

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERÍA**

**PERSISTENCIA EN SISTEMAS
DINÁMICOS Y PROBLEMAS DE
BIFURCACIONES**

TESIS QUE PRESENTA
LUIS AGUIRRE CASTILLO
PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

ASESOR: PETER SEIBERT KOPP

MARZO 18, 2003

LISTA DE FIGURAS

1	En el lado izquierdo, ilustramos algunos resultados del problema de bifurcaciones que surgen de equilibrios estables y, en el lado derecho las que surgen de equilibrios inestables en conexión con los tipos de cambios de estabilidad.	15
2	Ilustración de la Extensión dinámica del equilibrio M	16
3	Ilustración del caso estándar de la bifurcación de Hopf.	16
4	Ilustración de la bifurcación crítica.	17
5	Ilustración de la pérdida de la propiedad de atracción de un conjunto invariante.	17
2.1	Ilustración del Ejemplo 2	29
2.2	Ilustración de la persistencia de la extensión dinámica.	35
2.3	Ilustración del ejemplo 3	36
2.4	Ilustración del Ejemplo 4, la extensión dinámica “explota” cuando el parámetro sale del valor crítico, $\lambda_0 = 0$	37
2.5	Ilustración del ejemplo 5, el conjunto $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M)$ contiene propiamente al conjunto $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$	38
2.6	Ilustración del Ejemplo 6, las dos contenciones en (2.22) son propias, $I_{\lambda_0}(M) = [-1, 0) \cup (0, 1] = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = (0, 2]$ mientras que, $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	40
2.7	Ilustración del Ejemplo 7	41
2.8	Ilustración del ejemplo 8, el sistema se estabiliza fuera de la vecindad $(-1, 1)$ de $\lambda = 0$	48

2.9	Ilustración del ejemplo 9, un control $\lambda > 0$ que estabilice la región $\{(x, y) \mid xy < c\}$ del sistema (2.31) es posible para $\lambda > 0$, fuera de una una vecindad de $\lambda = 0$, suficientemente grande. . .	50
3.1	El equilibrio M exhibe una pérdida crítica dura de la estabilidad.	54
3.2	El origen M exhibe una pérdida extracrítica <i>dura</i> de la estabilidad.	55
3.3	El origen M exhibe una pérdida extracrítica <i>suave</i> de la estabilidad.	56
3.4	El equilibrio M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación crítica.	62
3.5	El equilibrio M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación extracrítica.	63
3.6	El equilibrio M exhibe una pérdida extracrítica de la estabilidad con bifurcación crítica.	64
3.7	El origen M exhibe una pérdida extracrítica (suave) de la estabilidad con bifurcación extracrítica.	64
3.8	El equilibrio M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación híbrida.	65
4.1	Ilustración de la definición 43, familia de atractores equiestable (ES).	70
4.2	Ilustración de la pérdida crítica de la propiedad de atracción. . .	81
4.3	Ilustración de la pérdida crítica no equiestable, de la propiedad de atracción de M	82
4.4	Ilustración de una familia de atractores no ES, pero estable para el sistema correspondiente al valor crítico del parámetro.	83
4.5	Ilustración de la definición de familia de atractores que tiene la propiedad RES.	83
4.6	Las órbitas con punto iniciales cercanos al origen, se aplanan en dirección del eje “x” y se alargan en dirección del eje “y”.	84
4.7	Las órbitas se alargan en dirección del eje “x” y se planan en dirección del eje “y”.	85
4.8	Ilustración de la definición de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES.	85
4.9	Ilustración del ejemplo 24 que trata de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero no tiene la propiedad RES. .	86

4.10	Ilustración del comportamiento de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES y no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 0$, abajo $\lambda = 0.5$	87
4.11	Ilustración del comportamiento de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES y no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 1$, abajo $\lambda = 1.5$	88
4.12	Ilustración del comportamiento de otra familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero, no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 0$, abajo $\lambda = 0.5$	89
4.13	Ilustración del comportamiento de otra familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero, no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 1$, abajo $\lambda = 1.5$	90
5.1	Ilustración del ejemplo 27, <i>bifurcación extracrítica</i> : cuando λ sale del valor crítico 0, surgen dos nuevos puntos de equilibrio. . . .	92
5.2	Ilustración del ejemplo 28, <i>bifurcación extracrítica</i> : cuando λ sale del valor crítico 0, surge de M una órbita periódica C_λ cuyo diámetro aumenta cuando λ crece.	93
5.3	Ilustración del ejemplo 29, <i>bifurcación crítica</i> : para el valor crítico del parámetro $\lambda = 0$, M no es aislado de conjuntos invariantes, toda vecindad de M contiene una órbita periódica.	94
5.4	Ilustración de la hipótesis de transversalidad del Teorema 5.1.1, de la bifurcación de Hopf.	95
5.5	Ilustración del ejemplo 30, arriba para $\lambda = 0$, M es asintóticamente estable y, abajo para $\lambda = 0.25$, M es inestable y surge una órbita periódica	113
5.6	Ilustración del ejemplo 30, arriba para $\lambda = 0.5$ y, abajo para $\lambda = 0.75$. Existe una bifurcación del tipo Hopf, sin embargo, el Teorema 5.1.1 de Hopf no es aplicable porque los autovalores del sistema lineal asociado al sistema (5.8), siempre son cero. <i>La existencia de la bifurcación no depende de la parte lineal del sistema, sino del cambio de estabilidad.</i>	114
5.7	Ilustración del ejemplo 31, arriba para $\lambda = 0$, M es un foco estable. Abajo, para $\lambda = 0.25$, M es un punto silla y surgen dos focos estables.	115

- 5.8 Ilustración del ejemplo 31, arriba $\lambda = 0.5$ y, abajo $\lambda = 0.75$. Los focos que se bifurcan se alejan de M cuando λ crece. En este caso el Teorema 5.1.1 de Hopf, no es aplicable porque no se cumple la hipótesis de transversalidad. 116
- 5.9 Ilustración del Teorema de Seibert - Florio, sobre existencia de bifurcaciones extracríticas que surgen de equilibrios estables. La bifurcación ocurre en el anillo topológico sombreado: $M'_\lambda \setminus R_\lambda$, para $\lambda \neq \lambda_0$ 117
- 5.10 Ilustración del ejemplo 32, arriba para $\lambda = 0$, M es un nodo estable. Abajo, para $\lambda > 0$ surgen dos nodos estables, M se convierte en un punto silla (inestable) y exhibe una *bifurcación extracrítica*. 118
- 5.11 Ilustración de la primera parte de la demostración de Lema 5.2.2, se obtiene una órbita $\gamma^+(z) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}$ donde $z \in \partial A_\delta^*(M) \cap \sigma$ 119
- 5.12 Ilustración del Lema 5.2.2, existe $z^* \in A_\delta^*$ tal que $\gamma^+(z^*) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}$ 119
- 5.13 Ilustración del Teorema 5.2.4 de la *bifurcación extracrítica*: el conjunto de bifurcación ajeno de M es $M'_\lambda := L_\lambda^+(z)$, el cual es compacto, débilmente invariante y está compuesto de órbitas principales. 120
- 5.14 Ilustración de la tricotomía: $A_{\lambda,\delta}^* = A_{\lambda,\delta}^i \cup A_{\lambda,\delta}^0 \cup A_{\lambda,\delta}^e$, los conjuntos $A_{\lambda,\delta}^i$ y $A_{\lambda,\delta}^e$, son abiertos. Puesto que el conjunto $A_{\lambda,\delta}^*$ es conexo, $A_{\lambda,\delta}^0 \neq \emptyset$ 121
- 5.15 Ilustración del Teorema 5.2.5 de la *bifurcación crítica*. Aquí ilustramos que la órbita principal $\hat{\gamma}_{\lambda_0}(y^*)$ construida inductivamente, está contenida en $\overline{B_\epsilon(M)}$ 122
- 5.16 Ilustración del Ejemplo 33 de la *bifurcación híbrida*. El conjunto de puntos de bifurcación, es $M'_\lambda = \{(\pm\sqrt{\lambda}, 0)\}$. Sin embargo, el Teorema 5.2.5 no excluye la posibilidad de la existencia de una *bifurcación crítica* de M para $\lambda = 0$ 123
- 5.17 Ilustración del Ejemplo 34 de la *bifurcación débilmente híbrida*. Para $\lambda > 0$, surge de M el conjunto $M'_\lambda = \{(\lambda, \lambda), (2\lambda, 0)\}$ de puntos de equilibrio de (5.44) ajeno de M . Esta familia de atractores no es CRES, el Teorema 5.2.5 implica la existencia de una *bifurcación débilmente crítica* de M , en $\lambda = 0$. Sin embargo, no es excluyente la posibilidad de la existencia de una *bifurcación extracrítica*. 124

5.18	Ilustración de la hipótesis (i) del Corolario 5.2.9.	125
5.19	El conjunto M es \mathcal{B} -globalmente asintóticamente estable.	126
5.20	La solución $(u_\lambda, v_\lambda) \rightarrow (0, v_\lambda)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente en X	129
5.21	La solución $v_\lambda(x, t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente en Y	130
5.22	Toda solución con punto inicial en un conjunto acotado conteniendo a M , no sale de este.	130
5.23	El conjunto M (intersección de los “ejes” u y v) es \mathcal{B} -globalmente asintóticamente estable.	134
5.24	Ilustración de una pareja de funciones iniciales $(\varphi, \psi) \in X$	135
5.25	Ilustración de una pareja funciones iniciales $(\varphi, \psi) \in X$, con $T > 0$ tales que, $\psi^2(x)e^{2T\varphi(x)} > \delta$ y $\ (\varphi, \psi)\ _X > \epsilon$	136
5.26	Ilustración de las soluciones $u(x, t)$ y $v(x, t)$	139
5.27	Distribución final de temperatura para u y v	140
A.1	Ilustración: El mapeo Φ no es aditivo.	148
B.1	Arriba, para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla. Abajo, para $\lambda = 0.5$ M es un foco estable. Los puntos de bifurcación son puntos silla.	157
B.2	Arriba, para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla. Abajo, para $\lambda = 0.5$ M es un nodo estable. Los puntos de bifurcación son puntos silla.	158
B.3	Arriba, para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla degenerada (fusión nodo-silla). Abajo, para $\lambda = 0.5$ M es un foco estable. El punto que se bifurca es un punto silla.	159

Agradecimientos.

En primer lugar, agradezco sinceramente la dedicación y la gran disponibilidad del Dr. Seibert, para poder realizar esta tesis. Su apoyo ha sido imprescindible.

Me es grato reconocer y agradecer al Dr. Joaquín Delgado por haberme impulsado hacia esta rama de las matemáticas y darme su apoyo.

Agradezco al Dr. Jesús Muciño, por aceptar revisar este trabajo y hacerme comentarios que contribuyeron a mejorarlo.

Agradezco al Dr. Rodolfo Suárez, por su amable atención y sus observaciones críticas.

Estoy muy agradecido con el Dr. José Florio, por las sugerencias y comentarios como pionero de este fascinante tema.

Agradezco la disposición de los Dres. Juan Héctor Arredondo, Julio Solís, Felipe Monrroy y Jorge Esquivel, para leer el manuscrito de esta tesis.

Le doy gracias a Bety Arce por teclear un primer manuscrito.

Agradezco enormemente el apoyo en cuestiones de cómputo a Daniel Espinoza (“EL FLASH”).

De manera muy especial agradezco a la Dra. Martha Alvarez, por el apoyo desinteresado, el ánimo durante algunos de mis tiempos difíciles y el impulso final.

Agradezco al Dr. Mario Pineda la motivación que me ha brindado.

Va un agradecimiento para Jorge Camacho, Lulú y Cokoro.

No sé como pueda agradecer, a Ximenita, Maricarmen y Ade; el apoyo permanente, la espera sin tregua durante mi ausencia, mientras realizaba este trabajo.

AGRADEZCO EL APOYO DEL **CONACYT** PARA REALIZAR ESTE TRABAJO.

Prólogo.

En el sentido más general, por bifurcación en una familia de sistemas dinámicos se entiende un cambio cualitativo en el retrato fase cuando un parámetro alcanza o sobrepasa a un cierto valor crítico. Más específicamente, llamamos bifurcación de un punto de equilibrio (o conjunto invariante) el caso donde este cambio consiste en la aparición de nuevos puntos de equilibrio (o conjuntos invariantes) que al alejarse el parámetro del valor crítico, se alejan del punto o conjunto en cuestión (En un lenguaje intuitivo, se dice que el punto o conjunto se “escinde” bajo el cambio de parámetro). El estudio de este fenómeno despertó interés a partir del famoso artículo de E.Hopf (1942), donde se relaciona la aparición de soluciones periódicas con ciertos cambios en el comportamiento de la parte lineal del sistema bajo un cambio de un parámetro. Las investigaciones posteriores a Hopf usualmente siguieron y siguen tomando como base un cambio en el espectro de la parte lineal del sistema. Este último es típicamente acompañado de un cambio (“ganancia” o “pérdida”) de estabilidad. Esta circunstancia dio origen a la pregunta, en qué medida un cambio de estabilidad da lugar a una bifurcación, independiente de que este se refleje o no en un cambio cualitativo en el espectro de la parte lineal. El primer paso en esta dirección fue dado en 1976 en un artículo de Marchetti et al, en el cual se probó que una bifurcación (en el sentido señalado) siempre ocurre cuando hay transición de estabilidad asintótica a la inestabilidad completa (o “repulsor”). En investigaciones posteriores, estas hipótesis fueron sucesivamente debilitadas. El tema tratado en la presente tesis cae dentro de este contexto, tratándose de reemplazar la condición de estabilidad asintótica (luego de una inversión con-

veniente del sentido del tiempo) por una más débil que incluye como caso típico a los puntos (o conjuntos) silla. La conclusión principal de todas estas investigaciones es que *la aparición de bifurcación no depende de las propiedades de las partes lineales de los sistemas*, pudiendo ocurrir aquellos aun cuando estas no cambian. La verdadera raíz de muy amplias clases de bifurcación hay que buscarla en ciertos principios de persistencia dinámica, en el caso en cuestión, la “persistencia de la inestabilidad”, es decir, en el hecho de que un estado de inestabilidad persiste, en cierto sentido, bajo pequeñas perturbaciones del sistema. Por lo menos esto es el caso para amplias clases de bifurcaciones.

Concretamente, en el presente trabajo se trata de probar la existencia de bifurcaciones en el caso donde para cierto valor del parámetro un punto de reposo o conjunto invariante es inestable, mientras para otros valores, cercanos, es estable. Se consideran dos tipos de bifurcaciones (en un sentido amplio): *extracríticas*, del tipo descrito al comienzo, y *críticas*, que consisten en la acumulación de conjuntos invariantes para un determinado valor del parámetro. El objetivo principal consiste en relacionar estas dos clases de bifurcaciones con dos tipos de comportamiento del sistema cuando el parámetro se acerca al valor crítico, según se cumple o no cierta condición de equiestabilidad generalizada (“equi” con respecto al parámetro), llamada CRES (conexo-relativo-equiestable). [Esto tiene que ver con el grado de deformación que sufre el retrato fase bajo el tránsito del parámetro.] Los dos teoremas principales dicen que bajo la condición *CRES* existe una bifurcación extracrítica, y en su ausencia una crítica. En ambos casos puede ocurrir simultáneamente también el otro tipo de bifurcación (*bifurcación híbrida*). El contexto de la tesis es el de familias de sistemas dinámicos o semidinámicos en espacios métricos, dependiendo de un parámetro (no necesariamente real, sino variando en algún espacio).

INDICE

Agradecimientos.	iii
Prólogo	v
Introducción	1
1 Preliminares.	19
1.1 Familia de sistemas (semi)dinámicos.	19
1.2 Conceptos básicos en sistemas (semi)dinámicos.	22
2 El principio de persistencia de la extensión dinámica.	25
2.1 La inestabilidad, la primera prolongación positiva y el límite prolongacional positivo de un conjunto.	25
2.1.1 La persistencia de la extensión dinámica.	33
2.1.2 La persistencia como estabilidad.	43
2.1.3 El problema desde el punto de vista del control.	46
3 Los cambios de estabilidad y tipos de bifurcación.	51
3.1 Cambio de estabilidad.	51
3.2 Tipos de bifurcaciones.	55
4 Equiestabilidad, Familias de atractores equiestables y general- izaciones.	67
4.1 Atracción.	67

4.2	Equiestabilidad.	69
4.3	Pérdida equiestable de la atracción.	72
4.4	Generalizaciones del concepto de equiestabilidad.	74
5	Teoría de Bifurcaciones.	91
5.1	Antecedentes.	91
5.1.1	Bifurcación de Hopf.	91
5.1.2	Bifurcaciones que surgen de equilibrios estables, en general.	96
5.2	Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables. . .	100
5.2.1	La existencia de bifurcaciones extracríticas.	100
5.2.2	La existencia de bifurcaciones críticas.	104
5.2.3	La existencia de bifurcaciones híbridas.	110
5.2.4	Ejemplos diversos.	125
6	Conclusiones.	141
A	Teoría general de la prolongación perturbacional.	143
B	Bifurcación de Conjuntos silla.	153

Introducción.

El estudio de los sistemas dinámicos tiene su origen en la teoría de las ecuaciones diferenciales con los trabajos de H. Poincaré en el siglo XIX. Poincaré, y después I. Bendixson, estudiaron las propiedades topológicas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas en el plano. Una de las principales motivaciones que propiciaron el surgimiento de los sistemas dinámicos se debió a que los precursores de este enfoque (G. D. Birkhoff, entre otros) puramente topológico (o métrico) se dieron cuenta de que muchas de las propiedades de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales dependen esencialmente de las propiedades topológicas de las soluciones, y no necesariamente de la diferenciabilidad (ver por ejemplo, [Bh], [Si] y [Wh]). Los sistemas semidinámicos, a diferencia de los sistemas dinámicos, son objetos que no toman en cuenta el pasado, parten del estado inicial del sistema y su evolución hacia el futuro, es decir, se presupone la existencia y unicidad de las soluciones para todo el tiempo $t \geq 0$, mientras que para los sistemas dinámicos, se presupone la existencia y unicidad para todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^3$ define un sistema semidinámico, pero no un sistema dinámico porque las soluciones no están definidas para todo tiempo negativo: “se escapan” en un tiempo negativo finito. Los sistemas semidinámicos están estrechamente relacionados con los sistemas dinámicos clásicos (para esto ver [BO] y [Sa]); sus resultados se aplican a una clase más amplia de ecuaciones diferenciales que los obtenidos para los sistemas dinámicos. Los sistemas semidinámicos, tienen su origen en la interpretación “dinámica” de las ecuaciones diferenciales funcionales con retardo y en las ecuaciones diferenciales parciales de evolución, en contraste con los

sistemas dinámicos que tienen su origen en las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, estas a menudo (en el caso de las no lineales) tampoco definen sistemas dinámicos (ver [BO]). En este trabajo, suponemos la existencia de una familia continua de sistemas semidinámicos, (X, T, Λ, F) , que dependen de un parámetro λ , donde λ pertenece a un espacio de parámetros Λ . El conjunto Λ puede ser un subconjunto de \mathbb{R} o \mathbb{R}^n , pero también puede ser cualquier espacio métrico o topológico con la única condición de la existencia de un elemento no aislado $\lambda_0 \in \Lambda$ (que corresponde al sistema F_{λ_0} “no perturbado”). El conjunto X es un espacio métrico, (X, d) (el espacio fase), T es un semigrupo, de hecho en este trabajo siempre es \mathbb{R}^+ , y F es un mapeo continuo del producto cartesiano $X \times T \times \Lambda$ en X . El mapeo F constituye el “elemento dinámico” del sistema. Suponemos también la existencia de un conjunto invariante compacto $M \subset X$, común para todos los sistemas semidinámicos, o sea, independiente del parámetro (por simplicidad).

El problema general que abordamos consiste en investigar cuales son las condiciones que se deben cumplir para que un cambio en el comportamiento de la estabilidad (en el sentido de Lyapunov) del conjunto invariante fijo, M , producido por un cambio de parámetros, implique una *bifurcación* de M , en el sentido de que surgen de M conjuntos invariantes compactos, $M'_\lambda \subset X$, ajenos de M al salir el valor λ de cierto valor crítico, del cual vamos a suponer que siempre sea $\lambda = \lambda_0$. (En el capítulo 3 daremos la definición precisa de *bifurcación*.)

En cuanto al concepto de *cambio de estabilidad* del conjunto invariante M , considerando una familia de sistemas semidinámicos, en esta tesis distinguimos dos formas de como ocurre el cambio de la estabilidad cuando cambia el parámetro. Estas distinciones dependen de si la pérdida o ganancia de la estabilidad, ocurren en el valor crítico del parámetro o fuera de el, es decir, para F_{λ_0} o F_λ , donde λ es diferente de λ_0 . En primer lugar, decimos que una familia de sistemas semidinámicos exhibe una *pérdida crítica (ganancia extracrítica)* de la estabilidad del conjunto M , en un valor $\lambda_0 \in \Lambda$, si M es λ_0 -inestable (o sea, inestable con respecto al sistema no perturbado F_{λ_0}) pero λ -estable con respecto a los sistemas perturbados F_λ para algunos valores λ arbitrariamente cercanos a λ_0 . Análogamente, una familia de sistemas semidinámicos exhibe una *pérdida extracrítica (ganancia crítica)* de estabilidad en un valor $\lambda_0 \in \Lambda$ con respecto del conjunto M , si M es λ_0 -estable (o sea, estable con respecto al sistema F_{λ_0}) pero λ -inestable con respecto a sistemas perturbados F_λ , para

λ arbitrariamente cercano a λ_0 . La idea de utilizar los términos como *pérdida crítica* (*ganancia extracrítica*) o *pérdida extracrítica* (*ganancia crítica*), surge porque el espacio de parámetros es más general que la recta real, como ya lo hemos mencionado al principio de esta introducción.

En particular, si el espacio de parámetros es el espacio \mathbb{R} , de los números reales y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es el valor crítico del parámetro, la *ganancia* de la estabilidad se llama *subcrítica* (*supercrítica*) en el sentido en que λ crece, si M es inestable con respecto al sistema semidinámico F_{λ_0} y estable con respecto al sistema F_λ para $\lambda < \lambda_0$ ($\lambda > \lambda_0$), respectivamente.

Los casos (más conocidos) donde se presentan los fenómenos de *bifurcación* y *cambio de estabilidad*, son los del “trinche” (“pitchfork”) en un sistema unidimensional, donde un equilibrio se escinde en tres y la ganancia de la estabilidad puede ser *sub* o *supercrítica*, y la *bifurcación de Hopf* en un sistema en el plano, donde se desprende del equilibrio una solución periódica. La ganancia de la estabilidad puede ser *sub* o *supercrítica* (cambiando λ por $-\lambda$, para $\lambda \in \mathbb{R}$). Desde el punto de vista del comportamiento cualitativo local, el rasgo característico es que para el valor crítico del parámetro el equilibrio es asintóticamente estable (atractor) o negativamente asintóticamente estable (repulsor), mientras que para valores del parámetro cercanos al valor crítico el comportamiento de la estabilidad en torno al equilibrio se invierte (el atractor se convierte en repulsor o viceversa).

Esta problemática surgió de la clásica bifurcación de Hopf¹, y el enfoque que seguimos en esta línea de investigación fue iniciado en su forma general por Marchetti, Negrini, Salvadori y Scalia [MNSS]. Ellos demostraron que si una familia de sistemas dinámicos que dependen de un parámetro λ tienen un conjunto invariante común M , que es *asintóticamente estable para cierto valor* $\lambda = \lambda_0$, y *completamente inestable (repulsor) para todos los valores λ diferentes de λ_0 , pero cercanos a λ_0* , entonces M exhibe una bifurcación en $\lambda = \lambda_0$. Entendemos el concepto de conjunto invariante M *completamente inestable* en el sentido de *repulsor*, es decir negativamente asintóticamente estable, (como por ejemplo en el caso del sistema unidimensional, $\dot{x} = x$, el punto de equilibrio, $\{0\}$, es completamente inestable). Los cuatro autores en [MNSS] abordaron el problema desde el punto de vista más geométrico, en el contexto de un flujo en un espacio métrico localmente compacto y relacionaron la bifurcación con cierta propiedad de atractores que ahora llamamos “persistencia”. Esto

¹Precusores: Poincaré y Andrónov.

significa que el atractor estable (como tal) se preserva bajo pequeñas perturbaciones del sistema, y el nuevo sistema (perturbado) tendrá el atractor estable cerca del atractor original. De esta propiedad, se deduce que ocurre una bifurcación, siempre que un atractor o repulsor se convierte en su contrario. La bifurcación de Hopf en su forma más sencilla (por ejemplo en el caso del plano), es de este tipo.

Los autores mencionados probaron el teorema básico de persistencia mediante el método de la función de Liapunov, usando fuertemente la compacidad local del espacio. De hecho, existe una demostración más antigua pero al parecer poco conocida de la persistencia, que se encuentra en [Se 2] y que además se lleva a cabo en el contexto amplio de flujos no-autónomos y sin unicidad en un espacio no necesariamente localmente compacto (lo cual permite su aplicación a sistemas de dimensión infinita). El método de esta demostración no requiere la existencia de una función de Liapunov.

Este resultado (el de [MNSS]) extiende entonces la bien conocida bifurcación de Poincaré-Andrónov-Hopf (BPAH) (ver [MM], pp. 163 ss), para el caso en el cual el comportamiento de la estabilidad no está necesariamente determinado por los autovalores de la parte lineal del sistema. En lo que sigue nos referimos a la clase de bifurcaciones que surgen de una *pérdida extracrítica (ganancia crítica) de la estabilidad* consideradas en [MNSS] como bifurcaciones del tipo AE-CI (es decir, que resultan de una transición de un cambio de la estabilidad del equilibrio de asintóticamente estable a completamente inestable). En [SF1], Florio y Seibert debilitaron la condición de que el conjunto invariante M sea completamente inestable (repulsor), requerida en [MNSS]², por condiciones más débiles y además la teoría se extendió a sistemas semidinámicos, reemplazando la hipótesis de la compacidad local del espacio de estados por la de compacidad asintótica del sistema, la cual significa que las órbitas de una región del espacio de estados van hacia un conjunto compacto. En la teoría desarrollada en [MNSS] y [SF1], se usa como herramienta el *principio de persistencia de la estabilidad asintótica* bajo perturbaciones, para demostrar que existe una relación muy estrecha entre la pérdida extracrítica de la estabilidad y la ocurrencia de una bifurcación del conjunto M . El *principio de persistencia de la estabilidad asintótica* bajo perturbaciones (ver [Se 2] y [Yo]), lo entendemos en el siguiente sentido: *cuando un λ_0 -sistema que tiene un conjunto invariante M asintóticamente estable es perturbado ligeramente (al salir el parámetro λ de*

²De hecho, se refieren a una familia de conjuntos, $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

cierto valor crítico λ_0), aparece en el sistema perturbado un conjunto invariante M' asintóticamente estable, arbitrariamente cercano al atractor original M y la región de atracción permanece esencialmente intacta. A partir de la conexión de este principio, con el problema de las bifurcaciones del tipo AS–CI, es decir de las bifurcaciones que surgen de la pérdida extracrítica de la estabilidad en los trabajos [MNSS] y [SF1], podemos concluir lo siguiente: *siempre que un conjunto invariante M tiene una pérdida extracrítica (ganancia crítica) de la estabilidad cuando un parámetro alcanza o sobrepasa un cierto valor crítico para el cual M es aislado de conjuntos invariantes (existe una vecindad de M tal que todo conjunto invariante contenido en esta vecindad, está contenido en M), tiene una bifurcación.* (analizados en SF1.) Los resultados mencionados hasta ahora, están contenidos en el lado izquierdo del cuadro sinoptico en la Figura 1, mediante el cual ilustramos la teoría general de bifurcaciones desarrollada con este enfoque.

En 1994, durante un seminario, P. Seibert sugirió otra dirección en la cual la bifurcaciones del tipo AE–CI, se pueden generalizar invirtiendo la escala del tiempo y relajando la condición resultante de la *inestabilidad completa* (repulsor) para el valor crítico λ_0 del parámetro. Así surgió el proyecto de este trabajo.

En otras palabras, si M tiene *pérdida crítica de la estabilidad*, en el valor $\lambda = \lambda_0$, nos preguntamos si ello implica que existe una bifurcación de M en λ_0 .

Una primera aproximación a la solución correspondiente a un caso especial, de este problema, se presentó en [AS1]. Las posibles bifurcaciones del conjunto invariante M que surgen en este caso, las llamamos *bifurcaciones del tipo I-E* por que ocurren cuando existe la transición de inestabilidad crítica a estabilidad extracrítica de M . Es decir, son bifurcaciones que surgen de la *(ganancia)pérdida (extra)crítica* de la estabilidad del conjunto invariante M .

Una segunda aproximación al estudio de este problema en esta línea de investigación, se presenta en [SF2] con el resultado principal: *si el conjunto invariante M es aislado y tiene ganancia extracrítica de la estabilidad en λ_0 , entonces M tiene una bifurcación que puede ser extracrítica o (débilmente) crítica.* Para demostrar este resultado, los autores introducen otro principio de persistencia del cual hablaremos más adelante. Las otras hipótesis adicionales bajo las cuales es válido este resultado, son muy generales. La familia de sistemas puede ser de sistemas dinámicos o semidinámicos definidos sobre un espacio métrico y sujetos sólo a la condición de compacidad asintótica local. El

caso más importante considerado en esta dirección es cuando M es aislado de conjuntos invariantes con respecto al sistema no perturbado (correspondiente al parámetro $\lambda = \lambda_0$), y para este mismo valor M es inestable pero no necesariamente completamente inestable (es decir, no repulsor). Este es el caso en el cual está planteado el problema del surgimiento de la bifurcación del conjunto silla cuando M tiene ganancia extracrítica de estabilidad [Fl]. El caso más típico que se ha encontrado es la partición de la silla en dos, mientras que la silla original se convierte en un atractor estable que puede ser, por ejemplo un foco o un nodo.

Por otra parte, así como en el caso de la demostración de la existencia de bifurcaciones del tipo AE-CI contenidas en las bifurcaciones del tipo E-I (ver sus generalizaciones en [MNSS]) mencionadas en el párrafo anterior, se utilizó el *principio de persistencia de la estabilidad asintótica local* como herramienta para demostrar la existencia de este tipo de bifurcaciones, además de otras hipótesis como la compacidad asintótica, también para estudiar el problema de las bifurcaciones que surgen de la *pérdida crítica de la estabilidad*, formulamos otro principio de persistencia, que llamamos *principio de persistencia de la extensión dinámica (o prolongación) o principio de persistencia de la inestabilidad* (este principio se formuló por primer vez en [SF2]).

Para establecer el *principio de persistencia de la inestabilidad*, consideremos un sistema semidinámico (X, T, F) y un conjunto invariante y compacto $M \subset X$. La extensión dinámica positiva de M con respecto F es, en cierto sentido, el grado de de inestabilidad de M medido en términos de lo que Ura[Ur1] llama la prolongación positiva de M . La *extensión dinámica positiva* (de aquí en adelante la llamaremos simplemente *extensión dinámica*)³ del conjunto M , consiste del conjunto de puntos en X y fuera del conjunto M , que se pueden aproximar desde de una sucesión de puntos que converge a M , bajo la acción del semiflujo F . Por ejemplo, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales en el plano,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones definen un sistema dinámico. El espacio de estados es \mathbb{R}^2 ,

³N.P Bhathia observó que al conjunto $M \setminus D^+(M)$ o $D^+(x) \setminus \gamma^+(x)$ se le debería llamar “prolongación”; pero el concepto estaba ya demasiado arraigado para lo que en este trabajo llamamos extensión dinámica, $D^+(M) \setminus M$.

el conjunto $M = \{(0, 0)\}$ es el equilibrio del sistema, llamado punto silla, puesto que el sistema tiene los autovalores ± 1 . La extensión dinámica de M es $\{(x, y) \mid x = 0, y \neq 0\}$ (Ver la Figura 2). En el capítulo 2 estudiamos ampliamente cómo cambia la extensión dinámica del conjunto M , cuando cambia el parámetro. Para esto, consideramos una familia de sistemas semidinámicos (X, T, Λ, F) . Suponemos que para un cierto valor crítico $\lambda_0 \in \Lambda$ del parámetro, el conjunto invariante M es inestable y por lo tanto, la extensión dinámica de M es no vacía (ver proposición 2.1.4). El *principio de persistencia de la inestabilidad* establece que a pequeños cambios de los parámetros λ alrededor del valor crítico λ_0 , la extensión dinámica del conjunto M correspondiente a cada valor de λ , no puede disminuir bruscamente. Esto se puede interpretar como que *una situación inestable no puede modificarse mediante cambios pequeños en el parámetro*. Lo anterior significa que en realidad, si M es un conjunto invariante inestable, su extensión dinámica al perturbar el parámetro λ alrededor de λ_0 , tiene la propiedad de *semicontinuidad inferior* (es decir, la inestabilidad *no es implosiva*). Sin embargo, la *extensión dinámica* de M , no tiene la propiedad de *semicontinuidad superior* (es decir, puede ser *explosiva*).

En el capítulo 3, suponiendo la existencia de una familia de sistemas semidinámicos (X, T, Λ, F) y un valor crítico del parámetro $\lambda_0 \in \Lambda$, definimos los conceptos de *cambio de estabilidad* y *bifurcación* de un conjunto invariante M contenido en X , cuando el parámetro entra o sale de λ_0 .

Además definimos los conceptos de: *pérdida crítica (ganancia extracrítica)* y *pérdida extracrítica (ganancia crítica)* de estabilidad de M mencionados anteriormente.

Finalmente, definimos los conceptos de *cambios de estabilidad de M , duro y suave* en términos del radio de inestabilidad. El *radio de inestabilidad de M* es una función del espacio de parámetros en \mathbb{R} . Para cada $\lambda \in \Lambda$ esta función asocia la distancia del punto en la extensión dinámica de M (con respecto al sistema F_λ) más alejado de M . Suponiendo que M exhibe un cambio de estabilidad en λ_0 , decimos que es *duro (suave)*, si la función radio de inestabilidad de M es discontinua (continua) en λ_0 . Por ejemplo, para los sistemas dinámicos definidos por la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen del parámetro $\lambda \geq 0$, $\dot{x} = -\lambda x + x^2$, donde el espacio fase X es \mathbb{R} , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ y, M es el equilibrio $\{0\}$. Para $\lambda = 0$, la extensión dinámica de M es $(0, +\infty)$ (M es inestable), mientras que para $\lambda > 0$, es vacía (M es asintóticamente estable). El equilibrio M exhibe un cambio de

estabilidad duro. En general, demostramos que si M exhibe pérdida crítica de estabilidad en λ_0 y F_{λ_0} es asintóticamente compacto en una vecindad de M , entonces M exhibe un cambio de estabilidad *duro* en λ_0 .

La *bifurcación* la entendemos como el surgimiento de dos o más nuevos conjuntos invariantes, del conjunto invariante M común de la familia de sistemas semidinámicos. Dependiendo de que si la separación de los conjuntos invariantes del conjunto M , ocurre en o fuera de el valor crítico λ_0 del parámetro, le llamamos bifurcación *crítica* o *extracrítica* o *híbrida* (si ocurren ambas bifurcaciones *la crítica* y *la extracrítica*). Un aspecto importante que hay que destacar de nuestra teoría, consiste en que en su desarrollo, nos interesa demostrar la existencia de bifurcaciones bajo condiciones muy generales. Queremos abarcar todos los casos posibles, independientemente de la genericidad o no genericidad de estos casos. Las propiedades de los nuevos conjuntos que se separan de M al entrar o salir λ del valor crítico λ_0 , queda por el momento, aplazado. Los ejemplos que presentamos en el capítulo 4, los hemos escogido de acuerdo con este enfoque.

El punto medular de este trabajo estriba en el estudio del problema de cómo surgen de un conjunto invariante M el tipo de bifurcaciones definidas en el contexto actual, cuando M exhibe una pérdida crítica de estabilidad. Partiendo de este punto de vista, tenemos que existen distintas maneras como un punto de equilibrio o conjunto invariante M de la familia de sistemas exhibe la pérdida de estabilidad. Una de estas se produce cuando se colapsa la región de atracción de un punto de equilibrio o conjunto invariante M al tender λ al valor crítico λ_0 , como en el caso estándar de la bifurcación de Hopf invertida mencionada anteriormente. Un ejemplo que presenta esta situación está dado por la familia de sistemas de ecuaciones (en coordenadas polares) en el plano:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r(\lambda - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \quad (r > 0). \end{aligned} \tag{1}$$

El espacio de estados X es \mathbb{R}^2 , M es el punto de equilibrio $\{(0, 0)\}$ del sistema correspondiente a $r = 0$, y Λ es \mathbb{R}^+ . El equilibrio M es estable para $\lambda > 0$ y cada región de atracción A_λ de M es un círculo de radio $\sqrt{\lambda}$: $x^2 + y^2 < \lambda$. Estas regiones de atracción se colapsan en M , cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. Es claro que M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad, puesto que para $\lambda_0 = 0$, M es repulsor con respecto al sistema resultante (Ver la Figura 3). Un segundo caso está caracterizado por la deformación del retrato fase de ciertas familias

de ecuaciones diferenciales dependientes del parámetro λ , cuando este se acerca al valor crítico λ_0 . Un ejemplo prototipo que nos permite ilustrar este caso está dado por la familia de sistemas lineales,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda x + y, \\ \dot{y} &= -\lambda y.\end{aligned}\tag{2}$$

Esta familia de ecuaciones diferenciales, que depende de λ , define una familia de sistemas dinámicos. El espacio de estados X es \mathbb{R}^2 ; el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ y M es el punto de equilibrio $\{(0, 0)\}$ de la familia de sistemas. Para $\lambda > 0$, el sistema tiene un autovalor de multiplicidad dos, $-\lambda < 0$, por lo tanto M es un nodo impropio estable. Para $\lambda = 0$, M es inestable y no está aislado de puntos de equilibrio, de hecho pertenece al conjunto de puntos de equilibrio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y = 0\}$, del sistema correspondiente a $\lambda = 0$. Por otra parte, cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ las órbitas se alargan y se aplanan sobre el eje de las equis, mientras que para cada $\lambda > 0$, las correspondientes regiones de atracción A_λ son cada una todo el plano \mathbb{R}^2 (Ver la Figura 4).

Finalmente, un tercer caso prototipo, ocurre cuando el punto de equilibrio de una familia de ecuaciones diferenciales, que depende de un parámetro λ , exhibe *pérdida crítica de la propiedad de atracción*, cuando el parámetro se acerca arbitrariamente a un cierto valor crítico λ_0 , convirtiéndose en un equilibrio no asintótico estable para λ_0 . Un ejemplo que muestra esta situación, está dado por la familia de sistemas lineales que depende del parámetro $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \lambda y.\end{aligned}\tag{3}$$

Como en los ejemplos anteriores, el espacio de estados X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ y $M = \{(0, 0)\}$ es el punto de equilibrio de la familia de sistemas dinámicos definida por este sistema de ecuaciones diferenciales. Para cada $\lambda > 0$ los autovalores correspondientes son $\frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$; por lo tanto el equilibrio M es un nodo estable. Para cada $\lambda > 0$, las regiones de atracción A_λ son todo el plano \mathbb{R}^2 . Para $\lambda = 0$, los autovalores del sistema correspondiente son $\pm i$; por lo tanto el equilibrio M es un centro. En este ejemplo tenemos que cuando $\lambda \rightarrow 0^+$, las regiones de atracción A_λ no sufren ningún cambio y tampoco las órbitas, sin embargo para $\lambda = 0$, M pierde la propiedad de atracción y no es aislado de conjuntos invariantes. (Las soluciones tienden al origen cada vez más lentamente, ver la figura 5.)

Tomando como prototipos los distintos comportamientos que exhiben las órbitas y las regiones de atracción del punto de equilibrio $\{(0, 0)\}$ de los sistemas (1),(2) y (3) cuando este tiene pérdida crítica de estabilidad en $\lambda = 0$, para su estudio en el contexto general de los sistemas semidinámicos, en el capítulo 4, consideramos familias (X, T, Λ, F) de estos. Si $\Lambda' \subset \Lambda$, y suponiendo que para cada $\lambda \in \Lambda'$ el conjunto M tiene una región de atracción A_λ bajo la acción del sistema F_λ . Tenemos una familia de regiones de atracción de M , $A_{\Lambda'} := \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$, y llamamos a la terna $\{M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'}\}$ *familia de atractores* de M , donde $F_{\Lambda'}$ es la familia de sistemas, $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$. Por otra parte, suponiendo que el conjunto invariante M exhibe pérdida crítica de la estabilidad en $\lambda = \lambda_0$ y λ_0 es un punto de acumulación de Λ' , estudiamos cómo cambian las regiones de atracción A_λ y el comportamiento de las órbitas que tienen puntos iniciales en vecindades esféricas de M arbitrariamente pequeñas (con respecto a la métrica d del espacio X), cuando λ tiende a λ_0 . Para esto, primero introducimos el concepto de *equiestabilidad (ES)* de M con respecto a la familia de sistemas $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$. Esto significa que M es estable en el sentido de Liapunov para cada $\lambda \in \Lambda'$ y, para cada ϵ -vecindad de M , existe una δ -vecindad de M , tales que para toda $\lambda \in \Lambda'$, toda órbita con punto inicial en la δ -vecindad de M permanece en la ϵ -vecindad de M todo el tiempo.

En este capítulo demostramos que *si Λ' es un subconjunto del espacio de parámetros Λ , el valor crítico del parámetro λ_0 es punto de acumulación de Λ' y el conjunto compacto e invariante M es ES con respecto a la familia de sistemas $F_{\Lambda'}$ en λ_0 , entonces M es estable (en el sentido de Liapunov) con respecto al sistema no perturbado F_{λ_0} (o sea, M no pierde la propiedad de atracción bajo F_λ cuando λ alcanza λ_0 .)* (Tal es el caso del comportamiento cualitativo de la familia de sistemas dinámicos dada por el sistema (3) dependiente del parámetro $\lambda > 0$). Una consecuencia inmediata de lo anterior es que, si M exhibe pérdida crítica de estabilidad, M no puede ser equiestable con respecto a la familia de sistemas $F_{\Lambda'}$ en λ_0 . Esto implica que el estudio del problema de bifurcaciones de M , que surgen de la pérdida crítica de estabilidad hay que hacerlo para las clases de familias de atractores no ES. Para esto, definimos un tipo de atractores más amplio que el de los ESs: los atractores *relativamente equiestables*(RES). Decimos que el conjunto M invariante es *relativamente equiestable* con respecto a $F_{\Lambda'}$ en λ_0 , si es estable en el sentido de Lyapunov y atractor para cada $\lambda \in \Lambda'$ relativo a las regiones de atracción A_λ . Es decir, si para cada ϵ -vecindad de M , existe una δ -vecindad de M tales que para toda órbita con punto inicial en la

intersección de la δ -vecindad de M la región de atracción A_λ , esta permanece en la ϵ -vecindad de M todo el tiempo. Si se cumple esto, decimos que la terna $\{M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'}\}$ es una *familia de atractores relativamente equiestable*. Un ejemplo de una familia de atractores que es RES pero no ES, está dado por la familia de ecuaciones (1).

También, definimos y proporcionamos ejemplos de otra clase de familias de atractores que no son RES de la siguiente manera. Sea M un conjunto compacto e invariante, decimos que M es *conexo relativamente equiestable (CRES)* con respecto a $F_{\Lambda'}$ en λ_0 , si para toda ϵ -vecindad de M , existe una δ -vecindad de M tales que, para toda $\lambda \in \Lambda'$ y para toda λ -órbita con punto inicial en la componente conexa que contiene a M de la intersección de la δ -vecindad de M con la región de atracción A_λ , permanece en la ϵ -vecindad de M todo el tiempo. Si se cumple esto, decimos que la terna $\{M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'}\}$ es una familia de atractores CRES. En el capítulo 4, proporcionamos ejemplos de familias de atractores que no son RES, pero si CRES. Formalizamos la deformación de las órbitas mediante la negación la propiedad CRES; esta es una expresión para la deformación de las órbitas.

En el capítulo 5, presentamos las contribuciones principales que contiene este trabajo de tesis. Estas se pueden resumir en lo siguiente, si el conjunto invariante M exhibe pérdida crítica de estabilidad en λ_0 , entonces M exhibe bifurcaciones que pueden ser de tres tipos:

1. *Extracrítica*: el conjunto M se escinde en más de un conjunto invariante cuando el parámetro λ sale del valor crítico λ_0 , o
2. *Crítica* (también a veces llamada “vertical”) si para $\lambda = \lambda_0$, se acumulan en M conjuntos invariantes M' ajenos a M (si los conjuntos M' se adhieren a M como órbitas homoclínicas a esta bifurcación le llamamos *bifurcación débilmente crítica*.)
3. *Híbrida*, se presentan ambas bifurcaciones (débilmente) crítica y extracrítica a la vez.(En el segundo caso “débilmente híbrida”).

En el caso de bifurcación extracrítica, demostramos que si un conjunto invariante M es asintóticamente estable para valores del parámetro λ cerca de un cierto valor λ_0 e, inestable para $\lambda = \lambda_0$ y si además M tiene la propiedad CRES (conexo relativamente equiestable) entonces M exhibe una bifurcación

extracrítica. En cambio, si la familia de atractores es no CRES, existe una bifurcación crítica (posiblemente débil).

Formalmente los resultados son los siguientes:

Teorema 0.0.1 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico X localmente conexo, $\Lambda^* \subset \Lambda$ y supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis:*

i) Existe un conjunto $M \subset X$, no vacío, compacto, conexo y positivamente λ -invariante para todo $\lambda \in \Lambda$ con las siguientes propiedades:

a) λ_0 -inestable, para $\lambda_0 \notin \Lambda^$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda^*}$; y*

b) λ -estable para todo $\lambda \in \Lambda^ \subset \Lambda$.*

ii) para cada $\lambda \in \Lambda^$, F_λ es LAC en alguna vecindad $W \in \mathcal{V}_M$.*

*iii) M satisface la propiedad CRES con respecto a Λ^**

Entonces existe una bifurcación extracrítica de M en λ_0 , relativo a Λ^ .*

Teorema 0.0.2 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos definida sobre un espacio métrico X , localmente conexo. Supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis:*

1. Existe un conjunto compacto y conexo $M \subset X$ positivamente λ -invariante para todo $\lambda \in \Lambda$;

2. todo F_λ es LAC en alguna vecindad $W \in \mathcal{V}_M$;

3. M es inestable para $\lambda = \lambda_0$ y estable para $\lambda \in \Lambda' \subset \Lambda$, con $\lambda_0 \in \overline{\Lambda'}$, $\lambda_0 \notin \Lambda'$; y

4. M no es CRES.

Entonces ocurre una bifurcación crítica (posiblemente crítica débil) de M para $\lambda = \lambda_0$.

Corolario 0.0.3 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico localmente conexo y suponga que se cumplen las siguientes hipótesis:*

1. Existe un conjunto compacto $M \subset X$;
2. M es asintóticamente estable para toda $\lambda^* \in \Lambda^*$, donde $\Lambda^* \subset \Lambda$;
3. M no es asintóticamente estable para $\lambda = \lambda_0$; $\lambda_0 \notin \Lambda^*$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$;
4. M es equiestable en λ_0 con respecto a la familia F_{Λ^*} ; y
5. F_{Λ} es LAC en una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$.

Entonces existe una bifurcación (posiblemente (débilmente)) crítica de M para $\lambda = \lambda_0$.

Corolario 0.0.4 Sea F_{Λ} una familia de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico localmente conexo y suponga que se cumplen las siguientes hipótesis:

1. Existe un conjunto compacto y conexo $M \subset X$;
2. M es inestable para $\lambda = \lambda_0$;
3. M es asintóticamente estable para λ tales que $\lambda \rightarrow \lambda_0$; y
4. F_{Λ} es LAC en una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$.

Entonces existe una bifurcación de M para $\lambda = \lambda_0$. La bifurcación puede ser extracrítica o (posiblemente (débilmente)) crítica.

Corolario 0.0.5 Si se considera únicamente una bifurcación simple (es decir, o (débilmente) crítica o extracrítica) y no híbrida, las condiciones respectivas dadas en el corolario (0.0.4) son necesarias y suficientes :

Una bifurcación extracrítica ([débilmente] crítica) ocurre si sólo si (no) se satisface la propiedad CRES].

Las bifurcaciones (débilmente) críticas son ambas compatibles con las propiedades CRES y noCRES. Lo mismo las extracríticas; en caso de bifurcaciones híbridas.

Finalmente, tenemos que la pérdida crítica de la estabilidad de M en $\lambda = \lambda_0$, cuando M es un conjunto silla y aislado de conjuntos invariantes para $\lambda = \lambda_0$, implica la bifurcación extracrítica de M . Queda como un problema abierto demostrar que a su vez los conjuntos que se bifurcan, son conjuntos sillan⁴(en un paper futuro).

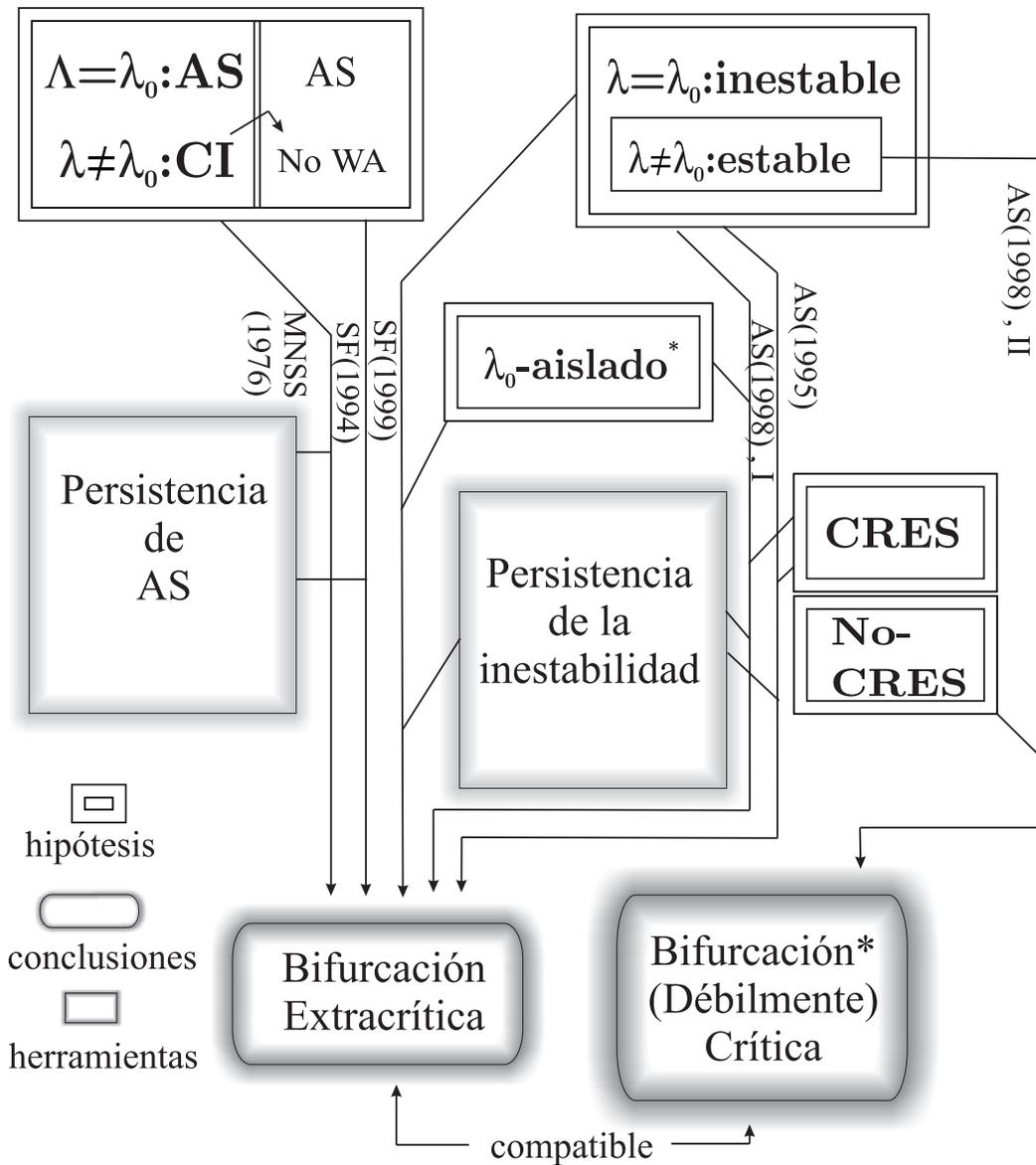
Nos parece natural abordar el problema anterior para el caso de sistemas dinámicos sobre un espacio métrico localmente compacto y después, para el caso general de una familia de sistemas semidinámicos que satisfacen alguna propiedad adicional de compacidad asintótica. La formulación precisa de este problema la proporcionamos en las conclusiones de este trabajo.

