathbb{R} . Sea $x \in \mathbb{L}$ y consideremos el homeomorfismo $f : \mathbb{L}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{L}^{\leq 0}$ dado por $f(y) = -y$. Analicemos varios casos:

Caso 1. Si $x \in \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. En el lema 2.2.3 se probó que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R} . Entonces, como $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es abierto en \mathbb{L} , la prueba del lema 2.2.3 sirve para este caso.

Caso 2. Si $x \in \mathbb{L}^{\leq 0} \setminus \{0\}$. Como la función f es un homeomorfismo, entonces por el teorema 1.1.20 se tiene que

$$f \upharpoonright \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\} : \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\} \rightarrow f[\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}]$$

es un homeomorfismo. Pero como $f(0) = 0$, se sigue que $f[\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}] = \mathbb{L}^{\leq 0} \setminus \{0\}$, es decir, los espacios $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{L}^{\leq 0} \setminus \{0\}$ son homeomorfos. Y como $\mathbb{L}^{\leq 0} \setminus \{0\}$ es abierto en \mathbb{L} , este caso queda resuelto.

Caso 3. Si $x = 0$. Tomamos $U = U_1 \cup U_2$ donde

$$U_1 = (-1, 0] \text{ y } U_2 = [0, 1).$$

Notemos que U es vecindad abierta de x en \mathbb{L} y además $U_1 \subset \mathbb{L}^{\leq 0}$ y $U_2 \subset \mathbb{L}^{\geq 0}$. Luego, del lema 2.2.2 tenemos que existe un homeomorfismo creciente $h : U_2 \cup \{1\} \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, donde $[0, 1]$ en el contradominio de h se toma como subespacio de \mathbb{R} . Del hecho que $h(1) = 1$, se sigue que $h[U_2] = [0, 1)$. Y por el teorema 1.1.20 se tiene que $h \upharpoonright U_2 : U_2 \rightarrow [0, 1)$ es un homeomorfismo.

Por otro lado, notemos que la función $g : [0, 1) \rightarrow (-1, 0]$ dada por $g(x) = -x$ es un homeomorfismo, donde $[0, 1)$ y $(-1, 0]$ son subconjuntos de \mathbb{R} . Entonces la función

$$g \circ h \upharpoonright U_2 \circ f^{-1} : U_1 \rightarrow (-1, 0]$$

es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos, donde $(-1, 0] \subset \mathbb{R}$. Hagamos $\varphi = g \circ h \upharpoonright U_2 \circ f^{-1}$. Notemos que los subconjuntos U_1 y U_2 son cerrados en U y que además

$$\varphi(0) = 0 = h \upharpoonright U_2(0). \quad (2.12)$$

Luego, como $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, el teorema 1.1.17 implica que existe una función continua $\psi : U \rightarrow (-1, 1)$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in U_1, \text{ y} \\ h \upharpoonright U_2(x), & \text{si } x \in U_2. \end{cases}$$

donde $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Veamos que ψ es biyectiva y abierta:

ψ es biyectiva: notemos que por definición, la función ψ es sobreyectiva en U y biyectiva en $U \setminus \{0\}$. Ahora, tomemos $x, y \in U$ con $x = 0$ y $y \neq x$. Entonces $y \in U_1 \setminus \{0\}$ o $y \in U_2 \setminus \{0\}$. Vamos a hacer el caso en el que $y \in U_2 \setminus \{0\}$ ya que el otro se puede argumentar de forma muy parecida. Entonces $\psi(y) = h \upharpoonright U_2(y)$. Pero como $h \upharpoonright U_2(z) = 0$ si y sólo si $z = 0$, se sigue que $\psi(y) \neq 0$. Por otro lado, como $x = 0$, de la ecuación 2.12 se sigue que $\psi(x) = 0$, lo cual implica que $\psi(x) \neq \psi(y)$. De este modo hemos probado que ψ es biyectiva en U .

ψ es abierta: tomemos un abierto básico W en U . Notemos que W es de la forma $W = (t_1, t_2)$ con $t_1, t_2 \in (-1, 0] \cup [0, 1)$ y $t_1 < t_2$. Entonces

$$\psi[W] = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R},$$

el cual es abierto en $(-1, 1)$ como subconjunto de \mathbb{R} . Como tomamos un abierto básico, se sigue que ψ es abierta.

Como ψ es biyectiva y abierta se sigue que ψ es un homeomorfismo. De esta manera hemos probado que todo elemento de \mathbb{L} tiene una vecindad abierta que es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R} . Por lo tanto, \mathbb{L} es localmente homeomorfo a \mathbb{R} .

Por último, veamos que \mathbb{L} es conexo: primero notemos que

$$cl_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}) = \mathbb{L}^{\geq 0}.$$

Luego, en el ejemplo 2.2.3 se probó que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es conexo. Entonces, del teorema 1.2.6 se sigue que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es conexo. Además, como $\mathbb{L}^{\geq 0}$ y $\mathbb{L}^{\leq 0}$ son homeomorfos, se sigue que $\mathbb{L}^{\leq 0}$ también es conexo. Así, tenemos que \mathbb{L} es la unión de dos conexos y como $\mathbb{L}^{\geq 0} \cap \mathbb{L}^{\leq 0} = \{0\} \neq \emptyset$, del teorema 1.2.2 se sigue que \mathbb{L} es conexo. □

A continuación probaremos algunas propiedades básicas de la línea larga que muestran su similitud y diferencia con la recta real.

Definición 2.4.3. *Si X es un espacio topológico, se dice que X es **secuencialmente compacto (SC)** si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Notemos que la unión de dos espacios topológicos SC es SC. Esto es sencillo de probar, así que solo haremos un bosquejo de la prueba: sean X, Y espacios SC y $\{x_n\}_{n \in \omega} \subset X \cup Y$. Hagamos

$$\begin{aligned} A &= \{i \in \omega : x_i \in X\} \text{ y} \\ B &= \{i \in \omega : x_i \in Y\}. \end{aligned}$$

Entonces $A \cup B = \omega$, lo cual implica que A o B es infinito. Dependiendo de cuál de A o B es infinito, se puede encontrar una subsucesión convergente ya sea en X o Y y esta subsucesión también es subsucesión convergente en $X \cup Y$.

Teorema 2.4.4. *[7, Teorema 28.2, p. 179] Sea X un espacio topológico metrizable. Entonces los siguientes son equivalentes:*

- (i) X es compacto.
- (ii) X es secuencialmente compacto.

Un espacio topológico X es ω -**acotado** si para cada $N \subset X$ numerable, la cerradura de N es compacto.

Notemos que un espacio métrico ω -acotado es secuencialmente compacto. En efecto, si X es espacio métrico ω -acotado y $\{x_n\}_{n \in \omega} \subset X$, entonces por hipótesis tenemos que $cl_X(\{x_n\}_{n \in \omega})$ es compacto. Luego, como el conjunto $cl_X(\{x_n\}_{n \in \omega})$ es compacto y es espacio métrico con la métrica heredada de X , del teorema 2.4.4 se sigue que $cl_X(\{x_n\}_{n \in \omega})$ es SC. Entonces existe un límite de alguna subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \omega}$ y cuyo límite esta en X .

Proposición 2.4.5. *La línea larga \mathbb{L} es ω -acotada y SC.*

Demostración. Sea A un conjunto numerable en \mathbb{L} . Podemos escribir a A como $A = \{a_i \in A : i \in \omega\}$. Hagamos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{i \in \omega : a_i \in \mathbb{L}^{\leq 0}\} \text{ y} \\ A_2 &= \{i \in \omega : a_i \in \mathbb{L}^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

Veamos que $\{a_i\}_{i \in A_2}$ es acotado en $\mathbb{L}^{\geq 0}$: como $a_i = \alpha_i + t_i$ para cada $i \in A_2$, con $\alpha_i \in \omega_1$ y $t_i \in [0, 1)$, por la proposición 1.4.8 existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\alpha_i < \alpha$ para cada $i \in A_2$. De este hecho se sigue que $\{a_i\}_{i \in A_2} \subset [0, \alpha]$. Luego, por el lema 2.2.2, existe un homeomorfismo creciente $h : [0, 1] \rightarrow [0, \alpha]$ tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Por otro lado, como $[0, 1]$ es compacto, el subconjunto $[0, \alpha]$ también es compacto. Además

$$cl_{[0, \alpha]}(\{a_i\}_{i \in A_2}) = cl_{\mathbb{L}^{\geq 0}}(\{a_i\}_{i \in A_2})$$

y como

$$cl_{[0, \alpha]}(\{a_i\}_{i \in A_2}) \subset [0, \alpha],$$

por el teorema 1.1.28 se sigue que $cl_{\mathbb{L}^{\geq 0}}(\{a_i\}_{i \in A_2})$ es compacto. Aplicando un procedimiento similar al anterior, se llega a que $cl_{\mathbb{L}^{\leq 0}}(\{a_i\}_{i \in A_1})$ es compacto. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} cl_{\mathbb{L}}(A) &= cl_{\mathbb{L}}(\{a_i\}_{i \in A_2} \cup \{a_i\}_{i \in A_1}) \\ &= cl_{\mathbb{L}}(\{a_i\}_{i \in A_2}) \cup cl_{\mathbb{L}}(\{a_i\}_{i \in A_1}) \\ &= cl_{\mathbb{L}^{\geq 0}}(\{a_i\}_{i \in A_2}) \cup cl_{\mathbb{L}^{\leq 0}}(\{a_i\}_{i \in A_1}), \end{aligned}$$

es decir, el conjunto $cl_{\mathbb{L}}(A)$ es la unión de dos compactos, entonces del teorema 1.1.27 se sigue que $cl_{\mathbb{L}}(A)$ es compacto. Por lo tanto \mathbb{L} es ω -acotado.

Por último veamos que \mathbb{L} es SC: Recordemos que, como $\mathbb{L} = \mathbb{L}^{\leq 0} \cup \mathbb{L}^{\geq 0}$ y además estos dos subconjuntos son homeomorfos, basta probar que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es SC. Sin pérdida de generalidad, tomemos la sucesión $\{a_i \in A : i \in A_2\}$ del caso anterior. Ya vimos que $\{a_i\}_{i \in A_2} \subset [0, \alpha]$ y que los subconjuntos $[0, \alpha]$ y $[0, 1]$ son

homeomorfos. Entonces, como $[0, 1]$ es espacio métrico con la métrica heredada de \mathbb{R} y además es compacto, del teorema 2.4.4 se sigue que $[0, 1]$ es SC y por lo tanto también lo es $[0, \alpha]$. De esta manera hemos probado que $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es SC y entonces también lo es $\mathbb{L}^{\leq 0}$. Por lo tanto, como \mathbb{L} es la unión de dos espacios SC, se sigue que \mathbb{L} es SC. □

Proposición 2.4.6. *La línea larga \mathbb{L} no es compacta.*

Demostración. Tomemos la cubierta abierta

$$\mathcal{B} = \{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{L}\}$$

de \mathbb{L} y una subcolección finita de \mathcal{B} :

$$\mathcal{C} = \{(-\alpha_1, \alpha_2), \dots, (-\alpha_{n-1}, \alpha_n)\}$$

con $(-\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in \mathcal{B}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Como \mathbb{L} es linealmente ordenado y \mathcal{C} es finito, existe un $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i < \alpha_m$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq m$. Ya que α_m es numerable por estar en ω_1 , entonces su sucesor $\alpha_m + 1$ también es numerable, es decir, $\alpha_m + 1 \in \omega_1$. Entonces, como $\alpha_m + 1 \notin \bigcup \mathcal{C}$, \mathcal{C} no es cubierta de \mathbb{L} . Y como \mathcal{C} fue arbitrario, la cubierta abierta \mathcal{B} no tiene subcubierta finita. Por lo tanto \mathbb{L} no es compacto. □

Corolario 2.4.7. *La línea larga no es un espacio metrizable.*

Demostración. Si \mathbb{L} fuera metrizable, entonces como \mathbb{L} no es compacta por la proposición 2.4.6, el teorema 2.4.4 implicaría que \mathbb{L} no es SC. Pero esto contradice la proposición 2.4.5. Por lo tanto \mathbb{L} no es metrizable. □

Capítulo 3

Caracterización de variedades metrizable

El objetivo principal de este capítulo es dar una caracterización de las variedades que son metrizable. Hay teoremas que nos dan una caracterización acerca de la metrizable para espacios topológicos arbitrarios. Aunque nosotros estamos interesados en los espacios topológicos que son variedades, usaremos algunos de los teoremas de metrizable conocidos, como por ejemplo, el **teorema de metrizable de Urysohn** para probar algunas de las caracterizaciones para variedades. Esta caracterización la podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.0.1. *Para una variedad X ; son equivalentes:*

- (1) X es metrizable.
- (2) X es segundo numerable.
- (3) X es Lindelöf.
- (4) X es paracompacto.

En las secciones posteriores, probaremos algunas propiedades básicas de las variedades que nos ayudaran a probar el teorema 3.0.1 que, como ya hemos mencionado anteriormente, será nuestro principal objetivo. Los conceptos: **segundo numerable**, **Lindelöf** y **paracompacto** que aparecen en el teorema 3.0.1 los definiremos también en las secciones posteriores.

3.1. Hechos generales

Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es **segundo numerable** si τ tiene una base numerable.

Una observación que se sigue inmediatamente de la definición de espacio segundo numerable es la siguiente:

Observación 3.1.1. *Todo espacio segundo numerable es primero numerable.*

Lema 3.1.2. [2, Teorema 6.2 (1), p. 174] *La propiedad: segundo numerable, es una propiedad topológica.*

En general las variedades no son segundo numerables. Sin embargo, sí tienen la propiedad de ser primero numerables: si X es una n -variedad para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in X$, entonces existe una vecindad abierta U de x que es homeomorfo a un subconjunto abierto V de \mathbb{R}^2 . Como V es segundo numerable, por el lema 3.1.2 se tiene que U es segundo numerable. Y por la observación 3.1.1 se tiene que U es primero numerable. Luego, si $\{U_i : i \in \omega\}$ una base local de x en U , como U es abierto en X , se sigue que U_i es abierto en X . Ahora, si tomamos un abierto V en X tal que $x \in V$, entonces $U \cap V$ es un abierto en U que contiene a x . Entonces existe un $i \in \omega$ tal que $x \in U_i \subset U \cap V$, lo cual implica que $U_i \subset V$. Así, tenemos que $\{U_i : i \in \omega\}$ una base local de x en X .

Si tenemos una colección $\{X_i : i \in I\}$ de espacios topológicos donde X_i es abierto y segundo numerable, la unión de estos espacios, en general no es segundo numerable. Pero si tomamos una unión numerable de estos espacios, esto sí resulta ser segundo numerable.

Proposición 3.1.3. *Sea X un espacio topológico y para cada $i \in \omega$, sea $X_i \subset X$ abierto y segundo numerable. Entonces $\bigcup_{i \in \omega} X_i$ es segundo numerable.*

Demostración. Para cada $i \in \omega$, sea $(X_i, \tau_i) \subset X$ abierto y segundo numerable, donde τ_i es la topología de subespacio de X_i . Sea

$$Y = \bigcup_{i \in \omega} X_i$$

y \mathcal{B}_i una base numerable para τ_i . Hagamos

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{B}_i.$$

Veamos que \mathcal{B} es base para la topología de Y . Sea $x \in Y$ y U un abierto en Y tal que $x \in U$. Como $x \in Y$, existe $j \in \omega$ tal que $x \in X_j$. Ya que U es abierto en Y , se tiene que $(U \cap X_j) \in \tau_j$. Por otro lado, como \mathcal{B}_j es base de τ_j y $x \in (U \cap X_j)$, existe $V \in \mathcal{B}_j$ tal que

$$x \in V \subset U \cap X_j.$$

Así, se tiene que $x \in V \subset U$. Y como

$$V \in \mathcal{B}_j \subset \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{B}_i = \mathcal{B},$$

se sigue que $V \in \mathcal{B}$. Luego, como V es abierto en X_j y X_j es abierto en Y , se sigue que V es abierto en Y . Por lo tanto \mathcal{B} es una base para la topología de Y . Luego, como \mathcal{B} es unión numerable de conjuntos numerables, se sigue que \mathcal{B} es numerable. Entonces ya podemos concluir que Y es segundo numerable. \square

Definición 3.1.4. Si X es un espacio topológico, decimos que X es **Lindelöf** si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

Teorema 3.1.5. Todo espacio topológico segundo numerable es Lindelöf.

Demostración. Sea X un espacio topológico segundo numerable y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta para X . Tomemos una base numerable \mathcal{B} para la topología de X . Hagamos

$$\mathcal{O} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset U_i, \text{ para algún } i \in I\}.$$

Ahora, para cada $B \in \mathcal{O}$ elegimos un $i_B \in I$ tal que $B \subset U_{i_B}$. Sea

$$I_0 = \{i_B : B \in \mathcal{O}\}.$$

Notemos que por definición de I_0 , hay una función sobreyectiva de \mathcal{O} a I_0 . Entonces, por el axioma de elección (esta consecuencia del axioma de elección se puede consultar en [4, Corolario 7.3, p. 145]) se tiene que $|I_0| \leq |\mathcal{O}|$. Luego, como $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ y \mathcal{B} es numerable, se tiene que

$$|\mathcal{O}| \leq |\mathcal{B}| \leq \aleph_0.$$

Así, se tiene que $|I_0| \leq \aleph_0$. Probemos que $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$.

\subset] Del hecho que $U_i \subset X$ para cada $i \in I_0$ se sigue que $\bigcup_{i \in I_0} U_i \subset X$.

\supset] Sea $x \in X$. Como $\{U_i : i \in I\}$ es cubierta abierta, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Luego, como \mathcal{B} es base, existe un abierto $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subset U_i. \tag{3.1}$$

De 3.1 se sigue que $B \in \mathcal{O}$. Entonces

$$x \in B \subset U_{i_B} \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i.$$

Así, se tiene que $x \in \bigcup_{i \in I_0} U_i$ y por tanto $\bigcup_{i \in I_0} U_i \supset X$. Entonces la colección

$$\mathcal{B}' = \{U_i : i \in I_0\}$$

es una subcubierta numerable para X . Por lo tanto X es Lindelöf. \square

Si X es un espacio topológico, se dice que X es **localmente compacto** si cada $x \in X$ tiene una vecindad con cerradura compacta. Esta es otra propiedad importante que tienen las variedades.

Proposición 3.1.6. *Las variedades son localmente compactas.*

Demostración. Sea X una n -variedad para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Sean $x \in X$, U_x una vecindad abierta de x , $V_x \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi_x : U_x \rightarrow V_x$ un homeomorfismo. Como \mathbb{R}^n es regular, de la proposición 1.1.13 y del hecho que las bolas abiertas forman una base para la topología de \mathbb{R}^n , existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\varphi_x(x) \in B_\epsilon(\varphi_x(x)) \subset cl_{V_x}(B_\epsilon(\varphi_x(x))) \subset V_x.$$

Como las traslaciones son homeomorfismos, podemos suponer que $\varphi_x(x) = 0$. Esta suposición es para simplificar la notación.

