Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

LOS TEOREMAS DE FELLER-MIYADERA-PHILLIPS Y HILLE-YOSIDA PARA SEMIGRUPOS POSITIVOS Y ECUACIONES MAESTRAS NO LINEALES

TESIS

QUE PRESENTA

ALFREDO REYES VAZQUEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ROBERTO QUEZADA BATALLA

JURADO:

DR. FERNANDO GALAZ FONTES

DRA. MA. LOURDES PALACIOS FABILA

DR. ROBERTO QUEZADA BATALLA

MÉXICO, DF. ABRIL 2015

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 23/04/2015
Página : 1/1

CONSTANCIADE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS) del alumno ALFREDO REYES VAZQUEZ, matrícula 2121800817, quien cumplió con los 132 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha veintitrés de abril del 2015 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

LOS TEOREMAS DE FELLER-MIYADERA-PHILLIPS Y HILLE-YOSIDA PARA SEMIGRUPOS POSITIVOS Y ECUACIONES MAESTRAS NO LINEALES

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 192 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

Aprobar

JURADO

Presidente

DR. FERNANDO GALAZ FONTES

Secretaria

Ma. de Lourdes Palacios F.

DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

Vocal

DR. ROBERTO QUEZADA BATALLA

A mis padres

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Siguiendo a Charles J. K. Batty y Derek W. Robinson [BR84], en este trabajo estudiamos los espacios de Banach ordenados, establecemos el concepto de semigrupo positivo y presentamos los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida que caracterizan a los generadores infinitesimales de semigrupos positivos usando el concepto de operador disipativo con respecto a una media-norma. Además, siguiendo la referrencia de R. Alicki y J. Messer [AM83] definimos una clase de ecuaciones maestras no lineales y damos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de su solución.

En el capítulo 2 definimos un orden en un espacio de Banach real mediante un cono positivo convexo. En su espacio dual, el orden entre funcionales se establece mediante la condición de preservar la positividad. También analizamos las consecuencias de este orden tanto en el espacio de Banach como en su dual y su relación con las normas.

En el capítulo 3 introducimos el concepto de disipatividad con respecto a una media-norma, desarrollamos algunos ejemplos de operadores disipativos con respecto a distintas media-normas y normas. Además, discutimos la relación entre operadores positivos en un espacio de Hilbert y el concepto de disipativiad con respecto a una media-norma. En este capítulo demostramos los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida para semigrupos positivos.

El concepto de operador completamente positivo se introduce en el capítulo 4, donde también discutimos la caracterización de los generadores infinitesimales de semigrupos (completamente positivos) cuánticos de Markov.

Finalmente, en el capítulo 5 introducimos la clase de ecuaciones maestras no lineales a resolver y damos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de su solución.

Hemos intentado que este trabajo sea una introducción autocontenida al tema de semigrupos positivos y completamente positivos. Nuestra principal contribución ha sido completar los detalles técnicos de resultados que los autores sólo mencionan, dejando su demostración como ejercicios al lector.

Capítulo 2

Espacios de Banach ordenados

En este capítulo discutimos la estructura de orden en espacios de Banach B, y en sus espacios duales B^*. En particular, nos enfocaremos en sus conjuntos convexos y en ciertas propiedades de la norma.

Denotaremos por B_α la bola cerrada de radio $\alpha > 0$ y centro en 0, es decir,

$$B_\alpha = \{x \in B : \|x\| \leq \alpha\}.$$

Además, la norma de funcionales lineales continuos u operadores se define mediante

$$\|\omega\|_{B^*} = \sup\{|\omega(a)| : a \in B_1\}.$$

2.1. Conos positivos

El desarrollo de la teoría de los espacios de Banach ordenados se basa en el estudio de los espacios clásicos de funciones reales. Por ejemplo, en el espacio de funciones continuas, acotadas y real valuadas definidas en un espacio topológico X con la norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

el cual denotamos por $C(X)$, tenemos una relación de orden definida mediante $f \geq g$, si y sólo si $(f - g)(x) \geq 0$ para cada $x \in X$.

Además, si consideramos $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, entonces para cualquier $p \in [1, \infty)$, fija, se cumple que en el espacio de funciones real valuadas y medibles en X con la condición $\int |f|^p \, d\mu < \infty$, y con la norma

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

el cual denotamos por $L^p(X, d\mu)$, podemos definir una relación de orden en $L^p(X, d\mu)$ mediante, $f \geq g$ si y sólo si $(f - g)(x) \geq 0$ para toda $x \in X$, salvo un conjunto de μ-medida cero.

Sin embargo, podemos definir estas relaciones de orden de una manera más geométrica, que resulta ser más conveniente para su generalización.

Definición 2.1. *Un espacio de Banach ordenado es una terna,* $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$*, donde* B *es un espacio de Banach real con norma* $\|\cdot\|_B$ *y* B_+ *es un cono positivo, i. e.* B_+ *es un subconjunto no vacío y cerrado en la norma de* B *que satisface*

$$\lambda B_+ + \mu B_+ \subset B_+ \tag{2.1}$$

para cada $\lambda, \mu \geq 0$*.*

De está manera, siempre se cumple que $0 \in B_+$.

Teorema 2.1. *Sea* $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ *un espacio de Banach ordenado. Entonces en su espacio dual* $(B^*, \|\cdot\|_{B^*})$ *el conjunto dado por*

$$B_+^* \quad = \quad \{\omega \in B^* : \omega(a) \geq 0, \forall a \in B_+\}, \tag{2.2}$$

es un cono positivo que es cerrado en la topología débil$-*$ *que denotamos por* $\sigma(B^*, B)$*.*

Demostración. Para ver que B_+^* es $\sigma(B^*, B)$-cerrado tengamos presente que la topología débil$-*$ se define como la topología más débil en B^* que hace continuas a las aplicaciones $(\phi_a)_{a\in B}$ definidas mediante: $\phi_a\colon B^* \to \mathbb{R}$ y $\omega \mapsto \phi_a(\omega) := \omega(a)$ para cada $a \in B$.
En consecuencia,

$$B_+^* = \bigcap_{a\in B^+} \phi_a^{-1}\Big([0, \infty)\Big)$$

Por lo tanto, B_+^* es $\sigma(B^*, B)$-cerrado por ser la intersección de conjuntos $\sigma(B^*, B)$-cerrados y claramente se cumple que $\lambda B_+^* + \mu B_+^* \subset B_+^*$ para todo $\lambda, \mu \geq 0$. □

Como consecuencia del teorema 2.1, la terna $(B^*, B_+^*, \|\cdot\|_{B^*})$ es un espacio de Banach ordenado, al cual llamamos *espacio dual ordenado* de $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ y al conjunto B_+^* le decimos *cono dual positivo* de B^*.

Definición 2.2. *En un espacio de Banach ordenado* $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ *definimos una relación de orden mediante*

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in B_+ \tag{2.3}$$

para todo $a, b \in B$*.*

De esta manera, tenemos que $a \geq 0$ es equivalente a tener que $a \in B_+$.

Proposición 2.1. *En un espacio de Banach ordenado, la relación dada en* (2.3) *es reflexiva, transitiva y para cualesquiera* $a, b, c \in B$ *con* $a \geq b$*, se cumple que* $a + c \geq b + c$*. Además, si* $a \geq 0$ *y* $\lambda \geq 0$*, entonces* $\lambda a \geq 0$*.*

Demostración. Sean $a, b, c \in B$, entonces $a \geq a$ pues $a - a = 0 \in B_+$. De está manera (2.3) determina una relación reflexiva.

Para la transitividad, supongamos que $a \geq b$ y $b \geq c$, luego $a - b, b - c \in B_+$. Entonces $(a - b) + (b - c) \in B_+$, es decir, $a - c \in B_+$, con lo cual concluimos que $a \geq c$.

Ahora bien, para $a \geq b$, se tiene que $a + c - (b + c) \in B_+$ para toda $c \in B$. Por lo tanto, $a + c \geq b + c$. Por último, si $a \geq 0$ y $\lambda \geq 0$, entonces $a \in B_+$ y por definición de cono positivo, concluimos que $\lambda a \in B_+$, es decir, $\lambda a \geq 0$. □

El estudio de un espacio de Banach ordenado, se puede realizar a partir de su cono positivo mediante la siguiente definición.

Definición 2.3. *Decimos que el cono positivo B_+ genera débilmente al espacio de Banach B, si el conjunto $B_+ - B_+$ es denso bajo la norma de B. Es decir, cada $a \in B$ es el límite en norma de una sucesión $\{b_n - c_n\}_{n\geq 1}$ tal que $b_n, c_n \in B_+$. Similarmente, decimos que el cono dual positivo B_+^* genera $*-$débilmente a B^*, si el conjunto $B_+^* - B_+^*$ es $\sigma(B^*, B)$-denso en B^*.*

Observación 2.1.1. *El conjunto $B_+ - B_+$ es un subespacio vectorial real de B.*

Demostración. Primero notemos que $0 \in B_+ \subset B_+ - B_+$. Luego, si $a, b \in B_+ - B_+$, entonces existen $c, d, e, f \in B_+$ tales que $a = c - d$ y $b = e - f$. Con lo cual $a + b = (c + e) - (d + f) \in B_+ - B_+$.

Por último, si $a = b - c \in B_+ - B_+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda a = \lambda b - \lambda c \in B_+ - B_+$. Mientras que si $\lambda < 0$, entonces $\lambda a = \lambda b - \lambda c = -(-\lambda b) + (-\lambda c) = (-\lambda c) - (-\lambda b) \in B_+ - B_+$. □

Definición 2.4. *Decimos que el cono positivo B_+ es propio o puntiagudo, si $B_+ \cap (-B_+) = \{0\}$.*

Observación 2.1.2. *La propiedad de que el cono B_+ es propio es equivalente a que el orden dado en (2.3) cumpla la anti-simetría, i.e., para todo $a, b \in B$ vale que $a \geq b$ y $b \geq a \Rightarrow a = b$.*

Demostración. Si el cono B_+ es propio, entonces dados $a, b \in B$ tales que $a \geq b$ y $b \geq a$, se cumple que $a - b \geq 0$ y $b - a \geq 0$. Es decir, $a - b, b - a \in B_+$ con lo cual $a - b \in B_+ \cap (-B_+) = \{0\}$. Por lo tanto, $a = b$.

Recíprocamente, si el orden es anti-simétrico y tomamos $a \in B_+ \cap (-B_+)$, entonces $a \geq 0$ y $-a \geq 0$. De aquí que $a \geq 0$ y $0 \geq a$. Por lo tanto $a = 0$ para todo $a \in B_+ \cap (-B_+)$. □

Las relaciones entre estos dos conceptos se establecen en la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) B_+ genera débilmente a B.

2) B_+^* es propio.

Demostración. Primero, supongamos que B_+^* es propio pero $B_+ - B_+$ no es denso en la norma de B. Entonces por ser $B_+ - B_+$ un subespacio vectorial (ver observación 2.1.1) y por una consecuencia del teorema de Hahn-Banach (ver corolario C.4) existe $\eta \in B^*$ tal que $\eta \not\equiv 0$ y $\eta(B_+ - B_+) = 0$.

Veamos que $\eta \in B_+^* \cap (-B_+^*)$, lo cual será una contradicción. En efecto, para cada $a \in B_+$, se tiene que $a \in B_+ - B_+$ pues $a = a - 0$, luego $\eta(a) = 0$. De aquí que $\eta \in B_+^*$. Por otra parte, si $a \in B_+$, entonces $-a \in B_+ - B_+$, de aquí que $-\eta(a) = \eta(-a) = 0$. Luego, $-\eta \in B_+^*$, con lo cual $\eta \in (-B_+^*)$. Finalmente, concluimos que $\eta \in B_+^* \cap (-B_+^*)$

Recíprocamente, si suponemos que B_+ genera débilmente a B y tomamos $\eta \in B_+^* \cap (-B_+^*)$, entonces para cada $b \in B$, por la densidad existe una sucesión $\{b_n - c_n\}_{n\geq 1} \subset B_+ - B_+$ tal que $b_n - c_n \to b$. De aquí que $\eta(b_n - c_n) \to \eta(b)$. Como $\eta \in B_+^*$, se tiene que $\eta(b_n), \eta(c_n) \geq 0$, además $\eta \in -B_+^*$ implica que $\eta(b_n), \eta(c_n) \leq 0$, es decir, $\eta(b_n) = 0 = \eta(c_n)$ para toda $n \geq 1$. Por lo tanto, $\eta(b_n - c_n) = 0$ para cada $n \geq 1$; entonces, $\eta(b) = 0$ y esto demuestra que $\eta = 0$. □

En relación con la definición 2.3, tenemos el siguiente concepto.

Definición 2.5. *Decimos que el cono positivo B_+ está generando a B, si $B = B_+ - B_+$, es decir, si para cada $a \in B$, existe una descomposición $a = b - c$, con $b, c \in B_+$.*

Observación 2.1.3. *Esto es equivalente a pedir que para cada $a \in B$, exista $b \in B_+$ tal que $b \geq a$.*

Demostración. Si B_+ está generando a B y tomamos $a \in B$ tal que $a = b - c$ con $b, c \in B_+$. Esto implica que $b - a = c \geq 0$ con lo cual $b \geq a$.

Recíprocamente, si para cada $a \in B$ existe $b \in B_+$ tal que $b \geq a$, entonces usando que $a = b - (b - a)$ con $b, b - a \in B_+$. Tenemos que $a \in B_+ - B_+$. Esto implica que $B \subset B_+ - B_+$, la otra contención es evidente. Por lo tanto $B = B_+ - B_+$. □

Definición 2.6. *Decimos que el cono positivo B_+ es normal si existe $\alpha \geq 1$ tal que para cualesquiera $a, b, c \in B$ se cumple que*

$$c \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \alpha \operatorname{máx}\{\|b\|, \|c\|\}. \tag{2.4}$$

Observación 2.1.4. *Esta propiedad, implica que el cono positivo B_+ es propio, de hecho, si $a, b \in B_+$, con $\|a\| = \|b\| = 1$, entonces $\|a + b\| \geq \alpha^{-1} > 0$. Así, α^{-1}, es una medida positiva de lo puntiagudo que está el cono.*

Demostración. Si B_+ es normal y tomamos $c \in B_+ \cap (-B_+)$, entonces $c \geq 0$ y $c \leq 0$. De está manera, $0 \leq c \leq 0$ y existe $\alpha \geq 1$ tal que $\|c\| \leq \alpha \operatorname{máx}\{\|0\|, \|0\|\} = 0$. Por lo tanto $c = 0$, es decir, B_+ es propio.

Ahora bien, si $a, b \in B_+$ son tales que $\|a\| = \|b\| = 1$, entonces $0 \leq a \leq a + b$. En consecuencia, por ser B_+ normal, existe $\alpha \geq 1$ tal que $\|a\| \leq \alpha \operatorname{máx}\{\|0\|, \|a + b\|\} = \alpha \|a + b\|$. Es decir, $\|a + b\| \geq \alpha^{-1} > 0$. □

Definición 2.7. *Decimos que $\mathscr{C} \subset B$ es σ-convexo si las condiciones $c_n \in \mathscr{C}, \lambda_n \geq 0$, con $n \geq 1$, $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = 1$ y la existencia de $c = \sum_{n\geq 1} \lambda_n c_n$ en B, implican que $c \in \mathscr{C}$.*

Observemos que todo subconjunto σ-convexo de B es convexo.

Ejemplo 2.1.1. *Los conjuntos de la forma: $B_\beta, B_\beta \cap B_+, B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+$, con $\beta > 0$, son conjuntos σ-convexos.*

Demostración. Si $c_n \in B_\beta$ y $\lambda_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$ con $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = 1$ y

$$c = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n = \sum_{n\geq 1} \lambda_n c_n \in B,$$

entonces como para cada $N \geq 1$

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \|c_n\| \leq \beta \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \leq \beta.$$

Se tiene que

$$\|c\| = \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n \right\| = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n \right\| \leq \beta.$$

Es decir, $c \in B_\beta$.

Si además, $c_n \in B_+$ para cada $n \geq 1$, entonces lo mismo es cierto para $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n$ para toda $N \geq 1$ y como B_+ es cerrado en la norma de B, se tiene que

$$c = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n \in B_+.$$

Con lo cual B_β y $B_\beta \cap B_+$ son conjuntos σ-convexos.

Sea ahora $(c_n)_{n\geq 1} \subset B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+$, es decir, para cada $n \geq 1$ existen $b_n, d_n \in B_\beta \cap B_+$ tales que $c_n = b_n - d_n$ y consideremos $c = \sum_{n\geq 1} \lambda_n c_n \in B$, con $\lambda_n \geq 0$ y $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = 1$, entonces para cada $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n b_n - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n d_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n b_n, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n d_n \in B_\beta \cap B_+ \tag{2.5}$$

pues $B_\beta \cap B_+$ es convexo.

Además, el conjunto $B_\beta \cap B_+$ es cerrado, así los limites dados por

$$b = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n b_n \quad \text{y} \quad d = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n d_n.$$

estan en $B_\beta \cap B_+$. Por lo que tomando el límite cuando $N \to \infty$ en (2.5) se obtiene que $c = b - d$. Esto demuestra que $B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+$ es σ-convexo para cada $\beta > 0$. □

Lema 2.1. *Sea $\mathscr{C} \subset B$ un conjunto σ-convexo tal que $B_1 \subset \overline{\mathscr{C}}$. Entonces, $B_1 \subset \alpha\mathscr{C}$ para cada $\alpha > 1$.*

Demostración. Para cualquier $\delta \in (0, 1)$, sea $a \in B_1$ y elegimos $a_1 \in \mathscr{C}$ tal que $\|a - a_1\| < \delta$. De está manera, $\delta^{-1}(a - a_1) \in B_1$. Luego, elegimos $a_2 \in \mathscr{C}$ tal que $\|\delta^{-1}(a - a_1) - a_2\| < \delta$.

Por lo que procediendo de manera recursiva, tenemos que existe una sucesión $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{C}$ tal que para cada $m < n$ y $n \geq 2$,

$$\left\| \delta^{-n+1} a - \sum_{m=1}^{n} \delta^{-n+m} a_m \right\| < \delta.$$

Así, al definir $\lambda_m = (1 - \delta)\delta^{m-1}$ con $m \geq 1$, tenemos que

$$\sum_{m\geq 1} (1 - \delta)\delta^{m-1} = (1 - \delta) \sum_{m\geq 1} \delta^{m-1} = (1 - \delta)\frac{1}{1 - \delta} = 1.$$

Luego,

$$\left\| a - (1 - \delta)^{-1} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_m \right\| < \delta^n.$$

Lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \delta)^{-1} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_m = a.$$

Finalmente, por ser $\mathscr{C}$ un conjunto σ-convexo, concluimos que $a \in (1 - \delta)^{-1}\mathscr{C}$. Como $\delta \in (0, 1)$ es arbitrario, esto demuestra el lema. □

A partir del lema 2.1, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes,*

1) *B_+ está generando a B.*

2) *Existe $\alpha \geq 1$ tal que cada $a \in B$, tiene una descomposición de la forma $a = b - c$ con $b, c \in B_+$ y $\max\{\|b\|, \|c\|\} \leq \alpha\|a\|$.*

Demostración. Directamente de la definición se ve que 2) $\Rightarrow$ 1). Para la otra implicación, veamos que la condición de que B_+ está generando a B, se puede reescribir como

$$B_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big).$$

Esto se sigue del hecho de que si B_+ está generando a B, entonces para cada $a \in B$, existen $b, c \in B_+$ tales que $a = b - c$. Luego, definimos $n = \lceil \text{máx}\{\|b\|, \|c\|\} \rceil$, donde $\lceil r \rceil = \text{ínf}\{k \in \mathbb{Z} \colon r \leq k\}$ para cada $r \in \mathbb{R}$, de aquí que $b, c \in B_n \cap B_+$, con lo cual $a \in B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+$.

Recíprocamente, para cada $a \in B \backslash \{0\}$, se tiene que $\|a\|^{-1} a \in B_1$, por lo cual, existen $d, e \in B_n \cap B_+$ para algún $n \geq 1$, con $\|a\|^{-1} a = d - e$. De aquí que al hacer $b = \|a\| d$ y $c = \|a\| e$, concluimos que $b, c \in B_+$ y $a = b - c$. Es decir, el cono B_+ está generando.

En consecuencia, por el teorema de categoría de Baire D.1, existe $n \geq 1$ tal que $\overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}$ tiene interior no vacío. De aquí que si x es punto interior de $\overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\Big\{ d \in B \colon \|d - x\| < \gamma \Big\} \subset \overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}.$$

Luego, $-x$ también es punto interior ya que si $d \in B$ satisface que $\|d - (-x)\| < \gamma$, entonces $\| - d - x\| < \gamma$, con lo cual $-d \in \overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}$.

Consecuentemente

$$-d = \lim_{k \to \infty} (e_k - f_k),$$

con $e_k, f_k \in B_n \cap B_+$. Así,

$$d = \lim_{k \to \infty} (f_k - e_k),$$

con $e_k, f_k \in B_n \cap B_+$, es decir,

$$\Big\{ d \in B \colon \|d - (-x)\| < \gamma \Big\} \subset \overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}.$$

Entonces, por ser el interior de $\overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}$ un conjunto convexo, ver proposición C.2, tenemos con $\lambda = 1/2$ que $\lambda x + (1 - \lambda)(-x) = 0$, es punto interior de $\overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}$.

Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Big\{ d \in B \colon \|d\| < \delta \Big\} \subset \overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}.$$

Luego, si $a \in B_1$ con $a \neq 0$, entonces $b = (2\|a\|)^{-1} \delta a \in \{ d \in B \colon \|d\| < \delta \Big\}$. Así, $b \in \overline{\Big(B_n \cap B_+ - B_n \cap B_+ \Big)}$, con lo cual existen $u_k, v_k \in B_n \cap B_+$, tales que

$$b = \lim_{k \to \infty} (u_k - v_k).$$

De aquí que

$$a = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{2\|a\|}{\delta} u_k - \frac{2\|a\|}{\delta} v_k \right),$$

con $2\|a\| \delta^{-1} u_k, 2\|a\| \delta^{-1} v_k \in B_+$. Más aún, $\text{máx}\Big\{ 2\|a\| \delta^{-1} \|u_k\|, 2\|a\| \delta^{-1} \|v_k\| \Big\} \leq 2n\delta^{-1}$.

Por lo que tomando $m = \lceil 2n\delta^{-1} \rceil$, obtenemos que

$$B_1 \subset \overline{\left(B_m \cap B_+ - B_m \cap B_+\right)}$$

Con lo cual, por el lema 2.1, establecemos que

$$B_1 \subset \left(B_\alpha \cap B_+ - B_\alpha \cap B_+\right)$$

con $\alpha = m + 1$. □

Definición 2.8. *Decimos que el cono positivo B_+, está α_+-generando si cada $a \in B$, tiene una descomposición de la forma $a = b - c$ con $b, c \in B_+$ y*

$$||b|| + ||c|| \leq \alpha ||a||. \tag{2.6}$$

Y decimos que B_+ está $\beta_\vee$-generando, si la descomposición puede ser elegida de manera que

$$\text{máx}\{||b||, ||c||\} \leq \beta ||a||. \tag{2.7}$$

Así, cuando $B_+ \neq \{0\}$, tanto α como β son mayores o iguales a 1. Por ejemplo, si $\alpha < 1$ y $a \in B \backslash \{0\}$, con $a = b - c$, donde $b, c \in B_+$, entonces

$$\alpha ||a|| \leq \alpha ||b|| + \alpha ||c|| < ||b|| + ||c|| \leq \alpha ||a||.$$

Lo cual es una contradicción.

Además, si B_+ está $\beta_\vee$-generando, para cualquier $a \in B$ con $a = b - c$, donde $b, c \geq 0$, se tiene que

$$||b|| + ||c|| \leq 2\, \text{máx}\,\{||b||, ||c||\} \leq 2\beta ||a||.$$

Con lo cual, B_+ está $(2\beta)_+$-generando. Similarmente, si B_+ está α_+-generando, entonces para $a = b - c \in B$ con $b, c \geq 0$ concluimos que

$$\text{máx}\,\{||b||, ||c||\} \leq ||b|| + ||c|| \leq \alpha ||a||.$$

Por lo tanto, B_+ está $\alpha_\vee$-generando.