Definición 1 *Un suconjunto $S \subset X$ se llama conjunto silla si:*

$$(\exists U \in \mathcal{S})(\forall V \in \mathcal{S})(\exists x \in V) \quad \gamma^+(x) \not\subset \bar{U} \quad x \in \gamma^+(\mathcal{C}\bar{U}),$$

donde el símbolo \mathcal{S} , es el filtro de vecindades del conjunto S .

AS: estabilidad asintótica CI: completamente estable WA: atractor débil



MNSS: Marchetti-Negrini-Salvadori-Scalia

SF : Seibert-Florio

AS : Aguirre-Seibert

* excluida una de la otra

Figura 1: En el lado izquierdo, ilustramos algunos resultados del problema de bifurcaciones que surgen de equilibrios estables y, en el lado derecho las que surgen de equilibrios inestables en conexión con los tipos de cambios de estabilidad.

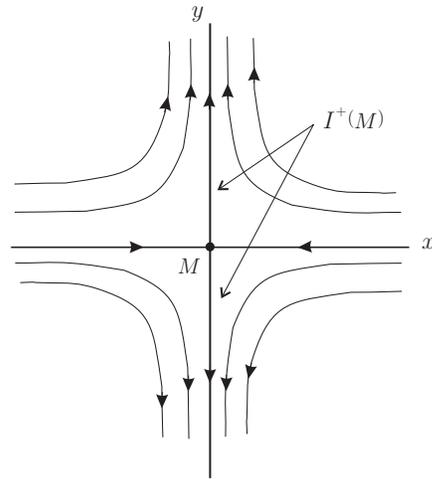


Figura 2: Ilustración de la Extensión dinámica del equilibrio M .

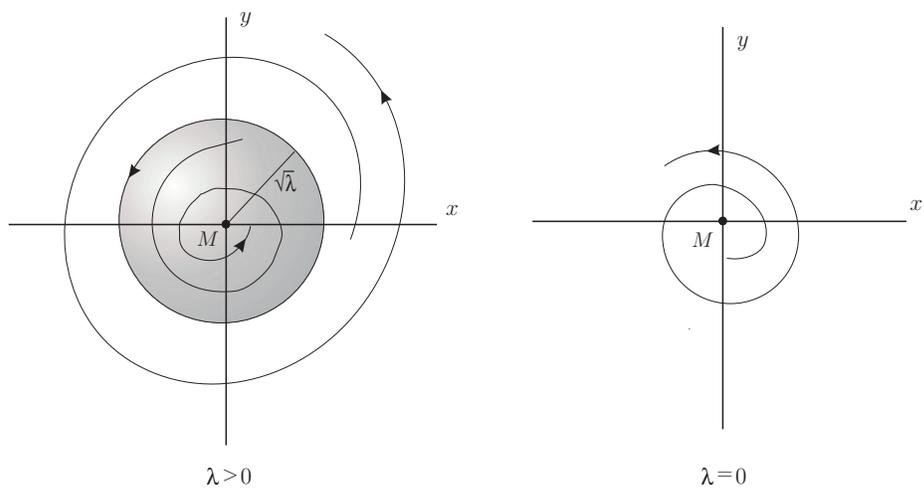


Figura 3: Ilustración del caso estándar de la bifurcación de Hopf.

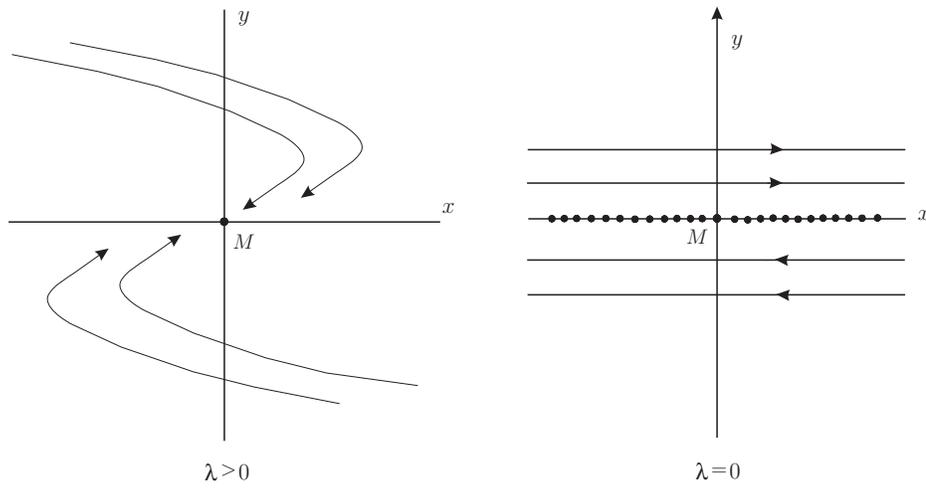


Figura 4: Ilustración de la bifurcación crítica.

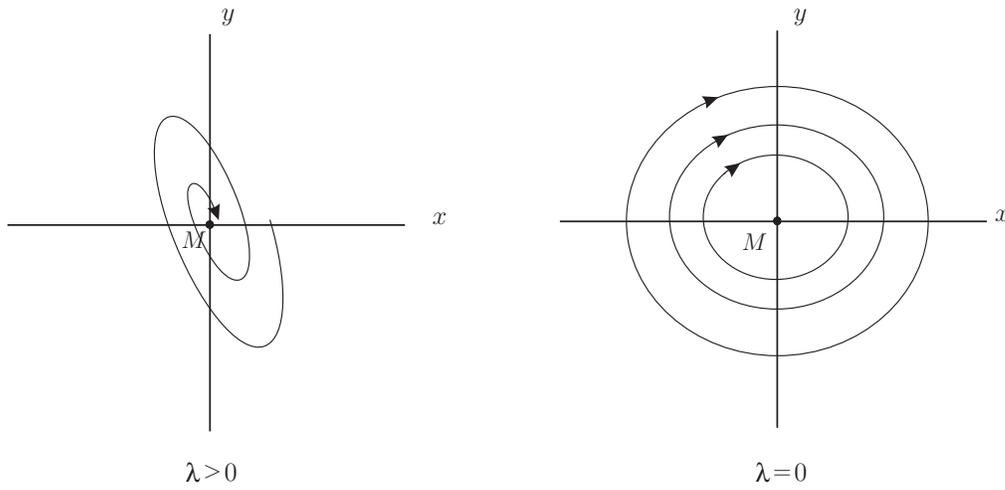


Figura 5: Ilustración de la pérdida de la propiedad de atracción de un conjunto invariante.

CAPÍTULO 1

Preliminares.

1.1 Familia de sistemas (semi)dinámicos.

Una familia continua de sistemas (semi)dinámicos o (semi)grupos continuos, (X, T, Λ, F) , consiste de un espacio métrico, por ejemplo lineal normado $(X, \| \cdot \|)$ (el espacio de estados), el (semi)grupo topológico ordenado T de los números reales (no negativos, llamado *escala de tiempo*), un espacio métrico (Λ, ρ) (el espacio de parámetros), y un mapeo continuo

$$F : X \times T \times \Lambda \rightarrow X$$

(la *dinámica*). Definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$, el λ -sistema $F_\lambda : X \times T \rightarrow X$ mediante

$$F_\lambda(x, t) := F(x, t, \lambda).$$

Denotaremos la familia (X, T, Λ, F) brevemente por F_Λ ($:= \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$), donde F_Λ representa una familia de sistemas (semi)dinámicos. Suponemos que la familia F_Λ satisface los siguientes **axiomas**:

- (I) F_λ^0 es el mapeo identidad ($\lambda \in \Lambda$).
- (II) $F_\lambda^t F_\lambda^{t'} = F_\lambda^{t+t'}$ ($t, t' \in T, \lambda \in \Lambda$).
- (III) F es continuo en $T \times X \times \{\lambda_0\}$.
- (IV) F es continuo con respecto al parámetro λ , en λ_0 , uniformemente en x y t en subconjuntos B acotados de X y en intervalos acotados, es decir:

$$\begin{aligned}
& (\forall B \in \mathcal{B}) \quad (\forall \tau \in T, \epsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathcal{N}) \\
& (\forall x \in B, t \in [0, \tau], \lambda \in N) \quad d(F_\lambda^t(x), F_{\lambda_0}^t(x)) < \epsilon.
\end{aligned}$$

A veces F puede no estar definida para todo $t \in T$, y sin embargo la teoría hace sentido.

La métrica asociada a la norma la denotamos por: $d(x, y)$.

Además usaremos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned}
B_r(x) &:= \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \quad (r > 0, x \in X) \\
S_r(x) &:= \{y \in X \mid d(x, y) = r\} \\
B_r(A) &:= \{x \in X \mid d(x, A) < r\} \quad (A \subset X) \\
S_r(A) &:= \{x \in X \mid d(x, A) = r\}
\end{aligned}$$

donde $d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.

Las sucesiones $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, las denotamos simplemente por $x_{\mathbb{N}}$.

Fijamos un elemento λ_0 en Λ , y denotamos el sistema de vecindades de λ_0 por \mathcal{N} . Al sistema F_{λ_0} lo llamamos *no perturbado*, y los otros F_λ , para $\lambda \neq \lambda_0$, perturbados (con respecto a F_{λ_0}).

El filtro generado por las vecindades esféricas de un punto x o un subconjunto compacto M de X los denotamos con \mathcal{V}_x y \mathcal{V}_M , respectivamente. La familia de conjuntos acotados en X , la denotamos con \mathcal{B} .

Las transformaciones $F_\lambda^t : X \rightarrow X$ definen para cada t y para cada λ las *t-transiciones* mediante $F_\lambda^t(x) := F(x, t, \lambda)$ para todo $x \in X$, y la familia de funciones punto conjunto de la forma $F_{t,\lambda} : X \rightarrow 2^X$,

$$F_{t,\lambda}(x) := \{F_\lambda^{t'}(x) \mid t' \geq t\}$$

para toda $x \in X$, y para toda $(t, \lambda) \in T \times \Lambda$, definen las *λ -semiórbitas retardadas*. En particular, la *λ -semiórbita positiva* a través de $x \in X$, la escribiremos como:

$$\gamma_\lambda^+(x) := F_{0,\lambda}(x) = \{F_\lambda^t(x) \mid t \geq 0\},$$

al conjunto límite correspondiente a x como $L_\lambda^+(x) \left(:= \bigcap \{\overline{F_{t,\lambda}(x)} \mid t > 0\} \right)$. En términos de sucesiones,

$$L_\lambda^+(x) := \{y \in X \mid \exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+, t_n \rightarrow +\infty, F^{t_n}(x) \rightarrow y\}.$$

Si $A \subset X$, $\gamma_\lambda^+(A) := \bigcup \{\gamma_\lambda^+(x) \mid x \in A\}$. Además, si $x \in X$, $t \in T$, $A \subset X$, $I \subset T$, escribimos

$$\begin{aligned} F^t(A) &:= \{F^t(x) \mid x \in A\}, \\ F^I(x) &:= \{F^t(x) \mid t \in I\}, \\ F^I(A) &:= \{F^t(x) \mid x \in A, t \in I\}, \end{aligned}$$

y análogamente para otros mapeos.

Observamos que como consecuencia del axioma (II), vale la identidad

$$F_{t,\lambda}(x) = \gamma_\lambda^+(F_\lambda^t(x))$$

que relaciona una λ -semiórbita retardada en x con una λ -semiórbita positiva a través de $F_\lambda^t(x)$.

El interior, la cerradura y la frontera del conjunto A , los denotamos por $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} y ∂A respectivamente, y al complemento del conjunto A , por $\mathcal{C}A$.

Definición 2 *Un (semi-) grupo F^T es asintóticamente compacto (AC) sobre $A \subset X$ si para toda pareja de sucesiones $x_\mathbb{N} \subset A$, $t_\mathbb{N} \subset T$, tal que $t_n \rightarrow +\infty$, $F^{[0,t_n]}(x_n) \subset A$, el conjunto $\{F^{t_n}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es relativamente compacto.*

Definimos para cada $\lambda \in \Lambda$ el conjunto λ -límite $L_\lambda^+(A)$ del conjunto A , como el conjunto de los límites de todas las sucesiones convergentes de la forma $\{F_\lambda^{t_k}(x_k)\}_{k=1}^\infty$ donde $x_k \in A$ y $t_k \rightarrow +\infty$.

Ejemplo 1 *Un ejemplo de una familia continua de sistemas dinámicos está dado por la siguiente familia de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas que dependen de un parámetro:*

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \Lambda, \quad f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

donde λ es un parámetro en el espacio Λ , y $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y Lipschitz para cada $\lambda \in \Lambda$. Supongamos que para cada $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ existe una única solución $\varphi_t(x, \lambda)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}^+$ que satisface $\varphi_0(x, \lambda) = x$. Poniendo $X = \mathbb{R}^n$, definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$, $F_\lambda^t : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ mediante $F_\lambda^t(x) := \varphi_t(x, \lambda)$. Entonces se obtiene una familia de sistemas dinámicos F_Λ , sobre $\Omega \subset X \times \mathbb{R}^+$, con Ω es un conjunto abierto que contiene a $X \times \{0\}$, suponiendo que (1.1) satisface la condición de dependencia continua correspondiente.

1.2 Conceptos básicos en sistemas (semi)dinámicos.

Definición 3 Una función $\phi : I \rightarrow X$, donde I es un intervalo no vacío contenido en \mathbb{R} , es una solución del sistema semidinámico (X, T, F) si $t \in I, s \in \mathbb{R}^+$ y $t + s \in I$ implican que

$$F^s(\phi(t)) = \phi(t + s).$$

El intervalo I es el *dominio* de ϕ y se denota con $\mathcal{D}(\phi)$. Si $x \in X$, la solución ϕ con $0 \in \mathcal{D}(\phi)$ y $\phi(0) = x$ se llama *movimiento positivo a través de* x . Cualquier solución con x en su rango, se llama solución a través de x .

Definición 4 Una solución $\hat{\phi}$ es una extensión de una solución ϕ , si $\mathcal{D}(\hat{\phi}) \supset \mathcal{D}(\phi)$ y $\hat{\phi} = \phi$ sobre $\mathcal{D}(\phi)$. Una solución se llama *maximal*, si para cualquier extensión $\hat{\phi}$ de ϕ tenemos $\mathcal{D}(\hat{\phi}) = \mathcal{D}(\phi)$.

Proposición 1.2.1 ([Sa], Capítulo I, Teorema 4.4.) Para cualquier $x \in X$ existe una solución maximal correspondiente a x .

Definición 5 Una solución maximal se llama *principal* si su dominio es \mathbb{R} .

Definición 6 El punto x se llama *crítico*, o un *equilibrio* o *punto de reposo*, si $x = F^t(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Definición 7 Una órbita correspondiente a x es el rango de una solución maximal correspondiente a x .

Una órbita se llama *principal* si la solución correspondiente es principal.

Definición 8 Un conjunto $M \subset X$ se llama *positivamente invariante* si para todo $x \in M$, vale $\gamma^+(x) \subset M$. El conjunto M es *invariante* si M y $X \setminus M$ son ambos *positivamente invariantes*.

Proposición 1.2.2 ([Sa], Capítulo II, Lema 2.4.) La cerradura de un conjunto positivamente invariante, es positivamente invariante. La unión y la intersección de conjuntos positivamente invariantes son positivamente invariantes.

Definición 9 Para $x \in X$ el conjunto $H^+ := \overline{\gamma^+(x)}$ se llama envolvente positiva o cerradura de la semiórbita positiva. Si $H^+(x)$ es compacto, el movimiento positivo correspondiente se llama compacto.

Definición 10 Un conjunto $M \subset X$ se llama débilmente invariante si para todo punto $x \in M$, existe una órbita correspondiente a x contenida en M .

Proposición 1.2.3 ([Sa], 1 c Teorema 3.5.) Si $\gamma^+(x)$ es relativamente compacto, el conjunto límite $L^+(x)$ es no vacío, compacto y débilmente invariante. Además, todas las órbitas contenidas en $L^+(x)$ son principales.

CAPÍTULO 2

El principio de persistencia de la extensión dinámica.

2.1 La inestabilidad, la primera prolongación positiva y el límite prolongacional positivo de un conjunto.

Consideremos un sistema semidinámico definido sobre un espacio métrico (X, d) y un conjunto positivamente invariante compacto $M \subset X$.

Definición 11 *Un conjunto invariante M es inestable si*

$$(\exists U \in \mathcal{V}_M)(\forall V \in \mathcal{V}_M) \quad \gamma^+(V) \not\subset U.$$

Definición 12 *Definimos la prolongación positiva mediante el mapeo*

$$D^+ : X \rightarrow 2^X,$$

donde para cada $x \in X$, $D^+(x)$ es el conjunto

$$\begin{aligned} D^+(x) &:= \{y \in X \mid \exists x_{\mathbb{N}} \subset X, \exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+; x_n \rightarrow x \text{ y } F^{t_n}(x_n) \rightarrow y\} \\ &= \bigcap \{\overline{\gamma^+(U)} \mid U \in \mathcal{V}_x\}. \end{aligned}$$

Definición 13 Definimos el conjunto límite prolongacional positivo mediante el mapeo $J^+ : X \rightarrow 2^X$, donde para cada x , $J^+(x)$ es el conjunto:

$$\begin{aligned} J^+(x) &:= \{y \in X \mid \exists x_{\mathbb{N}} \subset X, \exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+; x_n \rightarrow x, t_n \rightarrow +\infty \\ &\quad \text{y } F^{t_n}(x_n) \rightarrow y\} \\ &= \bigcap \{\overline{\gamma^+(F^t(V))} \mid t \in \mathbb{R}^+, V \in \mathcal{V}_x\}. \end{aligned}$$

Otra forma útil de definir la *prolongación positiva* de un conjunto, es en términos de vecindades, y se obtiene a partir de la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 Sean $x, y \in X$ y consideremos el mapeo $D^+ : X \rightarrow 2^X$ de la Definición 12, entonces

$$y \in D^+(x) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \exists x' \in U, \exists y' \in V : y' \in \gamma^+(x'). \quad (2.1)$$

Demostración: Primero supongamos que $y \in D^+(x)$, luego, existen $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ tales que $y_n \in \gamma^+(x_n)$, como en la Definición 12. Entonces para cada pareja de vecindades $U \in \mathcal{V}_x$, $V \in \mathcal{V}_y$ existe n tal que $x_n \in U$, $F^{t_n}(x_n) \in V$, y se obtiene la necesidad de la condición para $y \in D^+(x)$. Para demostrar la suficiencia, tomamos un sistema fundamental numerable $U_{\mathbb{N}}$ de vecindades de x , y otro, $V_{\mathbb{N}}$ de y ; entonces dados $U \in \mathcal{V}_x$ y $V \in \mathcal{V}_y$ como en 2.1, elegimos n tal que $U_n \subset U$ y $V_n \subset V$. Luego, existe $x_n \in U_n$ y $y_n \in V_n$ tales que $y_n \in \gamma^+(x_n)$, y de aquí se sigue que $y \in D^+(x)$. ■

Como consecuencia de la proposición anterior escribimos

$$\begin{aligned} D^+(x) &= \{y \mid \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \gamma^+(U) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{y \mid \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \exists x' \in U, \exists y' \in V, y' \in \gamma^+(x')\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Análogamente, enunciaremos la siguiente proposición a partir de la cual obtenemos otra forma útil de definir el *límite prolongacional* de un punto:

Proposición 2.1.2 Sean $x, y \in X$ y consideremos el mapeo $J^+ : X \rightarrow 2^X$ de la Definición 13, entonces

$$y \in J^+(x) \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \forall t > 0 : \gamma^+(F^t(U)) \cap V \neq \emptyset. \quad (2.3)$$

2.1 La inestabilidad, la primera prolongación positiva y el límite prolongacional positivo de un conjunto. 27

Demostración: Primero suponemos que $y \in J^+(x)$; de la Definición 13 tenemos que $\exists x_{\mathbb{N}} \subset X$, $\exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $x_n \rightarrow x$, $t_n \rightarrow +\infty$ y $F^{t_n}(x_n) \rightarrow y$. Esto implica que $\forall U \in \mathcal{V}_x$, $\forall V \in \mathcal{V}_y$, $\forall t > 0$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N : x_n \in U$, $F^{t_n}(x_n) \in V$, $t_n > t$. Observemos que existe $\tau_n \geq 0$ tal que

$$t_n = t + \tau_n \quad \text{y} \quad F^{t_n}(x_n) = F^t(F^{\tau_n}(x_n)) \in \gamma^+(F^{\tau_n}(x_n)) = \gamma^+(x_n)$$

entonces $\gamma^+(U) \cap V \neq \emptyset$. Para probar la suficiencia, tomamos un sistema fundamental de vecindades de x , \mathcal{V}_x y otro de y , \mathcal{V}_y . Sean $U \in \mathcal{V}_x$ y $V \in \mathcal{V}_y$ dadas como en la relación (A.26); elegimos n tal que $B_{\epsilon_n}(x) \subset U$, $B_{\epsilon_n}(y) \subset V$, donde $\epsilon_n > 0$, existe porque U y V son abiertos, luego por hipótesis tenemos que

$$(\forall t > 0) \quad \gamma(F^t(B_{\epsilon_n}(x))) \cap B_{\epsilon_n}(y) \neq \emptyset. \quad (2.4)$$

Esto implica que dado $t > 0$, $\exists y_n \in \gamma^+(F^t(x_n))$,

$$\exists x_n \in B_{\epsilon_n}(x), \exists t_n = t + \tau'_n, \tau'_n \geq 0 : \quad y_n := F^{t_n}(x_n) \in B_{\epsilon_n}(y).$$

Tomamos una sucesión $\{\epsilon_n\}$ con $\epsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, y aplicando el lado derecho de la relación (A.26) para cada n , tomemos que $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ y $t_n \rightarrow +\infty$, puesto que t se puede hacer tan grande como se quiera. Esto prueba la condición suficiente para que $y \in J^+(x)$.

La proposición anterior, implica que podemos escribir el *límite prolongacional positivo* de un punto $x \in X$ como:

$$J^+(x) := \{y \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \forall t > 0 : \gamma^+(F^t(U)) \cap V \neq \emptyset\}. \quad (2.5)$$

■

La *prolongación positiva del conjunto* M se define en términos de la prolongación positiva de un punto:

$$D^+(M) := \bigcup_{x \in M} \{D^+(x) \mid x \in M\},$$

y el correspondiente *límite prolongacional positivo* del conjunto M mediante:

$$J^+(M) := \bigcup_{x \in M} \{J^+(x) \mid x \in M\}.$$

Definición 14 Definimos la extensión dinámica positiva de M mediante

$$I^+(M) := D^+(M) \setminus M.$$

Si M es inestable, la extensión dinámica de M con respecto a F es el conjunto de puntos fuera de M que se pueden aproximar a partir de una sucesión de puntos arbitrariamente cercanos a M bajo la acción de F .

Para abreviar, de aquí en adelante, en lugar de escribir *extensión dinámica positiva* escribiremos *extensión dinámica*.

Proposición 2.1.3 ([Bh]) *Si el espacio X es localmente compacto, el conjunto M es inestable si y sólo si $I(M) \neq \emptyset$.*

La condición necesaria en la Proposición 2.1.3 vale en general. Con respecto a la condición suficiente, si vale la siguiente proposición:

Proposición 2.1.4 *Si M es inestable bajo F^T , y F^T es AC en una vecindad de M , entonces M es inestable si y sólo si $I^+(M) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{V}_M$ en la cual F^T es AC. La inestabilidad de M implica que existe una vecindad $U \in \mathcal{V}_M$, que podemos escoger de tal manera que $\bar{U} \subset W$, y existe $x_{\mathbb{N}} \subset X$, $x_n \rightarrow M$, $\gamma^+(x_n) \not\subset U$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y existe $t_{\mathbb{N}} \subset T$ tal que $F^{t_n}(x_n) \in \partial U$ (por continuidad del semigrupo F^T). La propiedad AC en W implica que existe $y \in \partial U$ y existe una subsucesión, $\{F^{t'_k}(x'_k)\}$, de $\{F^{t_k}(x_k)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $F^{t'_k}(x_k) \rightarrow y$, por lo tanto $y \in I(M)$. La otra implicación es evidente, pues se sigue de la propiedad de separación del espacio.

El ejemplo que sigue muestra que es necesario que F^T sea AC en una vecindad de M para que la Proposición 2.1.4 sea verdadera.

Ejemplo 2 *Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

sobre $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

Sea $M = \{(0, 0)\}$; en este caso $I^+(M) = \emptyset$, a pesar de que el origen es inestable.

Sin embargo, no hay contradicción con la Proposición 2.1.4 porque el semigrupo F^T definido por (2.6) no es AC para ninguna vecindad de M , pues X no contiene al conjunto $\{(x, 0) \mid x \neq 0\}$. (ver la Figura 2.1).

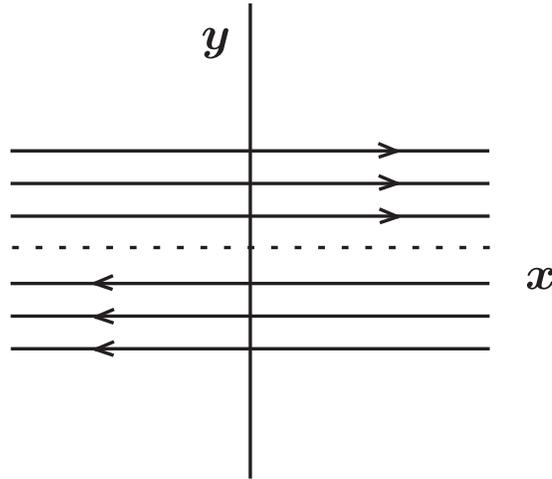


Figura 2.1: Ilustración del Ejemplo 2

Proposición 2.1.5 *Sea M positivamente invariante y compacto. Si $y \notin M$ y $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $d(x_n, M) \rightarrow 0$, $\exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, tal que $F^{t_n}(x_n) \rightarrow y$, entonces $t_n \rightarrow +\infty$.*

Demostración. En caso contrario, supongamos que la sucesión $t_{\mathbb{N}}$ mencionada en la hipótesis contiene una subsucesión acotada, entonces existe una subsucesión $t'_{\mathbb{N}}$ de esta tales que a su vez escogiendo la subsucesión, se puede suponer que $t_n \rightarrow t^* < +\infty$. La continuidad conjunta de F con respecto a t y x , implican que $F^{t_n}(x_n) \rightarrow F^{t^*}(x)$, para alguna $x \in M$, con $x_n \rightarrow x$. Por lo tanto, $F^{t^*}(x) = y \in M$, puesto que M es positivamente invariante. Lo cual es una contradicción con el hecho de que $y \notin M$. ■

Proposición 2.1.6 *Sea M compacto, positivamente invariante, inestable y AC sobre alguna vecindad $W \in \mathcal{V}_M$, entonces vale:*

$$\left(J^+(M) \cap W \right) \setminus M \neq \emptyset. \tag{2.7}$$

Demostración: La inestabilidad de M implica que existe una vecindad $U \in \mathcal{V}_M$ y existe una sucesión $x_{\mathbb{N}} \subset X$ tales que $x_n \rightarrow M$ y $\gamma^+(x_n) \not\subset U$ para toda n . Debido a que M es compacto, se puede suponer que existe $x^* \in M$ y existe una subsucesión de la mencionada arriba, tales que $x_n \rightarrow x^*$. También se puede suponer que $\bar{U} \subset W$, puesto que una vez que tenemos la U de la Definición 11,

para cualquier vecindad de M contenida en U es de igual manera aplicable la misma Definición 11 sin pérdida de generalidad. Entonces por la continuidad de F en t , para cada n existen tiempos $t_n > 0$ tales que

$$F^{[0,t_n]}(x_n) \subset U \quad \text{y} \quad F^{t_n}(x_n) \in \partial U \subset \bar{U}, \quad (2.8)$$

Pero además, dado que por hipótesis el sistema semidinámico es AC sobre W , existe una subsucesión de $x_{\mathbb{N}}$ (que se puede suponer sea la misma $x_{\mathbb{N}}$ mediante la reenumeración) que converge en $\partial U \subset W$, es decir, existe

$$y^* \in \partial U : \quad F^{t_n}(x_n) \rightarrow y^* \quad (2.9)$$

puesto que ∂U es un conjunto cerrado (ver [6] pp. 53); por otra parte, siendo M positivamente invariante, según la Proposición 2.1.5, tenemos que $t_n \rightarrow +\infty$ de donde se sigue que $y^* \in J^+(x) \cap W$, pero $y^* \notin M$ por ende $y^* \in J^+(M) \setminus M$; es decir obtenemos (2.7). ■

Proposición 2.1.7 *Sea $M \subset X$ con las mismas hipótesis de la Proposición 2.1.6, entonces*

$$I^+(M) = J^+(M) \setminus M. \quad (2.10)$$

Demostración: Sea $y \in I^+(M)$, entonces $y \notin M$ y $\exists x \in M$, $\exists x_{\mathbb{N}} \subset X$, $\exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, tales que $x_n \rightarrow x$ y $F_n^{t_n}(x_n) \rightarrow y$ (ver la Definición 12). Luego, puesto que M es positivamente invariante y compacto, $t_n \rightarrow \infty$ (ver la Proposición 2.1.5), esto implica que $y \in J^+(M) \setminus M$. Recíprocamente, si $y \in J^+(M) \setminus M$, de la Definición 13 se tiene que $y \in I^+(M)$. ■

Corolario 2.1.8 *Sea $M \subset X$ con las mismas hipótesis de la Proposición 2.1.6, entonces*

$$I^+(M) \cap W \neq \emptyset. \quad (2.11)$$

Demostración: Puesto que $(J^+(M) \cap W) \setminus M = (J^+(M) \setminus M) \cap W$, la Proposición 2.1.6 implica que $(J^+(M) \setminus M) \cap W \neq \emptyset$ y luego la relación (2.11) se obtiene a partir de la relación (2.10). ■

Definición 15¹ Definimos la prolongación positiva relativa (PPR) de M con respecto al conjunto $A \subset X$, como

$$D_A^+(M) := \{y \in A \mid \exists x_n \ d(x_n, M) \rightarrow 0, \exists t_n \geq 0, F^{[0, t_n]}(x_n) \subset A \text{ y } F^{t_n}(x_n) \rightarrow y\}$$

(es equivalente a la prolongación de M con respecto a la restricción de F a $A \times T$).

Entonces, la extensión dinámica relativa (EDR) del conjunto $M \subset X$, con respecto al conjunto $A \subset X$ se define como

$$I_A^+(M) := D_A^+(M) \setminus M.$$

Concluimos esta sección con la siguiente proposición.

Proposición 2.1.9 Sea $M \subset X$, compacto y positivamente invariante. Supongamos además que F^T es AC en una vecindad $A = \mathring{A} \in \mathcal{V}_M$, entonces $D_A^+(M)$ es compacto.

Demostración. Supongamos que $D_A^+(M)$ no es compacto, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I_A(M)$ que no contiene ninguna subsucesión convergente. Luego para cada $y_n \in I_A(M)$, n fijo, existe una sucesión, por la Definición 15,

$$\{x_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}, \quad d(x_{n,m}, M) \rightarrow 0 \tag{2.12}$$

y existen

$$\{t_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ \tag{2.13}$$

tales que

$$y_{n,m} := F^{t_{n,m}}(x_{n,m}) \rightarrow y_n, \quad \text{para } m \rightarrow \infty. \tag{2.14}$$

Además, aplicando la Proposición 2.1.5, $t_{n,m} \rightarrow +\infty$, para $m \rightarrow \infty$.

De esta última sucesión escogemos una subsucesión $\{y'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$d(y'_n, y_n) < \epsilon_n, \text{ con } \epsilon_n \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde además $y'_n := F^{t'_n}(x'_n)$, $d(x'_n, M) \rightarrow 0$ y $x'_n := x_{n,m_n}$ es una subsucesión de (2.12) y $t'_n := t_{n,m_n} \rightarrow +\infty$ es una subsucesión de (2.13). Por otro lado,

¹El concepto de *prolongación relativa* lo acuñaron T. Ura [Ur], P. Seibert [Se] y N.P. Bathia [Bh].

puesto que F^T es AC en $A = \overset{\circ}{A}$, la sucesión $\{y'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge. Entonces, dada $\epsilon > 0$ escogemos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para

$$n, m \geq N : d(y'_n, y'_m) < \frac{\epsilon}{3}, d(y'_n, y_n) < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } d(y'_m, y_m) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Luego por la desigualdad del triángulo,

$$d(y_n, y_m) \leq d(y'_n, y_n) + d(y'_n, y'_m) + d(y'_m, y_m) < \epsilon.$$

Esto implica que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, por lo tanto toda sub-sucesión de esta es convergente, lo cual es una contradicción. ■

2.1.1 La persistencia de la extensión dinámica.

Consideremos una familia de semigrupos F_Λ^T que actúa sobre el espacio métrico X . Para cada $\lambda \in \Lambda$ los símbolos $D_\lambda^+(M)$ e $I_\lambda(M)$ denotan la λ -prolongación positiva y la λ -extensión dinámica del conjunto M , respectivamente, definidas en la sección anterior. Suponiendo que $M \subset X$ es compacto y positivamente invariante, en esta sección demostraremos que la λ -extensión dinámica de M , $I_\lambda(M)$, definida como un mapeo de puntos a conjuntos:

$$I_{(\cdot)}(M) : \Lambda \rightarrow 2^X \quad (2.15)$$

donde,

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad I_\lambda(M) := D_\lambda^+(M) \setminus M.$$

tiene la propiedad de semicontinuidad inferior en $\lambda = \lambda_0$, para el cual, M es λ_0 -inestable. La semicontinuidad inferior, en el sentido de prolongación con respecto a λ : es decir, **el cambio de la λ -extensión dinámica de M , $I_\lambda^+(M)$, producido por pequeños cambios del parámetro λ alrededor del valor $\lambda = \lambda_0$, no es implosivo**; aunque $I_\lambda^+(M)$, no es semicontinuo en el sentido ordinario (ver por ejemplo [Sa], pág. 62).

El Axioma IV, concerniente a que la familia F_Λ de sistemas dinámicos depende continua y uniformemente con respecto al parámetro λ en Λ , tenemos las siguiente proposición.

Proposición 2.1.10 *Sea $M \subset X$ compacto, positivamente invariante, λ_0 -inestable para $\lambda_0 \in \Lambda$ y, además, sea $F_{\lambda_0}^T$ AC en una vecindad W de M . Entonces*

$$\begin{aligned} y \in D_{\lambda_0}(M) &\Leftrightarrow \\ \forall U \in \mathcal{V}_M, \forall V \in \mathcal{V}_y, \exists N \in \mathcal{N} : \forall \lambda \in N, \gamma_\lambda^+(U) \cap V &\neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Demostración: La primera ecuación de (2.2), aplicada a $D_{\lambda_0}^+(M)$, da la suficiencia. Para demostrar la necesidad, sea $y \in D_{\lambda_0}^+(M)$; entonces, para $U \in \mathcal{V}_M$, $V \in \mathcal{V}_M$ dadas, aplicando la segunda ecuación de (2.2), elegimos $x' \in U$, $y' \in \overset{\circ}{V}$ tales que $y' \in \gamma_{\lambda_0}^+(x')$. Sea $\tau \geq 0$ tal que $y' = F_{\lambda_0}^\tau(x')$. Puesto que $y' \in \overset{\circ}{V}$, $V \in \mathcal{V}_{y'}$. El axioma IV implica que, $\exists N \in \mathcal{N}$ tal que $\forall \lambda \in N$, $F_\lambda^\tau(x') \in V$, es decir,

$$\forall \lambda \in N, \quad \gamma_\lambda^+(U) \cap V \neq \emptyset.$$

■

Definición 16 Definimos la prolongación perturbacional fuerte (PPF) en $\lambda_0 \in \Lambda$, mediante el mapeo $\mathbb{D}_{\lambda_0}^+ : X \rightarrow 2^X$, y , para cada $x \in X$ escribimos

$$\mathbb{D}_{\lambda_0}^+(x) := \{y \mid \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \exists N \in \mathcal{N} : \forall \lambda \in N, \gamma_\lambda^+(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Definimos la *prolongación perturbacional fuerte* de un conjunto $M \subset X$, como la unión de las prolongaciones perturbacionales fuertes de los puntos del conjunto M , es decir,

$$\mathbb{D}_{\lambda_0}(M) := \cup\{\mathbb{D}_{\lambda_0}(x) \mid x \in M\}.$$

Llamamos *extensión dinámica perturbacional* (EDP) de un conjunto $M \subset X$ en $\lambda_0 \in \Lambda$, $\mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, a la diferencia $\mathbb{D}_{\lambda_0}^+(M) \setminus M$, esto es,

$$\mathbb{I}_{\lambda_0}(M) := \mathbb{D}_{\lambda_0}^+(M) \setminus M.$$

Proposición 2.1.11 (*Principio de persistencia de la extensión dinámica*). Sea $M \subset X$ positivamente invariante, compacto, λ_0 -inestable para $\lambda_0 \in \Lambda$ y, supongamos además que el semigrupo $F_{\lambda_0}^T$ es AC, en una vecindad W de M . Entonces

$$I_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M). \quad (2.17)$$

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de la equivalencia (2.16) de la Proposición 2.1.10. ■

Ilustramos el contenido del **principio de persistencia de la inestabilidad** mediante la siguiente figura.

Definición 17 Definimos la prolongación perturbacional semi-fuerte (PPSF) de $x \in X$ en $\lambda_0 \in \Lambda$, mediante el mapeo $\mathbb{D}'_{\lambda_0} : X \rightarrow 2^X$, y , para cada $x \in X$ escribimos,

$$\mathbb{D}'_{\lambda_0}(x) := \{y \mid \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \exists N \in \mathcal{N}, \forall \lambda \in N' : \gamma_\lambda^+(U) \cap V \neq \emptyset\},$$

donde $N' := N \setminus \{\lambda_0\}$.

Definimos la *prolongación perturbacional semi-fuerte* de un conjunto $M \subset X$ en λ_0 , como la unión de las prolongaciones semifuertes de los puntos del conjunto M , o sea,

$$\mathbb{D}'_{\lambda_0}(M) := \cup\{\mathbb{D}'_{\lambda_0}(x) \mid x \in M\}.$$

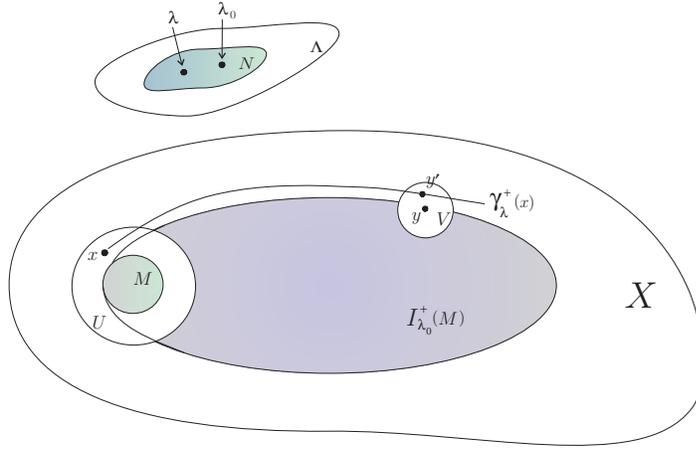


Figura 2.2: Ilustración de la persistencia de la extensión dinámica.

Llamamos *extensión dinámica prerturbacional semi-fuerte* (EDPSF) de un conjunto M en $\lambda_0 \in \Lambda$, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$, a la diferencia de conjuntos, $\mathbb{D}'_{\lambda_0}(M) \setminus M$, es decir:

$$\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) := \mathbb{D}'_{\lambda_0}(M) \setminus M.$$

Proposición 2.1.12 *Sea $M \subset X$ positivamente invariante, compacto, λ_0 -inestable para $\lambda_0 \in \Lambda$ y, supongamos además, que el semigrupo $F_{\lambda_0}^T$ es AC en una vecindad W de M . Entonces*

$$\mathbb{I}_{\lambda_0}(M) \subset \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M). \quad (2.18)$$

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de que $\lambda_0 \notin N \in \mathcal{N}$ en la ecuación (2.16) de la proposición (2.1.10). ■

A partir de la proposición 2.1.11 y de las ecuaciones (2.17), (2.18), tenemos que si M es λ_0 -inestable entonces $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) \neq \emptyset$. En los ejemplos que siguen ilustramos los conjuntos $\mathbb{I}_{\lambda}(M)$, $\mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$ y, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$ para sistemas de ecuaciones en el plano que dependen del parámetro λ .

Ejemplo 3 *Consideremos el sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales dependiente del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 - \lambda^2), \\ \dot{y} &= y(x^2 - \lambda^2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R} , el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y $M = \{(0,0)\}$ es el equilibrio común de la familia de sistemas (2.19), para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. El origen M es λ_0 -inestable, pero no completamente λ_0 -inestable por que este no es aislado de puntos de equilibrio, pertenece al conjunto de puntos de equilibrio, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$, del sistema 2.19 para $\lambda = \lambda_0$. Además, $I_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R}^2 \setminus M$. Por otra parte, para $\lambda > 0$, $I_\lambda(M) = \mathbb{I}_\lambda(M) = \emptyset$, en esta, la primera igualdad proviene de la ecuación (2.17) y la segunda, porque M es λ -asintóticamente estable con cuenca de atracción, $A_\lambda^+(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \lambda\}$. Este ejemplo, ilustra que en la siguiente relación,

$$\mathbb{I}_{\lambda_0}(M) = I_{\lambda_0}(M) \subset \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (2.20)$$

obtenida de las proposiciones 2.1.11 y 2.1.12, la inclusión no necesariamente es propia. (Ver la Figura 2.1.1).

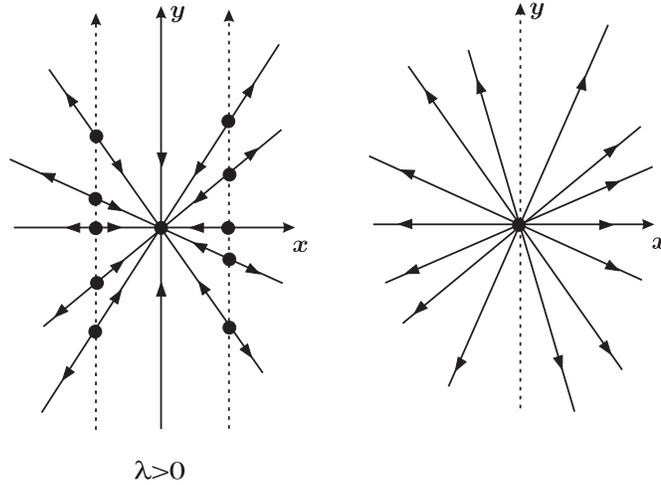


Figura 2.3: Ilustración del ejemplo 3

Ejemplo 4 Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = x((x^2 - 1)^2 + \lambda^2).$$

El espacio fase X es \mathbb{R} , el espacio de los parámetros Λ es \mathbb{R} , el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y $M = \{0\}$ es el equilibrio común de la familia de ecuaciones. Entonces $I_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M) = [-1, 0) \cup (0, 1]$ mientras que, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R} \setminus M$.

Para $\lambda \neq \lambda_0$, $I_\lambda(M) = \mathbb{R} \setminus M$, esto significa que la extensión dinámica “explota” cuando el parámetro sale del valor crítico, λ_0 . Este ejemplo también ilustra que la inclusión en 2.18, en general es propia (Ver Figura 2.4).

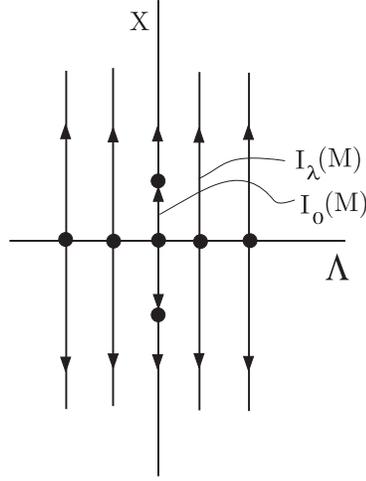


Figura 2.4: Ilustración del Ejemplo 4, la extensión dinámica “explota” cuando el parámetro sale del valor crítico, $\lambda_0 = 0$.

Definición 18 Definimos la prolongación perturbacional débil (PPD) en un punto $\lambda_0 \in \Lambda$, mediante el mapeo $\tilde{\mathbb{D}}_{\lambda_0} : X \rightarrow 2^X$, y para cada $x \in X$:

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(x) := \{y \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_x, \forall V \in \mathcal{V}_y, \forall N \in \mathcal{N}, \exists \lambda \in N : \gamma_\lambda^+(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Definimos la *prolongación perturbacional débil* (PPD) de un conjunto M en $\lambda_0 \in \Lambda$ como la unión de las prolongaciones de los puntos de M , o sea,

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M) := \cup \{\tilde{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(x) \mid x \in M\}.$$

y llamamos la *extensión dinámica prolongacional débil* (EDPD) de un conjunto M en $\lambda_0 \in \Lambda$, $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M)$, a la diferencia de conjuntos,

$$\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) = \tilde{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M) \setminus M.$$

Proposición 2.1.13 Sea $M \subset X$ invariante, compacto, λ_0 -inestable para $\lambda_0 \in \Lambda$, y, $F_{\lambda_0}^T$ un semigrupo AC en una vecindad W de M . Entonces

$$\mathbb{I}_{\lambda_0}(M) \subset \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) \subset \tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M). \quad (2.21)$$

Demostración. La primera inclusión en (2.21) está dada por la proposición 2.1.12; para demostrar la segunda, sea $y \in \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$. Dados $U \in \mathcal{V}_M$, $V \in \mathcal{V}_y$; fijamos $N \in \mathcal{N}$, como en la Definición 17, luego $\forall N_1 \in \mathcal{N}$, por ser \mathcal{N} un filtro de vecindades de λ_0 , $N \cap N_1 \in \mathcal{N}$, entonces tomamos $\lambda \in N \cap N_1$, esto implica que $\gamma_\lambda^+(U) \cap V \neq \emptyset$, puesto que $y \in \mathbb{D}'_{\lambda_0}(M)$ y $\lambda \in N$. ■

En general el conjunto $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M)$ contiene propiamente al conjunto $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$, esto lo demostramos mediante el ejemplo que sigue.

Ejemplo 5 Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad \text{donde } f(x, \lambda) = \begin{cases} x((x^2 - 1)^2 + \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} x), & \text{si } \lambda \neq 0, \\ x(x^2 - 1)^2, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

El espacio fase X es \mathbb{R} , el espacio de los parámetros Λ es \mathbb{R} . Poniendo el punto de equilibrio común de la familia de ecuaciones diferenciales como $M = \{0\}$ y, el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$. Entonces, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = I_{\lambda_0}(M) = [-1, 0) \cup (0, 1] = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, mientras que, $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Además,

$$I_{\lambda_n}^+(M) = [-1, 0) \cup (0, 1] \quad \text{para } \lambda_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad I_\lambda(M) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

para $\lambda_n \neq \frac{1}{n}$ y, $\lambda \neq 0$ (Ver la Figura 2.5).

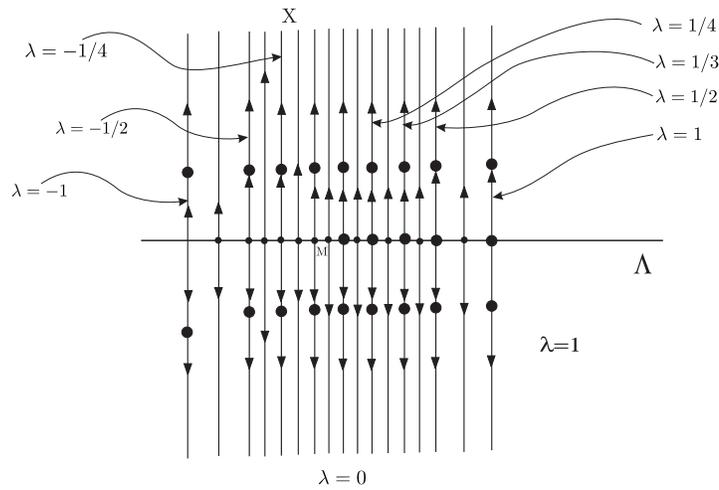


Figura 2.5: Ilustración del ejemplo 5, el conjunto $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M)$ contiene propiamente al conjunto $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$.

Considerando las Proposiciones 2.1.11, 2.1.12 y la ecuación (2.21), obtenemos el siguiente teorema

Teorema 2.1.14 *Sea $\lambda_0 \in \Lambda$; $M \subset X$ invariante, compacto, λ_0 -inestable y $F_{\lambda_0}^T$ un semigrupo AC en una vecindad W de M . Entonces*

$$I_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M) \subset \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) \subset \tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M). \quad (2.22)$$

Demostración. La igualdad en (2.22) es resultado de la proposición 2.1.11, la segunda y tercera contenciones resultan de las proposiciones 2.1.12 y 2.1.13 respectivamente. ■

En general las dos contenciones en (2.22) son propias, esto lo demostramos mediante el ejemplo que sigue.

Ejemplo 6 *Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales dependiente del parámetro λ ,*

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

donde,

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} x((1-x^2)^2 + \lambda^2) \left((4-x^2)^2 + \lambda^2 \text{sen}^2 \frac{\pi}{|\lambda|} \right), & \text{si } |\lambda| \neq 0, \\ x(1-x^2)^2(4-x^2)^2, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

El espacio fase X es \mathbb{R} , el espacio de parámetros Λ también es \mathbb{R} , el valor crítico $\lambda_0 = 0$ y, $M = \{0\}$ es el equilibrio de la familia de ecuaciones diferenciales para este ejemplo. Entonces obtenemos $I_{\lambda_0}(M) = [-1, 0) \cup (0, 1] = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = (0, 2]$ y, $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Ver la Figura 2.6).

Mediante el ejemplo que sigue, demostramos que en la ecuación (2.22) del teorema 2.1.14, los conjuntos $I_{\lambda_0}(M)$, $\mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M)$ y $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M)$, pueden ser iguales.

Ejemplo 7 *Sean $\lambda \geq 0$ y $B_\lambda = \{(0, 0)\} \cup (x, y) \mid x = \lambda, |y| \leq \lambda\}$. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales dependiente del parámetro $\lambda \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= d((x, y), B_\lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

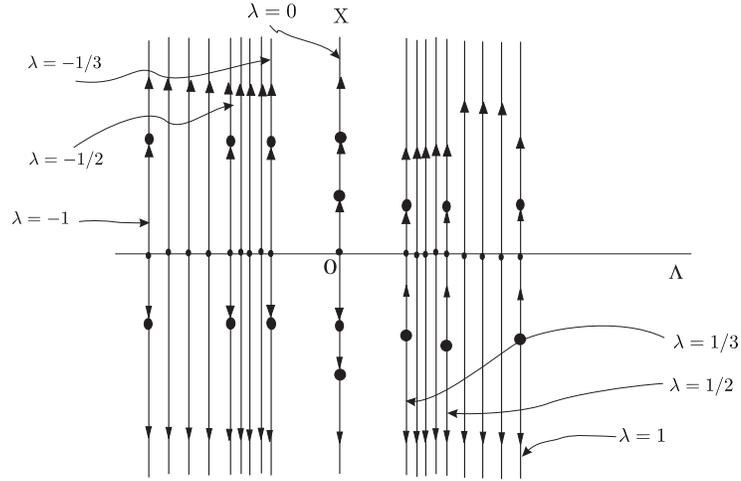


Figura 2.6: Ilustración del Ejemplo 6, las dos contenciones en (2.22) son propias, $I_{\lambda_0}(M) = [-1, 0) \cup (0, 1] = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, $\mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = (0, 2]$ mientras que, $\tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El espacio X es \mathbb{R} , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ , el valor crítico del parámetro $\lambda = \lambda_0$ y el origen $M := \{(0, 0)\}$ es un punto de equilibrio fijo e inestable $\forall \lambda \geq 0$. Para $\lambda > 0$, surge de M el conjunto $B'_\lambda := B_\lambda \setminus M$ de puntos de equilibrio inestables el cual se colapsa para $\lambda = \lambda_0$. Para $0 < \delta < \lambda$, tenemos que $L_\lambda^+(B_\delta(M)) \subset B'_\lambda$. Por lo tanto, en este caso

$$I_\lambda^+(M) := \{(x, y) \mid 0 < x \leq \lambda, y = 0\}, \quad (\lambda > 0),$$

mientras que,

$$I_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}_{\lambda_0}(M) = \mathbb{I}'_{\lambda_0}(M) = \tilde{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) = \{(x, y) \mid x > 0, y = 0\}.$$

Ilustramos este ejemplo en la Figura 2.7.