Hagamos $W = \varphi_x^{-1}[B_\epsilon(0)]$. Veamos que $cl_X(W) \subset U_x$. Sea $y \in cl_X(W)$. Como X es primero numerable, por la proposición 1.1.30 existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subset W$ que converge a y . Como $x_i \in W$, entonces $\varphi_x(x_i) \in B_\epsilon(0)$ para cada $i \in \omega$. Por lo que $\{\varphi_x(x_n) : n \in \omega\} \subset B_\epsilon(0)$. Como esta sucesión esta acotada, por el teorema 1.1.32, existe una subsucesión $\{\varphi_x(x_{n_j}) : j \in \omega\}$ convergente. Más aún, como \mathbb{R}^n es primero numerable, por la proposición 1.1.30 esta subsucesión converge a un $z \in cl_{V_x}(B_\epsilon(0))$. Notemos que

$$\varphi_x^{-1}(z) \in \varphi_x^{-1}[cl_{V_x}(B_\epsilon(0))] \subset \varphi_x^{-1}[V_x] = U_x.$$

Luego, la continuidad de φ_x^{-1} implica que la subsucesión $\{x_{n_j} : j \in \omega\}$ converge a $\varphi_x^{-1}(z)$. Pero como U es Hausdorff, por el lema 1.1.31 se sigue que $y = \varphi_x^{-1}(z)$. Y por lo tanto $y \in U_x$. Así, se tiene que $cl_X(W) \subset U_x$. Luego, por el lema 1.1.3 se tiene que

$$\begin{aligned} cl_{U_x}(W) &= U_x \cap cl_X(W) \\ &= cl_X(W), \end{aligned}$$

es decir, $cl_{U_x}(W) = cl_X(W)$. Además, como φ_x es continua, por la proposición 1.1.15 se tiene que

$$cl_{U_x}(W) \subset \varphi_x^{-1}[cl_{V_x}(B_\epsilon(0))].$$

Como $cl_{V_x}(B_\epsilon(0))$ es compacto y φ_x^{-1} es continua, se sigue que $\varphi_x^{-1}[cl_{V_x}(B_\epsilon(0))]$ es compacto. Y como $cl_X(W)$ es cerrado, del lema 1.1.28 se sigue que $cl_X(W)$ es compacto. Por lo tanto X es localmente compacto. \square

Lema 3.1.7. *Todo espacio topológico Hausdorff localmente compacto es completamente regular.*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto y sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$. Como X es localmente compacto, podemos tomar una vecindad abierta U de x tal que $cl_X(U)$ es compacto. Hagamos $G = cl_X(U)$ y tomemos

$$H = (G \setminus U) \cup (G \cap F).$$

Notemos que $x \in G \setminus H$ y que H es cerrado en G por ser la unión de dos cerrados en G . Luego, como G es compacto y Hausdorff, el teorema 1.1.27 implica que G es normal. Entonces, por el teorema 1.1.12(2) se tiene que G es T_4 y por definición de espacio T_4 , G es completamente regular. Entonces existe una función continua $f : G \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f[H] \subset \{0\}$.

Ahora definimos una función $g : X \setminus U \rightarrow [0, 1]$ como $g(y) = 0$ para todo $y \in X \setminus U$. Notemos que la función g es continua por ser constante y que $X \setminus U$ es cerrado en X , ya que U es abierto en X . Luego, vemos que

$$(X \setminus U) \cap G = G \setminus U \subset H. \quad (3.2)$$

Del hecho que $f[H] \subset \{0\}$ y de 3.2 se tiene que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in (X \setminus U) \cap G$. Entonces, por el teorema 1.1.17, existe una función continua

$$h : (X \setminus U) \cup G \rightarrow [0, 1]$$

definida como

$$h(y) = \begin{cases} f(y), & \text{si } y \in G, \text{ y} \\ g(y), & \text{si } y \in X \setminus U. \end{cases}$$

Por último, notemos que

$$\begin{aligned} (X \setminus U) \cup G &= X, \\ h(x) &= f(x) = 1, \text{ y} \\ h[F] &= g[F] \subset \{0\}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $h : X \rightarrow [0, 1]$, $h(x) = 1$ y $h[F] \subset \{0\}$. Por lo tanto, X es completamente regular, como se quería probar. \square

La proposición 3.1.6 nos dice que las variedades son localmente compactas. Entonces, por el lema anterior, son completamente regulares. Finalizamos esta sección con un teorema muy importante: el **Teorema de Metrización de Urysohn**.

Teorema 3.1.8. [7, Teorema 34.1, p. 213] *Si X es un espacio topológico regular y segundo numerable, entonces X es metrizable.*

3.2. Paracompacidad

Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} cubiertas de un espacio topológico X . Se dice que \mathcal{V} **refina** a \mathcal{U} (o \mathcal{V} es **refinamiento** de \mathcal{U}) si para todo $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$.

Definición 3.2.1. *Sea X un espacio topológico T_2 . Se dice que X es **paracompacto** si toda cubierta abierta posee un refinamiento abierto localmente finito.*

Es natural preguntarse si esta propiedad se hereda a subespacios o si el producto de espacios paracompactos es paracompacto, etc. En esta sección pretendemos responder estas preguntas y dar algunas de las propiedades importantes de los espacios paracompactos.

Teorema 3.2.2. [2, Teorema 2.4, p. 165] *Sean X y Y espacios topológicos.*

- (1) *Si X es paracompacto y $f : X \rightarrow Y$ es continua, sobreyectiva y cerrada, entonces Y es paracompacto.*
- (2) *Si X es paracompacto y $A \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces A es paracompacto.*
- (3) *Si $X \times Y$ es paracompacto, entonces X y Y son paracompactos.*

Notemos que el inciso (1) del teorema anterior, nos dice que en particular la paracompacidad es una propiedad topológica.

Proposición 3.2.3. [10, Teorema 5.1.5, p. 300] *Todo espacio topológico paracompacto es normal.*

Teorema 3.2.4. *Sea X un espacio topológico T_3 . Si X es Lindelöf, entonces X es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio T_3 Lindelöf. Como X es T_3 , por el teorema 1.1.12(1) se tiene que X es Hausdorff.

Ahora veamos que toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta para X . Como X es regular, de la proposición 1.1.13 y del hecho que \mathcal{U} es cubierta se sigue que, para cada $x \in X$ existen abiertos V_x y U_x tales que

$$x \in V_x \subset cl_X(V_x) \subset U_x,$$

con $U_x \in \mathcal{U}$. Notemos que la colección $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta para X . Luego, como X es Lindelöf, podemos tomar una subcubierta numerable $\mathcal{C} = \{V_{x_i} : i \in \omega\}$. Ahora hagamos $W_0 = U_{x_0}$ y

$$W_n = U_{x_n} \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} cl_X(V_{x_i}) \right),$$

con $n \in \omega \setminus \{0\}$. Notemos que W_n es abierto para todo $n \in \omega$ por ser intersección finita de abiertos en X .

Sea $\mathcal{O} = \{W_n : n \in \omega\}$. Probaremos que \mathcal{O} es un refinamiento de \mathcal{U} localmente finito. Primero veamos que \mathcal{O} es cubierta para X . Sea $x \in X$. Como \mathcal{C} es subcubierta, podemos tomar

$$m = \min\{i \in \omega : x \in cl_X(V_{x_i})\}.$$

Notemos que por definición de m , se tiene que $x \in W_m$. Por lo tanto, \mathcal{O} es cubierta abierta para X .

Veamos que \mathcal{O} es un refinamiento de \mathcal{U} . Esto se sigue directamente de la definición de los W_n , ya que si $W_i \in \mathcal{O}$, entonces

$$W_i \subset U_{x_i} \in \mathcal{U}.$$

Por tanto \mathcal{O} es un refinamiento abierto de \mathcal{U} .

Por último, veamos que \mathcal{O} es localmente finito. Sea $x \in X$. Como \mathcal{C} es subcubierta, podemos tomar un $V_{x_j} \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V_{x_j}$, para algún $j \in \omega$. Entonces si tomamos un $k > j$ se tiene que

$$\begin{aligned} V_{x_j} \cap W_k &= V_{x_j} \cap \left(U_{x_k} \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} cl_X(V_{x_i}) \right) \right) \\ &= V_{x_j} \cap \left(U_{x_k} \cap \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [X \setminus cl_X(V_{x_i})] \right) \right) \\ &\subset V_{x_j} \cap [X \setminus cl_X(V_{x_j})] \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual implica que $V_{x_j} \cap W_k = \emptyset$. Esto significa que V_{x_j} interseca a lo más j elementos de la cubierta \mathcal{O} . Así, tenemos que \mathcal{O} es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta \mathcal{U} .

Entonces ya podemos concluir que X es paracompacto. □

Definición 3.2.5. Si X es un espacio topológico, se dice que X es σ -compacto si es la unión numerable de compactos.

Lema 3.2.6. Todo espacio topológico σ -compacto es Lindelöf.

Demostración. Sea \mathcal{U} es una cubierta abierta para X y $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ con K_i compacto. Entonces la familia

$$\{U \cap K_i : U \in \mathcal{U}\}$$

es una cubierta abierta para K_i . Luego, como K_i es compacto, existe un subconjunto $A_{K_i} \subset \mathcal{U}$ finito tal que

$$K_i = \bigcup_{U \in A_{K_i}} (U \cap K_i).$$

Ahora, si hacemos

$$\mathcal{V} = \bigcup \{A_{K_i} : i \in \omega\},$$

tenemos que la familia \mathcal{V} es una subcubierta abierta numerable para X . Por lo tanto, X es Lindelöf. □

Para probar (4) \Rightarrow (3) del teorema principal de esta sección (teorema 3.0.1), haremos uso de un teorema importante acerca de un espacio paracompacto y localmente compacto que daremos a continuación. Pero antes de probar este teorema, necesitamos hacer uso del siguiente lema.

Lema 3.2.7. *Si X es paracompacto y localmente compacto, existe una cubierta abierta \mathcal{V} de X tal que cualquier elemento de \mathcal{V} es no vacío, tiene cerradura compacta e interseca únicamente a una cantidad finita de elementos de \mathcal{V} .*

Demostración. Sea X es un espacio topológico localmente compacto y paracompacto. Hagamos

$$\mathcal{C} = \{U_x : x \in X\},$$

donde U_x es vecindad abierta de $x \in X$ tal que $cl_X(U_x)$ es compacto. Notemos que \mathcal{C} es cubierta abierta para X . Ahora, sea \mathcal{H} un refinamiento abierto de \mathcal{C} localmente finito. Hagamos $\mathcal{V} = \mathcal{H} \setminus \{\emptyset\}$. Notemos que \mathcal{V} también es un refinamiento abierto de \mathcal{C} localmente finito. Veamos que cada elemento de \mathcal{V} tiene cerradura compacta. Sea $V \in \mathcal{V}$. Como $V \subset U$ para algún $U \in \mathcal{C}$, en particular $V \subset cl_X(U)$, lo cual implica que $cl_X(V) \subset cl_X(U)$. Luego, como $cl_X(U)$ es compacto y $cl_X(V)$ es cerrado, por el teorema 1.1.28 se tiene que $cl_X(V)$ es compacto.

Ahora veamos que cada elemento de \mathcal{V} interseca solo una cantidad finita de elementos de \mathcal{V} . Para cada $x \in X$, existe una vecindad W_x de x que interseca sólo un número finito de elementos de \mathcal{V} . Luego, para cada $V \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$V \subset cl_X(V) \subset \bigcup_{x \in cl_X(V)} W_x. \quad (3.3)$$

Del hecho que $cl_X(V)$ es compacto y de 3.3 se tiene que existe $Y_V \subset cl_X(V)$ finito tal que

$$V \subset \bigcup_{x \in Y_V} W_x. \quad (3.4)$$

Como W_x interseca solo un número finito de elementos de \mathcal{V} , de 3.4 se sigue que todo elemento $V \in \mathcal{V}$ interseca solo un número finito de elementos de \mathcal{V} . Y por la elección de \mathcal{V} se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{V}$. □

Teorema 3.2.8. *Si X es paracompacto y localmente compacto, entonces existe un conjunto I tal que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, donde cada X_i es abierto en X , σ -compacto y $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$.*

Demostración. Sea X es un espacio topológico localmente compacto y paracompacto. Por el lema 3.2.7 podemos tomar una cubierta abierta \mathcal{V} de X tal que cada elemento de \mathcal{V} es no vacío e interseca sólo una cantidad finita de elementos de \mathcal{V} . Lo que haremos a continuación es construir una partición de subconjuntos cerrado-abiertos de X .

Dado un $V \in \mathcal{V}$ definimos $\mathcal{S}_0(V) = \{V\}$ y para $k \geq 1$, definimos una familia $\mathcal{S}_k(V)$ que consiste de elementos $V' \in \mathcal{V}$ para los que existe una sucesión V_0, \dots, V_k tal que $V_0 = V$, $V_i \in \mathcal{V}$, $V_k = V'$ y $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Hagamos

$$\begin{aligned} S(V) &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i(V), \text{ y} \\ W(V) &= \bigcup S(V). \end{aligned}$$

Del hecho que cada elemento del conjunto \mathcal{V} interseca sólo una cantidad finita de elementos de \mathcal{V} , se sigue que $\mathcal{S}_k(V)$ es finito para cada $k \in \omega$. Así, como $S(V)$ es unión numerable de conjuntos finitos, se tiene que $|S(V)| \leq \aleph_0$.

Veamos que la familia $P_X = \{W(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es una partición del espacio X . Primero notemos que, para cada $V \in \mathcal{V}$ se tiene que $V \in S(V)$. Y como $\emptyset \notin \mathcal{V}$, se sigue que $W(V) \neq \emptyset$. Lo cual implica que $\emptyset \notin P_X$. Ahora, sean $V, V' \in \mathcal{V}$. Probemos que

$$W(V) \cap W(V') = \emptyset \text{ ó } W(V) = W(V'). \quad (3.5)$$

Supongamos lo contrario, es decir,

$$W(V) \cap W(V') \neq \emptyset \text{ y } W(V) \neq W(V').$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe un $y \in W(V)$ tal que $y \notin W(V')$. Como $y \in W(V)$, existe un $H \in \mathcal{V}$ tal que

$$y \in H \in \mathcal{S}_k(V),$$

para algún $k \in \omega$. Luego, por definición de $\mathcal{S}_k(V)$, existe una sucesión A_0, \dots, A_k tal que $A_0 = V$, $A_k = H$, $A_i \in \mathcal{V}$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Ahora tomemos un $x \in W(V) \cap W(V')$. Entonces existen $F, G \in \mathcal{V}$ tales que

$$\begin{aligned} x &\in F \in \mathcal{S}_l(V), \text{ y} \\ x &\in G \in \mathcal{S}_m(V'), \end{aligned}$$

para algunos $l, m \in \omega$. Luego, por definición de $\mathcal{S}_l(V)$ y $\mathcal{S}_m(V')$, existen sucesiones B_0, \dots, B_l , C_0, \dots, C_m tales que

- $B_0 = V$, $B_l = F$, $B_i \in \mathcal{V}$ y $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \in \{0, \dots, l-1\}$.
- $C_0 = V'$, $C_m = G$, $C_i \in \mathcal{V}$ y $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Ahora tomemos $n = (k + l + m) + 1$ y consideremos la sucesión

$$D_0, \dots, D_m, \dots, D_{m+l}, \dots, D_n$$

donde

$$D_i = \begin{cases} C_i, & \text{si } 0 \leq i \leq m, \\ B_{(l+m+1)-i}, & \text{si } m+1 \leq i \leq m+l+1, \text{ y} \\ A_{i-(m+l+1)}, & \text{si } m+l+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

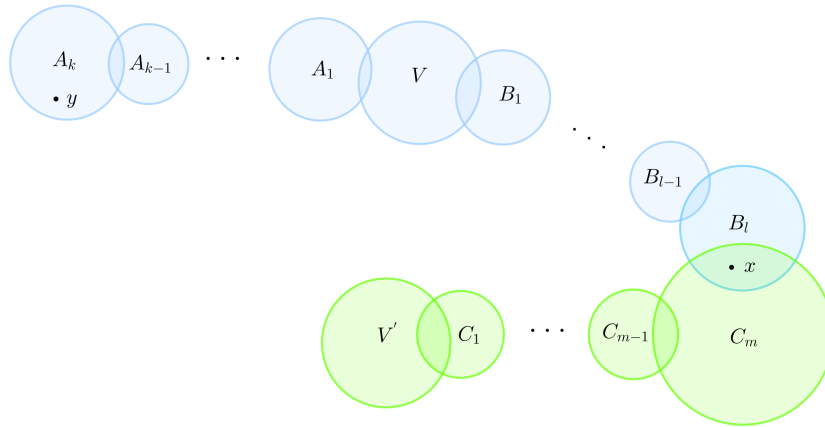


Figura 3.1: Representación geométrica

En la figura 3.1 tenemos una posible representación de la sucesión

$$D_0, \dots, D_m, \dots, D_{m+l}, \dots, D_n.$$

Notemos que, por definición de los D_i se tiene que $D_0 = V'$, $D_n = A_k$, $D_i \in \mathcal{V}$ y $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \in \{0, \dots, n\}$. Así, tenemos que $y \in D_n$. Luego, por construcción de la sucesión D_0, \dots, D_n , se tiene que $D_n \in \mathcal{S}_n(V')$, lo cual implica que $y \in W(V')$. Pero esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que $y \notin W(V')$. Por lo tanto se cumple la condición 3.5.

Por último, veamos que P_X cubre a X , es decir

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W(V). \quad (3.6)$$

(\supset): Sea $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W(V)$. Entonces $x \in W(V)$ para algún $V \in \mathcal{V}$. Luego, por definición de $W(V)$, existe un $H \in \mathcal{V}$ y un $n \in \omega$ tal que $x \in H \in \mathcal{S}_n(V)$. Así, tenemos que $x \in H \subset X$. Y por lo tanto $X \supset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W(V)$.

(\subset): Sea $x \in X$. Como \mathcal{V} es cubierta, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Luego, como $V \in \mathcal{S}_0(V)$, se tiene que

$$x \in V \in \mathcal{S}_0(V).$$

Lo cual implica que $x \in W(V)$. De esto se sigue que $X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W(V)$. Y por lo tanto $X = \bigcup P_X$.

Entonces ya podemos concluir que la familia P_X es una partición del espacio X . Ahora hagamos una observación: Dado un $V \in \mathcal{V}$, se tiene que

$$W(V) = X \setminus \left(\bigcup_{V' \in (\mathcal{V} \setminus \{V\})} W(V') \right),$$

es decir, $W(V)$ es el complemento de un abierto. Por lo que $W(V)$ es cerrado. Así, tenemos que $W(V)$ es cerrado-abierto en X para cada $V \in \mathcal{V}$.

Lo que haremos ahora es probar que $W(V)$ es σ -compacto para todo $V \in \mathcal{V}$. Para probar esto, veamos que $W(V) = \bigcup \{cl_X(U) : U \in \mathcal{S}(V)\}$. Sea $x \in W(V)$. Entonces existe un $H \in \mathcal{V}$ tal que

$$x \in H \in S_k(V),$$

para algún $k \in \omega$. Luego, del hecho que $H \subset cl_X(H)$ y $S_k(V) \subset \mathcal{S}(V)$ se sigue que $x \in cl_X(H)$ con $H \in \mathcal{S}(V)$. Por lo tanto

$$W(V) \subset \bigcup \{cl_X(U) : U \in \mathcal{S}(V)\}.$$

Ahora, sea $x \in \bigcup\{cl_X(U) : U \in S(V)\}$. Entonces existe $U \in S(V)$ tal que $x \in cl_X(U)$. Luego, por definición de $W(V)$, se tiene que $U \subset W(V)$, lo cual implica que

$$cl_X(U) \subset cl_X(W(V)) = W(V).$$

De esto se sigue que $x \in W(V)$. Así, tenemos que $W(V) \supset \bigcup\{cl_X(U) : U \in S(V)\}$. Y por lo tanto $W(V) = \bigcup\{cl_X(U) : U \in S(V)\}$.

Por último, notemos que, como $|S(V)| \leq \aleph_0$, se tiene que $W(V)$ es unión numerable que conjuntos compactos. Por lo tanto $W(V)$ es σ -compacto para cada $V \in \mathcal{V}$. Esto completa la demostración. \square

Terminamos esta sección con un teorema importante para espacios métricos: el teorema de **A. H. Stone**.

Teorema 3.2.9. [2, Teorema 5.3, p. 186] *Todo espacio métrico es paracompacto.*

3.3. Paracompacidad y Variedades

Con los teoremas y propiedades de las variedades dadas en las secciones 3.1 y 3.2, ya podemos probar el teorema que mencionamos al principio del capítulo y que nos da una caracterización acerca de la metrización de las variedades.

Demostración del Teorema 3.0.1. (4) \Rightarrow (3): Sea X una variedad paracompacta. En la proposición 3.1.6, se probó que las variedades son localmente compactas. Entonces, por el teorema 3.2.8, se tiene que

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \text{ donde } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y X_i es σ -compacto. Pero como X es conexo por ser variedad, se tiene que $X = X_j$ para algún $j \in I$. Así, tenemos que X es σ -compacto. Y por el lema 3.2.6 se sigue que X es Lindelöf.

(3) \Rightarrow (2): Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y X una n -variedad Lindelöf. Sea $x \in X$. Como X es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , existe una vecindad abierta U_x de x , un abierto $V_x \subset \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\varphi_x : U_x \rightarrow V_x$. Como V_x es segundo numerable, por el lema 3.1.2 se tiene que U_x es segundo numerable. Luego, notemos que

$$\mathcal{B} = \{U_x : x \in X\}$$

es una cubierta abierta para X . Entonces, como X es Lindelöf, existe $Y \subset \mathcal{B}$ numerable tal que

$$X = \bigcup_{x \in Y} U_x.$$

Así, tenemos que X es la unión numerable de espacios segundo numerables. Por lo tanto, de la proposición 3.1.3 se sigue que X es segundo numerable.