Ejemplo 2.1.2. *Para cada $p \in [1, \infty]$, consideremos $B = L^P(X, d\mu)$ para algún espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y B_+ el cono de las funciones en B que son puntualmente positivas salvo en un conjunto de medida cero bajo μ. Entonces B_+ está $1_\vee$-generando.*

Demostración. Para ver que B_+ está $1_\vee$-generando tomamos $f \in L^p(X, d\mu)$, así $f = f^+ - f^-$ con $f^+ := \text{máx}\{f, 0\}$ y $f^- := -\text{mín}\{f, 0\}$. f^+, f^- son funciones medibles no negativas y para cada $x \in X$, se tiene que $f^+(x) = 0$ ó $f^-(x) = 0$. Claramente $f^+, f^- \in B_+$ y como para cada $p \in [1, \infty)$ se cumple que $(f^\theta)^p \leq (f^+ + f^-)^p = |f|^p$, con $\theta = \pm$, entonces se tiene

$$\text{máx}\{||f^+||_p, ||f^-||_p\} \leq ||f||_p.$$

□

En relación directa con la definición 2.8, tenemos

Definición 2.9. *Decimos que el cono positivo B_+, está aproximadamente α_+-generando si está α'_+-generando para toda $\alpha' > \alpha$. Y decimos que B_+ está aproximadamente $\beta_\vee$-generando si está $\beta'_\vee$-generando para toda $\beta' > \beta$.*

Por otro lado, particularizamos el concepto de cono positivo normal dado en la definición 2.6, mediante

Definición 2.10. *Decimos que el cono positivo B_+, es $\alpha_\vee$-normal si se cumple la siguiente condición,*

$$c \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \alpha \max\Big\{\|b\|, \|c\|\Big\}, \quad \forall a, b, c \in B. \tag{2.8}$$

Y decimos que B_+ es β_+-normal si se cumple la implicación

$$c \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \beta\Big(\|b\| + \|c\|\Big), \quad \forall a, b, c \in B. \tag{2.9}$$

Además, si B_+ es $\alpha_\vee$-normal, entonces para cualesquiera $a, b, c \in B$, tales que $c \leq a \leq b$, se cumple que

$$\|a\| \leq \alpha \max\{\|b\|, \|c\|\} \leq \alpha(\|b\| + \|c\|).$$

De aquí que B_+ es α_+-normal. Recíprocamente si B_+ es β_+-normal y consideramos $a, b, c \in B$ con $c \leq a \leq b$, entonces

$$\|a\| \leq \beta(\|b\| + \|c\|) \leq 2\beta \max\{\|b\|, \|c\|\}.$$

Consecuentemente, B_+ es $(2\beta)_\vee$-normal.

Para ver la relación entre las definiciones dadas en 2.10, es necesario un lema y la versión "múltiple" del teorema de Hahn-Banach (teorema A.2.)

Lema 2.2. *Para $\omega \in B^*$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sean*

$$\begin{aligned} S &= \sup\Big\{\lambda\omega(a) + (1-\lambda)\omega(b) + (\mu-\lambda)\omega(c) : a, b, c \in B \text{ con } b, c \geq 0 \text{ y } \|a\| + \|a-b-c\| \leq 1\Big\} \\ I &= \inf\Big\{\max\Big\{\|\eta\|, \|\eta - \lambda\omega\|\Big\} : \eta \in B^*, \eta \geq \omega \text{ y } \eta \geq \mu\omega\Big\}. \end{aligned}$$

Entonces, $S = I$. De hecho, el ínfimo se alcanza cuando éste es finito.

Demostración. Consideramos $a, b, c \in B$ tales que $b, c \geq 0, \|a\| + \|a-b-c\| \leq 1$ y $\eta \geq \omega, \eta \geq \mu\omega$. Entonces $\eta - \omega, \eta - \mu\omega \in B^*_+$, así por la linealidad de los funcionales obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda\omega(a) + (1-\lambda)\omega(b) + (\mu-\lambda)\omega(c) &= \lambda\omega(a-b-c) + \omega(b) + \mu\omega(c) \\ &\leq \lambda\omega(a-b-c) + \eta(b) + \eta(c) \\ &= (\lambda\omega - \eta)(a-b-c) + \eta(a) \\ &\leq \max\Big\{(\lambda\omega-\eta)(a-b-c), \eta(a)\Big\} \\ &\leq \max\Big\{\|\lambda\omega - \eta\|, \|\eta\|\Big\}, \end{aligned}$$

pues $\|a-b-c\| + \|a\| \leq 1$. Luego, $S \leq I$. Por lo tanto, cuando $S = \infty$, se cumple que $I = \infty$.

Ahora bien, en el caso de que $S < \infty$, para establecer la otra desigualdad, definimos los funcionales $p_i \colon B \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, con $i = 1, \ldots, 4$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
p_1(b) &:= S\|b\|.\\
p_2(b) &:= S\|b\| + \lambda\omega(b).\\
p_3(b) &:= \begin{cases} \omega(b) & , \text{si } -b \in B_+,\\ \infty & , \text{si } -b \notin B_+. \end{cases}\\
p_4(b) &:= \begin{cases} \mu\omega(b) & , \text{si } -b \in B_+,\\ \infty & , \text{si } -b \notin B_+. \end{cases}
\end{aligned}$$

Primero supongamos que $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$, entonces para el caso en que $-b_3 \notin B_+$ ó $-b_4 \notin B_+$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{4} p_i(b_i) = \infty.$$

Mientras que para el caso en el que $-b_3, -b_4 \in B_+$, se tiene que

$$p_1(b_1) = S\|b_1\|, p_2(b_2) = S\|b_2\| + \lambda\omega(b_2), p_3(b_3) = \omega(b_3) \text{ y } p_4(b_4) = \mu\omega(b_4).$$

Luego, de la igualdad $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$, obtenemos que $b_2 = -b_1 - b_3 - b_4$. Así, por ser ω un operador lineal,

$$p_2(b_2) = S\|b_2\| - \lambda\omega(b_1) + \lambda\omega(-b_3) + \lambda\omega(-b_4), p_3(b_3) = -\omega(-b_3) \text{ y } p_4(b_4) = -\mu\omega(-b_4).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} p_i(b_i) &= S\|b_1\| + S\|b_2\| - \lambda\omega(b_1) + \lambda\omega(-b_3) + \lambda\omega(-b_4) - \omega(-b_3) - \mu\omega(-b_4)\\
&= S\|b_1\| + S\|b_2\| - \lambda\omega(b_1) + (\lambda - 1)\omega(-b_3) + (\lambda - \mu)\omega(-b_4)\\
&= S\Big(\|b_1\| + \|b_2\|\Big) - \Big[\lambda\omega(b_1) + (1 - \lambda)\omega(-b_3) + (\mu - \lambda)\omega(-b_4)\Big].
\end{aligned}$$

De aquí que al hacer

$$a = \frac{b_1}{\|b_1\| + \|b_2\|}; b = \frac{-b_3}{\|b_1\| + \|b_2\|} \text{ y } c = \frac{-b_4}{\|b_1\| + \|b_2\|},$$

en la definición de S, tenemos que $b, c \geq 0$, con

$$\|a\| = \frac{\|b_1\|}{\|b_1\| + \|b_2\|} \text{ y } \|a - b - c\| = \frac{\|-b_2 - b_3 - b_4 + b_3 + b_4\|}{\|b_1\| + \|b_2\|} = \frac{\|b_2\|}{\|b_1\| + \|b_2\|}.$$

De está manera, $\|a\| + \|a - b - c\| = 1$, consecuentemente

$$S \geq \Big[\lambda\omega(a) + (1 - \lambda)\omega(b) + (\mu - \lambda)\omega(c)\Big].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} p_i(b_i) &= S\Big(\|b_1\| + \|b_2\|\Big) - \Big[\lambda\omega(b_1) + (1 - \lambda)\omega(-b_3) + (\mu - \lambda)\omega(-b_4)\Big]\\
&\geq \Big[\lambda\omega(b_1) + (1 - \lambda)\omega(-b_3) + (\mu - \lambda)\omega(-b_4)\Big] - \Big[\lambda\omega(b_1) + (1 - \lambda)\omega(-b_3) + (\mu - \lambda)\omega(-b_4)\Big]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces, por el teorema A.2, existe un funcional lineal $\eta : B \to \mathbb{R}$ tal que $\eta \leq p_i$ para $i = 1 \ldots 4$.

Más aún, veamos que se cumplen: $\eta \in B^*$, $\|\eta\| \leq S$, $\|\eta - \lambda\omega\| \leq S$, $\omega \leq \eta$ y $\mu\omega \leq \eta$. Para esto, sea $b \in B$, entonces $\eta(b) \leq p_1(b) = S\|b\|$, con lo cual $\eta \in B^*$ y $\|\eta\| \leq S$.

Para verificar que $\|\eta - \lambda\omega\| \leq S$, tomamos $b \in B$, por lo que usando que $\eta \leq p_2$, establecemos que $\eta(b) \leq S\|b\| + \lambda\omega(b)$. Con lo cual, $\eta(b) - \lambda\omega(b) \leq S\|b\|$.

Mientras que para establecer la desigualdad $\omega \leq \eta$, consideramos $a \in B_+$, entonces al hacer $b = -a$ tenemos que $-b \in B_+$ y por la definición de p_3, obtenemos que $\eta(b) \leq \omega(b)$, i. e., $\eta(-a) \leq \omega(-a)$ equivalentemente $\omega(a) \leq \eta(a)$. Con lo cual $\omega \leq \eta$.

La desigualdad $\mu\omega \leq \eta$ se demuestra de manera similar usando la definición de p_4. Por lo tanto, $I \leq S$. Finalmente, concluimos que $S = I$ y también establecemos que η alcanza el ínfimo. □

Teorema 2.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes,*

1_+) *B_+ es β_+-normal.*

$2_\vee$) *B_+^* está $\beta_\vee$-generando.*

También son equivalentes,

$1'_\vee$) *B_+ está aproximadamente $\beta_\vee$-generando.*

$2'_+$) *B_+^* es β_+-normal.*

Demostración. Para la primera equivalencia, consideremos $\omega \in B^*$. Entonces,

$$\sup\Big\{\omega(a) - \omega(c) \colon b, c \geq 0, \|a\| + \|a - b - c\| \leq 1\Big\} = \sup\Big\{\omega(a - c) \colon b, c \geq 0, \|a\| + \|a - b - c\| \leq 1\Big\}$$

Y denotando $a' = a - c, b' = a - b - c$ y $c' = a$, siendo $b, c \geq 0$, obtenemos $b' \leq a' \leq c'$.
De aquí que,

$$\sup\Big\{\omega(a - c) \colon b, c \geq 0, \|a\| + \|a - b - c\| \leq 1\Big\} = \sup\Big\{\omega(a') \colon b' \leq a' \leq c', \|c'\| + \|b'\| \leq 1\Big\}$$

Por lo tanto, tomando $\lambda = 1$ y $\mu = 0$ en el lema 2.2, concluimos

$$\sup\Big\{\omega(a) \colon b \leq a \leq c, \|b\| + \|c\| \leq 1\Big\} = \text{ínf}\Big\{\text{máx}\Big\{\|\xi\|, \|\eta\|\Big\} : \xi, \eta \geq 0, \omega = \eta - \xi\Big\} \tag{2.10}$$

Además, el ínfimo se alcanza.

Luego, suponiendo que B_+ es β_+-normal, entonces al considerar $a, b, c \in B$ tales que $b \leq a \leq c$, donde $\|b\| + \|c\| \leq 1$, se cumple que

$$|\omega(a)| \leq \|\omega\|\|a\| \leq \|\omega\|\beta(\|b\| + \|c\|) \leq \beta\|\omega\|, \quad \forall\omega \in B^*.$$

Con lo cual $\beta\|\omega\| \geq S = I$. De esta manera, el ínfimo se alcanza, por lo que dada $\omega \in B^*$, existen $\eta, \xi \in B_+^*$, tales que $\omega = \xi - \eta$, donde $\text{máx}\{\|\xi\|, \|\eta\|\} \leq \beta\|\omega\|$. Es decir, B_+^* está $\beta_\vee$-generando.

Recíprocamente, si B_+^* está $\beta_\vee$-generando, entonces

$$\beta\|\omega\| \geq \sup\Big\{\omega(a) : b \leq a \leq c, \|b\| + \|c\| \leq 1\Big\} = I \tag{2.11}$$

Esto implica que B_+ es β_+-normal, pues si $b \leq a \leq c$, entonces

$$\frac{b}{||b|| + ||c||} \leq \frac{a}{||b|| + ||c||} \leq \frac{c}{||b|| + ||c||}$$

y tomando

$$a' = \frac{a}{||b|| + ||c||}, b' = \frac{b}{||b|| + ||c||} \text{ y } c' = \frac{c}{||b|| + ||c||}$$

se tiene $b' \leq a' \leq c'$ y $||b'|| + ||c'|| \leq 1$ y concluimos por (2.11).

Ahora, supongamos la condición $2'_+$) y demostremos que B_+ está aproximadamente $\beta_\vee$-generando. Esto último es equivalente a demostrar que

$$B_1 \subset \left(B_{\beta'} \cap B_+ - B_{\beta'} \cap B_+\right)$$

para cada $\beta' > \beta$.

Como el conjunto $B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+$ es σ-convexo, entonces por el lema 2.1, basta mostrar que

$$B_1 \subset \left(\overline{B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+}\right) \tag{2.12}$$

Pero tomando polares, ver (A.4), esto es equivalente a

$$B_1^* \supset \left(B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+\right)^o. \tag{2.13}$$

Ahora, si $\omega \in \left(B_\beta \cap B_+ - B_\beta \cap B_+\right)^o$, entonces $\beta\omega(a-b) \leq 1$ para cualesquiera $a, b \in B_1 \cap B_+$. En consecuencia,

$$\beta \sup\left\{\omega(a) : a \in B_1 \cap B_+\right\} - \beta \operatorname{ínf}\left\{\omega(b) : b \in B_1 \cap B_+\right\} \leq 1 \tag{2.14}$$

Por otro lado, para cualquier $\omega \in B^*$, se cumple que

$$\sup\left\{\omega(b) + \omega(c) \colon b, c \geq 0 \text{ y } || - b - c|| \leq 1\right\} \quad = \quad \sup\left\{\omega(a) \colon a \geq 0 \text{ y } ||a|| \leq 1\right\} \tag{2.15}$$

al hacer $a = b + c$. Luego, utilizando el lema 2.2 con $\lambda = 0$ y $\mu = 1$, obtenemos que

$$\sup\left\{\omega(a) : a \in B_1 \cap B_+\right\} = \operatorname{ínf}\left\{||\xi|| : \xi \in B^*, \xi \geq \omega\right\} \tag{2.16}$$

y reemplazando ω por $-\omega$ en (2.16), tenemos también que

$$\operatorname{ínf}\left\{\omega(b) : b \in B_1 \cap B_+\right\} = -\operatorname{ínf}\left\{||\eta|| : \eta \in B^*, \eta \geq -\omega\right\} \tag{2.17}$$

Por lo tanto, al combinar las identidades (2.16) y (2.17) junto con la desigualdad (2.14) concluimos que

$$\beta \operatorname{ínf}\left\{||\xi|| + ||\eta|| : \xi, \eta \in B^*, -\eta \leq \omega \leq \xi\right\} \leq 1 \tag{2.18}$$

Ahora, por la hipótesis en $2'_+$) tenemos que $-\eta \leq \omega \leq \xi$ implica que $||\omega|| \leq \beta(|| - \eta|| + ||\xi||)$ para toda ξ, η. Entonces por (2.18), deducimos que $\omega \in B_1^*$. En conclusión (2.13) es valida.

Finalmente, supongamos la condición $1'_\vee$) y tomemos $a \in B$ tal que $a = b - c$ con $b, c \in B_+$ y

$$\operatorname{máx}\left\{||b||, ||c||\right\} \leq \beta'||a||$$

para cada $\beta' > \beta$. Al tomar $\xi \leq \omega \leq \eta$, obtenemos

$$\xi(b) - \eta(c) \leq \omega(a) \leq \eta(b) - \xi(c),$$

ya que $\xi(b) \leq \omega(b) \leq \eta(b)$ y $\xi(c) \leq \omega(c) \leq \eta(c)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\omega(a) &\leq |\eta(b) - \xi(c)| \\
&\leq ||\eta||\,||b|| + ||\xi||\,||c|| \\
&\leq ||\eta|| \max\{||b||, ||c||\} + ||\xi|| \max\{||b||, ||c||\} \\
&\leq (||\xi|| + ||\eta||)\beta' ||a||.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\omega(a) &\geq -(\eta(c) - \xi(b)) \\
&\geq -|\eta(c) - \xi(b)| \\
&\geq -||\eta||\,||c|| - ||\xi||\,||b|| \\
&\geq -||\eta|| \max\{||b||, ||c||\} - ||\xi|| \max\{||b||, ||c||\} \\
&\geq -(||\eta|| + ||\xi||)\beta' ||a||.
\end{aligned}$$

Entonces

$$|\omega(a)| \leq \beta'\Big(||\xi|| + ||\eta||\Big)||a||, \quad \forall a \in B.$$

De aquí que,

$$||\omega|| \leq \beta'\Big(||\xi|| + ||\eta||\Big).$$

Y esto es válido para toda $\beta' > \beta$, en particular para cada $\beta'_\varepsilon := \beta + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, así al hacer tender $\varepsilon \to 0$, se obtiene que

$$||\omega|| \leq \beta\Big(||\xi|| + ||\eta||\Big).$$

Esto demuestra que B_+^* es β_+-normal. □

Como consecuencia tenemos las siguientes propiedades.

Corolario 2.1. *Sea $(B, B_+, ||\cdot||)$ un espacio de Banach ordenado. Entonces se cumplen:*

1) *Si B_+ está α_+-generando, entonces B_+^* es $(2\alpha)_+$-normal.*

2) *Si B_+^* está α_+-generando, entonces B_+ es $(2\alpha)_\vee$-normal.*

3) *Si B_+ es $\beta_\vee$-normal , entonces B_+^* está $(2\beta)_+$-generando.*

4) *Si B_+^* está β_+-generando, entonces B_+ es $(2\beta)_\vee$-normal.*

Demostración. Primero supongamos que B_+ está α-generando, entonces está $\alpha_\vee$-generando. Luego, B_+ está $\alpha_\vee$-aproximadamente generando y por el teorema 2.2, concluimos que B_+^* es α_+-normal. Consecuentemente, B_+^* es $(2\alpha)_\vee$-normal y por lo tanto, es $(2\alpha)_+$-normal.

Ahora bien, si B_+^* esta α_+-generando, entonces está $\alpha_\vee$-generando. Así por el teorema 2.2, se tiene que B_+ es α_+-normal y por lo tanto, es $(2\alpha)_\vee$-normal.

Para establecer la condición 3) supongamos que B_+ es $\beta_\vee$-normal, entonces es β_+-normal. De aquí que por el teorema 2.2, B_+^* está $\beta_\vee$-generando, de esta manera, B_+^* está $(2\beta)_+$-generando.

Por último, para verificar la condición 4) suponemos que B_+^* esta β_+-generando, por lo que está $\beta_\vee$-generando. Se sigue que B_+^* está $\beta_\vee$-aproximadamente generando y por el teorema 2.2 concluimos que B_+ es β_+-normal. Así B_+ es $(2\beta)_\vee$-normal. □

2.2. Normas monótonas

En esta sección, estudiamos distintas propiedades que puede tener la norma de un espacio de Banach ordenado $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$.

Definición 2.11. *Decimos que la norma es* α*-monótona si se cumple que*

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \alpha\|b\|.$$

Si $B_+ \neq \{0\}$*, entonces* $\alpha \geq 1$ *y en el caso de que* $\alpha = 1$*, simplemente decimos que la norma es monótona.*

Observación 2.2.1. *Si la norma es* α*-monótona, entonces* B_+ *es propio.*

Demostración. Sean $a, b \in B$ tales que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $0 \leq b - a \leq 0$. Luego, $0 \leq \|b - a\| \leq \alpha\|0\| = 0$. Por lo tanto, $\|b - a\| = 0$, es decir, $a = b$. Esto prueba que B_+ es propio en virtud de la observación 2.1.2. □

Ejemplo 2.2.1. *Sean* $B = L^p(X, d\mu)$ *para algún espacio de medida* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *con* $p \in [1, \infty]$ *y* B_+ *el cono de las funciones puntualmente no negativas salvo un conjunto de medida cero bajo* μ*. Entonces la norma en* B *es monótona.*

Demostración. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en X salvo un conjunto de μ-medida cero, entonces para cualquier $p \in [1, \infty)$, se cumple que

$$0 \leq |f(x)|^p \leq |g(x)|^p, \quad \mu - cd$$

y en consecuencia,

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \int |g|^p \, d\mu, \quad \mu - cd$$

Es decir, $\|f\|_p \leq \|g\|_p$.

Para el caso $p = \infty$, tenemos que

$$0 \leq |f(x)| \leq |g(x)| \leq \|g\|_\infty, \quad \mu - cd$$

Luego, $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Por lo tanto para cualquier $p \in [1, \infty]$ se satisface que si $0 \leq f \leq g$, entonces $\|f\|_p \leq \|g\|_p$, i. e, se cumple la definición 2.11 con $\alpha = 1$. □

Observación 2.2.2. *Si* B_+ *es* α_+*-normal o bien* $\alpha_\vee$*-normal, entonces la norma es* α*-monótona.*

El recíproco a está observación, está dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Si la norma es* α*-monótona. Entonces,* B_+ *es* $(\alpha + 1/2)_+$*-normal y es* $(2\alpha + 1)_\vee$*-normal.*

Demostración. Para ver que B_+ es $(\alpha + 1/2)_+$-normal, consideremos $a, b, c \in B$ tales que $c \leq a \leq b$. Así

$$0 \leq a - c \leq b - c \quad \text{y} \quad c - b \leq a - b \leq 0$$

Luego, por la definición 2.11, concluimos que

$$\|a - c\| \leq \alpha\|b - c\| \text{ y } \|b - a\| \leq \alpha\|b - c\|,$$

entonces, por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\Big|\|a\| - \|c\|\Big| \leq \alpha\|b - c\| \text{ y } \Big|\|b\| - \|a\|\Big| \leq \alpha\|b - c\|,$$

consecuentemente

$$\|a\| \leq \alpha\|b - c\| + \|c\| \text{ y } \|a\| \leq \alpha\|b - c\| + \|b\|,$$

de aquí que

$$2\|a\| \leq 2\alpha\|b - c\| + \|b\| + \|c\|,$$

así

$$2\|a\| \leq 2\alpha(\|b\| + \|c\|) + \|b\| + \|c\|,$$

y finalmente

$$\|a\| \leq (\alpha + 1/2)(\|b\| + \|c\|).$$

De la última desigualdad, se sigue que la condición (2.9) es valida con $\beta = \alpha + 1/2$. Más aún,

$$\begin{aligned} \|a\| &\leq (\alpha + 1/2)(\|b\| + \|c\|) \\ &\leq (\alpha + 1/2)\left(\text{máx}\left\{\|b\|, \|c\|\right\} + \text{máx}\left\{\|b\|, \|c\|\right\}\right) \\ &= 2(\alpha + 1/2)\,\text{máx}\left\{\|b\|, \|c\|\right\}. \end{aligned}$$

Y la condición (2.8) se cumple. □

Proposición 2.5. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *B_+ es normal.*

2) *Existe una norma β-monótona que es equivalente a $\|\cdot\|$.*

Más precisamente, si B_+ es normal, entonces es $1_\vee$-normal con respecto a la norma monótona equivalente

$$\|a\|_\vee = \text{ínf}\left\{\text{máx}\{\|b\|, \|c\|\} : c \leq a \leq b\right\}.$$

Demostración. Primero supongamos que B_+ es normal, entonces por la observación 2.1.4 tenemos que B_+ es propio, lo cual es equivalente a que se cumpla la anti-simetría.

Ahora bien, la función $\|\cdot\|_\vee : B \to [0, \infty)$ es tal que para cada $a \in B$, se cumple que

$$\|a\| \leq \alpha\|a\|_\vee,$$

ya que para cada $b, c \in B$ con $c \leq a \leq b$ se tiene que $\|a\| \leq \alpha\,\text{máx}\,\{\|b\|, \|c\|\}$ para algún $\alpha \geq 1$, por definición de ser B_+ normal.

Para ver que $\|\cdot\|_\vee$ es una norma en B, consideramos $a \in B$ tal que $\|a\|_\vee = 0$, luego $\|a\| \leq \alpha\|a\|_\vee = 0$. Por lo tanto, $a = 0$.

Además, dados $a, b, c \in B$ y $\lambda > 0$, se cumple que $c \leq \lambda a \leq b$ si y sólo si $\lambda^{-1}c \leq a \leq \lambda^{-1}b$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\|a\|_\vee &= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|y\|, \|x\|\} : x \leq a \leq y\}, \\
\lambda\|a\|_\vee &= \lambda \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|y\|, \|x\|\} : x \leq a \leq y\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|\lambda y\|, \|\lambda x\|\} : x \leq a \leq y\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|b\|, \|c\|\} : \lambda^{-1}c \leq a \leq \lambda^{-1}b\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|b\|, \|c\|\} : c \leq \lambda a \leq b\} \\
&= \|\lambda a\|_\vee.
\end{aligned}$$

En el caso en que $\lambda < 0$, usamos que $c \leq \lambda a \leq b$ es equivalente a $\lambda^{-1}b \leq a \leq \lambda^{-1}c$, se sigue entonces

$$\begin{aligned}
(-\lambda)\|a\| &= (-\lambda) \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|y\|, \|x\|\} : x \leq a \leq y\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|\lambda y\|, \|\lambda x\|\} : x \leq a \leq y\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|c\|, \|b\|\} : \lambda^{-1}b \leq a \leq \lambda^{-1}c\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\operatorname{máx}\{\|c\|, \|b\|\} : c \leq \lambda a \leq b\} \\
&= \|\lambda a\|_\vee.
\end{aligned}$$

Y claramente para $\lambda = 0$, se cumple que $\|\lambda a\|_\vee = \|0\|_\vee = 0 = \lambda\|a\|_\vee$. Esto verifica que $\|\lambda a\|_\vee = |\lambda|\,\|a\|_\vee$ para cada $a \in B$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalmente, para la desigualdad del triángulo, tomamos $a, b, x, z, u, w \in B$ tales que $x \leq a \leq z$ y $u \leq b \leq w$, entonces $x + u \leq a + b \leq z + w$. Luego,

$$\|a + b\|_\vee \leq \operatorname{máx}\{\|x + u\|, \|z + w\|\} \leq \operatorname{máx}\{\|x\|, \|z\|\} + \operatorname{máx}\{\|u\|, \|w\|\}.$$

Con lo cual, $\|a + b\|_\vee \leq \|a\|_\vee + \|b\|_\vee$, para cada $a, b \in B$. Por lo tanto, $\|\cdot\|_\vee$ es una norma en B.