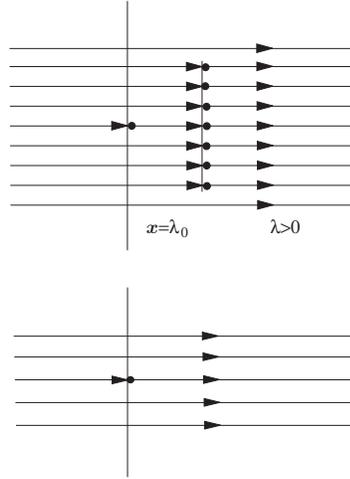


Figura 2.7: Ilustración del Ejemplo 7

Para cada $\lambda \in \Lambda$, asociando la λ -órbita de cada $x \in X$, $\gamma_\lambda^+(x)$, definimos un mapeo de puntos a conjuntos, $\gamma_\lambda^+ : X \rightarrow 2^X$. Análogamente, para cada $\lambda \in \Lambda$, asociando la λ -órbita del conjunto $A \in 2^X$, mediante $\gamma_\lambda^+(A) := \bigcup_{x \in A} \gamma_\lambda^+(x)$ (ver, [La], pp.3), definimos un mapeo de conjuntos a conjuntos, $\gamma_\lambda^+ : 2^X \rightarrow 2^X$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, reemplazando el mapeo Φ por γ_λ^+ valen en general las proposiciones A.0.10, A.0.11, A.0.13, A.20, A.0.17; y los corolarios A.0.14 y, A.0.15 del Apéndice A.

Considerando una familia de mapeos γ_λ^+ , la siguiente proposición concierne a la **continuidad \mathcal{U} -uniforme con respecto al parámetro** ($\mathcal{U} \in 2^X$), se sigue del axioma IV. La colección \mathcal{U} de subconjuntos de X es una colección cuyos elementos tienen cierta propiedad, como por ejemplo, ser acotados.

Proposición 2.1.15 Sean $\lambda_0 \in \Lambda$ y F_Λ una familia de sistemas semidinámicos. Entonces

$$(\forall A \in \mathcal{U})(\forall y \in \gamma_{\lambda_0}^+(A))(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) y \in B_\epsilon(\gamma_\lambda^+(A)).$$

Demostración. Sea $A \subset X$, $y \in \gamma_{\lambda_0}^+(A)$ y $\epsilon > 0$. Puesto que $y \in \gamma_{\lambda_0}^+(A)$, $\exists \tau > 0$ y $x^* \in A$ tal que $y = F_{\lambda_0}^\tau(x^*)$. Para $\tau > 0$, x^* fijos y $\epsilon > 0$; por el Axioma IV $\exists N \in \mathcal{N}$ tal que $\forall t \in [0, \tau]$, $\forall \lambda \in N$ $d(F_\lambda^t(x^*), F_{\lambda_0}^t(x^*)) < \epsilon$. Esto implica que $F_\lambda^t(x^*) \subset B_\epsilon(\gamma_{\lambda_0}^+(x^*)) \subset B_\epsilon(\gamma_{\lambda_0}^+(A))$. En particular si $t = \tau$,

$$y = F_\lambda^\tau(x^*) \in B_\epsilon(\gamma_\lambda^+(A)).$$

■

En el contexto de la teoría general desarrollada en el Apéndice A para familias Φ_Λ de mapeos, Φ , de conjuntos a conjuntos, los resultados de esta teoría son completamente aplicables a las familias de mapeos γ_Λ^+ , porque estas satisfacen la proposición 2.1.15, la cual es equivalente a la propiedad de **continuidad \mathcal{U} -uniforme** ($\mathcal{U} \in 2^X$) con respecto al parámetro expresada mediante A.23. Para aplicar esta teoría, formulamos las siguientes definiciones.

La prolongación positiva de M (definición 12) queda,

$$D(M) := \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon \left(\gamma^+(B_\epsilon(M)) \right).$$

Es decir,

$$y \in D(M) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in B_\epsilon(M) : y \in B_\epsilon(\gamma^+(x)).$$

Definición 19 Definimos la prolongación dinámica perturbacional inferior (P-DPI) de $M \subset X$ en λ_0 , bajo la acción de la familia de sistemas semidinámicos F_Λ , $\mathbb{D}_{\lambda_0}(M)$, mediante

$$\mathbb{D}_{\lambda_0}(M) := \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{N \in \mathcal{N}} \bigcap_{\lambda \in N} B_\epsilon \left(\gamma_\lambda^+(B_\epsilon(M)) \right).$$

Es decir,

$$y \in \mathbb{D}_{\lambda_0}(M) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{N}, \forall \lambda \in N, \exists x \in B_\epsilon(M) : y \in B_\epsilon(\gamma_\lambda^+(x)).$$

Llamamos *extensión dinámica perturbacional inferior* (EDPI) de $M \subset X$ en λ_0 , $\mathbb{I}_{\lambda_0}(M)$, a la diferencia de conjuntos, $\mathbb{D}_{\lambda_0}(M) \setminus M$; es decir,

$$\mathbb{I}_{\lambda_0}(M) := \mathbb{D}_{\lambda_0}(M) \setminus M.$$

Definición 20 Definimos la prolongación dinámica perturbacional superior (PDPS) de $M \subset X$ en λ_0 bajo la acción de la familia de sistemas semidinámicos F_Λ , $\bar{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M)$, mediante

$$\bar{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M) := \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \bigcup_{\lambda \in N} B_\epsilon \left(\gamma_\lambda^+(B_\epsilon(M)) \right).$$

Es decir,

$$y \in \bar{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathcal{N}, \exists \lambda \in N, \exists x \in B_\epsilon(M) : y \in B_\epsilon(\gamma_\lambda^+(x)).$$

Análogamente, llamamos *extensión dinámica perturbacional superior (EDPS)* de $M \subset X$ en λ_0 , $\bar{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M)$, a la diferencia de conjuntos $\bar{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M) \setminus M$, o sea,

$$\bar{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) := \bar{\mathbb{D}}_{\lambda_0}(M) \setminus M.$$

Considerando los teoremas A.0.18 y A.0.20 del Apéndice A, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1.16 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos, $\lambda_0 \in \Lambda$, $M \subset X$ positivamente invariante, compacto, λ_0 -inestable y $F_{\lambda_0}^T$ un semigrupo AC en una vecindad W de M . Entonces*

$$I_{\lambda_0}(M) = \underline{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M) \subset \bar{\mathbb{I}}_{\lambda_0}(M). \quad (2.23)$$

Demostración La igualdad y la inclusión en 2.23, se obtienen del teorema A.0.18 y del teorema A.0.20 del Apéndice A, respectivamente, reemplazando el mapeo Φ por γ^+ . ■

2.1.2 La persistencia como estabilidad.

Existe otra manera de enunciar el *principio de la persistencia de la extensión dinámica*, esta es a partir del concepto de la *E-equiestabilidad (E-S)*, que está motivado por la estabilidad según Lyapunov, es decir; *dada una ϵ -vecindad de un conjunto invariante $M \subset X$, existe una δ -vecindad del mismo conjunto invariante tales que para toda órbita con su punto inicial en la δ -vecindad, permanece en la ϵ -vecindad de M todo el tiempo*. Siguiendo esta idea, se enuncia la siguiente definición para un sistema semidinámico (X, T, F) .

Definición 21 *Sean $M \subset X$ un conjunto compacto, positivamente invariante y $E \subset X$; M es E-estable (E-S) si*

$$(\exists U \in \mathcal{V}_M) \quad (\forall x \in U) \quad \gamma^+(x) \subset E. \quad (2.24)$$

Definición 22 *Sean $M \subset X$ un conjunto compacto, positivamente invariante y $E \subset X$; M es E-inestable (E-I) si M no es E-S. Es decir, negando (2.24) se tiene que M es E-I, si*

$$(\forall U \in \mathcal{V}_M) \quad (\exists x \in U) \quad \gamma^+(x) \not\subset E. \quad (2.25)$$

En términos de sucesiones la Definición 22 es equivalente a la siguiente proposición.

Proposición 2.1.17 *Sea $M \subset X$ compacto y positivamente invariante $E \subset X$, entonces*

$$M \text{ es } E - I \Leftrightarrow (\exists x_{\mathbb{N}} \subset X)(x_n \rightarrow M) \quad \gamma^+(x_n) \not\subset E.$$

Demostración. Sean $M \subset X$ y $E \subset X$, con M compacto y positivamente invariante. Primero se demuestra la condición necesaria, para esto se supone que M es $E - I$; de la definición 22, se tiene que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \epsilon_n > 0)(\exists x_n \in B_{\epsilon_n}(M)) \quad \gamma^+(x_n) \not\subset E. \quad (2.26)$$

Sin pérdida de generalidad, se pueden escoger los números positivos ϵ_n , tales que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$. Entonces tomando $\epsilon_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow +\infty$, la compacidad de M implica que $x_n \rightarrow M$ y además de (2.26), $\gamma^+(x_n) \not\subset E$; con esto se obtiene la condición necesaria. Demostración de la suficiencia, se tiene por hipótesis, una sucesión $x_{\mathbb{N}} \subset X$ tales que $x_n \rightarrow M$ y $\gamma^+(x_n) \not\subset E$. La convergencia de $x_{\mathbb{N}}$ al conjunto M implica que

$$(\forall U \in \mathcal{V})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(x_n \in U),$$

además, por hipótesis $\gamma^+(x_n) \not\subset E$; entonces se sigue de aquí la conclusión. ■

En el contexto de una familia de λ -sistemas semidinámicos F_{Λ} ; si M es $E - S$ bajo la acción del λ -sistema F_{λ} para $\lambda \in \Lambda$, se dice que M es (E, λ) -estable $((E, \lambda) - S)$. También, si M no es $(E, \lambda) - S$, se dice que M es (E, λ) -inestable $((E, \lambda) - I)$.

Definición 23 *Sea $E \subset X$ y $M \subset X$ compacto y positivamente invariante $\forall \lambda \in \Lambda$. El conjunto M es E -equiestable $(E - ES)$ con respecto a la familia de sistemas semidinámicos F_{Λ} si*

$$(\exists U \in \mathcal{V}_M) (\forall \lambda \in \Lambda) \quad \gamma_{\lambda}^+(U) \subset E.$$

Definición 24 *Sean $M \subset X$ compacto y positivamente invariante; $E \subset X$ y $L \subset \Lambda$. El conjunto M es (E, L) -equiestable $((E, L) - ES)$ con respecto a la familia de sistemas semidinámicos F_L , si*

$$(\exists U \in \mathcal{V}_M)(\forall \lambda \in L) \quad \gamma_{\lambda}^+(U) \subset E. \quad (2.27)$$

Definición 25 Sean $M \subset X$ compacto y positivamente invariante, $E \subset X$ y $L \subset \Lambda$; el conjunto M se llama (E, L) -equiestable (no $-(E, L)$ -ES) con respecto a la familia de sistemas semidinámicos F_L , si M no es (E, L) -ES. Esto es, tomando la negación de (2.27) el conjunto M es no $-(E, L)$ -ES si

$$(\forall U \in \mathcal{V}_M)(\exists \lambda \in L)(\exists x \in U) \quad \gamma_\lambda^+(x) \not\subset E. \quad (2.28)$$

Otra forma equivalente a la definición 25, se expresa en términos de sucesiones. Esto es el contenido de la siguiente proposición, la cual se demuestra fácilmente considerando la expresión (2.28).

Proposición 2.1.18 Sean $M \subset X$ compacto y positivamente invariante; $E \subset X$ y $L \subset \Lambda$. Entonces el conjunto M es

$$\text{no } -(E, L)\text{-ES} \Leftrightarrow (\exists \lambda_{\mathbb{N}} \subset L)(\exists x_{\mathbb{N}} \subset X), x_n \rightarrow M \quad \gamma_{\lambda_n}^+(x_n) \not\subset E.$$

Demostración. La demostración es esencialmente la misma de la Proposición 2.1.17, salvo que en este caso se tiene un conjunto de parámetros. Primero se demuestra la condición necesaria. Sean M, E y L subconjuntos de X tales que M es compacto y positivamente invariante. Supóngase que M es no $-(E, L)$ -ES, entonces de (2.28) se tiene que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \epsilon_n > 0)(\exists \lambda_n \in L)(\exists x_n \in B_{\epsilon_n}(M)) \quad \gamma_{\lambda_n}^+(x_n) \not\subset E.$$

Definición 26 Sean $E \subset X$, $L \subset \Lambda$, $\lambda_0 \in \bar{L}$ y $M \subset X$ compacto y positivamente invariante, entonces M es localmente (E, L) -equiestable (L - (E, L) -EE) en λ_0 con respecto a la familia de sistemas semidinámicos F_Λ , si

$$(\exists U \in \mathcal{V}_M)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in L \cap N) \quad \gamma_\lambda^+(U) \subset E.$$

Con este enfoque el principio de persistencia de la extensión dinámica se enuncia mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.1.19 Principio de persistencia de la extensión dinámica. Sea $M \subset X$ compacto y positivamente invariante $\forall \lambda \in \Lambda$ y λ_0 -inestable. Entonces

$$(\forall y \in I_{\lambda_0}^+(M))(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N}) \quad M \text{ es no } -(\mathcal{C}(B_\epsilon(y)), N)\text{-ES.} \quad (2.29)$$

Demostración. Sea $y \in I_{\lambda_0}^+(M)$ y $\epsilon > 0$, entonces $\exists x \in B_\epsilon(M)$ y existe $\tau > 0$ tal que $F_{\lambda_0}^\tau(x) = y' \in B_{\epsilon/2}(y)$. Para $\tau > 0$ anterior y $\epsilon/2$, aplicamos la propiedad de la dependencia continua y uniforme con respecto al parámetro que satisface la familia F_Λ en λ_0 (Axioma (IV)), por lo tanto existe $N \in \mathcal{N}$ tales que $(\forall t \in [0, \tau])(\forall \lambda \in N) d(F_{\lambda_0}^t(x)) < \epsilon/2$, en particular para $t = \tau$, $y'' := F_\lambda^\tau(x) \in B_{\epsilon/2}(y')$, luego, aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$d(y, y'') \leq d(y, y') + d(y', y'') < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon;$$

pero $y'' \in B_\epsilon(y) \Rightarrow \gamma_\lambda^+(x) \notin \mathcal{C}(B_\epsilon(y))$ es decir, M es no- $(\mathcal{C}B_\epsilon(y), N) - ES$. ■

2.1.3 El problema desde el punto de vista del control.

² Consideremos la familia de sistemas F_Λ como un sistema de control y para $\lambda_0 \in \Lambda$, F_{λ_0} , modela el objeto no controlado para este, M es λ_0 -inestable y λ es el control variable. Supongamos además que los controles manejables se encuentran en una vecindad N de λ_0 . Entonces nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué tan grande debe ser N tal que contenga los controles que nos permitan estabilizar el sistema? En el contexto de esta teoría, damos una condición necesaria, esta es: **Si al aplicar un control λ , la extensión dinámica se reduce (en el sentido de que que el sistema se vuelva “menos inestable”), entonces es necesario elegir el control λ fuera de cierta vecindad N del control cero, es decir, λ debe estar alejado del control cero.** La formulación precisa de la afirmación anterior ponemos en el siguiente Corolario:

Corolario 2.1.20 *Dada una familia de sistemas semidinámicos continuos, (X, T, Λ, F) , supongamos que se cumple las siguientes hipótesis:*

1. $M \subset X$ es compacto, positivamente invariante para toda $\lambda \in \Lambda$;
2. M es λ_0 -inestable, $\lambda_0 = 0 \in \Lambda$;
3. $y \in D_{\lambda_0}^+(M)$; y

²En el contexto de esta teoría, Felipe Monrroy-Pérez, nos sugirió considerar el parámetro λ como un control. Presentamos en esta subsección un ejemplo general como respuesta a esta sugerencia.

$$4. \Lambda^* := \{\lambda \in \Lambda \mid y \notin D_\lambda^+(M)\}.$$

Entonces $\exists N \in \mathcal{N} \quad \Lambda^* \cap N = \emptyset$. En particular los controles que estabilizan el sistema, pertenecen al complemento de alguna una vecindad del origen del espacio.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe una sucesión de valores (λ_n) del parámetro, tales que $\lambda_n \rightarrow 0$ y, para cada n , $y \notin D_{\lambda_n}^+(M)$, esto implica que

$$(\forall U \in \mathcal{V}_M)(\forall V \in \mathcal{V}_y)(\forall N \in \mathcal{N})(\exists \lambda \in N) \quad \gamma_\lambda^+(U) \cap V = \emptyset.$$

Entonces la Persistencia de la inestabilidad implica que $y \notin D_0^+(M)$, lo cual contradice la hipótesis. ■

Enunciando el contenido del teorema anterior, en términos más simples, tenemos que *la estabilización de un punto de equilibrio o conjunto invariante (aún cuando esta sea parcial), no se puede alcanzar mediante controles arbitrariamente pequeños.*

En contraste con esta situación, *una perturbación arbitrariamente pequeña puede provocar un efecto muy fuerte en la estabilidad del sistema.* Esto lo ilustramos claramente en el ejemplo que sigue:

Ejemplo 8 Consideremos la familia monoparamétrica de ecuaciones diferenciales,

$$\dot{x} = x((x^2 - 1)^2 + \lambda),$$

tomamos $X = \mathbb{R}$, $\Lambda = \mathbb{R}$, $M = \{0\}$.

En este caso, para $\lambda = 0$, $I_0^+(0) = [-1, 1]$; para $\lambda > 0$, $I_\lambda^+(0) = \mathbb{R}$. Por otra parte, para $\lambda < 0$, $I_\lambda^+(0) = \left[-\sqrt{1 - \sqrt{-\lambda}}, \sqrt{1 - \sqrt{-\lambda}}\right]$, por lo tanto, el conjunto anterior se reduce gradualmente cuando λ entra al conjunto \mathbb{R}^- . Finalmente el sistema se estabiliza para $\lambda = -1$. Notemos que el sistema se estabiliza fuera de la vecindad $(-1, 1)$ de $\lambda = 0$ (Ver la Figura 2.8).

En el ejemplo que sigue ilustramos el contenido del Corolario 2.1.20 mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano.

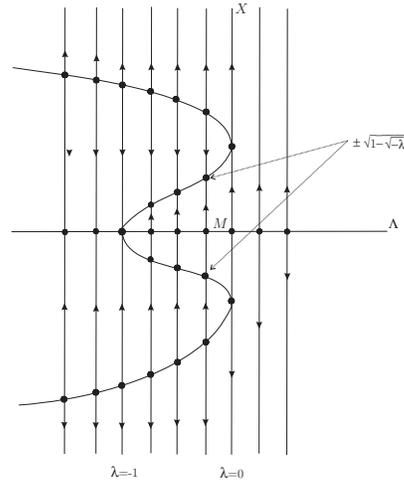


Figura 2.8: Ilustración del ejemplo 8, el sistema se estabiliza fuera de la vecindad $(-1, 1)$ de $\lambda = 0$.

Ejemplo 9 Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales dependientes del parámetro λ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 - \lambda x, \\ \dot{y} &= x^3 - \lambda y.\end{aligned}\tag{2.30}$$

la cual tiene un conjunto invariante común $M = \{(0, 0)\}$, suponiendo que el parámetro λ es el control variable, analizamos dos casos:

1. Para $\lambda = 0$, interpretamos el sistema como un sistema libre de control, y queda,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3, \\ \dot{y} &= x^3.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Utilizando el método de Ważewski, es fácil demostrar que el punto de equilibrio M , del sistema 2.31 libre de control es inestable, este es un conjunto silla.

2. Para $\lambda > 0$, el origen M es (localmente) asintóticamente estable. Para estimar la región de atracción, utilizamos la función de Lyapunov, $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Luego calculamos,

$$\dot{V} = \dot{x}x + \dot{y}y = (x^2 + y^2)(xy - \lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda > xy.$$

Dada $c > 0$, sea $xy = c$, el Corolario 2.1.20, implica que un control $\lambda > 0$ que estabilice la región $\{(x, y) \mid xy < c\}$ del sistema (2.31) es posible para $\lambda > c$, pero no para $0 < \lambda \leq c$ (Ver la Figura 2.31).

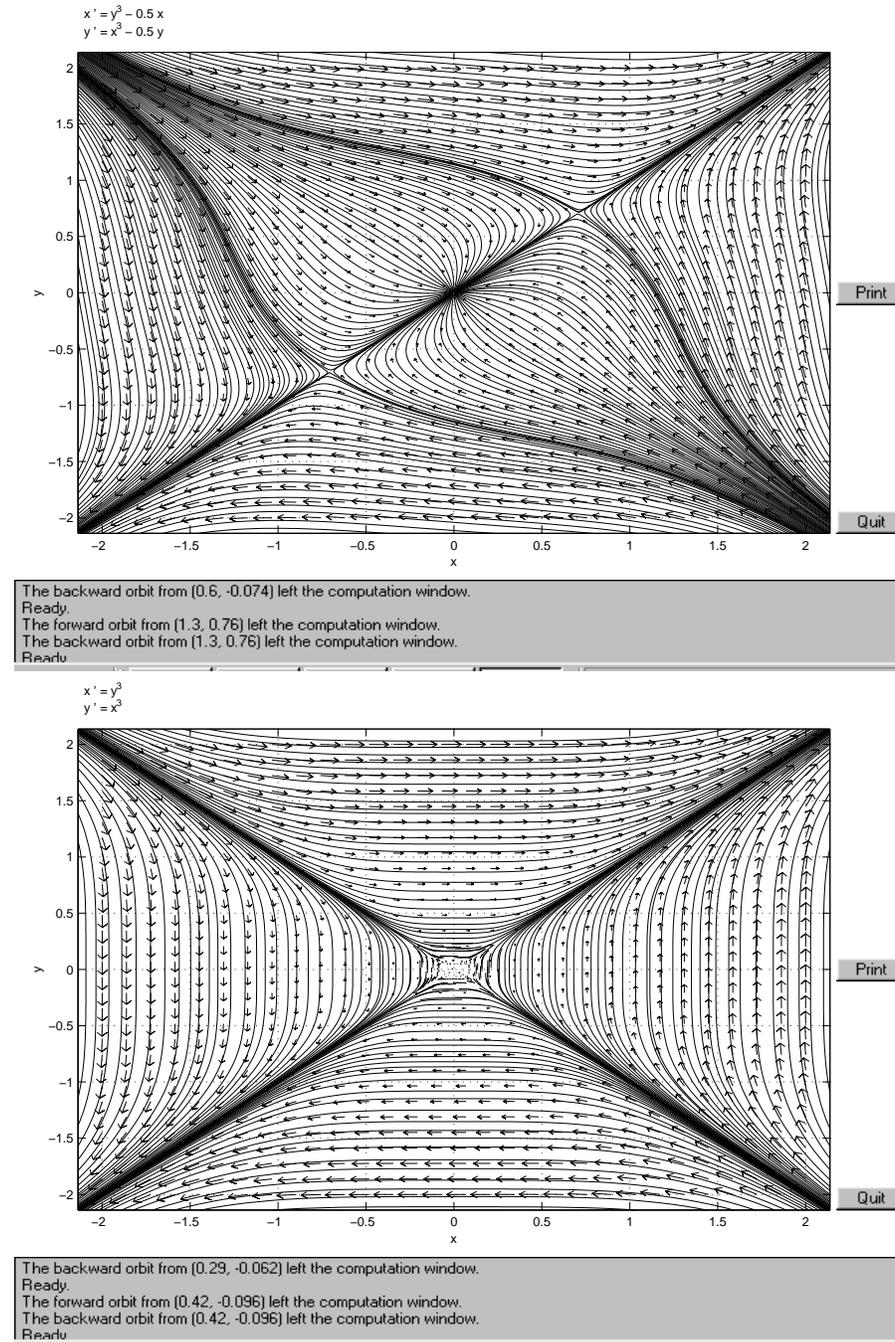


Figura 2.9: Ilustración del ejemplo 9, un control $\lambda > 0$ que estabilice la región $\{(x, y) \mid xy < c\}$ del sistema (2.31) es posible para $\lambda > 0$, fuera de una vecindad de $\lambda = 0$, suficientemente grande.

CAPÍTULO 3

Los cambios de estabilidad y tipos de bifurcación.

3.1 Cambio de estabilidad.

Considerando una familia de sistemas (semi)dinámicos dependiente de un parámetro que tiene un conjunto invariante común. Cuando el parámetro alcanza o sale de un cierto valor crítico, un fenómeno que ocurre frecuentemente, es el *cambio de estabilidad* del conjunto invariante. En esta sección formalizaremos este concepto de *cambio de estabilidad*, y en el Capítulo 5 estudiaremos la relación que existe entre este fenómeno con otro llamado *bifurcación* y, del cual nos ocuparemos en la siguiente sección.

Hacemos la distinción entre dos tipos de cambio de estabilidad. En uno el conjunto invariante pierde la estabilidad cuando el parámetro alcanza el valor crítico (*pérdida crítica de la estabilidad*), y el otro, ocurre cuando el conjunto invariante pierde la estabilidad cuando el parámetro sale del valor crítico (*pérdida extracrítica de la estabilidad*).

La estabilidad de un conjunto invariante de un sistema semidinámico se define como sigue.

Definición 27 *Un subconjunto $M \subset X$ se llama estable si toda vecindad de M contiene una vecindad de M positivamente invariante; en caso contrario se llama inestable.*

Considerando una familia de sistemas semidinámicos, que tiene un conjunto invariante común, $M \subset X$, decimos que M es λ -estable (λ -inestable) si es estable (inestable) para el sistema F_λ .

Definición 28 Una familia de sistemas (semi)dinámicos tiene una pérdida extracrítica (ganancia crítica) de la estabilidad en el valor $\lambda_0 \in \Lambda$ con respecto a un conjunto M , si M es λ_0 -estable y, λ -inestable para algunos valores de λ que convergen a λ_0 .

Definición 29 Una familia de sistemas (semi)dinámicos tiene una pérdida crítica de la estabilidad en λ_0 con respecto a un conjunto M , si M es λ_0 -inestable, pero λ -estable para algunos valores λ que convergen a λ_0 .

Si Λ es un intervalo de la recta real, la pérdida de la estabilidad se llama *subcrítica* (*ultracrítica*), si M es λ_0 -estable, y λ -inestable para $\lambda < \lambda_0$ ($\lambda > \lambda_0$), respectivamente.

En general, el espacio de parámetros Λ se divide en dos conjuntos Λ_e y Λ_i tales que, M es λ -estable para $\lambda \in \Lambda_e$ y, λ -inestable para $\lambda \in \Lambda_i$. Los conjuntos Λ_e y Λ_i se llaman *dominios de estabilidad e inestabilidad* en el espacio de los parámetros, respectivamente y, la frontera entre ambos se llama el *borde de estabilidad* (véase [Ba], [Ba2] y [Ha]). La “pérdida de estabilidad” es la transición de Λ_e a Λ_i . Esta se llama “crítica” (“extracrítica”) si el punto de transición del primero al segundo ocurre en un punto frontera que pertenece a Λ_i (Λ_e).

Considerando una familia de sistemas (semi)dinámicos F_Λ sobre un espacio métrico X que tiene un conjunto invariante compacto común $M \subset X$, un enfoque en el estudio del cambio de la estabilidad de M , con respecto a la familia de sistemas (semi)dinámicos F_Λ , tiene que ver con la manera como cambia la *extensión dinámica* (o *conjunto de inestabilidad*) de M , $I_\lambda(M)$, cuando cambia el parámetro λ . En el Capítulo 2 (Definición 14), definimos la *extensión dinámica* de M , $I_\lambda(M)$, para $\lambda \in \Lambda$. Si el sistema F_λ tiene la propiedad LAC sobre una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$ del conjunto compacto M λ -inestable; entonces $I_\lambda(M)$ es no vacío. Equivalentemente, si M es λ -estable, $I_\lambda(M)$ es vacío [Bh]. Desde este punto de vista, el cambio de estabilidad puede ser *suave* o *explosivo* dependiendo de cómo se expande o se comprime la *extensión dinámica*, cuando el parámetro alcanza o sale del valor crítico, según sea el caso.

Definición 30 Sea F_Λ una familia de sistemas (semi)dinámicos, $M \subset X$ compacto y $\lambda_0 \in \Lambda$. Consideremos la función (radio de inestabilidad) $\mu : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tales que,

$$\mu(\lambda) := \sup_{y \in I_\lambda(M)} \{d(y, M)\} \quad (\forall \lambda \in \Lambda). \quad (3.1)$$

Entonces a M le sucede un cambio de estabilidad en λ_0 si se cumplen

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \operatorname{sgn}(\mu(\lambda)) = 1 \quad (3.2)$$

$$\underline{\lim}_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \operatorname{sgn}(\mu(\lambda)) = 0. \quad (3.3)$$

Esto significa que cualquier vecindad de λ_0 contiene valores de λ tanto de estabilidad como de inestabilidad.

Por otra parte, suponiendo que a M le sucede un *cambio de estabilidad* en λ_0 , decimos que el cambio de estabilidad de M es *duro* si $\mu(\lambda)$ es discontinuo en λ_0 y, es *blando*, si $\mu(\lambda)$ es continuo en λ_0 .

Proposición 3.1.1 Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos, $M \subset X$ un conjunto compacto, $\lambda_0 \in \Lambda$. Si a M le sucede una pérdida crítica de estabilidad en λ_0 , y el sistema F_{λ_0} tiene la propiedad LAC sobre una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$, entonces el cambio de estabilidad de M es duro.

Demostración. Puesto que M tiene una *pérdida crítica de estabilidad* en λ_0 , existe una sucesión $\lambda_n \subset \Lambda$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, para la cual M es λ_n -estable y M es λ_0 -inestable. La λ_0 -inestabilidad de M y la propiedad LAC implican que $I_{\lambda_0}(M) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mu(\lambda_0) > 0$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_{\lambda_n}(M) = \emptyset$ y por ende $\mu(\lambda_n) = 0$. Entonces $\mu(\lambda_n) \not\rightarrow \mu(\lambda_0) > 0$, de donde se sigue que μ es discontinua en λ_0 y que el cambio de estabilidad de M es *duro*. ■

Otra forma de definir la *pérdida dura* de la estabilidad de M es como sigue.

Definición 31 La *pérdida de la estabilidad de M en el valor crítico λ_0 es dura* (explosiva) si

$$(\exists U \in \mathcal{V}_M)(\forall N \in \mathcal{N})(\exists \lambda \in N) \quad I_\lambda(M) \not\subset U.$$

En otras palabras, la pérdida de estabilidad de M es dura, si la expansión de $I_\lambda(M)$ es repentina (explota) cuando λ se aproxima al valor crítico λ_0 . En

el caso contrario, la pérdida de la estabilidad de M en el valor crítico λ_0 , es *blanda*. Es decir, si se cumple

$$(\forall U \in \mathcal{V}_M)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) \quad I_\lambda(M) \subset U.$$

Lo anterior significa que si M tiene pérdida de estabilidad blanda, la expansión de $I_\lambda(M)$ es lenta (como función de λ).

Si M es λ_0 -estable pero no es un atractor bajo la acción de F_{λ_0} , la *pérdida extracrítica* de la estabilidad de M puede ser cualquiera de las dos *dura* o *suave*.

En los siguientes ejemplos consideraremos familias de sistemas dinámicos sobre espacios fase unidimensionales, definidos por ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro, λ de la forma, $\dot{x} = f(x, \lambda)$ con $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y f continua. Para cada uno de estos casos, el valor crítico del parámetro es $\lambda_0 = 0$, el punto de equilibrio $M = \{0\}$, y $f(0, \lambda) = 0$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$).

Ejemplo 10 *Sea*

$$\dot{x} = -x(\lambda^2 - x^2), \quad (3.4)$$

entonces $I_{\lambda_0}(M) = \mathbb{R} - \{0\}$, $I_\lambda(M) = \emptyset \quad \forall \lambda \neq 0$. Por lo tanto el origen exhibe una *pérdida crítica dura* de la estabilidad (ver la Figura 3.1).

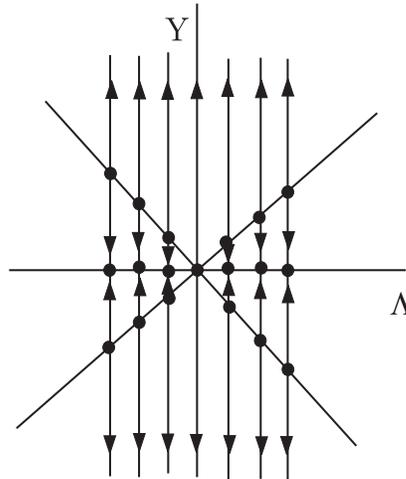


Figura 3.1: El equilibrio M exhibe una pérdida crítica dura de la estabilidad.

Ejemplo 11 *Consideremos*

$$\dot{x} = \lambda^2 x(x^2 + \lambda^2), \quad (3.5)$$

para esta ecuación $I_{\lambda_0}(M) = \emptyset$, $I_\lambda(M) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\lambda \neq 0$, el origen exhibe una pérdida extracrítica dura de la estabilidad (ver la Figura 3.2).

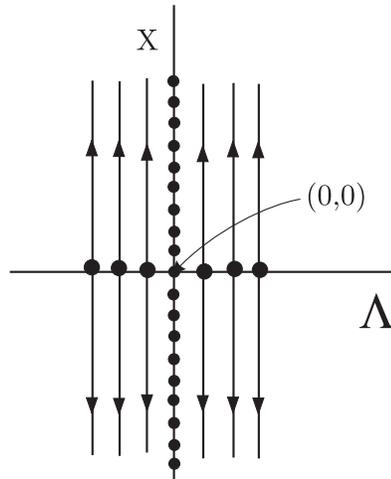


Figura 3.2: El origen M exhibe una pérdida extracrítica *dura* de la estabilidad.

Ejemplo 12 Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales dependiente del parámetro λ ,

$$\dot{x} = -\lambda^2 x(x^2 - \lambda^2). \quad (3.6)$$

Para $\lambda \neq 0$, $I_\lambda(M) = [-\lambda, \lambda] - M$. Dada $\epsilon > 0$ y $\lambda < \epsilon$, $I_\lambda(M) \subset B_\epsilon(0)$. Por otra parte, $I_{\lambda_0}(M) = \emptyset$, por lo tanto, el origen exhibe pérdida extracrítica suave de la estabilidad (ver la Figura 3.3).

En los Ejemplos 10 y 11, el origen M es estable para $\lambda_0 = 0$.

3.2 Tipos de bifurcaciones.

La *bifurcación* (comunmente la palabra bifurcación se usa para designar el lugar donde un camino o río se divide en dos ramales o brazos) es un fenómeno que se presenta en muchos modelos matemáticos que dependen de ciertos parámetros físicos que resultan del estudio de fenómenos concretos en las ciencias naturales. La bifurcación ocurre cuando se presenta un cambio brusco en el estado de equilibrio del sistema físico en cuestión cuando el conjunto de parámetros entra o sale de ciertos valores críticos.

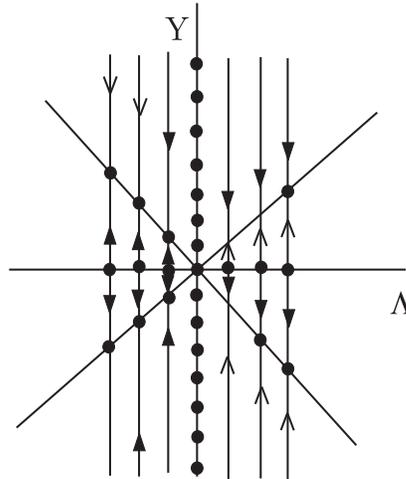


Figura 3.3: El origen M exhibe una pérdida extracrítica *suave* de la estabilidad.

El estudio del fenómeno de *bifurcación* tiene como precursores a Poincaré, Andronov y Hopf.

En 1942 Hopf [Ho] consideró un sistema n -dimensional no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de un parámetro real y , el origen del espacio fase un punto de equilibrio fijo para todos los valores del parámetro.

Hopf llamó *bifurcación* (en alemán, *abzweigung*) al fenómeno que consiste en el surgimiento de una familia de soluciones periódicas que se acumulan en el origen cuando el parámetro se aproxima arbitrariamente a cierto valor crítico. Bajo ciertas condiciones, la familia de soluciones periódicas pueden estar presentes cuando el parámetro alcanza el valor crítico del mismo. En este sentido, *bifurcación* significa surgimiento de soluciones periódicas del punto de equilibrio y es conocida como bifurcación de Poincaré–Andronov–Hopf (BPAH).

El enfoque que presentamos en este trabajo está motivado por la bifurcación del tipo BPAH y nuestro propósito es obtener una generalización a sistemas semidinámicos sobre espacios abstractos.

Llamamos *bifurcación* de un conjunto invariante común de una familia de sistemas (semi)dinámicos que dependen de un parámetro, al surgimiento del conjunto invariante común de uno o más conjuntos invariantes cuya distancia al conjunto invariante común tendiendo a cero, cuando el parámetro alcanza o sale del valor crítico. Desde este punto de vista, hacemos la distinción de varios tipos de bifurcaciones, dependiendo en donde surgen del conjunto invariante común nuevos conjuntos invariantes en el espacio de los parámetros.

Definición 32 Sea F_Λ una familia de sistemas (semi)dinámicos y M un conjunto compacto, invariante. Decimos que M tiene una bifurcación extracrítica en $\lambda_0 \in \Lambda$ con respecto a la familia de sistemas F_Λ , si para cualquier pareja de vecindades, $U \in \mathcal{V}_M$ y $N \in \mathcal{N}$, existe $\lambda \in N$, $\lambda \neq \lambda_0$, $M'_\lambda \subset U$, M'_λ cerrado, positivamente λ -invariante no vacío, tal que $M'_\lambda \cap M = \emptyset$.

Definición 33 Un conjunto $M \subset X$ es débilmente invariante si para cada $x \in M$ existe una órbita maximal, $\gamma^+(x)$, (es decir, una órbita que no se puede extender) tal que $\gamma^+(x) \subset M$.

Definición 34 Un conjunto $M \subset X$ es aislado de conjuntos cerrados débilmente invariantes, si $\exists U \in \mathcal{V}_M$ tal que si W es un subconjunto de U , cerrado, débilmente invariante, entonces $W \subset M$.

Definición 35 (Dual) Un conjunto $M \subset X$ no es aislado de conjuntos cerrados débilmente invariantes si $\forall U \in \mathcal{V}_M$ y existe un subconjunto W de U cerrado, débilmente invariante tal que $W \not\subset M$.

En el contexto de una familia de sistemas semidinámicos, para $\lambda \in \Lambda$, un conjunto M es: débilmente λ -invariante o λ -aislado de conjuntos cerrados débilmente λ -invariantes o no aislado de conjuntos cerrados débilmente λ -invariantes, si se cumplen las definiciones 33, 34 y 35 respectivamente, para el λ -sistema (semi) dinámico, F_λ .

La relación $W \not\subset M$, de la Definición 35 no significa que $W \cap M = \emptyset$, si no que $N \cap (\bar{U} \setminus M) \neq \emptyset$.

Observación 1 En el caso de un sistema dinámico: Todo conjunto débilmente invariante es invariante, puesto que si $M \subset X$, es débilmente invariante, para cada $x \in M$ existe una órbita maximal, $\gamma^+(x) \subset M$ y una única órbita $\gamma^-(x) \subset M$, a través de x y, por lo tanto, $\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x) \subset M$.

Definición 36 Un conjunto $M \subset X$, compacto, cerrado y λ_0 -invariante, exhibe una bifurcación crítica (o bifurcación vertical) con respecto a la familia F_Λ en $\lambda_0 \in \Lambda$, si M es λ -invariante y, λ -aislado de conjuntos cerrados débilmente λ -invariantes para $\lambda \rightarrow \lambda_0$ y, toda vecindad U de M contiene un conjunto cerrado λ_0 -invariante M'_{λ_0} tal que $M'_{\lambda_0} \cap M = \emptyset$.

Definición 37 Un conjunto $M \subset X$, compacto, cerrado y λ_0 -invariante, exhibe una bifurcación débilmente crítica con respecto a la familia de sistemas F_Λ en $\lambda_0 \in \Lambda$, si M es λ -invariante y λ -aislado de conjuntos cerrados débilmente λ -invariantes para $\lambda \rightarrow \lambda_0$ y, toda vecindad U de M contiene un conjunto cerrado λ_0 -invariante, $M'_{\lambda_0} \subset U$ pero $M'_{\lambda_0} \not\subset M$.

Observación 2 Si $M'_{\lambda_0} \cap M = \emptyset$, la definición 37 se reduce a la definición 36; es decir, la diferencia entre estos dos tipos de bifurcaciones está en que se cumpla $M'_{\lambda_0} \cap M = \emptyset$ o $M'_{\lambda_0} \cap M \neq \emptyset$, pero en ambos casos $M'_{\lambda_0} \not\subset M$.

Definición 38 Un conjunto positivamente invariante y compacto M exhibe una bifurcación híbrida) con respecto a la familia de sistemas F_Λ en $\lambda_0 \in \Lambda$, si se satisfacen simultáneamente las condiciones de las definiciones 32 (de bifurcación extracrítica) y 36 (de bifurcación crítica). Finalmente, decimos que el conjunto M exhibe una bifurcación débilmente híbrida con respecto a la familia de sistemas F_Λ en $\lambda_0 \in \Lambda$, si se satisfacen simultáneamente las condiciones de las definiciones 32 (de bifurcación extracrítica) y 37 (de bifurcación débilmente crítica).

Si el conjunto de parámetros es el conjunto de números reales, se distinguen tres tipos de bifurcaciones ampliamente conocidos en la literatura: *subcrítica*, *supercrítica* y *transcrítica*, dependiendo de que si estas bifurcaciones ocurren para $\lambda < \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$ o para ambos casos. Estos tipos de bifurcaciones caen dentro de la que llamamos *bifurcación extracrítica*, (ver [HK]).

Con frecuencia el *cambio de estabilidad* y la *bifurcación*, de un conjunto invariante común de una familia de sistemas dinámicos, están relacionados en el sentido de que, cuando ocurre un cambio de estabilidad del conjunto invariante, generalmente también ocurre una bifurcación de este cuando el parámetro entra o sale del valor crítico. Mediante los ejemplos que siguen, demostraremos que existen cinco posibles combinaciones de estos fenómenos, estas son las siguientes: *pérdida crítica* con *bifurcación crítica*, *pérdida crítica* con *bifurcación extracrítica*, *pérdida extracrítica* con *bifurcación crítica*, *pérdida extracrítica* con *bifurcación crítica* y finalmente, *pérdida crítica* con *bifurcación híbrida*.

En los ejemplos que presentaremos a continuación, consideramos familias de sistemas ecuaciones diferenciales en el plano dependientes del parámetro $\lambda > 0$,

del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \lambda), \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda).\end{aligned}$$

Para estos sistemas, suponemos que f y g satisfacen la condición de Lipschitz en \mathbb{R} y cumplen la condición de continuidad uniforme (Axioma IV) con respecto al parámetro. En el contexto actual el espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es el intervalo de números reales, $(0, +\infty)$, el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y, $M = \{(0, 0)\}$, el equilibrio común de la familia de sistemas de ecuaciones; es decir, $f(0, 0, \lambda) = g(0, 0, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \Lambda \cup \{0\}$.

Ejemplo 13 *Para el sistema lineal,*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda x - y, \\ \dot{y} &= -\lambda y.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Tenemos $I_{\lambda_0}(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \neq 0\}$, M es inestable y no aislado de los puntos de equilibrio del sistema (3.7) correspondiente a $\lambda = \lambda_0$. Para $\lambda > 0$, el sistema 3.7 tiene un valor característico, $\mu = -\lambda$, de multiplicidad dos, de donde, M es un nodo impropio estable y por lo tanto tenemos que $I_\lambda(M) = \emptyset$. En conclusión, M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación crítica (ver la figura 3.4).

Ejemplo 14 *Consideremos el sistemas no lineal dependiente del parámetro $\lambda > 0$,*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x - \lambda), \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Para $\lambda > 0$, el sistema (3.8) tiene valores característicos: $\mu = -\lambda, -1$. Por lo tanto M es AS (localmente) con región de atracción, $A_\lambda(M) = \{(x, y) \in X \mid x < \lambda\}$ y entonces, $I_\lambda(M) = \emptyset$. Para $\lambda = \lambda_0$, M es inestable (punto silla) y además $I_{\lambda_0}(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x > 0\}$. El conjunto M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación extracrítica (silla-nodo) (Ver la Figura 3.5).

Ejemplo 15 *Consideremos el sistema lineal, dependiente del parámetro $\lambda > 0$,*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + y, \\ \dot{y} &= -x + \lambda y.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Si ponemos el sistema (3.9) en coordenadas polares, queda

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \lambda r, \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Para $\lambda > 0$, los valores característicos del sistema son complejos con parte real positiva, $\mu = \lambda \pm i$, por lo tanto M es (un foco) inestable y tenemos, $I_\lambda(M) = \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$. Por otra parte, para $\lambda = 0$, los valores característicos del sistema que resulta de (3.9), son puramente imaginarios, por lo tanto, para este caso M es (centro) estable y por lo tanto, $I_{\lambda_0}(M) = \emptyset$. El conjunto M exhibe una pérdida extracrítica de la estabilidad (y de la atracción) con bifurcación crítica, (ver la Figura 3.6.)

Ejemplo 16 Consideremos el siguiente sistema no lineal dependiente del parámetro $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \lambda y - y(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Introduciendo coordenadas polares, el sistema (3.11) queda

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\lambda - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Para $\lambda > 0$, la parte lineal del sistema (3.11) tiene valores característicos complejos con parte real positiva, $\mu = \lambda \pm i$, entonces $I_\lambda(M) \neq \emptyset$. Tomando en cuenta el sistema (3.12), calculamos la extensión dinámica de M , $I_\lambda(M) = \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 < \sqrt{\lambda}\} \setminus M$, cuya frontera: $\{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 = \sqrt{\lambda}\}$, contiene un ciclo límite que se colapsa en el origen M cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. Para $\lambda = 0$, el equilibrio M , del sistema resultante de (3.11) es AS. Esto se demuestra utilizando la función de Lyapunov $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, para la cual la derivada total correspondiente es $\dot{V}(x, y) = -(x^2 + y^2)^2 < 0$, siempre que $(x, y) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, el origen exhibe una pérdida extracrítica (suave) de la estabilidad y bifurcación extracrítica, (ilustramos este ejemplo con Figura 3.7.)

Finalmente, un conjunto invariante M puede tener *pérdida crítica* de la estabilidad con *bifurcación híbrida*, tal es el caso que demostraremos con el ejemplo que sigue.

Ejemplo 17 Consideremos el sistema de ecuaciones en el plano, dependiente del parámetro $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x^2 - \lambda), \\ \dot{y} &= -\lambda y.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Para $\lambda > 0$, el polinomio característico de la parte lineal del sistema (3.13), tiene una raíz negativa de multiplicidad 2, $\mu = -\lambda$. Por lo tanto, M es AS y por ende $I_\lambda(M) = \emptyset$. Además, los los puntos de equilibrio $(\pm\sqrt{\lambda}, 0)$, del sistema (3.13) son del tipo silla y corresponden a los puntos de bifurcación de M . Para $\lambda = \lambda_0$, M es un punto de equilibrio inestable del sistema que resulta de (3.13) y , tenemos que $I_{\lambda_0}(M) = \{(x, y) \in X \mid y = 0, x \neq 0\}$. Por otra parte, M no es aislado de puntos de equilibrio, pertenece al conjunto de puntos de equilibrio $\{(x, y) \in X \mid x = 0, y \neq 0\}$, del sistema (3.13) para $\lambda = 0$. Por lo tanto, M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación híbrida (Ver la Figura 3.8).

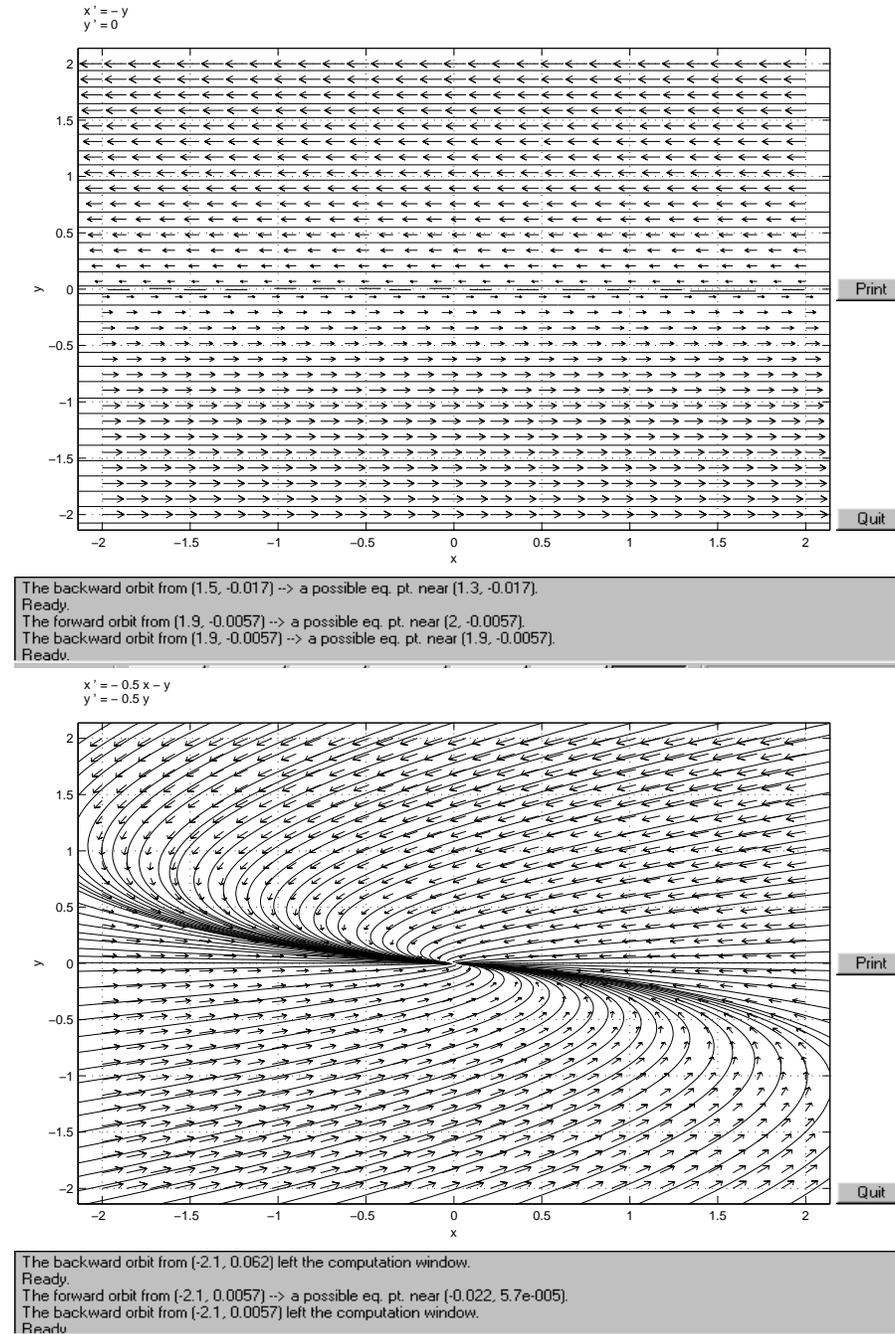
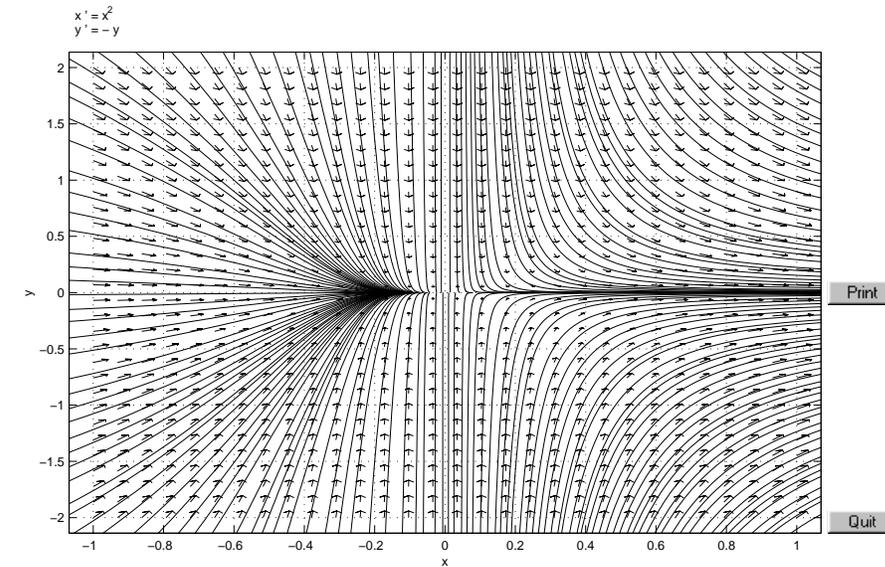
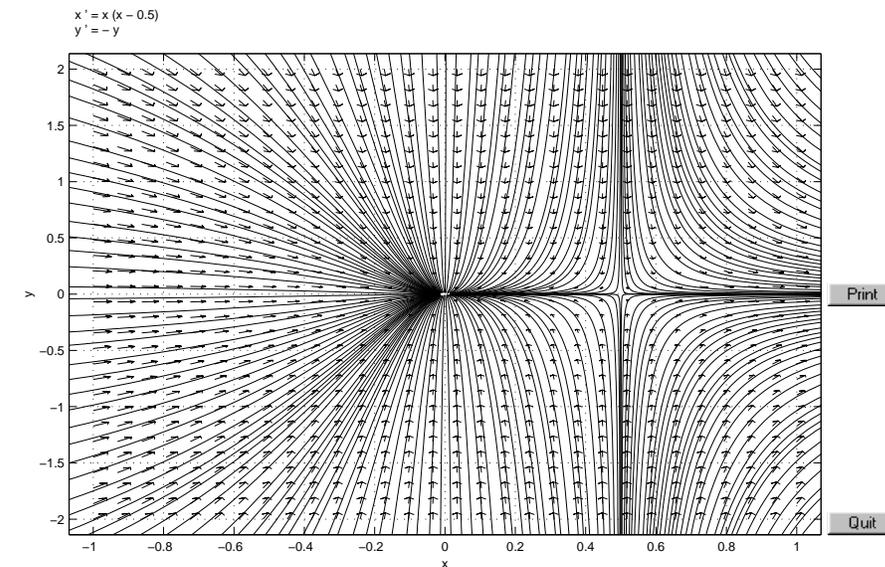


Figura 3.4: El equilibrio M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación crítica.