(2) \Rightarrow (1): Sea X segundo numerable. De la proposición 3.1.6 y del lema 3.1.7 se sigue que X es completamente regular. En particular X es regular. Entonces, por el teorema de metrización de Urysohn: teorema 3.1.8, se sigue que X es metrizable.

(1) \Rightarrow (4): Se sigue directamente del teorema de A. H. Stone: teorema 3.2.9. \square

Capítulo 4

La compactación de Freudenthal y extremos de variedades

4.1. La compactación de Freudenthal

El principal objetivo de esta sección será definir la **compactación de Freudenthal** de un espacio topológico de Tychonoff y localmente compacto. Notemos que las variedades, que son los espacios en los que estamos interesados, tienen estas propiedades topológicas. Esto nos permitirá hablar de la **compactación de Freudenthal** de una variedad.

En el artículo [3, Definición 2.3, p. 6] se define a la **compactación de Freudenthal** como un **límite inverso** de un **sistema directo**. Aunque nos basaremos en este artículo para definir los **extremos** de un espacio conexo, Hausdorff y localmente compacto, abordaremos la **compactación de Freudenthal** como en el libro de Porter-Woods: [8, Problema 4, p. 337].

Sea X un espacio topológico. La pareja (Y, e) es una **compactación** de X si Y es un espacio topológico compacto Hausdorff y $e : X \rightarrow Y$ es un encaje de X en Y tal que $cl_Y(e[X]) = Y$.

Definición 4.1.1. *Sea X un espacio regular. Una **FG-base** \mathcal{B} es una base de conjuntos abiertos que satisface:*

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{B}$,
- (2) Si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{B}$,
- (3) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces $X \setminus cl_X(U) \in \mathcal{B}$, y

(4) Para cada conjunto abierto U en X y $V \in \mathcal{B}$ tal que $cl_X(V) \subset U$, existe un conjunto $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(V) \subset W \subset cl_X(W) \subset U. \quad (4.1)$$

La **compactación de Fan-Gottesman** de la cual no hablaremos ya que se sale de nuestro objetivo de estudio, es una forma de construir compactaciones, en particular nos servirá para la **compactación de Freudenthal** de la cual hablaremos en esta sección, pero no vamos a explorar de manera general, sólo la utilizaremos para definir los **extremos de variedades**.

Una consecuencia importante de las propiedades (2), (3) y (4) de una FG-base es la siguiente.

Lema 4.1.2. Sea X un espacio regular y \mathcal{B} una FG-base de X . Si $U, V \in \mathcal{B}$, W es un abierto en X y $cl_X(U) \cap cl_X(V) \subset W$, entonces existe un $R \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(U) \cap cl_X(V) \subset R \subset cl_X(R) \subset W.$$

Demostración. Sea \mathcal{B} una FG-base de X , $U, V \in \mathcal{B}$ y W un abierto en X tal que $cl_X(U) \cap cl_X(V) \subset W$. Veamos que

$$cl_X(U) \subset W \cup (X \setminus cl_X(V)). \quad (4.2)$$

Sea $x \in cl_X(U)$. Entonces $x \in cl_X(V)$ o $x \notin cl_X(V)$. Si $x \in cl_X(V)$ se sigue que $x \in W$. Y si $x \notin cl_X(V)$, entonces $x \in X \setminus cl_X(V)$. Así, tenemos que $x \in W \cup (X \setminus cl_X(V))$. Esto prueba la ecuación 4.2.

Por otro lado, como $W \cup (X \setminus cl_X(V))$ es abierto, por definición de \mathcal{B} , existe un $C \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(U) \subset C \subset cl_X(C) \subset W \cup (X \setminus cl_X(V)). \quad (4.3)$$

Ahora veamos que

$$cl_X(V) \subset W \cup X \setminus cl_X(C) \quad (4.4)$$

Sea $x \in cl_X(V)$. Entonces $x \in cl_X(C)$ o $x \notin cl_X(C)$. Si $x \notin cl_X(C)$, entonces $x \in X \setminus cl_X(C)$. Y si $x \in cl_X(C)$, por 4.3 se tiene que $x \in X \setminus cl_X(V)$ o $x \in W$. Pero como $x \in cl_X(V)$, no puede pasar que $x \in X \setminus cl_X(V)$. Entonces $x \in W$. Así, tenemos que $x \in W \cup (X \setminus cl_X(C))$. Esto prueba la ecuación 4.4.

Por otro lado, como $W \cup (X \setminus cl_X(C))$ es abierto, por definición de \mathcal{B} , existe un $D \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(V) \subset D \subset cl_X(D) \subset W \cup (X \setminus cl_X(C)). \quad (4.5)$$

Tomemos $R = C \cap D$. De 4.3 y 4.5 se sigue que $cl_X(U) \cap cl_X(V) \subset R$. Por último, veamos que $cl_X(R) \subset W$. Sea $x \in cl_X(R)$. De nuevo por 4.3 y 4.5 se tiene que $cl_X(R) \subset cl_X(C) \cap cl_X(D)$. Entonces $x \in cl_X(C) \cap cl_X(D)$. Como $x \in cl_X(D)$, de 4.5 se tiene que $x \in W$ o $x \in X \setminus cl_X(C)$. Pero como $x \in cl_X(C)$, se sigue que $x \in W$. Por lo tanto $cl_X(R) \subset W$.

□

Sea X un espacio topológico regular y \mathcal{B} una FG-base de X . Una familia no vacía $F \subset \mathcal{B}$ se dice que es una **familia vinculante** si para cada familia $\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \subset F$, se tiene que

$$cl_X(V_1) \cap \dots \cap cl_X(V_n) \neq \emptyset.$$

Definición 4.1.3. Si X un espacio topológico regular y \mathcal{B} una FG-base de X , definimos una colección $b_{\mathcal{B}}(X)$ de subconjuntos de \mathcal{B} como

$$b_{\mathcal{B}}(X) = \{F \subset \mathcal{B} : F \text{ es una familia vinculante maximal}\}. \quad (4.6)$$

Y para cada $U \in \mathcal{B}$ definimos

$$S(U) = \{F \in b_{\mathcal{B}}(X) : \text{para algún } V \in F, cl_X(V) \subset U\}.$$

Proposición 4.1.4. Sea X un espacio regular y \mathcal{B} una FG-base de X . La familia $\mathcal{H} = \{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ cumple las siguientes propiedades:

- (a) $\bigcup \mathcal{H} = b_{\mathcal{B}}(X)$, y
- (b) $S(U) \cap S(V) = S(U \cap V)$ para cada $U, V \in \mathcal{B}$.

Demostración. (a) Probaremos este inciso por contenciones.

\subset] Esta contención se sigue del hecho que $S(U) \subset b_{\mathcal{B}}(X)$ para cada $U \in \mathcal{B}$.

\supset] Veamos que $S(X) = b_{\mathcal{B}}(X)$. Por definición $S(X) \subset b_{\mathcal{B}}(X)$. Ahora sea $F \in b_{\mathcal{B}}(X)$. Entonces $F \subset \mathcal{B}$ y $F \neq \emptyset$ por ser familia vinculante. Luego, como cada elemento de \mathcal{B} es subconjunto de X , se tiene que para cada $V \in F$, $V \subset X$. Más aún, $cl_X(V) \subset X$ para cada $V \in F$. De esto se sigue que $F \in S(X)$. Así, tenemos que $b_{\mathcal{B}}(X) \subset S(X)$.

Por lo tanto $S(X) = b_{\mathcal{B}}(X)$. Luego, como $S(X) \in \mathcal{H}$ se sigue que $\bigcup \mathcal{H} \supset b_{\mathcal{B}}(X)$. Y por lo tanto $\bigcup \mathcal{H} = b_{\mathcal{B}}(X)$.

(b) Sean $S(U), S(V) \in \mathcal{H}$. Veamos que $S(U \cap V) = S(U) \cap S(V)$.

\subset] Sea $F \in S(U \cap V)$. Entonces existe un $W \in F$ tal que $cl_X(W) \subset U \cap V$. Por lo que $cl_X(W) \subset U$ y $cl_X(W) \subset V$. De esto se sigue que $F \in S(U) \cap S(V)$. Y por tanto $S(U \cap V) \subset S(U) \cap S(V)$.

\supset] Sea $F \in S(U) \cap S(V)$. Entonces existen $W, W' \in F$ tales que $cl_X(W) \subset U$ y $cl_X(W') \subset V$. Entonces

$$cl_X(W) \cap cl_X(W') \subset U \cap V.$$

Luego, como $U \cap V$ es un abierto en X y $W, W' \in \mathcal{B}$, por el lema 4.1.2 existe un $R \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(W) \cap cl_X(W') \subset R \subset cl_X(R) \subset U \cap V. \quad (4.7)$$

Tomemos $F' = F \cup \{R\}$. Veamos que F' es una familia vinculante. Sean $V_1, \dots, V_n \in F'$. El caso en que $V_i \in F$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ es trivial, ya que F es familia vinculante. Consideremos entonces, sin pérdida de generalidad que $V_1 = R$. Hagamos

$$A = \{W, W', V_2, \dots, V_n\}.$$

Notemos que $A \subset F$. Entonces, de 4.7 y del hecho que F es familia vinculante se tiene que

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \left[cl_X(W) \cap cl_X(W') \cap \left(\bigcap_{i=2}^n cl_X V_i \right) \right] \\ &\subset cl_X(R) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n cl_X(V_i) \right). \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$cl_X(R) \cap \dots \cap cl_X(V_n) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto F' es una familia vinculante. Luego, como $F \subset F'$ y F es maximal, se tiene que $F = F'$. Entonces $R \in F$ y de 4.7 se sigue que $F \in S(U \cap V)$. Esto prueba que $S(U \cap V) \supset S(U) \cap S(V)$. Y por lo tanto $S(U \cap V) = S(U) \cap S(V)$. \square

Notemos que la propiedad (b) de la familia \mathcal{H} de la proposición anterior es más fuerte que la condición (2) de la proposición 1.1.1 (página 3). Entonces, como la familia $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ en particular cumple las condiciones (1) y (2) de la proposición 1.1.1, existe una única topología τ en $b_{\mathcal{B}}(X)$ para la cual la familia $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es base para τ .

Observación 4.1.5. Sean $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $U \subset V$. Entonces $S(U) \subset S(V)$.

La observación anterior se sigue directamente de la definición de $S(U)$. Ya que si tomamos $F \in S(U)$, entonces existe $W \in F$ tal que $cl_X(W) \subset U$. Luego, como $U \subset V$, se sigue que $cl_X(W) \subset V$. Así, tenemos que $F \in S(V)$ y por lo tanto $S(U) \subset S(V)$.

Lo que haremos ahora es dar otra base para el espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$, pero primero hagamos una observación: Si $U \in \mathcal{B}$, entonces por la propiedad 3 de la definición 4.1.1 se tiene que $X \setminus cl_X(U) \in \mathcal{B}$. Aplicando de nuevo la propiedad 3 a $X \setminus cl_X(U)$ se tiene que $X \setminus (X \setminus cl_X(U)) \in \mathcal{B}$. Luego, por la proposición 1.1.10(1) se sigue que $int_X(cl_X(U)) = X \setminus (X \setminus cl_X(U))$. Entonces se cumple que $int_X(cl_X(U)) \in \mathcal{B}$.

Ahora, ya conocemos una base para el espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$ que consta de los elementos $S(U)$. Pero algo importante de mencionar es que podemos extraer un subfamilia \mathcal{J} de la base $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ que resulta ser base y que además sus elementos

son tales que, si $S(U) \in \mathcal{J}$, entonces $U = \text{int}_X(\text{cl}_X(U))$. Y esto lo probaremos en el siguiente lema.

Lema 4.1.6. *La familia*

$$\mathcal{J} = \{S(U) : U \in \mathcal{B} \text{ y } U = \text{int}_X(\text{cl}_X(U))\}$$

es una base para el espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$.

Demostración. Sean $F \in b_{\mathcal{B}}(X)$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $F \in S(B)$. Entonces existe un $V \in F$ tal que $\text{cl}_X(V) \subset B$. Luego, por definición de \mathcal{B} existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$\text{cl}_X(V) \subset W \subset \text{cl}_X(W) \subset B. \quad (4.8)$$

Como W es abierto, se tiene que $W \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(W))$. Luego, notemos que

$$\text{int}_X(\text{cl}_X(W)) \subset \text{cl}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(W))) \subset \text{cl}_X(W) \quad (4.9)$$

Entonces de 4.8 y 4.9 se tiene que

$$\text{cl}_X(V) \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(W)) \subset \text{cl}_X(\text{int}_X(\text{cl}_X(W))) \subset B.$$

Hagamos $U = \text{int}_X(\text{cl}_X(W))$. Por la proposición 1.1.11 se tiene que U es un abierto regular, es decir, $U = \text{int}_X(\text{cl}_X(U))$. Entonces, como $\text{cl}_X(V) \subset U$ se tiene que $F \in S(U)$. Y como $U \subset B$, por la observación 4.1.5 se sigue que $S(U) \subset S(B)$. Así, tenemos que $F \in S(U) \subset S(B)$. Por lo tanto la familia \mathcal{J} también es base del espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$. □

Aunque conocemos dos bases para $b_{\mathcal{B}}(X)$, de ahora en adelante cuando hablemos del espacio topológico $b_{\mathcal{B}}(X)$ consideraremos la topología generada por la base $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$, al menos que digamos lo contrario.

Proposición 4.1.7. *Sea $F_0 \in \mathcal{B}$ vinculante. La familia*

$$Z = \{F \in \mathcal{B} : F_0 \subset F \text{ y } F \text{ vinculante}\}$$

tiene un elemento maximal.

Demostración. Para probar que la familia Z tiene un elemento maximal haremos uso del lema de Zorn: lema 1.4.1 (página 15).

Sea $Y \subset Z$ tal que para todo $F, G \in Y$ se tiene que $F \subset G$ o $G \subset F$. Hagamos $H = \bigcup Y$. Veamos que H es vinculante. Sean $U_1, \dots, U_n \in H$. Por definición existen $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{B}$ tal que $U_i \in F_i$ con $1 \leq i \leq n$. Como $F_i \subset F_{i+1}$ o $F_{i+1} \subset F_i$, existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $F_i \subset F_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $U_i \in F_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Y como F_j es vinculante, se sigue que $\text{cl}_X(U_1) \cap \dots \cap \text{cl}_X(U_n) \neq \emptyset$. Por lo tanto H es vinculante.

Por otro lado, notemos que H es cota superior de Y , ya que si $F \in Y$, se tiene que $F \subset H$. De esta manera hemos probado que toda cadena en Z tiene cota superior, entonces por el lema de Zorn, Z tiene un elemento maximal. □

Observemos que la proposición anterior en particular nos dice que la familia $b_{\mathcal{B}}(X)$ es no vacía.

Como ya hemos mencionado, nuestro objetivo es dar la **compactación de Freudenthal** de un espacio Tychonoff localmente compacto. Resulta que esta compactación será justamente el espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$ tomando una FG-base particular. Esta compactación la daremos en un teorema. Por lo que de ahora en adelante, probaremos varios resultados que nos ayudarán a demostrar el teorema antes mencionado.

Comenzaremos dando algunas propiedades importantes de la familia $S(U)$.

Lema 4.1.8. $S(U) = \emptyset$ si y sólo si $U = \emptyset$.

Demostración. \Leftarrow] Si $U = \emptyset$, se sigue directamente de la definición que $S(\emptyset) = \emptyset$.

\Rightarrow] Supongamos que $U \neq \emptyset$. Entonces como X es regular, existe un $V \in \mathcal{B}$ no vacío tal que $V \subset cl_X(V) \subset U$. Hagamos

$$Z = \{F \subset \mathcal{B} : \{V\} \subset F \text{ y } F \text{ vinculante}\}.$$

Por la proposición 4.1.7 se sigue que Z tiene un elemento maximal. Entonces existe $F \in b_{\mathcal{B}}(X)$ tal que $V \in F$. Y como $cl_X(V) \subset U$ se tiene que $F \in S(U)$, lo cual implica que $S(U) \neq \emptyset$. Y de esta manera, hemos probado la afirmación contrapuesta. □

Proposición 4.1.9. Sean $F \in b_{\mathcal{B}}(X)$ y $U \in \mathcal{B}$. Si $U \notin F$, entonces existe un $V \in F$ tal que $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$. En particular, $F \in S(X \setminus cl_X(U))$.

Demostración. Sean $F \in b_{\mathcal{B}}(X)$ y $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \notin F$. Supongamos que para todo $V \in F$ se tiene que

$$cl_X(V) \cap cl_X(U) \neq \emptyset. \quad (4.10)$$

Hagamos $G = F \cup \{U\}$. Como F es maximal, G no puede ser vinculante. Entonces existe una familia finita $\{V_1, \dots, V_n\} \subset F$ tal que

$$[cl_X(V_1) \cap \dots \cap cl_X(V_n)] \cap cl_X(U) = \emptyset.$$

Lo cual implica que

$$[cl_X(V_1) \cap \dots \cap cl_X(V_n)] \subset X \setminus cl_X(U).$$

Como $X \setminus cl_X(U)$ es abierto y $V_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, por la proposición 4.1.2 existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(V_1) \cap \dots \cap cl_X(V_n) \subset V \subset cl_X(V) \subset X \setminus cl_X(U). \quad (4.11)$$

Veamos que $V \in F$. Tomemos $W_1, \dots, W_m \in F$. De 4.11 y del hecho que F es vinculante se tiene que

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \left(\bigcap_{i=1}^n cl_X(V_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m cl_X(W_i) \right) \\ &\subset cl_X(V) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m cl_X(W_i) \right). \end{aligned}$$

De esto se sigue que la familia $F \cup \{V\}$ es vinculante. Pero como F es maximal, se tiene que $V \in F$. Luego, como $cl_X(V) \subset X \setminus cl_X(U)$, se sigue que $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$. Pero esto contradice 4.10. Por lo tanto, existe un $V \in F$ tal que $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$. De esto se sigue que $cl_X(V) \subset X \setminus cl_X(U)$. Y por lo tanto $F \in S(X \setminus cl_X(U))$. Esto completa la demostración. \square

Proposición 4.1.10. *Sea $U \in \mathcal{B}$ y $F \in b_{\mathcal{B}}(X)$. Entonces:*

- (a) $U \in F$ si y sólo si $F \in cl(S(U))$.
- (b) $b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl(S(U)) = S(X \setminus cl_X(U))$.

Demostración. (a) \Rightarrow] Supongamos que $U \in F$. Tomemos un abierto básico $S(W)$ con $W \in \mathcal{B}$ tal que $F \in S(W)$. Por definición de $S(W)$, existe un $V \in F$ tal que $cl_X(V) \subset W$. Como $U \in F$ y F es vinculante, se tiene que $cl_X(U) \cap cl_X(V) \neq \emptyset$. Entonces, como $cl_X(V) \subset W$, se sigue que $cl_X(U) \cap W \neq \emptyset$. Luego, de la proposición 1.1.3 se tiene que $U \cap W \neq \emptyset$. Entonces por el lema 4.1.8 se tiene que $S(U \cap W) \neq \emptyset$. Y como $S(U \cap W) = S(U) \cap S(W)$ por la proposición 4.1.4(b), se sigue que $S(U) \cap S(W) \neq \emptyset$. Y por lo tanto $F \in cl(S(U))$.

\Leftarrow] Supongamos que $U \notin F$. Entonces, por la proposición 4.1.9 existe un $V \in F$ tal que $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$. Entonces $cl_X(V) \subset X \setminus cl_X(U)$. Luego, como $X \setminus cl_X(U) \in \mathcal{B}$, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(V) \subset W \subset cl_X(W) \subset X \setminus cl_X(U).$$

Como $cl_X(V) \subset W$, se sigue que $F \in S(W)$. Además $W \cap cl_X(U) = \emptyset$ lo cual implica que $W \cap U = \emptyset$. Luego vemos que

$$S(W) \cap S(U) = S(W \cap U) = S(\emptyset) = \emptyset.$$

De esta manera hemos entrado un abierto $S(W)$ que contiene a F y que $S(W) \cap S(U) = \emptyset$. Esto significa que $F \notin cl(S(U))$, lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto $U \in F$.

(b) Probaremos esta igualdad por contenciones.

\subset] Sea $F \in b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl(S(U))$. Entonces $F \notin cl(S(U))$. Luego, por el inciso (a) se tiene que $U \notin F$. Y por la proposición 4.1.9 se sigue que $F \in S(X \setminus cl_X(U))$. Y así, tenemos que $b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl(S(U)) \subset S(X \setminus cl_X(U))$.