Por otra parte, tomando $b = c = a$ se obtiene que $\|a\|_\vee \leq \|a\|$. Entonces

$$\frac{1}{\alpha}\|a\| \leq \|a\|_\vee \leq \|a\|,$$

para cada $a \in B$. Esto demuestra que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\vee$ son normas equivalentes.

Por último, para ver que la norma $\|\cdot\|_\vee$ es β-monótona consideramos $x, y \in B$ con $0 \leq x \leq y$, entonces por la observación 2.2.2, concluimos que

$$\|x\|_\vee \leq \|x\| \leq \alpha\|y\| \leq \alpha^2\|y\|_\vee.$$

Por lo que basta definir $\beta = \alpha^2$, para concluir que la norma $\|\cdot\|_\vee$ es β-monótona. Esto demuestra que 1) $\Rightarrow$ 2).

Recíprocamente, si suponemos valida la condición 2), sabemos que existen $\delta, \gamma > 0$ tales que

$$\delta\|\cdot\|_\vee \leq \|\cdot\| \leq \gamma\|\cdot\|_\vee.$$

Por lo que si $c \leq a \leq b$, entonces

$$\|a\| \leq \gamma\|a\|_\vee \leq \gamma \operatorname{máx}\Big\{\|b\|, \|c\|\Big\}.$$

Entonces B_+ es normal pues se puede tomar $\gamma \geq 1$.

En particular, si B_+ es normal con $\alpha = 1$, tenemos que $\|\cdot\|_\vee$ es una norma monótona equivalente a $\|\cdot\|$. $\square$

Por otra parte, en el espacio dual ordenado $(B^*, B^*_+, \|\cdot\|_{B^*})$, se considera la norma definida para cada $\omega \in B^*$, mediante

$$\|\omega\|_+ = \text{ínf}\Big\{\text{máx}\{\|\xi\|, \|\eta\|\} : \omega = \xi - \eta, \text{ con } \xi, \eta \in B^*_+\Big\}.$$

Para establecer que la función $\|\cdot\|_+ \colon B^* \to [0, \infty)$ define una norma en B^*, primero notemos que por la igualdad dada en (2.10), obtenemos que

$$\|\omega\|_+ = \sup\Big\{\omega(a) \colon b \leq a \leq c, \|b\| + \|c\| \leq 1\Big\}, \ \forall \omega \in B^*.$$

Además, si el supremo es finito, entonces el ínfimo en $\|\cdot\|_+$, se alcanza.

Así para $\omega \in B^*$ tal que $\|\omega\|_+ = 0$, se tiene que $0 = \text{máx}\{\|\xi\|, \|\eta\|\}$ con $\omega = \xi - \eta$ y $\xi, \eta \in B^*_+$. De aquí que $\xi = \eta = 0$, luego $\omega = 0$.

Además, para cada $\omega \in B^*$ y $\lambda > 0$, se tiene que $\lambda\omega = \xi - \eta$ con $\xi, \eta \in B^*_+$, si y sólo si $\omega = \lambda^{-1}\xi - \lambda^{-1}\eta$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\lambda\|\omega\|_+ &= \text{ínf}\{\text{máx}\{\|\lambda\phi\|, \|\lambda\psi\|\} : \omega = \phi - \psi, \text{ con } \phi, \psi \in B^*_+\} \\
&= \text{ínf}\{\text{máx}\{\|\xi\|, \|\eta\|\} : \omega = \lambda^{-1}\xi - \lambda^{-1}\eta, \text{ con } \xi, \eta \in B^*_+\} \\
&= \text{ínf}\{\text{máx}\{\|\xi\|, \|\eta\|\} : \lambda\omega = \xi - \eta\ , \text{ con } \xi, \eta \in B^*_+\} \\
&= \|\lambda\omega\|_+.
\end{aligned}$$

Para el caso en que $\lambda < 0$, usamos que $-\lambda > 0$ y procedemos de manera similar. Y claramente para $\lambda = 0$, se verifica que $\|\lambda\omega\|_+ = 0 = \lambda\|\omega\|_+$. Con lo cual tenemos que $\|\lambda\omega\|_+ = |\lambda|\,\|\omega\|_+$, para cada $\omega \in B^*$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalmente, para la desigualdad del triangulo consideramos $\omega, \rho \in B^*$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\omega + \rho\|_+ &= \sup\{(\omega + \rho)(a) : b \leq a \leq c, \|b\| + \|c\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\omega(a) : b \leq a \leq c, \|b\| + \|c\| \leq 1\} \\
&+ \sup\{\rho(a) : b \leq a \leq c, \|b\| + \|c\| \leq 1\} \\
&= \|\omega\|_+ + \|\rho\|_+.
\end{aligned}$$

En conclusión, la función $\|\cdot\|_+$ es una norma en B^*.

Examinemos ahora las caracterizaciones duales de la α-monotonía. Para esto, requerimos de la siguiente definición.

Definición 2.12. *Dada $\alpha \geq 0$, decimos que el cono positivo B_+ está α-dominando si para toda $a \in B$, existe una descomposición de la forma $a = b - c$ con $b, c \in B_+$ tal que $\|b\| \leq \alpha\|a\|$.*

Observación 2.2.3. *Notemos que dada $\alpha \geq 0$, el cono positivo B_+ está α-dominando si y sólo si para cada $a \in B$, existe $b \in B_+$ tal que $b \geq a$ y $\|b\| \leq \alpha\|a\|$.*

Demostración. Si $a = b - c$ con $b, c \in B_+$ y $\|b\| \leq \alpha\|a\|$, entonces $b = a + c \geq a$ con $\|b\| \leq \alpha\|a\|$. Recíprocamente, si para $a \in B$ existe $b \geq a$ tal que $\|b\| \leq \alpha\|a\|$, entonces $a = b - (b - a)$ con $b, c = b - a \in B_+$ y $\|b\| \leq \alpha\|a\|$. □

Además, si B_+ está α-dominando, entonces B_+ está generando, es decir, $B = B_+ - B_+$. De manera más general, para cada $\alpha \geq 0$, decimos que B_+ está aproximadamente α-dominando si está α′-dominando para cada $\alpha' > \alpha$. Además, decimos que B_+ está (aproximadamente) dominando si está (aproximadamente) 1-dominando.

Teorema 2.3. *Sea* $\alpha \geq 0$. *Entonces son equivalentes:*

1) $\|\cdot\|_B$ *es* α*-monótona,*

2) B^*_+ *está* α*-dominando.*

Demostración. La prueba es similar a la del teorema 2.2. Para establecer la equivalencia 1) ⇔ 2), veamos que para cualquier $\omega \in B^*$ se satisface,

$$\sup\Big\{\omega(a) : 0 \leq a \leq b, \|b\| \leq 1\Big\} = \text{ínf}\Big\{\|\eta\| : \eta \in B^*_+, \eta \geq \omega\Big\}. \tag{2.19}$$

Ya que al considerar $\lambda = \mu = 0$ en el lema 2.2 y al tomar $b, c \in B$, como en la definición de S, tenemos que $b, c \geq 0$, por lo que definiendo $b' = b$ y $c' = b + c$, obtenemos que $b', c' \geq 0$, $c' \geq b'$, y en consecuencia $\|c'\| = \|b + c\| = \| - b - c\| \leq 1$.

Luego,

$$S = \Big\{\omega(b') : 0 \leq b' \leq c', \|c'\| \leq 1\Big\}.$$

Además,

$$I = \text{ínf}\Big\{\|\eta\| : \eta \in B^*, \eta \geq \omega, \eta \geq 0\Big\}.$$

Esto demuestra la igualdad (2.19).

Ahora bien, supongamos que $\|\cdot\|_B$ es α-monótona con $\alpha \geq 0$, de aquí que al tomar $a, b \in B$ tales que $0 \leq a \leq b$, entonces $\|a\| \leq \alpha\|b\|$.

Consecuentemente,

$$\{\omega(a)\colon 0 \leq a \leq b, \|b\| \leq 1\} \subset \{\omega(a)\colon 0 \leq a, \|a\| \leq \alpha\}$$

Por lo tanto,

$$\sup\{\omega(a)\colon 0 \leq a \leq b, \|b\| \leq 1\} \leq \alpha\|\omega\|.$$

Luego, por (2.19) se obtiene

$$\text{ínf}\Big\{\|\eta\| : \eta \in B^*_+, \eta \geq \omega\Big\} \leq \alpha\|\omega\|.$$

Así, el ínfimo se alcanza, por lo que existe $\eta' \in B^*_+$ tal que $\eta' \geq \omega$ y $\|\eta'\| \leq \alpha\|\omega\|$. Es decir, B^*_+ está α-dominando.

Recíprocamente, si para cada $\omega \in B^*$ existen $\eta, \xi \in B^*_+$ tales que $\omega = \eta - \xi$ con $\|\eta\| \leq \alpha\|\omega\|$, entonces

$$\sup\Big\{\omega(a) : 0 \leq a \leq b, \|b\| \leq 1\Big\} = \text{ínf}\Big\{\|\eta\| : \eta \in B^*_+, \eta \geq \omega\Big\} \leq \alpha\|\omega\|.$$

Ahora, supongamos que $0 \leq a \leq b$ y demostremos que $\|a\| \leq \alpha\|\beta\|$. Primero consideremos el caso en que $b = 0$, así tenemos que $0 \leq a \leq 0$. Por hipótesis, B^*_+ está α-dominando, consecuentemente está generando y por la proposición 2.3, B^*_+ está $\alpha_\vee$-generando.

Así por el teorema 2.2 el cono positivo B_+ es normal. De aquí que B_+ es propio y por lo tanto, $a = 0$. Con lo cual $\|a\| \leq \alpha\|b\|$.

Mientras que para el caso en que $b \neq 0$, tenemos que

$$0 \leq \frac{a}{\|b\|} \leq \frac{b}{\|b\|} \text{ y } \left\|\frac{b}{\|b\|}\right\| = 1.$$

Consecuentemente,

$$\left\|\frac{a}{\|b\|}\right\| = \sup\left\{\omega\left(\frac{a}{\|b\|}\right) : \|\omega\| = 1\right\} \leq \sup_{\|\omega\|=1} \sup\left\{\omega(x) \colon 0 \leq x \leq y, \|y\| \leq 1, \|\omega\| = 1\right\} \leq \alpha \sup_{\|\omega\|=1} \|\omega\| = \alpha,$$

es decir, $\|a\| \leq \alpha\|b\|$. Esto demuestra que $\|\cdot\|$ es α-monótona. □

Teorema 2.4. *Para cada* $\alpha \geq 0$*, son equivalentes:*

1') B_+ está aproximadamente α*-dominando,*

2') $\|\cdot\|_{B^*}$ es α*-monótona.*

Demostración. Para ver que 1')⇒2') sean $\omega, \eta \in B^*$ con $0 \leq \omega \leq \eta$, entonces $\eta \in B^*_+$. Luego, dada $\alpha' > \alpha$ y $a \in B_1$, tenemos por estar B_+ aproximadamente α-dominando que existe $b \in B_+$ tal que $a \leq b$ con $\|b\| \leq \alpha'\|a\|$. Se sigue que $\|b\| \leq \alpha'$.

Ahora bien, supongamos que $0 \leq \omega(a)$, entonces $\omega(a) \leq \omega(b)$, con $b \in B_+$ tal que $a \leq b$ y $\|b\| \leq \alpha'$. Mientras que si $\omega(a) < 0$, entonces $\omega(-a) \leq \omega(d)$ con $d \in B_+$ tal que $-a \leq d$ y $\|d\| \leq \alpha'$.

Así, obtenemos

$$|\omega(a)| \leq \sup\left\{\omega(b) \colon 0 \leq b, a \leq b \text{ y } \|b\| \leq \alpha'\right\}.$$

Luego,

$$\frac{1}{\alpha'}\|\omega\| \leq \frac{1}{\alpha'} \sup_{\|a\|\leq 1} \sup\left\{\omega(b) \colon 0 \leq b, a \leq b \text{ y } \|b\| \leq \alpha'\right\}.$$

De aquí que

$$\frac{1}{\alpha'}\|\omega\| \leq \text{ínf}\left\{\|\zeta\| : \zeta \in B^*_+, \zeta \geq \omega\right\}.$$

Por lo tanto, $(\alpha')^{-1}\|\omega\| \leq \|\eta\|$. Equivalentemente, $\|\omega\| \leq \alpha'\|\eta\|$, para toda $\alpha' > \alpha$. De aquí que $\|\omega\| \leq \alpha\|\eta\|$, con lo cual la norma es α-monótona.

Para la implicación, 2')⇒1') observamos que la condición 1') es equivalente a tener que:

$$B_1 \subset \left(B_{\alpha'} \cap B_+ - B_+\right) \quad , \quad \forall \alpha' > \alpha.$$

Si el conjunto $\mathscr{C} = \left(B_\alpha \cap B_+ - B_+\right)$ es σ-convexo, entonces por el lema 2.1 basta verificar que

$$B_1 \subset \overline{\mathscr{C}}. \tag{2.20}$$

Primero veamos que $\mathscr{C}$ es σ-convexo, supongamos que $c_n \in \mathscr{C}$, $c = \sum_n \lambda_n c_n \in B$ y $\sum_n \lambda_n = 1$ para toda $\lambda_n \geq 0$ con $n \geq 1$. Entonces $c_n = a_n - b_n$ con $a_n \in B_\alpha \cap B_+, b_n \in B_+$ para cada $n \geq 1$.

Así $a := \sum_n \lambda_n a_n \in B_\alpha \cap B_+$ y $\sum_n \lambda_n b_n \in B_+$ pues $b_n = a_n - c_n$. Para terminar, la contención dada en (2.20) puede ser establecida en su forma polar mediante

$$B_1^* \supset \left(B_\alpha \cap B_+ - B_+\right)^o$$

por lo que procediendo de forma análoga a la demostración del teorema 2.2, se sigue el resultado. □

Para el caso $\alpha = 1$, en la monotonía de la norma, existe una caracterización dual alternativa de naturaleza distinta. Primero observemos que para cualquier $a \in B$, por una consecuencia del teorema de Hahn-Banach, ver corolario C.2, existe $\omega \in B_1^*$ tal que $\omega(a) = ||a||$. Pero aún con $a \geq 0$ no podemos decir nada sobre la positividad de ω; para esto necesitamos la monotonía de la norma.

Teorema 2.5. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $||\cdot||_B$ *es monótona,*

2) Para cada $a \in B_+$*, existe* $\omega \in B_+^* \cap B_1^*$ *tal que* $\omega(a) = ||a||$.

Demostración. Primero supongamos que $||\cdot||_B$ es monótona y sea $a \in B_+$, entonces por una consecuencia del teorema de Hahn-Banach (ver corolario C.2), existe $\eta \in B^*$ tal que $\eta(a) = ||a||$ y $||\eta|| = 1$.

Además, por el teorema 2.3, tenemos que B_+^* está 1-dominando. Así para nuestra $\eta \in B_1^*$, tenemos que existe $\omega \in B_+^* \cap B_1^*$ tal que $\omega \geq \eta$.
Luego,

$$||a|| = \eta(a) \leq \omega(a) \leq ||\omega||||a|| \leq ||a||.$$

Por lo tanto, el funcional ω, cumple la condición 2.

Recíprocamente, si $0 \leq a \leq b$ y $\omega \in B_+^* \cap B_1^*$ es tal que $\omega(a) = ||a||$, entonces

$$||a|| = \omega(a) \leq \omega(b) \leq ||\omega||||b|| \leq ||b||,$$

pues $\omega(b - a) \geq 0$. Con lo cual tenemos que se cumple la condición 1. □

2.3. Operadores acotados

Sean $(A, A_+, ||\cdot||_A)$ y $(B, B_+, ||\cdot||_B)$ espacios de Banach ordenados. Entonces en el espacio de Banach

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(A, B) = \left\{S : A \to B \,|\, S \text{ es acotado y lineal}\right\}$$

con la norma de operadores, definimos el conjunto

$$\mathcal{L}_+ := \left\{S \in \mathcal{L} \,|\, SA_+ \subset B_+\right\}.$$

Veamos que $\mathcal{L}_+$ es un cono positivo, para esto consideremos $(S_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}_+$ tal que $S_n \to S$ en la norma de $\mathcal{L}$, cuando $n \to \infty$. Si $a \in A_+$, entonces $S_n(a) \geq 0$, para cada $n \geq 1$. Luego, $\lim_{n\to\infty} S_n(a) \geq 0$, por ser B_+ cerrado. Por lo tanto, $S(a) \geq 0$.

En consecuencia, $S \in \mathcal{L}_+$, es decir, $\mathcal{L}_+$ es cerrado. Además es inmediato que para $\lambda, \mu \geq 0$, se satisface que $\lambda\mathcal{L}_+ + \mu\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$.

De esta manera, $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_+, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach ordenado con la norma de operadores. A los elementos $S \in \mathcal{L}_+$ se les conoce como *operadores positivos* y consideramos la asignación para cada $S \in \mathcal{L}(A, B)$ dada mediante

$$||S||_+ := \sup\{||Sa|| \,|\, a \in A_1 \cap A_+\}.$$

Claramente, $||S||_+ \leq ||S||$.

Definición 2.13. *Cuando se tiene que* $||S||_+ = ||S||$ *para cada* $S \in \mathcal{L}_+$*, decimos que la norma es positivamente alcanzada.*

Capítulo 3

Semigrupos positivos

En este capítulo, desarrollamos la teoría de semigrupos positivos en espacios de Banach ordenados.

3.1. C_o-semigrupos

En está sección, estudiamos semigrupos de operadores que actúan en un espacio de Banach ordenado.

Definición 3.1. *En un espacio de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$, una familia $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de B en B es un C_o-semigrupo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1) $S_s S_t = S_{s+t}$ para cada $s, t \geq 0$ (condición de semigrupo)

2) $S_0 = I$

3) $\lim_{t\to 0^+} \|S_t a - a\| = 0$, para cada $a \in B$.

Además, si B está ordenado mediante un cono positivo, B_+, entonces decimos que S es un C_o-semigrupo positivo si además se cumple que

4) $S_t B_+ \subset B_+$, para todo $t > 0$.

Similarmente, si $(B^*, \|\cdot\|_{B^*})$ es el espacio dual de $(B, \|\cdot\|_B)$, entonces una familia $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de B^* en B^* es un C_o^*-semigrupo si se cumplen las propiedades 1 y 2 con T_t en lugar de S_t y junto con

3) a.- La aplicación definida en $[0, \infty)$ mediante $t \mapsto (T_t\omega)(a)$ es continua para todo $\omega \in B^*$ y $a \in B$,*

b.- La aplicación definida sobre B^* mediante $\omega \mapsto (T_t\omega)(a)$ es $\sigma(B^*, B)$-continua para cada $t \geq 0$ y $a \in B$.

Y si el espacio dual B^*, está ordenado mediante un cono dual positivo, B^*_+, entonces decimos que T es un C_o^*-semigrupo positivo si además se cumple la siguiente propiedad

4) $T_t B^*_+ \subset B^*_+$, para todo $t > 0$.*

La relación entre estos dos tipos de semigrupos está dada por la dualidad, es decir, si $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ es un C_o-semigrupo en B, entonces definiendo

$$S^* = \{S_t^* : S_t^* \text{ es el operador adjunto de } S_t\}_{t\geq 0}$$

obtenemos un C_o^*-semigrupo en B^*.

Para verificar esto último, recordemos que para todo $\omega \in B^*$, el adjunto de S se define como el funcional $S_t^*(\omega)$ dado por $(S_t^*\omega)(a) = \omega(S_t(a))$, para cada $a \in B$.

De aquí que si $s, t \geq 0$, $a \in B$ y $\omega \in B^*$, entonces

$$S_0^*(\omega)(a) = \omega(S_0(a)) = \omega(Ia) = \omega(a) = (I\omega)(a).$$

Además,

$$(S_{s+t}^*\omega)(a) = \omega(S_{s+t}(a)) = \omega(S_sS_ta) = S_s^*(\omega(S_ta)) = S_s^*S_t^*(\omega)(a).$$

Esto demuestra que $\{S_t^*\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo.

Por último, tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+}(S_t^*\omega)(a) = \lim_{t\to 0^+}\omega(S_t(a)) = \omega\left(\lim_{t\to 0^+} S_t(a)\right) = \omega(a),$$

pues $\omega \in B^*$ y $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo, i. e.,

$$\lim_{t\to 0^+} S_t^*\omega = \omega, \quad \forall\omega \in B^*.$$

Con lo cual,

$$\lim_{t\to 0^+} S_t^* - I = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que S_t^* es continuo para cada $t \geq 0$ en la topología $\sigma(B^*, B)$.

Recíprocamente, si $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ es un C_o^*-semigrupo en B^*, entonces existe un C_o-semigrupo $T^* = \{T_t^*\}_{t\geq 0}$ en B, cuyo adjunto es $(T_t^*)^* = T_t$ para cada $t \geq 0$. Ver [BR84].

Ahora bien, para cada C_o-semigrupo tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2. *El generador infinitesimal de un C_o-semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ en B es el operador lineal H, con dominio $D(H)$ donde*

$$D(H) = \left\{a \in B : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } \lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{(I - S_t)a}{t} - b\right\| = 0\right\} \quad y$$

$$Ha = b\,,\ \forall a \in D(H).$$

Por otra parte, el generador de un C_o^*-semigrupo $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ en B^* se define de manera similar pero con la $\sigma(B^*, B)$-derivada, es decir, es un operador lineal K, con dominio $D(K)$ donde

$$D(K) = \left\{\omega \in B^* : \text{ existe } \eta \in B^* \text{ tal que } \lim_{t\to 0^+}\frac{\left((I - T_t)\omega\right)}{t}(a) = \eta(a)\,,\ \text{para cada } a \in B\right\} \quad y$$

$$K\omega = \eta\,,\ \forall\omega \in D(K).$$

El generador infinitesimal H de un C_o-semigrupo tiene dominio denso en B, es decir, $\overline{D(H)} = B$. Además, el generador infinitesimal resulta ser un operador lineal cerrado. Para ver los detalles, puede consultarse [Paz83].

Para ver la relación entre los generadores infinitesimales de un C_o-semigrupo y un C_o^*-semigrupo, requerimos del concepto de operador adjunto de un operador lineal no acotado. (Ver definición C.11)

Proposición 3.1. *Si S es un C_o-semigrupo con generador H, entonces su C_o^*-semigrupo dual S^* tiene como generador al operador adjunto de H, i. e., al operador H^*.*

Demostración. Sean K el generador de S^* y H^* el operador adjunto del generador H de S. Debemos mostrar que $D(K) = D(H^*)$ y $K\omega = H^*\omega$, para toda $\omega \in D(K)$.

Sea $\omega \in D(K)$, entonces para cada $a \in D(H)$ se tiene por la definición 3.2 que

$$\omega(Ha) = \omega\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{I - S_t}{t}(a)\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\omega\Big((I - S_t)(a)\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(I - S_t^*\Big)\omega(a) = \eta(a), \quad \text{para algún } \ \eta \in B^*.$$

De esta manera, para cada $\omega \in D(K)$, existe $\eta \in B^*$ tal que $H^*\omega(a) = \omega(Ha) = \eta(a)$, para toda $a \in D(H)$. Es decir, $\omega \in D(H^*)$ con $K\omega = \eta = H^*\omega$. Con lo cual, tenemos que K es restricción de H^*. Ahora bien, para la otra contención tomamos $\omega \in D(H^*)$, en consecuencia existe $\xi \in B^*$ tal que

$$\xi(a) = \omega(Ha) = \omega\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{I - S_t}{t}(a)\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\omega\Big((I - S_t)\,(a)\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(I - S_t^*\Big)\omega(a).$$

De aquí que $\omega \in D(K)$ y $K\omega = \xi$. Por lo tanto, H^* es una restricción de K y como K es restricción de H^*, concluimos que $K = H^*$. □

En particular, tenemos el siguiente tipo de semigrupos con su respectivo generador infinitesimal.

Definición 3.3. *Un C_0 semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ en B es de contracciones si*

$$\|S_t\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Los resultados clásicos para caracterizar los operadores $H\colon D(H) \subset B \to B$ que son generadores infinitesimales de C_o-semigrupos son los siguientes:

Teorema 3.1. ***(Feller-Miyadera-Phillips)***
En un espacio de Banach B, son equivalentes:

1) *H genera un C_o-semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ con*

$$\|S_t\| \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$

para algún $M \geq 1, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ con $\beta\gamma < 1$.