The backward orbit from [-0.99, -0.017] left the computation window.
Ready.
The forward orbit from [-0.34, 1.5] -> a possible eq. pt. near (-0.099, 0.0011).
The backward orbit from [-0.34, 1.5] left the computation window.
Ready



The backward orbit from [0.43, 0.16] left the computation window.
Ready.
The forward orbit from [0.37, 0.29] -> a possible eq. pt. near (0.015, 3.1e-005).
The backward orbit from [0.37, 0.29] left the computation window.
Ready

Figura 3.5: El equilibrio M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación extracrítica.

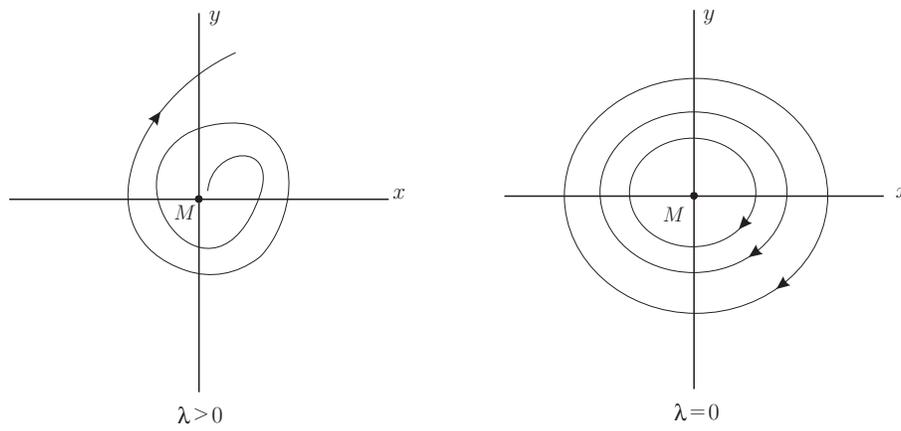


Figura 3.6: El equilibrio M exhibe una pérdida extracrítica de la estabilidad con bifurcación crítica.

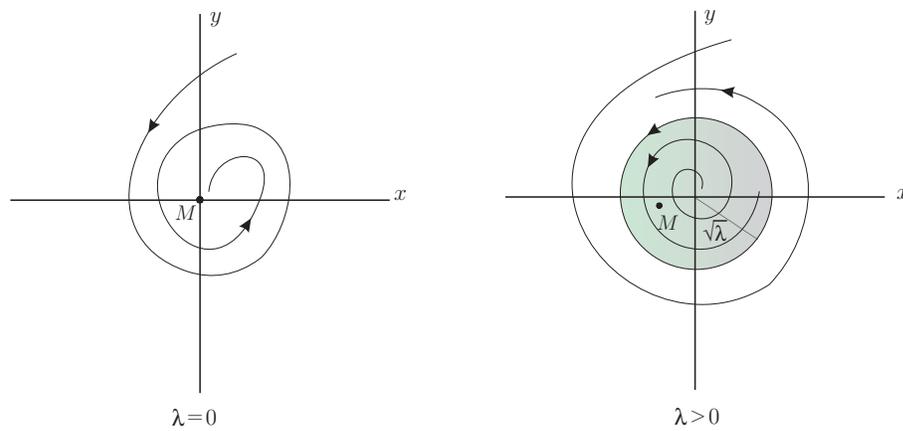
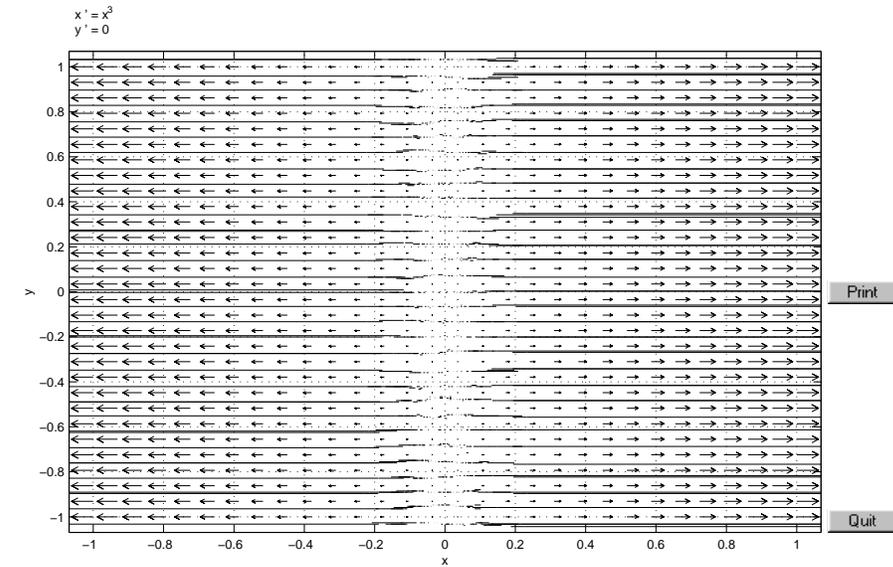
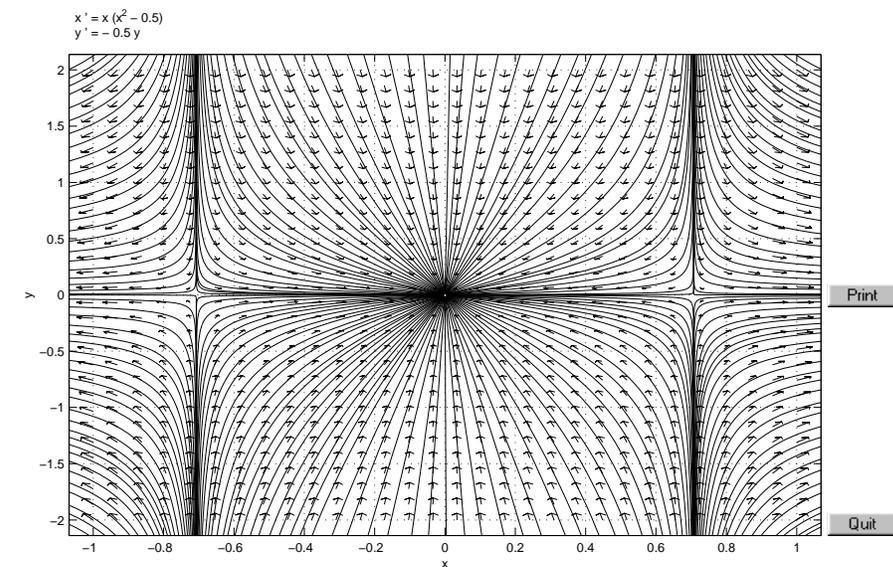


Figura 3.7: El origen M exhibe una pérdida extracrítica (suave) de la estabilidad con bifurcación extracrítica.



The backward orbit from (-0.15, -1) --> a possible eq. pt. near (-0.12, -1).
 Ready.
 The forward orbit from (0.17, -1) left the computation window.
 The backward orbit from (0.17, -1) --> a possible eq. pt. near (0.13, -1).
 Ready.



The backward orbit from (-0.64, -0.32) left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from (0.039, 1.5) --> a possible eq. pt. near (0.00038, 0.015).
 The backward orbit from (0.039, 1.5) left the computation window.
 Ready.

Figura 3.8: El equilibrio M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad con bifurcación híbrida.

CAPÍTULO 4

Equiestabilidad, Familias de atractores equiestables y generalizaciones.

4.1 Atracción.

Definición 39 *Se definen los siguientes conjuntos,*

$$A^+(M) := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_M, \exists \tau \in \mathbb{R}^+ \text{ y } F_\tau(x) \subset U\} \quad (4.1)$$

y,

$$A_W^+(M) := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_M, \exists t_N \in \mathbb{R}^+, t_n \rightarrow +\infty \text{ y } F^{t_n}(x) \subset U\}. \quad (4.2)$$

Los conjuntos $A^+(M)$ y $A_W^+(M)$ se llaman regiones de atracción y de atracción débil de M , respectivamente. De aquí en adelante ocasionalmente escribiremos A y A_W para las regiones de atracción y de atracción débil de M respectivamente, cuando el caso así lo requiera y no exista confusión.

Si $x \in A^+(M)$, decimos que x es atraído hacia M y si $x \in A_W^+(M)$, que x es débilmente atraído hacia M .

Definición 40 *Un conjunto $M \subset X$ se llama atractor o atractor débil, si las correspondientes regiones de atracción $A^+(M)$ y $A_W^+(M)$, son vecindades abiertas de M .*

Definición 4.1 *Un conjunto $M \subset X$, se llama asintóticamente estable (AS) si M es un atractor débil estable.*

Los siguientes resultados concernientes a la atracción y la atracción débil, los utilizaremos en el desarrollo de este trabajo, las demostraciones se pueden consultar en [Sa] pp. 57-59.

Lema 4.1.1 *Para todo conjunto $M \subset X$ se cumple lo siguiente:*

- (i) $A^+(M) \subset A_W^+(M)$.
- (ii) $A^+(M)$ y $A_W^+(M)$ son invariantes.

El siguiente lema es una caracterización de los puntos de $A_W^+(M)$.

Lema 4.1.2 *Para todo conjunto $M \subset X$ y $x \in X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $A^+(M) \subset A_W^+(M)$.
- (ii) $(\exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ t_n \rightarrow +\infty)$ tales que $(F^{t_n}(x) \subset M \vee M \cap L^+(x) \neq \emptyset)$.
- (iii) $M \cap H^+(F^t(x)) \neq \emptyset$.

Donde, $H^+(x) = \overline{\gamma^+}(x)$.

Proposición 4.1.3 *Si $M \subset X$ es atractor o atractor débil, entonces $A^+(M)$ o $A_W^+(M)$ respectivamente, son vecindades abiertas de M .*

Corolario 4.1.4 *Si $M \subset X$ es atractor, entonces $A^+(M) = A_W^+(M)$.*

Teorema 4.1.5 *Si $M \subset X$ es un atractor débil estable, entonces es un atractor.*

Corolario 4.1.6 *Un conjunto $M \subset X$ es asintóticamente estable si y solo si M es un atractor estable.*

Teorema 4.1.7 *Sea X un espacio localmente conexo. Un conjunto $M \subset X$ no vacío, es asintóticamente estable si y solo si M tiene un número finito de componentes y cada una es asintóticamente estable.*

Lema 4.1.8 *Sea X un espacio localmente conexo y, supongamos que $M \subset X$ es atractor. Si A_1 es una componente de $A^+(M)$, entonces $M_1 := A_1 \cap M$ es un atractor no vacío con $A_1 = A^+(M_1)$.*

Lema 4.1.9 *Sean M_1 y M_2 separados por vecindades. Si $M_1 \cup M_2$ es asintóticamente estable entonces también M_1 y M_2 son asintóticamente estables. Además $A^+(M_1)$ y $A^+(M_2)$ son ajenos.*

Corolario 4.1.10 *Si $M \subset X$ es un conjunto compacto, asintóticamente estable, con región de atracción conexa, entonces M es conexo.*

4.2 Equiestabilidad.

Sea Λ' un subconjunto del espacio de parámetros Λ , $M \subset X$ compacto y, atractor (o atractor débil) para cada $\lambda' \in \Lambda'$ con región de atracción $A_{\lambda'}^+(M)$ (respectivamente con *región de atracción débil* $A_{W\lambda'}^+(M)$). El subíndice λ' significa que $A_{\lambda'}^+(M)$ es la *región de atracción* de M con respecto al sistema semidinámico $F_{\lambda'}$ y análogamente en la *región de atracción débil*, $A_{W\lambda'}$. Para evitar confusión, las llamaremos λ' -*región de atracción* y λ' -*región de atracción débil* respectivamente. Más explícitamente, escribimos

$$A_{\lambda'}^+(M) := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_M, \exists \tau \in \mathbb{R}^+ \text{ y } F_{\tau, \lambda'}(x) \subset U\} \quad (4.3)$$

y,

$$A_{W\lambda'}^+(M) := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{V}_M, \exists t_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+ t_n \rightarrow +\infty; \text{ y } F_{\lambda'}^{t_n}(x) \subset U\}. \quad (4.4)$$

Si $x \in A_{\lambda'}^+(M)$, decimos que x es λ' -*atraído* hacia M , y si $x \in A_{W\lambda'}^+(M)$, decimos que x es λ' -*atraído débilmente* hacia M .

Denotamos con $A_{\Lambda'}^+(M) := \{A_{\lambda'}^+(M) \mid \lambda' \in \Lambda'\}$ y con $A_{W\Lambda'}^+(M) := \{A_{W\lambda'}^+(M) \mid \lambda' \in \Lambda'\}$, las familias de λ' -*regiones de atracción* $A_{\lambda'}^+(M)$ y de *atracción débil* $A_{W\lambda'}^+(M)$ respectivamente. Cada λ' -*región de atracción* $A_{\lambda'}^+(M)$ y cada λ' -*región de atracción débil* $A_{W\lambda'}^+(M)$, depende del sistema semidinámico $F_{\lambda'}$ para cada $\lambda' \in \Lambda'$. De este modo obtenemos una familia de atractores con el conjunto M independiente del parámetro. Esta familia de atractores es una terna la cual escribimos como, $\{M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'}\}$.

Definición 42 Sea $M \subset X$ y $\Lambda' \subset \Lambda$, el conjunto M es equiestable (ES) con respecto a la familia de sistemas semidinámicos $F_{\Lambda'}$ y a la familia de conjuntos $C_{\Lambda'}$ si,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \lambda' \in \Lambda') : \gamma_{\lambda'}^+(B_\delta(M) \cap C_{\lambda'}) \subset B_\epsilon(M).$$

Definición 43 Si los conjuntos $C_{\lambda'}$ en la definición (42) coinciden con el espacio X , decimos que M es equiestable (ES) con respecto a la familia de sistemas (semi)dinámicos $F_{\Lambda'}$.

Ilustramos la definición 43, en la Figura 4.1.

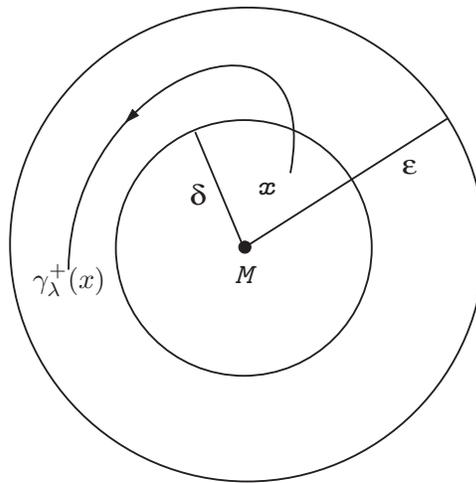


Figura 4.1: Ilustración de la definición 43, familia de atractores equiestable (ES).

En la definición 43 tenemos que, un conjunto invariante es equiestable con respecto a una familia de sistemas semidinámicos, si su región de atracción no varía, y las semiórbitas no se deforman bruscamente cuando cambia el parámetro. Un ejemplo muy simple de lo anterior, se obtiene al considerar la familia de ecuaciones diferenciales, $\dot{x} = -\lambda x$. Para este caso, el espacio fase es $X = \mathbb{R}$, el punto de equilibrio, $M = \{0\}$ y las regiones de atracción de M , son todo el espacio, $A_\lambda^+(M) = \mathbb{R} \setminus M$, para toda $\lambda > 0$. Obviamente, M es equiestable con respecto a la familia de sistemas dinámicos definidos por la familia de ecuaciones diferenciales en cuestión.

Presentamos a continuación, otro ejemplo de atractor equiestable dado por la familia de sistemas en plano, para este, la región de atracción no depende

del parámetro y las órbitas no se deforman bruscamente cuando el parámetro se aproxima a su valor crítico, mientras que la propiedad de atracción se pierde críticamente (el equilibrio del sistema es estable para el valor crítico del parámetro, pero, no es atractor).

Ejemplo 18 Consideremos el sistema lineal dependiente del parámetro λ , en el plano:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda x + y, \\ \dot{y} &= -\lambda y - x.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Para este sistema, el espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el origen $M = \{(0, 0)\}$ es fijo para toda $\lambda > 0$ y tiene valores característicos: $-\lambda \pm i$. Por lo tanto, para $\lambda > 0$, M es un nodo impropio AS. Calculamos las λ -regiones de atracción usando la función de Lyapunov $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, de donde la derivada total es $\dot{V}(x, y) = -\lambda(x^2 + y^2) \leq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$, entonces para cada $\lambda > 0$, $A_\lambda^+(M) = \mathbb{R}^2 \setminus M$. La solución del sistema (4.5), a través de cada punto inicial $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ está dada explícitamente por,

$$F_\lambda^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Con la norma Euclidiana en \mathbb{R}^2 ; para cada punto inicial $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}^+, y, t > 0$, obtenemos

$$\|F_\lambda^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| = e^{-\lambda t} \|x^2 + y^2\|,$$

entonces de ésta última igualdad; dado $\epsilon > 0$, elegimos $\delta < \epsilon$, y cualquier punto inicial, (x, y) en la bola centrada en M de radio δ , $B_\delta(M) : \|(x, y)\| < \delta$, se sigue que

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}^+) (\forall t > 0) \quad \|F_\lambda^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| < \epsilon,$$

por lo tanto, M , es un atractor equiestable con respecto a la familia $F_{\mathbb{R}^+}$ de sistemas semidinámicos dada por (4.5). Por otra parte, para $\lambda = 0$, M es un centro. En este caso M exhibe una pérdida crítica de la atracción, esto es, en el valor crítico del parámetro, M es estable pero no atractor. (Ver la Figura 4.2).

4.3 Pérdida equiestable de la atracción.

En el ejemplo 18, el conjunto M en cuestión es un atractor equiestable, mientras que para $\lambda = 0$, es estable. Esta propiedad le llamamos *pérdida (crítica) equiestable de la atracción* y vale en general para cualquier familia de sistemas semidinámicos, bajo ciertas hipótesis enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.1 *Sea $\Lambda' \subset \Lambda$ y $M \subset X$ un conjunto compacto, equiestable con respecto a la familia $F_{\Lambda'}$ y $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}'$. Entonces M es λ_0 -estable.*

Demostración. Supongamos que M es λ_0 -inestable, existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$, existe $x \in B_\delta(M)$ y $\tau > 0$ tal que,

$$F_\lambda^\tau(x) \notin \overline{B_\epsilon(M)}. \quad (4.6)$$

Por la propiedad de equiestabilidad de M , el número $\delta > 0$ anterior se elige de tal suerte que para todo $\lambda' \in \Lambda'$,

$$\gamma_{\lambda'}^+(B_\delta(M)) \subset B_\epsilon(M), \quad (4.7)$$

entonces por la dependencia continua de F con respecto a los parámetros [Axioma III], se tiene que para λ' arbitrariamente cercano a λ_0 , $F_{\lambda'}^t(x) \notin B_\epsilon(M)$, lo cual contradice (4.7). ■

La propiedad de λ_0 -estabilidad de M es una condición necesaria para la equiestabilidad de M , pero no suficiente: el conjunto invariante M puede ser λ_0 -estable bajo la acción de F_{λ_0} , y sin embargo no ser equiestable con respecto a la familia $F_{\Lambda'}$, para $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}'$, esto lo demostramos mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19 *Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal con parámetro λ ,*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x(x^2 - \lambda), \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para este caso, el espacio fase X del sistema es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros $\Lambda' = (0, \infty)$ y $M = \{(0, 0)\}$, es un punto de equilibrio común para todo $\lambda \in \Lambda'$. Los valores propios de la parte lineal de (4.8) son: $\mu = -\lambda^2, -1$, por lo tanto M es un nodo AS (localmente). Para estimar las λ -regiones de atracción de M , usamos la función de Lyapunov $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. La derivada total correspondiente es, $\dot{V}(x, y) = -\lambda x^2(\lambda - x^2) - y^2 \leq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$y(x, y) \neq (0, 0)$, siempre que $|x| < \sqrt{\lambda}$. Entonces para cada $\lambda > 0$, tenemos la región de atracción $A_\lambda^+(M) = \{(x, y) \in X \mid |x| < \sqrt{\lambda}\}$ y por lo tanto, $A_\lambda \neq \mathbb{R}^2$. Entonces, M no es equiestable con respecto a la familia de sistemas $F_{\mathbb{R}^+}$. Por otra parte, para $\lambda = 0$ el sistema (4.8), queda lineal con valores característicos $\mu = 0, -1$. Utilizando otra vez la función de Lyapunov para este ejemplo, la derivada total queda, $\dot{V}(x, y) = -y^2 \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$. Por lo tanto tenemos que M es 0-estable y además, pertenece a la recta vertical $\{(x, y) \in X \mid x = 0, y \neq 0\}$ de puntos de equilibrio (M no es aislado de conjuntos invariantes). Para $\lambda > 0$, región de atracción $A_\lambda^+(M)$ se colapsa en esta recta vertical (eje Y) cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ (ver la Figura 4.3). Finalmente, concluimos que M es 0-estable, pero no equiestable con respecto a la familia $F_{\mathbb{R}^+}$.

Ejemplo 20 Consideremos el sistema dinámico dado por el sistema lineal que depende del parámetro $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda^2 x - \lambda y, \\ \dot{y} &= -\lambda^2 y. \end{aligned} \quad (4.9)$$

El espacio fase X para este sistema es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros es $\Lambda' = (0, \infty)$, $M = \{(0, 0)\}$, es el punto de equilibrio para todo $\lambda > 0$ y $\lambda_0 = 0$, es el valor crítico del parámetro. Este sistema tiene un valor característico negativo: $\mu = -\lambda^2$ de multiplicidad 2, por lo tanto M es asintóticamente estable. La región de atracción es \mathbb{R}^2 , para todo $\lambda > 0$. Para demostrar que M no es equiestable, damos la solución explícita de este sistema a través de cualquier punto inicial $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, esta es,

$$F_\lambda^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y, \lambda; t) \\ \varphi_2(x, y, \lambda; t) \end{pmatrix} = e^{-\lambda^2 t} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-\lambda^2 t} \begin{pmatrix} x - \lambda y t \\ y \end{pmatrix},$$

donde $\varphi_1(x, y, \lambda; t) = e^{-\lambda^2 t}(x - \lambda y t)$, $\varphi_2(x, y, \lambda; t) = e^{-\lambda^2 t}y$; son las componentes de la solución sobre los ejes coordenados. En el caso de la componente sobre el eje x , alcanza su valor mínimo (ó máximo), cuando el punto inicial es $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ y $y > 0$ ($y < 0$) para $t = \frac{1}{\lambda^2}$. Este es $\varphi_1(0, y, \lambda; \frac{1}{\lambda^2}) = -\frac{y}{\lambda e}$. La componente sobre el eje y , para este mismo tiempo y punto inicial es $\varphi_2(0, y, \lambda; \frac{1}{\lambda^2}) = \frac{y}{e}$. Por lo tanto tenemos para $|y| \neq 0$,

$$\|F_\lambda^{\frac{1}{\lambda^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\| = \frac{|y|\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\lambda e} \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow 0^+,$$

es decir, las órbitas se aplanan en dirección del eje x , al cruzar la recta $y = -\lambda x$ con pendiente vertical. Por lo tanto, M no es equiestable con respecto a $F_{\mathbb{R}^+}$. Por otra parte, para $\lambda = 0$, M es estable y no es aislado de conjuntos invariantes, todos los puntos del plano son puntos de equilibrio (Ver la Figura 4.4).

Proposición 4.3.2 (Dual). Sea $\Lambda' \subset \Lambda$, M un conjunto compacto Λ' -atractor $\forall \lambda' \in \Lambda'$ y $\lambda_0 \in \Lambda'$. Si λ_0 -inestable, entonces M no es equiestable con respecto a $F_{\Lambda'}$.

Demostración. Supongamos que M es equiestable, la proposición (4.3.1) implica que M es λ_0 -estable. Esto contradice la hipótesis que M es λ_0 -inestable. ■

4.4 Generalizaciones del concepto de equiestabilidad.

La proposición 4.3.2 de la sección 4.3 implica que, si $\Lambda' \subset \Lambda$, con la propiedad que Λ' incluye en la cerradura el valor crítico del parámetro y, el conjunto M compacto, cerrado e invariante, exhibe una *pérdida crítica* de la estabilidad, la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'}\}$ no puede ser equiestable. Esto y el problema medular planteado en este trabajo que consiste en estudio de las bifurcaciones que surgen de la pérdida crítica de la estabilidad, nos ha llevado a estudiar las familia de atractores no equiestables. Para esta clase de familias de familias es que formularemos conceptos que generalizan el concepto de *esquiestabilidad* (ES). Uno de estos es el concepto de familia de *atractores relativamente equiestables*, la definición es como sigue.

Definición 44 Una familia de atractores $\{M, A_{\Lambda'}^+, F_{\Lambda'}\}$, es *relativamente equiestable* (RES) si en la Definición 31.

$$C_{\lambda'} = A_{\lambda'}^+(M) \quad \forall \lambda' \in \Lambda'.$$

Es decir, la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'}\}$ es RES si M es ES con respecto a la familia de sistemas (semi)dinámicos $F_{\Lambda'}$ y la familia de regiones de atracción $A_{\Lambda'}^+$.

El contenido de esta definición lo ilustramos en la Figura 4.5.

Observación 3 Si M es un atractor ES con respecto a la familia de sistemas (semi)dinámicos $F_{\Lambda'}$, entonces la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda'}^+, F_{\Lambda'}\}$ es RES. Lo anterior se desprende de las definiciones (43) y (44). Sin embargo, si una familia de atractores $\{M, A_{\Lambda'}^+, F_{\Lambda'}\}$ es RES, no implica que M es un atractor ES. Demostraremos esto mediante el ejemplo que sigue.

Ejemplo 21 Consideremos el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales no lineales dependiente del parámetro $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x^2 + y^2 - \lambda^2), \\ \dot{y} &= y(x^2 + y^2 - \lambda^2).\end{aligned}\tag{4.10}$$

En este sistema el espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros $\Lambda' = \mathbb{R}^+$ y $M = \{(0, 0)\}$, es un punto de equilibrio para todo $\lambda \in \Lambda'$. Introduciendo coordenadas polares el sistema (4.10), queda

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r^2 - \lambda^2), \\ \dot{\theta} &= 0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Para $\lambda > 0$, el sistema (4.10) tiene parte lineal con un valor característico, $-\lambda^2$, de multiplicidad 2, esto implica que M es AS (localmente). Para estimar las regiones de atracción, consideremos la función de Lyapunov $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Entonces la derivada total es, $\dot{V}(x, y) = (x^2 + y^2 - \lambda^2)(x^2 + y^2)$ y,

$$\dot{V}(x, y) < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < \lambda^2, \quad \text{para } (x, y) \neq (0, 0).$$

Por lo tanto, $\forall \lambda \in \Lambda'$ las regiones de atracción son λ -vecindades esféricas del origen, $A_{\lambda}^+(M) = \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 < \lambda^2\}$ y además, $I_{\lambda}^+(M) = \emptyset$. Para $\lambda = 0$, el origen es inestable, en este caso $I_0^+(M) = \mathbb{R}^2 \setminus M$. Aplicando la Proposición (4.3.2), tenemos que M no es equiestable con respecto a $F_{\mathbb{R}^+}$, sin embargo, es relativamente equiestable. Para demostrarlo, consideremos la norma Euclideana. Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ y $\lambda > 0$,

$$B_{\delta}(M) \cap A_{\lambda}^+(M) = \{(x, y) \in X \mid \|(x, y)\| < \min\{\delta, \lambda\}\} \subset A_{\lambda}^+(M).$$

Dado que $\dot{V}(x, y) < 0$, $\forall (x, y) \in A_{\lambda}^+(M)$ y, además las regiones de atracción son positivamente invariantes; para todo $\epsilon > 0$ y $\delta = \epsilon$, tenemos que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_{\lambda}^+(B_{\epsilon}(M) \cap A_{\lambda}^+(M)) \subset B_{\epsilon}(M)$. Concluimos que la familia de atractores $\{M, A_{\mathbb{R}^+}, F_{\mathbb{R}^+}\}$ es RES pero no ES.

La propiedad RES de un conjunto invariante y compacto con respecto a una familia de sistemas semidinámicos, significa que las órbitas con puntos iniciales arbitrariamente cercanos al conjunto invariante y las regiones de atracción correspondientes a cada valor del parámetro, no se deforman bruscamente cuando el parámetro se aproxima a su valor crítico.

En el ejemplo siguiente consideramos una familia de atractores que no tiene la propiedad RES. Para este, las órbitas con puntos iniciales arbitrariamente cercanos al conjunto invariante en cuestión, bruscamente bajo la acción del flujo cuando el parámetro tiende al valor crítico.

Ejemplo 22 Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones no lineales que dependen de un parámetro $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x^2 - \lambda^2), \\ \dot{y} &= y(x^2 - \lambda^2) - x^2.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Para este sistema el espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ' es \mathbb{R}^+ , el valor crítico del parámetro, $\lambda_0 = 0$ y, $M = \{(0, 0)\}$ es un punto de equilibrio común para toda $\lambda \in \Lambda'$. Para $\lambda \neq 0$, la traza de la parte lineal de (4.12) es negativa, $-2\lambda^2$ y, tiene un valor característico de multiplicidad 2, $\mu = -\lambda^2$. Por lo tanto el origen, M , es asintóticamente estable. Las regiones de atracción para cada λ , están dadas por $A_\lambda^+(M) = \{(x, y) \in X \mid 0 < |x| < \lambda\}$. Demostraremos que la familia de atractores $\{M, A_{\mathbb{R}^+}, F_{\mathbb{R}^+}\}$, no es RES. Para $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, con $(\epsilon > \delta)$, elegimos $\lambda \in (0, \delta)$. Las líneas $y = 0, \pm\lambda$ son invariantes y para $y \neq 0$ las soluciones sobre estas líneas decrecen. El valor de λ elegido, define una curva $C_\lambda : y = \frac{x^2}{x^2 - \lambda^2}$, que al ser cruzada por las órbitas, \dot{y} cambia de signo negativo a positivo, cuando recorre la región de atracción, $A_\lambda^+(M) = \{(x, y) \in X \mid |x| < \lambda\}$, en la dirección del eje y en el sentido de positivo a negativo. Además dentro de la franja infinita $A_\lambda^+(M)$, $x\dot{x} < 0$. Sobre la curva C_λ elegimos un punto $(x^*, y^*) \in C_\lambda$ tal que, $0 < x^* < \lambda$ y, $y^* = -\epsilon$ (esto se consigue tomando $x^* = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon+1}}\lambda$). La semiórbita negativa $\gamma_\lambda^-(x^*)$ cruza el eje x entre $x = 0$ y, $x = \lambda$ porque $\dot{x} < 0$ y, $\dot{y} < 0$ en la región $\{(x, y) \in X \mid 0 < x < \lambda\}$ por abajo de la curva C_λ , que contiene la órbita en cuestión. El punto de intersección x_0 de $\gamma_\lambda^-(x^*)$ con el eje x pertenece al conjunto $B_\delta(M) \cap A_\lambda^+(M)$, pero $x^* \in \gamma_\lambda^+(x_0)$ y $x^* \notin B_\epsilon(M)$. Por lo tanto esta familia de atractores, $\{M, A_{\mathbb{R}^+}, F_{\mathbb{R}^+}\}$, no es RES.

Otro ejemplo prototipo es que tiene regiones de atracción todo el espacio, X , excepto el punto de equilibrio, M , está dado por la siguiente familia de ecuaciones diferenciales dependiente de un parámetro.

Ejemplo 23 Consideremos el sistema lineal que depende del parámetro $\lambda \geq 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\lambda x - \lambda y.\end{aligned}\tag{4.13}$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ' es el intervalo, $(0, 4)$, el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y, $M = \{(0, 0)\}$, es un punto de equilibrio común para toda $\lambda \in \Lambda'$. Para $\lambda > 0$, la traza y el discriminante del sistema 4.13 ($\text{tra} = -\lambda$, $\Delta = \lambda^2 - 4\lambda$ respectivamente) son negativos y la parte real de los valores característicos es negativa, $\text{Re}(\mu) = -\frac{\lambda}{2}$. Por lo tanto el origen M es un foco asintóticamente estable. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $A_\lambda^+(M) = \mathbb{R}^2$. Considerando un valor característico complejo y su correspondiente vector característico, a saber,

$$\mu = -\frac{\lambda}{2} + i\frac{\sqrt{4\lambda - \lambda^2}}{2}; \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{4\lambda - \lambda^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

damos explícitamente, el λ - sistema, $F_\lambda^t(x_0, y_0)$, para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, este es

$$F_\lambda^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\lambda}{2}t} \begin{bmatrix} R_1(\lambda; x_0, y_0) \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - \lambda^2}}{2}t - \delta_1(\lambda; x_0, y_0)\right) \\ R_2(\lambda; x_0, y_0) \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - \lambda^2}}{2}t - \delta_2(\lambda; x_0, y_0)\right) \end{bmatrix},$$

donde

$$R_1(\lambda; x_0, y_0) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{y_0^2 + \lambda x_0^2 + \lambda x_0 y_0}{4 - \lambda}},$$

$$\delta_1(\lambda; x_0, y_0) = \frac{\lambda(2x_0 + y_0) + (4 - \lambda)y_0}{4\sqrt{4\lambda - \lambda^2}(2x_0 + y_0)},$$

$$R_2(\lambda; x_0, y_0) = \frac{2\sqrt{y_0^2 + \lambda x_0^2 + \lambda x_0 y_0}}{\sqrt{4 - \lambda}},$$

y,

$$\delta_2(\lambda; x_0, y_0) = -\text{Arctg} \frac{\lambda(2x_0 + y_0)}{\sqrt{4\lambda - \lambda^2}y_0}.$$

Para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+$ las λ -semiórbitas positivas $\gamma_\lambda^+(x_0, y_0)$ son espirales que se enrollan en el origen en sentido dextrógiro.

Dadas $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, escogemos $(x_0, y_0) = (-\eta, \eta)$, con $\eta > 0$ y $(-\eta, \eta) \in B_\delta(M)$ con la solución $F_\lambda^t(-\eta, \eta)$ tal que, $F_\lambda^0(-\eta, \eta) = (-\eta, \eta)$ para cada $\lambda \in (0, 4)$.

$$\text{Entonces, } R_1(\lambda; -\eta, \eta) = \frac{2\eta}{\sqrt{\lambda(4-\lambda)}}, \text{ y,}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} R_1(\lambda; -\eta, \eta) = +\infty, \quad (4.14)$$

$$R_2(\lambda; -\eta, \eta) = \frac{2\eta}{\sqrt{4-\lambda}}, \quad \text{y,}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} R_2(\lambda; -\eta, \eta) = \eta. \quad (4.15)$$

Los límites (4.14) y (4.15) cuando $\lambda \rightarrow 0$, significan que; las semiórbitas positivas se alargan en la dirección del eje x y se aplanan en la dirección del eje y , por lo tanto la órbita $\gamma_\lambda^+(-\eta, \eta)$ con punto inicial en $B_\delta(M)$, abandona la vecindad $B_\epsilon(M)$. Esto demuestra que la familia de atractores $\{M, A_\lambda, F_\lambda\}$ no es RES (Ver la Figura 4.7).

Dada $\delta > 0$ y una familia de atractores $\{M, A_{\lambda'}, F_{\lambda'}\}$ la componente conexa de $A_{\lambda'}^+(M) \cap B_\delta(M)$ que contiene a M , $A_{\lambda', \delta}^*$, está definida como:

$$A_{\lambda', \delta}^* := B_\delta(M) \cap A_{\lambda'}^+(M).$$

La familia de componentes conexas dependientes del parámetro que contienen a M , $A_{\lambda', \delta}^*$, la escribimos como, $A_{\Lambda', \delta}^* = \{A_{\lambda', \delta}^* \mid \lambda' \in \Lambda'\}$.

Definición 45 La familia de atractores $\{M, A_{\lambda'}, F_{\lambda'}\}$ es conexo relativamente equiestable (CRES) si en la Definición 42,

$$C_{\lambda'} := A_{\lambda', \delta}^* \quad \forall \lambda' \in \Lambda'.$$

Es decir, la familia de atractores $\{M, A_{\lambda'}, F_{\lambda'}\}$ es CRES si M es ES con respecto a la familia de sistemas $F_{\lambda'}$ y con respecto a la familia de componentes conexas que contienen a M , $A_{\lambda', \delta}^*$.

Ilustramos el significado de la definición 45, de atractor CRES, en la Figura 4.8.

Observación 4 Si la familia de atractores $\{M, A_{\lambda'}, F_{\lambda'}\}$ es RES entonces es CRES. Pero, si la familia es CRES, no necesariamente es RES. Demostramos esta afirmación, mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 24 Consideremos la familia de sistemas dinámicos definido por el sistema en coordenadas polares dependiente de $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r), & \lambda &\in \mathbb{R}^+, \\ \dot{\theta} &= \theta(2\pi - \theta)(\theta - \lambda), & r &\geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.16)$$

El punto P , con coordenadas $r = 1$, $\theta = 0$ es asintóticamente estable para $\lambda > 0$ y atrae al plano \mathbb{R}^2 excepto el rayo $\theta = \lambda$ incluido el origen; $A_\lambda^+(P) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r, \theta) \mid r \geq 0, \theta = \lambda\}$.

Fijamos dos constantes $\epsilon, \delta > 0$ ($\epsilon > \delta$).

Para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña, existen semiórbitas con punto inicial en $B_\delta(P) \cap A_\lambda^+(P)$ que abandonan $B_\epsilon(P)$ si $\epsilon < 1$. Esto prueba que la familia de atractores no es RES. Por otro lado, las semiórbitas que comienzan en la componente conexa de $B_\delta(P) \cap A_\lambda^+(P)$ que contiene el punto P , $A_{\lambda, \delta}^*$ permanecen en $B_\epsilon(P)$, ver la Figura 4.4.

Por lo tanto la familia de atractores $\{P, A_{\mathbb{R}^+}, F_{\mathbb{R}^+}\}$ es CRES.

Otro ejemplo de familias de atractores que tiene la propiedad CRES, pero no tiene la propiedad RES, está dado por la siguiente familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes de un parámetro.

Ejemplo 25 Sea la familia de sistemas de ecuaciones que dependen del parámetro $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1 - x^2y^5), \\ \dot{y} &= y(y - \lambda - x^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros, Λ , es \mathbb{R}^+ , el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y, $M = \{(0, 0)\}$, es un punto de equilibrio fijo para toda $\lambda \in \Lambda$. Para $\lambda > 0$, el sistema tiene otros tres puntos de equilibrio distintos de M , estos son: $M'_\lambda = (0, \lambda)$ y, los otros dos puntos que resultan de la intersección de las curvas, $x^2 = \frac{1}{y^5}$ con $y = \lambda + x^2$. La familia de atractores, $\{M, A_\Lambda^+, F_{(0, +\infty)}\}$ es CRES pero, no RES. Dado $\epsilon > 0$ y $\delta \in (0, \epsilon)$, cualquier órbita con punto inicial en el conjunto, $B_\delta(M) \cap \{(x, y) \in X \mid y > \lambda + x^2\}$, abandona la ϵ -vecindad esférica $B_\epsilon(M)$ mientras que, toda órbita con punto inicial en $B_\delta(M) \cap \{(x, y) \in X \mid y < \lambda + x^2\}$, permanece en $B_\epsilon(M)$. (Ver las Figuras 4.10–4.11)

Un ejemplo más de familias de atractores que tiene la propiedad CRES pero no tiene la propiedad RES, construido a partir del ejemplo 25, multiplicando la primera ecuación de este sistema por el factor, $1 + x^2y^5$, y la segunda por $x^2 + \lambda + y$, lo presentamos a continuación.

Ejemplo 26 *Sea la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen del parámetro $\lambda > 0$.*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 - x^4y^{10}), \\ \dot{y} &= y[y^2 - (\lambda + x^2)^2].\end{aligned}\tag{4.18}$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ , el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y, $M = \{(0,0)\}$ es el conjunto invariante común. (Ver las Figuras 4.12-4.13).

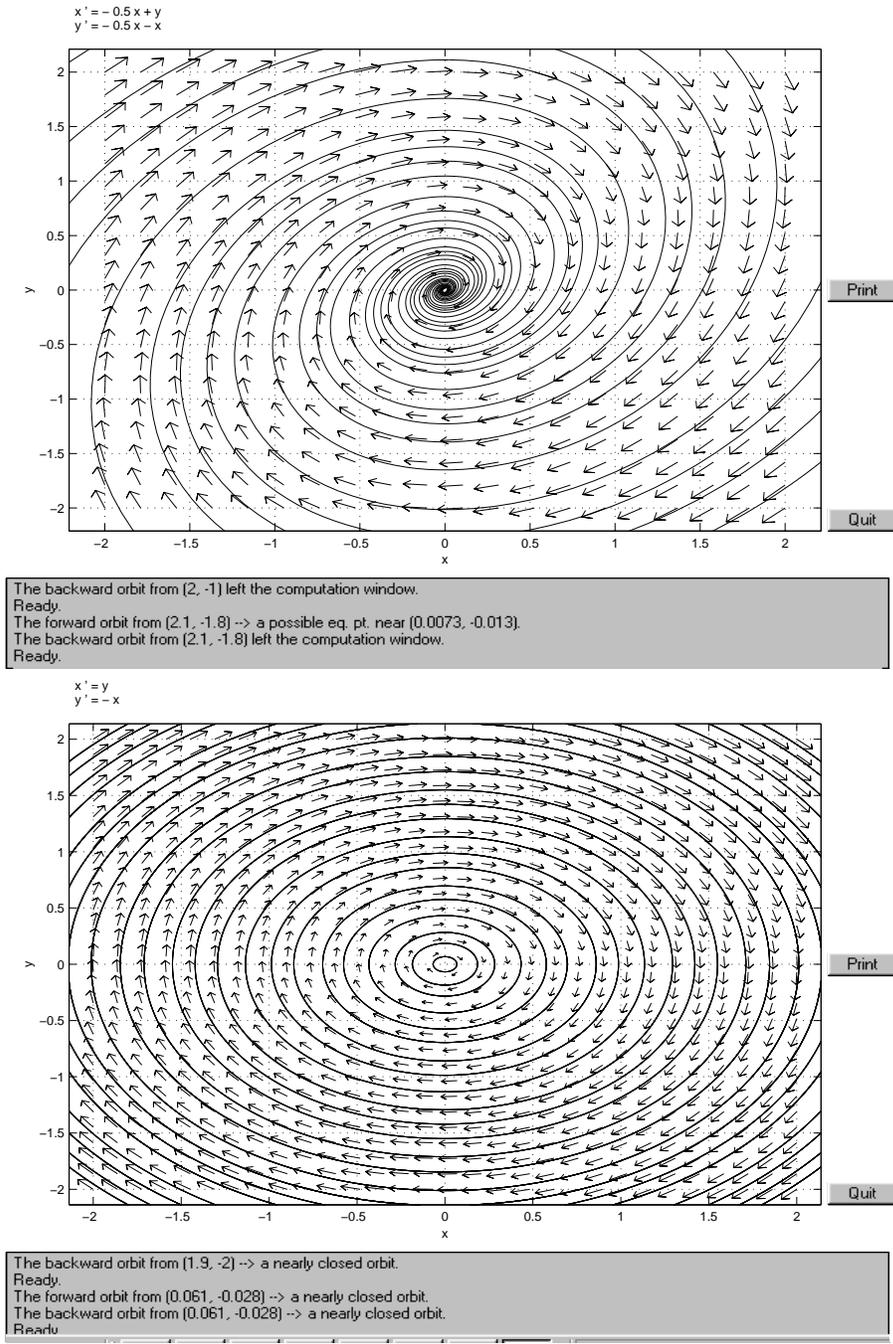
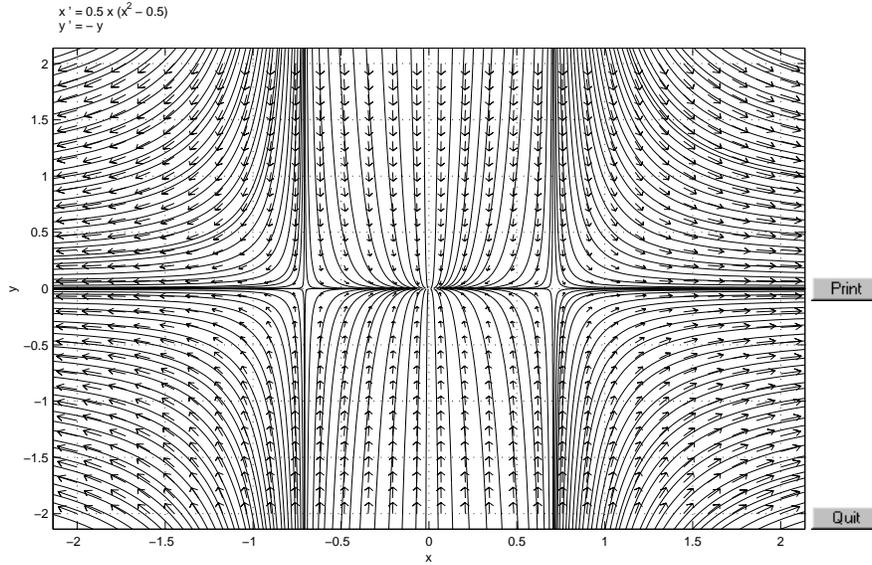
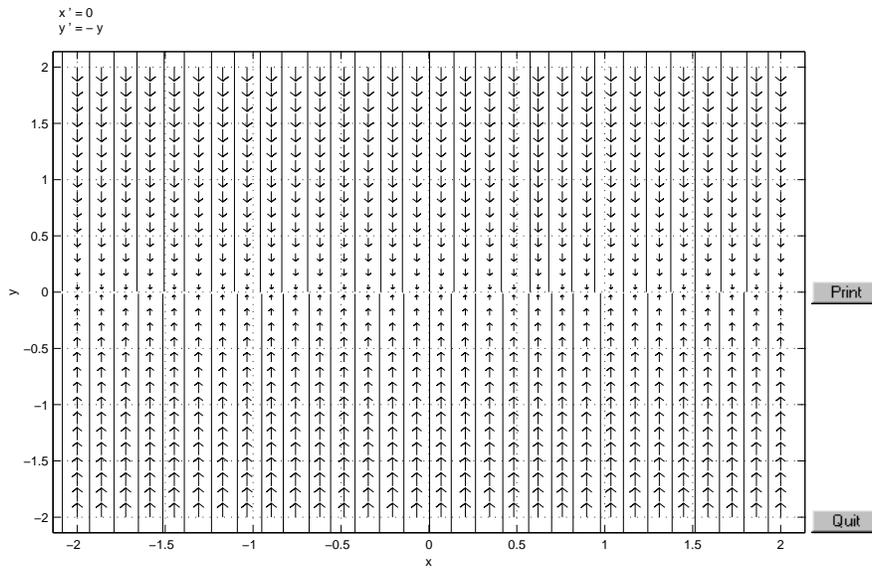


Figura 4.2: Ilustración de la pérdida crítica de la propiedad de atracción.



The backward orbit from [-2, 2] left the computation window.
Ready.
The forward orbit from [-2.1, 2.1] left the computation window.
The backward orbit from [-2.1, 2.1] left the computation window.
Ready.



The backward orbit from [-1.9, -1.5] left the computation window.
Ready.
The forward orbit from [-2.1, -1.5] -> a possible eq. pt. near [-2.1, -0.014].
The backward orbit from [-2.1, -1.5] left the computation window.
Ready.

Figura 4.3: Ilustración de la pérdida crítica no equiestable, de la propiedad de atracción de M .

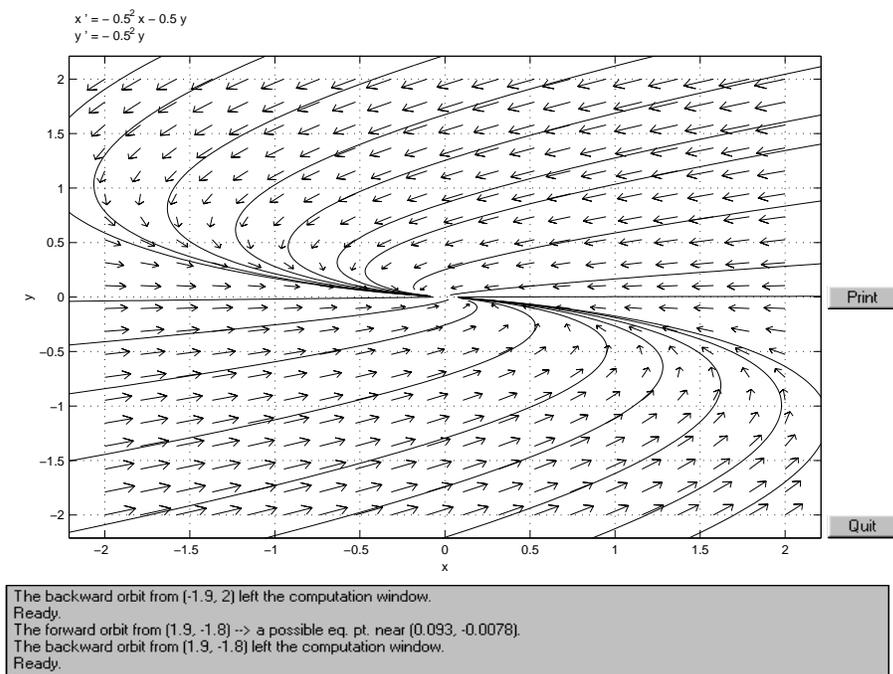


Figura 4.4: Ilustración de una familia de atractores no ES, pero estable para el sistema correspondiente al valor crítico del parámetro.