\supset] Sea $F \in S(X \setminus cl_X(U))$. Entonces existe un $V \in F$ tal que $cl_X(V) \subset X \setminus$

$cl_X(U)$, lo cual implica que $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$. Como F es vinculante, entonces $U \notin F$. Luego, por el inciso (a) se tiene que $F \notin cl(S(U))$. Por lo tanto $F \in b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl(S(U))$. Y así, tenemos que $S(X \setminus cl_X(U)) \subset b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl(S(U))$. Esto completa la prueba de la proposición. \square

Proposición 4.1.11. Sean $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}$. Si $cl(S(U_1)) \cap \dots \cap cl(S(U_n)) \neq \emptyset$, entonces $cl_X(U_1) \cap \dots \cap cl_X(U_n) \neq \emptyset$.

Demostración. Sean $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}$ tal que $cl(S(U_1)) \cap \dots \cap cl(S(U_n)) \neq \emptyset$. Tomemos un $F \in \bigcap_{i=1}^n cl(S(U_i))$. Entonces $F \in cl(S(U_i))$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, por la proposición 4.1.10 se tiene que $U_i \in F$. Y del hecho que F es familia vinculante se sigue que

$$cl_X(U_1) \cap \dots \cap cl_X(U_n) \neq \emptyset.$$

\square

Con los resultados que ya tenemos hasta ahora, ya podemos probar que el espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$ es Hausdorff y compacto.

Teorema 4.1.12. Sea X un espacio topológico regular y \mathcal{B} una FG-base para X . El espacio $b_{\mathcal{B}}(X)$ es Hausdorff y compacto.

Demostración. Primero veamos que $b_{\mathcal{B}}(X)$ es Hausdorff. Sean $F, G \in b_{\mathcal{B}}(X)$ tales que $F \neq G$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe un $U \in F$ tal que $U \notin G$. Por la proposición 4.1.9 se tiene que $G \in S(X \setminus cl_X(U))$. Entonces existe un abierto $V \in G$ tal que $cl_X(V) \subset X \setminus cl_X(U)$. Luego, como \mathcal{B} es FG-base y $X \setminus cl_X(U) \in \mathcal{B}$, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$cl_X(V) \subset W \subset cl_X(W) \subset X \setminus cl_X(U). \quad (4.12)$$

De 4.12 se tiene que $G \in S(W)$. También de 4.12 se tiene que $cl_X(U) \subset X \setminus cl_X(W)$, lo cual implica que $F \in S(X \setminus cl_X(W))$. Luego vemos que

$$\begin{aligned} S(W) \cap S(X \setminus cl_X(W)) &= S(W \cap [X \setminus cl_X(W)]) \\ &= S(\emptyset) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$S(W) \cap S(X \setminus cl_X(W)) = \emptyset.$$

Así, tenemos que $S(W)$ y $S(X \setminus cl_X(W))$ son abiertos disjuntos que separan a F de G . Por lo tanto $b_{\mathcal{B}}(X)$ es Hausdorff.

Veamos que $b_{\mathcal{B}}(X)$ es compacto. Por el lema 4.1.6, la familia $\mathcal{J} = \{S(U) : U = \text{int}_X(cl_X(U))\}$ es base para $b_{\mathcal{B}}(X)$. Sea $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{J} = \{S(U) : U \in \mathcal{V}\}$.

Ahora consideremos una subfamilia $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{C} = \{S(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es cubierta de $b_{\mathcal{B}}(X)$. Supongamos que \mathcal{C} no tiene subcubierta finita. Hagamos

$$F_0 = \{X \setminus cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Sean $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^n cl_X[X \setminus cl_X(U_i)] = \emptyset$. Ya que $X \setminus cl_X(U_i) \in \mathcal{B}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la proposición 4.1.11 implica que

$$\bigcap_{i=1}^n cl[S(X \setminus cl_X(U_i))] = \emptyset. \quad (4.13)$$

Luego, de 4.13 se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^n b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl[S(X \setminus cl_X(U_i))] = b_{\mathcal{B}}(X). \quad (4.14)$$

Como $X \setminus cl_X(U_i) \in \mathcal{B}$, se tiene que $X \setminus cl_X[X \setminus cl_X(U_i)] \in \mathcal{B}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, de la proposición 4.1.10 tenemos que

$$b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl[S(X \setminus cl_X(U_i))] = S(X \setminus cl_X[X \setminus cl_X(U_i)]). \quad (4.15)$$

Luego, de 4.14, 4.15 y de la proposición 1.1.10(1) tenemos que

$$\begin{aligned} b_{\mathcal{B}}(X) &= \bigcup_{i=1}^n b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl[S(X \setminus cl_X(U_i))] \\ &= \bigcup_{i=1}^n S(X \setminus cl_X[X \setminus cl_X(U_i)]) \\ &= \bigcup_{i=1}^n S(int_X[cl_X(U_i)]) \\ &= \bigcup_{i=1}^n S(U_i). \end{aligned}$$

Pero esto es una contradicción, ya que supusimos que \mathcal{C} no tiene subcubierta finita. Esta contradicción es por el hecho de suponer que $\bigcap_{i=1}^n cl_X[X \setminus cl_X(U_i)] = \emptyset$. Por lo tanto F_0 es una familia vinculante.

Ahora hagamos

$$Z = \{F \subset \mathcal{B} : F_0 \subset F \text{ y } F \text{ vinculante}\}.$$

Por el lema 4.1.7, Z tiene un elemento maximal. Sea F la familia vinculante maximal de Z . Como $F_0 \subset F$, se tiene que $X \setminus cl_X(U) \in F$ y la proposición 4.1.10 implica que $F \in cl[S(X \setminus cl_X(U))]$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Entonces

$$F \notin b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl[S(X \setminus cl_X(U))] \text{ para cada } U \in \mathcal{U}. \quad (4.16)$$

De 4.16 se tiene que

$$F \not\subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl[S(X \setminus cl_X(U))].$$

Luego, de 4.15 y de la proposición 1.1.10(1) se tiene que

$$\begin{aligned} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} b_{\mathcal{B}}(X) \setminus cl[S(X \setminus cl_X(U))] &= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} S[X \setminus cl_X(X \setminus cl_X(U))] \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} S(int_X[cl_X(U)]) \\ &= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} S(U). \end{aligned}$$

Con esta última contención hemos llegado a una contradicción, ya que $F \not\subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} S(U)$ pero esto contradice el hecho que \mathcal{C} es cubierta de $b_{\mathcal{B}}(X)$. Así, tenemos que \mathcal{C} tiene subcubierta finita. Por lo tanto, del teorema 1.1.24 se sigue que $b_{\mathcal{B}}(X)$ es compacto. □

Lo que haremos ahora es dar el encaje de X en $b_{\mathcal{B}}(X)$ y elegir de manera adecuada una FG-base para $b_{\mathcal{B}}(X)$. Para elegir esta FG-base necesitamos una definición: Si X es un espacio topológico, se dice que X es de **borde compacto** si X tiene una base cuyos elementos tienen frontera compacta.

Proposición 4.1.13. *Si X es un espacio regular y \mathcal{B} es una FG-base de X , entonces la familia*

$$U_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in cl_X(V)\}$$

es una familia vinculante maximal.

Demostración. Sea $\{V_1, \dots, V_n\} \subset U_x$. Entonces, por definición de U_x se tiene que $x \in cl_X(V_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, tenemos que

$$cl_X(V_1) \cap \dots \cap cl_X(V_n) \neq \emptyset.$$

Y por lo tanto U_x es una familia vinculante. Probemos que U_x es maximal. Sea $F \subset \mathcal{B}$ una familia vinculante tal que $U_x \subset F$. Veamos que $U_x = F$. Supongamos que existe un $V \in F$ tal que $V \notin U_x$. Entonces $x \notin cl_X(V)$, lo cual implica que $x \in X \setminus cl_X(V)$. Como X es regular, por la proposición 1.1.13, existe un abierto W tal que

$$x \in W \subset cl_X(W) \subset X \setminus cl_X(V). \quad (4.17)$$

Por otro lado, como \mathcal{B} es base, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset W$. Como $B \subset W$, entonces $cl_X(B) \subset cl_X(W)$. Luego, de 4.17 se tiene que

$$x \in B \subset cl_X(B) \subset cl_X(W) \subset X \setminus cl_X(V).$$

Entonces $B \in U_x$ y como $U_x \subset F$ se tiene que $B \in F$. Pero si tomamos $H = \{B, V\}$, tenemos que $H \subset F$ pero $cl_X(B) \cap cl_X(V) = \emptyset$, lo cual contradice el hecho que F es una familia vinculante. Así, tenemos que $U_x = F$ y por lo tanto U_x es una familia vinculante maximal. \square

Teorema 4.1.14. *Sea X un espacio topológico Tychonoff de borde compacto. Entonces la familia*

$$\mathcal{B} = \{U : U \text{ es abierto y } Fr_X(U) \text{ es compacto}\} \quad (4.18)$$

es una FG-base para X .

Demostración. Primero notemos que, como X es de borde compacto, por definición \mathcal{B} es una base. Ahora veamos que \mathcal{B} cumple las cuatro propiedades de la definición 4.1.1 (página 70).

(1) Por definición, los conjuntos \emptyset y X son abiertos. Luego, como $Fr_X(\emptyset) = \emptyset$, se sigue que $Fr_X(\emptyset)$ es compacto por ser finito. Y así tenemos que $\emptyset \in \mathcal{B}$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} Fr_X(X) &= cl_X(X) \cap cl_X(X \setminus X) \\ &= cl_X(X) \cap \emptyset \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual implica que $Fr_X(X)$ es compacto por ser finito. Por lo tanto $X \in \mathcal{B}$.

(2) Sean $U, V \in \mathcal{B}$. Como U y V son abiertos, se tiene que $U \cap V$ es abierto. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} Fr_X(U \cap V) &= cl_X(U \cap V) \cap cl_X(X \setminus [U \cap V]) \\ &= cl_X(U \cap V) \cap [cl_X(X \setminus U) \cup cl_X(X \setminus V)] \\ &\subset (cl_X(U) \cap cl_X[X \setminus U]) \cup (cl_X(V) \cap cl_X[X \setminus V]) \\ &= Fr_X(U) \cup Fr_X(V). \end{aligned}$$

Como $Fr_X(U)$ y $Fr_X(V)$ son compactos, por el teorema 1.1.27 se tiene que $Fr_X(U) \cup Fr_X(V)$ es compacto. Y como $Fr_X(U \cap V)$ es cerrado en $Fr_X(U) \cup Fr_X(V)$, por el teorema 1.1.28 se sigue que $Fr_X(U \cap V)$ es compacto. Por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{B}$.

(3) Sea $U \in \mathcal{B}$. Como $cl_X(U)$ es cerrado, se tiene que $X \setminus cl_X(U)$ es abierto. Y como $U \subset cl_X(U)$, se sigue que $X \setminus cl_X(U) \subset X \setminus U$. Por lo que

$$cl_X(X \setminus cl_X(U)) \subset cl_X(X \setminus U). \quad (4.19)$$

Luego, de la definición de frontera y de 4.19 se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{Fr}_X(X \setminus \text{cl}_X(U)) &= \text{cl}_X(X \setminus \text{cl}_X(U)) \cap \text{cl}_X(X \setminus [X \setminus \text{cl}_X(U)]) \\
&= \text{cl}_X(X \setminus \text{cl}_X(U)) \cap \text{cl}_X(\text{cl}_X(U)) \\
&= \text{cl}_X(X \setminus \text{cl}_X(U)) \cap \text{cl}_X(U) \\
&\subset \text{cl}_X(X \setminus U) \cap \text{cl}_X(U) \\
&= \text{Fr}_X(U).
\end{aligned}$$

Como $\text{Fr}_X(U)$ es compacto y $\text{Fr}_X(X \setminus \text{cl}_X(U))$ es cerrado en $\text{Fr}_X(U)$, por el teorema 1.1.28 se sigue que $\text{Fr}_X(X \setminus \text{cl}_X(U))$ es compacto. Por lo tanto $X \setminus \text{cl}_X(U) \in \mathcal{B}$.

(4) Sea U un subconjunto abierto de X y tomemos un $V \in \mathcal{B}$ tal que $\text{cl}_X(V) \subset U$. Como X es Tychonoff, por el teorema 1.1.12 se tiene que X es regular. Entonces, por la proposición 1.1.13 se tiene que para cada $x \in \text{Fr}_X(V)$ existe un abierto U'_x en X tal que

$$x \in U'_x \subset \text{cl}_X(U'_x) \subset U.$$

Por otro lado, como \mathcal{B} es base, para cada $x \in \text{Fr}_X(V)$, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset U'_x$. Notemos que la familia $\{U_x : x \in \text{Fr}_X(V)\}$ es cubierta abierta para $\text{Fr}_X(V)$. Luego, como $\text{Fr}_X(V)$ es compacto, existe un subconjunto $Y \subset \text{Fr}_X(V)$ finito tal que

$$\text{Fr}_X(V) \subset \bigcup_{x \in Y} U_x.$$

Ahora, tomemos

$$W = V \cup \left(\bigcup_{x \in Y} U_x \right).$$

Notemos que W es abierto por ser la unión de abiertos. Luego, del lema 1.1.8 se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{Fr}_X(W) &= \text{Fr}_X \left(V \cup \left(\bigcup_{x \in Y} U_x \right) \right) \\
&\subset \text{Fr}_X(V) \cup \left(\bigcup_{x \in Y} \text{Fr}_X(U_x) \right).
\end{aligned}$$

Ya que $U_x \in \mathcal{B}$, se tiene que $\text{Fr}_X(U_x)$ es compacto para todo $x \in Y$. Así, tenemos que $\text{Fr}_X(W)$ esta contenido y es cerrado en un compacto. Entonces, del teorema 1.1.28 se sigue que $\text{Fr}_X(W)$ es compacto. Y por lo tanto $W \in \mathcal{B}$.

Por último, veamos que W cumple con la condición 4.1 (página 71). Del lema 1.1.8 y del hecho que $\{U_x : x \in Y\}$ es cubierta para $\text{Fr}_X(V)$ se tiene que

$$cl_X(V) = V \cup Fr_X(V) \subset V \cup \left(\bigcup_{x \in Y} U_x \right) = W.$$

Así, tenemos que $cl_X(V) \subset W$. Ahora, vemos que

$$\begin{aligned} cl_X(W) &= cl_X \left(V \cup \left(\bigcup_{x \in Y} U_x \right) \right) \\ &= cl_X(V) \cup cl_X \left(\bigcup_{x \in Y} U_x \right) \\ &\subset U. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $cl_X(W) \subset U$. Entonces W cumple la condición 4.1 (página 71). Por lo tanto \mathcal{B} es una FG-base para X . Esto completa la prueba del teorema. \square

Con los resultados anteriores, ya estamos listos para definir la **compactación de Freudenthal**. Y como ya hemos dicho, lo haremos con un teorema.

Teorema 4.1.15. *Sea X un espacio topológico Tychonoff y de borde compacto. Entonces el par $(b_{\mathcal{B}}(X), e)$ es una compactación de X , donde*

$$\mathcal{B} = \{U : U \text{ es abierto y } Fr_X(U) \text{ es compacto}\}$$

y $e : X \rightarrow b_{\mathcal{B}}(X)$ esta dado como $e(x) = U_x$, donde

$$U_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in cl_X(V)\}.$$

Demostración. Sea X un espacio topológico Tychonoff con borde compacto. Sea $\mathcal{H} = \{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$. Veamos que $e : X \rightarrow e[X]$ es un homeomorfismo y que $e[X]$ es denso en $b_{\mathcal{B}}(X)$.

- $e : X \rightarrow e[X]$ es biyectiva. Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Como X es Tychonoff, en particular es Hausdorff por el teorema 1.1.12(1). Entonces existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como \mathcal{B} es base, existen $U', V' \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U' \subset U$ y $y \in V' \subset V$. Notemos que $U' \cap V' = \emptyset$. Luego, por la proposición 1.1.3, se tiene que $cl_X(U') \cap V' = \emptyset$. Por lo que $y \notin cl_X(U')$. Así tenemos que $U' \in U_x$ y $U' \notin U_y$, lo cual implica que $U_x \neq U_y$. Por lo tanto e es inyectiva. Y así tenemos que $e : X \rightarrow e[X]$ es biyectiva.

- e es continua. Tomemos un $S(U) \in \mathcal{H}$. Probemos que $e^{-1}[S(U)] = U$. Sea $x \in e^{-1}[S(U)]$. Entonces $e(x) \in S(U)$, lo cual implica que existe un $V \in e(x)$ tal que $cl_X(V) \subset U$. Luego, por definición de $e(x)$ se tiene que $x \in cl_X(V)$. Así, tenemos que $x \in U$ y por lo tanto $e^{-1}[S(U)] \subset U$.

Ahora sea $x \in U$. Por la proposición 4.1.13 se tiene que $e(x)$ es una familia vinculante maximal. Por lo que $e(x) \in b_B(X)$. Por otro lado, como $x \in U \subset cl_X(U)$, se tiene que $U \in e(x)$. Luego, como X es regular, por la proposición 1.1.13 existe un abierto V en X tal que

$$x \in V \subset cl_X(V) \subset U.$$

Y como \mathcal{B} es base, existe un abierto $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset V$. Así, tenemos que $x \in cl_X(W) \subset U$, lo cual implica que $W \in e(x)$. De esto se sigue que $e(x) \in S(U)$, es decir, $x \in e^{-1}[S(U)]$. Y por lo tanto $e^{-1}[S(U)] = U$. Como \mathcal{H} es base de la topología de $b_B(X)$ y U es abierto en X , por el teorema 1.1.15 se sigue que e es continua.

• $e^{-1} : e[X] \rightarrow X$ es continua. Tomemos un $U \in \mathcal{B}$ no vacío. Probemos que $e[X] \cap S(U) = e[U]$.

⊃ Como $U \subset X$ se sigue que $e[U] \subset e[X]$. Sea $F \in e[U]$. Del inciso anterior se tiene que $U \subset e^{-1}[S(U)]$, lo cual implica que $e[U] \subset e[e^{-1}[S(U)]]$. Por lo que $F \in e[e^{-1}[S(U)]]$. Entonces existe un $x \in e^{-1}[S(U)]$ tal que $e(x) = F$. Como $x \in e^{-1}[S(U)]$, se tiene que $F = e(x) \in S(U)$. Entonces $e[U] \subset S(U)$ y por lo tanto $e[U] \subset e[X] \cap S(U)$.

⊂ Sea $F \in e[X] \cap S(U)$. Como $F \in e[X]$, existe un $x \in X$ tal que $e(x) = F$. Luego, como $e : X \rightarrow e[X]$ es biyectiva, se tiene que $x = e^{-1}(F)$. Por otro lado, del inciso anterior tenemos que $e^{-1}[S(U)] = U$, y como $F \in S(U)$ y se tiene que

$$x = e^{-1}(F) \in e^{-1}[S(U)] = U,$$

es decir, $x \in U$. De esto se sigue que $F \in e[U]$ y por lo tanto $e[X] \cap S(U) \subset e[U]$. De esta manera, hemos probado que $e[X] \cap S(U) = e[U]$. Entonces, como

$$(e^{-1}[U])^{-1} = e[U] = e[X] \cap S(U)$$

y $e[X] \cap S(U)$ es un abierto básico en $e[X]$, por el teorema 1.1.15 se sigue que e^{-1} es continua.

De esta manera hemos probado que $e : X \rightarrow e[X]$ es un homeomorfismo. Ahora, ya hemos probado que $e[U] = e[X] \cap S(U)$ para cada $U \in \mathcal{B}$. Entonces si $U \neq \emptyset$, se tiene que $e[U] \neq \emptyset$. De esto se sigue que $e[X]$ es denso en $b_B(X)$. Además en la proposición 4.1.12 se probó que $b_B(X)$ es compacto. Entonces ya podemos concluir que $(b_B(X), e)$ es una compactación de X . □

La compactación $(b_B(X), e)$ del teorema anterior, es llamada la **compactación de Freudenthal** del espacio X . De ahora en adelante denotaremos a la compactación de Freudenthal de un espacio topológico X como $\mathcal{F}X$. Y a su topología generada por la base $\{S(U) : U \in \mathcal{B}\}$ como $\tau_{\mathcal{B}}$.