2) *H es un operador lineal norma cerrado y definido norma denso con*

   I) *$R(I + \beta H) = B$, es decir, el rango del operador $I + \beta H$ es B.*

   II) *$\|(I + \alpha H)^n a\| \geq (1 - \alpha\gamma)^n M^{-1}\|a\|$, para cualesquiera $\alpha \in (0, \beta]$, $a \in D(H^n)$ y $n \geq 1$.*

Para los semigrupos de contracciones, tenemos

Teorema 3.2. ***(Hille-Yosida)***
En un espacio de Banach B, son equivalentes:

1) *H genera un C_o-semigrupo de contracciones.*

2) *H es un operador lineal norma cerrado y definido norma denso con*

   I) *$R(I + \beta H) = B$, es decir, el rango del operador $I + \beta H$ es B, para algún $\beta > 0$.*

   II) *$\|(I + \alpha H)^n a\| \geq \|a\|$, para cada $\alpha \in (0, \beta]$ y para toda $a \in D(H^n)$.*

Estos resultados pueden consultarse en [BR84].

A continuación, estudiamos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un operador lineal es el generador de un C_0-semigrupo positivo de contracciones, para este fin introducimos el concepto de *disipatividad.*

3.2. Operadores disipativos

A lo largo de esta sección, H denotará un operador lineal en un espacio de Banach real con dominio $D(H)$ denso en la norma y consideraremos $p\colon B \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal en B, es decir, una función p que satisface

$$\begin{cases} p(a+b) \leq p(a) + p(b) & ; \quad \forall a, b \in B, \\ p(\lambda a) = \lambda p(a) & ; \quad \forall a \in B, \forall \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Definición 3.4. *Decimos que $p : B \to \mathbb{R}$ es una media-norma (por Half-Norm en inglés) en un espacio de Banach B, si es un funcional sublineal continuo.*

En particular, por ser p funcional sublineal tenemos que $0 = p(0) \leq p(a) + p(-a)$, por lo que $p(a) \geq 0$, o bien $p(-a) \geq 0$. La continuidad de p equivale a la existencia de una constante k tal que $|p(a)| \leq k\|a\|$, para toda $a \in B$.

Definición 3.5. *Decimos que una media-norma $p : B \to \mathbb{R}$ es propia si*

$$\text{máx}\{p(a), p(-a)\} > 0,$$

para toda $a \in B\backslash\{0\}$.

Observación 3.2.1. *Para cada media-norma propia p en B, la función $\|\cdot\|_p : B \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|a\|_p := \text{máx}\{p(a), p(-a)\}$$

define una norma en B.

Demostración. Por ser p una media-norma propia tenemos que $\text{máx}\{p(a), p(-a)\} \geq 0$ para todo $a \in B$, de aquí que $\|a\|_p \geq 0$ para todo $a \in B$. Además,

$$\|a\|_p = 0 \Leftrightarrow p(a) = p(-a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Ahora bien, si $\alpha \geq 0$, entonces $p(\alpha a) = \alpha p(a)$ y $p(-\alpha a) = \alpha p(-a)$ para toda $a \in B$. En consecuencia,

$$\|\alpha a\|_p = \text{máx}\{p(\alpha a), p(-\alpha a)\} = \alpha\, \text{máx}\{p(a), p(-a)\} = \alpha \|a\|_p = |\alpha| \|a\|_p.$$

Mientras que si $\alpha < 0$, entonces $p(\alpha a) = p(-\alpha(-a)) = -\alpha p(-a)$ y $p(-\alpha a) = -\alpha p(a)$. De está manera,

$$\|\alpha a\|_p = \text{máx}\{p(\alpha a), p(-\alpha a)\} = -\alpha\, \text{máx}\{p(-a), p(a)\} = |\alpha| \|a\|_p.$$

Es decir, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que $\|\alpha a\|_p = |\alpha| \|a\|_p$, $\forall a \in B$.

Finalmente, si $a, b \in B$, entonces $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$ y $p(-a - b) \leq p(-a) + p(-b)$. Luego,

$$\|a + b\|_p = \text{máx}\{p(a + b), p(-a - b)\} \leq \text{máx}\{p(a), p(-a)\} + \text{máx}\{p(b), p(-b)\} = \|a\|_p + \|b\|_p.$$

□

Definición 3.6. *El subdiferencial de una media-norma p en $a \in B$ es el conjunto*

$$dp(a) = \{\omega \in B^* : \omega \leq p, \omega(a) = p(a)\}.$$

Por el teorema de Hahn-Banach dado en A.1, tenemos que $dp(a)$ es no vacío. Además, Dados $b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $\omega \in dp(a)$ tal que $\omega(b) = \lambda$ si y sólo si

$$\frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lambda \leq \frac{p(a + tb) - p(a)}{t} \tag{3.2}$$

para cada $t > 0$.

Observación 3.2.2. *Si p es una media-norma en B, entonces para cada $a, b \in B$ la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = p(a + tb)$ es convexa.*

Demostración. Sean $s, t \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in (0, 1)$, entonces por ser p una media-norma tenemos

$$\begin{aligned} f\big(\gamma s + (1 - \gamma)t\big) &= p\big(a + (\gamma s + (1 - \gamma)t)b\big) \\ &= p\big(\gamma a + (1 - \gamma)a + (\gamma s + (1 - \gamma)t)b\big) \\ &\leq \gamma p(a + sb) + (1 - \gamma)p(a + tb) \\ &= \gamma f(s) + (1 - \gamma)f(t). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es convexa. □

Lema 3.1. *Para cada $b \in B$, y toda $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que la desigualdad (3.2) es equivalente a*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lambda \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{p(a + tb) - p(a)}{t}. \tag{3.3}$$

Demostración. Sean $b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, así para cada $t > 0$ por el teorema C.4 aplicado a f tenemos con $x = -t, y = x' = 0, y' = s > 0$, que se cumple

$$\frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \frac{p(a + sb) - p(a)}{s}.$$

El cociente del lado izquierdo determina una función monótona creciente de $t > 0$, y el lado derecho es decreciente como función de $s > 0$, como consecuencia del teorema C.4. Por lo tanto,

$$\frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lim_{s \to 0^+} \frac{p(a + sb) - p(a)}{s} \leq \frac{p(a + sb) - p(a)}{s}.$$

De aquí que $\lambda \in \mathbb{R}$, cumple (3.2) si y sólo si satisface (3.3). □

Teorema 3.3. *Sea $H : D(H) \to B$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Banach real B, y consideremos una media-norma p en B. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *Para cada $\alpha > 0$, $p((I + \alpha H)a) \geq p(a)$, para toda $a \in D(H)$,*

2) *Para cada $a \in D(H)$, existe $\omega \in dp(a)$ tal que $\omega(Ha) \geq 0$,*

3) *Para cada $a \in D(H)$ y para cualquier $\omega \in dp(a)$, $\omega(Ha) \geq 0$.*

Demostración. La implicación 3) $\Rightarrow$ 2) es obvia y para ver que 2) $\Rightarrow$ 1) basta tomar en (3.2) $b = Ha$, con $a \in D(H)$, así la condición 2) implica que

$$\frac{p(a + tHa) - p(a)}{t} \geq 0 \quad , \forall t > 0$$

De esta manera, para toda $t > 0$,

$$p(a + tHa) - p(a) \geq 0, \quad \forall a \in D(H).$$

Mientras que para 1) $\Rightarrow$ 3), tomamos $a, b \in D(H)$ y $t > 0$, entonces por ser p una media-norma, tenemos

$$\begin{aligned} p(a - tHa) &\leq p(a - tb) + tp(b - Ha) \\ &\leq p((I + tH)(a - tb)) + tp(b - Ha) \\ &\leq p(a) + tp(Ha - b) + tp(b - Ha) + t^2 p(-Hb). \end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tHa)}{t} \geq -p(Ha - b) - p(b - Ha).$$

Luego, por ser $D(H)$ denso y p continua, el lado derecho de está última desigualdad puede hacerse arbitrariamente pequeño al tomar una sucesión $(b_n) \subset D(H)$ que converja a Ha.

Con lo cual,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tHa)}{t} \geq 0.$$

Finalmente, dado $\omega \in dp(a)$, al hacer $b = Ha$, tenemos por (3.2) que $\omega(Ha) = \lambda \geq 0$. □

De hecho, en el teorema 3.3 basta verificar la condición (1) en algún intervalo $(0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ y extender por convexidad a todo el intervalo $(0, \infty)$. A partir de el teorema 3.3, damos la siguiente definición.

Definición 3.7. *Decimos que un operador lineal H densamente definido en un espacio de Banch real B, es p-disipativo si cumple alguna de las condiciones del teorema 3.3.*

El término "disipativo", aparece en el contexto de C_o-semigrupos. La disipatividad es una forma infinitesimal de la condición de contractibilidad. Para ver esto, sea S un C_o-semigrupo con generador H y supongamos que S es p-contractivo, es decir,

$$p(S_t a) \leq p(a)$$

para toda $t \geq 0$ y $a \in B$. Entonces, dado $\omega \in dp(a)$, se cumple que

$$\omega(S_t a) \leq p(S_t a) \leq p(a) = \omega(a).$$

Por lo tanto, para toda $a \in D(H)$, por definición de generador,

$$\omega(Ha) = \lim_{t \to 0^+} \omega\left(\frac{(I - S_t)a}{t}\right) \geq 0.$$

Es decir, H es un operador p-disipativo.

Como H es el generador de un C_0-semigrupo, entonces por el teorema 3.1.10 en [BR02] para semigrupos de contracciones y el teorema 11.6.6 en [HP57] para una clase más general de semigrupos, se tiene que para cada $a \in B$,

$$S_t a = \lim_{n \to \infty} (I + tH/n)^{-n} a.$$

De aquí que

$$p(S_t a) = \lim_{n \to \infty} p((I + tH/n)^{-n} a).$$

Supongamos que H es p-disipativo, por el teorema 3.3 tenemos que

$$p((I + \alpha H)a) \geq p(a).$$

Luego,

$$p((I + \alpha H)^2 a) \geq p((I + \alpha H)a) \geq p(a).$$

Por lo que de manera inductiva, concluimos que

$$p((I + \alpha H)^n a) \geq p(a)\ ,\ \forall n \geq 1.$$

Consecuentemente,

$$p((I + tH/n)^{-n} a) \leq p(a)\ ,\ \forall n \geq 1.$$

Así,

$$p(S_t a) \leq p(a),$$

para toda $a \in B$. Con lo cual, S es p-contractivo.

De acuerdo a lo anterior, notemos que un C_0-semigrupo es de contracciones si y sólo si su generador infinitesimal es $\|\cdot\|$-disipativo, de manera más sencilla norma-disipativo. Este hecho, forma parte de lo establecido por el teorema de Hille-Yosida [Paz83] por que la norma-disipatividad corresponde a la estimación

$$\|(I + \alpha H)a\| \geq \|a\|$$

para toda $a \in D(H)$ y toda $\alpha > 0$ pequeña.

Observación 3.2.3. *A los operadores norma-disipativos, también se les conoce simplemente como operadores disipativos.*

A continuación, estudiamos algunas propiedades de los operadores p-disipativos. Por ejemplo, encontramos operadores H para los cuales existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $(H + \gamma I)$ es p-disipativo. En este contexto, el siguiente resultado es útil.

Proposición 3.2. *Sea $\gamma \in \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:*

1) $(H + \gamma I)$ es p-disipativo.

2) Para toda $\alpha > 0$ tal que $1 - \alpha\gamma > 0$, se cumple que $p((I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a)$, para cada $a \in D(H)$.

Demostración. Primero observamos que si $\alpha > 0$ es tal que $1 - \alpha\gamma > 0$ y $a \in D(H)$, se cumple que

$$p((I + \alpha H)a) = (1 - \alpha\gamma)p\Big((I + \alpha(1 - \alpha\gamma)^{-1}(H + \gamma I))a\Big). \tag{3.4}$$

Ahora bien, si suponemos la condición 1) tenemos por el teorema 3.3 aplicado al lado derecho de está igualdad que

$$p((I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a).$$

Esto demuestra 1) $\Rightarrow$ 2).

Para ver que 2) $\Rightarrow$ 1), suponemos que

$$p((I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a),$$

para toda $\alpha > 0$ tal que $1 - \alpha\gamma > 0$ y cada $a \in D(H)$.
Entonces por (3.4), tenemos que

$$(1 - \alpha\gamma)p\Big((I + \alpha(1 - \alpha\gamma)^{-1}(H + \gamma I))a\Big) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a)$$

para toda $\alpha > 0$ tal que $1 - \alpha\gamma > 0$ y cada $a \in D(H)$.
Es decir,

$$p\Big((I + \alpha(1 - \alpha\gamma)^{-1}(H + \gamma I))a\Big) \geq p(a).$$

Por lo tanto, al tomar $\beta = \alpha(1 - \alpha\gamma)^{-1} > 0$, concluimos que

$$p\Big((I + \beta(H + \gamma I))a\Big) \geq p(a)$$

Lo cual significa que $(H + \gamma I)$ es p-disipativo en virtud del teorema 3.3. □

Para establecer que los operadores p-disipativos tienen un buen comportamiento con respecto a la topología inducida por la norma, requerimos de las siguientes definiciones.

Definición 3.8. *Sean B un espacio de Banach real y $D(A) \subset B$ un subespacio. Definimos la gráfica de un operador lineal $A\colon D(A) \to B$, como el conjunto*

$$\mathcal{G}(A) = \Big\{(x, Ax) \in B \times B\colon\, x \in D(A)\Big\}.$$

Definición 3.9. *Sea B un espacio de Banach real y consideremos $A_i\colon D(A_i) \to B$ operadores lineales con $D(A_i)$ subespacios B con $i = 1, 2$. Decimos que A_2 es extensión de A_1, lo cual lo denotamos por $A_1 \subset A_2$, si $D(A_1) \subset D(A_2)$ y $A_2 x = A_1 x$, para cada $x \in D(A_1)$.*

Definición 3.10. *Sea B un espacio de Banach. Decimos que un operador lineal $A\colon D(A) \subset B \to B$ es cerrado si su gráfica $\mathcal{G}(A)$ es un conjunto cerrado en $B \times B$.*

Definición 3.11. *Sea B un espacio de Banach real. Decimos que un operador lineal $A\colon D(A) \subset B \to B$ es cerrable si dadas $b \in B$ y $(a_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ con $a_n \to 0$ y $Ha_n - b \to 0$, conforme $n \to \infty$, entonces $b = 0$.*

Teorema 3.4. *Sea H un operador p-disipativo, donde p es una media-norma propia en B. Entonces, H es un operador cerrable y su mínima extensión cerrada denotada por $\overline{H}$ también es p-disipativo.*

Demostración. Supongamos que H es p-disipativo y veamos primero que H es cerrable, para esto consideramos $(a_n)_{n\geq 1} \subset D(H)$ y $b \in B$ tales que $a_n \to 0$ y $Ha_n - b \to 0$, si $n \to \infty$. Para demostrar que $b = 0$, tomemos $b' \in D(H)$, luego para cada $t > 0$, tenemos por el teorema 3.3 que

$$\begin{aligned} p(a_n - tb) &\leq p(a_n - tb') + tp(b' - b) \\ &\leq p((I + tH)(a_n - tb')) + tp(b' - b) \\ &\leq p(a_n) + tp(b - b') + tp(b' - b) + tp(Ha_n - b) + t^2 p(-Hb'). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ y usando que p es continua, concluimos

$$\begin{aligned} tp(-b) &\leq tp(b - b') + tp(b' - b) + t^2 p(-Hb') \\ \Rightarrow \quad p(-b) &\leq p(b - b') + p(b' - b) + tp(-Hb') \end{aligned}$$

para cada $t > 0$. Y al tomar límite cuando $t \to 0^+$,

$$p(-b) \leq p(b - b') + p(b' - b).$$

Por ser $D(H)$ norma-denso y p continua, el lado derecho de está desigualdad, puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando $b' = (b_n)_{n\geq 1}$ tal que $b_n \to b$.

Por lo tanto, $p(-b) = 0$ y de manera análoga, vemos que $p(b) = 0$. Con lo cual $b = 0$, por ser p propia. De aquí que H es cerrable.

Finalmente, $\overline{H}$ es p-disipativo por la condición 1) del teorema 3.3 y la continuidad de p. □

Definición 3.12. *Definimos la media-norma canónica en $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ con B_+ propio mediante*

$$N(a) = \operatorname{ínf}\{\|b\| : b \in B, b \geq a\}.$$

Veamos que $N\colon B \to [0, \infty)$ es una media-norma ya que si $a, c, b_1, b_2 \in B$ son tales que $b_1 \geq a$ y $b_2 \geq c$, entonces $b_1 + b_2 \geq a + c$.
De está manera,

$$N(a + c) \leq \|b_1 + b_2\| \leq \|b_1\| + \|b_2\|.$$

Por lo tanto,

$$N(a + c) \leq N(a) + N(c).$$

Además, si $\alpha > 0$, entonces para $a, b \in B$ se cumple que

$$\begin{aligned} N(\alpha a) &= \operatorname{ínf}\{\|b\| : b \geq \alpha a\} \\ &= \operatorname{ínf}\{\|\alpha b\| : b \geq a\} \\ &= \alpha \operatorname{ínf}\{\|b\| : b \geq a\} \\ &= \alpha N(a). \end{aligned}$$

Finalmente, notamos que $0 \leq N(a) \leq \|a\|$, lo cual se obtiene tomando $b = a$ en la definición 3.12. Por lo tanto, N es una media-norma. Además, se tiene la propiedad de que $N(a) = 0$, si y sólo si $a \leq 0$.

Lema 3.2. *Sea ω un funcional lineal en $(B, B_+, \|\cdot\|)$ y $\alpha \geq 0$. Entonces, son equivalentes*

1) $\omega \in B_+^* \cap B_\alpha^*$

2) $\omega(a) \leq \alpha N(a)$*, para cada* $a \in B$.

Demostración. Primero supongamos que $\omega \in B_+^* \cap B_\alpha^*$ y tomemos $a, b \in B$ tales que $b \geq a$, entonces

$$\omega(a) \leq \omega(b) \leq \|\omega\|\|b\| \leq \alpha\|b\|.$$

Así, por definición de media-norma canónica, $\omega(a) \leq \alpha N(a)$.

Recíprocamente, si $\omega(a) \leq \alpha N(a)$, para cada $a \in B$, entonces $\omega(a) \leq \alpha\|a\|$. Luego, $\|\omega\| \leq \alpha$. Por último, para verificar que $\omega \in B_+^*$, consideramos $x \geq 0$, entonces $N(-x) = 0$. Luego, $\omega(-x) \leq \alpha N(-x) = 0$. Por lo tanto, $\omega(x) \geq 0$, es decir, $\omega \in B_+^*$. □

Una consecuencia inmediata del lema 3.2, es el hecho de que el subdiferencial con respecto de N esta caracterizado mediante

$$dN(a) = \{\omega \in B_+^* \cap B_1 : \omega(a) = N(a)\},$$

para cada $a \in B$. Otra propiedad importante de la media-norma canónica es que nos da una forma de determinar cuándo la norma es monótona. Este hecho se concentra en el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *En $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$, son equivalentes*

1) $\|\cdot\|$ *es monótona*

2) $N(a) = \|a\|$ *para cada* $a \in B_+$

Demostración. Si tenemos que $\|\cdot\|$ es monótona en B, entonces para cada $a, b \in B$ tales que $0 \leq a \leq b$ se cumple que $\|a\| \leq \|b\|$. Luego, $\|a\| \leq N(a)$ y siempre se vale que $N(a) \leq \|a\|$. Con lo cual, $N(a) = \|a\|$.

Recíprocamente, sean $a, b \in B$ tales que $0 \leq a \leq b$, entonces $a, b \in B_+$. Así, $\|a\| = N(a) \leq \|b\|$. De está manera, obtenemos que $\|a\| \leq \|b\|$, es decir, $\|\cdot\|$ es monótona. □

Ahora, consideremos un espacio de Banach ordenado $(B, B_+, \|\cdot\|)$ con B_+ propio y tal que $\mathrm{int}B_+ \neq \emptyset$, en consecuencia para H densamente definido, tenemos que existe $u \in D(H) \cap \mathrm{int}B_+$.

Así, dada $u \in \mathrm{int}B_+$ y $b \in B_+$, se cumple que $\lambda u + b \in \mathrm{int}B_+$, para toda $\lambda > 0$. Luego, $\mathrm{int}B_+$ es un conjunto denso en B_+.

Por otra parte, para cada $u \in \mathrm{int}B_+$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{a \in B : \|a - u\| < \varepsilon\} \subset B_+$. Por lo que si $a \in B$, entonces $-\lambda u \leq a \leq \lambda u$, para toda $\lambda > \|a\|/\varepsilon$, ya que $\|u - (u \pm a/\lambda)\| = \|a\|/\lambda < \varepsilon$. Con lo cual, $u \pm a/\lambda \in B_+$, es decir, $\lambda u \pm a \in B_+$.

Lema 3.3. *Sean $u \in intB_+$ y $\omega \in B_+^*$ tales que $\omega(u) = 0$. Entonces $\omega = 0$.*

Demostración. Sea $a \in B$, entonces por ser u punto interior de B_+, existe $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda u \geq a$. De aquí que $\omega(\lambda u) \geq \omega(a)$, luego $0 \geq \omega(a)$.

Mientras que para $-a$, existe $\gamma \geq 0$ tal que $\gamma u \geq -a$, con lo cual $\omega(\gamma u) \geq \omega(-a)$, así $0 \geq -\omega(a)$. Finalmente, $0 \leq \omega(a) \leq 0$, para cada $a \in B$. Por lo tanto $\omega = 0$. □

Además, tenemos las siguientes medias-normas.

Definición 3.13. *Para cada $u \in intB_+$, definimos dos medias-normas en B asociadas a u, mediante*

$$N_u(a) = \text{ínf}\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \leq \lambda u\},$$
$$\hat{N}_u(a) = \text{ínf}\{\lambda \in \mathbb{R} : a \leq \lambda u\},$$

con $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$.

En efecto, N_u es una media-norma en B, pues dados $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tales que $\lambda_1 u \geq a$ y $\lambda_2 u \geq b$, entonces $(\lambda_1 + \lambda_2)u \geq a + b$.
De aquí que $N_u(a + b) \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Por lo tanto, $N_u(a + b) \leq N_u(a) + N_u(b)$.
Además, para $\alpha, \lambda > 0$ se tiene que $\alpha\lambda u \geq \alpha a$ si y sólo si $\lambda u \geq a$. Con lo cual, $N_u(\alpha a) = \alpha N_u(a)$.

De manera análoga, se demuestra que $\hat{N}_u$ es una media-norma en B. También es importante notar que si $b \leq 0$, entonces $N_u(b) = 0$ y para toda $a \in B$, se verifica que $a \leq N_u(a)u$.

Así, por la observación 3.2.1, cuando N_u es propia obtenemos una nueva norma en B dada por

$$||a||_u = \text{máx}\{N_u(a), N_u(-a)\}.$$

Proposición 3.3. *Para cada $u \in intB_+$ y $a \in B$, se cumple que*

$$||a||_u = \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \in [-\lambda u, \lambda u]\right\}$$

donde $a \in [-\lambda u, \lambda u]$ si y sólo si, $-\lambda u \leq a \leq \lambda u$.

Demostración. Sean $a \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tales que $a \in [-\lambda u, \lambda u]$, entonces $-\lambda u \leq a$ y $a \leq \lambda u$. Es decir, $-a \leq \lambda u$ y $a \leq \lambda u$. Luego, $N_u(-a) \leq \lambda$ y $N_u(a) \leq \lambda$.

Por lo tanto,

$$||a||_u \leq \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \in [-\lambda u, \lambda u]\right\}.$$

Para establecer la otra desigualdad, observamos que para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $\lambda_\varepsilon \geq 0$ tal que $a \leq \lambda_\varepsilon u$ y $\lambda_\varepsilon < ||a||_u + \varepsilon$.

Esto implica que $a < (||a||_u + \varepsilon)u$ para todo $\varepsilon > 0$. De aquí que, $a \leq ||a||_u u$. De manera análoga, se demuestra que $-a \leq ||a||_u u$.

Con lo cual, $a \in [-||a||_u u, ||a||_u u]$. Se sigue entonces

$$\text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \in [-\lambda u, \lambda u]\right\} \leq ||a||_u.$$

□

Las propiedades de un operador disipativo con respecto a las medias-normas dadas en la definición 3.13 están señaladas a continuación.

Lema 3.4. *Para cada $u \in intB_+$ y $a \in B$, se cumple que*

$$dN_u(a) = \{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\}$$

Demostración. Si $\omega \in dN_u(a)$, entonces $\omega \in B^*$ con $\omega(a) = N_u(a)$ y $\omega(b) \leq N_u(b)$ para todo $b \in B$. En particular, si $b \in B_+$, entonces

$$\omega(-b) \leq N_u(-b) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon \lambda u \geq -b\} = \text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon \lambda u + b \geq 0\} = 0.$$

con lo cual, $-\omega(b) \leq 0$. Se sigue que, $\omega \in B_+^*$.