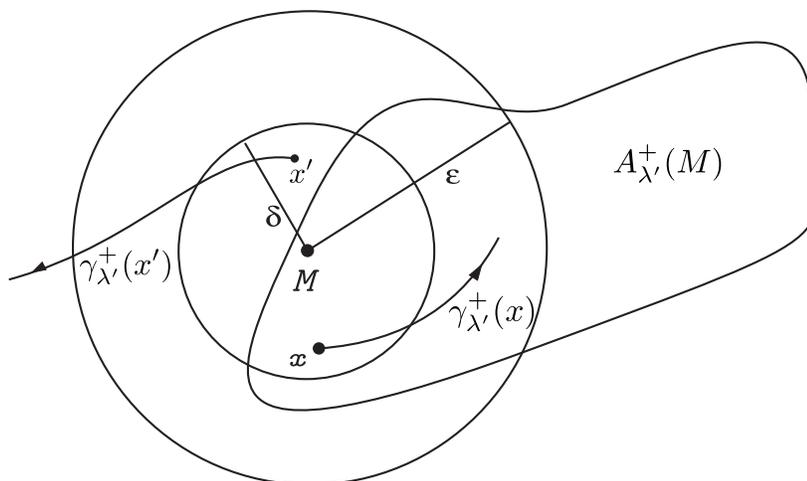
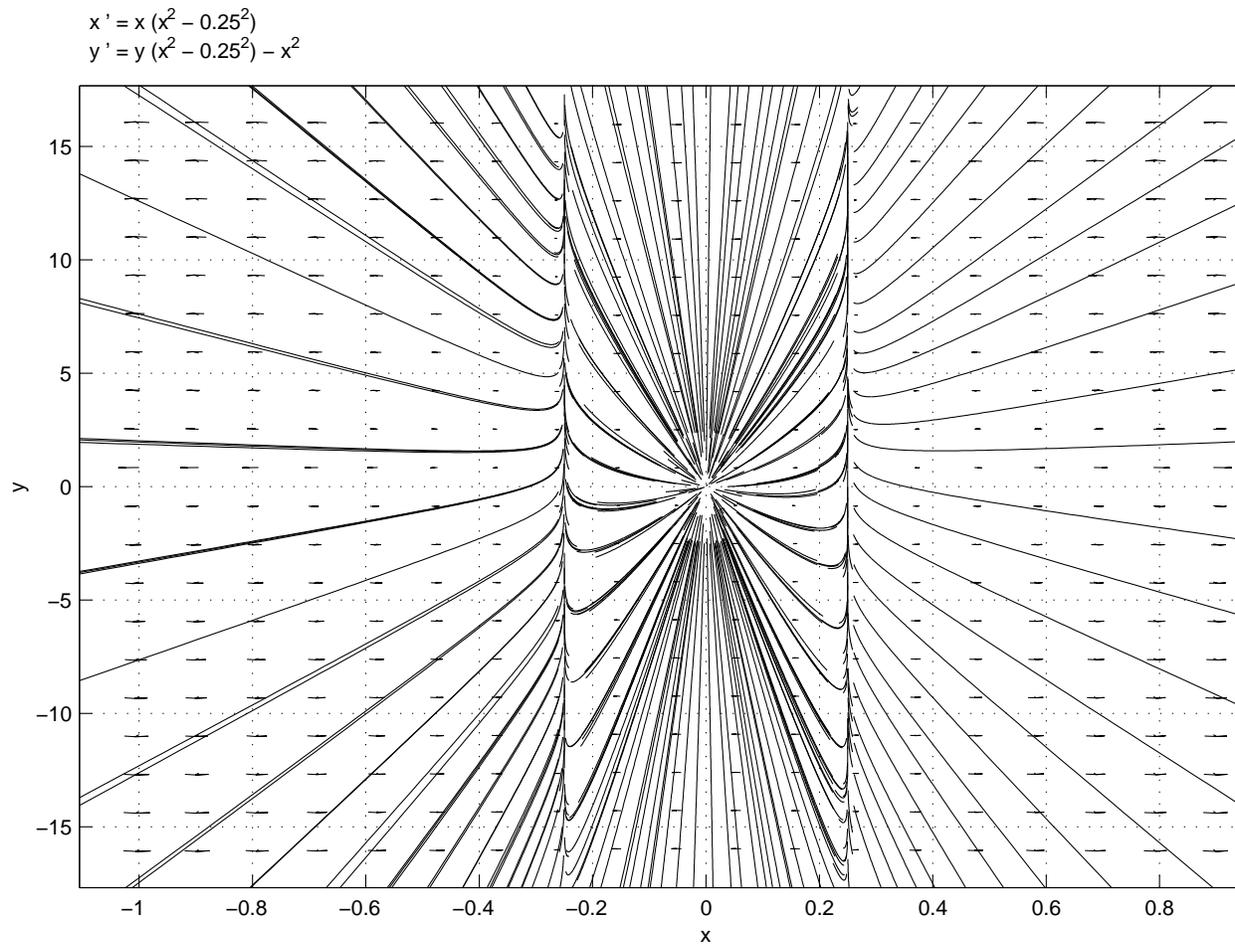


Figura 4.5: Ilustración de la definición de familia de atractores que tiene la propiedad RES.



The backward orbit from (0.25, -17) --> a possible eq. pt. near (0.25, -16).
 Ready.
 The forward orbit from (0.23, -17) --> a possible eq. pt. near (0.031, -2.4).
 The backward orbit from (0.23, -17) --> a possible eq. pt. near (0.24, -17).
 Ready

Figura 4.6: Las órbitas con punto iniciales cercanos al origen, se aplanan en dirección del eje “x” y se alargan en dirección del eje “y”.

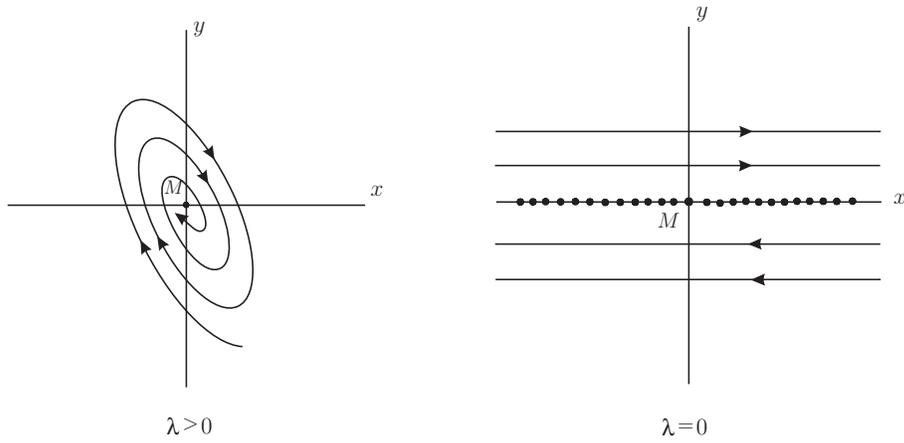


Figura 4.7: Las órbitas se alargan en dirección del eje “x” y se planan en dirección del eje “y”.

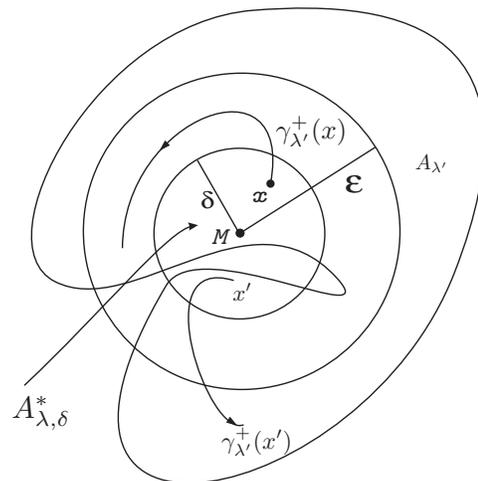


Figura 4.8: Ilustración de la definición de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES.

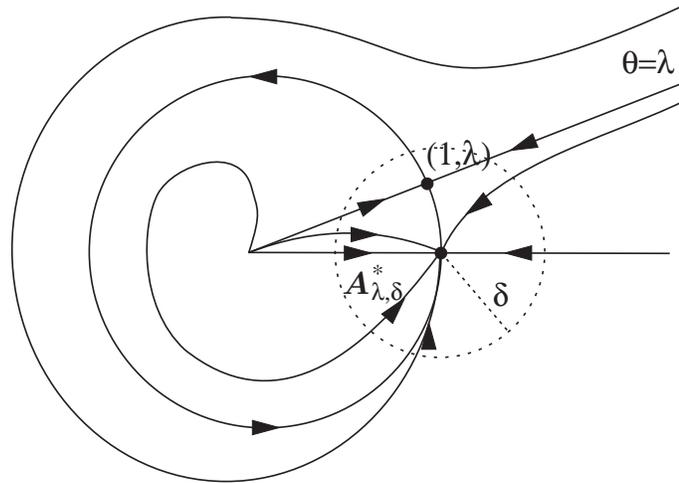
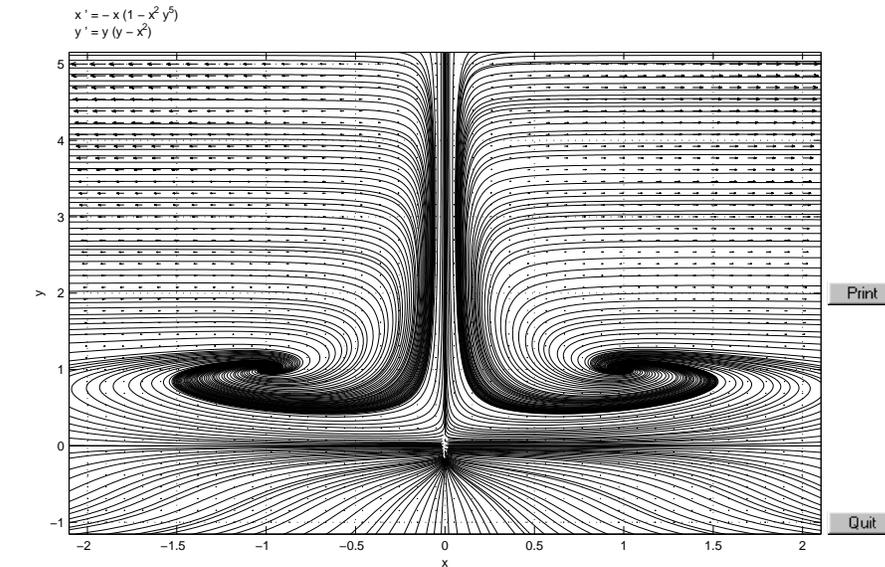
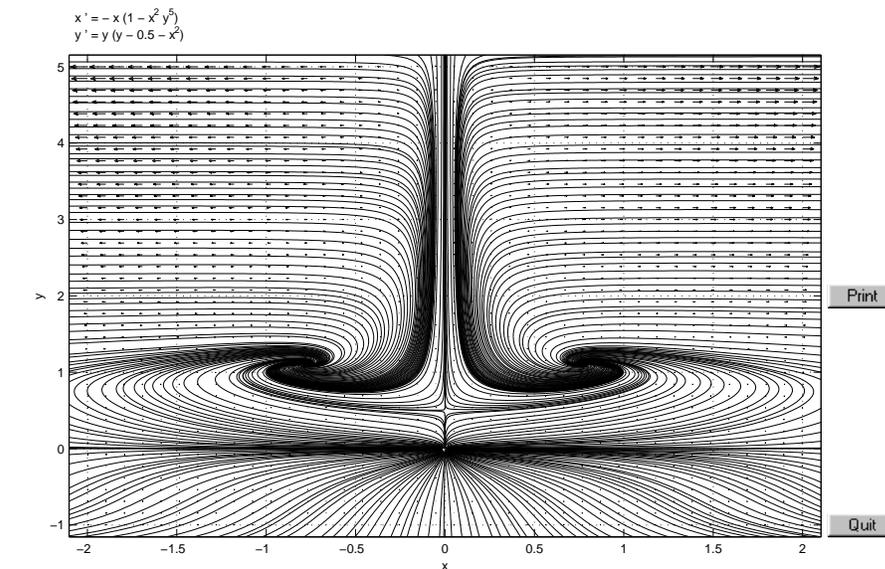


Figura 4.9: Ilustración del ejemplo 24 que trata de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero no tiene la propiedad RES.



The backward orbit from (0.21, 5.1) -> a possible eq. pt. near (1, 1).
 Ready.
 The forward orbit from (1.7, 0.81) left the computation window.
 The backward orbit from (1.7, 0.81) -> a possible eq. pt. near (0.99, 1).
 Ready.



The backward orbit from (-0.9, -0.85) left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from (-2, -0.44) -> a possible eq. pt. near (-0.016, -0.0049).
 The backward orbit from (-2, -0.44) left the computation window.
 Ready.

Figura 4.10: Ilustración del comportamiento de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES y no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 0$, abajo $\lambda = 0.5$.

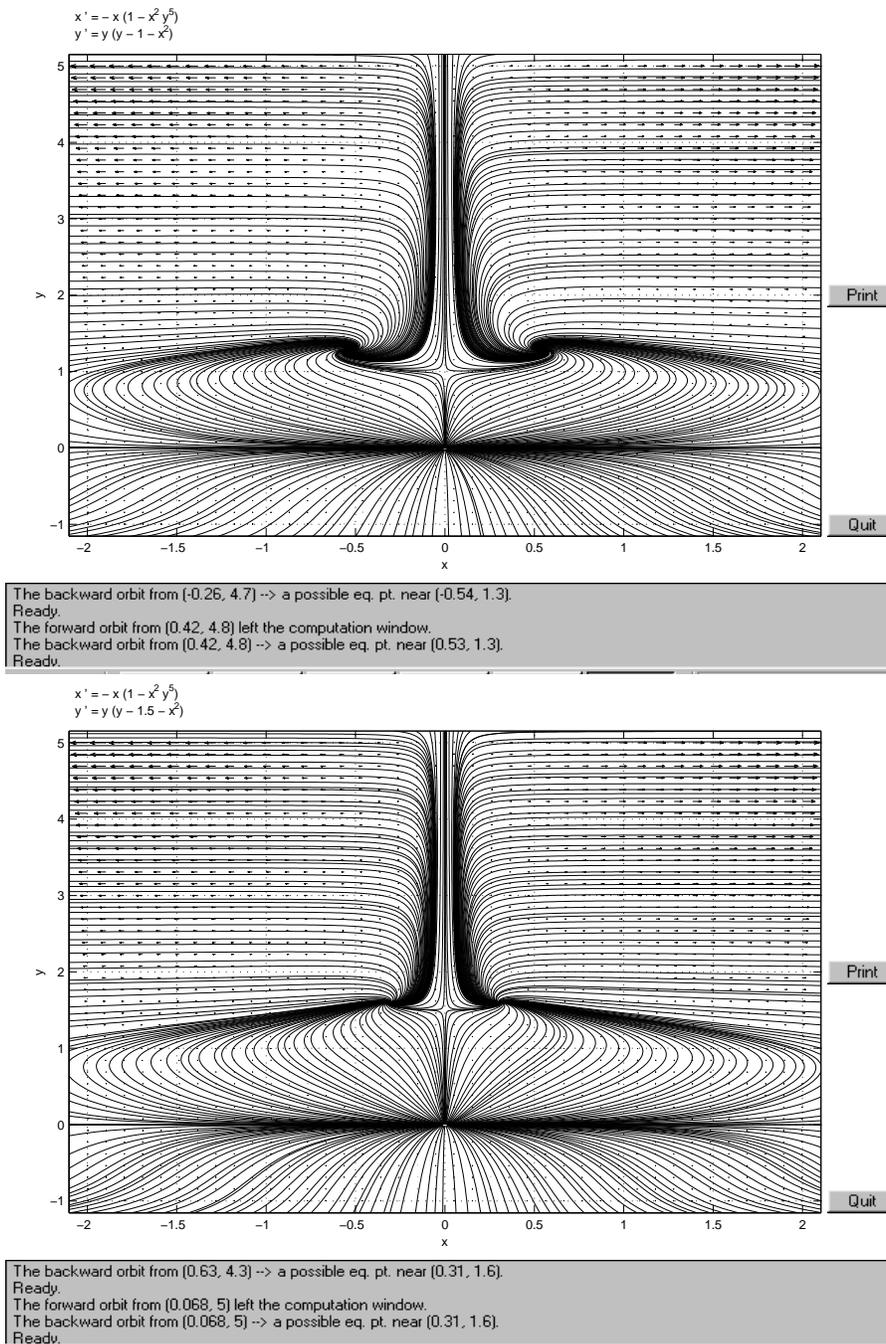
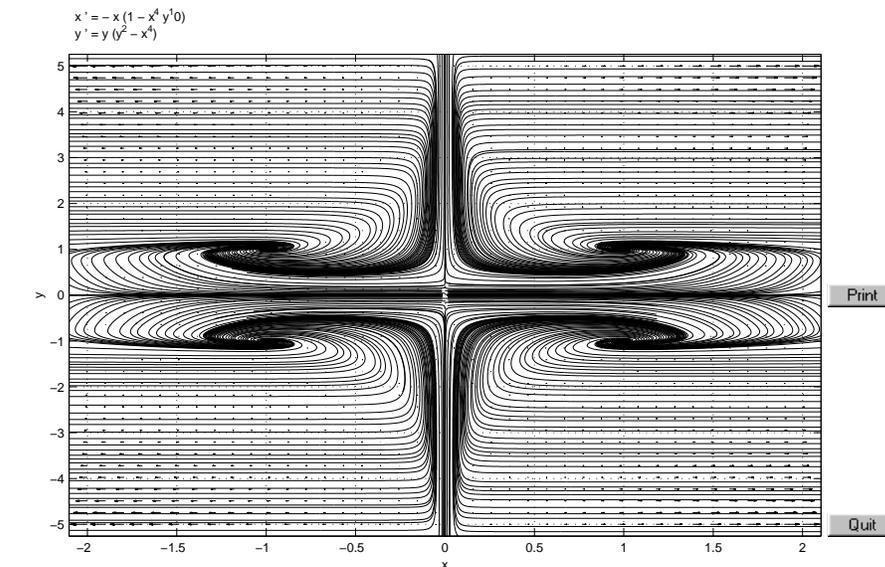
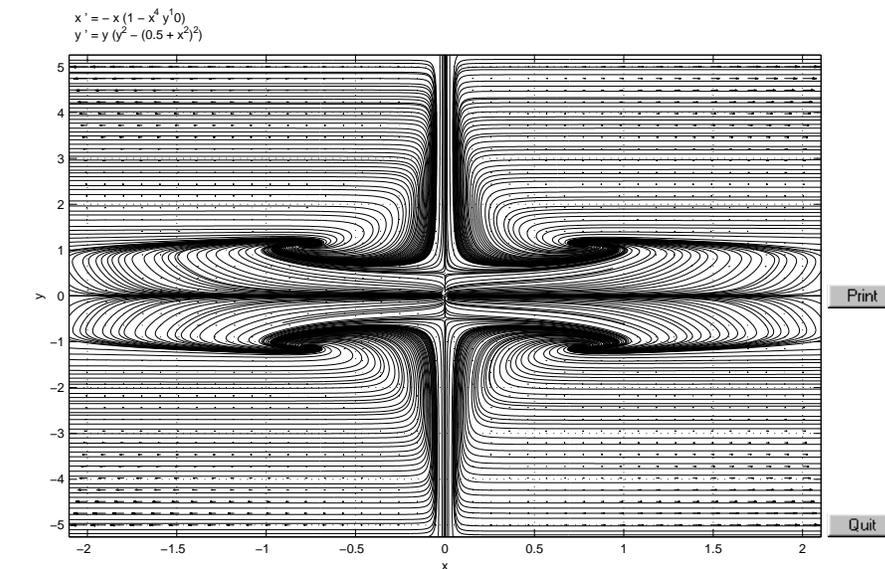


Figura 4.11: Ilustración del comportamiento de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES y no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 1$, abajo $\lambda = 1.5$.

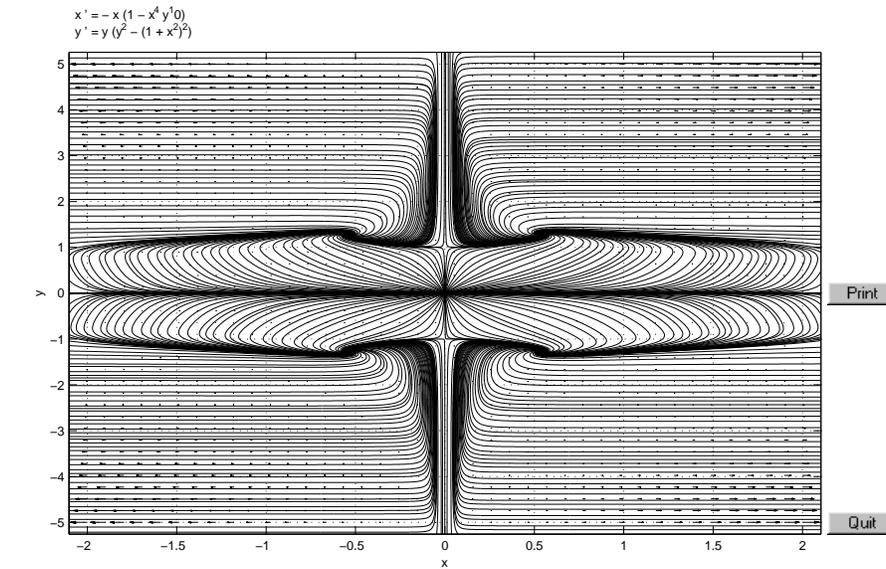


The backward orbit from [-0.49, -1.4] -> a possible eq. pt. near [-1, -1].
 Ready.
 The forward orbit from [-0.57, -1.3] left the computation window.
 The backward orbit from [-0.57, -1.3] -> a possible eq. pt. near [-1, -1].
 Ready.

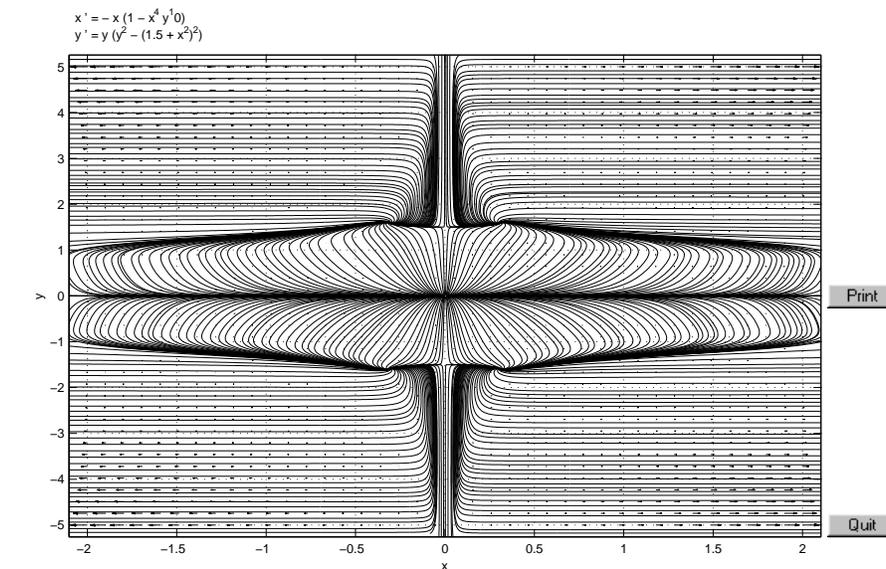


The backward orbit from [-1.9, 0.57] -> a possible eq. pt. near [-0.78, 1.1].
 Ready.
 The forward orbit from [-1.9, 0.71] -> a possible eq. pt. near [-0.015, 0.0019].
 The backward orbit from [-1.9, 0.71] -> a possible eq. pt. near [-0.78, 1.1].
 Ready.

Figura 4.12: Ilustración del comportamiento de otra familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero, no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 0$, abajo $\lambda = 0.5$.



The backward orbit from (0.012, -5.1) -> a possible eq. pt. near (0.53, -1.3).
 Ready.
 The forward orbit from (-2.1, 0.51) -> a possible eq. pt. near (-0.013, 5.5e-007).
 The backward orbit from (-2.1, 0.51) -> a possible eq. pt. near (-0.53, 1.3).
 Ready.



The backward orbit from (0.076, 5.2) -> a possible eq. pt. near (0.31, 1.6).
 Ready.
 The forward orbit from (-0.06, 5.2) left the computation window.
 The backward orbit from (-0.06, 5.2) -> a possible eq. pt. near (-0.31, 1.6).
 Ready.

Figura 4.13: Ilustración del comportamiento de otra familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero, no tiene la propiedad RES. Arriba $\lambda = 1$, abajo $\lambda = 1.5$.

CAPÍTULO 5

Teoría de Bifurcaciones.

5.1 Antecedentes.

La presente teoría tiene sus orígenes en la *Bifurcación de Hopf* y se desarrolla a partir de una de sus posteriores generalizaciones, las *Bifurcaciones que surgen de equilibrios estables*, invirtiendo en estas últimas el sentido del tiempo y debilitando la hipótesis referente al valor crítico del parámetro. Con la finalidad de tener una visión clara de estas cosas, presentamos un breve desarrollo de las ideas que las originaron.

5.1.1 Bifurcación de Hopf.

En la literatura (por ejemplo, [HK]), se enfoca la *Teoría de Bifurcaciones* como el estudio de los posibles cambios en la estructura de las órbitas de una ecuación diferencial en dependencia de un parámetro, al variar este. Mediante los ejemplos que siguen, a pesar de su simplicidad, expresamos esta idea e ilustramos algo de la terminología que hemos definido en el Capítulo 3 y que utilizamos en el estudio de este problema según nuestro punto de vista.

Ejemplo 27 (*Bifurcación unidimensional, “trinche”*). Consideremos la familia monoparamétrica de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = -x(x^2 - \lambda) = \lambda x - x^3, \quad (5.1)$$

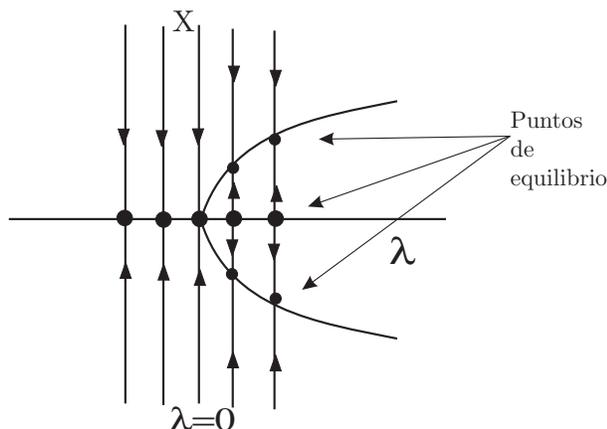


Figura 5.1: Ilustración del ejemplo 27, *bifurcación extracrítica*: cuando λ sale del valor crítico 0, surgen dos nuevos puntos de equilibrio.

para este caso el espacio fase X es \mathbb{R} , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R} y $M = \{0\}$. Para $\lambda \leq 0$ el origen M es asintóticamente estable (AS), para $\lambda > 0$, es inestable (“repulsor”). Para cada valor $\lambda > 0$ del parámetro surgen dos “nuevos” puntos de equilibrios, $\{\pm\sqrt{\lambda}\}$ (asintóticamente estables). Por lo tanto, tenemos una bifurcación extracrítica del equilibrio M (ver la Figura 5.1).

Ejemplo 28 Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones dependiente del parámetro λ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \lambda y - y^3, \quad (x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

En este ejemplo, el espacio fase X es \mathbb{R}^2 y M es el equilibrio $\{(0, 0)\}$ del sistema, este es independiente del parámetro. Para $\lambda \leq 0$, M es un foco estable (correspondiendo a una oscilación amortiguada). En efecto, tomando la función de Lyapunov $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ y calculando la derivada total, para $\lambda < 0$, tenemos:

$$\dot{v}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = \lambda y^2 - y^4 = y^2(\lambda - y^2) \leq 0, \quad (5.3)$$

con esto demostramos que M es estable y, aplicando el principio de invariancia de LaSalle ([Am] Teor. 18.3 pp. 234), también tenemos que M es asintóticamente estable para $\lambda \leq 0$. Por otra parte, para $\lambda > 0$ el equilibrio

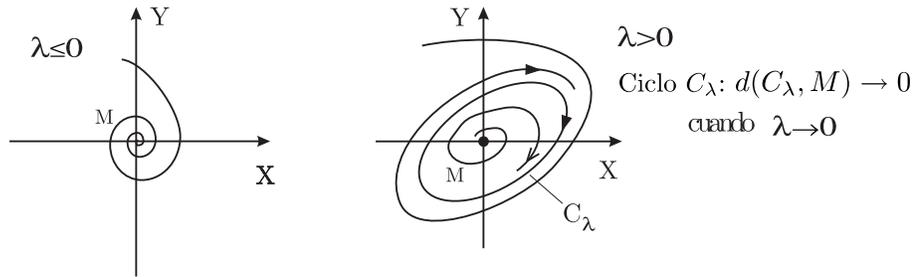


Figura 5.2: Ilustración del ejemplo 28, *bifurcación extracrítica*: cuando λ sale del valor crítico 0, surge de M una órbita periódica C_λ cuyo diámetro aumenta cuando λ crece.

M es un foco inestable (local); corresponde a un oscilador excitado. Para verificar la inestabilidad de M , calculamos $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2y^2(\lambda - y^2) \geq 0$, para $|y| < \sqrt{\lambda}$, según un argumento análogo al principio de invariancia de LaSalle, intercambiando el tiempo t por $-t$, tenemos que M es inestable. Para valores de λ tendiendo a 0, las órbitas van hacia M . Para verificar lo anterior, calculamos nuevamente la variación del cuadrado de la distancia desde los puntos iniciales de las soluciones del sistema (5.2), al conjunto M , para estimar la variación de esta distancia con respecto al tiempo. Entonces tenemos que $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2y^2(\lambda - y^2) < 0$, para $|y| > \sqrt{\lambda} \rightarrow 0$ (cuando $\lambda \rightarrow 0^+$). Por el Teorema de Poincaré-Bendixson (ver [HK], pp. 367 Teor. 12.5), existe un ciclo límite C_λ , que se colapsa en M cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ (Ver la Figura 5.2).

Ejemplo 29 (*Bifurcación crítica bidimensional*). Consideramos el sistema de ecuaciones lineales en el parámetro λ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \lambda y, \quad (x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R} y $M = \{(0, 0)\}$ para el punto de equilibrio del sistema (5.4), para cualquier λ . Si $\lambda < 0$, M es un foco estable (oscilación amortiguada). Para $\lambda = 0$, M es un centro (oscilación no amortiguada). Y finalmente para $\lambda > 0$, M es un foco inestable (oscilación excitada). (Ver la Figura 5.3). Cada vecindad de M contiene ciclos cuando $\lambda = 0$. Es decir, para $\lambda = 0$, M no es aislado de conjuntos invariantes.

En los ejemplos anteriores tenemos que si el tipo de estabilidad del equilibrio M cambia cuando el sistema está sujeto a pequeñas perturbaciones del

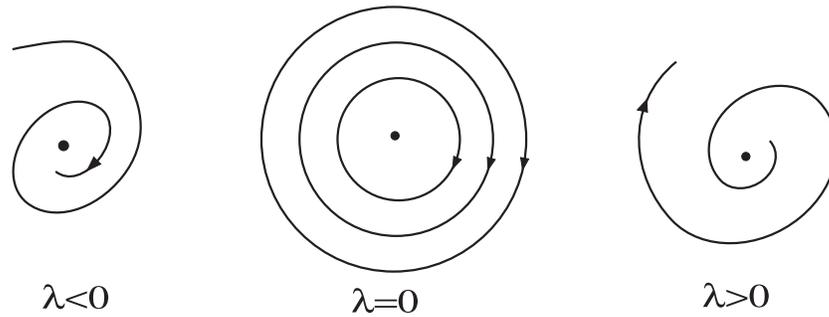


Figura 5.3: Ilustración del ejemplo 29, *bifurcación crítica*: para el valor crítico del parámetro $\lambda = 0$, M no es aislado de conjuntos invariantes, toda vecindad de M contiene una órbita periódica.

parámetro λ alrededor de $\lambda = 0$, estos cambios de estabilidad generalmente van acompañados del surgimiento o desaparición de pequeñas órbitas que se acumulan alrededor del punto de equilibrio M . En realidad, este importante fenómeno de *bifurcación* es lo que se conoce como la clásica *Bifurcación de Hopf*¹. El **Teorema de Hopf** nos da algunas condiciones suficientes para la ocurrencia de este tipo de bifurcación y se enuncia en el siguiente contexto.

Dado el sistema,

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \quad (x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n; \lambda \in \mathbb{R}) \quad (5.5)$$

(con F analítica en x). Se supone que $x = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ es decir:

$$F(\mathbf{0}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}). \quad (5.6)$$

Separamos F en partes lineal y no lineal:

$$\dot{x} = L_\lambda x + f(x, \lambda). \quad (5.7)$$

(L_λ es una matriz de $n \times n$ independiente de x). Entonces vale:

Teorema 5.1.1 ([Ho],[MM]) Para $\lambda = 0$, sean exactamente dos autovalores de L_λ puramente imaginarios: $\mu_\pm = \pm i\beta$ ($\beta > 0$) y suponiendo que las trayectorias de $\mu_\pm(\lambda)$ crucen el eje imaginario transversalmente (ver la Figura 5.4). Entonces existe una familia de soluciones periódicas dependientes del parámetro

¹precursores: Poincaré, Andrónov (+ escuela).

λ que se acumulan en el origen para $\lambda \rightarrow 0$. En general las soluciones periódicas existen o para $\lambda < 0$ (“subcrítico”), $\lambda > 0$ (“ultracrítico”), o $\lambda = 0$ (“crítico”). En los primeros dos casos, existe para cada λ (suficientemente pequeña) exactamente un ciclo (esto no se cumple cuando no vale la condición de transversalidad).

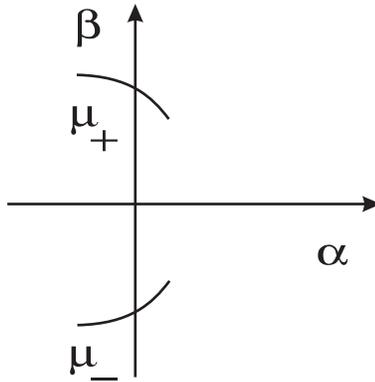


Figura 5.4: Ilustración de la hipótesis de transversalidad del Teorema 5.1.1, de la bifurcación de Hopf.

En los ejemplos 27, 28 y 29, los autovalores respectivos son: $\mu = \lambda$ para el ejemplo 27 y, $\mu_{\pm}(\lambda) = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$, con $\mu_{\pm}(0) = \pm i$, $\mu'_{\pm}(0) = \frac{1}{2}$ para los ejemplos 28 y 29. Por lo tanto, la bifurcación de M es del tipo Hopf.

El rasgo común que presenta el punto de equilibrio M de cada una de las ecuaciones diferenciales en los ejemplos 27, 28 y 29, analizados anteriormente, es el *cambio de estabilidad* del punto de equilibrio fijo M cuando λ cambia de signo de izquierda a derecha sobre el eje real. Tenemos que para $\lambda < 0$, M es estable y, para $\lambda > 0$, M es inestable. En los tres casos decimos que a M exhibe una pérdida crítica de la estabilidad cuando λ cambia de signo (o λ sale del valor crítico del parámetro).

Para el valor “crítico” del parámetro λ ($\lambda = 0$ en los ejemplos) puede haber estabilidad de M (como en los tres ejemplos 27, 28 y 29) o inestabilidad de M (en los mismos, con la inversión del tiempo, es decir: sustituyendo $-t$ en lugar de t en las ecuaciones correspondientes). Parafraseando la Definición 29; decimos que el punto de equilibrio o conjunto invariante M tiene una *pérdida crítica* (o *ganancia extracrítica*) de estabilidad en $\lambda = \lambda_0$, si para $\lambda = \lambda_0$ M es inestable y para ciertos valores arbitrariamente cercanos a λ_0 M es estable. La

ganancia crítica de la estabilidad de M es equivalente a la pérdida extracrítica de la estabilidad de M , y viceversa.

5.1.2 Bifurcaciones que surgen de equilibrios estables, en general.

Una extensión del Teorema de Hopf se realizó permitiendo conjuntos invariantes en vez de ciclos, y reemplazando la condición que se refiere a los autovalores de la parte lineal, por una condición de cambio (ganancia crítica) de la estabilidad. En esta dirección estudiaron este problema **Marchetti, Negrini, Salvadori y Scalia** en 1976 [MNSS] y Marchetti [Ma]. Ellos demostraron que:

Si el origen $\mathbf{0}$, del espacio fase es asintóticamente estable (AS) para λ_0 , y completamente inestable para ciertos valores del parámetro $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, entonces surgen conjuntos invariantes M_n ajenos a M para cada λ_n tales que $d(M_n, \mathbf{0}) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. En particular, en el caso del plano, estas serán órbitas periódicas (debido al Teorema de Poincaré-Bendixon), como en la teoría de Hopf.

Es decir, la *pérdida extracrítica* de la estabilidad implica lo que llamamos, *bifurcación extracrítica*. Así que la *existencia de la bifurcación no depende de la parte lineal del sistema, sino del cambio de estabilidad* (esta puede ser resultado de cambio de signo de partes reales de autovalores pero no necesariamente.) Este es un fenómeno que se explica mediante otras propiedades más generales que tienen los sistemas dinámicos. El ejemplo que sigue, refuerza la afirmación anterior.

Ejemplo 30 Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones dependientes del parámetro λ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + y^3(\lambda - x^2), \quad (x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R} y, M el punto de equilibrio $\{(0,0)\}$, independiente del parámetro. Para $\lambda \leq 0$, M es AS. Para demostrarlo, consideremos la función de Lyapunov: $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, calculando la derivada total, tenemos:

$$\dot{v}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = \lambda y^2 - y^4 = y^4(\lambda - x^2) \leq 0, \tag{5.9}$$

luego, para $\lambda < 0$ de la ecuación (5.9), implica que M es estable. Aplicando el principio de invariancia de LaSalle ([Am] Teor. 18.3 pp. 234) y considerando

nuevamente la ecuación (5.9), tenemos también que M es asintóticamente estable para $\lambda \leq 0$, puesto que $v(x, y) \rightarrow +\infty$ cuando $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$. Por otra parte, para $\lambda > 0$ el equilibrio M es completamente inestable. Para verificar esto, calculamos $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2y^4(\lambda - x^2) \geq 0$, para $|x| < \sqrt{\lambda}$ y, nuevamente, según un argumento análogo al principio de invariancia de LaSalle, intercambiando el tiempo t por $-t$, tenemos que M es inestable. Para valores de λ tendiendo a 0, las órbitas van hacia M . Para demostrar lo anterior, calculamos nuevamente la variación del cuadrado de la distancia desde los puntos iniciales de las soluciones del sistema (5.8), al conjunto M , para estimar la variación de esta con respecto al tiempo. Así tenemos que, $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2y^4(\lambda - x^2) < 0$, para $|x| > \sqrt{\lambda} \rightarrow 0$ (cuando $\lambda \rightarrow 0^+$). Por el Teorema de Poincaré-Bendixson (ver [HK], pp. 367 Teo. 12.5), existe un ciclo límite \widehat{C}_λ , que se colapsa en M cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. (Ver las Figuras 5.5 y 5.6). Por lo tanto, existe una bifurcación de Hopf; sin embargo, el Teorema 5.1.1 de Hopf no es aplicable porque los autovalores del sistema lineal asociado al sistema (5.8), siempre son cero.

En 1994, **Seibert y Florio**, [SF] extendieron lo anterior en las siguientes direcciones:

1. A sistemas semidinámicos en espacios métricos arbitrarios, bajo una condición de compacidad asintótica local (LAC) en A , es decir:

Dadas las sucesiones $(x_n), (\lambda_n), (t_n)$ tales que $F_{\lambda_n}^{[0, t_n]}(x_n) \subset A$, $t_n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, entonces el conjunto $\{F_{\lambda_n}^{t_n}(x_n)\}$ es relativamente compacto $\{F_\lambda^{[0, t]}(x) := F_\lambda(\{x\} \times [0, t]) = \{F_\lambda^{t'}(x) \mid t' \in [0, t]\}$ trayectoria por x con parámetro $\lambda\}$.

2. Al caso donde la *inestabilidad completa* es relajada, por ejemplo: el origen $\mathbf{0}$ (o conjunto invariante M) no es atractor débil (NAD), o sea,

$$(\exists x_{\mathbf{N}})(\exists \lambda_{\mathbf{N}}), \quad d(x_n, M) \rightarrow 0, \quad \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \quad L_{\lambda_n}^+(x_n) \cap M = \emptyset.$$

Si M es AS para λ_0 y NAD para Λ (además de satisfacer la condición LAC) entonces existe una bifurcación extracrítica. Tal es el caso de la transición extracrítica de foco a silla.

Ejemplo 31 Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones dependientes del parámetro λ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y(\lambda - y^2), \\ \dot{y} &= -x - y, \quad (x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+). \end{aligned} \tag{5.10}$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 y, ponemos a M como el punto de equilibrio $\{(0, 0)\}$ del sistema, independiente del parámetro. Para $\lambda = 0$, M es un foco estable. Para demostrarlo, consideremos los autovalores de la parte lineal del sistema en cuestión. Estos son:

$\mu_{\pm}(\lambda) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$, $\mu_{\pm}(0) = -1, 0$ y, $\mu'_{\pm}(0) = 0$. Por lo tanto, para $\lambda > 0$, M es un punto silla; y surgen dos focos (puntos que se bifurcan) los cuales se alejan de M cuando λ se aleja de 0. En este caso el Teorema de Hopf, no es aplicable porque no se cumple la hipótesis de transversalidad, por el contrario, tenemos $\frac{d}{d\lambda}\mu_{\pm}(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ (ver las Figuras 5.7 y 5.8).

En las demostraciones de la existencia de bifurcaciones para los casos anteriores, se utiliza como herramienta el **Principio de persistencia de la estabilidad asintótica** el cual enunciamos como sigue:

Cuando un sistema semidinámico F_{λ_0} involucra un conjunto invariante M AS (atractor estable), es perturbado ligeramente, aparece en el sistema F_{λ} perturbado, un conjunto invariante AS arbitrariamente cercano al atractor original (ver, [Se2] y [Yo]). Esto significa que en esencia también se preserva la región de atracción (no se puede colapsar súbitamente).

En la *ganancia crítica (pérdida extracrítica) de la estabilidad asintótica*, la *bifurcación extracrítica* del conjunto invariante M (aislado de conjuntos invariantes) ocurre, cuando entre la región de repulsión R_{λ} del “nuevo” repulsor M y la región de atracción del “nuevo” atractor M'_{λ} brotan los conjuntos M_{λ} que se separan de M . (Corresponde al caso MNSS, cuando $M = \{\mathbf{0}\}$ es el origen del espacio fase e independiente del parámetro.) Ilustramos este Teorema de dinámica topológica en la Figura 5.9.

En la Figura 5.9, se tiene que, R_{λ} es la región de λ -repulsión de M , $A_{\lambda_0}^+(M)$ es la λ_0 -región de atracción de M , M'_{λ} es un atractor maximal en $A_{\lambda_0}^+$, los M_{λ} son conjuntos invariantes y cerrados en $U \setminus M$ donde U es una vecindad de M y se tiene la siguiente relación entre estos conjuntos:

$$M \subset R_{\lambda} \subset M'_{\lambda} \subset A_{\lambda_0}^+(M).$$

A continuación presentamos un ejemplo prototipo que a pesar de su simplicidad, ilustra lo que hemos mencionado en el párrafo anterior.

Ejemplo 32 *Bifurcación bidimensional extracrítica silla–nodo. Consideremos la familia monoparamétrica de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(x^2 - \lambda) \\ \dot{y} &= -y, \quad (x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}).\end{aligned}\tag{5.11}$$

El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , y ponemos $M = \{(0, 0)\}$ para el punto de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales (5.11). Para $\lambda = 0$, M es un nodo estable; mientras que para $\lambda > 0$ surgen dos nodos estables $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ y $(\sqrt{\lambda}, 0)$ y, M se convierte en un punto silla. El equilibrio M del sistema (5.11), sufre una pérdida extracrítica de la estabilidad (Ver la Figura 5.10).

La conclusión del estudio del problema de la existencia de bifurcaciones a partir de equilibrios estables, es que *siempre que un conjunto invariante M tenga una pérdida o ganancia de la estabilidad cuando un parámetro alcanza o sobrepasa un valor crítico para el cual M es aislado de conjuntos invariantes, ocurre una bifurcación de M , excepto posiblemente en algunos casos muy especiales.* Como los mencionados por Florio y Seibert en [SF1].

Considerando nuevamente los ejemplos 27, 28 y 29 de la subsección anterior, concernientes a la bifurcación de Hopf, reescalando el tiempo t con $-t$, tenemos que el *cambio de la estabilidad* y la *bifurcación extracrítica* de M se preservan².

Siguiendo esta línea de investigación, relajando la hipótesis de que para $\lambda = \lambda_0$, M es AS; y en su lugar, suponiendo que para $\lambda = \lambda_0$, M sea inestable en el sentido negativo (completamente inestable). Para evitar la doble negación, invertimos la escala del tiempo. Entonces tenemos que al poner $-t$ en lugar de t que para $\lambda = \lambda_0$, M es (completamente) inestable en el sentido negativo y para cada $\lambda \neq \lambda_0$ pero $\lambda \rightarrow \lambda_0$ M AS, esto es, una pérdida crítica de la estabilidad de M y la bifurcación extracrítica de M se preserva. Entonces una transición de inestabilidad completa hacia la estabilidad asintótica de M , va acompañada de una bifurcación extracrítica cuando el conjunto invariante M es aislado de conjuntos invariantes en el valor crítico del parámetro. Esta conclusión resulta trivial, pues basta con reescalar el tiempo y se obtiene a partir del resultado en

²En 1984, después de un seminario que versó sobre la clásica *bifurcación de Hopf* en la Universidad Centro Occidental de Venezuela, a Seibert se le ocurrió que este fenómeno de bifurcación, pudiera estar ligado a ciertos principios (de persistencia) topológicos de naturaleza muy general. Ahí se pudo haber originado el enfoque que presentamos aquí y del cual se derivó la teoría bosquejada en el esquema que presentamos en la introducción de este trabajo.

[SF1]; por esta razón, en lo que presentamos aquí, *reemplazamos la hipótesis de inestabilidad completa por la de mera inestabilidad de M* en el valor crítico del parámetro y para los valores arbitrariamente cercanos a este, suponemos que M es estable. Aplicando el **principio de persistencia de la inestabilidad** (ver Cap. 2) y suponiendo que la familia de atractores satisface la propiedad CRES definida en el Capítulo 3, demostraremos en la siguiente sección la existencia de la bifurcación extracrítica de M .

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.

5.2.1 La existencia de bifurcaciones extracríticas.

Proposición 5.2.1 *Sea $M \subset X$ un conjunto compacto y positivamente invariante. Supongamos además que M es un atractor con región de atracción $A^+(M)$.*

Entonces la frontera de la región de atracción, $\partial A^+(M)$; es positivamente invariante.

Demostración. Supongamos que $\partial A^+(M)$ no es positivamente invariante. Sea $x \in \partial A^+(M)$, entonces existe $\tau > 0$ tal que o $F^\tau(x) \in \overline{A^+(M)}$ o $F^\tau(x) \in \overline{\mathcal{C}A^+(M)}$. Sea $y := F^\tau(x)$. Si $y \in A^+(M)$, puesto que $A^+(M)$ es abierto e invariante (ver [Sa], pp. 57–58); entonces $x \in A^+(M)$, luego $x \notin \partial A^+(M)$, por lo tanto se tiene una contradicción. Por otra parte, si $y \in \overline{\mathcal{C}A^+(M)}$, puesto que $\overline{\mathcal{C}A^+(M)}$ es abierto, existe (por continuidad de F con respecto a x) una vecindad $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $F^\tau(V) \subset \overline{\mathcal{C}A^+(M)}$ y $F^\tau(V) \in \mathcal{V}_y$. Pero V contiene puntos de $A^+(M)$; esto contradice que $A^+(M)$ es positivamente invariante. ■

El contenido de la Proposición anterior está implícito en el Teorema 1.8 en [Bh], pp. 60, para el caso de sistemas dinámicos.

Lema 5.2.2 *Sea $M \subset X$ compacto y positivamente invariante bajo cierto sistema semidinámico (X, T, F) . Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:*

- i) Para $\epsilon > 0$, M es aislado de conjuntos invariantes con respecto a la bola cerrada $\overline{B_\epsilon(M)}$, es decir: si $M' \subset X$ es invariante y $M' \subset \overline{B_\epsilon(M)} \Rightarrow M' \subset M$.*

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.101

ii) M es conexo y toda vecindad esférica de M es arco-conexa;

iii) M es un atractor con región de atracción $A^+(M)$; y

iv) $(\exists \delta > 0) \quad B_\delta(M) \setminus A_\delta^* \neq \emptyset$, donde A_δ^* es la componente conexa de

$$A_\delta^+(M) := A^+(M) \cap B_\delta(M)$$

que contiene a M .

Entonces existe $z^* \in A_\delta^*$ tal que $\gamma^+(z^*) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}$.

Demostración: Elegimos $x \in M$ y $x' \in B_\delta(M) \setminus A_\delta^*$ (existe por la condición iv)). Aplicando la hipótesis ii), según la cual $B_\delta(M)$ es arco-conexa, tenemos que existe una función continua $\varphi : I \rightarrow B_\delta(M)$, donde $I = [0, 1]$ tal que $\varphi(0) = x$ y $\varphi(1) = x'$. Escribimos $\sigma := \varphi(I)$; por la Definición de la función φ , $\sigma \subset B_\delta(M)$. Definimos el conjunto $B := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in A_\delta^*\}$; entonces $B \neq \emptyset$, puesto que $\varphi(0) = x \in M \subset A_\delta^*$. Por otro lado, $\varphi(1) = x' \notin A_\delta^*$, lo cual quiere decir que $\varphi^{-1}(B)$, tiene una cota superior menor que 1. Como consecuencia de todo esto, incluyendo que $A_\delta^* \in \mathcal{V}_M$, existe $t^* \in (0, 1)$ tal que $t^* = \sup B$. Por la continuidad de φ , existe $z \in B_\delta(M)$ para la cual $\varphi(t^*) = z$; entonces $z \in \partial A_\delta^*$, pues en caso contrario se tiene $t^* \neq \sup B$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z \in \partial A_\delta^* \cap B_\delta(M)$ (ver la Figura 5.11).

Por otra parte, $\partial A^+(M)$ es un conjunto positivamente invariante (Proposición 5.2.1) y cerrado (se sigue de la Definición de frontera de un conjunto). Dado que $z \in \partial A$, $\gamma^+(z) \subset \partial A$ y también $L^+(z) \subset \partial A$, además, $\gamma^+(z)$ y $L^+(z)$ son conjuntos invariantes (ver [Sa], pp 36 y 40). La región de atracción de M , $A^+(M)$ es abierta, entonces $\partial A \cap M = \emptyset$, por ende $\gamma^+(z) \cap M = \emptyset$ y $L^+(z) \cap M = \emptyset$. En particular, la hipótesis (i) implica que $\gamma^+(z) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}$. El complemento de la ϵ -vecindad cerrada de M es un conjunto abierto, entonces

$$(\exists z' \in \gamma^+(z)) (\exists \eta > 0) \quad B_\eta(z') \subset \overline{B_\epsilon(M)} \quad (5.12)$$

Fijamos $z' \in \gamma^+(z)$ y $\eta > 0$ tales que satisfacen (5.12). Para z' , la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales implica que existe δ' tales que $B_{\delta'}(z) \subset B_\delta(M)$ y

$$(\forall y' \in B_\eta(z')) (\exists y \in B_{\delta'}(z)) (\exists \tau > 0) \quad F^\tau(y) \in B_\eta(z'). \quad (5.13)$$

En particular,

$$(\exists y^* \in B_\eta(z')) (\exists z^* \in B_{\delta'}(z) \cap A_\delta^*) \quad F^\tau(z^*) \in \overline{CB_\epsilon(M)}. \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) implica que $\gamma^+(z^*) \notin \overline{B_\epsilon(M)}$. ■

El contenido del Lema 5.2.2, lo ilustramos en la Figura 5.12.