4.2. Ejemplos de compactaciones de Freudenthal metrizable

Definición 4.2.1. Sea X un espacio topológico Tychonoff. Si (Y, e) y (Z, i) son compactaciones de X , diremos que son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $h : Y \rightarrow Z$ tal que $h \circ e = i$.

El objetivo principal de esta sección será describir la compactación de Freudenthal de algunos espacios topológicos y determinar que es homeomorfa a otros espacios ya conocidos. Daremos dos ejemplos concretos de los cuales uno será un espacio localmente compacto y el otro solo de borde compacto. Estos dos ejemplos son subespacios de la esfera \mathbb{S}^2 , por lo que comenzaremos hablando de la **proyección estereográfica** y mencionaremos una propiedad importante de \mathbb{S}^2 .

Sean $p = \langle 0, 0, 1 \rangle$ el polo norte de la esfera y $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$. Para cada $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in X$, consideremos la función $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(\langle x_1, x_2, x_3 \rangle) = \frac{1}{1 - x_3} \langle x_1, x_2 \rangle. \quad (4.20)$$

La función φ es llamada **proyección estereográfica**. En [7, Teorema 59.3, p. 369] se puede encontrar la prueba de que la función φ es un homeomorfismo. Una propiedad geométrica importante de la esfera es la siguiente:

Propiedad 1. Si U es un abierto de X tal que $cl_X(U)$ no es compacto, existe un abierto W en \mathbb{S}^2 tal que $p \in W$, $Fr_X(U) \cap W = \emptyset$ y $W \setminus \{p\}$ es conexo.

Antes de dar el primer ejemplo, haremos una convención para simplificar un poco la notación. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, definimos el **exterior** de A como $ext(A) = X \setminus cl_X(A)$. Una propiedad importante del exterior y que se sigue de [10, Teorema 1.3.2 incisos (i), (v) y (vi), p. 24] es la siguiente:

$$X = int(A) \cup Fr(A) \cup ext(A). \quad (4.21)$$

Además, los conjuntos del lado derecho de 4.21 son disjuntos entre sí.

Consideremos de nuevo el espacio $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$. Notemos que, como X es metrizable, es Tychonoff. Y como X es localmente compacto, se tiene que X es de borde compacto. Probaremos que la compactación de Freudenthal de X es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 4.2.2. Sea $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$, donde $p \in \mathbb{S}^2$ y es el punto del polo norte de la esfera. La compactación de Freudenthal del espacio X es equivalente a la esfera \mathbb{S}^2 .

Demostración. Consideremos la FG-base

$$\mathcal{B} = \{U \subset X : U \text{ es abierto y } Fr_X(U) \text{ es compacto}\},$$

que de acuerdo al teorema 4.1.15 se usa en la definición de la compactación de Freudenthal. Ahora clasifiquemos los abiertos de X de la siguiente manera:

- Los abiertos U tales que $cl_X(U)$ es compacto, y a los cuales llamaremos de tipo 1.
- Los abiertos U tales que $cl_X(U)$ no es compacto, y a los cuales llamaremos de tipo 2.

Afirmación 1: Si U es un abierto en X de tipo 2, entonces $U \cup \{p\}$ es una vecindad abierta de p en \mathbb{S}^2 .

Para probar esta afirmación, primero veamos que $cl_{\mathbb{S}^2}(U) = cl_X(U) \cup \{p\}$.

⊂] Ya que $ext_X(U)$ es abierto en X y X es abierto en \mathbb{S}^2 , se tiene que $ext_X(U)$ es abierto en \mathbb{S}^2 . Además, como $U \subset cl_X(U)$, se tiene que $U \cap ext_X(U) = \emptyset$, lo cual implica que $U \subset \mathbb{S}^2 \setminus ext_X(U)$. Luego vemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 \setminus ext_X(U) &= \mathbb{S}^2 \setminus (X \setminus cl_X(U)) \\ &= cl_X(U) \cup (\mathbb{S}^2 \setminus X) \\ &= cl_X(U) \cup \{p\}. \end{aligned}$$

De esto se tiene que $U \subset cl_X(U) \cup \{p\}$. Y como $\mathbb{S}^2 \setminus ext_X(U)$ es cerrado en \mathbb{S}^2 , se sigue que $cl_{\mathbb{S}^2}(U) \subset cl_X(U) \cup \{p\}$.

⊃] Como $cl_X(U) \subset cl_{\mathbb{S}^2}(U)$, basta ver que $p \in cl_{\mathbb{S}^2}(U)$. Supongamos que $p \notin cl_{\mathbb{S}^2}(U)$. Entonces $cl_{\mathbb{S}^2}(U) \subset X$. Luego, por la proposición 1.1.3 se tiene que

$$cl_X(U) = X \cap cl_{\mathbb{S}^2}(U) = cl_{\mathbb{S}^2}(U).$$

Pero esta es una contradicción, ya que $cl_{\mathbb{S}^2}(U)$ es cerrado en \mathbb{S}^2 , pero $cl_X(U)$ no lo es, ya que no es compacto. Así, tenemos que $p \in cl_{\mathbb{S}^2}(U)$, lo cual implica que $cl_{\mathbb{S}^2}(U) \supset cl_X(U) \cup \{p\}$.

Entonces ya podemos concluir que $cl_{\mathbb{S}^2}(U) = cl_X(U) \cup \{p\}$. Ahora continuaremos la prueba de la afirmación 1. Lo que haremos es encontrar un abierto W en \mathbb{S}^2 tal que $p \in W \subset (U \cup \{p\})$. Por la propiedad 1 de la esfera (página 89), podemos tomar un abierto W de \mathbb{S}^2 tal que $p \in W$, $W \cap Fr_X(U) = \emptyset$ y $W \setminus \{p\}$ es conexo. Veamos que $W \cap ext_X(U) = \emptyset$. Supongamos que $W \cap ext_X(U) \neq \emptyset$. Como $p \in cl_{\mathbb{S}^2}(U)$ y W es vecindad abierta de p , se tiene que $W \cap U \neq \emptyset$. Luego, como $p \notin (U \cup ext_X(U))$, se tiene que

$$[(W \setminus \{p\}) \cap U] \neq \emptyset \neq [ext_X(U) \cap (W \setminus \{p\})].$$

Por otro lado, de la ecuación 4.21 se tiene que

$$U \cup ext_X(U) = X \setminus Fr_X(U).$$

Luego, como $W \cap \text{Fr}_X(U) = \emptyset$ y $p \notin X$, entonces $W \setminus \{p\} \subset X \setminus \text{Fr}_X(U)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} [(W \setminus \{p\}) \cap U] \cup [\text{ext}_X(U) \cap (W \setminus \{p\})] &= (W \setminus \{p\}) \cap [U \cup \text{ext}_X(U)] \\ &= (W \setminus \{p\}) \cap (X \setminus \text{Fr}_X(U)) \\ &= W \setminus \{p\}. \end{aligned}$$

Pero esto contradice la conexidad de $W \setminus \{p\}$. Por lo tanto $W \cap \text{ext}_X(U) = \emptyset$. Entonces, como $W \cap \text{Fr}_X(U) = \emptyset$ y $W \cap \text{ext}_X(U) = \emptyset$, de la ecuación 4.21 se tiene que $W \setminus \{p\} \subset U$, lo cual implica que $W \subset U \cup \{p\}$, como se quería probar. Con esto, queda probada la afirmación 1.

Afirmación 2: Si U es un abierto en \mathbb{S}^2 tal que $p \in U$, entonces $U \setminus \{p\}$ es un abierto de tipo 2 en X .

Probemos esta afirmación. Notemos que

$$\begin{aligned} U \cap X &= U \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}) \\ &= [(U \setminus \{p\}) \cup \{p\}] \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}) \\ &= U \setminus \{p\}. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $U \setminus \{p\}$ es abierto en X . Si $U \setminus \{p\}$ no es de tipo 2, es decir, si es de tipo 1, entonces $U \setminus \{p\}$ es compacto. Luego, como \mathbb{S}^2 es compacto, por el teorema 1.1.28 se tiene que $U \setminus \{p\}$ es cerrado en \mathbb{S}^2 . Por otro lado, como p no es un punto aislado, cualquier vecindad de p tiene un elemento de X . Entonces, si V es un abierto en \mathbb{S}^2 alrededor de p , V interseca a $U \setminus \{p\}$. Por lo tanto $U \setminus \{p\}$ no es cerrado en \mathbb{S}^2 , lo cual es una contradicción. Así, tenemos que $U \setminus \{p\}$ es un abierto de tipo 2 en X .

Ahora, dado un $x \in X$, tomemos

$$\begin{aligned} F_x &= \{U \in \mathcal{B} : x \in \text{cl}_X(U)\}, \text{ y} \\ F &= \{U \in \mathcal{B} : U \text{ es de tipo 2}\}. \end{aligned}$$

Por la proposición 4.1.13 se tiene que F_x es una familia vinculante maximal. Veamos que F también es familia vinculante maximal. Sea $\{V_1, \dots, V_n\} \subset F$. Por la afirmación 1, se tiene que $V_i \cup \{p\}$ y $V_j \cup \{p\}$ son vecindades abiertas de p en \mathbb{S}^2 , con $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, si $V_i \cap V_j = \emptyset$, tenemos que

$$\begin{aligned} (V_i \cup \{p\}) \cap (V_j \cup \{p\}) &= \{p\} \cup (V_i \cap V_j) \\ &= \{p\}. \end{aligned}$$

Pero esta es una contradicción, ya que $\{p\}$ no es vecindad abierta de p en \mathbb{S}^2 . Así, tenemos que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo que

$$\text{cl}_X(V_1) \cap \dots \cap \text{cl}_X(V_n) \neq \emptyset.$$

Y por lo tanto F es una familia vinculante. Ahora probemos que F es maximal. Sea $F' \subset \mathcal{B}$ familia vinculante tal que $F \subset F'$. Supongamos que existe un $V \in F'$ que no esta en F . Entonces $cl_X(V)$ es compacto. Luego, como \mathbb{S}^2 es compacto, por el teorema 1.1.28 se tiene que $cl_X(V)$ es cerrado en \mathbb{S}^2 . Por otro lado, como $cl_X(V) \subset X$, se tiene que $p \notin cl_X(V)$. Entonces, como \mathbb{S}^2 es regular, existen abiertos disjuntos U, W en \mathbb{S}^2 tales que $p \in U$ y $cl_X(V) \subset W$. Hagamos $H = U \setminus \{p\}$. Por la afirmación 2, se tiene que H es abierto de tipo 2 en X , lo cual implica que $H \in F$. Por lo que $H \in F'$. Pero si tomamos la familia finita $\{H, V\} \subset F'$, tenemos que $cl_X(H) \cap cl_X(V) = \emptyset$. Pero esto contradice el hecho que F' es familia vinculante. Así, tenemos que $F = F'$ y por lo tanto F es familia vinculante maximal.

Ahora probemos que la colección $\{F\} \cup \{F_x : x \in X\}$ contiene a todas las familias vinculantes maximales de \mathcal{B} . Sea $G \subset \mathcal{B}$ una familia vinculante maximal. Analicemos dos casos:

Caso 1. G contiene solo elementos de tipo 2. Entonces $G \subset F$ y como G es maximal, se sigue que $G = F$.

Caso 2. G contiene al menos un elemento de tipo 1. Sea $U_0 \in G$ de tipo 1, es decir, $cl_X(U_0)$ es compacto. Hagamos

$$\mathcal{H} = \{cl_X(U) \cap cl_X(U_0) : U \in G\}.$$

Notemos que, del hecho que G es familia vinculante, se tiene que la familia \mathcal{H} tiene la pif. Como \mathcal{H} es una familia de cerrados con la pif en $cl_X(U_0)$, por el teorema 1.1.29 se tiene que $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Luego, vemos que

$$\bigcap \mathcal{H} = \left(\bigcap_{U \in G} [cl_X(U) \cap cl_X(U_0)] \right) = \bigcap_{U \in G} cl_X(U).$$

Así, tenemos que existe un $x \in \bigcap_{U \in G} cl_X(U)$. Esto significa que para cada $U \in G$, $x \in cl_X(U)$, lo cual implica que $G \subset F_x$. Pero como G es familia vinculante maximal, se sigue que $G = F_x$.

En todos los casos se llega a que $G \in \{F\} \cup \{F_x : x \in X\}$. Por lo tanto, la compactación de Freudenthal del espacio X es

$$\mathcal{F}X = \{F\} \cup \{F_x : x \in X\},$$

donde X esta encajado en $\mathcal{F}X$ con la función $e : X \rightarrow \mathcal{F}X$ dada por $e(x) = F_x$ (como en el teorema 4.1.15), para cada $x \in X$.

Ahora notemos que \mathbb{S}^2 también es una compactación de X , ya que \mathbb{S}^2 es compacto y $h : X \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por $h(x) = x$ es un encaje homeomorfo. Luego, si tomamos un abierto no vacío U en \mathbb{S}^2 , se tiene que $U \cap X$ es abierto en \mathbb{S}^2 , ya que X es abierto en \mathbb{S}^2 . Si $U \cap X = \emptyset$, esto implica que $U = \{p\}$, lo cual

contradice el hecho que U es abierto en \mathbb{S}^2 . Por lo tanto $U \cap X \neq \emptyset$. Y así, tenemos que X es denso en \mathbb{S}^2 .

Por último, veamos que \mathbb{S}^2 es equivalente a $\mathcal{F}X$. Definamos una función $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{F}X$ como

$$f(x) = \begin{cases} F_x, & \text{si } x \neq p, \text{ y} \\ F, & \text{si } x = p. \end{cases}$$

Veamos que f es un homeomorfismo. Notemos que f es sobreyectiva por definición y $f \upharpoonright X$ es inyectiva. Tomemos $x \in X$ y $y = p$. Entonces $f(x) = F_x$ y $f(y) = F$, por lo que $f(x) \neq f(y)$. Así, tenemos que f es inyectiva en \mathbb{S}^2 . Y por lo tanto f es biyectiva.

Probemos que f es continua. Para probar esto, usaremos dos resultados que se probaron en el teorema 4.1.15:

- (1) $f \upharpoonright X : X \rightarrow f[X]$ es un homeomorfismo.
- (2) $(f \upharpoonright X)^{-1}[S(U)] = U$ para cada $U \in \mathcal{B}$.

Como X es abierto en \mathbb{S}^2 , de la observación 1.1.14 se sigue que f es continua en cada punto de X . Probemos la continuidad puntual de f en p . Sea W una vecindad abierta de F . Entonces existe un abierto básico $S(U) \in \mathcal{F}(X)$ tal que $F \in S(U) \subset W$. Tomemos $V = U \cup \{p\}$. Por la afirmación 2, se tiene que V es vecindad abierta de p en \mathbb{S}^2 . Luego, vemos que

$$\begin{aligned} f[V] &= f[U \cup f[\{p\}]] \\ &= f[U] \cup \{F\} \\ &= (S(U) \setminus \{F\}) \cup \{F\} \\ &= S(U). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $f[V] \subset W$, lo cual implica que f es continua en p . Y por lo tanto f es continua en \mathbb{S}^2 . Entonces, como \mathbb{S}^2 es compacto, $\mathcal{F}X$ es Hausdorff y f es continua y biyectiva, por el teorema 1.1.25 se tiene que f es un homeomorfismo. Ahora tomemos un $x \in X$. Vemos que

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x) = F_x = e(x),$$

lo cual implica que $f \circ e = h$. Entonces ya podemos concluir que las compactaciones $\mathcal{F}X$ y \mathbb{S}^2 de X son equivalentes. □

El siguiente ejemplo se trata de un espacio topológico que no es localmente compacto, pero sí de borde compacto como veremos a continuación. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ con $p = \langle 0, 0, 1 \rangle$ y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como en 4.20. Consideremos $Y = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ como subespacio de \mathbb{R}^2 . Notemos que Y es subespacio denso

numerable de \mathbb{R}^2 . Como φ^{-1} es continua, entonces $\varphi^{-1}[Y]$ es denso numerable en X por ser la imagen continua de un denso numerable.

Afirmación: $\varphi^{-1}[Y]$ es denso en \mathbb{S}^2 .

Para probar esta afirmación, recordemos que en el ejemplo 4.2.2 vimos que $cl_{\mathbb{S}^2}(X) = \mathbb{S}^2$. Y como $cl_X(\varphi^{-1}[Y]) = X$ tenemos que

$$cl_{\mathbb{S}^2}(\varphi^{-1}[Y]) = cl_{\mathbb{S}^2}[cl_X(\varphi^{-1}[Y])] = cl_{\mathbb{S}^2}[X] = \mathbb{S}^2.$$

Así, se tiene que $cl_{\mathbb{S}^2}(\varphi^{-1}[Y]) = \mathbb{S}^2$ y por lo tanto $\varphi^{-1}[Y]$ es denso en \mathbb{S}^2 .

Ahora tomemos $D = \varphi^{-1}[Y] \cup \{p\}$ y $Z = \mathbb{S}^2 \setminus D$. Hagamos una observación importante acerca de estos conjuntos:

Observación 4.2.3. *D y Z son densos en \mathbb{S}^2 .*

Para probar que D es denso en \mathbb{S}^2 calculamos su cerradura como sigue

$$\begin{aligned} cl_{\mathbb{S}^2}(D) &= cl_{\mathbb{S}^2}(\varphi^{-1}[Y]) \cup cl_{\mathbb{S}^2}(\{p\}) \\ &= \mathbb{S}^2 \cup \{p\}. \end{aligned}$$

Del cálculo anterior se tiene que D es denso en \mathbb{S}^2 . Para ver que Z es denso en \mathbb{S}^2 basta observar que si tomamos cualquier abierto U en \mathbb{S}^2 distinto del vacío, la densidad de los irracionales implica que existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $\langle r_1, r_2 \rangle \in U \cap Z$.

Por otro lado, como \mathbb{S}^2 es Tychonoff, se sigue que Z es Tychonoff. Veamos que Z es de borde compacto. Tomemos un $z \in \mathbb{R}^2$ con $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ y un abierto U en \mathbb{R}^2 tal que $z \in U$. Ya que las bolas abiertas forman una base para la topología de \mathbb{R}^2 , existe una bola abierta $B(z, \epsilon)$ en \mathbb{R}^2 con $\epsilon > 0$ tal que

$$z \in B(z, \epsilon) \subset U.$$

Ahora consideremos las proyecciones

$$\begin{aligned} P_x[B(z, \epsilon)] &= \{r \in \mathbb{R} : \langle r, s \rangle \in B(z, \epsilon)\}, \text{ y} \\ P_y[B(z, \epsilon)] &= \{r \in \mathbb{R} : \langle s, r \rangle \in B(z, \epsilon)\}, \end{aligned}$$

de $B(z, \epsilon)$ sobre los ejes x y y respectivamente. Por la densidad de los irracionales en \mathbb{R} , existen irracionales $n_1, n_2 \in P_x[B(z, \epsilon)]$ tales que $n_1 < z_1$ y $z_1 < n_2$. De nuevo, por la densidad de los irracionales en \mathbb{R} , existen irracionales $m_1, m_2 \in P_y[B(z, \epsilon)]$ tales que $m_1 < z_2$ y $z_2 < m_2$. Tomemos

$$F_z = [n_1, n_2] \times [m_1, m_2].$$

Notemos que $z \in F_z$ y por definición de los n_1, n_2, m_1 y m_2 se tiene que $[n_1, n_2] \times [m_1, m_2] \subset B(z, \epsilon)$. Por lo que $F_z \subset B(z, \epsilon)$.

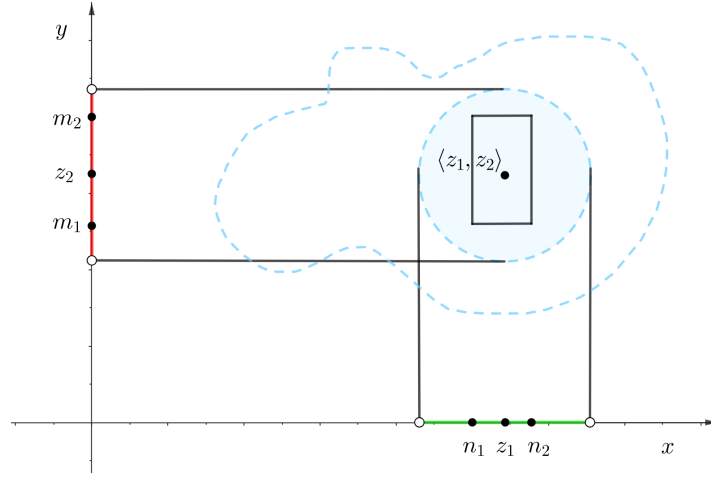


Figura 4.1: Vecindad F_z del punto $\langle z_1, z_2 \rangle$

En la figura 4.1 podemos ver geoméricamente la vecindad F_z del punto $\langle z_1, z_2 \rangle$. La línea de color verde sobre el eje x representa al conjunto $P_x(B(z, \epsilon) \cap R)$. Y la línea de color rojo sobre el eje y representa al conjunto $P_y(B(z, \epsilon) \cap R)$. Observemos que la frontera de F_z son los lados de un rectángulo definido en el sentido clásico de la geometría. Por lo que la frontera de F_z se puede escribir como una unión de cuatro segmentos que representan los lados del rectángulo. Y como los segmentos son conjuntos compactos, se sigue que la frontera de F_z es compacto por ser la unión finita de compactos.