Además, $\omega(u) \leq N_u(u) = 1$. Por lo tanto, $\omega \in B_+^*$, $\omega(u) \leq 1$ y $\omega(a) = N_u(a)$. Es decir,

$$dN_u(a) \subset \{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\}.$$

Para ver la otra contención, sea $\omega \in \{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\}$, entonces, para $b \in B$ y $\lambda \geq 0$ tales que $\lambda u \geq b$, se cumple que $\lambda u - b \geq 0$. Así, $\omega(\lambda u - b) \geq 0$, es decir, $\lambda\omega(u) \geq \omega(b)$.

De está manera, usando que $1 \geq \omega(u)$, tenemos que $\lambda \geq \lambda\omega(u) \geq \omega(b)$ para todo $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda u \geq b$ y por la definición de N_u, concluimos que $\omega(b) \leq N_u(b)$.

En consecuencia,

$$\{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\} \subset dN_u(a).$$

□

Proposición 3.4. *Sea $u \in D(H) \cap intB_+$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *Para cada $\alpha > 0$, suficientemente pequeña, si $a \in D(H)$ y $(I + \alpha H)a \in B_+$, entonces $a \in B_+$.*

2) *Para algún $\gamma \geq \hat{N}_u(-Hu)$, el operador $(H + \gamma I)$ es N_u-disipativo.*

3) *Si $a \in D(H) \cap B_+$ y $\omega \in B_+^*$ es tal que $\omega(a) = 0$, entonces $\omega(Ha) \leq 0$.*

Demostración. Primero veamos que 1) $\Rightarrow$ 2). Sea $\gamma \geq \hat{N}_u(-Hu)$, entonces por definición de $\hat{N}_u$, tenemos que $-Hu \leq \gamma u$, equivalentemente, $(I + \alpha H)u \geq (1 - \alpha\gamma)u$ para cada $\alpha > 0$.

De aquí que para toda $\lambda \geq 0$ y $\alpha \geq 0$ suficientemente pequeña, se cumple que

$$\lambda u \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u \tag{3.5}$$

Por otro lado, sea $a \in D(H)$, entonces

$$N_u\big((I + \alpha H)a\big) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon (I + \alpha H)a \leq \lambda u\}$$

y por la desigualdad (3.5) tenemos que

$$\{\lambda \geq 0\colon (I + \alpha H)a \ \leq \lambda u\} \subset \{\lambda \geq 0\colon (I + \alpha H)a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} N_u\big((I + \alpha H)a\big) &\geq \text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon (I + \alpha H)a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u\} \\ &\geq \text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u\}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que $(I + \alpha H)a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u$ implica que

$$(I + \alpha H)\big(\lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u - a\big) \geq 0$$

y por la hipótesis (1) esto a su vez implica que $\lambda(1-\alpha\gamma)^{-1}u - a \geq 0$, equivalentemente, $a \leq \lambda(1-\alpha\gamma)^{-1}u$. Entonces,

$$N_u\Big((I+\alpha H)a\Big) \geq \text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon\, a \leq \lambda(1-\alpha\gamma)^{-1}u\} = N_u\Big((1-\alpha\gamma)a\Big) = (1-\alpha\gamma)N_u(a).$$

Por la proposición 3.2, concluimos que $(H+\gamma I)$ es N_u-disipativo.

Ahora bien, la implicación 2) $\Rightarrow$ 1), se sigue del hecho de que si $(I+\alpha H)a \in B_+$, entonces por la hipótesis y la definición de N_u,

$$0 = N_u(-(I+\alpha H)a) \geq (1-\alpha\gamma)N_u(-a)$$

con $1-\alpha\gamma > 0$, por la proposición 3.2. Así, tenemos que $-a \leq 0$, es decir, $a \in B_+$.

Para ver que 2) $\Rightarrow$ 3) usamos el lema 3.4. Por lo que si $a \in D(H) \cap B_+$ y $\omega \in B_+^*$ con $\omega(a) = 0$, entonces $\omega(u) \geq 0$ y también se cumple que $\text{ínf}\{\lambda \geq 0\colon\, \lambda u \geq -a\} = N_u(-a) = 0$.

Basta considerar el caso en que $\omega \neq 0$ y por el lema 3.3, podemos suponer que $\omega(u) > 0$, entonces por el lema 3.4 tenemos que

$$\frac{\omega}{\omega(u)} \in dN_u(-a)$$

Por lo tanto, en virtud del teorema 3.3, concluimos que

$$\frac{\omega}{\omega(u)}((H+\gamma I)(-a)) \geq 0.$$

De aquí que $\omega((H+\gamma I)(-a)) \geq 0$, luego $\omega(-Ha) \geq \gamma\omega(a)$=0. Se sigue que, $\omega(Ha) \leq 0$.

Finalmente, para establecer que 3) $\Rightarrow$ 2), tomamos $\gamma \geq \hat{N}_u(-Hu)$, de aquí que $Hu \geq -\gamma u$. Por lo que si $a \in D(H), \omega \in dN_u(a)\backslash\{0\}$, entonces podemos suponer que $\omega(u) > 0$ en virtud del lema 3.3.

Luego, por el lema 3.4,

$$b := \frac{N_u(a)u}{\omega(u)} - a \in B_+,$$

pues $a \leq N_u(a)u \leq (1/\omega(u))N_u(a)u$, ya que $\omega(u) \leq 1$ en virtud del lema 3.4. En consecuencia,

$$\frac{N_u(a)u}{\omega(u)} - a \geq 0.$$

Además, $\omega \in B_+^*$ y $\omega(b) = N_u(a) - \omega(a) = 0$, por ser ω elemento de la subdiferencial de N_u.

Por lo tanto, por la hipótesis 3) deducimos que $0 \geq \omega(Hb)$ y

$$\omega(Hb) = \omega\left(\frac{N_u(a)Hu}{\omega(u)} - Ha\right) = \frac{N_u(a)}{\omega(u)}\omega(Hu) - \omega(Ha) \geq -\gamma N_u(a) - \omega(Ha) = -\omega\big((H+\gamma I)a\big).$$

Con lo cual $\omega((H+\gamma I)a) \geq 0$. Y por el teorema 3.3, tenemos que $(H+\gamma I)$ es un operador N_u-disipativo. $\square$

La condición (1) de la proposición 3.4 establece la positividad del operador $(I+\alpha H)^{-1}$, cuando este exista. Mientras que la condición (3), se conoce como la propiedad de que H tiene elementos negativos fuera de la diagonal.

Por otro lado, si N es la media-norma canónica, entonces dado H un operador N-disipativo este tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal ya que por el lema 3.2, obtenemos

$$dN(a) = \{\omega \in B_+^* \cap B_1^* : \omega(a) = N(a)\}.$$

Así, dada $a \in D(H) \cap B_+$, $\omega \in B_+^* \cap B_1^*$ con $\omega(a) = 0$. Tenemos que $\omega \in dN(-a)$ pues $N(-a) = 0$, por ser $-a \leq 0$ y por la N-disipatividad, concluimos que $\omega(-Ha) \geq 0$.

Cabe mencionar que estas afirmaciones carecen de sentido, si $D(H) \cap B_+ = \emptyset$, lo cual se evita al suponer que $\mathrm{int}B_+ \neq \emptyset$, pues de esta manera, $D(H)$ contiene elementos positivos por ser un subconjunto denso.

Corolario 3.1. *Para cada $u \in D(H) \cap intB_+$, son equivalentes:*

1) H es N_u-disipativo.

2) H es $\|\cdot\|_u$-disipativo y tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

3) $Hu \geq 0$ y H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Demostración. Primero supongamos que $Hu \geq 0$ y que H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal. Entonces por la definición de $\hat{N}_u$, se tiene que $\hat{N}_u(-Hu) \leq 0$. Así, por la proposición 3.4, H es N_u-dispativo. Esto demuestra que 3) implica 1).

Veamos ahora que que 1) implica 2). Como H es N_u-disipativo por hipótesis, consideremos $a \in D(H) \cap B_+$ y $\omega \in B_+$, tales que $\omega(u) > 0$ con $\omega(a) = 0$. Entonces, por el lema 3.4 y dado que $N_u(-a) = 0$, tenemos que

$$\frac{\omega}{\omega(u)} \in dN_u(-a).$$

De esta manera,

$$\frac{\omega}{\omega(u)}(-Ha) \geq 0.$$

Luego, $\omega(-Ha) \geq 0$, es decir, $\omega(Ha) \leq 0$.

En el caso en que $\omega(u) = 0$, entonces $\omega \in dN_u(-a)$ y $\omega(-Ha) \geq 0$. Con lo cual $\omega(Ha) \leq 0$. Esto demuestra que H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Para establecer que H es $\|\cdot\|_u$-disipativo, consideramos $a \in D(H)$ y $\alpha > 0$. Entonces se tiene que

$$\|(I + \alpha H)a\|_u = \text{máx}\Big\{N_u((I + \alpha H)a), N_u(-(I + \alpha H)a)\Big\}.$$

Por el teorema 3.3, concluimos que $N_u\big((I + \alpha H)a\big) \geq N_u(a)$ y $N_u\big(-(I + \alpha H)a)\big) = N_u\big((I + \alpha H)(-a)\big) \geq N_u(-a)$.

Así,

$$\text{máx}\Big\{N_u((I + \alpha H)a), N_u(-(I + \alpha H)a)\Big\} \geq \text{máx}\Big\{N_u(a), N_u(-a)\Big\}.$$

De aquí que para toda $a \in D(H)$ y para toda $\alpha > 0$, se cumple que

$$\|(I + \alpha H)a\|_u \geq \|a\|_u.$$

Es decir, el operador H es $\|\cdot\|_u$-disipativo .

Por último, si suponemos la condición 2) entonces el operador H es $\|\cdot\|_u$-disipativo y concluimos que $\|(I + \alpha H)u\|_u \geq \|u\|_u = 1$, para cada $\alpha > 0$.

De esta manera, para toda $\alpha > 0$, se cumple que $(u + \alpha Hu) \in [-u, u]$, por lo cual $-u \leq u + \alpha Hu \leq u$, en consecuencia $-2u \leq \alpha Hu$.

Consecuentemente $-2\alpha^{-1}u \leq Hu$, para toda $\alpha > 0$. Por lo tanto, $Hu \geq 0$, al hacer $\alpha \to \infty$, pues el cono positivo B_+ es cerrado por definición. Esto demuestra que 2) implica 3). □

Similarmente, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2. *Para cada $u \in D(H) \cap intB_+$, son equivalentes:*

1) *H es $\hat{N}_u$-disipativo.*

2) *H es $\|\cdot\|_u$-disipativo y $Hu \leq 0$.*

3) *H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal y $Hu = 0$.*

3.2.1. Ejemplos de disipatividad

El primer ejemplo a tratar hace referencia al espacio $\mathbb{R}^n$, donde tenemos que el conjunto $\{e_j\}_{j=1}^n$ de los vectores canónicos forma una base de $\mathbb{R}^n$ y los funcionales de Riesz dados por $\omega_j(\cdot) := \langle e_j, \cdot\rangle$, con $j = 1, \dots, n$ forman la base del dual.

Ejemplo 3.2.1. *Sean $B = \mathbb{R}^n$, $B_+ = \mathbb{R}^n_+$ el cono positivo de los vectores con entradas no negativas y consideremos $H = (H_{i,j})$ una matriz de tamaño n x n con entradas reales, luego $D(H) = \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $u = (u_i) \in intB_+$, se tiene que $u_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y además se cumplen las siguientes propiedades:*

I) *La N_u-disipatividad del operador H es equivalente a que $(Hu)_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $H_{i,j} \leq 0$ para cada $i \neq j$.*

Demostración. Por el Corolario 3.1, tenemos que si $u \in \mathrm{int}B_+ \cap D(H)$, entonces H es N_u-disipativo si y sólo si $Hu \geq 0$ y H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Primero supongamos que H es N_u-disipativo, entonces $(Hu)_i \geq 0$, para toda $i = 1, \dots, n$. Además, si $a \in D(H) \cap B_+$, con $\omega \in B_+^*$ tal que $\omega(a) = 0$, entonces $\omega(Ha) \leq 0$.

Ahora bien, como $H_{i,j} = \langle e_i, He_j\rangle$ con $i, j = 1, \dots, n$ y usando que $\omega_i(\cdot) \in B_+^*$ es tal que $\omega_i(e_j) = 0$, cuando $i \neq j$. Obtenemos que $\omega_i(He_j) \leq 0$, es decir, $H_{i,j} \leq 0$, para cada $i \neq j$. Esto demuestra que la N_u-disipatividad de H implica que $Hu \geq 0$ y $H_{ij} \leq 0$ para cada $i \neq j$.

Recíprocamente si $Hu \geq 0$ y $H_{ij} \leq 0$ con $i \neq j$, entonces dados $a \in B_+$ y $\omega \in B_+^*$ tales que $\omega(a) = 0$.

Tenemos que $a = \sum_{j=1}^n a_j e_j$ con $a_j \geq 0$ y

$$\omega_i(Ha) = \langle e_i, \sum_{j=1}^n a_j He_j\rangle = \sum_{j=1}^n a_j\langle e_i, He_j\rangle = \sum_{j=1}^n a_j H_{i,j}.$$

Por otro lado, como $\omega \in B_+^*$, entonces $\omega(\cdot) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\omega_i(\cdot)$. Luego, se cumple que

$$0 \leq \omega(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\omega_i(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \lambda_i$$

para toda $i = j$. Además,

$$0 = \omega(a) \Leftrightarrow \lambda_i a_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Ya que $\omega_i(a) = a_i$ para toda $i = 1, \dots, n$. Finalmente,

$$\omega(Ha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\omega_i(Ha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n a_j H_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i a_i H_{i,i} + \sum_{i\neq j} \lambda_i a_j H_{i,j}\right) \leq 0.$$

Por lo tanto, H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

De está manera, tenemos por el corolario 3.1 que H es N_u-disipativo. □

II) *Para $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, se cumple que H es N_u-disipativo si y sólo si*

$$H_{i,j} \leq 0, \ \text{con } i \neq j \quad y \quad \sum_{j=1}^{n} H_{i,j} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Como $u = \sum_{j=1}^n e_j$, obtenemos que $Hu = \sum_{j=1}^n He_j$. Luego,

$$(Hu)_i = \langle e_i, Hu\rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} He_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle e_i, He_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} H_{i,j}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

De aquí que H es N_u-disipativo si y sólo si $\sum_{j=1}^n H_{i,j} \geq 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $H_{i,j} \leq 0$ con $i \neq j$. □

III) *Para $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que H es $\hat{N}_u$-disipativo si y sólo si*

$$H_{i,j} \leq 0, \ \text{con } i \neq j \quad y \quad \sum_{j=1}^{n} H_{i,j} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Por Corolario 3.2, sabemos que H es $\hat{N}_u$-disipativo si y sólo si $Hu = 0$ y H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal. Por lo que si H es $\hat{N}_u$-disipativo,

$$0 = (Hu)_i = \langle e_i, Hu\rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} He_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle e_i, He_j, \rangle = \sum_{j=1}^{n} H_{i,j}$$

para toda $i = 1, \ldots n$.

Además, para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $\omega_i(He_j) \leq 0$ pues $\omega_i(\cdot) \in B_+^*$ y $\omega_i(e_j) = 0$ cuando $i \neq j$. Es decir, $H_{i,j} \leq 0$ cuando $i \neq j$.

Recíprocamente, si suponemos que $H_{i,j} \leq 0$ con $i \neq j$. Entonces, para cualquier $\omega \in B_+^*$ y $a \in B_+$, tales que $\omega(a) = 0$ tenemos por la demostración de (I) que

$$\omega(Ha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i(Ha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j H_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i a_i H_{i,i} + \sum_{i \neq j} \lambda_i a_j H_{i,j} \right) \leq 0$$

Con lo cual, concluimos que H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Además,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} H_{i,j} = (Hu)_i$$

para toda $i = 1, \ldots, n$, es decir, $Hu = 0$. Por lo tanto, H es $\hat{N}_u$-disipativo. □

IV) *Cuando $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la norma $\|\cdot\|_u$ coincide con la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Primero, observemos que si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces por la proposición 3.3, obtenemos que

$$\begin{aligned} ||a||_u &= \text{ínf}\,\{\lambda \geq 0 : a \in [-\lambda u, \lambda u]\} \\ &= \text{ínf}\,\{\lambda \geq 0 : -\lambda u \leq a \leq \lambda u\} \\ &= \text{ínf}\,\{\lambda \geq 0 : a + \lambda u \geq 0 \text{ y } \lambda u - a \geq 0\} \end{aligned}$$

Y como $\lambda u = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$, tenemos que

$$\lambda u - a \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - a_i \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq a_i \quad \text{y} \quad a + \lambda u \geq 0 \Leftrightarrow a_i + \lambda \geq 0 \Leftrightarrow a_i \geq -\lambda$$

para toda $i = 1, \ldots, n$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} ||a||_u &= \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : |a_i| \leq \lambda, \forall i = 1, \ldots, n\} \\ &= \text{máx}\{|a_i| : i = 1, \ldots, n\} \\ &= ||a||_\infty \end{aligned}$$

□

v) *Sea S una matriz sub-estocástica de tamaño $n \times n$ con entradas reales, es decir, una matriz S tal que $S_{i,j} \geq 0$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} S_{i,j} \leq 1$. Si $c \geq n$, entonces la matriz $H = cI + S$ es tal que para $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ el operador definido por H es $|| \cdot ||_u$-disipativo.*

Demostración. Primero, se cumple que

$$H_{i,i} = c + S_{i,i} \quad \text{y} \quad H_{i,j} = S_{i,j} \text{ con } i \neq j.$$

Ahora bien, dada $a \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $\omega \in d||a||_u$, si y sólo si $\omega \in d||a||_\infty$. Además $\omega \in d||a||_\infty$ si y sólo si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ es tal que $0 \leq \omega_i \leq 1$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $\omega(a) = ||a||_\infty$.

En consecuencia,

$$\omega(Ha) = c\omega(a) + \omega(Sa) = c||a||_\infty + \omega(Sa)$$

pero

$$\omega(Sa) = \sum_{i,j} \omega_i S_{i,j} a_j = \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) a_j \geq -\sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) |a_j|.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \omega(Ha) &\geq c||a||_\infty - \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) |a_j| \\ &\geq c||a||_\infty - \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) ||a||_\infty \\ &= \left(c - \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) \right) ||a||_\infty \\ &\geq (c - n)||a||_\infty \geq 0. \end{aligned}$$

Ya que, $0 \leq \sum_j \sum_i \omega_i S_{i,j} \leq \sum_j \sum_i S_{i,j} \leq \sum_j = n$.

Finalmente, por el teorema 3.3, concluimos que H es $\|\cdot\|_\infty$-disipativo. □

Para el siguiente ejemplo, tengamos presente el siguiente concepto.

Definición 3.14. *Un espacio vectorial normado es estrictamente convexo si para cualesquiera vectores a, b distintos con $\|a\| = \|b\| = 1$, se cumple que $\|ta + (1-t)b\| < 1$, para toda $t \in (0,1)$.*

Ejemplo 3.2.2. *Sea B un espacio de Hilbert real. Entonces el subdiferencial de la norma en cada $a \in B$ con $\|a\| = 1$, consta de a como único elemento. Además, H es $\|\cdot\|$-disipativo si y solo si $\langle a, Ha\rangle \geq 0$ para cada $a \in D(H)$.*

Demostración. Primero observamos que

$$d\|a\| = \left\{\omega \in B_1^* : \omega(a) = \|a\|\right\}$$

Pues $\omega \in d\|a\|$ si y sólo si $\omega \in B^*$ tal que $\omega(a) = \|a\|$ y $\omega(b) \leq \|b\|$ para todo $b \in B$. De está manera, $\|\omega\| \leq 1$.

Recíprocamente, si $\|\omega\| \leq 1$, entonces $\omega(b) \leq \|\omega\|\,\|b\| \leq \|b\|$ para toda $b \in B$. Además, dado que $\|a\| = 1$, tenemos que si $\omega \in d\|a\|$, entonces $\|\omega\| = 1$.

Por ser B espacio de Hilbert, B^* es isomorfo a B y es estrictamente convexo. Por lo cual dados $\omega, \eta \in d\|a\|$ con $\omega \neq \eta$ tenemos que $\|\omega\| = \|\eta\| = 1$ y $\omega(a) = \eta(a) = 1$.

Así para cada $\alpha \in (0,1)$ se cumple que

$$1 > \|\alpha\omega + (1-\alpha)\eta\| \geq |\alpha\omega(a) + (1-\alpha)\eta(a)| = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

Lo cual es una contradicción. De aquí que existe un único elemento en $d\|a\|$.

Como, $\|\omega\| = \|a\| = 1$ y $\omega(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|^2 = \|a\|$. Entonces, el único elemento de $d\|a\|$ es $\omega(x) = \langle a, x\rangle$. Finalmente, H es $\|\cdot\|$-disipativo si y solo si $\omega(Ha) \geq 0$ para cada $\omega \in d\|a\|$ y $a \in D(H)$. Por lo anterior, esto es equivalente a tener que $\langle a, Ha\rangle \geq 0$ para cada $a \in D(H)$. □

3.2.2. Los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida para semigrupos positivos

A continuación, damos las versiones de los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y de Hille-Yosida para C_o-semigrupos positivos.

Para esto, consideramos $H\colon D(H) \subset B \to B$ un operador lineal densamente definido y notamos que si $a \in B_+$ y definimos

$$a_\varepsilon := \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon S_t a\, dt.$$

Entonces $a_\varepsilon \in D(H) \cap B_+$ y además, $a_\varepsilon \to a$ según la norma en B conforme $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto, $D(H) \cap B_+$ es norma-denso en B_+.

Luego, si H es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo, entonces bajo las hipótesis de los teoremas abajo enunciados, el conjunto resolvente de $-H$,

$$\rho(-H) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \colon (\lambda I - (-H))^{-1} \text{ es un operador lineal acotado en } B\},$$

contiene al intervalo $(0, \infty)$. De aquí que $I + \alpha H$, con $\alpha > 0$, es invertible y por el teorema 5.3 de 1.5 en [Paz83] sabemos que para cada $n \geq 1$,

$$(I + \alpha H)^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} S_{\alpha t}\, dt. \tag{3.6}$$

Con lo cual, $(I + \alpha H)^{-1}$ es positivo, es decir, las resolventes son positivas.

Recíprocamente, si las resolventes son positivas, entonces por la igualdad:

$$S_t a = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} H \right)^{-n} a.$$

Concluimos que el semigrupo S es positivo.

Teorema 3.6. *Sea $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ un espacio de Banach ordenado para el cual la norma es monótona y la norma de operadores en $\mathcal{L}(B, B)$ es positivamente alcanzada. Además, consideremos N la media-norma canónica en B, junto con $M, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $M \geq 1, \beta > 0$ y $\beta\gamma < 1$. Entonces son equivalentes:*

1) *H es el generador de un C_o-semigrupo positivo S con $\|S_t\| \leq Me^{\gamma t}$, para toda $t > 0$.*

2) *H es un operador lineal densamente definido y cerrado según la norma tal que cumple las condiciones del rango y de disipatividad, dadas por:*

   I) *$R(I + \beta H) = B$.*

   II) *$N\left((I + \alpha H)^n a\right) \geq (1 - \alpha\gamma)^n M^{-1} N(a)$.*

para cada $a \in D(H^n)$, para toda $n \geq 1$ y para cualquier $\alpha \in (0, \beta]$.

Demostración. Primero supongamos la condición 1) así las propiedades de ser H densamente definido, cerrado según la norma y la condición del rango, $R(I + \beta H) = B$, se siguen directo del teorema de Feller-Miyadera-Phillips estándar, véase teorema 3.1. Por otro lado, usando que S es positivo, obtenemos que

$$\begin{aligned} N(S_t a) &= \inf\{\|b\| : b \geq S_t a\} \\ &\leq \inf\{\|S_t c\| : c \geq a\} \\ &\leq Me^{\gamma t} \inf\{\|c\| : c \geq a\} \\ &= Me^{\gamma t} N(a). \end{aligned}$$

Donde la primer desigualdad se da al tomar $b = S_t c$ con $c \geq a$, pues de está manera $b \geq S_t a$.

Sea $0 < \alpha \leq \beta$, en consecuencia para cada $a \in D(H)$, al utilizar (3.6) obtenemos para cada $n \geq 1$,

$$(I + \alpha H)^{-n} a = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} S_{\alpha t} a\, dt.$$

Luego, utilizando la sublinealidad y continuidad de la media-norma canónica N, tenemos

$$\begin{aligned} N\left((I + \alpha H)^{-n} a\right) &\leq \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} N(S_{\alpha t} a)\, dt \\ &\leq M(1 - \alpha\gamma)^{-n} N(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N\left((I+\alpha H)^n a\right) \geq \frac{(1-\alpha\gamma)^n N(a)}{M}.$$

Ahora bien, partiendo de la condición 2) si $(I+\beta H)a = 0$, entonces

$$0 = N(\pm(I+\beta H)a) \geq \frac{(1-\beta\gamma)N(\pm a)}{M} \geq 0.$$

Luego, $N(\pm a) = 0$. De aquí que $a = 0$, ya que la norma es monótona por hipótesis y esto implica que el cono convexo positivo B_+ es propio.