Proposición 5.2.3 *Sea (X, T, F) un sistema smidinámico y, supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:*

- (i) *El conjunto $M \subset X$ es no vacío, compacto y positivamente invariante para todo $\lambda \in \Lambda$;*
- (ii) *F es LAC sobre $W \in \mathcal{V}_M$;*
- (iii) *M es inestable.*

Entonces

$$I(M) \cap W \neq \emptyset \quad (5.15)$$

Demostración. Sea $W \in \mathcal{V}_M$, F LAC sobre W y M inestable. A partir de las hipótesis (iii) e (i), siendo M inestable y compacto existe una vecindad $U \in \mathcal{V}_M$, escogida, sin pérdida de generalidad, de manera que $\overline{U} \subset W$ y entonces

$$(\exists x_{\mathbb{N}} \subset U)(\exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+)(\exists x^* \in M) : x_n \rightarrow x^*, F^{t_n}(x_n) \in \gamma^+(x_n) \cap \partial U, \quad (5.16)$$

donde los puntos $F^{t_n}(x_n) \in \partial U$ existen por la continuidad de F con respecto a t . La suposición (según la hipótesis (i)) que se refiere a que M es compacto y positivamente invariante, implica que $t_n \rightarrow +\infty$ (ver la Proposición 2.1.5 del Capítulo 2). Por otra parte, F es LAC sobre W (ver la hipótesis (ii)); de esto concluimos que existe una subsucesión de $\{F^{t_n}(x_n)\}_{n=1}^\infty$, que converge sobre $\partial U \subset W$. Elegimos esta subsucesión, la depuramos, la reenumeramos y finalmente la reescribimos de la siguiente manera: $\{F^{t_n}(x_n)\}_{n=1}^\infty$. Sea

$$y_n := F^{t_n}(x_n), \quad t_n \geq 0 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (5.17)$$

entonces

$$\exists y^* \in I(M) \cap \partial U \subset I(M) \cap W \text{ tales que } y_n \rightarrow y^*; \quad (5.18)$$

por lo tanto vale la relación (5.15). ■

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.103

Teorema 5.2.4 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico X localmente conexo, $\Lambda^* \subset \Lambda$, $\lambda_0 \notin \Lambda^*$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda^*}$ y supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis.*

i) *Existe un conjunto $M \subset X$, no vacío, compacto, conexo y positivamente λ -invariante para todo $\lambda \in \Lambda$ con las siguientes propiedades:*

a) *M es λ_0 -inestable;*

b) *M es λ -asintóticamente estable para todo $\lambda \in \Lambda^* \subset \Lambda$.*

ii) *para cada $\lambda \in \overline{\Lambda^*}$, F_λ es LAC en alguna vecindad $W \in \mathcal{V}_M$.*

iii) *M satisface la propiedad CRES con respecto a Λ^* .*

Entonces existe una bifurcación extracrítica de M en λ_0 , relativo a Λ^ .*

Demostración: Sean $W \in \mathcal{V}_M$, F_{λ_0} LAC sobre W . A partir de la Proposición 5.2.3, siendo M λ_0 -inestable (hipótesis i) a)) y compacto, tenemos

$$I_{\lambda_0}(M) \cap W \neq \emptyset \quad (5.19)$$

Sea $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño para que

$$\overline{B_\epsilon(M)} \subset \overset{\circ}{W} \quad (5.20)$$

y

$$I_{\lambda_0}(M) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}. \quad (5.21)$$

Para este ϵ fijamos el correspondiente $\delta \in (0, \epsilon)$ según la propiedad CRES. Siendo el espacio X localmente conexo, existe una vecindad conexa $V_\delta \in \mathcal{V}_M$ tal que

$$V_\delta \subset B_\delta(M). \quad (5.22)$$

Debido a (5.21) existe un punto $x \in V_\delta$ tal que

$$\gamma_{\lambda_0}^+(x) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}. \quad (5.23)$$

Por 5.23 y (5.20) existe $t > 0$ tal que $y := F_{\lambda_0}^t(x) \in \overset{\circ}{W} \setminus \overline{B_\epsilon(M)}$. Por la dependencia continua con respecto al parámetro λ (persistencia de la extensión dinámica) tenemos que:

$$(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) \quad y' := F_\lambda^t(x) \in \overset{\circ}{W} \setminus \overline{B_\epsilon(M)}. \quad (5.24)$$

Siendo el conjunto M λ -atractor, con región de atracción A_λ , y la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}, F_{\Lambda^*}\}$ CRES en λ_0 , más concretamente

$$\gamma_\lambda^+(A_{\lambda,\delta}^*(M)) \subset B_\epsilon(M), \quad (5.25)$$

vale $x \notin \overline{A_{\lambda,\delta}^*(M)}$, debido a (5.23). Siendo $x \in V_\delta$, esto implica que $\mathcal{C}\overline{A_{\lambda,\delta}^*(M)} \cap V_\delta \neq \emptyset$, o sea, $\emptyset \neq \overline{A_{\lambda,\delta}^*(M)} \cap V_\delta \subsetneq V_\delta$ (ya que $A_{\lambda,\delta}^*(M) \subset \mathcal{V}_M$). De esto concluimos que

$\partial_{V_\delta} A_{\lambda,\delta}^* \neq \emptyset$ ³ (pues en caso contrario V_δ no sería conexo). Elegimos $z \in \partial_{V_\delta} A_{\lambda,\delta}^*$. Puesto que la familia de sistemas semidinámicos F_{Λ^*} es LAC en una vecindad W (hipótesis ii)), aplicando la propiedad de dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales junto con las ecuaciones (5.19) y (5.20) tenemos,

$$L_\lambda^+(z) \subset \overline{\gamma_\lambda^+(z)} \subset \overline{B_\epsilon(M)} \subset W. \quad (5.26)$$

[La segunda inclusión sigue mediante un argumento elemental a partir de (5.24), tomando en cuenta (5.21).] Tomamos

$$M'_\lambda := L_\lambda^+(z); \quad (5.27)$$

este conjunto es ajeno con M , compacto, débilmente invariante y compuesto de órbitas principales (ver [Sa], Teorema 3.4- (i) y Teorema 3.5 pp.40-41).

■

El contenido del Teorema 5.2.4 lo ilustramos en la Figura 5.13.

5.2.2 La existencia de bifurcaciones críticas.

Definición 46 *Un conjunto invariante y cerrado, $M \subset X$ exhibe una bifurcación débilmente crítica con respecto a una familia de sistemas semidinámicos F_Λ en $\lambda_0 \in \Lambda$, si cada una de sus vecindades contiene un conjunto cerrado M' débilmente λ_0 -invariante no contenido en M y, para cada $\lambda \in \Lambda' \subset \Lambda$ tal que $\lambda \rightarrow \lambda_0$, M es aislado de conjuntos positivamente débilmente invariantes. Si en particular, $M' \cap M = \emptyset$, este concepto se reduce al de bifurcación crítica.*

Definición 47 *Una familia de sistemas semidinámicos F_Λ es localmente asintóticamente compacto (LAC) en λ_0 en un conjunto W , si para cualquier terna*

³ $\partial_B A := \partial A \cap B$.

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.105

de sucesiones, $x_{\mathbf{N}}, t_{\mathbf{N}}, \lambda_{\mathbf{N}}$, tales que $t_n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, y $F_{\lambda_n}^{[0, t_n]}(x_n) \subset W$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{F_{\lambda_n}^{t_n}(x_n)\}$ es un conjunto relativamente compacto.

Teorema 5.2.5 *Sea F_{Λ} una familia de sistemas semidinámicos definida sobre un espacio métrico X , localmente conexo. Supongamos además que se cumplen las mismas hipótesis puestas en el Teorema 5.2.4 excepto ii) y iii), las cuales reemplazamos por: la familia de sistemas semidinámicos F_{Λ} LAC en λ_0 en una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$ y, M no es CRES, respectivamente.*

Entonces ocurre una bifurcación crítica o débilmente crítica de M para $\lambda = \lambda_0$. Además existe una órbita principal para F_{λ_0} .

Demostración: Primero, sea $W \in \mathcal{V}_M$ y según la negación de la propiedad CRES; fijamos un $\epsilon > 0$ tales que $\overline{B_{\epsilon}(M)} \subset W$ y, para cualquier pareja de vecindades, $N \in \mathcal{N}$ y $B_{\delta}(M)$ con $\delta \in (0, \epsilon)$, tenemos que

$$\gamma_{\lambda}^{+}(A_{\lambda, \delta}^{*}) \not\subset \overline{B_{\epsilon}(M)} \quad (5.28)$$

vale para alguna $\lambda \in N$, donde $A_{\lambda, \delta}^{*}$ está definida como en el Teorema 5.2.4; la componente conexa de $A_{\lambda, \delta} := A_{\lambda} \cap B_{\epsilon}(M)$ que contiene a M . Fijamos λ y δ dadas por (5.28). Siendo la intersección de dos conjuntos abiertos, $A_{\lambda, \delta}$ es abierto, entonces es localmente conexo (véase [Ku] pp. 163). El conjunto $A_{\lambda, \delta}^{*}$ es una componente de $A_{\lambda, \delta}$, por lo tanto es abierto [Ku], entonces es una vecindad de M .

Luego, definimos los dos siguientes subconjuntos de $A_{\lambda, \delta}^{*}$:

$$A_{\lambda, \delta}^e := \{x \in A_{\lambda, \delta}^{*} \mid \gamma_{\lambda}^{+}(x) \not\subset \overline{B_{\epsilon}(M)}\}, \quad (5.29)$$

y

$$A_{\lambda, \delta}^i := \{x \in A_{\lambda, \delta}^{*} \mid \gamma_{\lambda}^{+}(x) \subset B_{\epsilon}(M)\}. \quad (5.30)$$

Ambos conjuntos definidos por (5.29) y (5.30) son no vacíos. Para $A_{\lambda, \delta}^e$, esto es consecuencia de la negación de la propiedad CRES, concretamente de (5.28); para $A_{\lambda, \delta}^i$, es consecuencia de que M es λ -asintóticamente estable (para $\lambda \in \Lambda'$). Los conjuntos $A_{\lambda, \delta}^i$ y $A_{\lambda, \delta}^e$ son ajenos, el segundo por definición (ver (5.29)) y el primero porque M es λ -asintóticamente estable; para la ϵ que hemos fijado en (5.28), existe $\eta > 0$ tales que $\gamma_{\lambda}^{+}(B_{\eta}(M)) \subset B_{\epsilon}(M)$. Tomando en cuenta que $A_{\lambda, \delta}^{*}$ es una vecindad de M , tenemos inmediatamente que, $A_{\lambda, \delta}^i \neq \emptyset$. A saber, $A_{\lambda, \delta}^{*} \cap B_{\eta}(M) \neq \emptyset$, y $A_{\lambda, \delta}^e \cap B_{\eta}(M) = \emptyset$, por lo tanto $A_{\lambda, \delta}^i \cap B_{\eta}(M) \neq \emptyset$.

En el siguiente paso demostraremos que los dos conjuntos definidos por (5.29) y (5.30) son abiertos: para $A_{\lambda,\delta}^e$ es consecuencia de la dependencia continua con respecto a los puntos iniciales, siendo $A_{\lambda,\delta}^*$ abierto. Para $A_{\lambda,\delta}^i$, hacemos las dos siguientes afirmaciones: primera, que cualquier semiórbita $\gamma_\lambda^+(x)$ con punto inicial $x \in A_{\lambda,\delta}^i$, permanece dentro de la ϵ' - vecindad esférica $B_{\epsilon'}(M)$, para $\epsilon' < \epsilon$; y segunda, esta órbita (en la primera afirmación), después de un cierto tiempo τ , queda dentro de $B_\delta(M)$.

La segunda de estas afirmaciones es consecuencia de que M es λ - asintóticamente estable.

En efecto, para la δ fija en (5.29) y (5.30), escogemos un $\alpha \in (0, \delta)$ tales que

$$\gamma_\lambda^+(B_\alpha(M)) := \bigcup_{x \in B_\alpha(M)} \gamma_\lambda^+(x) \subset B_\delta(M), \quad (5.31)$$

y $\tau > 0$ tales que

$$F_\lambda^\tau(x) \in B_{\alpha/2}(M). \quad (5.32)$$

Entonces, concluimos que

$$\gamma_\lambda^+(F_\lambda^\tau(x)) \subset B_\delta(M). \quad (5.33)$$

La primera afirmación se sigue entonces, de la continuidad de las órbitas con respecto a t : definiendo la función $d(t) := d(F_\lambda^t(x), M)$, esta alcanza un valor máximo $\epsilon' < \epsilon$ sobre el intervalo compacto $[0, \tau]$. Luego, por la dependencia continua con respecto a los valores iniciales, cualquier semiórbita $\gamma_\lambda^+(x')$, con x' suficientemente cercano a x , permanecerá dentro de $B_{\epsilon'}(M)$ durante el intervalo de tiempo $[0, \tau]$, al término del cual estará en el conjunto $B_\alpha(M)$, por (5.32), y continuará después en $B_\delta(M)$ como consecuencia de (5.31). Esto implica que $x' \in A_{\lambda,\delta}^i$, lo que demuestra que este conjunto es abierto.

Puesto que todo conjunto conexo, como $A_{\lambda,\delta}^*$ no se puede separar en dos conjuntos abiertos ajenos ($A_{\lambda,\delta}^i$ y $A_{\lambda,\delta}^e$), existe un tercer subconjunto

$$A_{\lambda,\delta}^0 \neq \emptyset \quad (5.34)$$

de $A_{\lambda,\delta}^*$ ajeno de $A_{\lambda,\delta}^i$ y $A_{\lambda,\delta}^e$, tales que

$$A_{\lambda,\delta}^* = A_{\lambda,\delta}^i \cup A_{\lambda,\delta}^0 \cup A_{\lambda,\delta}^e. \quad (5.35)$$

Por definición de la primera y tercera componentes de esta unión, toda semiórbita positiva $\gamma_\lambda^+(x)$, con $x \in A_{\lambda,\delta}^0$, contiene un punto $y = F_\lambda^t(x)$, $t > 0$,

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.107

en el conjunto $S_\epsilon(M)$; si existen más de un punto, existe un primero y este lo denotaremos con $y_\lambda(x)$, y el correspondiente valor de t para el cual se alcanza este punto, con $t_\lambda(x)$, más explícitamente:

$$y_\lambda(x) := F_\lambda^{t_\lambda(x)}(x) \in S_\epsilon(M). \quad (5.36)$$

Ilustramos la demostración hasta este punto mediante la Figura 5.14.

Elegimos una sucesión $\delta_{\mathbb{N}}, \delta_n \rightarrow 0$, y una correspondiente sucesión $\lambda_{\mathbb{N}}, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$, tales que vale (5.28) para cada λ_n, δ_n en lugar de λ y δ y una correspondiente sucesión $x_{\mathbb{N}}$ tales que $x_n \in A_{\lambda_n, \delta_n}^0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Los puntos correspondientes a $y_{\lambda_n}(x_n)$ y los tiempos $t_{\lambda_n}(x_n)$ los denotaremos en forma abreviada como y_n y t_n , respectivamente. Se sigue de la compacidad y la invariancia positiva de M , que $t_n \rightarrow +\infty$. Luego, por la propiedad LAC en λ_0 en el conjunto $W \in \mathcal{V}_M$, de la familia F_Λ , la sucesión $y_{\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación $y^* \in S_\epsilon(M)$, el cual podemos suponer sin pérdida de generalidad, que es el límite de la sucesión $y_{\mathbb{N}}$ y lo fijamos.

Probaremos que existe una λ_0 -órbita principal (es decir que está definida para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$) a través de y^* y que está contenida en $\overline{B_\epsilon(M)}$

Primero construiremos la órbita principal $\widehat{\gamma}_{\lambda_0}(y^*)$, a través de $y^* \in S_\epsilon(M)$. Sea $\{t^m\}$ una sucesión de números reales positivos no acotada. La idea es construir una sucesión de extensiones sucesivas de $\widehat{\gamma}_{\lambda_0}(y^*)$, con dominios $[-t^m, 0)$, siendo cada extensión, una extensión hacia atrás de la que le precede.

Para este fin, definimos una sucesión doble de puntos

$$x_n^m = F_{\lambda_n}^{t_n - t^m}(x_n), \quad \text{con } t^m < t_n. \quad (5.37)$$

Para todo m fijo, la sucesión resultante en n , contiene un número infinito de elementos, porque $t_n \rightarrow +\infty$, y esta es relativamente compacta por la propiedad LAC de la familia F_Λ (las semi órbitas $\gamma_{\lambda_0}^+(x_n)$, por definición de las x_n 's, están contenidas en $\overline{B_\epsilon(M)}$, por lo tanto en W). Podemos por lo tanto suponer que toda sucesión $\{x_n^m\}$ converge (mediante una depuración sucesiva de la sucesión original $x_{\mathbb{N}}$ correspondientes a los valores crecientes de m), y denotamos los respectivos límites por y^m . Esto es, para cada m fija

$$F_{\lambda_n}^{t_n - t^m}(x_n) \rightarrow y^m, \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty, \quad \text{con } t^m < t_n. \quad (5.38)$$

Entonces, por los Axiomas II y III, vale la siguiente relación para toda $m \geq 2$:

$$y^{m-1} = F_{\lambda_0}^{t^m - t^{m-1}}(y^m). \quad (5.39)$$

En efecto escribiendo $m - 1$ en lugar de m en la relación (5.37) y aplicando el Axioma II, obtenemos

$$F_{\lambda_n}^{t_n - t^{m-1}}(x_n) = F_{\lambda_n}^{t^m - t^{m-1} + (t_n - t^m)}(x_n) = F_{\lambda_n}^{t^m - t^{m-1}}(F_{\lambda_n}^{(t_n - t^m)}(x_n)). \quad (5.40)$$

Luego, tomando el límite en (5.40) cuando $n \rightarrow +\infty$ y aplicando el Axioma III, llegamos a (5.39).

Si definimos $y^0 = y^*$ y $t^0 = 0$, (5.39) vale también para $m = 1$.

Para cada número $t < 0$, le asignamos un punto $y(t)$ seleccionando m tal que $-t^m < t \leq -t^{m-1}$ y definimos

$$y(t) = F_{\lambda_0}^{t^m + t}(y^m). \quad (5.41)$$

La independencia de $y(t)$ con respecto de m es consecuencia inmediata de la propiedad de semigrupo; en particular, $y^m = y(-t^m)$, y $y^* = y(0)$. Por la misma razón, (5.41) se puede extender al caso de un punto arbitrario $y(s)$ con $s < t$, en lugar de y^m :

$$y(t) = F_{\lambda_0}^{(t-s)}(y(s)), \quad (5.42)$$

lo que demuestra que $y(\cdot)$ es una extensión hacia atrás de $\gamma_{\lambda_0}^+(y^*)$ y, puesto que $t^m \rightarrow +\infty$, esta define una órbita principal a través de y^* y la denotamos por $\hat{\gamma}_{\lambda_0}(y^*)$. Por simples argumentos de continuidad, considerando que $y(t)$ es el límite de una sucesión de puntos dentro de $\overline{B_\epsilon(M)}$ se sigue que la órbita principal $\hat{\gamma}_{\lambda_0}(y^*)$ también está contenida en $\overline{B_\epsilon(M)}$. Puesto que ϵ se puede tomar arbitrariamente pequeña, esto demuestra la existencia de una bifurcación (posiblemente débilmente) crítica de M . Ilustramos el contenido del Teorema de la bifurcación crítica mediante la Figura 5.15. ■

Corolario 5.2.6 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico, X , localmente conexo y sea el conjunto compacto $M \subset X$. Supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis:*

1. M es asintóticamente estable para toda $\lambda^* \in \Lambda^*$, donde $\Lambda^* \subset \Lambda$;
2. M no es asintóticamente estable para $\lambda = \lambda_0$; $\lambda_0 \notin \Lambda^*$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda^*}$;
3. F_{λ_0} es LAC en una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$; y
4. M es equiestable en λ_0 con respecto a la familia F_{Λ^*} .

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.109

Entonces existe una bifurcación crítica de M para $\lambda = \lambda_0$.

Demostración: Sea $W \in \mathcal{V}_M$, aplicando la Proposición 4.3.1, el conjunto M es λ_0 -estable (exhibe una pérdida equiestable de la atracción). Consecuentemente, toda vecindad $U \in \mathcal{V}_M$ contiene una vecindad $V \in \mathcal{V}_M$ tal que $x \in V$ implica que $\gamma_{\lambda_0}^+(x) \subset U$. Sin pérdida de generalidad, podemos escoger las vecindades U y V , tales que $V \subset U \subset W$ y entonces la propiedad LAC implica que el conjunto límite $L_{\lambda_0}^+(x)$ no es vacío, compacto y débilmente invariante (ver, [Sa] Cap.II, Teorema 3.5). Por otra parte, la hipótesis de que M no es λ_0 -atractor y el Teorema 6.7 en [Sa] implican que $L_{\lambda_0}^+(x) \cap M = \emptyset$, para alguna $x \in V$. Esto y la λ^* -estabilidad asintótica de M para cada $\lambda^* \in \Lambda^*$ que garantiza que M sea un conjunto λ^* -aislado de conjuntos λ^* -invariantes, implican que M exhibe una bifurcación crítica. ■

Corolario 5.2.7 *Sea F_Λ una familia de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico X localmente conexo. Sea $\Lambda^* \subset \Lambda$ con, $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Lambda^*$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda^*}$ y suponemos que además se cumplen las siguientes hipótesis.*

i) *Existe un conjunto $M \subset X$, no vacío, compacto, conexo y positivamente λ -invariante para todo $\lambda \in \Lambda$ con las siguientes propiedades:*

- a) *M es λ_0 -inestable;*
- b) *M es λ -asintóticamente estable para todo $\lambda \in \Lambda^*$.*

ii) *F_Λ es LAC en λ_0 en una vecindad $W \in \mathcal{V}_M$.*

Entonces existe una bifurcación de M para $\lambda = \lambda_0$. La bifurcación puede ser extracrítica o crítica o débilmente crítica.

Demostración: Considerando las hipótesis de este Corolario, si la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$ es CRES el Teorema 5.2.4 implica que el conjunto M exhibe una bifurcación extracrítica. Si la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$ no es CRES, aplicando el Teorema 5.2.5 tenemos que el conjunto M exhibe una bifurcación crítica o posiblemente débilmente crítica. ■

5.2.3 La existencia de bifurcaciones híbridas.

Definición 48 Dada una familia de sistemas semidinámicos F_Λ que tiene un conjunto común M compacto y positivamente invariante, decimos que M tiene una bifurcación (débilmente) híbrida en λ_0 , si tiene ambas bifurcaciones: una (débilmente) crítica y otra extracrítica en λ_0 . Decimos que M exhibe una bifurcación simple si solamente exhibe una bifurcación crítica o débilmente crítica o extracrítica pero no híbrida.

Corolario 5.2.8 Suponiendo las mismas hipótesis del Corolario 5.2.7. Si consideramos únicamente una bifurcación simple es decir, solamente bifurcación extracrítica o bifurcación (débilmente) crítica del conjunto M , las condiciones respectivas dadas en el Corolario 5.2.7 son necesarias y suficientes, o sea,

- a) M exhibe una bifurcación extracrítica simple en λ_0 si sólo si la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$ es CRES ; y
- b) M exhibe una bifurcación crítica o posiblemente débilmente crítica simples en λ_0 si y sólo si la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$ no es CRES.

Demostración: Primero demostremos la condición necesaria para el inciso a). Por contradicción, supongamos que M exhibe una bifurcación extracrítica en λ_0 , y que la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$ no es CRES, aplicando el Teorema 5.2.5 tenemos que el conjunto M exhibe una bifurcación crítica o posiblemente débilmente crítica, lo cual es una contradicción con la hipótesis de la bifurcación extracrítica simple de M en λ_0 . La suficiencia para el inciso a), se sigue del Teorema 5.2.4.

Demostración de la segunda parte. La condición necesaria para el inciso b), se sigue también por cotradicción. Suponiendo que M exhibe una bifurcación crítica o débilmente crítica en λ_0 , y que para ambos casos, la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$ es CRES, el Teorema 5.2.4 implica que el conjunto M exhibe una bifurcación extracrítica en λ_0 , lo cual es una contradicción con la hipótesis de bifurcación crítica o posiblemente débilmente crítica simples de M en λ_0 . La suficiencia para el inciso b), se sigue del Teorema 5.2.5. ■

Observación 5 Las bifurcaciones extracrítica o (débilmente) crítica de M son ambas compatibles con las propiedades CRES y noCRES de la familia de atractores $\{M, A_{\Lambda^*}^+, F_{\Lambda^*}\}$, en el siguiente sentido; el Teorema 5.2.4 nos garantiza la

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.111

existencia de la bifurcación extracrítica de M en λ_0 , pero no excluye la posibilidad de que exista bifurcación (débilmente) crítica de M en λ_0 . Análogamente, el Teorema 5.2.5 nos garantiza la existencia de la bifurcación (débilmente) crítica de M en λ_0 , pero, no excluye la posibilidad de que exista bifurcación extracrítica de M en λ_0 . Esta observación nos motivó a dar la Definición 48, de bifurcación híbrida de M en λ_0 . Las bifurcaciones de este tipo, las ilustramos mediante los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 33 Consideremos el sistema de ecuaciones en el plano, dependiente del parámetro $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3(x^2 - \lambda)(1 - x^2), \\ \dot{y} &= -\lambda y^3.\end{aligned}\tag{5.43}$$

Para este caso, el espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ , el valor crítico del parámetro $\lambda_0 = 0$ y $M = \{(0, 0)\}$, es el equilibrio común de la familia monoparamétrica sistemas (5.43). Para $\lambda = \lambda_0$, M es inestable y no está aislado del conjunto de puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales (5.43): $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Para $\lambda > 0$, la familia de atractores $\{M, A_{(0, +\infty)}^+, F_{(0, +\infty)}\}$, es CRES, luego, el Teorema 5.2.5 implica la existencia de una bifurcación extracrítica de M , en $\lambda = 0$, el conjunto de puntos de bifurcación, es $M'_\lambda = \{(\pm\sqrt{\lambda}, 0)\}$. Sin embargo, no es excluyente la posibilidad de la existencia de una bifurcación crítica de M para $\lambda = 0$ como en este caso. Este tipo de bifurcaciones pertenece a la clase que hemos llamado bifurcaciones híbridas. (Ver la Figura 5.16.)

Ejemplo 34 Consideremos el sistema de ecuaciones en el plano, dependiente del parámetro $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x - \lambda)^2 - (y - \lambda)^2, \\ \dot{y} &= (x - \lambda)y.\end{aligned}\tag{5.44}$$

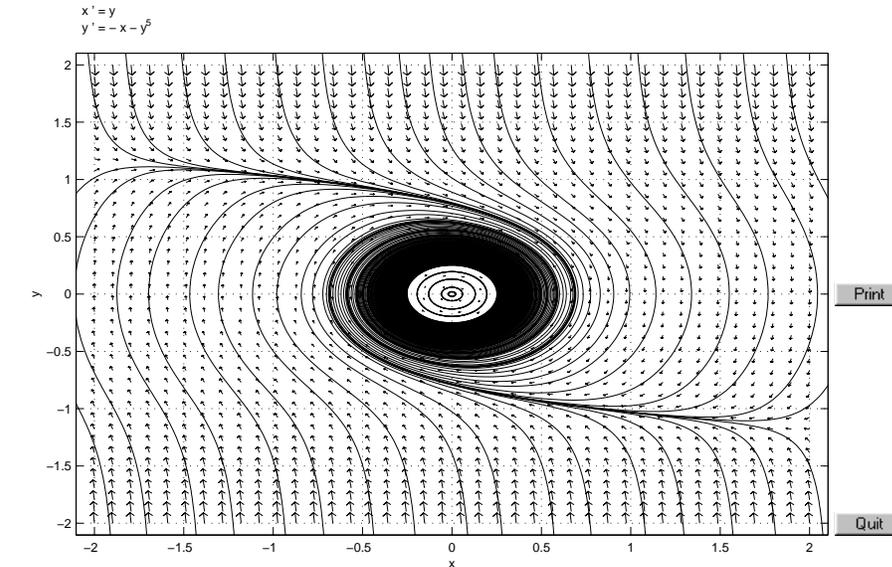
El espacio fase X es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros es \mathbb{R}^+ y M es $\{(0, 0)\}$, el punto de equilibrio de la ecuación monoparamétrica (5.44), para toda $\lambda \geq 0$. Para $\lambda = 0$, el conjunto M es inestable y surgen de este órbitas homoclínicas (ver la Figura 5.17.)

Para $\lambda > 0$, surge de M el conjunto $M'_\lambda = \{(\lambda, \lambda), (2\lambda, 0)\}$ de puntos de equilibrio de (5.44) ajeno de M . La linealización del sistema (5.44) en $(0, 2\lambda)$

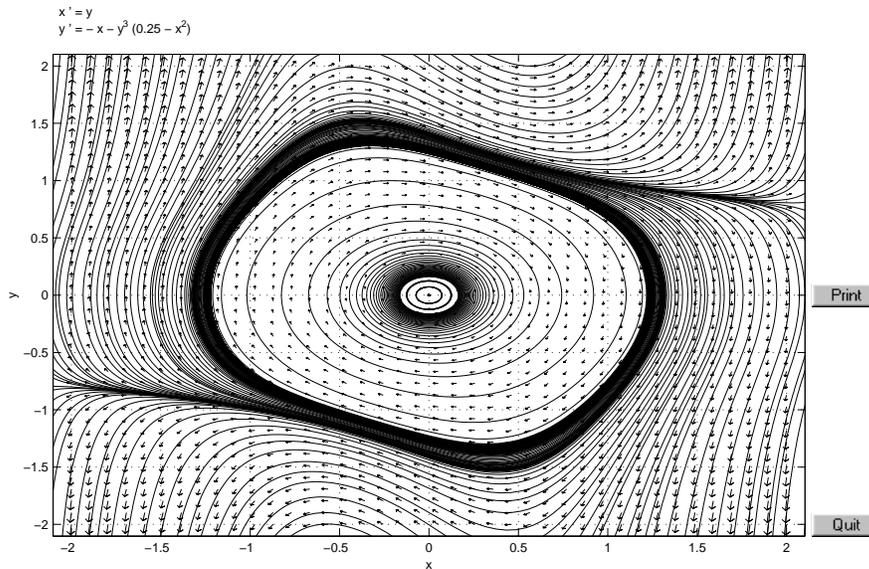
tiene dos autovalores positivos: $\mu = \lambda$, $\mu = 2\lambda$ y, por lo tanto $(0, 2\lambda)$ es un nodo inestable (localmente); en (λ, λ) , la linealización del sistema (5.44) tiene un autovalor $\mu = 0$ de multiplicidad 2 inestable (ver la Figura 5.17).

La familia de atractores $\{M, A_{(0,+\infty)}^+, F_{(0,+\infty)}\}$, no es CRES, luego, el Teorema 5.2.5 implica la existencia de una bifurcación débilmente crítica de M , en $\lambda = 0$, como en este caso. Sin embargo, no es excluyente la posibilidad de la existencia de una bifurcación extracrítica, tal como se demuestra en este ejemplo. Este tipo de bifurcación de M , en $\lambda = 0$, es un ejemplo de la que llamamos, bifurcación débilmente híbrida de M en $\lambda = 0$. En M se acumulan órbitas homoclínicas.

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.113



The backward orbit from [-1.2, -2] left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from [-1.7, -2] -> a nearly closed orbit.
 The backward orbit from [-1.7, -2] left the computation window.
 Ready.



The backward orbit from [1.3, -2] -> a nearly closed orbit.
 Ready.
 The forward orbit from [1.2, -1.9] left the computation window.
 The backward orbit from [1.2, -1.9] -> a nearly closed orbit.
 Ready.

Figura 5.5: Ilustración del ejemplo 30, arriba para $\lambda = 0$, M es asintóticamente estable y, abajo para $\lambda = 0.25$, M es inestable y surge una órbita periódica .

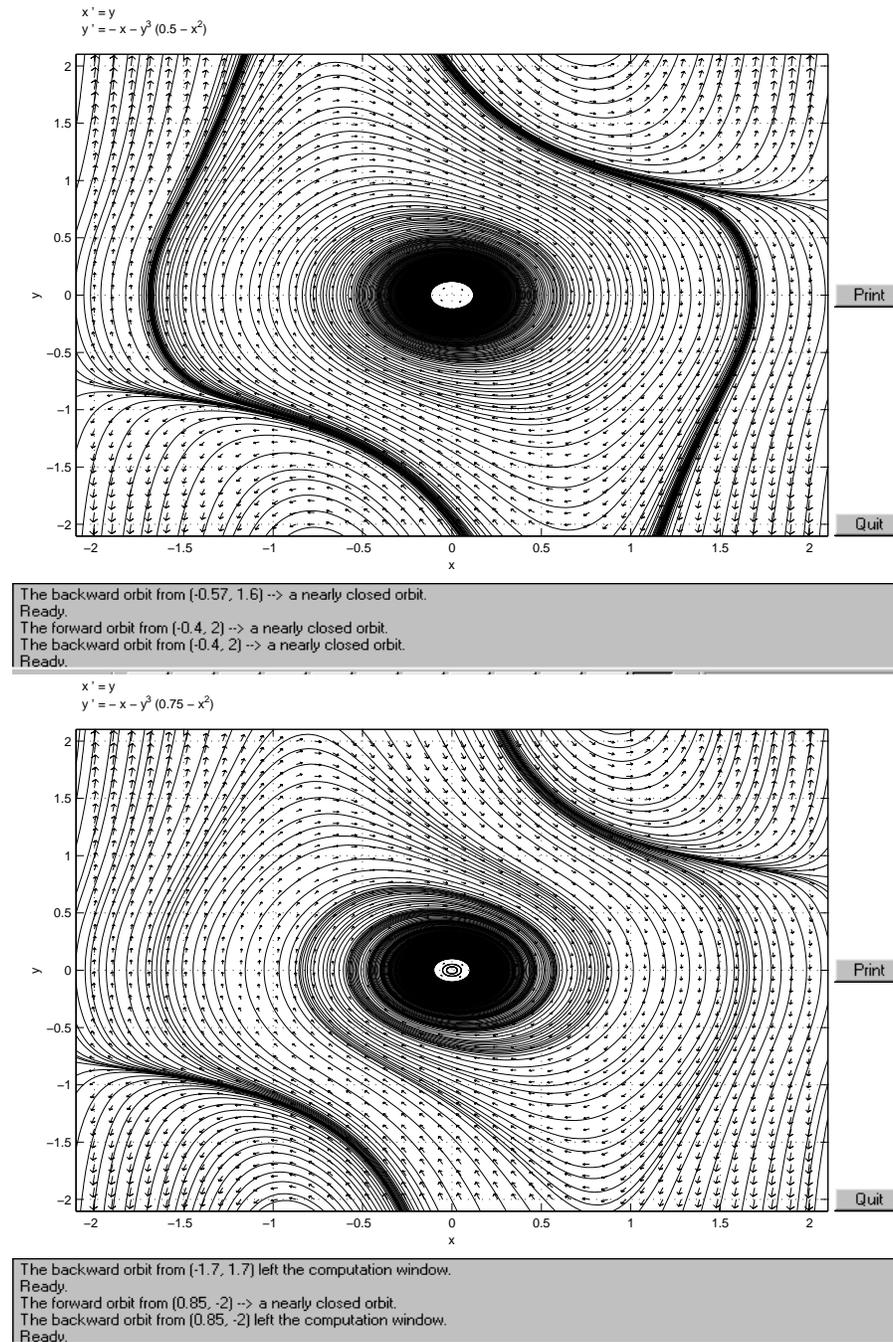
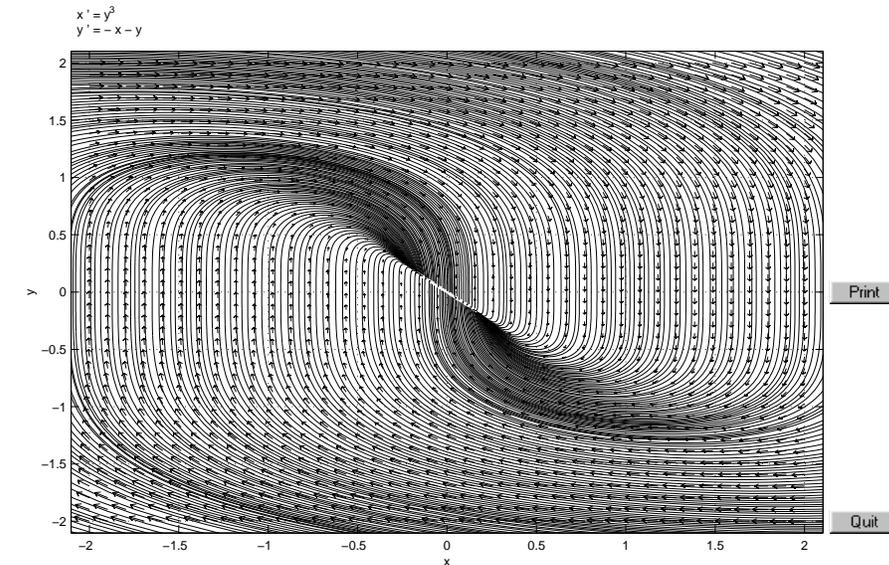
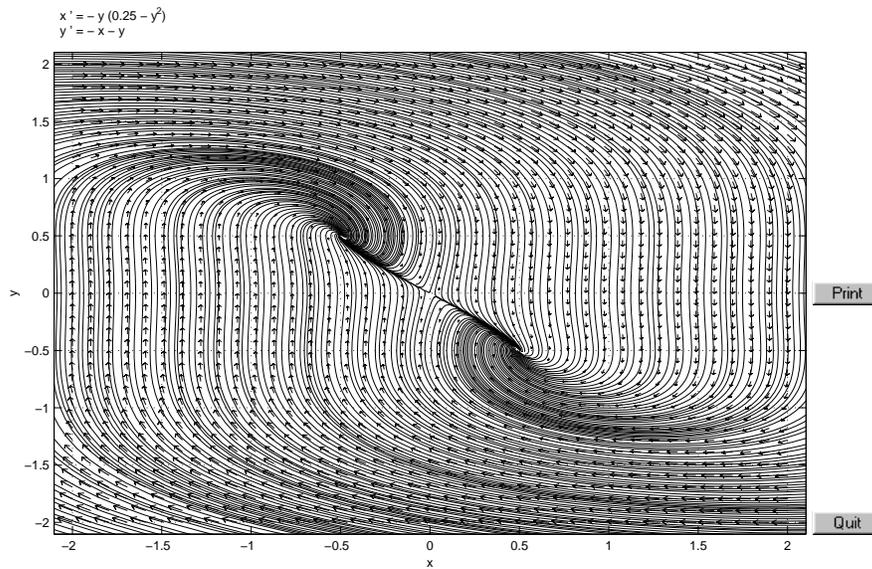


Figura 5.6: Ilustración del ejemplo 30, arriba para $\lambda = 0.5$ y, abajo para $\lambda = 0.75$. Existe una bifurcación del tipo Hopf, sin embargo, el Teorema 5.1.1 de Hopf no es aplicable porque los autovalores del sistema lineal asociado al sistema (5.8), siempre son cero. *La existencia de la bifurcación no depende de la parte lineal del sistema, sino del cambio de estabilidad.*

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.115



The backward orbit from [-2, 0.94] left the computation window.
Ready.
The forward orbit from [-2.1, -1.4] -> a possible eq. pt. near [0.1, -0.087].
The backward orbit from [-2.1, -1.4] left the computation window.
Ready.



The backward orbit from [1.8, 1.8] left the computation window.
Ready.
The forward orbit from [-1, -0.05] -> a possible eq. pt. near [-0.46, 0.46].
The backward orbit from [-1, -0.05] left the computation window.
Ready.

Figura 5.7: Ilustración del ejemplo 31, arriba para $\lambda = 0$, M es un foco estable. Abajo, para $\lambda = 0.25$, M es un punto silla y surgen dos focos estables.

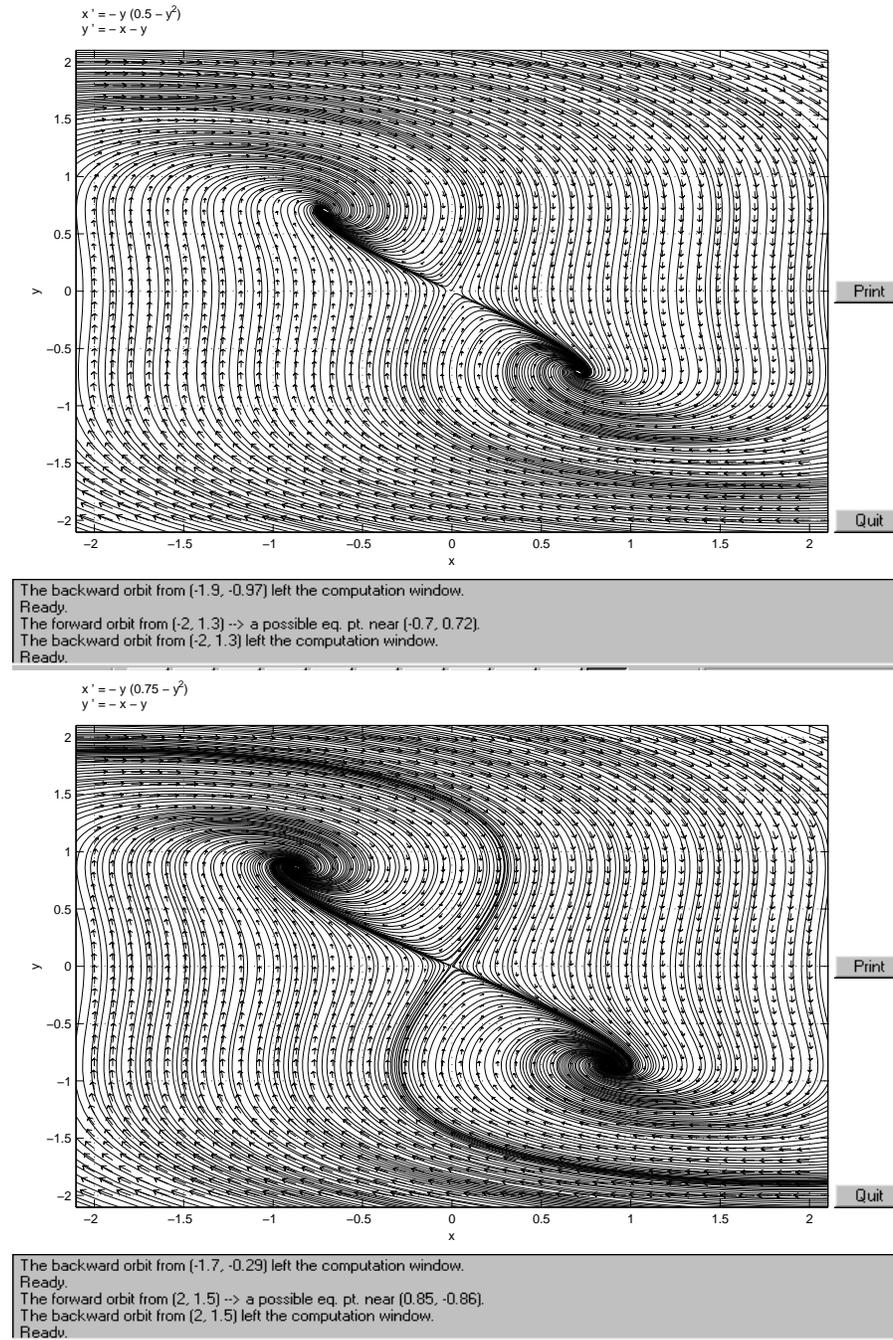
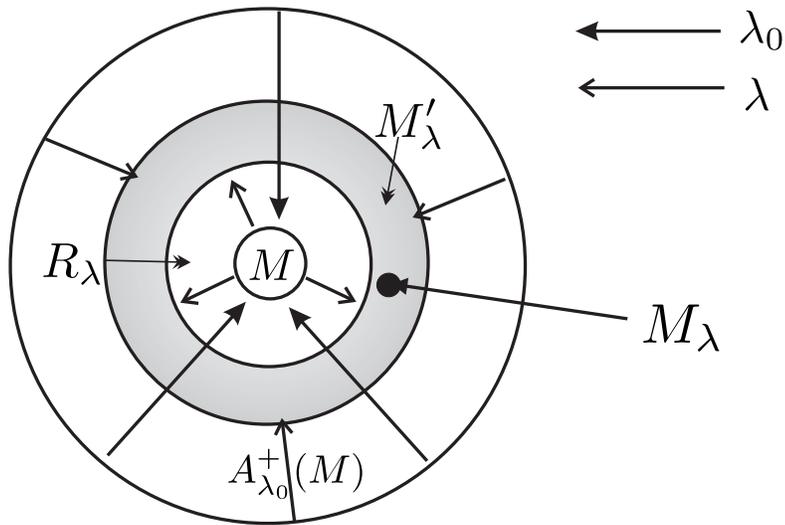


Figura 5.8: Ilustración del ejemplo 31, arriba $\lambda = 0.5$ y, abajo $\lambda = 0.75$. Los focos que se bifurcan se alejan de M cuando λ crece. En este caso el Teorema 5.1.1 de Hopf, no es aplicable porque no se cumple la hipótesis de transversalidad.



R_λ : región de λ -repulsión de M .

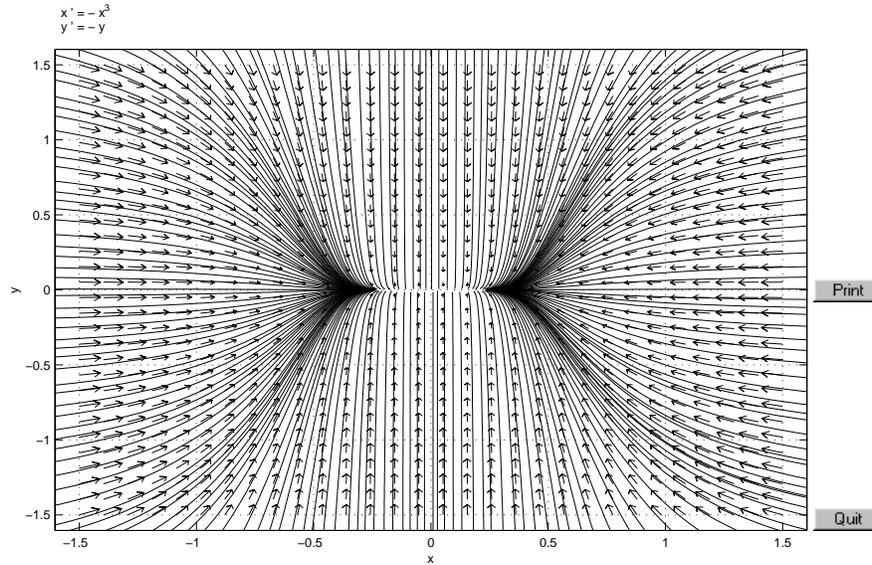
$M \subset R_\lambda \subset M'_\lambda \subset A_{\lambda_0}^+(M)$

$M_\lambda \subset M'_\lambda \setminus R_\lambda$ (región sombreada)

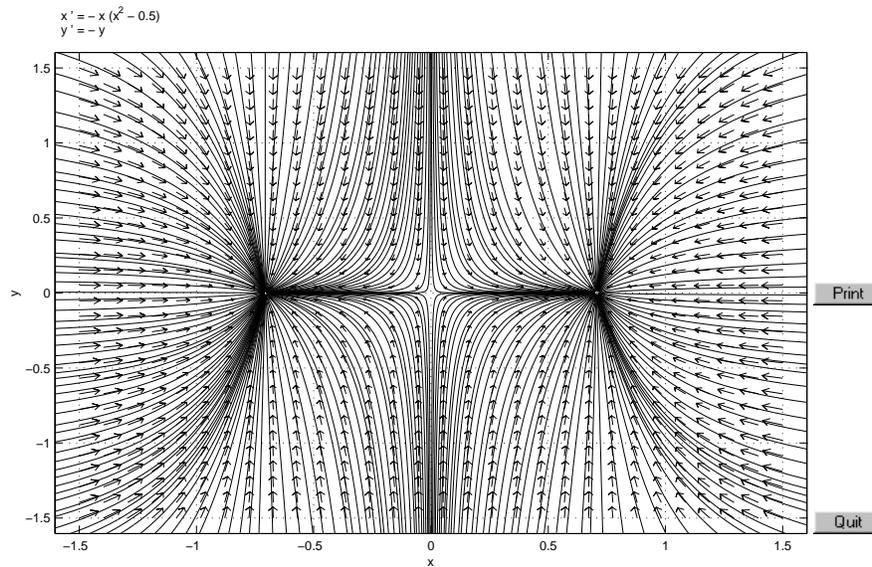
M'_λ : atractor maximal en $A_{\lambda_0}^+(M)$

M_λ : conjuntos cerrados invariantes en $A_{\lambda_0}^+(M) \setminus M$

Figura 5.9: Ilustración del Teorema de Seibert - Florio, sobre existencia de bifurcaciones extracríticas que surgen de equilibrios estables. La bifurcación ocurre en el anillo topológico sombreado: $M'_\lambda \setminus R_\lambda$, para $\lambda \neq \lambda_0$.



The backward orbit from [1.5, -0.8] left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from [-1.1, 1.5] -> a possible eq. pt. near (-0.24, 0.0004).
 The backward orbit from [-1.1, 1.5] left the computation window.
 Ready



The backward orbit from [1.5, -0.46] left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from [-1.2, 1.5] -> a possible eq. pt. near (-0.71, 0.01).
 The backward orbit from [-1.2, 1.5] left the computation window.
 Ready

Figura 5.10: Ilustración del ejemplo 32, arriba para $\lambda = 0$, M es un nodo estable. Abajo, para $\lambda > 0$ surgen dos nodos estables, M se convierte en un punto silla (inestable) y exhibe una *bifurcación extracrítica*.

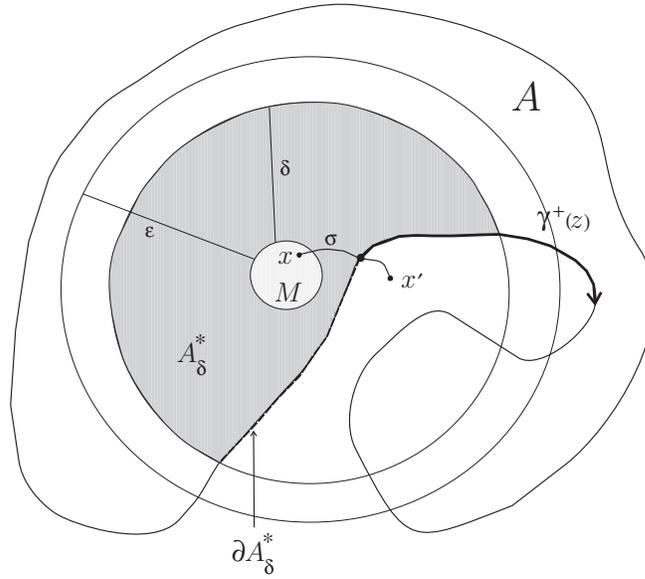


Figura 5.11: Ilustración de la primera parte de la demostración de Lema 5.2.2, se obtiene una órbita $\gamma^+(z) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}$ donde $z \in \partial A_\delta^*(M) \cap \sigma$.

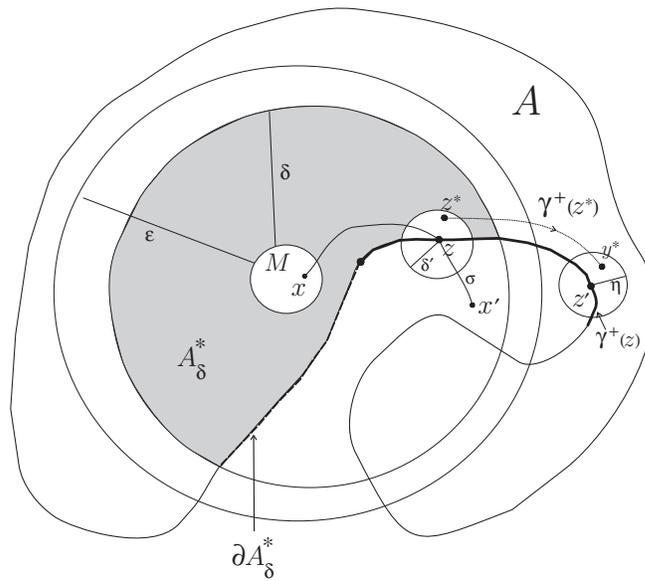


Figura 5.12: Ilustración del Lema 5.2.2, existe $z^* \in A_\delta^*$ tal que $\gamma^+(z^*) \not\subset \overline{B_\epsilon(M)}$.

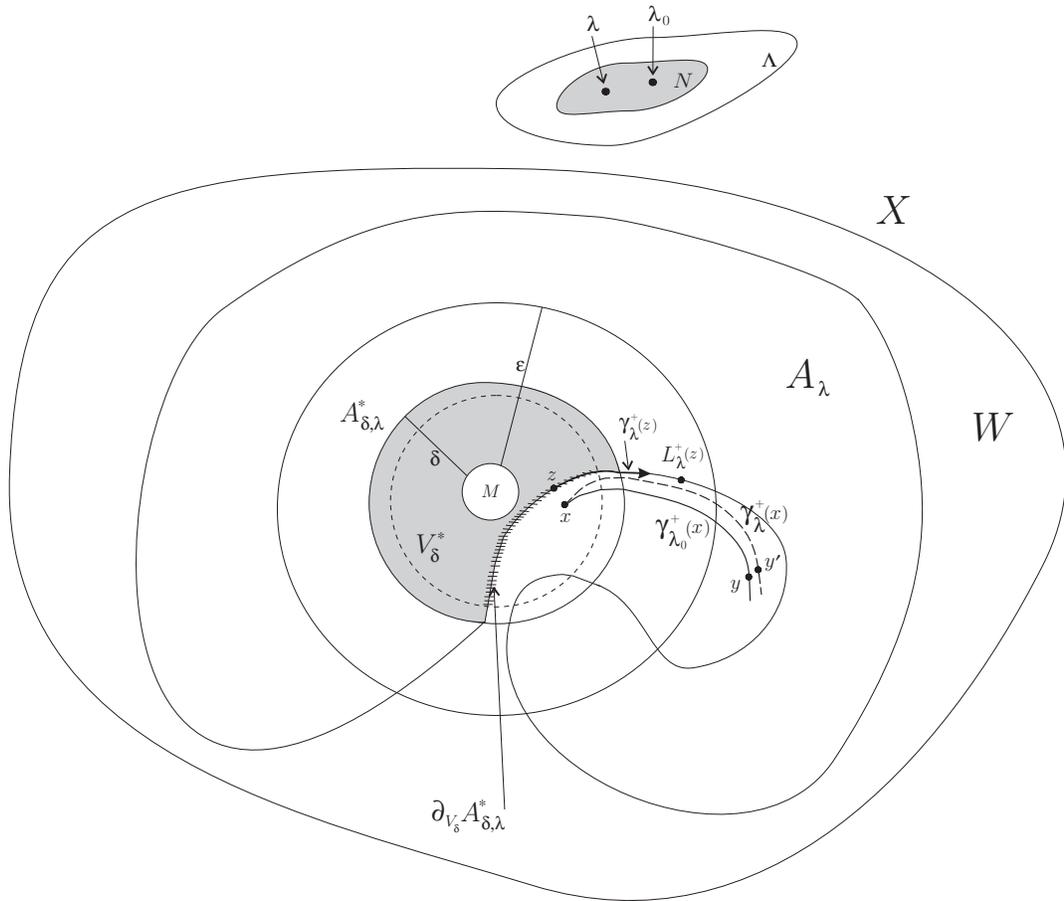


Figura 5.13: Ilustración del Teorema 5.2.4 de la *bifurcación extracrítica*: el conjunto de bifurcación ajeno de M es $M'_\lambda := L_\lambda^+(z)$, el cual es compacto, débilmente invariante y está compuesto de órbitas principales.