Tomando en cuenta los comentarios anteriores, hagamos una observación:

Observación 4.2.4. *Si tomamos $R = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, la familia $\{int_R(F_z) : z \in R\}$ es una base para R cuyos elementos tienen frontera compacta. Y además $Z = \varphi^{-1}[R]$.*

Notemos que la construcción anterior de la vecindad F_z de z funciona como prueba para esta observación tomando el punto $z \in R$.

Así, de la observación 4.2.4 y del hecho que φ^{-1} es continua, se tiene que

$$\mathcal{B} = \{\varphi^{-1}[int_R(F_z)] : z \in R\} \quad (4.22)$$

es una base para Z . Más aún, como $Fr_Z(U)$ es la preimagen de la frontera de F_z , se tiene que $Fr_Z(U)$ es compacto para cada $U \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, Z es de borde compacto. De ahora en adelante, cuando consideremos a Z como subespacio de la esfera, supondremos que su base es la definida en 4.22.

De esta manera, hemos visto que Z es Tychonoff y de borde compacto, por lo que podemos describir su compactación de Freudenthal. Pero antes de dar el ejemplo, haremos una convención para simplificar la notación y probaremos un

par de propiedades importantes acerca de esta convención y que nos serán de utilidad en el ejemplo. Para cada abierto U de Z , definimos

$$E(U) = \mathbb{S}^2 \setminus [cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U)].$$

Notemos que por definición, $E(U)$ es abierto en \mathbb{S}^2 .

Proposición 4.2.5. *Si U es un subconjunto abierto de Z , entonces $E(U) \cap Z = U$. Además $E(U)$ es el abierto más grande con esta propiedad en el siguiente sentido: si V es un abierto tal que $V \cap Z = U$, entonces $V \subset E(U)$.*

Demostración. Primero veamos que $E(U) \cap Z = U$.

\subset] Sea $x \in E(U) \cap X$. Entonces $x \in E(U)$, lo cual implica que $x \notin cl_{\mathbb{S}^2}(X \setminus U)$. Por lo que $x \notin X \setminus U$. Y como $x \in X$, se sigue que $x \in U$. Así, tenemos que $E(U) \cap X \subset U$.

\supset] Sea $x \in U$. Entonces $x \in X$, ya que $U \subset X$. Luego, del hecho que $cl_X(X \setminus U) = X \setminus U$ y de la proposición 1.1.3 se tiene que

$$X \setminus U = cl_X(X \setminus U) = X \cap (cl_{\mathbb{S}^2}(X \setminus U)). \quad (4.23)$$

Como $x \in U$, se tiene que $x \notin X \setminus U$. Luego, de 4.23 y del hecho que $x \in X$ se tiene que $x \notin cl_{\mathbb{S}^2}(X \setminus U)$. Entonces

$$x \in \mathbb{S}^2 \setminus [cl_{\mathbb{S}^2}(X \setminus U)] = E(U).$$

Así, tenemos que $x \in E(U)$, lo cual implica que $U \subset E(U) \cap X$.

Entonces ya podemos concluir que $E(U) \cap X = U$. Ahora veamos que $E(U)$ es el abierto más grande con esta propiedad. Sea $V \subset \mathbb{S}^2$ abierto tal que $V \cap Z = U$. Sea $x \in V$. Notemos que

$$\begin{aligned} V \cap (Z \setminus U) &= V \cap (Z \cap [\mathbb{S}^2 \setminus U]) \\ &= U \cap (\mathbb{S}^2 \setminus U) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Como V es vecindad abierta de x y $V \cap (Z \setminus U) = \emptyset$, se sigue que $x \notin cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U)$, lo cual implica que $x \in \mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U) = E(U)$. Por lo tanto $V \subset E(U)$, como se quería probar. \square

Proposición 4.2.6. *Sea \mathcal{B} definida como en la ecuación 4.22 (página 95). La familia $\{E(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para \mathbb{S}^2 .*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{S}^2$ y tomemos una vecindad abierta U de x en \mathbb{R}^2 . Como \mathbb{S}^2 es regular, por la proposición 1.1.13 existe un abierto V en \mathbb{S}^2 tal que $x \in V \subset cl_{\mathbb{S}^2}(V) \subset U$. Ahora consideremos dos casos:

Caso 1. $x \in Z$. Hagamos $W = Z \cap V$. Como W es abierto en Z y contiene a x , existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset W$. Ya que $E(B) \cap Z = B$ por la proposición 4.2.5, se tiene que $x \in E(B)$. Por otro lado, tenemos que

$$cl_{\mathbb{S}^2}[E(B)] = cl_{\mathbb{S}^2}[B] \subset cl_{\mathbb{S}^2}[W] \subset cl_{\mathbb{S}^2}[V] \subset U.$$

Y así tenemos que $x \in E(B) \subset U$ con $B \in \mathcal{B}$.

Caso 2. $x \notin Z$. Consideremos 2 subcasos:

Subcaso 2.1. $x \neq p$. Como φ es un homeomorfismo, podemos construir una vecindad F_x de la misma manera que la vecindad F_z de la figura 4.1 tal que $F_x \subset \varphi[V]$ y $\varphi(x) \in int_{\mathbb{R}^2}(F_x)$. Hagamos $B = \varphi^{-1}[int_R(F_x)]$. Por definición, $B \in \mathcal{B}$. Veamos que $x \in E(B)$: Como $\varphi(x) \in int_{\mathbb{R}^2}(F_x)$, se sigue que $x \in \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)]$. Por otro lado, de la proposición 1.1.11(2) se tiene que

$$R \cap int_{\mathbb{R}^2}(F_x) \subset int_R(F_x).$$

Luego vemos que

$$\begin{aligned} Z \setminus B &= Z \setminus \varphi^{-1}[int_R(F_x)] \\ &\subset Z \setminus \varphi^{-1}[R \cap int_{\mathbb{R}^2}(F_x)] \\ &= Z \setminus (\varphi^{-1}[R] \cap \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)]) \\ &= Z \setminus (Z \cap \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)]) \\ &= (Z \setminus Z) \cup (Z \setminus \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)]) \\ &= Z \setminus \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)] \\ &\subset \mathbb{S}^2 \setminus \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)] \cap [Z \setminus B] \subset \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)] \cap [\mathbb{S}^2 \setminus \varphi^{-1}[int_{\mathbb{R}^2}(F_x)]] = \emptyset.$$

De esto se sigue que $x \notin cl_{\mathbb{S}^2}[Z \setminus B]$. Por lo tanto

$$x \in \mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}[Z \setminus B] = E(B)$$

Ahora veamos que $E(B) \subset U$: Como $int_R(F_x) \subset F_x$ y $F_x \subset \varphi[V]$, se tiene que

$$B = \varphi^{-1}[int_R(F_x)] \subset V.$$

Entonces $cl_{\mathbb{S}^2}[B] \subset cl_{\mathbb{S}^2}(V) \subset U$. Y como $cl_{\mathbb{S}^2}[B] = cl_{\mathbb{S}^2}[E(B)]$ por la proposición 4.2.5, se sigue que $E(B) \subset U$. Así, tenemos que $x \in E(B) \subset U$ con $B \in \mathcal{B}$. Subcaso 2.2. $x = p$. Consideramos la función $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\psi(\langle x, y, z \rangle) = \langle x, y, -z \rangle$ para cada $\langle x, y, z \rangle \in \mathbb{S}^2$. Notemos que la función ψ es un homeomorfismo, ya que es una reflexión sobre el plano xy . Luego, por definición de ψ se tiene que $\psi(p) = q = \langle 0, 0, -1 \rangle$. Entonces $\psi[V]$ es vecindad abierta de q homeomorfa a V . Y como $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo, se tiene que $\psi[V]$ es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . De esto se sigue que V es homeomorfo al abierto $\varphi[\psi[V]]$ de \mathbb{R}^2 . Véase la siguiente figura:

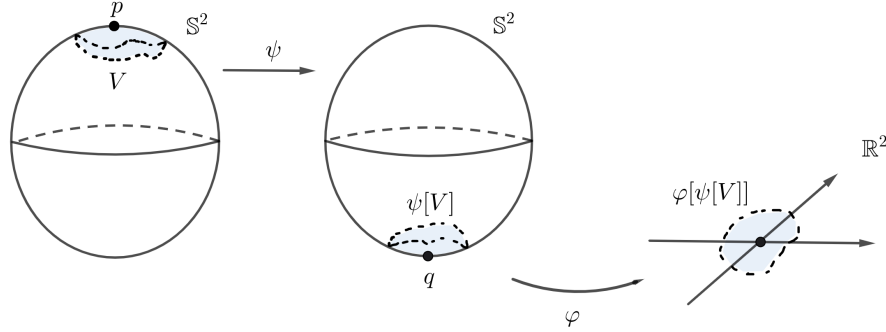


Figura 4.2: Representación geométrica

En la figura 4.2 tenemos una representación geométrica de como construir la vecindad abierta $\varphi[\psi[V]]$ de \mathbb{R}^2 homeomorfa a V . Entonces podemos hacer la misma construcción de la vecindad F_x en el abierto $\varphi[\psi[V]]$ como en el subcaso 2.1 y aplicar un procedimiento análogo.

Así, en ambos casos encontramos un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in E(B) \subset U$. Por lo tanto $\{E(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base para \mathbb{S}^2 . □

Una consecuencia de la proposición anterior es la siguiente:

Lema 4.2.7. *Cualquier elemento de la esfera \mathbb{S}^2 tiene una vecindad abierta que es la imagen inversa bajo φ de un rectángulo abierto en \mathbb{R}^2 .*

Observemos que si tomamos $A = \varphi[\psi[V]]$ donde A es un rectángulo abierto en \mathbb{R}^2 , la figura 4.2 sirve como prueba geométrica del lema anterior.

Si X un espacio topológico conexo y $A \subset X$, se dice que A **separa** a X si $X \setminus A$ es desconexo.

Aunque ya hemos mencionado el concepto de segmento, cabe aclarar que nos referimos a los segmentos de recta en \mathbb{R}^n . Un resultado importante que también utilizaremos en nuestro siguiente ejemplo es el siguiente:

Proposición 4.2.8. *Un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^2 no se puede separar por conjuntos numerables.*

Demostración. Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ con $0 < a < b$ y $0 < c < d$. Tomemos $A \subset R$ numerable. Veamos que $R \setminus A$ es conexo. Sean $x = \langle x_1, x_2 \rangle, y = \langle y_1, y_2 \rangle \in R \setminus A$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1 < y_1$. Consideremos el segmento

$$L_1 = \{(1-t)\langle b, c \rangle + t\langle b, d \rangle : t \in [0, 1]\}.$$

Notemos que la colección de rectas que pasan por x y que intersectan al segmento L_1 es no numerable. Por lo que existe un $w \in L_1$ tal que el segmento

$$L_2 = \{(1-t)x + tw : t \in [0, 1]\}$$

tiene intersección vacía con A . Por otro lado, como la colección de rectas que pasan por y y que intersectan al segmento L_2 es no numerable, existe un $z \in L_2$ tal que el segmento

$$L_3 = \{(1-t)y + tz : t \in [0, 1]\}$$

tiene intersección vacía con A . Consideremos el segmento

$$L_4 = \{(1-t)x + tz : t \in [0, 1]\},$$

y tomemos $S = L_3 \cup L_4$.

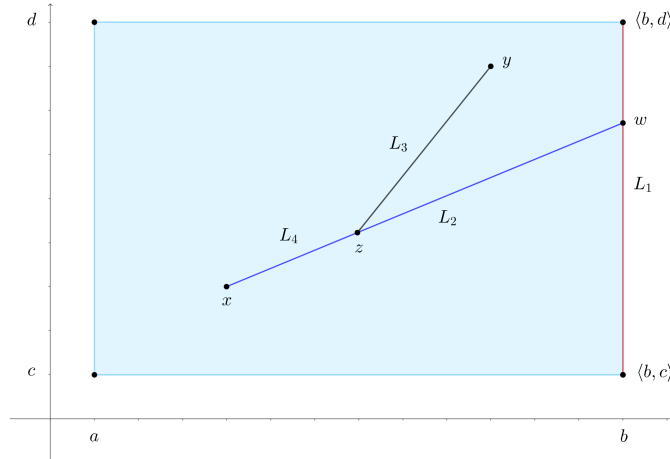


Figura 4.3: Construcción del conjunto S

En la figura 4.2 se muestra cómo el conjunto S conecta a x con y . Como los segmentos L_3 y L_4 son conexos y además $L_3 \cap L_4 \neq \emptyset$, por el teorema 1.2.2 se sigue que S es conexo. De esta manera hemos construido un subconjunto conexo de $R \setminus A$ que contiene a x y y . Por lo tanto, del teorema 1.2.7 se sigue que $R \setminus A$ es conexo. □

Notemos que en la hipótesis de la proposición anterior podemos cambiar “rectángulo cerrado” por “rectángulo abierto”, y la prueba es prácticamente la misma. Una consecuencia de la proposición anterior es la siguiente:

Corolario 4.2.9. *Sea $V \subset \mathbb{S}^2$. Si $V = \varphi^{-1}[F]$, donde F es un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^2 , entonces V no se puede separar por conjuntos numerables.*

El corolario anterior se sigue del hecho que φ es un homeomorfismo.

Ejemplo 4.2.10. *La compactación de Freudenthal del espacio $Z = \mathbb{S}^2 \setminus D$ es equivalente a la esfera \mathbb{S}^2 .*

Demostración. Empezamos tomando la FG-base de Z . Sea

$$\mathcal{B} = \{U \subset Z : U \text{ es abierto y } \text{Fr}_Z(U) \text{ es compacto}\}.$$

Afirmación 1. Si $U \in \mathcal{B}$, entonces $\text{Fr}_Z(U) = \text{Fr}_{\mathbb{S}^2}(E(U))$.

⊂] Sea $x \in \text{Fr}_Z(U)$. Sea W una vecindad abierta de x en \mathbb{S}^2 . Veamos que $W \cap E(U) \neq \emptyset \neq W \cap \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U)$. Como $x \in Z$, entonces $Z \cap W$ es una vecindad abierta de x en Z , lo cual implica que $(Z \cap W) \cap U \neq \emptyset$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} (Z \cap W) \cap U &= (Z \cap W) \cap (E(U) \cap Z) \\ &\subset W \cap E(U), \end{aligned}$$

lo cual implica que $W \cap E(U) \neq \emptyset$. Por otro lado, tenemos que

$$(Z \cap W) \cap (Z \setminus U) \neq \emptyset.$$

Luego vemos que

$$(Z \cap W) \cap (Z \setminus U) = W \cap (Z \setminus U) \subset W \cap \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U),$$

lo cual implica que $W \cap \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U) \neq \emptyset$. Así, tenemos que $x \in \text{Fr}_{\mathbb{S}^2}(E(U))$. Y por tanto $\text{Fr}_Z(U) \subset \text{Fr}_{\mathbb{S}^2}(E(U))$.

⊃] Sea $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fr}_Z(U)$. Probaremos que $x \notin \text{Fr}_{\mathbb{S}^2}(E(U))$. Supongamos lo contrario, es decir, $x \in \text{Fr}_{\mathbb{S}^2}(E(U))$. Por el lema 4.2.7 podemos tomar un abierto conexo V en \mathbb{S}^2 el cual es imagen inversa bajo φ de un rectángulo abierto (sin frontera) de \mathbb{R}^2 , con $x \in V$ y $\text{cl}_{\mathbb{S}^2}(V) \cap \text{Fr}_Z(U) = \emptyset$. Hagamos $W = V \cap Z$. Por definición, W es abierto en Z . Además, como Z es denso en \mathbb{S}^2 , se tiene que $\text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W) = \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(V)$. Por otro lado, de la proposición 1.1.3 se tiene que $\text{cl}_Z(W) = Z \cap \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W)$. Y entonces

$$\text{cl}_Z(W) \cap \text{Fr}_Z(U) = [Z \cap \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W)] \cap \text{Fr}_Z(U) = \emptyset.$$

Sean $W_0 = W \cap U$ y $W_1 = W \cap [Z \setminus \text{cl}_Z(U)]$. Como $W \subset Z$ y $\text{cl}_Z(W) \cap \text{Fr}_Z(U) = \emptyset$ se tiene que $W \subset Z \setminus [\text{Fr}_Z(U)]$. Luego vemos que

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W_0) \cup \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W_1) &= \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W_0 \cup W_1) \\ &= \text{cl}_{\mathbb{S}^2}[W \cap (U \cup Z \setminus [\text{cl}_Z(U)])] \\ &= \text{cl}_{\mathbb{S}^2}[W \cap (Z \setminus [\text{Fr}_Z(U)])] \\ &= \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(W) \\ &= \text{cl}_{\mathbb{S}^2}(V). \end{aligned}$$

Hagamos $H = cl_{\mathbb{S}^2}(W_0) \cap cl_{\mathbb{S}^2}(W_1)$. Probemos que $H \subset \mathbb{S}^2 \setminus Z$. Sea $y \in H$ y supongamos que $y \in Z$. Tomemos un abierto A de Z tal que $y \in A$. Existe un abierto B en \mathbb{S}^2 tal que $A = B \cap Z$. Como $y \in cl_{\mathbb{S}^2}(W_0)$, se tiene que $W_0 \cap B \neq \emptyset$. Y como $W_0 \cap B \subset W_0 \subset U \subset Z$, se tiene que

$$(W_0 \cap B) \cap Z = W_0 \cap B \neq \emptyset.$$

Luego vemos que

$$\begin{aligned} (W_0 \cap B) \cap Z &= (W \cap U) \cap (B \cap Z) \\ &= (W \cap U) \cap A \\ &\subset U \cap A, \end{aligned}$$

lo cual implica que $U \cap A \neq \emptyset$. Por otro lado, como $y \in cl_{\mathbb{S}^2}(W_1)$, se tiene $W_1 \cap B \neq \emptyset$. Y como

$$W_1 \cap B \subset W_1 \subset Z \setminus cl_Z(U) \subset Z,$$

se tiene que

$$(W_1 \cap B) \cap Z = W_1 \cap B \neq \emptyset.$$

Luego vemos que

$$\begin{aligned} (W_1 \cap B) \cap Z &= (W \cap [Z \setminus cl_Z(U)]) \cap (B \cap Z) \\ &= (W \cap [Z \setminus cl_Z(U)]) \cap A \\ &\subset [Z \setminus cl_Z(U)] \cap A \\ &\subset [Z \setminus U] \cap A, \end{aligned}$$

lo cual implica que $[Z \setminus U] \cap A \neq \emptyset$. Así, tenemos que $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap (Z \setminus U)$. Y como A es un abierto arbitrario en Z , por la proposición 1.1.7 se tiene que $y \in Fr_Z(U)$. Luego, como $H \subset cl_{\mathbb{S}^2}(V)$, se sigue que $y \in cl_{\mathbb{S}^2}(V)$. Pero esto es una contradicción, ya que $cl_{\mathbb{S}^2}(V) \cap Fr_Z(U) = \emptyset$. Esta contradicción viene del hecho de suponer que $y \in Z$. Por lo tanto $H \subset \mathbb{S}^2 \setminus Z$.