De aquí que, $(I+\beta H)$ es un operador lineal inyectivo y suprayectivo por la hipótesis 2) inciso I), por lo tanto es un operador invertible.

Además, dada $a \in B_+$ implica que $N(-a) = 0$ y al usar el inciso II) con $(I+\beta H)^n\big((I+\beta H)^{-n}(-a)\big) = -a$, tenemos que

$$0 = N(-a) \geq \frac{(1-\beta\gamma)^n N(-(I+\beta H)^{-n}a)}{M} \geq 0.$$

Por lo cual,$-(I+\beta H)^{-n}a \leq 0$, es decir, $(I+\beta H)^{-n}a \in B_+$. Es decir, $(I+\beta H)^{-n}$ es un operador positivo para cada $n \geq 1$.

Ahora bien, usando que $a \in B_+$ y la norma, $\|\cdot\|_B$, es monótona en B, concluimos que

$$\begin{aligned} \|(I+\beta H)^{-n}a\| &= N\big((I+\beta H)^{-n}a\big) \\ &\leq M(1-\beta\gamma)^{-n}N(a) \\ &= M(1-\beta\gamma)^{-n}\|a\|. \end{aligned}$$

Aquí estamos utilizando la hipótesis II) y la equivalencia dada por el teorema 3.5

Por lo tanto, por ser la norma de operadores positivamente alcanzada (ver definición 2.13) tenemos

$$\|(I+\beta H)^{-n}\| \leq M(1-\beta\gamma)^{-n}.$$

Por último, para establecer que $R(I+\alpha H) = B$ y que las resolventes $(I+\alpha H)^{-n}$ existen, son positivas y satisfacen

$$\|(I+\alpha H)^{-n}\| \leq M(1-\alpha\gamma)^{-n}$$

para toda $\alpha \in (0,\beta]$, usamos un argumento de perturbación. Basta demostrar que existe $\delta > 0$, tal que la condición del rango $R(I+\alpha H) = B$ se cumple para $\left|\beta-\alpha\right| < \delta$, ya que el intervalo $(0,\beta]$ puede ser cubierto por una cantidad finita de intervalos de longitud menor o igual a δ.

Primero, observamos que el operador $\beta H(I+\beta H)^{-1}$ es acotado, para cada $\beta > 0$. Como la siguiente identidad se cumple:

$$\beta H(I+\beta H)^{-1} = \Big(-I+(I+\beta H)\Big)\Big(I+\beta H\Big)^{-1} = -(I+\beta H)^{-1} + I.$$

Para cada $b \in B$,

$$\left\|\beta H(I+\beta H)^{-1}b\right\| = \left\|I-(I+\beta H)^{-1}b\right\| \leq \|b\| + M(1-\beta\gamma)^{-1}\|b\| = \Big(1+M(1-\beta\gamma)^{-1}\Big)\|b\|.$$

Consecuentemente, el operador $H(I+\beta H)^{-1}$ es acotado, con

$$\|H(I+\beta H)^{-1}\| \leq \beta^{-1}\Big(1+M(1-\beta\gamma)^{-1}\Big)$$

Por otro lado, para $\alpha \in (0, \beta]$, se tiene que

$$\begin{aligned} I + \alpha H &= I + \beta H - \beta H + \alpha H \\ &= I + \beta H + (\alpha - \beta)H \\ &= \Big(I + (\alpha - \beta)H\big(I + \beta H\big)^{-1}\Big)\big(I + \beta H\big). \end{aligned}$$

De aquí que $(I + \alpha H)$ es invertible si y sólo si $\Big(I + (\alpha - \beta)H\big(I + \beta H\big)^{-1}\Big)$ es invertible. Ahora bien, tenemos que el inverso de un operador de la forma $(I + tA)$ tiene la forma

$$(I + tA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-tA)^n,$$

y la serie converge si $\|tA\| < 1$, es decir, si $\|A\| < 1/t$, lo cual es equivalente a tener $t < \|A\|^{-1}$.

Entonces, el operador

$$\Big(I + (\alpha - \beta)H\big(I + \beta H\big)^{-1}\Big)$$

es invertible si se satisface que

$$\big|\beta - \alpha\big| < \beta\Big(1 + M(1 - \beta\gamma)^{-1}\Big)^{-1} < \Big\|H(I + \beta H)^{-1}\Big\|^{-1}.$$

Con lo cual basta definir $\delta = \beta\Big(1 + M(1 - \beta\gamma)^{-1}\Big)^{-1}$.

Esto demuestra que existe el operador $(I + \alpha H)^{-1}$ y que se cumple la condición, $R(I + \alpha H) = B$. Además, se tiene que $(I + \alpha H)^{-n}$ es positivo para cada $n \geq 1$, ya que si $a \in B_+$, entonces

$$0 = N(-a) \geq (1 - \alpha\gamma)^n M^{-1} N(-(I + \alpha H)^{-n} a) \geq 0.$$

De esta manera, $-(I + \alpha H)^{-n} a \leq 0$, es decir, $(I + \alpha H)^{-n} a \in B_+$.

Más aún, para cada $a \in B_+$, por ser la norma monótona y el inciso II) tenemos

$$\begin{aligned} \|(I + \alpha H)^{-n} a\| &= N((I + \alpha H)^{-n} a) \\ &\leq M(1 - \alpha\gamma)^{-n} N(a) \\ &= M(1 - \alpha\gamma)^{-n} \|a\|. \end{aligned}$$

Con lo cual, como la norma de operadores es positivamente alcanzada, obtenemos

$$\|(I + \alpha H)^{-n}\| \leq M(1 - \alpha\gamma)^{-n},$$

para cada $\alpha \in (0, \beta]$.

Por lo tanto, H genera un C_o-semigrupo S tal que $\|S_t\| \leq Me^{\gamma t}$, en virtud del teorema 3.1 de Feller-Miyadera-Phillips, con S positivo pues las resolventes $(I + \alpha H)^{-n}$ son positivas para toda $n \geq 1$. □

Observación 3.2.4. *Ninguna hipótesis sobre el espacio de Banach ordenado,* $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$*, se utiliza en la implicación* 1) $\Rightarrow$ 2).

A partir del teorema 3.6, obtenemos una consecuencia inmediata para los semigrupos de contracción, que es análoga al teorema 3.2 de Hille-Yosida.

Corolario 3.3. *Sea* $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ *un espacio de Banach ordenado para el cual la norma es monótona y la norma de operadores en* $\mathcal{L}(B, B)$ *es positiva alcanzada. Entonces, son equivalentes:*

1) H *genera un* C_o*-semigrupo positivo de contracciones.*

2) H *es (norma cerrado) densamente definido según la norma,* N*-disipativo y*

$$R(I + \alpha H) = B$$

para alguna $\alpha > 0$.

Demostración. Por el teorema 3.6, basta tomar $M = 1$ y $\gamma = 0$. Así la N-disipatividad es equivalente a:

$$N((I + \alpha H)a) \geq N(a) \quad , \quad a \in D(H).$$

Por lo que iterando, concluimos que

$$N((I + \alpha H)^n a) \geq N(a) \quad , \quad a \in D(H^n), n \geq 1.$$

Con lo cual, tenemos la equivalencia de las condiciones 1) y 2). □

Capítulo 4

Semigrupos cuánticos de Markov

En este capítulo, introducimos una clase particular de operadores en espacios de Hilbert, que generalizan a los operadores positivos dados en la definición B.5, los cuales son utilizados para generar semigrupos como los dados en la sección 3.1.
En lo que sigue, siempre consideraremos H un espacio de Hilbert complejo separable con producto interno lineal conjugado en la primera entrada.

4.1. Operadores completamente positivos

Definición 4.1. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert. Decimos que un operador es Completamente Positivo (CP) si es una función $\Phi : B(H_1) \to B(H_2)$ de la forma*

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \rho E_i^* \tag{4.1}$$

donde $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ son operadores $E_i \in B(H_1, H_2)$, tal que la serie converge fuertemente. A la representación dada en (4.1) se le conoce como representación de Krauss.

Observación 4.1.1. *La representación de Krauss no es única.*

Las propiedades que a continuación se muestran sobre los operadores CP pueden consultarse en [Fan99].

Definición 4.2. *Sea ω un funcional lineal positivo sobre $B(H)$, es decir, $\omega\colon B(H)_+ \to [0, \infty]$ tal que $\omega(I) < \infty$. Decimos que ω es normal si*

$$\sup_{\alpha} \omega(x_\alpha) = \omega(\sup_{\alpha} x_\alpha)$$

con $(x_\alpha)_\alpha$ una red creciente en el cono de los operadores positivos $B(H)_+$.

Definición 4.3. *Una aplicación lineal $T\colon B(H) \to B(H)$ es n-positiva para $n \in \mathbb{N}$, si para toda familia de elementos $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ en $B(H)$, se cumple que*

$$\sum_{p,q=1}^{n} b_p^* T(a_p^* a_q) b_q \geq 0.$$

La definición 4.3 se relaciona con los operadores CP mediante los siguientes resultados.

Proposición 4.1. *Sea $T: B(H) \to B(H)$ una aplicación lineal. Entonces T es CP si y solo si para cada $n \geq 1$ y todos $a_1, \ldots, a_n \in B(H)$ y $u_1, \ldots, u_n \in H$ se cumple que*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle u_i, T(a_i^* a_j) u_j \rangle \geq 0.$$

Por otro lado, dada una transformación lineal $T: B(H) \to B(H)$ definimos para cada $n \geq 1$, el mapeo lineal $T_n: B(H) \otimes M_{nxn} \equiv M_{n\times n}(B(H)) \to M_{n\times n}(B(H))$, cuya entrada i, j está dada por:

$$T_n(a)_{ij} = T(a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{4.2}$$

Con el operador T_n, podemos dar la siguiente caracterización de los operadores CP.

Proposición 4.2. *Sea $T: B(H) \to B(H)$ un operador lineal. Entonces T es CP si y sólo si para cada $n \geq 1$ el operador T_n definido en (4.2) es positivo.*

Además, en relación directa con la definición 4.2 tenemos el siguiente concepto.

Definición 4.4. *Sea $T: B(H) \to B(H)$ una aplicación lineal positiva. Decimos que T es normal si para toda red creciente $(x_\alpha)_\alpha \subset B(H)_+$ con $x = \sup_\alpha x_\alpha \in B(H)_+$, se cumple que*

$$\lim_\alpha \langle u, (Tx_\alpha)u \rangle = \sup_\alpha \langle u, (Tx_\alpha)u \rangle = \langle u, (Tx)u \rangle,$$

para cada u en una subvariedad lineal de H que sea norma-densa en H.

A partir de este concepto, tenemos la siguiente caracterización de operadores completamente positivos.

Teorema 4.1. *Una aplicación lineal $T: B(H) \to B(H)$ es normal y n-positiva para toda $n \in \mathbb{N}$, si y solo si es CP, es decir, si y sólo si tiene una representación de Krauss.*

Además, se puede probar que todo operador CP es positivo sin embargo, el recíproco no es cierto.

Ejemplo 4.1.1. *Sean $H = \mathbb{C}^2$, y $B(H) = M_{2x2}$, el espacio de matrices de tamaño 2 x 2. Entonces tenemos que el mapeo lineal $T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ dado por $T(a) = a^t$, es positivo pero no es 2-positvo y por lo tanto, no es CP.*

Demostración. Primero veamos que T es 1-positivo y en consecuencia es positivo pues para cada $a, b \in B(H)$, se cumple que el operador satisface que $b^*T(a^*a)b \geq 0$ si y sólo si $\langle u, b^*T(a^*a)b \rangle \geq 0$, para cada $u \in H$. Ahora bien, como

$$\langle u, b^*T(a^*a)bu \rangle = \langle bu, T(a^*a)bu \rangle$$

para toda $u \in H$, se tiene que $b^*T(a^*a)b \geq 0$ si y sólo si $\langle v, T(a^*a)v \rangle \geq 0$, para toda $v \in H$.

Así, por definición de matriz adjunta, concluimos que para cualquier $v \in B(H)$ se cumple

$$\begin{aligned}
\langle v, T(a^*a)v \rangle &= \langle v, (a^*a)^t v \rangle \\
&= \langle v, (a^t(a^*)^t)v \rangle \\
&= \langle v, ((\bar{a})^*\bar{a})v \rangle \\
&= \langle \bar{a}v, \bar{a}v \rangle \\
&= ||\bar{a}v||^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

donde $\bar{a}$ es la matriz conjugada de a. Esto demuestra que T es positivo.

Sin embargo, T no es 2-positivo ya que al considerar la matriz de operadores

$$b = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde E_{ij} es la matriz 2×2 con ceros en todas las entradas excepto la entrada i, j que es igual a 1. Se tiene que $b = 2(b/2)$ con la matriz $b/2$ simétrica, auto-adjunta y determina una proyección. Esto se sigue del hecho de que para $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{C}^4$, vale que

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(u_1+u_4) \\ 0 \\ 0 \\ 1/2(u_1+u_4) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2(u_1+u_4) \\ 0 \\ 0 \\ 1/2(u_1+u_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(u_1+u_4) \\ 0 \\ 0 \\ 1/2(u_1+u_4) \end{pmatrix}$$

Es decir, $(b/2)^*(b/2) = (b/2)^2 = (b/2)$. En consecuencia, la matriz b también es un operador positivo. Sin embargo, la matriz

$$T_2(b) = (T(E_{ij}))_{1\leq i,j\leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es un operador positivo ya que es simétrica, auto-adjunta pero tiene como valores propios a -1 y 1, con lo cual no es una matriz positiva semidefinida, ver proposición B.5. □

Como consecuencia del teorema 4.1, obtenemos:

Proposición 4.3. *Sea $(T_m)_{m\geq 1}$ una sucesión de operadores CP con $T_m : B(H) \to B(H)$ tal que para cada $A \in B(H)$, la sucesión $(T_m(A))_{m\geq 1}$ converge débilmente. Entonces el mapeo lineal $T : B(H) \to B(H)$ dado por*

$$T(A) = \lim_{m\to\infty} T_m(A)$$

es completamente positivo.

Demostración. Por la proposicíon 4.1 y el teorema 4.1, es suficiente notar que

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \langle u_i, T(a_i^* a_j)u_j\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{1\leq i,j\leq n} \langle u_i, T_m(a_i^* a_j)u_j \geq 0$$

para cada $n \geq 1$ y para todo $a_1, \ldots, a_n$ y $u_1, \ldots, u_n$ en $B(H)$. □

Definición 4.5. *Decimos que una función lineal $\Psi : B(H_1) \to B(H_2)$ preserva la traza si para todo $\rho \in B(H_1)$, se cumple que $Tr\Psi(\rho) = Tr(\rho)$.*

Los operadores CP, nos sirven para definir un tipo especial de semigrupos de operadores.

Definición 4.6. *Un semigrupo cuántico de Markov (SCM) es un semigrupo $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ de contracciones completamente positivas que preservan la traza sobre $B(H)$ y que es uniformemente continuo, es decir, la familia de operadores $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo que satisface las siguientes propiedades:*

1) Para cada $\rho \in B(H)$, se tiene que $\|\mathcal{T}_t\rho\| \leq \|\rho\|$,

2) $Tr(\mathcal{T}_t\rho) = Tr(\rho)$ para toda $t \geq 0$ y cada $\rho \in B(H)$,

3) El operador $\mathcal{T}_t$ es completamente positivo para cada $t \geq 0$,

4) $\lim_{t\to 0^+} \sup_{\|\rho\|=1} \|\mathcal{T}_t\rho - \rho\| = 0$.

Además, el semigrupo dual de $\mathcal{T}$, denotado por $\mathcal{T}^* = (\mathcal{T}_t^*)_{t\geq 0}$, también es un semigrupo sobre $B(H)$ que se define mediante

$$Tr(x\mathcal{T}_t(\rho)) = Tr(\mathcal{T}_t^*(x)\rho)$$

para cada $x, \rho \in B(H)$.

Así el *generador infinitesimal* $\mathcal{L}$ de $\mathcal{T}$ es la derivada del semigrupo $\mathcal{T}_t$ en $t = 0$; éste es un operador lineal en $B(H)$ dado por

$$\mathcal{L}x := \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{T}_t(x) - x}{t}$$

para toda $x \in B(H)$.

Teorema 4.2. *(GKSL.)El generador infinitesimal de un SCM es un operador lineal acotado que tiene la forma*

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{j\geq 1} L_j\rho L_j^* + \rho G^* + G\rho$$

donde $(L_j)_{j=1}^{\infty}$ es una familia de operadores acotados en H, mientras que G es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo de contracciones en H.

Además $\Phi(\rho) = \sum_j L_j\rho L_j^*$, es un operador completamente positivo y la serie converge fuertemente. Este resultado, fue probado de manera independiente por Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan. Su prueba puede consultarse en [Fan99].

Capítulo 5

Ecuaciones maestras no lineales

En este capítulo, consideramos espacios de Hilbert complejos de dimensión finita con el producto interno lineal conjugado en la primera entrada.

5.1. Traza parcial

Sean $\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2, \dots \mathsf{h}_n$ una colección finita de espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{e_{i,j}\}_{1\le j\le d_i} \subset \mathsf{h}_i$ donde d_i es la dimensión de h_i para cada $i = 1 \dots n$. En el espacio de Hilbert dado por el producto tensorial, $\mathsf{h} = \otimes_{i=1}^n \mathsf{h}_i$, definimos los operadores $V_{1,j} : \mathsf{h}_1 \to \mathsf{h}$ y $V_{1,j}^* : \mathsf{h} \to \mathsf{h}_1$ mediante $V_{1,j}u = u \otimes \otimes_{i=2}^n e_{i,j}$ y $V_{1,j}^* \otimes_{i=1}^n f_i = \langle \otimes_{i=2}^n e_{i,j}, \otimes_{i=2}^n f_i \rangle_{\otimes_{i=2}^n \mathsf{h}_i} f_1$, extendemos a todo el espacio h por linealidad.

Proposición 5.1. *Para cada $j = 1, \dots, n$, el operador $V_{1,j}^*$ es el adjunto de $V_{1,j}$.*

Demostración. Sean $u \in \mathsf{h}_1$, $f_i \in \mathsf{h}_i$ con $i = 2, \dots, n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle u \otimes \otimes_{i=2}^n f_i, V_{1,j}u \rangle_{\mathsf{h}} &= \langle u \otimes \otimes_{i=2}^n f_i, u \otimes \otimes_{i=2}^n e_{i,j} \rangle_{\mathsf{h}} \\
&= \langle u, u \rangle_{\mathsf{h}_1} \Pi_{i=2}^n \langle f_i, e_{i,j} \rangle_{\mathsf{h}_i} \\
&= \langle u, u \rangle_{\mathsf{h}_1} \Pi_{i=2}^n \overline{\langle e_{i,j}, f_i \rangle}_{\mathsf{h}_i} \\
&= \left\langle \Pi_{i=2}^n \langle e_{i,j}, f_i \rangle_{\mathsf{h}_i} u, u \right\rangle_{\mathsf{h}_1} \\
&= \left\langle \langle \otimes_{i=2}^n e_{i,j}, \otimes_{i=2}^n f_i \rangle_{\otimes_{i=2}^n \mathsf{h}_i} u, u \right\rangle_{\mathsf{h}_1} \\
&= \left\langle V_{1,j}^*(u \otimes \otimes_{i=2}^n f_i), u \right\rangle_{\mathsf{h}_1} .
\end{aligned}$$

Esta relación se extiende a todo h por linealidad $\square$

Los operadores $V_{1,j}$ y $V_{1,j}^*$, nos sirven para definir la *traza parcial*, que generaliza el concepto de traza de un operador en un espacio de Hilbert dado en la definición B.8.

Como estamos trabajando con espacios de dimensión finita, podemos identificar el espacio de los operadores de clase traza $L_1(\mathsf{h}) = \{X \in B(\mathsf{h})\colon \operatorname{Tr}|X| < \infty\}$, con el espacio $B(\mathsf{h})$ y también tenemos que son isomorfos los espacios dados por el producto tensorial, $\otimes_{i=1}^n B(\mathsf{h})$ y $B(\otimes_{i=1}^n \mathsf{h})$.

En este capítulo, $\|\cdot\|_1$ denota la norma de $L_1(\mathsf{h})$ (norma de la traza), definida mediante $\|X\|_1 := \mathrm{Tr}|X|$. El símbolo $\|\cdot\|$, denotará sin lugar a confusión a la norma de operadores sobre $L_1(\mathsf{h})$ o bien sobre $B(\mathsf{h})$ y también a la norma del espacio de Hilbert h involucrado.

Definición 5.1. *Definimos el operador completamente positivo traza parcial $Tr_{[2,\cdots,n]} : L_1(\mathsf{h}) \to L_1(\mathsf{h}_1)$, mediante $Tr_{[2,\cdots,n]}X = \sum_{1\leq j\leq n} V_{1,j}^* X V_{1,j}$*

Proposición 5.2. *Sea $X = \otimes_{i=1}^n X_i \in L_1(\mathsf{h})$. Entonces, $Tr_{[2,\cdots,n]}X = Tr\left(\otimes_{i=2}^n X_i\right) X_1$*

Demostración. Sean $X = \otimes_{i=1}^n X_i \in L_1(\mathsf{h})$ y $u \in \mathsf{h}_1$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{[2,\cdots,n]}Xu &= \sum_{1\leq j\leq n} \left(V_{1,j}^* X V_{1,j}\right) u \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} V_{1,j}^* X \left(u \otimes \otimes_{i=2}^n e_{i,j}\right) \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} V_{1,j}^* \left(X_1 u \otimes \otimes_{i=2}^n X_i e_{i,j}\right) \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} \langle \otimes_{i=2}^n e_{i,j}, \otimes_{i=2}^n X_i e_{i,j}\rangle X_1 u \\
&= \mathrm{Tr}\left(\otimes_{i=2}^n X_i\right) X_1 u
\end{aligned}
$$

para cada $u \in \mathsf{h}_1$. □

5.2. Ecuaciones maestras no lineales

Consideraremos ecuaciones maestras no lineales de la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_t &= \mathcal{L}_0\rho_t + \mathcal{L}_{\rho_t}\rho_t, \\
\rho_{t=0} &= \rho_0,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

donde $\mathcal{L}_0$ es un generador GKSL acotado pues h tiene dimensión finita, es decir, de la forma dada por el teorema 4.2 y $\mathcal{L}\colon L_1(\mathsf{h}) \to \mathrm{GKSL}(L_1(\mathsf{h}))$, con h un espacio de Hilbert complejo de dimensión finita, es una aplicación de $L_1(\mathsf{h})$ en los generadores GKSL actuando sobre $L_1(\mathsf{h})$ que satisface las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_\rho\| &\leq c_1(\|\rho\|_1), \\
\|\mathcal{L}_\rho - \mathcal{L}_\eta\| &\leq c_2(\|\rho\|_1, \|\eta\|_1)\|\rho - \eta\|_1,
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

para cada $\rho, \eta \in L_1(\mathsf{h})$. Las funciones c_j con $j = 1, 2$, se suponen definidas en todas partes y monótonas crecientes.

Ejemplo 5.2.1. *El ejemplo más simple es el caso cuando $\mathcal{L}_2$ es el generador de un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo de la forma $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_{1t} \otimes \mathcal{T}_{2t}$, i.e., $\mathcal{L}_2 = \tilde{\mathcal{L}}_1 \otimes \tilde{\mathcal{L}}_2$, con $\tilde{\mathcal{L}}_j$, $j = 1, 2$, un generador GKSL acotado sobre $L_1(\mathsf{h})$.*

Demostración. Por la proposición 5.2, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\rho\sigma &= \mathrm{Tr}_2(\mathcal{L}_2(\sigma\otimes\rho)) \\ &= \mathrm{Tr}_2(\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma\otimes\tilde{\mathcal{L}}_2\rho) \\ &= (\mathrm{Tr}\tilde{\mathcal{L}}_2\rho)\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma.\end{aligned}$$

□

Proposición 5.3. *El ejemplo 5.2.1 cumple con las dos condiciones dadas en* (5.2)

Demostración. Primero, veamos que es válida la desigualdad:

$$||\mathcal{L}_\rho|| \le c_1(||\rho||_1)$$

Para esto, observamos que

$$\begin{aligned}||\mathcal{L}_\rho\sigma||_1 &= ||\mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{L}}_2\rho)\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma||_1 \\ &= ||\mathrm{Tr}(Id\tilde{\mathcal{L}}_2\rho)\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma||_1 \\ &= |\mathrm{Tr}(Id\tilde{\mathcal{L}}_2\rho)|\,||\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma||_1 \\ &\le ||Id||\,||\tilde{\mathcal{L}}_2\rho||_1\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\sigma||_1 \\ &\le ||\tilde{\mathcal{L}}_2||\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\rho||_1\,||\sigma||_1\end{aligned}$$

Entonces $||\mathcal{L}_\rho|| \le ||\tilde{\mathcal{L}}_2||\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\rho||_1$. Por lo que basta definir $c_1(||\rho||_1) = ||\tilde{\mathcal{L}}_2||\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\rho||_1$.