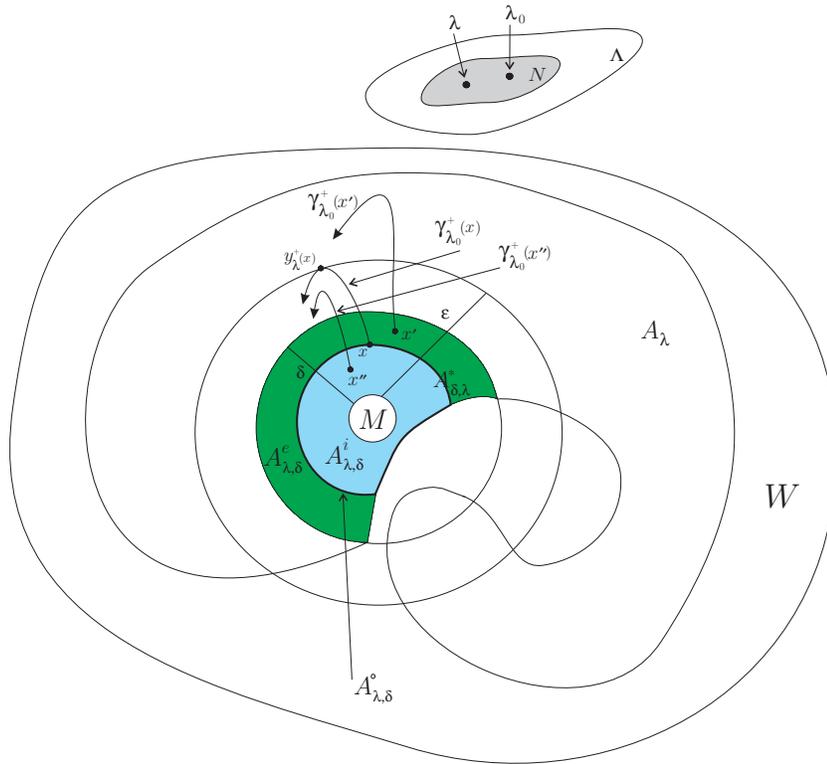


Figura 5.14: Ilustración de la tricotomía: $A_{\lambda, \delta}^* = A_{\lambda, \delta}^i \cup A_{\lambda, \delta}^0 \cup A_{\lambda, \delta}^e$, los conjuntos $A_{\lambda, \delta}^i$ y $A_{\lambda, \delta}^e$, son abiertos. Puesto que el conjunto $A_{\lambda, \delta}^*$ es conexo, $A_{\lambda, \delta}^0 \neq \emptyset$.

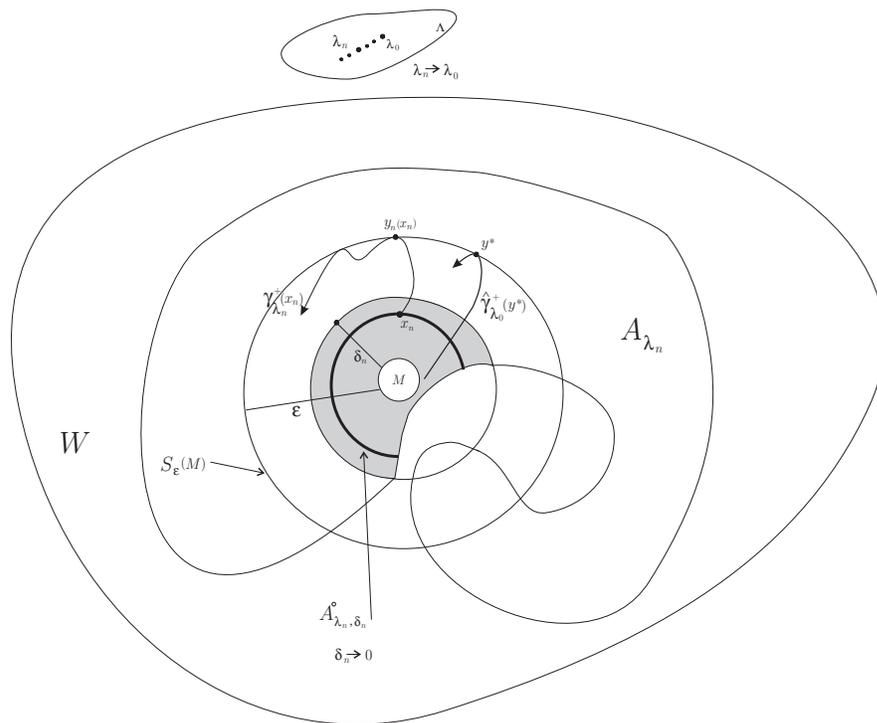


Figura 5.15: Ilustración del Teorema 5.2.5 de la *bifurcación crítica*. Aquí ilustramos que la órbita principal $\hat{\gamma}_{\lambda_0}(y^*)$ construida inductivamente, está contenida en $\overline{B_\epsilon(M)}$.

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.123

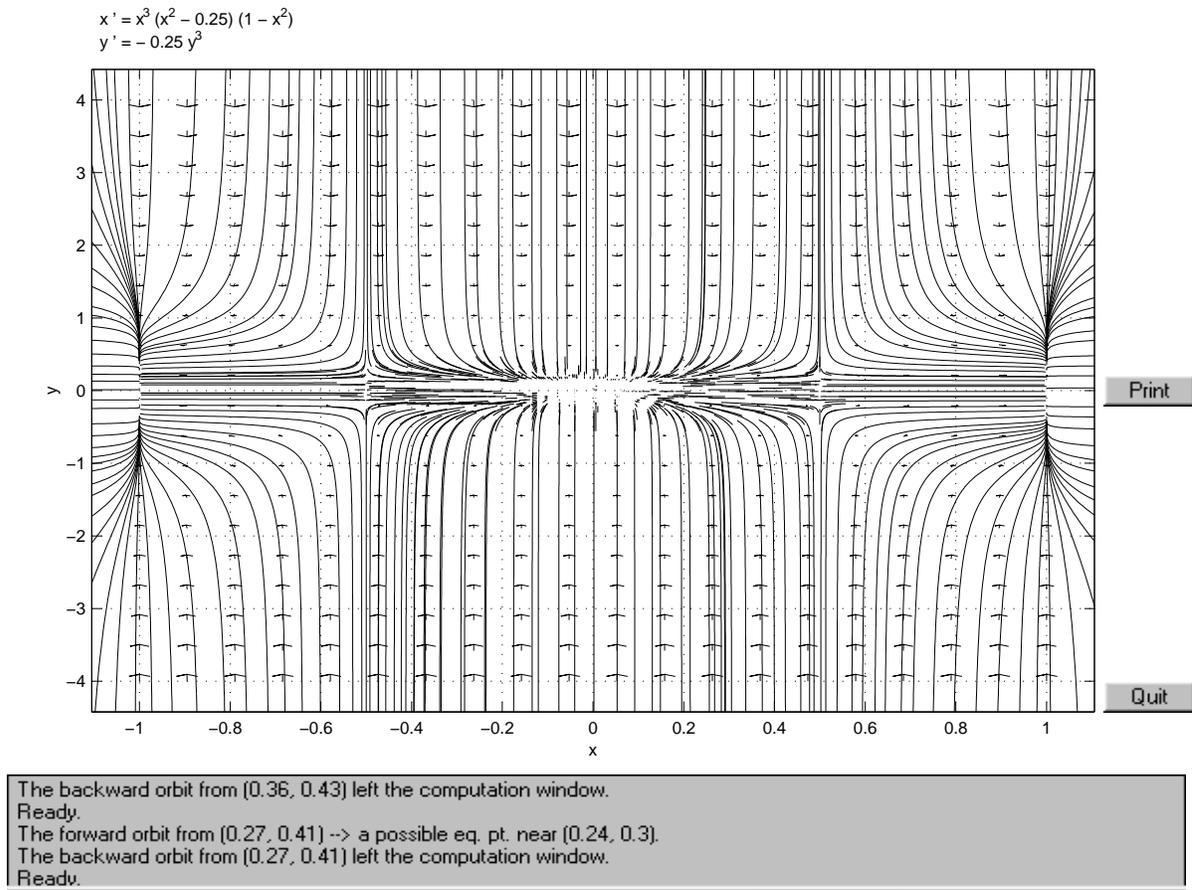


Figura 5.16: Ilustración del Ejemplo 33 de la *bifurcación híbrida*. El conjunto de puntos de bifurcación, es $M'_\lambda = \{(\pm\sqrt{\lambda}, 0)\}$. Sin embargo, el Teorema 5.2.5 no excluye la posibilidad de la existencia de una *bifurcación crítica* de M para $\lambda = 0$.

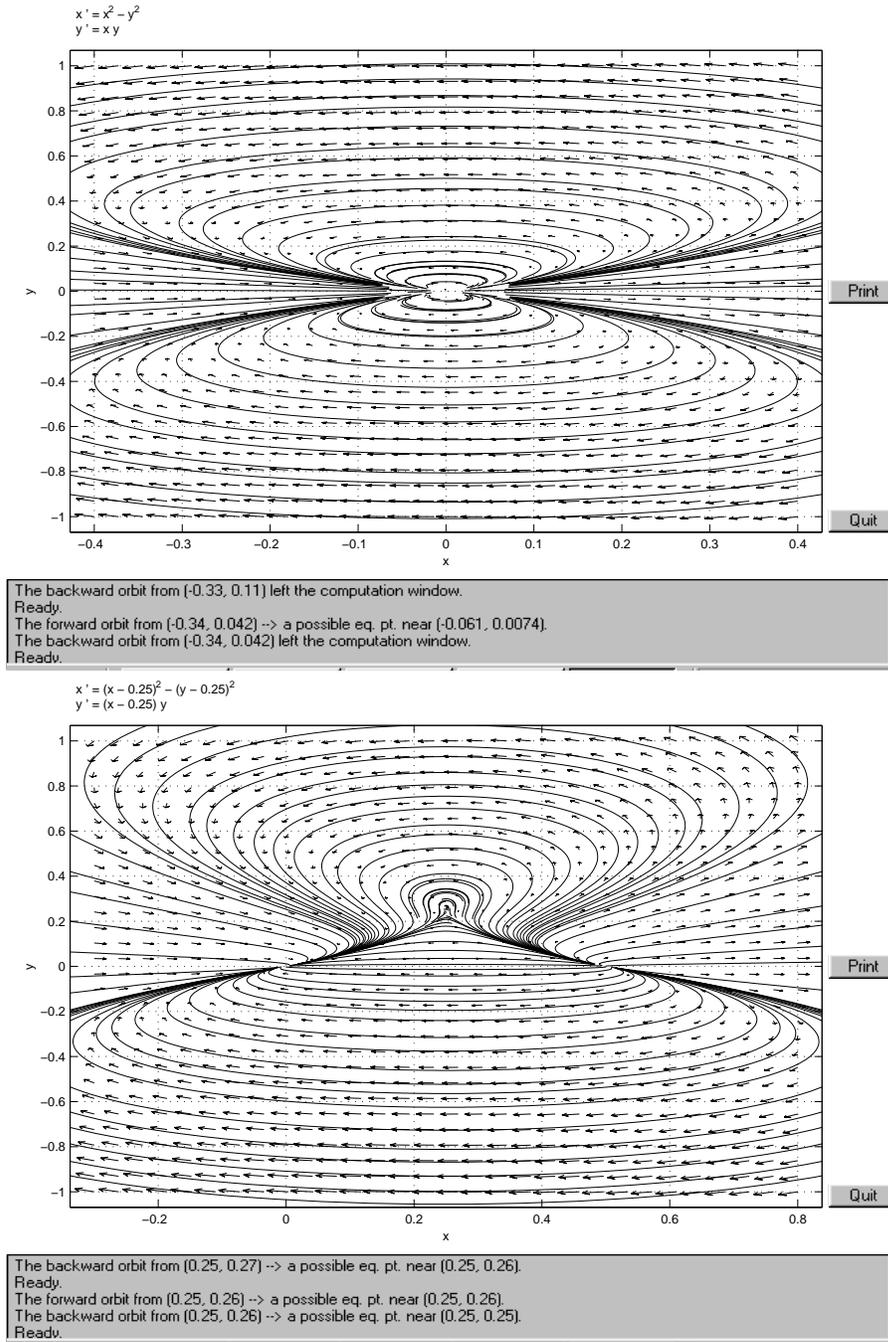


Figura 5.17: Ilustración del Ejemplo 34 de la *bifurcación débilmente híbrida*. Para $\lambda > 0$, surge de M el conjunto $M'_\lambda = \{(\lambda, \lambda), (2\lambda, 0)\}$ de puntos de equilibrio de (5.44) ajeno de M . Esta familia de atractores no es CRES, el Teorema 5.2.5 implica la existencia de una *bifurcación débilmente crítica* de M , en $\lambda = 0$. Sin embargo, no es excluyente la posibilidad de la existencia de una *bifurcación extracrítica*.

5.2.4 Ejemplos diversos.

La importancia que tiene la presente teoría consiste en su aplicación en el estudio de problemas de bifurcaciones que ocurren en sistemas semidinámicos definidos sobre espacios de dimensión infinita.

En el siguiente ejemplo haremos uso del **Corolario 5.7** de [SADA], concerniente a la teoría de reducción de estabilidad, para verificar la hipótesis de estabilidad asintótica de un punto de equilibrio en el estudio de su bifurcación cuando el parámetro es distinto de su valor crítico. En el contexto actual, el corolario citado se reduce a lo siguiente:

Corolario 5.2.9 *Sea F un sistema semidinámico sobre un espacio métrico X ; supongamos que los conjuntos $M, Y \subset X$ son cerrados, no vacíos, positivamente invariantes, y además, que se cumplen las siguientes hipótesis:*

(i) Y es uniformemente estable:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \gamma^+(B_\delta(Y)) \subset B_\epsilon(Y);$$

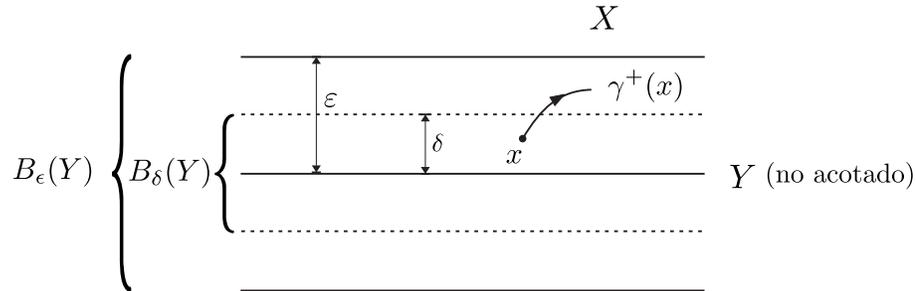


Figura 5.18: Ilustración de la hipótesis (i) del Corolario 5.2.9.

(ii) Y es \mathcal{B} -atractor:

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\forall \epsilon > 0)(\exists t > 0) \quad F^{[t, +\infty)}(A) \subset B_\epsilon(Y),$$

donde \mathcal{B} es la familia de subconjuntos acotados de X ;

(iii) M es \mathcal{B}'_Y -atractor:

$$(\forall A_Y \in \mathcal{B}'_Y)(\forall \epsilon > 0)(\exists t > 0) \quad F^{[t, +\infty)}(A_Y) \subset B_\epsilon(M),$$

donde \mathcal{B}'_Y es la familia de subconjuntos de X , de distancia acotada respecto a Y ;

(iv) el sistema semidinámico (o semigrupo), F es \mathcal{B} -acotado, es decir

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\exists \beta > 0) \quad \gamma^+(A) \subset B_\beta(M).$$

Entonces M es \mathcal{B} -globalmente asintóticamente estable, o sea,

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\forall \epsilon > 0)(\exists t > 0) \quad F^{[t, +\infty)}(A) \subset B_\epsilon(M)$$

y además M es estable.

La idea intuitiva del contenido geométrico del Corolario 5.2.9, la ilustramos en la Figura 5.19. En esta, tenemos la relación $M \subset Y \subset X$; las flechas verticales con sentido hacia Y , ilustran la hipótesis (ii) y las horizontales que apuntan hacia M , representan la hipótesis (iii). Los conjuntos X e Y son ambos de dimensión infinita, Y es “de dimensión menor que X ”, en el sentido de $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$.

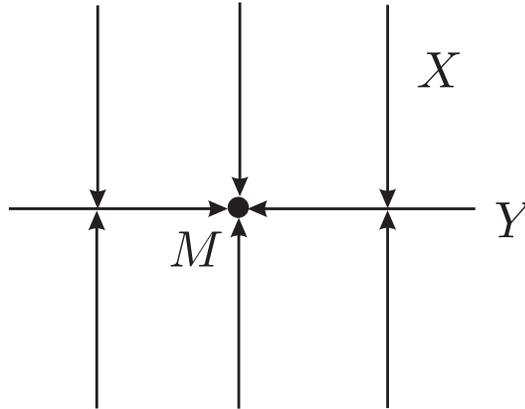


Figura 5.19: El conjunto M es \mathcal{B} -globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 35 Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, acoplado y dependiente del parámetro λ ,

$$\begin{aligned} u_t &= \lambda u_{xx}, \\ v_t &= \lambda v_{xx} + uv, \quad (0 < x < 1) \quad (\lambda > 0). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Ponemos condiciones de Dirichlet en la frontera,

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(1, t) &= 0 \\ v(0, t) = v(1, t) &= 0, \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (5.46)$$

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.127

y condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x) \\ v(x, 0) &= \psi_0(x), \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (5.47)$$

con $\varphi_0, \psi_0 \in \mathcal{H}_o$. El sistema está bien planteado para $X = \mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_o := \{ \chi \in L^2(0, 1) \mid \chi, \chi' \text{ son absolutamente continuas,} \\ \chi'' \in L^2(0, 1) \text{ and } \chi(0) = \chi(1) = 0 \}. \end{aligned}$$

En lo que sigue, para simplificar la notación escribiremos L^2 en lugar de $L^2(0, 1)$.

Tenemos que X es un espacio lineal normado, con norma

$$\|(\varphi, \psi)\|_X := \|\varphi\|_{\mathcal{H}_o} + \|\psi\|_{L^2}, \quad (5.48)$$

y

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_o} := \|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi''\|_{L^2}. \quad (5.49)$$

El conjunto de parámetros para este caso es $\Lambda = \mathbb{R}^+$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ la λ -solución (u_λ, v_λ) , donde $u_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $v_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, del sistema de ecuaciones (5.45) está dada explícitamente por

$$u_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \varphi_0 \quad (5.50)$$

$$v_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \psi_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)A} (K v_\lambda)(\tau) d\tau, \quad (5.51)$$

donde

$$(K v_\lambda)(t) := (u_\lambda v_\lambda)(t) \in \mathcal{H}_o,$$

las funciones φ_0 y ψ_0 se interpretan, en la aplicación física más común como distribuciones iniciales de temperatura, dadas en (5.47), y finalmente A es el operador

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \text{ con dominio } D(A) = \mathcal{H}_o.$$

En el contexto actual escribiremos, para cada λ , $F_\lambda^t(\varphi, \psi) := (u_\lambda, v_\lambda)(t)$, para definir una familia de sistemas semidinámicos en el espacio X .

Consideremos los conjuntos,

$$Y = \{(\varphi, \psi) | \varphi = 0\} \quad (5.52)$$

$$M = \{(\varphi, \psi) | \varphi = 0, \psi = 0\}, \quad (5.53)$$

del espacio X . Puesto que cada elemento de la familia de semigrupos $\{e^{-\lambda t A} | \lambda \in \Lambda\}$ es un semigrupo contractivo en $L^2(0, 1)$, también, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$Lv_\lambda = e^{-\lambda t A} \psi + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)A} (Kv_\lambda)(\tau) d\tau,$$

define un mapeo contractivo en $C([0, t], \mathcal{H}_o)$ para t pequeña. Entonces tenemos que para cada $\lambda \in \Lambda$, v_λ está bien definida para cada $t > 0$.

A continuación vamos a verificar las hipótesis del Corolario 5.2.9 para cada $\lambda \in \Lambda$.

(i) Y es λ -uniformemente estable.

Dado $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}_o$, tenemos que

$$u_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t} c_m \sin m\pi x, \quad (5.54)$$

$$c_m = 2 \int_0^1 \varphi(s) \sin m\pi s ds. \quad (5.55)$$

Entonces $u_\lambda(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente en x , porque $\|u_\lambda(x, t)\|_\infty := \sup_{x \in (0, 1)} |u_\lambda(x, t)|$ decrece monótonamente como función de t , para cada $\lambda > 0$. Por lo tanto, $(u_\lambda, v_\lambda) \rightarrow (0, v_\lambda)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente en X . Ilustramos lo anterior en la Figura 5.20.

(ii) El conjunto Y es \mathcal{B} -atractor uniforme en X . Esto se demuestra con el mismo argumento que en (i).

(iii) El conjunto M es \mathcal{B}_Y -atractor uniforme en Y . En efecto, para $F_\lambda^t(\varphi, \psi) \in Y$, $u_\lambda = 0$. Por lo tanto, (5.50) implica que, dado $\psi \in \mathcal{H}_o$,

$$v_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \psi = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t} d_m \sin m\pi x,$$

con

$$d_m = 2 \int_0^1 \psi(s) \sin m\pi s ds.$$

Entonces $v_\lambda(x, t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente en Y . Ilustramos lo anterior simbólicamente mediante la Figura 5.21.

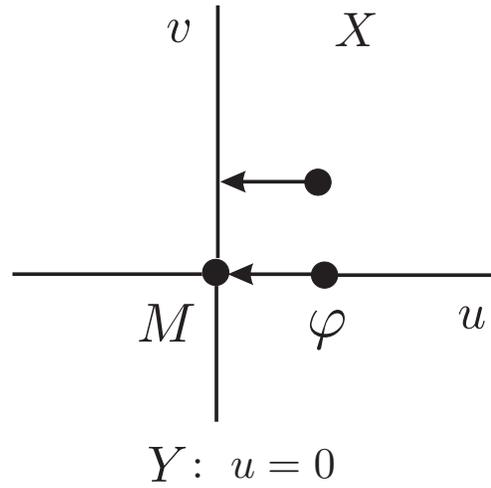


Figura 5.20: La solución $(u_\lambda, v_\lambda) \rightarrow (0, v_\lambda)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente en X .

(iv) Finalmente, vamos a demostrar que el sistema semidinámico, F_λ es \mathcal{B} -acotado. Esto significa que para cualquier conjunto acotado, $B \in \mathcal{B}$, no puede ocurrir algo parecido a lo que ilustramos en la Figura 5.22.

Las órbitas con puntos iniciales en conjuntos acotados están acotadas. Para esto, demostraremos que las órbitas están uniformemente acotadas sobre conjuntos acotados. En efecto, supongamos que

$$\|(\varphi, \psi)\|_X \leq R \text{ para alguna } R > 0,$$

y consideremos la solución $F_\lambda^t(\varphi, \psi) := (u_\lambda, v_\lambda)$ del sistema (5.45) con $u_\lambda(x, 0) = \varphi(x)$, $v_\lambda(x, 0) = \psi(x)$, y la función,

$$w_\lambda(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 v_\lambda^2 dx. \tag{5.56}$$

Derivando con respecto a t obtenemos,

$$\begin{aligned} \dot{w}_\lambda(t) &= \int_0^1 (v_\lambda v_{\lambda t}) dx = \\ &= \int_0^1 v_\lambda (\lambda v_{\lambda xx} + u_\lambda v_\lambda) dx = \\ &= \lambda \int_0^1 v_\lambda v_{\lambda xx} dx + \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx. \end{aligned}$$

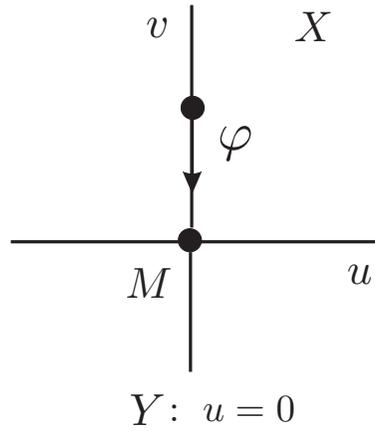


Figura 5.21: La solución $v_\lambda(x, t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow +\infty$ uniformemente en Y .

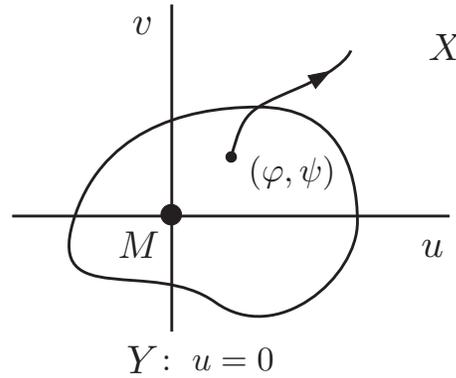


Figura 5.22: Toda solución con punto inicial en un conjunto acotado conteniendo a M , no sale de este.

Luego, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \dot{w}_\lambda(t) &= \int_0^1 (\lambda v_{\lambda xx} v_\lambda + u_\lambda v_\lambda^2) dx = \\ &= - \int_0^1 \lambda v_{\lambda x}^2 dx + [v_{\lambda x} v_\lambda]_0^1 + \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx = \\ &= - \int_0^1 \lambda v_{\lambda x}^2 dx + \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx \leq \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx, \end{aligned}$$

entonces

$$\dot{w}_\lambda(t) \leq \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx. \quad (5.57)$$

Por otro lado,

$$u_\lambda \leq |u_\lambda| \leq \|u_\lambda\|_\infty = \sup_{x \in (0,1)} |u_\lambda(x, t)|, \quad (5.58)$$

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.131

entonces

$$\int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx \leq \int_0^1 |u_\lambda| v_\lambda^2 dx \leq \|u_\lambda\|_\infty \int_0^1 v_\lambda^2 dx \quad (5.59)$$

Aplicando 5.58 y 5.59 obtenemos la siguiente desigualdad

$$\dot{w}_\lambda(t) = \int_0^1 -\lambda v_{\lambda x}^2 dx + \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx \leq \int_0^1 (-\lambda v_{\lambda x}^2 + \|u_\lambda\|_\infty v_\lambda^2) dx. \quad (5.60)$$

Haremos una estimación de $\|u_\lambda(x, t)\|_\infty$. Considerando las ecuaciones (5.54) y (5.55), obtenemos

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t} |c_m|. \quad (5.61)$$

En la ecuación anterior acotaremos el coeficiente de Fourier, $|c_m|$. Nuevamente integrando por partes

$$\begin{aligned} c_m &= 2 \int_0^1 \varphi(s) \sin \pi s ds = \\ &= -\left[\frac{2\varphi(s)}{m\pi} \cos m\pi s \right]_0^1 + \frac{2}{m\pi} \int_0^1 \varphi'(s) \cos \pi s ds = \\ &= \frac{2}{m\pi} \int_0^1 \varphi'(s) \cos m\pi s ds. \end{aligned}$$

Otra vez, integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'(s) \cos \pi s ds &= \\ &= \left[\frac{\varphi'(s)}{m\pi} \sin m\pi s \right]_0^1 - \frac{1}{m\pi} \int_0^1 \varphi''(s) \sin m\pi s ds = \\ &= -\frac{1}{m\pi} \int_0^1 \varphi''(s) \sin m\pi s ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c_m = 2 \int_0^1 \varphi(s) \sin \pi s ds = -\frac{2}{m^2 \pi^2} \int_0^1 \varphi''(s) \sin m\pi s ds,$$

de aquí, utilizando la desigualdad de Hölder:

$$\int_0^1 |\varphi''(s)| ds \leq \|\varphi''\|_{L^2},$$

obtenemos finalmente una cota para los coeficientes $|c_m|$

$$|c_m| \leq \frac{2}{m^2\pi^2} \int_0^1 |\varphi''(s)| ds \leq \frac{2\|\varphi''\|_{L^2}}{m^2\pi^2},$$

como consecuencia tenemos

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\|\varphi''\|_{L^2} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t}}{m^2 \pi^2} \leq \frac{2\|\varphi''\|_{L^2}}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}. \quad (5.62)$$

Pero

$$\|\varphi''\|_{L^2} \leq R \quad y \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi}{6},$$

entonces

$$\|u_\lambda(x, t)\|_\infty \leq \frac{R}{3\pi}. \quad (5.63)$$

De (5.56), (5.57) y (5.63) tenemos

$$\dot{w}_\lambda(x, t) \leq \frac{2R}{3\pi} w_\lambda(x, t) \quad (5.64)$$

de donde concluimos que

$$w_\lambda(t) \leq e^{\frac{R}{3\pi}t} w_\lambda(0) \leq \frac{R^2}{3\pi} e^{\frac{R}{3\pi}t}, \quad t > 0. \quad (5.65)$$

La desigualdad (5.65) significa que la función $w_\lambda(t)$ correspondiente a la mitad del cuadrado de la norma $v_\lambda(x, t)$, es de orden exponencial para cualquier función inicial ψ acotada.

Demostremos que para cada t suficientemente grande, $\dot{w}_\lambda(x, t) \leq 0$, pero antes, considerando la integral

$$v_\lambda(x, t) = \int_0^1 v_{\lambda s}(s, t) ds, \quad (5.66)$$

elevando al cuadrado ambos lados de (5.66) y aplicando la desigualdad de Schwartz obtenemos

$$\begin{aligned} v_\lambda^2(x, t) &= \left(\int_0^1 v_{\lambda s}(s, t) ds \right)^2 \leq \|1\|_{L^2}^2 \|v_{\lambda s}(s, t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq x \int_0^x v_{\lambda s}^2(s, t) ds \leq \int_0^x v_{\lambda s}^2(s, t) ds, \\ v_\lambda^2(x, t) &\leq \int_0^x v_{\lambda s}^2(s, t) ds \leq \int_0^1 v_{\lambda s}^2(s, t) ds \end{aligned}$$

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.133

Por lo tanto,

$$v_\lambda^2(x, t) \leq \int_0^1 v_{\lambda_s}^2(s, t) ds, \quad (5.67)$$

luego, integrando ambos lados de (5.67) sobre el intervalo $[0, 1]$, concluimos que

$$\int_0^1 v_\lambda^2(x, t) dx \leq \int_0^1 v_{\lambda_x}^2(x, t) dx, \quad (5.68)$$

Para cada t , derivando $w_\lambda(t)$ integrando por partes, y aplicando las desigualdades (5.68) y (5.60) tenemos

$$\dot{w}_\lambda(t) \leq \int_0^1 (-\lambda v_{\lambda_x}^2 + \|u_\lambda\|_\infty v_\lambda^2) dx \leq \int_0^1 (-\lambda v_{\lambda_x}^2 + \|u_\lambda\|_\infty v_{\lambda_x}^2) dx, \quad (5.69)$$

por lo tanto

$$\dot{w}_\lambda(t) \leq (-\lambda + \|u_\lambda\|_\infty) \int_0^1 v_{\lambda_x}^2 dx, \quad (5.70)$$

Por otra parte, de la desigualdad 5.62 obtenemos

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2Re^{-\lambda m^2 \pi^2 t}}{m^2 \pi^2}, \quad (5.71)$$

entonces en (5.71), para cada $\lambda > 0$ existe un tiempo $T_\lambda > 0$ suficientemente grande, tales que

$$\|u\|_\infty \leq \lambda \quad (\forall t \geq T_\lambda), \quad \text{uniformemente sobre conjuntos acotados en } X. \quad (5.72)$$

o equivalentemente tomando en cuenta la desigualdad (5.70), expresamos lo anterior sucintamente de la siguiente manera

$$(\forall \lambda > 0)(\exists T_\lambda > 0) \quad (\forall t \geq T_\lambda) \quad (\|u\|_\infty \leq \lambda) \quad \dot{w}_\lambda(t) \leq 0, \quad (5.73)$$

uniformemente sobre conjuntos acotados en X . Esto implica que que la solución $F_\lambda^t(\varphi, \psi)$, permanece acotada, para $t \geq 0$, tomando en cuenta además que la función $w_\lambda(x, t)$ es de orden exponencial y que la función exponencial está acotada para $0 \leq t \leq T_\lambda$.

Considerando el subespacio

$$Y = \{ (0, \psi) \mid \psi \in \mathcal{H}_o \},$$

el sistema reducido es

$$u = 0, \quad v_t = \lambda v_{xx}.$$

Y es invariante, $M = \{(0, 0)\}$ es un \mathcal{B}_Y -atractor. Aplicando el Corolario 5.2.9, resulta que para cada $\lambda > 0$ M es \mathcal{B} -globalmente asintóticamente estable. Ver la Figura 5.23.

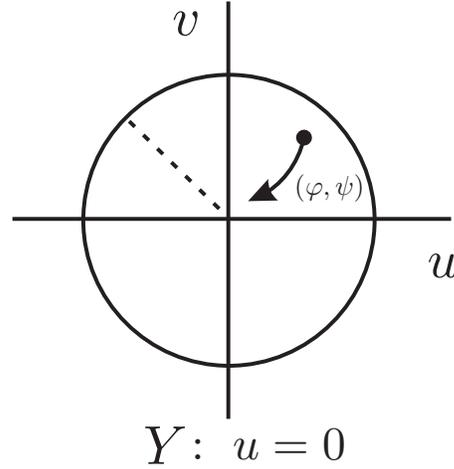


Figura 5.23: El conjunto M (intersección de los “ejes” u y v) es \mathcal{B} -globalmente asintóticamente estable.

Demostraremos que para $\lambda = 0$ la solución es inestable.

En este caso el sistema (5.45) queda

$$\begin{aligned} u_t &= 0 \\ v_t &= uv, \quad (0 < x < 1) \quad (\lambda > 0), \end{aligned} \tag{5.74}$$

con condiciones de Dirichlet en la frontera,

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(1, t) &= 0 \\ v(0, t) = v(1, t) &= 0, \quad (t \geq 0) \end{aligned} \tag{5.75}$$

y condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ v(x, 0) &= \psi(x), \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \tag{5.76}$$

con $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_0$. Puesto que $u_t(x, t) = 0$, resulta $u(x, t) = \varphi(x)$. Entonces $v_t(x, t) = \varphi(x)v(x, t)$, de donde $v(x, t) = \psi(x)e^{t\varphi(x)}$. Por lo tanto el sistema semidinámico correspondiente a $\lambda = 0$, queda definido como

$$F_0^t(\varphi, \psi) := (\varphi(x), \psi(x)e^{t\varphi(x)}). \tag{5.77}$$

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.135

Mostraremos que la solución de equilibrio, M , es inestable. Es decir,

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists (\varphi, \psi) \in B_\delta(M))(\exists t^* > 0) \quad (F_0^{t^*} \notin B_\epsilon(M)) \quad (5.78)$$

Para esto, fijemos $\epsilon > 0$, y, $\delta > 0$. Sea $(\varphi, \psi) \in X$, una pareja de funciones iniciales tales que satisfacen

$$\begin{aligned} 0 < \varphi(x) &< \frac{\epsilon}{3}, \\ 0 < \psi(x) &< \frac{\epsilon}{3}, \\ 0 < |\varphi''(x)| &< \frac{\epsilon}{3}, \quad x \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 1) \end{aligned}$$

con

$$\|(\varphi, \psi)\|_X = \int_0^1 \varphi^2(x) dx + \int_0^1 (\varphi''(x))^2 dx + \int_0^1 \psi^2(x) dx < \delta.$$

Ver la Figura 5.24.

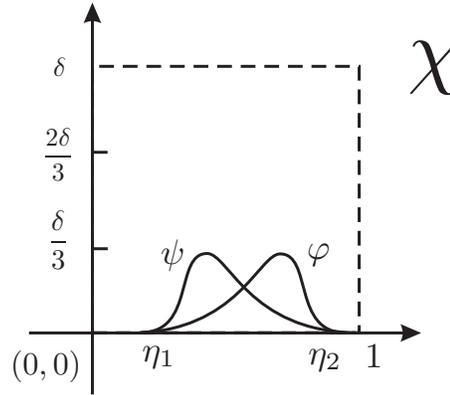


Figura 5.24: Ilustración de una pareja de funciones iniciales $(\varphi, \psi) \in X$.

Puesto que para $t > 0$

$$\|(\varphi, \psi)\|_X = \int_0^1 \varphi^2(x) dx + \int_0^1 (\varphi''(x))^2 dx + \int_0^1 \psi^2(x) e^{2t\varphi(x)} dx,$$

existe un $T > 0$ suficientemente grande tales que,

$$\psi^2(x) e^{2T\varphi(x)} > \delta \quad \text{y} \quad \|(\varphi, \psi)\|_X > \epsilon,$$

(ver la ilustración de esto en la Figura 5.25) por lo tanto M es inestable. Finalmente, aplicando el Corolario 5.2.7 para $\lambda = 0$ el conjunto M tiene una bifurcación crítica, es decir M no es aislado de conjuntos invariantes. Además, para

$\lambda > 0$, M es aislado de conjuntos invariantes por ser atractor, aplicando esto y el principio de persistencia de la inestabilidad tenemos que M es un atractor no CREC; las órbitas se alargan en dirección del eje Y , (simbólicamente), ilustramos este fenómeno en la Figuras 5.26 y 5.26 simuladas con MATLAB. El

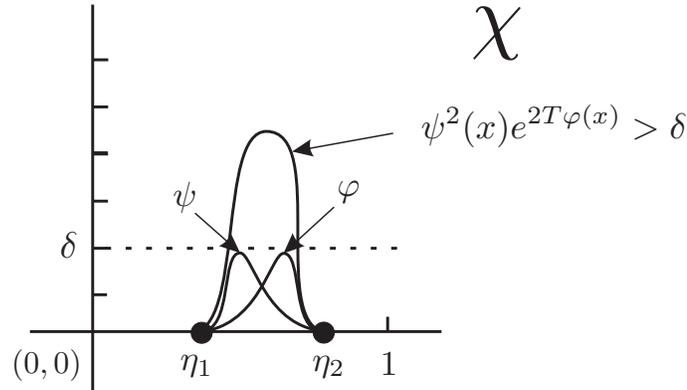


Figura 5.25: Ilustración de una pareja funciones iniciales $(\varphi, \psi) \in X$, con $T > 0$ tales que, $\psi^2(x)e^{2T\varphi(x)} > \delta$ y $\|(\varphi, \psi)\|_X > \epsilon$.

conjunto de puntos de bifurcación está dado por

$$\{(\varphi, \psi) \mid \varphi = 0\} \cup \{(\varphi, \psi) \mid \psi = 0\}$$

Ejemplo 36 Consideremos la siguiente familia de sistemas de ecuaciones diferenciales, que involucra una acción retardada de la segunda ecuación sobre la primera

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x^3(t) + x(t)y(t-1), \\ \dot{y} &= y^3(t) + (x^2(t) - \lambda)y(t) \quad (\lambda \geq 0). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Con el propósito de aplicar nuestra teoría, consideramos el sistema semidinámico definido por (5.79) sobre el espacio $\tilde{Z} = C([-1, 0], \mathbf{R}^2)$ en el siguiente sentido: dada una función inicial $\psi \in \tilde{Z}$, sea $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ la correspondiente solución del sistema (5.79) [$x(\cdot)$ depende solamente de $\psi(0)$]. Luego, denotamos con z_t la función definida por

$$z_t(\theta) = z(t + \theta), \quad \theta \in [-1, 0],$$

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.137

con t en el intervalo maximal $I_\psi = [0, t_\psi)$ para el cual existe la solución, y definimos el semigrupo de transformaciones locales F^{I_ψ} mediante

$$F^{t'}(z_t) = z_{t+t'} \quad (t \geq 0, t+t' \in I_\psi);$$

en particular, $z_0 = \psi$.

Denotaremos los puntos del espacio \tilde{Z} con \tilde{z} , y el origen de \tilde{Z} (la función idénticamente cero) con \tilde{o} , y escribimos \tilde{Z} como la suma directa $\tilde{Z} = \tilde{X} \oplus \tilde{Y}$, donde cada uno de los espacios \tilde{X} e \tilde{Y} es una réplica de $\mathcal{C}([-1, 0], \mathbf{R})$, y los elementos de estos espacios los denotamos como \tilde{x} e \tilde{y} , respectivamente. La relación existente entre los elementos \tilde{z} , \tilde{x} y \tilde{y} pertenecientes a los tres conjuntos \tilde{Z}, \tilde{X} y \tilde{Y} respectivamente, la escribimos como $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Los orígenes de los respectivos subespacios \tilde{X} e \tilde{Y} , los denotamos \tilde{o}_x \tilde{o}_y . En los tres espacios introducimos las normas

$$\|\tilde{z}\| = \sup\{|z(\theta)| : \theta \in [-1, 0]\};$$

algo análogo escribimos para, $\|\tilde{x}\|$ $\|\tilde{y}\|$. Aquí $|z(\theta)|$ está definida como $|x(\theta)| + |y(\theta)|$.

Entonces el semigrupo local F^{I_ψ} define un sistema semidinámico local sobre el espacio \tilde{Z} (ver por ejemplo [BO]).

Para aplicar el Corolario 5.2.7 a nuestro caso, ponemos $M := \{\tilde{o}\}$ para el origen del espacio \tilde{Z} . Que la familia de sistemas sea LAC, es una consecuencia directa del del Teorema de Arzelà-Ascoli.

Para $\lambda = 0$, M es inestable y aislado; se trata de un conjunto silla, por lo tanto queda excluida una bifurcación crítica(débil).

Para $\lambda > 0$, demostraremos la estabilidad de M siguiendo el argumento, basado en el Teorema 3.4 [SF3] el cual establece que si un conjunto compacto positivamente invariante M , es un atractor uniforme relativo a un conjunto cerrado y positivamente invariante Y que contiene a M , y Y es localmente estable cerca de M , entonces M es estable.

En este contexto, M es un atractor uniforme relativo a Y si

$$(\exists \sigma > 0)(\forall \epsilon > 0)(\exists \tau > 0) \quad F_\tau(B_\sigma(M) \cap Y) \subset B_\epsilon(M),$$

estabilidad local de Y cerca de M significa que existe una vecindad U de M tales que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B_\delta(M)) \quad F^{[0,t]}(x) \subset U \quad \text{implies} \quad F^{[0,t]}(x) \subset B_\epsilon(Y),$$

y estabilidad de M quiere decir que toda vecindad de M contiene una vecindad de M positivamente invariante.

En este ejemplo, el conjunto Y es \tilde{X} y M es $\{\tilde{o}\}$ (como lo hemos puesto al comienzo), respectivamente. En relación a \tilde{X} , el origen, \tilde{o} , es claro que es uniformemente asintóticamente estable, por lo tanto se cumple la primera hipótesis del teorema. Sólo falta demostrar que \tilde{X} es localmente estable cerca de \tilde{o} . La segunda ecuación de 5.79 se puede considerar como una ecuación diferencial ordinaria no-autónoma con $x(t)$ actuando como una entrada. Primero demostraremos una propiedad de tipo-estabilidad mediante la función de Lyapunov $v(y) = \frac{1}{2}y^2$, la derivada total con respecto a la segunda ecuación de 5.79, de esta es

$$\dot{v} = y^2(x^2 + y^2 - \lambda).$$

Esto implica que $|y|$ decrece a lo largo de las órbitas siempre que el estado y y la entrada x ambos sean menores que $\sqrt{\lambda/2}$ en valor absoluto. Denotamos este conjunto en el espacio (x, y) con U .

Para demostrar la propiedad de estabilidad local en cuestión, definimos la vecindad, \tilde{U} de \tilde{o} como

$$\tilde{U} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \|\tilde{x}\| < \sqrt{\lambda/2}, \|\tilde{y}\| < \sqrt{\lambda/2}\}.$$

La relación entre un movimiento $z(t)$ en el espacio de puntos $Z = X \oplus Y$ y el movimiento que le corresponde $\tilde{z}(t) = z_t$ en el espacio de funciones \tilde{Z} está dado por $z(t) = z_t(0)$, es claro que si el segundo, para cualquier valor dado de t , pertenece a \tilde{U} , el primero pertenece a U . Entonces también es claro que mientras $\tilde{z}(t) \in \tilde{U}$, $\tilde{y}(t)$ decrece a lo largo de la órbita. De esto se sigue inmediatamente que \tilde{X} es localmente estable cerca de \tilde{o} y también el teorema citado es aplicable y entonces obtenemos la estabilidad de \tilde{o} .

Las condiciones concernientes a la propiedad de conexidad de las vecindades de M se cumplen porque el espacio \tilde{Z} es lineal.

Por lo tanto, aplicando el Corolario 5.2.7 y tomando en cuenta la observación 5.3, concluimos que existe una bifurcación extracrítica.

5.2 Bifurcaciones que surgen de conjuntos invariantes inestables.139

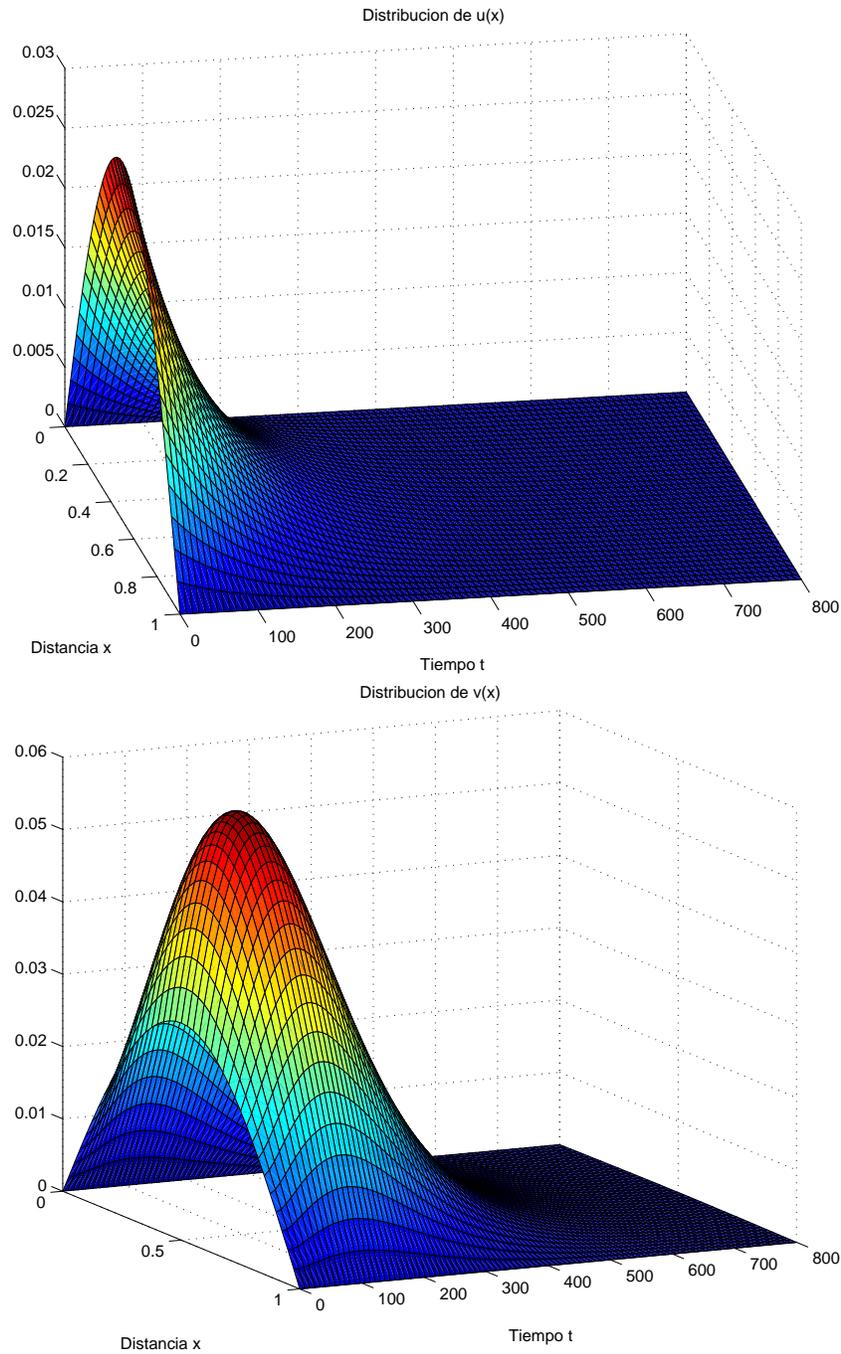
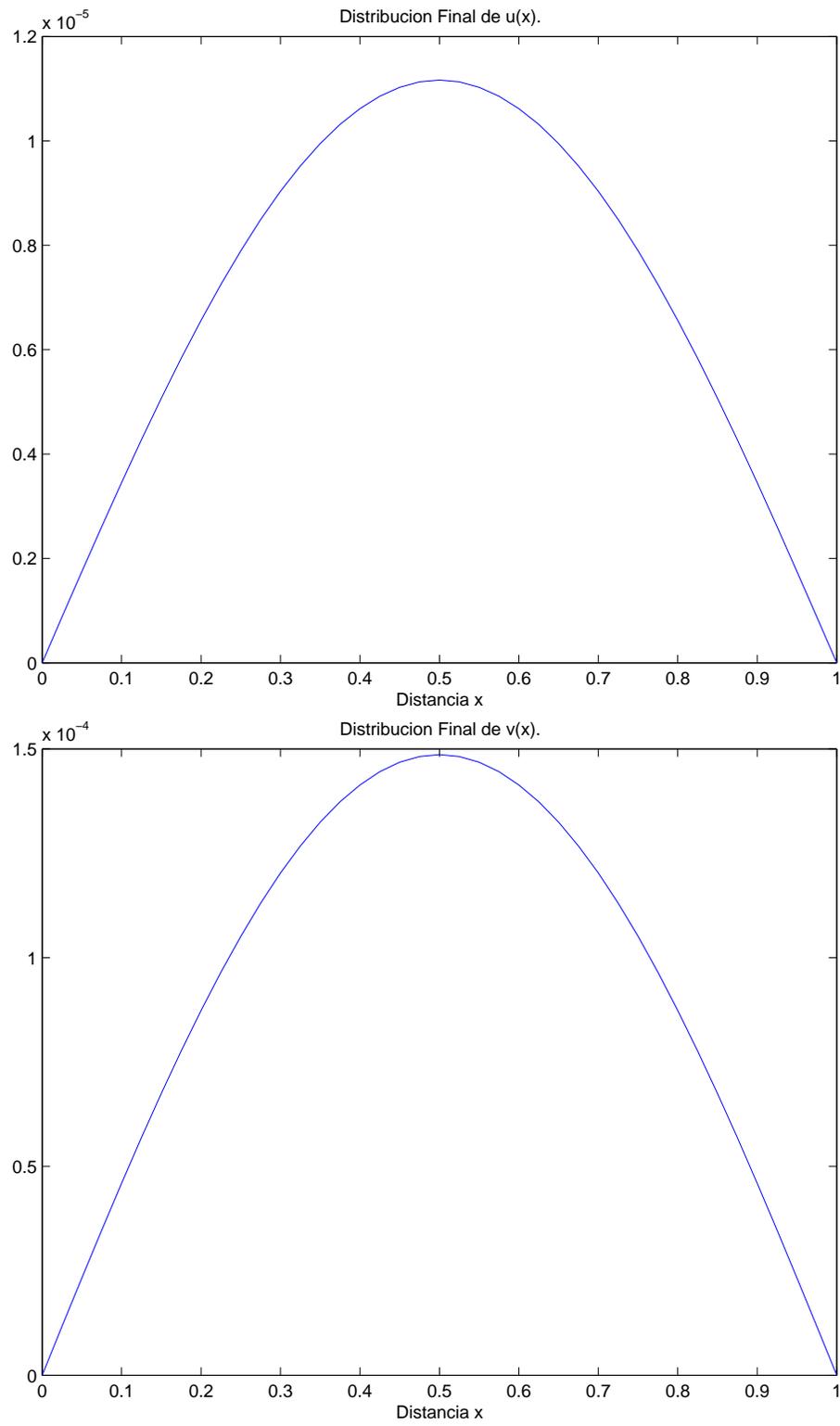


Figura 5.26: Ilustración de las soluciones $u(x, t)$ y $v(x, t)$.

Figura 5.27: Distribución final de temperatura para u y v .