Por otro lado, como $\mathbb{S}^2 \setminus Z$ es numerable, se sigue que H es numerable. Ahora observemos que

$$\begin{aligned} cl_{\mathbb{S}^2}(V) \setminus H &= cl_{\mathbb{S}^2}(V) \setminus [cl_{\mathbb{S}^2}(W_0) \cap cl_{\mathbb{S}^2}(W_1)] \\ &= [cl_{\mathbb{S}^2}(V) \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_0)] \cup [cl_{\mathbb{S}^2}(V) \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_1)] \\ &= [cl_{\mathbb{S}^2}(V) \cap (\mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_0))] \cup [cl_{\mathbb{S}^2}(V) \cap (\mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_1))]. \end{aligned}$$

Luego, como $\mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_i)$ es abierto en \mathbb{S}^2 con $i \in \{0, 1\}$, se tiene que

$$cl_{\mathbb{S}^2}(V) \cap [\mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_i)]$$

es abierto en $cl_{\mathbb{S}^2}(V)$. Además, tenemos que

$$\bigcap_{i=0}^1 (cl_{\mathbb{S}^2}(V) \cap [\mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_i)]) = \emptyset,$$

y $cl_{\mathbb{S}^2}(V) \cap [\mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(W_i)] \neq \emptyset$. De esto se sigue que $cl_{\mathbb{S}^2}(V) \setminus H$ es desconexo. Esto significa que H separa a $cl_{\mathbb{S}^2}(V)$. Pero esto es una contradicción con el corolario 4.2.9, ya que H es numerable y $cl_{\mathbb{S}^2}(V)$ es la imagen inversa bajo φ de un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^2 .

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo que $x \notin Fr_{\mathbb{S}^2}(E(U))$. Y así tenemos que $Fr_{\mathbb{S}^2}(E(U)) \subset Fr_Z(U)$. Entonces ya podemos concluir que $Fr_{\mathbb{S}^2}(E(U)) = Fr_Z(U)$. Y de esta forma queda probada la afirmación 1.

Lo que haremos a continuación será describir todas las familias vinculantes maximales de \mathcal{B} . Para cada $x \in Z$, hagamos

$$F_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in cl_Z(U)\}.$$

Y para cada $x \in \mathbb{S}^2 \setminus Z$, hagamos

$$G_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in E(U)\}.$$

Por la proposición 4.1.13 se tiene que F_x es una familia vinculante maximal. Veamos que para cada $x \in \mathbb{S}^2 \setminus Z$, G_x es también familia vinculante maximal. Sea $x \in \mathbb{S}^2 \setminus Z$ y $\{U_1, \dots, U_n\} \subset G_x$. Por definición de G_x se tiene que $x \in E(U_i)$ con $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} cl_Z(U_1) \cap \dots \cap cl_Z(U_n) &= \bigcap_{i=1}^n cl_Z[E(U_i) \cap Z] \\ &\supset \bigcap_{i=1}^n (E(U_i) \cap Z) \\ &= Z \cap \left(\bigcap_{i=1}^n E(U_i) \right). \end{aligned}$$

Como $E(U_i)$ es abierto en \mathbb{S}^2 y además $x \in E(U_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n E(U_i)$ es abierto no vacío en \mathbb{S}^2 . Luego, como Z es denso en \mathbb{S}^2 por la observación 4.2.3, se tiene que

$$Z \cap \left(\bigcap_{i=1}^n E(U_i) \right) \neq \emptyset.$$

Esto implica que $cl_Z(U_1) \cap \dots \cap cl_Z(U_n) \neq \emptyset$. Por lo tanto G_x es una familia vinculante. Veamos que G_x es maximal. Sea $G \subset \mathcal{B}$ una familia vinculante tal que $G_x \subset G$. Supongamos que existe un $V \in G$ tal que $V \notin G_x$. Entonces $x \notin E(V)$. Analicemos dos casos:

Caso 1. $x \in Fr_{\mathbb{S}^2}(E(V))$. Como V tiene frontera compacta, por la afirmación 1 se tiene que $Fr_Z(V) = Fr_{\mathbb{S}^2}(E(V))$. Entonces $x \in Fr_Z(V)$, pero esto es una

contradicción, ya que $x \notin Z$.

Caso 2. $x \notin cl_{\mathbb{S}^2}(E(V))$. Como \mathbb{S}^2 es regular, existen abiertos disjuntos $W_1, W_2 \subset \mathbb{S}^2$ tales que $x \in W_1$ y $cl_{\mathbb{S}^2}(E(V)) \subset W_2$. Hagamos $U = Z \cap W_1$. Notemos que U es abierto en Z y además, por la proposición 4.2.5 se tiene que $W_1 \subset E(U)$. Entonces $x \in E(U)$, lo cual implica que $U \in G_x$. Luego, como $G_x \subset G$, se sigue que $U \in G$. Pero si tomamos $\{U, V\} \subset G$, tenemos que $cl_{\mathbb{S}^2}(U) \cap cl_{\mathbb{S}^2}(V) = \emptyset$. Pero esto contradice el hecho que G es una familia vinculante.

En ambos casos llegamos a una contradicción. Así, tenemos que $G_x = G$ y por lo tanto G_x es maximal. Ahora probemos que la colección

$$\{F_x : x \in Z\} \cup \{G_x : x \in \mathbb{S}^2 \setminus Z\}$$

contiene a todas las familias vinculantes maximales de \mathcal{B} . Sea $G \subset \mathcal{B}$ una familia vinculante maximal. Hagamos $\mathcal{H} = \{cl_{\mathbb{S}^2}(U) : U \in G\}$. Sean $U_1, \dots, U_n \in G$. Del hecho que G es vinculante y $cl_Z(U_i) \subset cl_{\mathbb{S}^2}(U_i)$, se tiene que

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^n cl_Z(U_i) \subset \bigcap_{i=1}^n cl_{\mathbb{S}^2}(U_i).$$

Esto implica que la familia \mathcal{H} tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces, como \mathbb{S}^2 es compacto, por el teorema 1.1.29 se tiene que existe un $x \in \bigcap \mathcal{H}$. Consideremos 2 casos:

Caso 1. $x \in Z$. Como $cl_Z(U) = Z \cap cl_{\mathbb{S}^2}(U)$ se sigue que $x \in cl_Z(U)$ para cada $U \in G$. De esto se sigue que $G \subset F_x$. Y como G es maximal, se tiene que $G = F_x$.

Caso 2. $x \notin Z$. De la proposición 4.2.5 se tiene que $U = E(U) \cap Z$ para todo $U \in G$. Además, la afirmación 1 nos dice que $Fr_{\mathbb{S}^2}[E(U)] = Fr_Z(U)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{U \in G} cl_{\mathbb{S}^2}(U) &= \bigcap_{U \in G} cl_{\mathbb{S}^2}[E(U) \cap Z] \\ &= \bigcap_{U \in G} cl_{\mathbb{S}^2}[E(U)] \\ &= \bigcap_{U \in G} [E(U) \cup Fr_{\mathbb{S}^2}[E(U)]] \\ &= \bigcap_{U \in G} [E(U) \cup Fr_Z(U)] \end{aligned}$$

Entonces $x \in E(U) \cup Fr_Z(U)$ para todo $U \in G$. Luego, como $x \notin Z$ se sigue que $x \notin Fr_Z(U)$ para cada $U \in G$, por lo que $x \in E(U)$ para cada $U \in G$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{U \in G} E(U)$. De esto se sigue que $G \subset G_x$. Y como G es maximal, se tiene que $G = G_x$.

Así, tenemos que $G \in \{F_x : x \in Z\} \cup \{G_x : x \in \mathbb{S}^2 \setminus Z\}$ y por lo tanto esta colección contiene a todas las familias vinculantes maximales de \mathcal{B} . Esto significa que la compactación de Freudenthal de Z es

$$\mathcal{F}Z = \{F_x : x \in Z\} \cup \{G_x : x \in \mathbb{S}^2 \setminus Z\}.$$

Ahora notemos que \mathbb{S}^2 también es una compactación de Z , ya que \mathbb{S}^2 es compacto y $h : Z \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por $h(x) = x$ es un encaje homeomorfo. Además, por la observación 4.2.3, Z es denso en \mathbb{S}^2 .

Por último, veamos que \mathbb{S}^2 es equivalente a $\mathcal{F}Z$. Definamos una función $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{F}Z$ como

$$f(x) = \begin{cases} F_x, & \text{si } x \in Z, \text{ y} \\ G_x, & \text{si } x \notin Z. \end{cases}$$

Probemos que f es un homeomorfismo. Primero veamos que f es biyectiva. Notemos que por definición, f es sobreyectiva. Ahora tomemos $x, y \in \mathbb{S}^2$ con $x \neq y$. Consideremos tres casos:

Caso 1. $x, y \in Z$. Entonces $f(x) = F_x$ y $f(y) = F_y$, lo cual implica que $f(x) \neq f(y)$.

Caso 2. $x \in Z$ y $y \notin Z$. Entonces $f(y) = G_y$. Como \mathbb{S}^2 es Hausdorff, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Hagamos $W = U \cap Z$. Luego, como \mathcal{B} es base para Z , existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset W$. Veamos que $y \notin E(B)$. Notemos que

$$cl_{\mathbb{S}^2}[E(B)] = cl_{\mathbb{S}^2}[E(B) \cap Z] = cl_{\mathbb{S}^2}[B]. \quad (4.24)$$

Luego, como $cl_{\mathbb{S}^2}[B] \subset cl_{\mathbb{S}^2}[U]$ y $cl_{\mathbb{S}^2}[U] \cap V = \emptyset$ por la proposición 1.1.3, se tiene que $cl_{\mathbb{S}^2}[B] \cap V = \emptyset$. Entonces, por 4.24 se tiene que $y \notin E(B)$. Así, tenemos que $B \in F_x$ y $B \notin G_y$. Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$.

Caso 3. $x, y \notin Z$. Como \mathbb{S}^2 es Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U, V \subset \mathbb{S}^2$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Luego, por la proposición 4.2.6, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in E(B) \subset U$. Entonces, como $E(B) \cap V = \emptyset$, se sigue que $y \notin E(B)$. Así, tenemos que $B \in G_x$ y $B \notin G_y$. Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$.

De esta manera hemos probado que f es inyectiva y por lo tanto biyectiva.

Veamos que f es continua. Sea $U \in \mathcal{B}$. Probaremos que $f^{-1}[S(U)] = E(U)$.

⊂] Sea $x \in f^{-1}[S(U)]$. Entonces $f(x) \in S(U)$. Por lo que existe un $V \in f(x)$ tal que $cl_Z(V) \subset U$. Consideremos 2 casos.

Caso 1. $x \in Z$. Entonces $f(x) = F_x$, lo cual implica que $x \in cl_Z(V) \subset U$. Así, tenemos que $x \in U$ y como $U = E(U) \cap Z$, se sigue que $x \in E(U)$.

Caso 2. $x \notin Z$. Entonces $f(x) = G_x$, lo cual implica que $x \in E(V)$. Como $V \subset U$, se tiene que $Z \setminus U \subset Z \setminus V$, lo cual implica que $cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U) \subset cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus V)$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned}
E(V) &= \mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus V) \\
&\subset \mathbb{S}^2 \setminus cl_{\mathbb{S}^2}(Z \setminus U) \\
&= E(U).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $E(V) \subset E(U)$ y por lo tanto $x \in E(U)$.

En ambos casos se llega a que $x \in E(U)$. Entonces ya podemos concluir que $f^{-1}[S(U)] \subset E(U)$.

▷] Sea $x \in E(U)$. Consideremos 2 casos.

Caso 1. $x \in Z$. Entonces $f(x) = F_x$ y además $x \in U$ ya que $U = Z \cap E(U)$. Por otro lado, como Z es regular y \mathcal{B} es base, existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset cl_Z(V) \subset U$. De esto se sigue que $V \in F_x$. Pero esto implica que $F_x \in S(U)$, es decir, $f(x) \in S(U)$. Así, tenemos que $x \in f^{-1}[S(U)]$.

Caso 2. $x \notin Z$. Entonces $f(x) = G_x$. Como \mathbb{S}^2 es regular, hay un abierto V en \mathbb{S}^2 tal que $x \in V \subset cl_{\mathbb{S}^2}(V) \subset E(U)$. Por la proposición 4.2.6, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in E(B) \subset V$. Luego, de la proposición 1.1.3 y del hecho que $cl_{\mathbb{S}^2}(B) = cl_{\mathbb{S}^2}[E(B)]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
cl_Z(B) &= Z \cap cl_{\mathbb{S}^2}(B) \\
&= Z \cap cl_{\mathbb{S}^2}[E(B)] \\
&\subset Z \cap cl_{\mathbb{S}^2}[V] \\
&\subset Z \cap E(U) \\
&= U.
\end{aligned}$$

Como $B \in G_x$, se sigue que $f(x) \in S(U)$, lo cual implica que $x \in f^{-1}[S(U)]$. Y por tanto $E(U) \subset f^{-1}[S(U)]$.

En ambos casos se llega a que $x \in f^{-1}[S(U)]$. Entonces ya podemos concluir que $E(U) = f^{-1}[S(U)]$. Luego, por el teorema 1.1.15 se sigue que f es continua. Entonces, como \mathbb{S}^2 es compacto, $\mathcal{F}X$ es Hausdorff y f es continua y biyectiva, por el teorema 1.1.25 se tiene que f es un homeomorfismo. Ahora tomemos un $x \in Z$. Vemos que

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x) = F_x = e(x).$$

Así, tenemos que $f \circ h = e$. Y por lo tanto las compactaciones $\mathcal{F}Z$ y \mathbb{S}^2 de Z son equivalentes. □

4.3. La compactación de Freudenthal de una variedad que no es metrizable

Consideremos el espacio $X = (\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{L}^{\geq 0}$ es el rayo largo el cual ya hemos definido en la sección 2.2. Consideraremos al espacio X con la

topología producto. En el ejemplo 2.2.3 se probó que el espacio $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es una 1-variedad. Y como \mathbb{S}^1 es una 1-variedad, del teorema 2.1.6 se sigue que X es una 2-variedad y por lo tanto es localmente compacto. Por otro lado, sabemos también que las variedades son completamente regulares. Y como los singuletes en $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ son cerrados, se sigue que $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$ es Tychonoff. Por lo tanto X es Tychonoff por ser producto de dos espacios Tychonoff. Entonces X tiene una compactación de Freudenthal. A continuación vamos a describirla.

Antes de dar el ejemplo, definiremos otro espacio que, como veremos a continuación, es otra compactación de X .

Sean p, q tales que p y q no están en X y $p \neq q$. Hagamos $Y = X \cup \{p\} \cup \{q\}$. Definimos una colección μ de subconjuntos de Y de la siguiente manera:

1. Si $V \subset X$, entonces $V \in \mu$ si y solo si V es abierto en X . A estos elementos de μ los llamaremos de tipo 1.
2. Si $V \subset Y$ y $p \in V$, entonces $V \in \mu$ si y solo si V es de la forma $V = \{p\} \cup [(0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1]$, para algún $\epsilon \in (0, 1)$. A estos elementos de μ los llamaremos de tipo 2.
3. Si $V \subset Y$ y $q \in V$, entonces $V \in \mu$ si y solo si V es de la forma $V = \{q\} \cup [(\alpha, \omega_1) \times \mathbb{S}^1]$, para algún $\alpha \in \omega_1$. A estos elementos de μ los llamaremos de tipo 3.

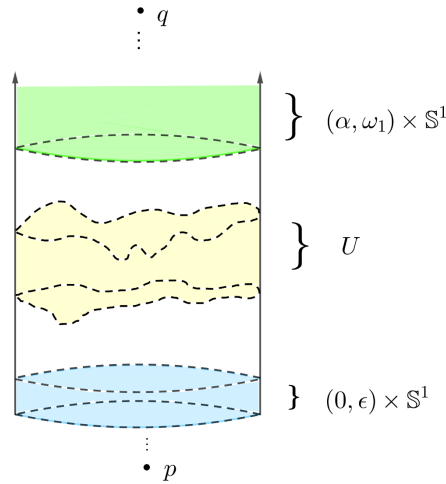


Figura 4.4: Cómo imaginamos a los elementos de μ

En la figura 4.3 tenemos una representación geométrica del espacio Y junto con los subconjuntos definidos arriba. El conjunto U de color amarillo representa un elemento de Y de tipo 1. El conjunto de color azul unión el punto p representa un elemento de Y de tipo 2. Y el conjunto de color verde unión el punto q representa un elemento de Y de tipo 3.

Un resultado que es claro después de un momento de reflexión es el siguiente:

Proposición 4.3.1. *La colección μ de subconjuntos de Y cuyos elementos son de tipo 1, 2 y 3, es base para una única topología τ en Y , es decir, μ cumple las condiciones (1) y (2) de la proposición 1.1.1.*

Probemos que Y es una compactación de X . Primero notemos que la función $h : X \rightarrow Y$ dada por $h(x) = x$, es un encaje denso. Veamos que Y es compacto. Consideremos la base μ de Y y tomemos $\mathcal{A} \subset \mu$ tal que \mathcal{A} es cubierta de Y . Como \mathcal{A} es cubierta de Y , existen $U, V \in \mathcal{A}$ tales que

$$\begin{aligned} U &= [(0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1] \cup \{p\}, \text{ y} \\ V &= [(\alpha, \omega_1) \times \mathbb{S}^1] \cup \{q\}, \end{aligned}$$

para algún $\alpha \in \omega_1$ y $\epsilon \in (0, 1)$. Sea $K = [\frac{\epsilon}{2}, \alpha] \times \mathbb{S}^1$. El lema 2.2.2 implica que $[\frac{\epsilon}{2}, \alpha]$ es compacto. Y como \mathbb{S}^1 es compacto, se sigue que K es un compacto en Y . Por otro lado, tenemos que

$$\mathcal{C}' = \{W \cap K : W \in \mathcal{A}\}$$

es una cubierta de abiertos en K . Y como K es compacto, existe una subcubierta finita $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}'$ que cubre a K . Así, tenemos que la familia

$$\{U\} \cup \{W \in \mathcal{A} : W \cap K \in \mathcal{H}\} \cup \{V\}$$

es una subcubierta finita de \mathcal{A} que cubre a Y . Por lo tanto, del teorema 1.1.24 se sigue que Y es compacto.

Entonces ya podemos concluir que (Y, h) es una compactación de X .

Ejemplo 4.3.2. *La compactación de Freudenthal del espacio X , es equivalente a el espacio (Y, μ) .*

Demostración. Empezamos tomando la FG-base de X . Sea

$$\mathcal{B} = \{U \subset X : U \text{ es abierto y } \text{Fr}_X(U) \text{ es compacto}\}.$$

Clasificamos los abiertos de X de la siguiente manera:

- Los abiertos U en X tales que $cl_X(U)$ es compacto. A estos abiertos los llamaremos de tipo I.
- Los abiertos U en X tales que $cl_X(U)$ no es compacto. A estos abiertos los llamaremos de tipo II.

Lo que haremos a continuación será dar las familias vinculantes de X . Para cada $x \in X$ definimos

$$F_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in cl_X(U)\}.$$

Por la proposición 4.1.13 se tiene que F_x es familia vinculante maximal. Luego, definimos

$$\begin{aligned} F &= \{U \in \mathcal{B} : \text{existe } \alpha \in \omega_1 \text{ tal que } (\alpha, \omega_1) \times \mathbb{S}^1 \subset U\}, \text{ y} \\ G &= \{U \in \mathcal{B} : \text{existe } \epsilon \in (0, 1) \text{ tal que } (0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1 \subset U\}. \end{aligned}$$

Probaremos que F y G son familias vinculantes maximales. Primero veamos que F es familia vinculante maximal. Tomemos $\{U_1, \dots, U_n\} \subset F$. Entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \omega_1$ tales que

$$(\alpha_i, \omega_1) \times \mathbb{S}^1 \subset U_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Como ω_1 es linealmente ordenado, existe un $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \leq \alpha_m$. Luego vemos que

$$\begin{aligned} cl_X(U_1) \cap \dots \cap cl_X(U_n) &\supset \bigcap_{i=1}^n [(\alpha_i, \omega_1) \times \mathbb{S}^1] \\ &= (\alpha_m, \omega_1) \times \mathbb{S}^1 \\ &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual implica que F es una familia vinculante. Veamos que F es maximal. Sea $H \subset \mathcal{B}$ familia vinculante tal que $F \subset H$. Sea $V \in H$. Como $Fr_X(V)$ es compacto, existe un $\beta \in \omega_1$ tal que

$$Fr_X(V) \subset (0, \beta) \times \mathbb{S}^1.$$

Hagamos $U = (\beta, \omega_1) \times \mathbb{S}^1$. Notemos que (β, ω_1) es subconjunto conexo de $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. Y como \mathbb{S}^1 es conexo, por el corolario 1.2.4 se sigue que U es conexo. Ahora afirmamos que $U \cap V \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, se tendría que

$$cl_X(V) \cap cl_X[(\beta + 1, \omega_1) \times \mathbb{S}^1] = \emptyset.$$

Pero esto contradice el hecho que H es una familia vinculante que contiene a F . Por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, de la ecuación 4.21 y del hecho que V es abierto en X se tiene que

$$X = V \cup Fr_X(V) \cup ext_X(V).$$

Luego, como U es conexo se tiene que $U \subset V$ o $U \subset ext_X(V)$. Pero como $U \cap V \neq \emptyset$, se sigue que $U \subset V$. Y por lo tanto $V \in F$. Así, tenemos que $H \subset F$ y se sigue que $F = H$. Por lo tanto F es maximal.