Similarmente, para verificar la desigualdad

$$||\mathcal{L}_\rho - \mathcal{L}_\eta|| \le c_2(||\rho||_1, ||\eta||_1)||\rho-\eta||_1$$

usamos que para cada $\sigma \in L_1(\mathsf{h})$,

$$\begin{aligned}||(\mathcal{L}_\rho - \mathcal{L}_\eta)\sigma||_1 &= ||\mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{L}}_2\rho)\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma - \mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{L}}_2\eta)\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma||_1 \\ &= |\mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{L}}_2\rho - \tilde{\mathcal{L}}_2\eta)|\,||\tilde{\mathcal{L}}_1\sigma||_1 \\ &\le ||\tilde{\mathcal{L}}_2\rho - \tilde{\mathcal{L}}_2\eta||_1\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\sigma||_1 \\ &\le ||\tilde{\mathcal{L}}_2||\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\rho-\eta||_1\,||\sigma||_1\end{aligned}$$

Entonces $||\mathcal{L}_\rho - \mathcal{L}_\eta|| \le ||\tilde{\mathcal{L}}_2||\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||\,||\rho-\eta||_1$ y basta definir $c_2(||\rho||_1, ||\eta||_1) = ||\tilde{\mathcal{L}}_2||\,||\tilde{\mathcal{L}}_1||$. □

5.3. Existencia local y unicidad de soluciones

Bajo las hipótesis de (5.2) veremos que la ecuación integral dada por

$$x_t = \mathcal{T}_{0,t}x + \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\,ds, \tag{5.3}$$

tiene una única solución; donde $x_0 \in L_1(\mathsf{h}), \mathcal{T}_{0,t}$ es el semigrupo generado por $\mathcal{L}_0$ y por comodidad escribiremos $\mathcal{L}(x_s)$ en lugar de $\mathcal{L}_{x_s}$.

Teniendo presente la fórmula de Leibniz, teorema 9.3 de la sección 9.1 de [Pro98]:

$$\frac{d}{dx}\int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x,t)\,dt = f(x,h_1(x))h_1'(x) - f(x,h_0(x))h_0'(x) + \int_{h_0(x)}^{h_1(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)dt,$$

tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Toda solución de* (5.3) *es solución de la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_t &= \mathcal{L}_0(x_t) + \mathcal{L}(x_t)x_t \\ x_{t=0} &= x_0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Demostración. Utilizando la fórmula de Leibniz para derivar en (5.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_t &= \mathcal{L}_0(\mathcal{T}_{0,t}x_0) + \int_0^t \mathcal{L}_0\Big(\mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\Big)\,ds + \mathcal{T}_{0,(t-t)}\mathcal{L}(x_t)x_t \\ &= \mathcal{L}_0(\mathcal{T}_{0,t}x_0) + \mathcal{L}_0\Big[\int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\,ds\Big] + \mathcal{L}(x_t)x_t \\ &= \mathcal{L}_0\Big[\mathcal{T}_{0,t}x_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\,ds\Big] + \mathcal{L}(x_t)x_t \\ &= \mathcal{L}_0(x_t) + \mathcal{L}(x_t)x_t. \end{aligned}$$

Además,

$$x_{t=0} = \mathcal{T}_{0,0}x_0 + \int_0^0 \mathcal{T}_{0,-s}\mathcal{L}(x_s)x_s\,ds = Id x_0 = x_0.$$

Con lo cual concluimos la demostración. □

Siguiendo el teorema X.72 de la sección X.13 de [MB75], para $T > 0$ consideraremos el espacio definido por

$$X_T := L_1(\mathsf{h})_T = \left\{x : [0,T] \to L_1(\mathsf{h}) \text{ tal que } x \text{ es continua y } \|x\|_T = \sup_{t\in[0,T)} \|x(t)\|_1 < \infty\right\}$$

Teorema 5.2. *La aplicación $\mathcal{T}$ dada por*

$$(\mathcal{T}x)_t = \mathcal{T}_{0,t}x + \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\,ds,$$

es una contracción en el subespacio

$$X_{T,\varepsilon,x_0} = \left\{x \in X_T : x(0) = x_0 \ y\ \|x - \mathcal{T}_{0,(\cdot)}\,x_0\|_T \le \varepsilon\right\}$$

para cada $\varepsilon > 0$, $x_0 \in L_1(\mathsf{h})$ y $T > 0$ suficientemente pequeña. Por comodidad, el símbolo $\mathcal{T}_t x$, denotará a $(\mathcal{T}x)_t$.

La demostración de este resultado, requiere de varios lemas.

Lema 5.1. *Para cada* $x \in X_{T,\varepsilon,x_0}$*, la aplicación* $s \mapsto \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s$ *es continua como función* $L_1(\mathsf{h})$*-valuada. Por lo tanto, la integral*

$$\int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\, ds$$

es de Riemann. La aplicación $t \mapsto \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\, ds$*, es continua y* $\mathcal{T}_{(\cdot)}x \in X_T$.

Demostración. Primero, notamos que por las propiedades de la norma en $L_1(\mathsf{h})$ se tiene que el predual es contractivo, i. e.

$$\|\mathcal{T}_t\rho\|_1 = \mathrm{Tr}|\mathcal{T}_t\rho| = \mathrm{Tr}\mathcal{T}_t\rho = \mathrm{Tr}\Big(T_t(Id)\rho\Big) \leq \|T_t(Id)\|\,\|\rho\|_1 = \|Id\|\,\|\rho\|_1 = \|\rho\|_1,$$

donde $(T_t)_{t\geq 0}$ es el semigrupo dual (o directo), el cual preserva la identidad.

Denotando por $C_{i,\varepsilon}$ con $i = 1,2$, a las constantes en (5.2) con argumento $\|x\|_T + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, por la propiedad de semigrupo tenemos

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{T}_{0,(t-s-h)}\mathcal{L}(x_{s+h})x_{s+h} - \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 &= \Big\|\mathcal{T}_{0,(t-(s+h))}\Big(\mathcal{L}(x_{s+h})x_{s+h} - \mathcal{T}_{0,h}\mathcal{L}(x_s)x_s\Big)\Big\|_1 \\
&\leq \Big\|\mathcal{L}(x_{s+h})x_{s+h} - \mathcal{T}_{0,h}\mathcal{L}(x_s)x_s + \mathcal{L}(x_s)x_s - \mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 \\
&\leq \|\mathcal{L}(x_{s+h})x_{s+h} - \mathcal{L}(x_s)x_s\|_1 + \Big\|\mathcal{T}_{0,h}\mathcal{L}(x_s)x_s - \mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 \\
&= \|\mathcal{L}(x_{s+h})x_{s+h} - \mathcal{L}(x_{s+h})x_s + \mathcal{L}(x_{s+h})x_s - \mathcal{L}(x_s)x_s\|_1 \\
&+ \Big\|(\mathcal{T}_{0,h} - Id)\,\mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 \\
&\leq \|\mathcal{L}(x_{s+h})x_{s+h} - \mathcal{L}(x_{s+h})x_s\|_1 + \|\mathcal{L}(x_{s+h})x_s - \mathcal{L}(x_s)x_s\|_1 \\
&+ \Big\|(\mathcal{T}_{0,h} - Id)\,\mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 \\
&= \Big\|\mathcal{L}(x_{s+h})\Big(x_{s+h} - x_s\Big)\Big\|_1 + \Big\|\Big(\mathcal{L}(x_{s+h}) - \mathcal{L}(x_s)\Big)x_s\Big\|_1 \\
&+ \Big\|(\mathcal{T}_{0,h} - Id)\,\mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 \\
&\leq c_1\Big(\|x_{s+h}\|_1\Big)\,\|x_{s+h} - x_s\|_1 + c_2\Big(\|x_{s+h}\|_1, \|x_s\|_1\Big)\,\|x_{s+h} - x_s\|_1\,\|x_s\|_1 \\
&+ \Big\|(\mathcal{T}_{0,h} - Id)\,\mathcal{L}(x_s)x_s\Big\|_1 \\
&\leq c_{1,\varepsilon}\|x_{s+h} - x_s\|_1 + c_{2,\varepsilon}\|x\|_T\|x_{s+h} - x_s\|_1 + c_{i,\varepsilon}\|x_T\|\,\|\mathcal{T}_{0,h} - Id\|.
\end{aligned}$$

Como $x \in X_{T,\varepsilon,x_0}$, se tiene que $\|x_{s+h} - x_s\|_1 \to 0$ cuando $h \to 0$ y por la continuidad uniforme del semigrupo $\mathcal{T}_{0,t}$, también $\Big\|(\mathcal{T}_{0,h} - Id)\,\mathcal{L}\Big\| \to 0$ cuando $h \to 0$. Esto demuestra que $s \mapsto \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s$, es continua. Además,

$$\begin{aligned}
\Bigg\|\int_0^{t+h} \mathcal{T}_{0,(t+h-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\, ds - \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)}\mathcal{L}(x_s)x_s\, ds\Bigg\|_1 &\leq h\int_0^t \Bigg\|\Bigg(\frac{\mathcal{T}_{0,h} - Id}{h} - \mathcal{L}_0\Bigg)\mathcal{L}(x_s)x_s\Bigg\|_1 ds \\
&+ h\int_0^t \|\mathcal{L}_0\mathcal{L}(x_s)x_s\|_1\, ds + \int_t^{t+h} \|\mathcal{L}(x_s)x_s\|_1\, ds \\
&\leq h\Bigg\|\Bigg(\frac{\mathcal{T}_{0,h} - Id}{h} - \mathcal{L}_0\Bigg)\Bigg\| \int_0^t c_{1,\varepsilon}\|x_s\|_1\, ds \\
&+ h\|\mathcal{L}_0\| \int_0^t c_{1,\varepsilon}\|x_s\|_1\, ds + \int_t^{t+h} c_{1,\varepsilon}\|x_s\|_1\, ds \\
&\leq h\Bigg\|\Bigg(\frac{\mathcal{T}_{0,h} - Id}{h} - \mathcal{L}_0\Bigg)\Bigg\| c_{1,\varepsilon}\|x\|_T T + c_{1,\varepsilon}\|\mathcal{L}_0\|\,\|x\|_T T h \\
&+ c_{1,\varepsilon}\|x\|_T h
\end{aligned}$$

que tiende a cero, si $h \to 0$. Esto demuestra que el mapeo

$$t \mapsto \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)} \mathcal{L}(x_s) x_s \, ds$$

es continuo.

Por último,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_t x\|_1 &\leq \|\mathcal{T}_{0,t} x_0\|_1 + \int_0^t \|\mathcal{T}_{0,(t-s)} \mathcal{L}(x_s) x_s\|_1 ds \\ &\leq \|x_0\|_1 + c_{1,\varepsilon} \|x\|_T, \quad \forall t \in [0, T). \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que

$$\|\mathcal{T}_{(\cdot)} x\|_T = \sup_{t \in [0,T)} \|\mathcal{T}_t x\|_1 \leq \|x_0\|_1 + c_{1,\varepsilon} \|x\|_T < \infty,$$

consecuentemente, $\mathcal{T}_{(\cdot)} x \in X_T$. □

Lema 5.2. *Se cumplen las siguientes estimaciones para $t \in [0, T]$:*

1) $\|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_{0,t} x_0\|_1 \leq c_{1,\varepsilon} \, T \sup_{s \in [0,T)} \|x_s\|_1 = c_{1,\varepsilon} \, T \|x\|_T$.

2) $\|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_t y\|_1 \leq (c_{2,\varepsilon} \, \|x\|_T + c_{1,\varepsilon}) T \|x - y\|_T$ *con* $x, y \in X_{T,\varepsilon,x_0}$.

Demostración. Como el semigrupo es de contracciones, tenemos que para $t \in [0, T]$

1)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_{0,t} x_0\|_1 &= \left\| \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)} \mathcal{L}(x_s) x_s \, ds \right\|_1 \leq \int_0^t \|\mathcal{L}(x_s) x_s\|_1 \, ds \\ &\leq \int_0^t c_{1,\varepsilon} \|x_s\| \, ds \leq c_{1,\varepsilon} \, T \sup_{s \in [0,T)} \|x_s\| \\ &= c_{1,\varepsilon} \, T \|x\|_T. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_t y\|_1 &= \left\| \int_0^t \mathcal{T}_{0,(t-s)} \Big(\mathcal{L}(x_s) x_s - \mathcal{L}(y_s) y_s \Big) ds \right\|_1 \leq \int_0^t \|\mathcal{L}(x_s) x_s - \mathcal{L}(y_s) y_s\|_1 \, ds \\ &\leq \int_0^t \|(\mathcal{L}(x_s) - \mathcal{L}(y_s)) x_s\|_1 \, ds + \int_0^t \|\mathcal{L}(y_s)(x_s - y_s)\|_1 \, ds \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{L}(x_s) - \mathcal{L}(y_s)\|_1 \, \|x_s\|_1 \, ds + \int_0^t \|\mathcal{L}(y_s)\|_1 \, \|(x_s - y_s)\|_1 \, ds \\ &\leq (c_{2,\varepsilon} \, \|x\|_T + c_{1,\varepsilon}) \, T \sup_{s \in [0,T)} \|x_s - y_s\|_1 \\ &\leq (c_{2,\varepsilon} \, \|x\|_T + c_{1,\varepsilon}) \, T \|x_t - y_t\|_T. \end{aligned}$$

□

Finalmente, ya estamos en condiciones de demostrar el teorema 5.2.

Demostración del teorema 5.2. Primero, veamos que $\mathcal{T}_{(\cdot)}x \in X_{T,\varepsilon,x_0}$, si $x \in X_{T,\varepsilon,x_0}$. Por el lema 5.1, $\mathcal{T}_{(\cdot)}x \in X_T$.

Además, por la propiedad de semigrupo, $\mathcal{T}_0 x = \mathcal{T}_{0,0}x_0 = x_0$. Luego, por la parte 1) del lema 5.2 se cumple que

$$\|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_{0,t}x_0\| \leq c_{1,\varepsilon}\, T\|x\|_T < \varepsilon$$

para T suficientemente pequeña. Es decir, $\mathcal{T}_{(\cdot)}x \in X_{T,\varepsilon,x_0}$.

Por la parte 2) del lema 5.2, tenemos

$$\|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_t y\|_1 \leq (c_{2,\varepsilon}\|x\|_T + c_{1,\varepsilon})T\|x - y\|_T < \|x - y\|_T,$$

si T es suficientemente pequeña para toda $t \in [0, T]$. Esto demuestra que

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\mathcal{T}_t x - \mathcal{T}_t y\|_T = \|\mathcal{T}_{(\cdot)}x - \mathcal{T}_{(\cdot)}y\|_T \leq \|x - y\|_T,$$

es decir, $\mathcal{T}$ es una contracción de X_{T,ε,x_0} en si mismo. □

Corolario 5.1. *La ecuación integral (5.3) tiene una única solución en el espacio X_{T,ε,x_0}, para $T > 0$ suficientemente pequeña.*

Demostración. Como consecuencia del teorema 5.2 y del teorema de punto fijo de Banach, ver [MB80], se tiene que, para T suficientemente pequeña, existe un único $x \in X_{T,\varepsilon,x_0}$ tal que $\mathcal{T}x = x$, es decir, satisface la ecuación (5.3). □

Apéndices

Apéndice A

Teoremas de Hahn Banach

A lo largo de este apéndice, consideramos E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema A.1. ***(Hahn-Banach)*** *Sean $p : E \to \mathbb{R}$ una funcional sublineal y $a \in E$. Entonces, existe un funcional lineal $\omega : E \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\omega(a) = p(a) \quad y \quad \omega(b) \leq p(b) \tag{A.1}$$

para cada $b \in E$.
Más aún, para $c \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, existe un funcional lineal $\omega : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega(a) = p(a) \quad , \quad \omega(c) = \lambda \quad y \quad \omega(b) \leq p(b) \tag{A.2}$$

para cada $b \in E$, si y sólo si

$$\frac{p(a) - p(a - tc)}{t} \leq \lambda \leq \frac{p(a + tc) - p(a)}{t} \quad , \quad t > 0. \tag{A.3}$$

Ahora bien, si consideramos funcionales sublineales p_j con $j = 1 \dots n$ en E junto con ω un funcional lineal en E tal que $\omega \leq p_j$ y suponemos que $\Sigma_{i=1}^{n} a_i = 0$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \omega(a_i) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = 0.$$

A continuación, presentamos el recíproco a esta observación.

Teorema A.2. ***(Multiple Hahn-Banach)*** *Sean $p_i : E \to (-\infty, \infty]$ funcionales sublineales con $i = 1 \dots n$ tales que p_1 es finita valuada y para $a_i \in E$, se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(a_i) \geq 0.$$

Entonces, existe una funcional lineal $\omega : E \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que $\omega \leq p_i$ para $i = 1 \dots n$.

Por último, enunciamos una versión del teorema de separación de Hahn-Banach. El cual será aplicado a un espacio de Banach B que esta equipado con la topología inducida por su norma y su dual, B^*, con la topología $\sigma(B^*, B)$ también llamada topología débil estrella.
Además, si E es un espacio real localmente convexo y E^* es su dual, para cada subconjunto $F \subset E$, llamamos la polar de F al conjunto

$$F^o = \{\omega \in E^* : \omega(a) \leq 1, \forall a \in F\} \tag{A.4}$$

Y la doble polar o bipolar de F se define como la polar de F^o en E, i. e.

$$F^{oo} = \{a \in E : \omega(a) \leq 1, \forall \omega \in F^o\} \tag{A.5}$$

Teorema A.3. ***(Separación de Hahn-Banach)*** *Sea E un espacio real localmente convexo. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

I) Sea $\mathscr{C} \subset E$ convexo con interior no vacío. Entonces para cada $a \in int(\mathscr{C})$, existe $\omega \in E^*$ tal que $\omega(a) \leq \omega(c)$ para cada $c \in \mathscr{C}$.

II) Sea $\mathscr{C} \subset E$ convexo y cerrado tal que $0 \notin C$. Entonces, existe $\omega \in E^*$ tal que $\omega(c) \geq 1$ para cada $c \in \mathscr{C}$.

III) Para cualquier subconjunto $F \subset E$, se tiene que F^{oo} es la envolvente convexa cerrada de $F \cup \{0\}$ en E.

Para mayores detalles sobre esta versión del teorema de Hahn-Banach, se puede consultar [BR84].

Apéndice B

Espacios de Hilbert

A continuación, damos las propiedades generales de los espacios de Hilbert y del producto tensorial entre ellos.

B.1. Espacios con producto interior

Definición B.1. *Un espacio vectorial complejo V, es un espacio con producto interior o interno si existe una función $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ tal que se satisface las siguientes condiciones:*

1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x \rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

3) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

para cualesquiera $x, y, z \in V$ y para toda $\alpha \in \mathbb{C}$. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ recibe el nombre de producto interior o interno.

De aquí que para cualesquiera $x, y, z \in V$ y para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple que $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ y $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$. Por este motivo decimos que el producto interno es lineal conjugado en la primera entrada.

Ejemplo B.1.1. *Los siguientes conjuntos son espacios con producto interior.*

1) Sea $\mathbb{C}^n$ con el producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_i, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

2) *Sea $C[a,b]$ el conjunto de las funciones con valores complejos y continuas en el intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Entonces el producto interno esta dado por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx$$

con $f, g \in C[a,b]$.

Los espacios con producto interno, generalizan diversos aspectos geométricos, como lo muestra la siguiente definición.

Definición B.2. *Sea V un espacio con producto interno. Decimos que dos vectores $x, y \in V$ son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$. Además una colección $\{x_i\} \subset V$ es llamado conjunto ortonomal si $\langle x_i, x_i\rangle = 1$ para toda i, mientras que $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ para toda $i \neq j$.*
Y denotamos por $||x||$ al valor real dado por $\sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Teorema B.1. ***(Teorema de Pitágoras)*** *Sean V un espacio con producto interno y $\{x_n\}_{n=1}^N \subset V$ un conjunto ortonormal. Entonces para cada $x \in V$, se cumple que*

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 + \left\|x - \sum_{n=1}^N \langle x_n, x\rangle x_n\right\|^2$$

Como consecuencia del teorema de Pitágoras, tenemos las desigualdades de Bessel y de Schwarz.

Corolario B.1. ***(Desigualdad de Bessel)*** *Sean V un espacio con producto interno y $\{x_n\}_{n=1}^N \subset V$ un conjunto ortonormal. Entonces para cada $x \in V$, se cumple que*

$$||x||^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Corolario B.2. ***(Desigualdad de Schwarz)*** *Sea V un espacio con producto interno y consideremos $x, y \in V$. Entonces se cumple que*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||.$$

Otro aspecto geométrico importante esta dado por la siguiente identidad.

Proposición B.1. ***(Ley del Paralelogramo)*** *Sea V un espacio con producto interno y consideremos $x, y \in V$. Entonces se cumple que*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

La importancia de la definición B.2 radica en el siguiente resultado.

Teorema B.2. *Todo espacio con producto interior V es un espacio vectorial normado. Es decir, para cualesquiera $x, y \in V$ y para toda $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que*

1) $||x|| \geq 0$

2) $||x|| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

De esta manera, tenemos que un espacio con producto interior V es normado y, por lo tanto, un espacio métrico.

Teorema B.3. *Sea V un espacio con producto interno. Entonces la función $d\colon V \times V \to [0, \infty)$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ satisface las siguientes condiciones:*

1) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

para cualesquiera $x, y, z \in V$.

Definición B.3. *Decimos que un espacio con producto interior es un* ***espacio de Hilbert complejo*** *si es completo con respecto a la métrica dada por el teorema B.3. Es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Ejemplo B.1.2. *Los siguientes conjuntos son espacios de Hilbert complejos.*

1) *El conjunto $L^2[a, b]$ de las clases de equivalencia de las funciones con valores complejos y medibles en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tales que*

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

con el producto interior dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \, dx.$$

2) *El conjunto l^2 de las sucesiones complejas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

con el producto interior dado por

$$\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

Un hecho fundamental de los espacios de Hilbert H es que los podemos identificar con su espacio dual. Es decir, con el espacio de transformaciones lineales y acotadas de H en $\mathbb{C}$ el cual denotamos por $H^* = B(H, \mathbb{C})$ y a sus elementos los llamamos funcionales lineales continuos. Además H^* resulta ser un espacio vectorial normado y completo con

$$\|T\|_{H^*} := \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |T(x)|$$

Teorema B.4. ***(Representación de Riesz)*** *Para cada $T \in H^*$, existe un único $y_T \in H$ tal que $T(x) = \langle y_T, x \rangle$ para toda $x \in H$. Además, $\|y_T\| = \|T\|_{H^*}$.*

B.2. Producto tensorial

Consideremos H_1, H_2 espacios de Hilbert complejos. Entonces para cada $\phi_1 \in H_1, \phi_2 \in H_2$ definimos una forma bilineal conjugada $(\phi_1 \otimes \phi_2)\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ mediante

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(\psi_1, \psi_2) := \langle \phi_1, \psi_1 \rangle_{H_1} \langle \phi_2, \psi_2 \rangle_{H_2}.$$

Luego, definimos $\mathcal{E}$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de tales formas bilineales conjugadas y definimos un producto interno en $\mathcal{E}$ como

$$\langle \phi \otimes \psi, \eta \otimes \mu \rangle := \langle \phi, \eta \rangle_{H_1} \langle \psi, \mu \rangle_{H_2}$$

y extendemos por linealidad á $\mathcal{E}$.

Proposición B.2. *La función dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ esta bien definida y es positiva definida. Es decir, el valor $\langle \lambda, \lambda' \rangle$ NO depende de cual de las combinaciones lineales finitas es utilizada para expresar a λ y λ'.*

A partir de la Proposición B.2 definimos un nuevo espacio de Hilbert.

Definición B.4. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert complejos. Definimos el producto tensorial de H_1 con H_2, denotado por $H_1 \otimes H_2$, como la completación de $\mathcal{E}$ bajo el producto interior dado anteriormente.*

Por lo tanto, $H_1 \otimes H_2$ es un espacio de Hilbert complejo.

Proposición B.3. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert complejos con bases ortonormales $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ y $\{\psi_l\}_{l\geq 1}$ respectivamente. Entonces $\{\phi_k \otimes \psi_l\}_{k,l\geq 1}$ es una base ortonormal de $H_1 \otimes H_2$.*

Cabe destacar que lo anterior, puede realizarse para una cantidad finita de espacios $H_1, H_2, \ldots, H_n$ y considerar el espacio $H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n$.