CAPÍTULO 6

Conclusiones.

La tesis desarrolla, en forma sistemática la teoría de una clase de bifurcaciones en sistemas dinámicos y semidinámicos en espacios generales, que se caracteriza por la existencia de inestabilidad para cierto valor crítico de un parámetro y estabilidad para valores cercanos. Por ejemplo, incluye la bifurcación de puntos o conjuntos silla. En este sentido complementa la otra amplia clase de bifurcaciones, muy estudiado en el pasado, cuyo prototipo es la bifurcación de Hopf (o de Poincaré-Andronov-Hopf), y donde se trata del caso donde hay estabilidad para cierto valor del parámetro e inestabilidad para valores cercanos. Ambas teorías juntas dan el resultado de que cualquier cambio de estabilidad va acompañado de una bifurcación (en el sentido en el cual entendemos el concepto).

Algunos problemas que quedan por estudiar son los siguientes:

1. Las propiedades de la estabilidad de los conjuntos que surgen de la bifurcación de un punto o conjunto silla; concretamente, si estas a su vez son conjuntos sillan (ver los Ejemplos 38, 39 y del Apéndice B). Un posible punto de partida de esta línea de investigación, consiste resolver este problema para el caso especial de sistemas dinámicos en un espacio localmente compacto y después abordar el caso general acerca del comportamiento de sistemas semidinámicos para tiempos negativos. En el Apéndice B, presentamos un posible punto de partida.
2. Aplicaciones de esta teoría al estudio de bifurcaciones de sistemas de

sistemas semidinámicos en dimensión infinita definidos por ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones diferenciales con retardo.

APÉNDICE A

Teoría general de la prolongación perturbacional.

Este aspecto de la teoría de sistemas (semi)dinámicos es en realidad un caso especial de una teoría más general. Por eso, en esta subsección desarrollamos algunos elementos de una teoría de mapeos de conjuntos a conjuntos, que posteriormente se aplicarán a sistemas dinámicos y semidinámicos. El propósito es mostrar que el concepto de prolongación y sus derivados, son conceptos de naturaleza de mapeos arbitrarios que se pueden estudiar en un contexto más general que el dinámico.

Sea $\Phi : X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$ un mapeo de puntos a conjuntos. Para $A \in 2^X$, la imagen del conjunto A bajo el mapeo Φ está dada por $\Phi(A) := \bigcup_{x \in A} \{\Phi(x)\}$, esto implica que existe el mapeo inducido de conjuntos a conjuntos $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$. En este contexto la evaluación del mapeo Φ en un punto $x \in X$ la definimos como $\Phi(x) := \Phi(\{x\})$.

Todos los mapeos Φ en cuestión tienen la **propiedad aditiva**, según la siguiente proposición.

Proposición A.0.10 Sean $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$, $\{A_i \mid i \in I\} \subset 2^X$ donde I es un conjunto de índices, entonces $\Phi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \Phi(A_i)$.

Demostración. Sea $y \in \Phi(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\exists i \in I)(y \in \Phi(A_i)) \Leftrightarrow (y \in \bigcup_{i \in I} \Phi(A_i))$. ■

La siguiente proposición implica que el mapeo Φ tiene la **propiedad de monotonía**. La demostración es obvia.

Proposición A.0.11 *Si $A, B \in 2^X$ y $A \subset B$, entonces $\Phi(A) \subset \Phi(B)$.*

Definición 49 *Sea $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$ un mapeo de conjuntos a conjuntos. Definimos la prolongación del conjunto $A \subset X$ con respecto a Φ mediante*

$$D_\Phi(A) := \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{(\Phi(B_\epsilon(A)))}. \quad (\text{A.1})$$

Con el propósito de no complicar la notación, de aquí en adelante escribiremos $D(A)$ en lugar de $D_\Phi(A)$ en el contexto actual y donde no haya confusión, cuando el mapeo Φ es fijo.

Proposición A.0.12 *Sea $A \subset X$. Entonces*

$$(\forall \epsilon > 0) \quad \bar{A} \subset B_\epsilon(A). \quad (\text{A.2})$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in \bar{A}$, se sigue que

$$(B_\epsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists y \in A) \quad 0 < d(x, y) < \epsilon \Rightarrow x \in B_\epsilon(A).$$

■

Proposición A.0.13 *Sean $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$ y $A \subset X$, entonces*

$$\bigcap_{\epsilon > 0} \overline{(\Phi(B_\epsilon(A)))} = \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))). \quad (\text{A.3})$$

Demostración. Primero demostraremos la inclusión “ \subset ”, en (A.3). Aplicando la Proposición A.0.12, tenemos que

$$(\forall \epsilon > 0) \overline{(\Phi(B_\epsilon(A)))} \subset B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))) \Leftrightarrow \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{(\Phi(B_\epsilon(A)))} \subset \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)));$$

con esto se concluye la primera parte. La otra inclusión, “ \supset ”, en (A.3); se obtiene por contradicción. En efecto, supongamos que

$$\bigcap_{\epsilon > 0} \overline{(\Phi(B_\epsilon(A)))} \not\subset \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))); \quad (\text{A.4})$$

esto es equivalente a las siguientes relaciones,

$$(\exists y) \quad y \in \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))) \quad \wedge \quad y \in \bigcup_{\epsilon > 0} \mathcal{C}(\overline{\Phi(B_\epsilon(A))}). \quad (\text{A.5})$$

La segunda relación en (A.5) implica que

$$(\exists \epsilon_1 > 0) \quad y \in \mathcal{C}(\overline{\Phi(B_{\epsilon_1}(A))}). \quad (\text{A.6})$$

El conjunto, $\mathcal{C}(\overline{\Phi(B_{\epsilon_1}(A))})$ es abierto, puesto que es el complemento del conjunto cerrado $\overline{\Phi(B_{\epsilon_1}(A))}$; por lo tanto

$$(\exists \delta > 0) \quad B_\delta(y) \subset \mathcal{C}(\overline{\Phi(B_{\epsilon_1}(A))}). \quad (\text{A.7})$$

Fijamos $\epsilon_1 > 0$ y $\delta > 0$ de acuerdo con dadas por (A.6) y (A.7) respectivamente; entonces tenemos

$$B_\delta(y) \cap (\Phi(B_{\epsilon_1}(A))) = \emptyset. \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado, la familia de conjuntos $\{\Phi(B_\epsilon(A)) : \epsilon > 0\}$ es una familia de conjuntos *anidados*¹. Aplicando la Proposición A.0.11 concerniente a la propiedad de monotonía del mapeo Φ y la relación (A.8) tenemos que

$$B_\delta(y) \cap \bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)))) = \emptyset, \quad (\text{A.9})$$

también, aplicando la Proposición A.0.11

$$\bigcap_{0 < \epsilon < \min(\epsilon_1, \delta)} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)))) = \bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))))). \quad (\text{A.10})$$

Las dos últimas relaciones (A.9) y (A.10) juntas implican que

$$y \notin \bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)))) \quad (\text{A.11})$$

en consecuencia se obtiene una contradicción con la primera relación en (A.5). ■

La Proposición A.0.12 implica que el lado derecho de (A.3) en la proposición A.0.13, es otra forma de expresar la prolongación del conjunto A , en términos de las ϵ -vecindades de las imágenes de las ϵ -vecindades del conjunto A , bajo el mapeo Φ . Esto es el contenido del siguiente corolario.

¹ $(\forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0) \quad (\epsilon_1 < \epsilon_2) \quad \Rightarrow \quad \Phi(B_{\epsilon_1}(A)) \supset \Phi(B_{\epsilon_2}(A)).$

Corolario A.0.14 Sean $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$, $y \in X$ y $A \in 2^X$, entonces

$$D_\Phi(A) = \bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)))) \quad (\text{A.12})$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de (A.1) y (A.3). ■

En realidad para cada mapeo Φ , la prolongación correspondiente D_Φ , es también un mapeo $D_\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$, donde para cada $A \in 2^X$ el valor de D_Φ en A se define como: $D_\Phi(A) := \bigcap_{\epsilon > 0} (\overline{\Phi(B_\epsilon(A))})$ o equivalentemente, considerando el corolario A.0.14, $D_\Phi(A) = \bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))))$. Puesto que para todo $A \in 2^X$ y $A \subset D_\Phi(A)$ obtenemos $D_\Phi(A) \neq \emptyset$. Resulta obvio que el mapeo D_Φ es monótono como consecuencia de la monotonía del mapeo Φ , es decir: si $A \subset B$ entonces $D_\Phi(A) \subset D_\Phi(B)$. En efecto, si $A \subset B$

$$(\forall \epsilon > 0) \quad \Phi(B_\epsilon(A)) \subset \Phi(B_\epsilon(B)).$$

La propiedad de monotonía del mapeo Φ , implica que

$$(\forall \epsilon > 0) (\Phi(B_\epsilon(A)) \subset \Phi(B_\epsilon(B))),$$

luego, esto es equivalente a

$$\bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)))) \subset \bigcap_{\epsilon > 0} (B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(B)))),$$

y aplicando el corolario A.0.14, obtenemos $D_\Phi(A) \subset D_\Phi(B)$. Como consecuencia de esto se desprende que la prolongación de un conjunto, contiene todas las prolongaciones de cada uno de los puntos del conjunto en cuestión, por lo tanto, vale la siguiente relación.

$$\bigcup_{x \in A} D_\Phi(x) \subset D_\Phi(A) \quad (\text{A.13})$$

donde la prolongación de cada punto $x \in 0A$, la ponemos como $D_\Phi(x) := D_\Phi(\{x\})$, y la escribimos explícitamente tomando en cuenta la relación (A.12) reemplazando el conjunto A por el punto x ,

$$D_\Phi(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(x))). \quad (\text{A.14})$$

Por otra parte, dado un mapeo $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$ y $A \subset X$ la contención $D_\Phi(A) \subset \bigcup_{x \in A} D_\Phi(x)$, no vale en general. Para demostrar lo anterior, consideremos el mapeo $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$, definido como $\Phi(A) = A$, para toda

$A \subset X$. Entonces $\overline{\Phi(A)} = \overline{A}$ y $D_\Phi(A) = \bigcap_{\epsilon > 0} (\overline{\Phi(B_\epsilon(A))}) = \overline{A}$. Si A no es cerrado, tomamos $y \notin \overline{A} \setminus A$, entonces $y \in D_\Phi(A)$ pero $y \notin \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(x)))$. Si $A \subset X$ y $A = \overline{A}$, tampoco vale en general, $D_\Phi(A) \subset \bigcup_{x \in A} D_\Phi(x)$, para cualquier mapeo Φ . Lo anterior lo ilustramos en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 37 Sean $X = [0, 1] \times [0, 1]$ y $A = \{0\} \times [0, 1]$, entonces $\overline{A} = A$. Definimos el mapeo Φ para cada punto $(x, y) \in A$ de la siguiente manera,

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} [x, 1] \times \{y\}, & \text{si } y > 0; \\ \{(x, y)\}, & \text{si } y = 0. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Entonces

$$\Phi(A) = \bigcup_{p \in A} \Phi(p) = [0, 1] \times (0, 1] \cup \{(0, 0)\},$$

y,

$$D_\Phi(A) = \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A))) = [0, 1] \times [0, 1]$$

además,

$$D_\Phi(p) = D_\Phi(0, y) = \begin{cases} [0, 1] \times \{y\}, & \text{si } y > 0; \\ \{(0, 0)\}, & y = 0. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, en este caso

$$(0, 1) \in D_\Phi(A) \setminus \bigcup_{p \in A} D_\Phi(p),$$

por consiguiente, tenemos que

$$D_\Phi(A) \neq \bigcup_{x \in A} D_\Phi(x).$$

(Ver la siguiente figura).

La Proposición A.0.13, nos permite caracterizar los elementos de la prolon-gación de un conjunto como **los puntos que son alcanzados desde puntos arbitrariamente cercanos al conjunto**, mediante la acción del mapeo Φ ; este es el significado de la conclusión del siguiente corolario.

Corolario A.0.15 Sean $y \in X$, $A \in 2^X$ y $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X$, entonces

$$y \in D_\Phi(A) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists x' \in B_\epsilon(A))(\Phi(x') \cap B_\epsilon(y) \neq \emptyset). \quad (\text{A.17})$$

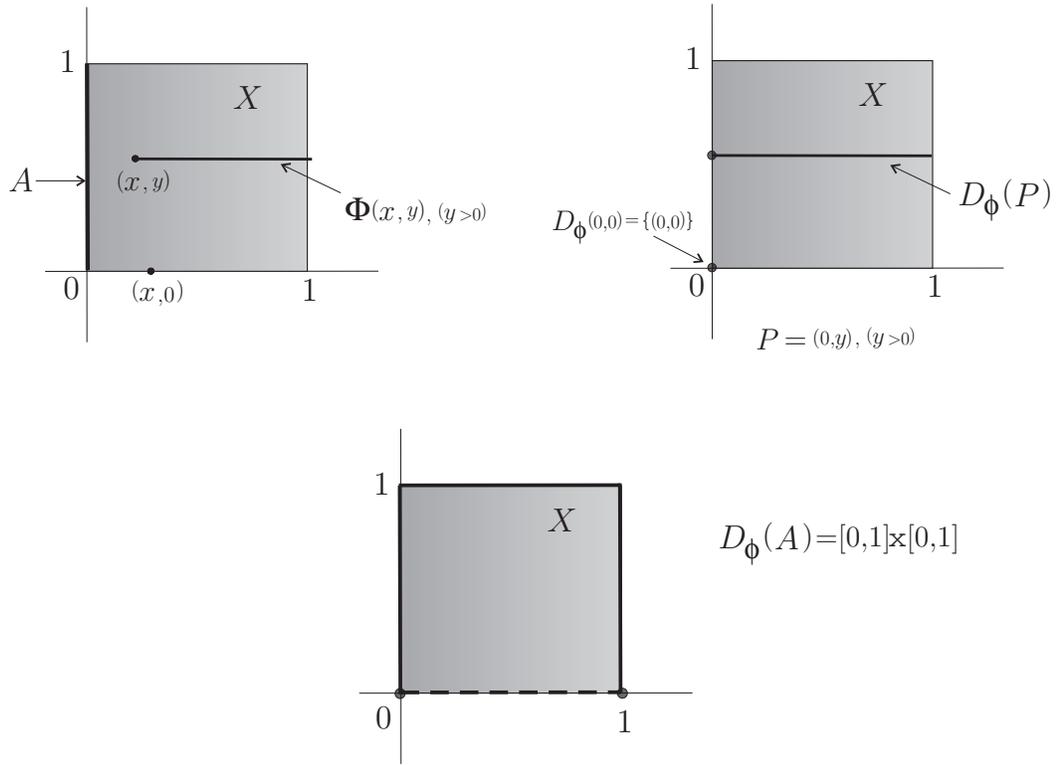


Figura A.1: Ilustración: El mapeo Φ no es aditivo.

Demostración. Demostraremos la necesidad de la condición. Si $y \in D_\Phi(A)$, aplicando el Corolario A.0.14, obtenemos

$$(\forall \epsilon > 0) \Phi(B_\epsilon(A)) \cap B_\epsilon(y) \neq \emptyset, \quad (\text{A.18})$$

de aquí obtenemos el lado derecho de de la equivalencia (A.17). Para demostrar la suficiencia, supongamos que y satisface las condiciones el lado derecho de (A.17); aplicando nuevamente el Corolario A.0.14, $y \in D_\Phi(A)$. ■

La relación (A.17) nos provee otra forma de escribir la prolongación del conjunto A , esta es:

$$D_\Phi(A) = \{y \in X \mid (\forall \epsilon > 0)(\exists x' \in B_\epsilon(A))(\exists y' \in B_\epsilon(y)) \ y' \in \Phi(x')\} \quad (\text{A.19})$$

A continuación damos una caracterización más del conjunto, $D_\Phi(A)$, en términos de sucesiones. Esta caracterización la expresamos mediante la siguiente proposición.

Proposición A.0.16 Sea $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$, $y \in X$ y $A \in 2^X$, entonces

$$y \in D_\Phi(A) \Leftrightarrow (\exists x_{\mathbb{N}} \subset X) (\exists y_{\mathbb{N}} \subset X), d(x_n, A) \rightarrow 0, y_n \rightarrow y, y_n \in \Phi(x_n). \quad (\text{A.20})$$

Demostración. Primero demostraremos la necesidad de la condición, para esto, sea $y \in D_\Phi(A)$ [según (A.12)]. Entonces, $\forall \epsilon > 0, y \in B_\epsilon(\Phi(B_\epsilon(A)))$. Luego, para cada sucesión $\epsilon_{\mathbb{N}}, \epsilon_n \rightarrow 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n \in B_{\epsilon_n}(A)$ y, $y_n \in B_{\epsilon_n}(y)$ tales que $y_n \in \Phi(x_n)$. Por lo tanto, tenemos que $d(x_n, A) \rightarrow 0, y_n \rightarrow y$, con $y_n \in \Phi(x_n)$; lo cual prueba la primera parte. Para demostrar la suficiencia, supongamos que y satisface el lado derecho de la equivalencia (A.20). Esto implica que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $\forall n \geq N, x_n \in B_\epsilon(A), y_n \in B_\epsilon(y)$ y $y_n \in \Phi(x_n) \subset \Phi(B_\epsilon(A))$; es decir, $B_\epsilon(y) \cap \Phi(B_\epsilon(A)) \neq \emptyset$, lo cual es equivalentemente a que $y \in D_\Phi(A)$, considerando (A.12)). Esto completa la prueba de la proposición. ■

La Proposición A.20 nos provee de otra forma de definir la prolongación de un conjunto $A \subset X$ con respecto a Φ , $D_\Phi(A)$: nos permite ver que **ésta contiene todos los puntos a los cuales podemos aproximarnos desde puntos arbitrariamente cercanos al conjunto A , mediante el mapeo Φ .**

A partir de (A.20) de la proposición anterior obtenemos otra forma equivalente de escribir la prolongación del conjunto A , con respecto a Φ , como sigue

$$D_\Phi(A) = \{y \in X | (\exists x_{\mathbb{N}} \subset X) (\exists y_{\mathbb{N}} \subset X), d(x_n, A) \rightarrow 0, y_n \rightarrow y, y_n \in \Phi(x_n)\} \quad (\text{A.21})$$

Por otra parte, la siguiente proposición implica que la **prolongación es en realidad la cerradura de la gráfica del mapeo Φ** , en el siguiente sentido: denotamos con Γ_Φ la gráfica del mapeo Φ ,

$$\Gamma_\Phi = \{(x, y) \in X^2 | y \in \Phi(x)\},$$

y

$$(x, y) \in \overline{\Gamma_\Phi} \Leftrightarrow (\exists x_{\mathbb{N}} \subset X) (\exists y_{\mathbb{N}} \subset X), x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, y_n \in \Phi(x_n), y \in \Phi(x) \quad (\text{A.22})$$

Proposición A.0.17 Sea $\Phi : 2^X \rightarrow 2^X$; $x, y \in X$, entonces

$$y \in D_\Phi(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \overline{\Gamma_\Phi}.$$

Demostración. Sea $(x, y) \in \overline{\Gamma_\Phi}$, considerando (A.21) y (A.22) es claro que $y \in D_\Phi(x)$. Por otra parte si $y \in D_\Phi(x)$, aplicando nuevamente (A.21), $(x, y) \in \overline{\Gamma_\Phi}$. ■

Ahora consideramos una familia $\Phi_\Lambda := \{\Phi_\lambda : 2^X \rightarrow 2^X \setminus \emptyset \mid \lambda \in \Lambda\}$ de mapeos de conjuntos en conjuntos y suponemos que Φ_Λ satisface la siguiente propiedad continuidad con respecto al parámetro:

a) **Continuidad \mathcal{U} -uniforme con respecto al parámetro ($\mathcal{U} \in 2^X$):**

$$(\forall A \in \mathcal{U})(\forall y \in \Phi_{\lambda_0}(A))(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) \quad y \in B_\epsilon(\Phi_\lambda(A)) \quad (\text{A.23})$$

donde \mathcal{U} es una cierta clase de subconjuntos de X , con una propiedad especial; por ejemplo, puede ser una familia de conjuntos acotados o compactos.

Estudiaremos la variación de la λ -prolongación de $A \subset X$, $D_{\Phi_\lambda}(A)$; cuando λ varía en una vecindad pequeña de λ_0 $N \in \mathcal{N}$.

Definición 50 Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y $A \subset X$. Definimos la *prolongación perturbacional inferior* de A en λ_0 bajo la acción de la familia de mapeos Φ_Λ , mediante

$$\underline{P}_{\lambda_0}(A) := \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{N \in \mathcal{N}} \bigcap_{\lambda \in N} B_\epsilon(\Phi_\lambda(B_\epsilon(A))). \quad (\text{A.24})$$

La relación (A.24) también la podemos escribir como:

$$\underline{P}_{\lambda_0}(A) := \bigcup_{x \in A} \underline{P}_{\lambda_0}(x) \quad (\text{A.25})$$

donde,

$$y \in \underline{P}_{\lambda_0}(x) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) \quad B_\epsilon(y) \cap B_\epsilon(\Phi_\lambda(x)) \neq \emptyset.$$

Tenemos que la *prolongación perturbacional inferior* de A en λ_0 , bajo la acción de la familia de mapeos Φ_Λ , es la *prolongación* de A bajo la acción del mapeo Φ_{λ_0} . Este es el contenido del siguiente teorema:

Teorema A.0.18 (Persistencia inferior de la prolongación) Sea $\lambda_0 \in \Lambda$, $M \subset X$ y Φ_Λ la familia de mapeos de conjunto a conjunto que satisfacen a), descrita por (A.23), entonces tenemos

$$D_{\Phi_{\lambda_0}}(M) = \underline{P}_{\lambda_0}(M).$$

Demostración. Probaremos primero la inclusión: $\underline{P}_{\lambda_0}(M) \subset D_{\lambda_0}(M)$. Sea $y \in \underline{P}_{\lambda_0}(M)$; entonces de (A.24) obtenemos

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) : \Phi_\lambda(B_\epsilon(A)) \cap B_\epsilon(y) \neq \emptyset.$$

Puesto que λ_0 pertenece a cualquier vecindad del filtro de vecindades de λ_0 , en particular, $\lambda_0 \in N$, $\Phi_{\lambda_0}(B_\epsilon(M)) \cap B_\epsilon(y) \neq \emptyset$, es decir, $y \in D_{\lambda_0}(A)$. Para probar la inclusión contraria, sea $y \in D_{\lambda_0}(A)$; esto implica que dado $\epsilon > 0$, por la Definición 49 vale $y \in B_{\epsilon/2}(\Phi_{\lambda_0}(B_{\epsilon/2}(A)))$; elegimos $y' \in \Phi_{\lambda_0}(B_{\epsilon/2}(A)) \cap B_{\epsilon/2}(y)$ y aplicamos (A.23) a y' , $\epsilon/2$, $B_{\epsilon/2}(A)$ en lugar del conjunto A y tenemos que

$$(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) : y' \in B_{\epsilon/2}(\Phi_\lambda(B_{\epsilon/2}(A))).$$

Por otra parte, $d(y, y') < \epsilon/2$. Por la Proposición A.0.10, $B_{\epsilon/2}(\Phi_\lambda(B_{\epsilon/2}(A))) \subset B_\epsilon(\Phi_\lambda(B_\epsilon(A)))$; entonces, para todo $\lambda \in N$, $y \in B_{\epsilon/2}(y') \subset B_\epsilon(\Phi_\lambda(B_\epsilon(A)))$, es decir, $y \in \underline{P}_{\lambda_0}(A)$, lo cual completa la demostración del teorema. ■

Definición 51 Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y $M \subset X$, decimos que la familia de mapeos Φ_Λ de conjunto a conjunto es de prolongación inferiormente persistente en la pareja parámetro-conjunto (λ_0, M) si $D_{\lambda_0}(M) = \underline{P}_{\lambda_0}(M)$.

Aplicando el Teorema A.0.18 se concluye que cualquier familia de mapeos Φ_Λ con la propiedad a), es de prolongación inferiormente persistente en toda pareja parámetro-conjunto (λ_0, M) , para cualquier $\lambda_0 \in \Lambda$ y $M \in \mathcal{U}$.

Definición 52 Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y $A \subset X$, definimos la prolongación perturbacional superior de A en λ_0 , bajo la acción de la familia Φ_Λ mediante

$$\bar{P}_{\lambda_0}(A) := \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \bigcup_{\lambda \in N} B_\epsilon(\Phi_\lambda(B_\epsilon(A))).$$

De la misma manera que en (A.25), escribimos (A.24) en términos de la prolongación perturbacional de los puntos del conjunto A como sigue

$$\bar{P}_{\lambda_0}(A) := \bigcup_{x \in A} \bar{P}_{\lambda_0}(x)$$

donde,

$$y \in \bar{D}_{\lambda_0}(x) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathcal{N})(\exists \lambda \in N) : \Phi_\lambda(B_\epsilon(x)) \cap B_\epsilon(y) \neq \emptyset.$$

Con la siguiente proposición probaremos que la *prolongación perturbacional inferior* está contenida en la *prolongación perturbacional superior*, pero no lo contrario. Más adelante probaremos mediante un ejemplo que estos dos conceptos no son equivalentes.

Proposición A.0.19 Sea $G_\Lambda = \{G_\lambda \in 2^X : \lambda \in \Lambda\}$, entonces

$$\bigcup_{N \in \mathcal{N}} \bigcap_{\lambda \in N} G_\lambda \subset \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \bigcup_{\lambda \in N} G_\lambda. \quad (\text{A.26})$$

Demostración: Sea $y \in \bigcup_{N \in \mathcal{N}} \bigcap_{\lambda \in N} G_\lambda$, entonces $(\exists N_1 \in \mathcal{N}) (\forall \lambda \in N_1) y \in G_\lambda$. Luego $\forall N \in \mathcal{N}$, $N \cap N_1 \in \mathcal{N}$. Sea $\lambda_1 \in N \cap N_1$, puesto que $\lambda_1 \in N_1$, $y \in G_{\lambda_1}$, obtenemos la relación (A.26). ■

Teorema A.0.20 Sean $\lambda_0 \in \Lambda$, $A \subset X$ y Φ_Λ una familia de mapeos de conjunto en conjunto, con la propiedad a). Entonces

$$\underline{P}_{\lambda_0}(A) \subset \bar{P}_{\lambda_0}(A).$$

Demostración: Dados $\epsilon > 0$, el sistema de vecindades \mathcal{N} , $N \in \mathcal{N}$ para cada $\lambda \in N$ ponemos $G_\lambda := B_\epsilon(\Phi_\lambda(B_\epsilon(A)))$ y aplicamos la Proposición A.0.19. Luego combinamos la definición 52 (aplicada a D_{λ_0}) con el Teorema A.0.18 para obtener la conclusión del teorema. ■

Corolario A.0.21 Sean $\lambda_0 \in \Lambda$, $A \subset X$ y Φ_Λ una familia de mapeos de conjunto en conjunto, con las propiedades a) y b). Entonces

$$D_{\lambda_0}(A) \subset \bar{P}_{\lambda_0}(A)$$

Demostración. Es una consecuencia de los Teorema A.0.18 y Teorema A.0.20 ■

Definición 53 Sean $\lambda_0 \in \Lambda$ y $A \subset X$ decimos que la familia de mapeos Φ_Λ de conjunto a conjunto, es de prolongación superiormente persistente en la pareja parámetro-conjunto (λ_0, A) si $D_{\lambda_0}(A) = \bar{P}_{\lambda_0}(A)$.

En general, la familia de mapeos Φ_Λ , no es inferiormente persistente en (λ_0, A) , esto lo demostramos mediante el ejemplo 4, considerando la familia de mapeos, Φ_Λ , como la familia de mapeos γ_Λ^+ , y la pareja $(\lambda_0, A) = (0, \{0\})$ (Ver la figura 2.4).

APÉNDICE B

Bifurcación de Conjuntos silla.

Definimos el conjunto silla de la siguiente manera:

Definición 54 *Un suconjunto $S \subset X$ se llama conjunto silla si:*

$$(\exists U \in \mathcal{S})(\forall V \in \mathcal{S})(\exists x \in V) \quad \gamma^+(x) \not\subset \bar{U} \quad x \in \gamma^+(\mathcal{C}\bar{U}). \quad (\text{B.1})$$

Ilustramos la definición anterior en la siguiente figura. En esta, las órbitas que entran corresponden a las que tienen puntos iniciales $x' \in \mathcal{C}\bar{U}$, y la que sale, $\gamma^+(x)$, a la mencionada en la definición (54)

Definición 55 *Un subconjunto $S \subset X$ se llama aislado de conjuntos invariantes si:*

$$(\exists U \in \mathcal{S})(\forall M' \text{ invariante} : M' \subset U) \Rightarrow M' \subset S$$

Proposición B.0.22 *Sea $S \subset X$ un conjunto compacto e invariante. Supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis:*

- (i) F es LAC sobre $W \in \mathcal{S}$;
- (ii) $(\forall U \in \mathcal{S})(\exists V \in \mathcal{S}) \quad V \subset U, \quad V \setminus S$ es conexo;
- (iii) S es aislado de conjuntos invariantes;
- (iv) S no es atractor; y
- (v) $(\exists U \in \mathcal{S})(\forall V \in \mathcal{S})(\exists x \in V) \quad x \in \gamma^+(\mathcal{C}\bar{U})$.

Entonces S es un conjunto silla.

Demostración. Fijamos el conjunto $U \in \mathcal{S}$ tal que satisface las hipótesis (v), (i) con $U \subset W$ y (iii) con U como en la Definición 54 . Entonces fijamos también una vecindad abierta, $V \in \mathcal{S}$ y $V = \overset{\circ}{V}$, correspondiente al conjunto U , seleccionado anteriormente de acuerdo a la hipótesis (ii), en caso contrario (v) se cumple automáticamente; de tal modo que $V \subset \overline{U}$. Tenemos de lo anterior, por la hipótesis (ii), que el *anillo topológico* $V \setminus S$, es conexo. Luego, definimos los conjuntos

$$E^+ := \{x \in V \mid \gamma^+(x) \not\subset \overline{U}\} \quad (\text{B.2})$$

$$E^- := \{x \in V \mid x \in \gamma^+(\mathcal{C}(\overline{U}))\}. \quad (\text{B.3})$$

Por continuidad con respecto a las condiciones iniciales, los conjuntos E^+ y E^- son conjuntos abiertos. Demostraremos que

$$E^+ \cup E^- = V \setminus S, \quad (\text{B.4})$$

esto es, que la unión de los conjuntos E^+ y E^- , cubren todo el *anillo topológico* $V \setminus S$. Procedemos por contradicción suponiendo que, $E^+ \cup E^- \subsetneq V \setminus S$; entonces

$$\exists x \in V \setminus S \quad \wedge \quad x \notin E^+ \cup E^-. \quad (\text{B.5})$$

Sea la $x \in V \setminus S$ dada por (B.5) del renglón anterior, lo cual implica que $\bigcup \{\gamma_x^+\} \subset V \setminus S$. Aquí γ_x^+ denota las soluciones maximales que contienen x , y su unión $\bigcup \{\gamma_x^+\}$, es invariante [Sa]. Puesto que $x \notin E^+$ y $x \notin E^-$, entonces las soluciones maximales que contienen el punto x (γ_x^+ son conjuntos invariantes) no salen de \overline{U} , ni entran desde $\mathcal{C}\overline{U}$: permanecen en \overline{U} . Por otro lado, por la hipótesis (iii), S es aislado entre conjuntos invariantes con respecto a U ; esto implica que $\bigcup \{\gamma_x^+\} \subset S$, por lo tanto $x \in S$, lo cual es una contradicción. Esto establece la igualdad (B.4). Ahora bien, de la hipótesis (ii) tenemos que $V \setminus S$ es conexo, esto implica que la unión del lado izquierdo de (B.4), es no ajena: $E^+ \cap E^- \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\exists x \in V \setminus S)(x \in \gamma^+(\mathcal{C}\overline{U}))(\gamma^+(x) \not\subset \overline{U})$, lo cual implica que el conjunto S es un *conjunto silla*. ■

Lema B.0.23 *Sea (X, T, F, Λ) una familia de sistemas dinámicos, X un espacio métrico localmente compacto, $M \subset X$ invariante y compacto $\forall \lambda \in \Lambda$. Además supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:*

(i) $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}$;

(ii) $\exists(U, V, W) \quad (W \in \mathcal{V}_M)(V \in \mathcal{V}_{\bar{W}})(U \in \mathcal{V}_{\bar{V}})$; y

(iii) M es λ_0 -aislado de conjuntos invariantes con respecto a U ;

Entonces $(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) \quad (\nexists M'_\lambda \quad \lambda - \text{invariante} \quad M'_\lambda \subset \bar{V} \setminus W)$.

Demostración. Sean U , V y W como en la hipótesis (ii). Por ser M un conjunto λ_0 -aislado de conjuntos invariantes con respecto a U , no pueden existir conjuntos λ_0 -invariantes distintos de M contenidos en $\bar{V} \setminus W$. Tampoco existen conjuntos positiva o negativamente λ_0 - invariantes contenidos en $\bar{V} \setminus W$; pues, en caso contrario: si existe un conjunto $M'_{\lambda_0} \subset \bar{V} \setminus W$ λ_0 - positivamente invariante. Sea $x \in M'_{\lambda_0}$, tomando el conjunto límite positivo del punto x : $L^+(x)$. Este conjunto resulta invariante (ver [Bh]), porque (X, T, F_{λ_0}) es un sistema dinámico. Por lo tanto tenemos que $L^+(x) \subset M'_{\lambda_0} \subset \bar{V} \setminus W \subset U$; con esto exhibimos otro conjunto invariante contenido en U distinto de M . lo cual contradice la hipótesis (iii). Siguiendo el mismo razonamiento del caso anterior, concluimos que $L^-(x)$ también es un conjunto invariante contenido en U distinto de M , lo cual de igual manera, contradice la hipótesis (iii). Así, se descartan los posibles conjuntos λ_0 - (semi)invariantes que pudieran estar contenidos en U distintos de M . Por otra parte, supongamos que la conclusión del lema no vale, entonces:

$$\exists \lambda_{\mathbf{N}} \subset \Lambda \quad \lambda_n \rightarrow \lambda_0, \quad \forall \lambda_n \quad M'_{\lambda_n} \quad \lambda_n - \text{invariante}, \quad M'_n \subset \bar{V} \setminus W. \quad (\text{B.6})$$

Sean $x_n \in M'_n$. Puesto que M es compacto y X es localmente compacto, se puede suponer que $\bar{V} \setminus W$ es compacto. Entonces sin pérdida de generalidad, existe $x^* \in \bar{V} \setminus W$ $x_n \rightarrow x^*$. Por la argumentación anterior, $\gamma_{\lambda_0}^+(x^*) \notin \bar{V} \setminus W$. Luego, la dependencia continua con respecto al conjunto de puntos iniciales y con respecto al parámetro λ , juntas implican que $\gamma_{\lambda_n}^+(x^*)$ sale de $\bar{V} \setminus W$ también para n grande; es decir cuando, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Esto contradice (B.6). Usando el mismo argumento para el caso de la órbita negativa, correspondiente al punto x^* ; $\gamma_{\lambda_n}^-(x^*)$, también sale del anillo $\bar{V} \setminus W$, lo cual también contradice (B.6). ■

Teorema B.0.24 Sea (X, T, F, Λ) una familia de sistemas semi-dinámicos, X un espacio métrico localmente arco-conexo, $M \subset X$ invariante y compacto $\forall \lambda \in \Lambda$. Además supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

- (i) F_Λ es LAC en λ_0 sobre $W \in \mathcal{V}_M$;
- (ii) M es λ_0 -inestable;
- (iii) $(\exists x \notin M)(L^+(x) \neq \emptyset)(L^+(x) \subset M)$;
- (iv) M es λ_0 -aislado de conjuntos invariantes con respecto; y
- (v) $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad B_\epsilon(M) \setminus B_\delta^*(M)$ es conexo.

Entonces se separan de M conjuntos sillas.

En los ejemplos que siguen presentamos tres casos prototipo en el plano que nos ilustran el contenido del Teorema B.0.24.

Ejemplo 38 Sea la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del parámetro $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda y - x^3, \\ \dot{y} &= -\lambda(x + y) + y^3. \end{aligned} \tag{B.7}$$

El espacio fase es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ y $M = \{(0, 0)\}$. Para $\lambda = 0$, M es un conjunto silla y, para $\lambda > 0$ M es un foco estable. Los puntos que se bifurcan son conjuntos silla. Ver la Figura B.1.

Ejemplo 39 Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales que contienen el parámetro λ ,

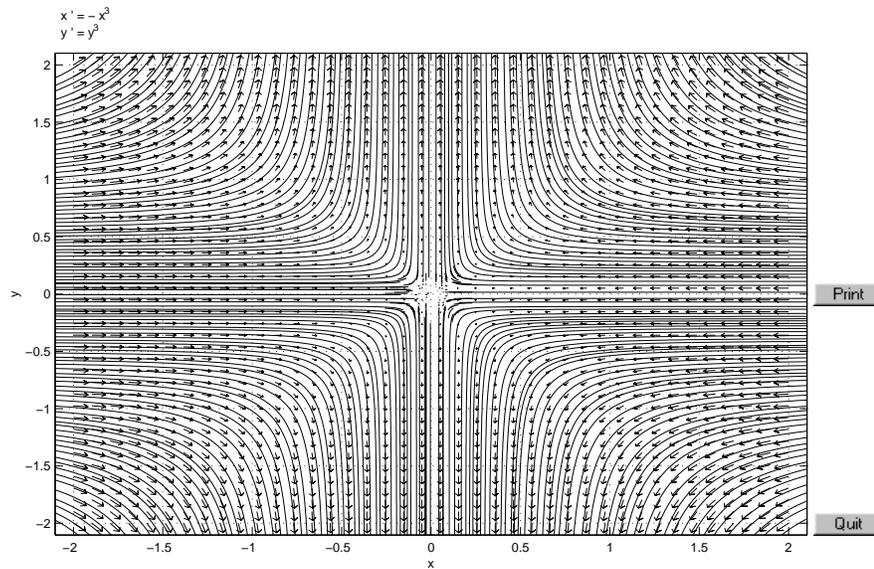
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^3 - x, \\ \dot{y} &= (x^2 - \lambda)y + y^3. \end{aligned} \tag{B.8}$$

El espacio fase es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ y $M = \{(0, 0)\}$. Para $\lambda = 0$, M es un conjunto silla y, para $\lambda > 0$ M es un nodo estable. Los puntos que se bifurcan son puntos silla. Ver la Figura B.2.

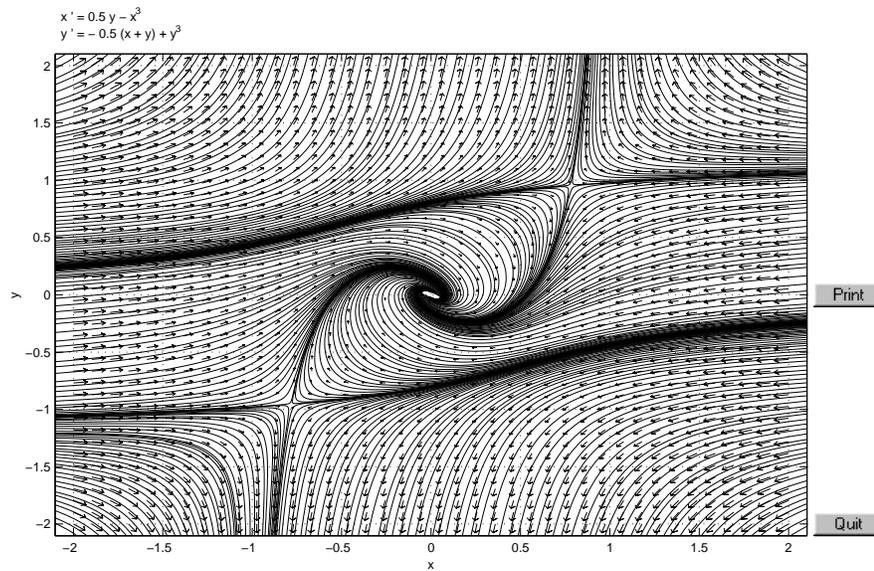
Ejemplo 40 Para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen del parámetro $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda y + x^2, \\ \dot{y} &= -\lambda(x + y) - y^3. \end{aligned} \tag{B.9}$$

El espacio fase es \mathbb{R}^2 , el espacio de parámetros Λ es \mathbb{R}^+ y $M = \{(0, 0)\}$. Para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla degenerada y, para $\lambda > 0$ M es un nodo estable y el punto que se bifurca es un punto silla. Ver la Figura B.3.



The backward orbit from [2, 2] left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from [2.1, 2.1] left the computation window.
 The backward orbit from [2.1, 2.1] left the computation window.
 Ready.



The backward orbit from [-0.44, -0.6] left the computation window.
 Ready.
 The forward orbit from [-1.8, -0.41] -> a possible eq. pt. near [-0.016, -0.012].
 The backward orbit from [-1.8, -0.41] left the computation window.
 Ready.

Figura B.1: Arriba, para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla. Abajo, para $\lambda = 0.5$ M es un foco estable. Los puntos de bifurcación son puntos silla.

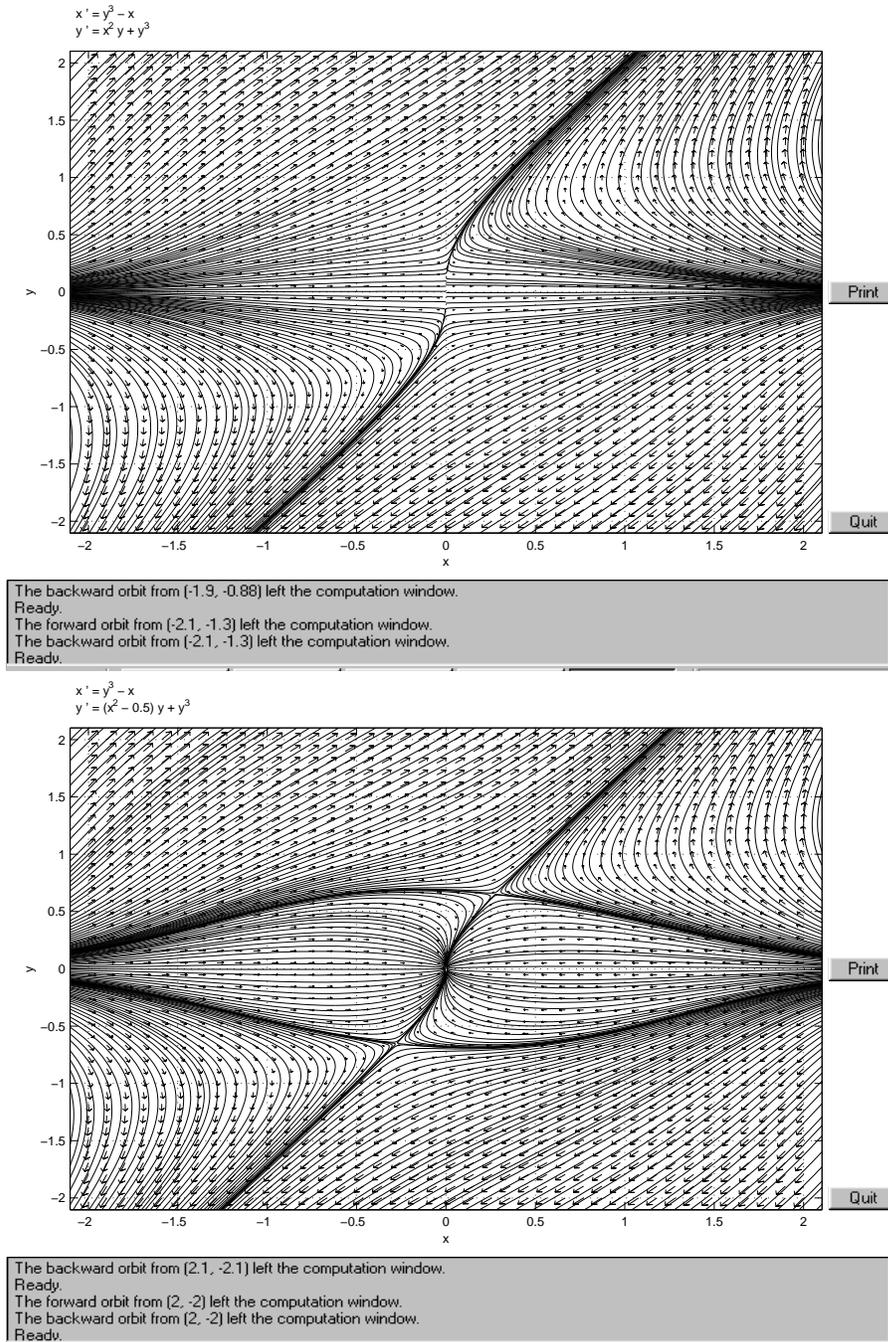


Figura B.2: Arriba, para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla. Abajo, para $\lambda = 0.5$ M es un nodo estable. Los puntos de bifurcación son puntos silla.

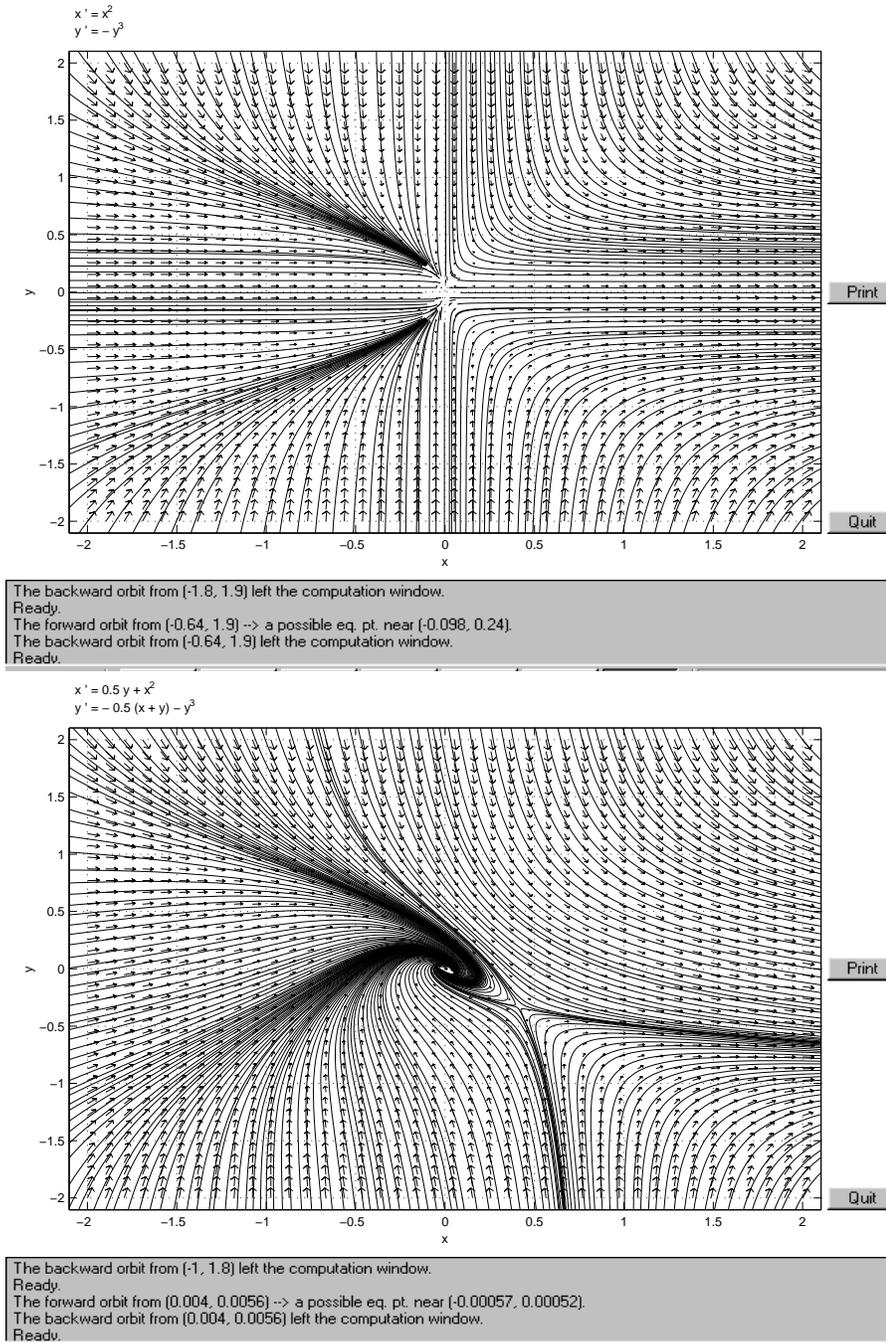


Figura B.3: Arriba, para $\lambda = 0$ M es un conjunto silla degenerada (fusión nodo-silla). Abajo, para $\lambda = 0.5$ M es un foco estable. El punto que se bifurca es un punto silla.

REFERENCIAS

- [AS1] L. Aguirre and P. Seibert. Bifurcation from unstable equilibria, *Aport. Mat.*, XXVII Congr. Nac. Soc. Mat. Mex., Ser. Com. **16**, (1995), 165–171.
- [AS2] L. Aguirre and P. Seibert. Types of change of stability and corresponding types of Bifurcations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **5**, (4), (1999), 741–752.
- [Am] H. Amann. Ordinary Differential Ecuations. An Introduction to Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [Ba] N. N. Bautin. On the behavior of dynamical systems with small violations of the condition of stability of Routh–Hurwitz. (Russian) *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.* **12**, (1948), 613–632.
- [Bh] N.P. Bhatia and G.P. Szego. Stability Theory of Dynamical Systems. Grundlehren d. math. Wiss. **161**, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
- [BO] N.P. Bhatia and O. Hajek. Local Semi-Dynamical Systems. **90**, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
- [ChH] S. N. Chow y J. K. Hale. Methods of bifurcation theory, Springer–Verlag, Berlin, 1982.
- [Fl] J. S. Florio. On topological content of stability, instability and persistence. *Universitatis iagellonicae acta mathematic*, fasciculus XXXVI, (1997), 89–95.

- [Ho] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, Ber. *Math.Phys.* Sächsische Akad. Wiss. Leipzig **94**, 1–22 (1942).
- [Ha] W. Hahn. Theory and application of Liapunov's direct method. English edition prepared by Siegfried H. Lehnigk; translation by Hans H. Losenthiem and Siegfried H. Lehnigk Prentice–Hall, Inc., Englewood.
- [HK] J.K. Hale and H. Koçak. Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, New York, (1991).
- [Ku] C. Kuratowski. *Topologie II*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. Warsaw, Polonia, 1961.
- [La] O. Ladyzhenskaya. Attractors for semigroups and evolution equations, Accad. Naz. lincei. Cambridge University Press (1991).
- [Ma] F. Marchetti. Some stability problems from a topological viewpoint. *Rc. Acad. Naz. Lincei Sci. fis. mat.* **60** (6), 733–742(1976).
- [MNSS] F. Marchetti, P. Negrini, L. Salvadori and M. Scalia. Liapunov direct method in approaching bifurcation problems. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **108**, (1976), 211–226.
- [MM] J. Marsden and M.F. McCracken. The Hopf Bifurcation and its Applications. Springer, New York, (1976).
- [Sa] S.H. Saperstone. Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces, Springer–Verlag, Berlin (1981).
- [SADA] P.Seibert, J.H. Arredondo, J. Delgado y L. Aguirre. Reduction theorems for uniform stability of systems in general spaces. *Bol. Soc. Mat. Mex.* (**3**), 1997, 69-88.
- [Se 1] P. Seibert. Relative Stability and Stability of closed sets. *Lecture Notes in math.* **144**, Springer–Verlag, 1970, pp. 185–189.
- [Se 2] P. Seibert. Stability under perturbations in generalized dynamical systems. *Int. Symp. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, New York 1963, pp. 463–473.

- [Si] K. S. Sibirsky. Introduction to topological dynamics. Noordhoff International Publishing Leyden, (1975).
- [SF1] P. Seibert and J.S. Florio. On the foundations of bifurcation theory. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applic.* 8 **22**, (1994), 927–944.
- [SF2] P. Seibert and J. S. Florio. On bifurcations arising from unstable equilibria and invariant sets. *J. Differential Equations* **150** (1998), no. 2, 250–263.
- [SF3] P. Seibert and J. S. Florio. On the reduction to a subspace of stability properties of systems in metric spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4)**169** (1995), 291–320.
- [Te] R. Teman. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer, New York (1988).
- [Ur1] T. Ura. Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **70** (1953), 287–360.
- [Ur2] T. Ura. On the flow outside a closed invariant set; stability, relative stability and saddle sets. *Contrib. Differential Equations* **3** (1963), 249–294.
- [Wh] H. Whitney. Regular families of curves. *Ann. of Math. Contrib.* **34** (1933), 244–270.
- [Yo] T. Yoshizawa. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *Japanese Mathematical Society* Tokyo (1963).