Ahora veamos que G es familia vinculante maximal. Tomemos $\{U_1, \dots, U_n\} \subset G$. Entonces existen $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in (0, 1)$ tales que

$$(0, \epsilon_i) \times \mathbb{S}^1 \subset U_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_i : 1 \leq i \leq n\}$. Luego vemos que

$$\begin{aligned} cl_X(U_1) \cap \dots \cap cl_X(U_n) &\supset \bigcap_{i=1}^n [(0, \epsilon_i) \times \mathbb{S}^1] \\ &= (0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1 \\ &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual implica que G es una familia vinculante. Veamos que G es maximal. Sea $H \subset \mathcal{B}$ familia vinculante tal que $G \subset H$. Sea $V \in H$. Como $\text{Fr}_X(V)$ es compacto, existe $\epsilon \in (0, 1)$ tal que

$$\text{Fr}_X(V) \subset (\epsilon, \omega_1) \times \mathbb{S}^1.$$

Hagamos $U = (0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1$. Notemos que $(0, \epsilon)$ es subconjunto conexo de $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. Y como \mathbb{S}^1 es conexo, por el corolario 1.2.4 se sigue que U es conexo. Ahora afirmamos que $U \cap V \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, se tendría que

$$cl_X(V) \cap cl_X \left[\left(0, \frac{\epsilon}{2}\right) \times \mathbb{S}^1 \right] = \emptyset.$$

Pero esto contradice el hecho que H es una familia vinculante que contiene a G . Por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, de la ecuación 4.21 y del hecho que V es abierto en X se tiene que

$$X = V \cup \text{Fr}_X(V) \cup \text{ext}_X(V).$$

Luego, como U es conexo se tiene que $U \subset V$ o $U \subset \text{ext}_X(V)$. Pero como $U \cap V \neq \emptyset$, se sigue que $U \subset V$. Y por lo tanto $V \in G$. Así, tenemos que $H \subset G$ y se sigue que $G = H$. Por lo tanto G es maximal.

Probemos que la familia

$$\{F_x : x \in X\} \cup \{F\} \cup \{G\}$$

contiene a todas las familias vinculantes maximales de \mathcal{B} . Sea $H \subset \mathcal{B}$ una familia vinculante maximal. Consideremos dos casos:

Caso 1. Todo elemento de H es de tipo II. Por definición, para todo $V \in H$ se tiene que $cl_X(V)$ no es compacto. Entonces, para cada $V \in H$ se tiene que

- (i) no existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $cl_X(V) \subset (0, \alpha) \times \mathbb{S}^1$, ó
- (ii) no existe $\epsilon \in (0, 1)$ tal que $cl_X(V) \subset (\epsilon, \omega_1) \times \mathbb{S}^1$.

Consideremos 2 subcasos del caso 1:

Subcaso 1.1. Todo elemento de H cumple (i). Sea $V \in H$. Veamos que $V \in F$. Como $\text{Fr}_X(V)$ es compacto, existe un $\beta \in \omega_1$ tal que

$$\text{Fr}_X(V) \subset (0, \beta) \times \mathbb{S}^1.$$

Hagamos $U = (\beta, \omega_1) \times \mathbb{S}^1$. Notemos que (β, ω_1) es subconjunto conexo de $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. Y como \mathbb{S}^1 es conexo, por el corolario 1.2.4 se sigue que U es conexo. Ahora afirmamos que $U \cap \text{cl}_X(V) \neq \emptyset$, ya que de lo contrario se tendría que

$$\begin{aligned} \text{cl}_X(V) &\subset X \setminus U \\ &= (0, \beta] \times \mathbb{S}^1 \\ &\subset (0, \beta + 1) \times \mathbb{S}^1, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición (i). Entonces se cumple que $U \cap \text{cl}_X(V) \neq \emptyset$. Luego, de la proposición 1.1.3 se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, de 4.21 y del hecho que V es abierto en X se tiene que

$$X = V \cup \text{Fr}_X(V) \cup \text{ext}_X(V).$$

Luego, como U es conexo se tiene que $U \subset V$ o $U \subset \text{ext}_X(V)$ ya que $U \cap \text{Fr}_X(V) = \emptyset$. Pero como $U \cap V \neq \emptyset$, se sigue que $U \subset V$. Esto prueba que $V \in F$. Por lo tanto $H \subset F$, pero como H es maximal se sigue que $H = F$.

Subcaso 1.2. Hay un elemento $V_0 \in H$ que no cumple (i). Entonces existe un $\alpha \in \omega_1$ tal que $\text{cl}_X(V_0) \subset (0, \alpha) \times \mathbb{S}^1$. Afirmamos que todos los elementos de H no cumplen (i). Probemos esta afirmación: Supongamos que hay un elemento $V_1 \in H$ que cumple (i). Entonces existe un $\epsilon \in (0, 1)$ tal que $\text{cl}_X(V_1) \subset (\epsilon, \omega_1) \times \mathbb{S}^1$. Hagamos $V = V_0 \cap V_1$. Como las familias viculantes maximales son cerradas bajo intersecciones, se tiene que $V \in H$. Luego vemos que

$$\text{cl}_X(V) \subset \text{cl}_X(V_0) \cap \text{cl}_X(V_1) \subset [\epsilon, \alpha] \times \mathbb{S}^1.$$

Entonces, por el teorema 1.1.28 se tiene que $\text{cl}_X(V)$ es compacto por ser cerrado y estar contenido en el compacto $[\epsilon, \alpha] \times \mathbb{S}^1$. Pero esto contradice el hecho que todos los elementos de H son de tipo II. Por lo tanto todos los elementos de H cumplen (ii). Probemos que $H = G$. Sea $V \in H$. Como $\text{Fr}_X(V)$ es compacto, existe un $\epsilon \in (0, 1)$ tal que

$$\text{Fr}_X(V) \subset (\epsilon, \omega_1) \times \mathbb{S}^1.$$

Hagamos $U = (0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1$. Notemos que $(0, \epsilon)$ es subconjunto conexo de $\mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\}$. Y como \mathbb{S}^1 es conexo, por el corolario 1.2.4 se sigue que U es conexo. Ahora afirmamos que $U \cap \text{cl}_X(V) \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, se tendría que

$$\begin{aligned} \text{cl}_X(V) &\subset X \setminus U \\ &= [\epsilon, \omega_1) \times \mathbb{S}^1 \\ &\subset \left(\frac{\epsilon}{2}, \omega_1\right) \times \mathbb{S}^1, \end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición (ii). Entonces se cumple que $U \cap cl_X(V) \neq \emptyset$. Luego, de la proposición 1.1.3 se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, de 4.21 y del hecho que V es abierto en X se tiene que

$$X = V \cup Fr_X(V) \cup ext_X(V).$$

Luego, como U es conexo se tiene que $U \subset V$ o $U \subset ext_X(V)$ ya que $U \cap Fr_X(V) = \emptyset$. Pero como $U \cap V \neq \emptyset$, se sigue que $U \subset V$. Esto prueba que $V \in G$. Por lo tanto $H \subset G$, pero como H es maximal, se sigue que $H = G$.

Caso 2. H tiene un elemento de tipo I. Haciendo un procedimiento completamente análogo como en el caso 2 del ejemplo 4.2.2 se llega a que $H = F_x$ para algún $x \in X$.

De los casos 1 y 2 se llega a que $H \in \{F_x : x \in X\} \cup \{F\} \cup \{G\}$. Por lo tanto, la compactación de Freudenthal del espacio X es

$$\mathcal{F}X = \{F_x : x \in X\} \cup \{F\} \cup \{G\},$$

donde X está encajado en $\mathcal{F}X$ con la función $e : X \rightarrow \mathcal{F}X$ dada por $e(x) = F_x$ (como en el teorema 4.1.15), para cada $x \in X$.

Por último, veamos que Y es equivalente a $\mathcal{F}X$. Definamos una función $f : Y \rightarrow \mathcal{F}X$ como

$$f(x) = \begin{cases} F_x, & \text{si } x \in X, \\ F, & \text{si } x = q, y \\ G, & \text{si } x = p. \end{cases}$$

Veamos que f es un homeomorfismo. Notemos que f es sobreyectiva por definición y f es inyectiva en X . Tomemos $x \in X$ y $y \in \{p, q\}$. Si $y = q$, se tiene que $f(x) = F_x \neq F = f(y)$. Si $y = p$, se tiene que $f(x) = F_x \neq G = f(y)$. Y si $x = p$ y $y = q$, se tiene que $f(x) = G \neq F = f(y)$. De esto se sigue que f es inyectiva en todo Y y por lo tanto biyectiva.

Probemos que f es continua. Primero notemos que X es abierto en Y . Luego, como $f \upharpoonright_X = e$, por la observación 1.1.14 se sigue que f es continua en cada punto de X . Probemos la continuidad puntual de f en p y q .

- f continua en p . Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $f(p) = G \in S(V)$. Entonces existe un $W \in G$ tal que $cl_X(W) \subset V$. Luego, como $W \in G$, existe un $\epsilon \in (0, 1)$ tal que $(0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1 \subset W$. Hagamos

$$U = [(0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1] \cup \{p\}.$$

Notemos que U es vecindad abierta de p . Como $(0, \epsilon) \times \mathbb{S}^1 \subset W$ se tiene que

$U \subset W \cup \{p\}$. Luego vemos que

$$\begin{aligned}
 f[U] &\subset f[W] \cup f[\{p\}] \\
 &= f \upharpoonright X[W] \cup \{G\} \\
 &\subset f \upharpoonright X[V] \cup \{G\} \\
 &= (S(V) \setminus \{G\}) \cup \{G\} \\
 &= S(V).
 \end{aligned}$$

Así, tenemos que $f[U] \subset S(V)$. Por lo tanto f es continua en p .

• f continua en q . Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $f(q) = F \in S(V)$. Entonces existe un $W \in \mathcal{F}$ tal que $cl_X(W) \subset V$. Luego, como $W \in \mathcal{F}$, existe un $\alpha \in \omega_1$ tal que $(\alpha, \omega_1) \times \mathbb{S}^1 \subset W$. Hagamos

$$U = [(\alpha, \omega_1) \times \mathbb{S}^1] \cup \{q\}.$$

Notemos que U es vecindad abierta de q . Como $(\alpha, \omega_1) \times \mathbb{S}^1 \subset W$ se tiene que $U \subset W \cup \{q\}$. Luego vemos que

$$\begin{aligned}
 f[U] &\subset f[W] \cup f[\{q\}] \\
 &= f \upharpoonright X[W] \cup \{F\} \\
 &\subset f \upharpoonright X[V] \cup \{F\} \\
 &= (S(V) \setminus \{F\}) \cup \{F\} \\
 &= S(V).
 \end{aligned}$$

Así, tenemos que $f[U] \subset S(V)$. Por lo tanto f es continua en q .

Entonces ya podemos concluir que f es continua en Y . Luego, como Y es compacto, $\mathcal{F}X$ es Hausdorff y f es continua y biyectiva, por el teorema 1.1.25 se tiene que f es un homeomorfismo. Ahora tomemos un $x \in X$. Vemos que

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x) = F_x = e(x),$$

lo cual implica que $f \circ h = e$. Esto completa la prueba de que las compactaciones $\mathcal{F}X$ y Y de X son equivalentes. □

4.4. Extremos de variedades: extremo corto y largo

En la sección anterior definimos la compactación de Freudenthal en un espacio Tychonoff con borde compacto. Notemos que del hecho que una variedad es localmente compacta, se sigue que es de borde compacto. Y como una variedad es completamente regular y Hausdorff, también es Tychonoff. Entonces podemos hablar de la compactación de Freudenthal de una variedad.

El objetivo principal de esta sección será definir los **extremos** de un espacio topológico conexo, Hausdorff y localmente compacto en términos de su compactación de Freudenthal. En particular, los **extremos** de una variedad y daremos un par de ejemplos.

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es un **subconjunto** G_δ de X si existe una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos en X tal que

$$A = \bigcap_{n \in \omega} U_n.$$

Sea X un espacio topológico conexo, Hausdorff y localmente compacto. Sea $\mathcal{F}(X)$ la compactación de Freudenthal de X . El residuo $\mathcal{E}(X) = \mathcal{F}(X) \setminus X$ es llamado el **espacio de extremos** de X ; un punto en $\mathcal{E}(X)$ es llamado un **extremo** de X .

Definición 4.4.1. *Sea X un espacio topológico conexo, localmente compacto y Hausdorff.*

- (1) *Un extremo e de X es **largo** si es un P -punto débil de $\mathcal{F}(X)$, es decir, e no es punto de acumulación de ningún subconjunto numerable de $\mathcal{F}(X)$.*
- (2) *Un extremo de X es **corto** si es un punto G_δ de $\mathcal{F}(X)$.*
- (3) *X tiene la **propiedad de dicotomía de extremos** si cada extremo de X es corto o largo.*

A continuación daremos un ejemplo de una 2-variedad que tiene dos extremos y se trata precisamente del ejemplo 4.3.2.

Proposición 4.4.2. *La variedad $X = \mathbb{L}^{\geq 0} \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^1$ tiene dos extremos: uno corto y uno largo.*

Demostración. En el ejemplo 4.2.10 vimos que la compactación de Freudenthal de X es equivalente a un espacio $Y = X \cup \{p\} \cup \{q\}$, donde p y q están definidos en ese ejemplo. Probaremos entonces que p es un extremo corto y q es un extremo largo de Y . Primero veamos que p es un extremo corto. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{p\} \cup [(0, \frac{1}{n}) \times \mathbb{S}^1]$ es un abierto en Y . Luego, vemos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\{p\} \cup \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \mathbb{S}^1 \right) &= \{p\} \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \mathbb{S}^1 \right) \\ &= \{p\}. \end{aligned}$$

De esto se sigue que p es un extremo corto de Y .

Ahora veamos que q es un extremo largo. Tomemos un subconjunto $A \subset Y$ numerable. Probaremos que q no es punto de acumulación de A , por lo que

podemos suponer que $p \notin A$. Como A es numerable, entonces $A \setminus \{q\}$ también lo es. Por otro lado, notemos que $A \setminus \{q\} \subset X$. Entonces podemos tomar

$$A \setminus \{q\} = \{\langle L_i, s_i \rangle : i \in \omega\},$$

donde $L_i = \alpha_i + t_i$ con $\alpha_i \in \omega_1$, $t_i \in (0, 1)$ y $s_i \in \mathbb{S}^1$. Hagamos $B = \{\alpha_i : i \in \omega\}$. Por el teorema 1.4.8, existe un $\beta \in \omega_1$ tal que

$$\alpha_i < \beta \text{ para cada } i \in \omega. \quad (4.25)$$

Notemos que

$$U = ((\beta, \omega_1) \times \mathbb{S}^1) \cup \{q\}$$

es vecindad abierta de q en Y . Afirmamos que $(A \setminus \{q\}) \cap U = \emptyset$. En efecto, notemos que de 4.25 y del hecho que $A \setminus \{q\} \subset X$ se tiene que $A \setminus \{q\} \subset (0, \beta) \times \mathbb{S}^1$. Luego, vemos que

$$\begin{aligned} (A \setminus \{q\}) \cap U &\subset [(0, \beta) \times \mathbb{S}^1] \cap U \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Y así tenemos que $(A \setminus \{q\}) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, de la proposición 1.1.5 se tiene que q no es punto de acumulación de A . □

Para finalizar esta sección enunciaremos un teorema sin demostración, el cual es muy importante ya que es una caracterización de las variedades metrizable en términos de sus extremos. Pero antes daremos una definición.

Definición 4.4.3. *Una variedad X se dice que es de **tipo I** si puede ser escrita como $X = \bigcup_{\alpha < \omega_1} U_\alpha$, donde U_α es un subespacio abierto metrizable tal que $cl_X(U_\alpha) \subset U_{\alpha+1}$ para todo $\alpha < \omega_1$.*

Teorema 4.4.4. [3, Teorema 3.3, p. 12] *Sea X una variedad tal que todos sus extremos son cortos.*

- (1) *Si $\mathcal{E}(X)$ es numerable, entonces X es metrizable.*
- (2) *Si X es de tipo I y $\mathcal{E}(X)$ es segundo numerable, entonces X es metrizable.*

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se presentaron varios ejemplos de variedades, incluida la línea larga, la cual se mostró que es una 1-variedad no metrizable. Aunque en la definición de variedad solo se pide que se cumpla el axioma de separación T_2 , se mostró que las variedades son $T_{3,5}$.

Definimos los espacios adjunción y dimos un teorema que nos da condiciones suficientes para que el espacio adjunción sea conexo y Hausdorff. Además, estudiamos un par de ejemplos donde los espacios adjunción resultantes son variedades bien conocidas en geometría: la esfera y el 2-toro.

También definimos una FG -base, la cual nos ayuda a construir compactaciones. Nosotros elegimos una FG -base particular para definir la compactación de Freudenthal con la intención de estudiar los extremos de las variedades. Introdujimos la definición de variedad de tipo I y enunciamos un teorema de caracterización para variedades metrizable en términos de sus extremos: Teorema 4.4.4. En este teorema, una de las condiciones que tiene la variedad es que sea de tipo I y además que el espacio de extremos sea segundo numerable. Entonces, de manera natural podríamos preguntarnos si con alguna otra condición equivalente a ser metrizable las cuales aparecen en [2, Teorema 2.1, p. 27] esto también se cumple. Por el ejemplo

1. Si X es de tipo I y $\mathcal{E}(X)$ es σ -compacto, ¿entonces X es metrizable?, o
2. Si X es de tipo I y $\mathcal{E}(X)$ es hemicompacto, ¿entonces X es metrizable?

Entonces nos podemos dar cuenta que los extremos de las variedades nos proporcionan información importante acerca del espacio.

Bibliografía

- [1] Arce Arce, José Alfredo; *Un vistazo a dos aspectos de la topología: Homogeneidad y Rigidez*. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM (2025)
- [2] Dugundji, James; *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, MA, 1966. xvi+447 pp.
- [3] Fernández-Bretón, David; Vlamis, Nicholas G; *Ends of non-metrizable manifolds: a generalized bagpipe theorem*. *Topology Appl.* 300, ID: 108017, 30 p. (2022).
- [4] Hernández-Gutiérrez, Rodrigo; *Un curso introductorio de teoría de conjuntos*. Departamento de matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Publicado en línea en 2022.
- [5] Hernández-Gutiérrez, Rodrigo; *El primer infinito no numerable y su topología*. *Misc. Mat.* 77, 35-58 (2023).
- [6] van Mill, Jan; *Infinite-dimensional topology. Prerequisites and introduction*. North-Holland Mathematical Library; v. 43. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. xii+401 pp. ISBN: 0-444-87133-0
- [7] Munkres, James; *Topology*. Second edition of Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2
- [8] Porter, Jack R.; Woods, R. Grant; *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*. New York: Springer-Verlag. XIII, 856 p.; DM 178.00 (1988).
- [9] Rudin, Walter; *Principles of mathematical analysis*. Third edition. International series in pure and applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company. X, 342 p. ISBN: 0-07-054235-X
- [10] Ryszard, Engelking; *General topology*. Second edition. Sigma Ser. Pure Math., 6 Heldermann Verlag, Berlin, 1989. viii+529 pp. ISBN: 3-88538-006-4
- [11] Tkachuk, Vladimir; *Curso básico de topología general*. Primera edición. Departamento de matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa (1999). ISBN: 970-654-362-7

- [12] Willard, Stephen; *General Topology*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley Publishing company. XII, 369 p. (1970).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00244

Matrícula: 2223804717

Una primera mirada a las variedades metrizables y no metrizables.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 24 del mes de junio del año 2025 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ GUTIERREZ
DR. DAVID JOSE FERNANDEZ BRETON
DR. JOSUE MELENDEZ SANCHEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: CARLOS ALBERTO RIOS MENDOZA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



CARLOS ALBERTO RIOS MENDOZA
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ
GUTIERREZ

VOCAL

DR. DAVID JOSE FERNANDEZ BRETON

SECRETARIO

DR. JOSUE MELENDEZ SANCHEZ