Ejemplo B.2.1. *Sea H un espacio de Hilbert y denotemos por $H^{\otimes n}$ el producto tensorial de H consigo mismo n-veces, es decir,*

$$H^{\otimes n} := \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{n-veces}$$

Entonces, al hacer $H^0 = \mathbb{C}$ y considerar la suma directa infinita definimos el espacio de Fock sobre H como

$$\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n.$$

Así, $\mathcal{F}(H)$ es separable si H lo es.
En particular, para $H = L^2(\mathbb{R})$, cualquier elemento $\psi \in \mathcal{F}(H)$ es una sucesión de funciones

$$\psi = \Big\{\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \psi_3(x_1, x_2, x_3), \ldots\Big\}$$

tal que

$$|\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_n(x_1, \ldots, x_n)|^2 \, dx_1 \cdots dx_n < \infty.$$

Teorema B.5. *Sean (M_1, μ_1) y (M_2, μ_2) espacios de medida tales que $L^2(M_1, d\mu_1)$ y $L^2(M_2, d\mu_2)$ son separables. Entonces, son válidas las siguientes afirmaciones:*

1) Existe un único isomorfismo de $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ a $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ tal que $f \otimes g \mapsto fg$.

2) Si H' es un espacio de Hilbert separable, entonces existe un único isomorfismo de $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes H'$ a $L^2(M_1, d\mu_1; H')$ tal que $f(x) \otimes \phi \mapsto f(x)\phi$.

3) Existe un único isomorfismo de $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ a $L^2\big(M_1, d\mu_1; L^2(M_2, d\mu_2)\big)$ tal que $f(x, y)$ es tomada en la función $x \mapsto f(x, \cdot)$.

Para ver más a detalle estos temas, se puede consultar [MB80].

B.3. Operadores positivos y compactos

Definición B.5. *Un operador $P \in B(H)$, es positivo si*

$$\langle Pu, u \rangle \geq 0 \quad , \forall u \in H.$$

En tal caso, escribimos $P \geq 0$. Si además, $\langle Pu, u \rangle = 0$ sólo es posible con $u = 0$, decimos que el operador P es positivo definido. Esto nos permite dar una relación de orden en $B(H)$, mediante

$$A \geq B \quad , \text{si } A - B \geq 0.$$

Una propiedad importante que cumplen los operadores positivos es la siguiente.

Proposición B.4. *Sea $A \in B(H)$ tal que $A \geq 0$. Entonces A es autoadjunto.*

Demostración. Por propiedades del producto interior de H, tenemos que

$$\langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle Ax, x \rangle$$

cuando $\langle Ax, x \rangle$ solo toma valores reales.
Mientras que utilizando la identidad de polarización, concluimos que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

cuando $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$ para toda $x \in H$. Entonces, por ser $A \geq 0$, tenemos que $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$. De aquí que, $A = A^*$. □

Más aún, para cualquier $A \in B(H)$, se tiene que el operador $A^*A \geq 0$, ya que $\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, (A^*)^*x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = ||Ax||^2 \geq 0$.

De hecho, se tiene el siguiente resultado.

Teorema B.6. *Para cada $A \in B(H)$, son equivalentes*

1) A es positivo.

2) $A = A^*$ y el espectro de A, yace en $\mathbb{R}^+$.

3) A es de la forma T^*T, para algún operador $T \in B(H)$.

Proposición B.5. *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces $A \in B(H)$ es positivo si y sólo si su matriz es positiva semidefinida.*

Teorema B.7. *Sean H un espacio de Hilbert de dimensión finita con base $\{e_i\}_{i=1}^n \subset H$ y un operador $A \in B(H)$ auto-adjunto. Entonces A es positivo si y sólo si para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el determinante de la matriz de tamaño $k \times k$ dada por*

$$\left[\langle e_i, Ae_j\rangle\right]_{i,j=1}^k$$

es no negativo.

Para matrices cuyas entradas son matrices, es decir, matrices de bloques, tenemos un resultado similar.

Teorema B.8. *La matriz de bloques auto-adjunta*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$$

es positiva si y sólo si $A, C \geq 0$ y existe un operador X tal que $\|X\| \leq 1$ y $B = C^{1/2}XA^{1/2}$.

Además, cuando A es invertible, entonces esta condición es equivalente a

$$BA^{-1}A^* \leq C.$$

Teorema B.9. ***(Schur)*** *Sean A, B matrices positivas de tamaño $n \times n$. Entonces*

$$C_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j} \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

determina una matriz positiva.

Para ver a detalle estos resultados puede consultarse [Pet08]. A continuación, enunciamos una serie de propiedades que pueden ser revisadas en [MB80].

Teorema B.10. *Sea $A \in B(H)$ con $A \geq 0$. Entonces, existe un único $B \in B(H)$ tal que $B \geq 0$ y $B^2 = A$. Más aún, B conmuta con cualquier operador acotado que conmute con A.*

A partir del teorema B.10 se tiene la siguiente definición.

Definición B.6. *Para cada $A \in B(H)$, definimos $|A| = (A^*A)^{1/2}$ donde $(A^*A)^{1/2}$ es el operador positivo tal que su cuadrado es A^*A.*

Observación B.3.1. *Para cada $A \in B(H)$, se tiene que $|\lambda A| = |\lambda||A|$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Sin embargo, no es cierto que $|AB| = |A||B|$, $|A| = |A^*|$ ó $|A + B| \leq |A| + |B|$.*

Por otro lado, tenemos los operadores compactos.

Definición B.7. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces $T \in B(X, Y)$ es compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ se tiene que $\left(T(x_n)\right)_{n\geq 1} \subset Y$ tiene una subsucesión convergente.*

Además, denotamos por $K(H)$ el conjunto de operadores compactos sobre un espacio de Hilbert complejo separable H. El cual resulta ser un espacio de Banach.

B.4. Traza de operadores

En esta sección, vemos la relación entre los operadores positivos y compactos.

Definición B.8. *Sean $\{\varphi_n\}_n \subset H$ base ortonormal y $A \in B(H)$ con $A \geq 0$. Entonces, definimos la traza de A como*

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle.$$

Proposición B.6. *La traza tiene las siguientes propiedades:*

1) *La traza es independiente de la base ortonormal dada. Es decir, si $\{\psi_m\}_m \subset H$ es otra base ortonormal, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \psi_m, A\psi_m \rangle.$$

2) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.

3) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$, *para cada* $\lambda \geq 0$.

4) $Tr(UAU^{-1}) = Tr(A)$, *para cada operador unitario* U.

5) *Si* $0 \leq A \leq B$, *entonces* $Tr(A) \leq Tr(B)$.

Utilizando la definición B.6 tenemos,

Definición B.9. *Sea $A \in B(H)$. Decimos que A es un operador de clase traza si $Tr|A| < \infty$. Al conjunto de operadores de clase traza lo denotamos por $L_1(H)$.*

Las propiedades básicas de $L_1(H)$ están dadas en el siguiente teorema.

Teorema B.11. *Bajo la suma y multiplicación por escalares en $B(H)$, se tiene que*

1) $L_1(H)$ *es un espacio vectorial.*

2) *Si* $A \in L_1(H)$ *y* $B \in B(H)$, *entonces* $AB \in L_1(H)$ *y también* $BA \in L_1(H)$.

3) *Si* $A \in L_1(H)$, *entonces* $A^* \in L_1(H)$.

Dado que $L_1(H)$ es un espacio vectorial, nos podemos preguntar si existe una norma tal que $L_1(H)$ sea espacio de Banach.

Teorema B.12. *Si en $L_1(H)$, definimos $\|A\|_1 := Tr|A|$. Entonces $L_1(H)$ es espacio de Banach con $\|A\| \leq \|A\|_1$.*

Por último tenemos el siguiente resultado.

Teorema B.13. *Cada elemento en* $L_1(H)$ *es un operador compacto. Mientras que, un operador* $A \in B(H)$ *compacto esta en* $L_1(H)$ *si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$$

donde $\{\lambda_n\}_n$ *son los valores singulares de A. Es decir, son los escalares tales que*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, \cdot \rangle \varphi_n$$

con $\{\psi_n\}_n, \{\varphi_n\}_n$ *conjuntos ortonormales en* H *y* $\lambda_n \to 0$.

Para concluir, notamos que si $A \in L_1(H)$, entonces el mapeo $B \mapsto Tr(AB)$ es un funcional lineal en $B(H)$. Además, se tienen las siguientes relaciones de dualidad.

Teorema B.14. ***(Teorema de Schatten)*** *Para un espacio de Hilbert complejo* H *separable, se cumplen:*

1) *El mapeo* $A \mapsto Tr(A\cdot)$ *es un isomorfismo isométrico de* $L_1(H)$ *sobre* $[K(H)]^*$. *Esto es,*

$$L_1(H) = [K(H)]^*.$$

2) *El mapeo* $B \mapsto Tr(B\cdot)$ *es un isomorfismo isométrico de* $B(H)$ *sobre* $[L_1(H)]^*$. *Esto es,*

$$B(H) = [L_1(H)]^*.$$

Apéndice C

Espacios de Banach

En este apéndice, damos los aspectos generales de los espacios de Banach.

C.1. Espacios normados

Definición C.1. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Decimos que una función $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ es una norma en V, si*

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

para toda $x, y \in V$ y para cada $\alpha \in \mathbb{C}$. A la pareja $(V, \|\cdot\|)$ se le llama espacio vectorial normado.
Un espacio vectorial normado que es completo con respecto a la métrica $d(x, y) := \|x - y\|$, se le llama espacio de Banach.

Es importante destacar que la norma en V no necesariamente está dada por un producto interior.

Ejemplo C.1.1. *Como ejemplos de espacios de Banach tenemos:*

1) El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

2) Los espacios de Hilbert H reales o complejos.

3) *El espacio $L^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones complejas valuadas y medibles en $\mathbb{R}$ tales que $|f(x)| \leq M$ para casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue y algún $M \in \mathbb{R}$. Este espacio es un cociente con respecto a la relación de equivalencia:*

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ excepto en un conjunto de medida cero}$$

La norma en este espacio está dada por

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M\}$$

4) *El espacio de las funciones continuas y acotadas $C(\mathbb{R})$ con la norma dada por*

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

para cada $f \in C(\mathbb{R})$. Este es un subespacio cerrado de $L^\infty(\mathbb{R})$

5) *Los espacios $L^p(X, d\mu)$ con respecto a un espacio de medida (X, μ) para cada $p \geq 1$. Los elementos de estos espacios son clases de equivalencia de funciones medibles complejo valuadas que cumplen*

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$$

y la relación de equivalencia está dada por

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ excepto en un conjunto de medida cero}$$

La norma en este espacio se define mediante

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

En particular para $p = 2$, tenemos un espacio de Hilbert.

A partir de dos espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ podemos construir otro espacio de Banach. El cual está dado por el conjunto de operadores lineales y acotados $B(X, Y)$ con la norma de operadores dada por

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

De hecho, basta que el espacio Y sea completo. En el caso de que $X = Y$, escribimos solamente $B(X)$.

Definición C.2. *El espacio dual de un espacio de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ está dado por $B^* = B(B, \mathcal{K})$, donde $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ según sea el caso.*

De está manera, $f \in B^*$, si y sólo si $f\colon B \to \mathbb{R}$, es lineal y acotada. Así, la norma en B^* está dada por

$$\|f\|_{B^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} f(x)$$

Ejemplo C.1.2. *Por el teorema B.4, tenemos que el dual de un espacio de Hilbert H es isomorfo á H. Además, para cada $p \in (1, \infty)$, el espacio dual de $L^p(\mathbb{R})$ es el espacio $L^q(\mathbb{R})$ con $q \in (1, \infty)$ tal que $(1/p) + (1/q) = 1$.*

Más aún, dado B espacio de Banach, tenemos por la definición C.2, que existe el espacio dual de B^* al cual llamamos espacio doble dual de B y lo denotamos por B^{**}. La relación entre estos espacios está dada por el siguiente teorema.

Teorema C.1. *Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y para cada $x \in B$, definimos el funcional lineal $\tilde{x}(\cdot)$ sobre B^* el cual asigna a cada $\lambda \in B^*$ el escalar $\lambda(x)$. Entonces, el mapeo $J\colon B \to B^{**}$ dado por $J(x) = \tilde{x}$ es un isomorfismo isométrico de B en un subespacio de B^{**}.*

Definición C.3. *Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach tal que el mapeo J definido en el teorema C.1 es suprayectivo. Entonces, decimos que B es reflexivo.*

Para un estudio más profundo de los espacios de Banach, se puede consultar [MB80].
Algunas consecuencias del teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales reales y normados $(E, \|\cdot\|_E)$ están dadas a continuación.

Corolario C.1. *Sea G un subespacio vectorial de E y consideremos $g\colon G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, con norma*

$$\|g\|_{G^*} := \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leq 1}} g(x)$$

Entonces existe $f \in E^*$ tal que extiende a g y además, $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$.

Corolario C.2. *Para todo $x_0 \in E$, existe $f_0 \in E^*$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Por lo que al definir $f_1 := \|x\|^{-1} f_0$, entonces $\|f_1\| = 1$ y $f_1(x) = \|x\|$ para toda $x \in E$.

Corolario C.3. *Para todo $x \in E$ se tiene que*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|\leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|\leq 1}} |f(x)|.$$

C.2. Separación de conjuntos convexos

En está sección, siempre consideraremos espacios vectoriales normados $(E, \|\cdot\|_E)$.

Definición C.4. *Un hiperplano (afín) es un conjunto de la forma*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

donde f es una transformación lineal en E no idénticamente nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. En tal caso, decimos que H es un hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$.

Proposición C.1. *El hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$ es cerrado si y sólo si f es continua.*

Definición C.5. *Sean $A, B \subset E$. Decimos que el hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ separa A y B en sentido amplio si*

$$f(x) \leq \alpha, \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha, \forall x \in B.$$

Y decimos que H separa A y B en sentido estricto si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \forall x \in B.$$

Geométricamente, la definición C.5 significa que los conjuntos A y B se sitúan "de un lado y de otro del hiperplano H".

Definición C.6. *Decimos que un subconjunto C de E es convexo si para cualesquiera $x, y \in C$, se cumple que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ para toda $\lambda \in [0, 1]$.*

Proposición C.2. *Sea $C \subset E$ convexo, entonces $int(C)$ y $\overline{C}$ son convexos.*

Lema C.1. ***(Funcional de Minkowski de un convexo)*** *Sea $C \subset E$ convexo, abierto y con $0 \in C$. Definimos el funcional de Minkowski para cada $x \in E$ mediante*

$$p(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$$

Entonces p es un funcional sublineal, es decir, satisface (3.1) además existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|$$

para cada $x \in E$ y

$$C = \{x \in E : p(x) < 1\}.$$

Lema C.2. *Sean $C \subset E$ convexo, abierto y no vació. Entonces para cada $x_0 \in E \backslash C$ existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. En particular, el hiperplano de ecuación $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y C en sentido amplio.*

A partir de los Lemas C.1 y C.2, se deduce el primer teorema de separación de conjuntos.

Teorema C.2. ***(Primer Forma Geométrica de Hahn-Banach)*** *Sean $A, B \subset E$ convexos, no vacíos y disjuntos además, supongamos que A es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido amplio.*

No sólo se pueden separar conjuntos convexos de puntos sino también dos conjuntos como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema C.3. ***(Segunda Forma Geométrica de Hahn-Banach)*** *Sean $A, B \subset E$ convexos, no vacíos y disjuntos tales que A es cerrado y B compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido estricto.*

El siguiente corolario es muy útil al tratar de demostrar que un subespacio es denso en E.

Corolario C.4. *Sea $F \subset E$ un subespacio vectorial tal que $\bar{F} \neq E$. Entonces existe $f \in E^*$ tal que $f \neq 0$ y $f(x) = 0$ para toda $x \in F$.*

Los detalles de está sección pueden consultarse en [Bré11].

C.3. Funciones convexas

Definición C.7. *Sea V un espacio vectorial. Decimos que una función $f: V \to \mathbb{R}$ es convexa en V si para cualesquiera $x, y \in V$ se cumple que*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{C.1}$$

para toda $\lambda \in [0, 1]$.

En el caso de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tenemos que la desigualdad (C.1) significa que cada punto sobre la recta entre $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ del plano, está por encima de la gráfica de la función f.

Teorema C.4. *En $\mathbb{R}$, se cumple que una función f es convexa en (a, b) si y sólo si para $x, y, x', y' \in (a, b)$ tales que $x \leq x' < y'$ y $x < y \leq y'$, entonces la cuerda sobre (x', y') tiene mayor pendiente que la cuerda sobre (x, y), es decir,*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} \tag{C.2}$$

Demostración. Si suponemos que f es convexa en (a, b), entonces

$$f(y) \leq \lambda_1 f(x) + (1 - \lambda_1) f(y') = \bar{y}$$

para algún $\lambda_1 \in [0, 1]$. Luego,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{\bar{y} - f(x)}{y - x} = \frac{f(y') - f(x)}{y' - x}. \tag{C.3}$$

Análogamente,

$$f(x') \leq \lambda_2 f(x) + (1 - \lambda_2) f(y') = \hat{y}$$

para algún $\lambda_2 \in [0, 1]$. De aquí que

$$f(y') - f(x') \geq f(y') - \hat{y}$$

y en consecuencia,

$$\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} \geq \frac{f(y') - \hat{y}}{y' - x'} = \frac{f(y') - f(x)}{y' - x}. \tag{C.4}$$

Así de las desigualdades (C.3) y (C.4), resulta

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y') - f(x')}{y' - x'}.$$

Recíprocamente, sea $\lambda \in [0, 1]$ y tomemos $x' = \lambda x + (1 - \lambda) y$ junto con $y' = y$ en (C.2). Entonces

$$\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} = \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{y - \lambda x - (1 - \lambda) y} = \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{\lambda (y - x)}.$$

Por lo tanto (C.2) implica que

$$(1 - \lambda) f(y) - (1 - \lambda) f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \geq \lambda f(\lambda x + (1 - \lambda) y) - \lambda f(x),$$

es decir, $(\lambda + (1 - \lambda)) f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$, lo cual implica (C.1). $\square$

C.4. Topologías débiles

Definición C.8. *Sea B un espacio de Banach con espacio dual B^*. La topología débil en B, denotada por $\sigma(B, B^*)$, es la mínima topolgía para B en la cual cada funcional lineal f en B^* es continua.*

Así, una base de vecindades en cero para la topología débil en B está dada por los conjuntos de la forma

$$N(f_1, \dots f_n; \varepsilon) = \{x \in B : |f_i(x)| < \varepsilon; i = 1, \dots n.\}$$

Además, decimos que una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset B$ converge débilmente a $x \in B$ si y sólo si $f(x_\lambda) \to f(x)$ para toda $f \in B^*$. En tal caso, escribimos $x_\lambda \overset{\sigma(B,B^*)}{\longrightarrow} x$.
Las propiedades de la topología débil estan dadas mediante el siguiente resultado.

Proposición C.3. *Sea B un espacio de Banach con espacio dual B^*. Entonces se cumplen:*

1. *La topología débil es más débil que la topología de la norma, es decir, todo conjunto $\sigma(B, B^*)$-abierto es abierto.*

2. *Toda sucesión $\sigma(B, B^*)$-convergente es acotada en la norma*

3. *La topología débil es Hausdorff*

Otra propiedad importante de la topología débil está dada para espacios de dimensión infinita en los cuales la cerradura débil de la esfera unitaria, $\{x \in B : \|x\| = 1\}$, es la bola cerrada unitaria, $\{ x \in B : \|x\| \leq 1\}$.

Teorema C.5. *Un funcional lineal f en un espacio de Banach es $\sigma(B, B^*)$-continuo si y sólo si es norma-continuo.*

También, podemos definir la topología débil en el espacio dual de B.

Definición C.9. *Sea B un espacio de Banach, la toplogía débil-$*$ es la mínima topología para B^* en la cual todas las funciones $f \mapsto f(x), x \in B$, son continuas. A está topología la denotamos por $\sigma(B^*, B)$*

Así, la topología débil-$*$ es más débil que la topología débil. Además, B es reflexivo si y sólo si las topologías débil y débil-$*$ coinciden.

Teorema C.6. ***(Banach-Alaoglu)*** *Sea B espacio de Banach real, entonces la bola unitaria en B^* es $\sigma(B^*, B)$-compacta.*

C.5. Operadores adjuntos

Definición C.10. *Sean X, Y espacios de Banach y consideremos $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Definimos el operador adjunto de T, mediante $T^* : Y^* \to X^*$ dado por $(T^* f)(x) = f(T(x))$ para toda $f \in Y^*$ y para cada $x \in X$.*

La relación entre un operador y su adjunto está dada en el siguiente resultado.

Teorema C.7. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces la aplicación $T \mapsto T^*$ es un isomorfismo isométrico de $B(X, Y)$ en $B(Y^*, X^*)$, es decir,*

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \|T^*\|_{B(Y^*,X^*)}$$

En el caso de un operador T de un espacio de Hilbert H en si mismo, el adjunto es un operador T' de H^* en H^*. Si consideramos $C\colon H \to H^*$ dado por $y \mapsto \langle y, \cdot\rangle$, para cada $y \in H$, entonces C es una isometría lineal conjugada la cual es suprayectiva por el Lema de Riesz. Ahora bien, definimos $T^*\colon H \to H$ mediante

$$T^* = C^{-1}T'C. \tag{C.5}$$

Entonces, T^* cumple que,

$$\langle x, Ty\rangle = (Cx)(Ty) = (T'Cx)(y) = \langle C^{-1}T'Cx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle \tag{C.6}$$

para cualesquiera $x, y \in H$.
El operador $T^*\colon H \to H$ definido en (C.5) es usualmente llamado el adjunto de T. Además, la aplicación $T \mapsto T^*$ es lineal conjugada, i. e., es lineal y $\alpha T \mapsto \bar{\alpha}T^*$ para toda $\alpha \in \mathbb{C}$. Esto se debe a que C es lineal conjugada.

Teorema C.8. *Las propiedades básicas de la aplicación $T \mapsto T^*$ son:*

1. *$T \mapsto T^*$ es un isomorfismo isométrico lineal conjugado de $B(H)$ sobre $B(H)$.*
2. *$(TS)^* = S^*T^*$.*
3. *$(T^*)^* = T$*
4. *Si T tiene inversa acotada, T^{-1}, entonces T^* tiene inversa acotada y es tal que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
5. *La aplicación $T \mapsto T^*$ siempre es continua en la topología débil y sólo es continua en la norma si H es de dimensión finita.*
6. *$\|T^*T\| = \|T\|^2$.*

Por último, damos la definición de operador adjunto para operadores **no** acotados.

Definición C.11. *Sean X un espacio de Banach y T un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$ denso. Definimos el adjunto de T mediante el operador T^* con dominio*

$$D(T^*) = \Big\{\omega \in X^* : \text{ existe } \xi \in X^* \text{ tal que } \omega(Ta) = \xi(a),\ \forall a \in D(T)\Big\},$$

y la acción de T^*, está dada por $T^*\omega = \xi$, para cada $\omega \in D(T^*)$.

Apéndice D

Categoría de Baire

En este apéndice enunciamos uno de los resultados más importantes del análisis, a saber, el Teorema de categoría de Baire.

Definición D.1. *Sea M un subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que es*

1) *denso en ninguna parte o raro en X si su cerradura, $\overline{M}$, no tiene puntos interiores, es decir, si int$(\overline{M}) = \emptyset$,*

2) *de primer categoría o magro en X si M es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en X,*

3) *de segunda categoría o no magro en X si M no es de primer categoría en X.*

Teorema D.1. ***(Categoría de Baire en espacios métricos completos)***
Sea X un espacio métrico completo no vacío. Entonces X es de segunda categoría. Es decir, si

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

con $A_k \subset X$ cerrado para toda $k \geq 1$. Entonces al menos uno de los conjuntos A_k contiene un subconjunto abierto no vacío.

La demostración del Teorema D.1 puede encontrarse en [Kre89].

Bibliografía

[AM83] R. Alicki and J. Messer. Nonlinear quantum dynamical semigroups for many-body open systems. *Journal of Statistical Physics*, 32(2):299–302, 1983. [citado en página 1]

[BR84] Charles J. K. Batty and Derek W. Robinson. Positive one-parameter semigroups on ordered Banach spaces. *Acta Applicandae Mathematicae*, 1:221–296, 1984. [citado en página 1, 24, 26, 60]

[BR02] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1: C^*- and W^*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*. Springer, second edition, 2002. Chap. 3. [citado en página 29]

[Bré11] Haïm Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 2011. Chap. 1. [citado en página 72]

[Fan99] Franco Fangola. Quantum markov semigroups and quantum flows. *Proyecciones No. 18*, 3:1–144, 1999. [citado en página 45, 48]

[HP57] Einar Hill and Ralph S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*, volume 31. American Mathematical Society, Colloqium Publications, 1957. Chap. 10. [citado en página 29]

[Kre89] Erwing Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1989. Chap. 4. [citado en página 77]

[MB75] Reed Michael and Simon Barry. *Methods of Modern Analysis*, volume II: Fourier Analysis, Self Adjointness. Academic Press, Inc., 1975. Chap. 10. [citado en página 52]

[MB80] Reed Michael and Simon Barry. *Methods of Modern Analysis*, volume I: Functional Analysis. Academic Press, Inc., 1980. Chap. 6. [citado en página 55, 65, 66, 71]

[Paz83] A Pazy. *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1983. Chap. 1. [citado en página 25, 29, 41]

[Pet08] Dénes Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, 2008. [citado en página 66]

[Pro98] Murray H. Protter. *Basic Elements of Real Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1998. Chap. 9. [citado en página 52]