



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales)

“Oscilador Económico Caótico de Relajación de Rocard”

TESIS

Que para obtener al grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales)

PRESENTA

Ing. Gilberto García Padilla

Matrícula: 2222800064

Correo electrónico: gil.garcia.padilla.1@gmail.com

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Mario Gerardo Medina Valdez

JURADO:

Presidente:

Dr. Joaquín Delgado Fernández

Secretario:

Dr. Mario Gerardo Medina Valdez

Vocal:

Dra. Lucia Ivonne Hernández Martínez

Iztapalapa, Ciudad de México a 12 de diciembre de 2025

Resumen

Estudiar un oscilador económico planteado en los años 40's que describe la interacción entre el precio, producción y consumo, el cual por su contexto histórico se ignoró. Mediante la aplicación de teoremas y técnicas computacionales, se lleva a cabo un análisis cualitativo del sistema de la dinámica del sistema donde se estudian los parámetros del modelo lineal y del modelo no lineal por Rocard. Para identificar que condiciones de los parámetros generan distintos comportamientos dinámicos, incluyendo estabilidad, inestabilidad y posibles bifurcaciones. Además de probar que condiciones de parámetros genera caos en el sistema dinámico.

Índice general

Resumen	i
1 Introducción.	1
1.1 Osciladores	1
1.1.1 Oscilador armónico amortiguado.	1
1.1.2 Oscilador de relajación.	5
1.2 Oscilador de relajación en economía.	8
2 Oscilador económico de relajación.	12
2.1 Modelo económico diferencial.	13
2.2 Justificación del modelo económico.	15
2.3 El Modelo lineal como un tipo de modelo compartimental.	17
2.4 Ecuación de tercer orden equivalente.	18
3 Análisis dinámico del modelo lineal	20
3.1 Análisis dinámico.	20
3.1.1 Polinomio y raíces características.	22
3.1.1.1 Información dinámica a partir del criterio de Routh-Hurwitz.	22
3.1.1.2 Análisis de polinomio característico.	23
3.1.2 Dinámica de los puntos de equilibrio.	28
4 Análisis dinámico del modelo no lineal.	33
4.1 Puntos de equilibrio	35
4.2 Linealización en puntos de equilibrio	36
4.3 Análisis de polinomios característicos	38
4.4 Consecuencias del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.	42
4.5 Conjuntos de parámetros.	44
4.5.1 Casos especiales para los polinomios característicos.	48
4.5.1.1 Raíces igual a cero en los polinomios.	48
4.5.1.2 Raíces imaginarias puras conjugadas.	48
4.5.1.3 Relación con el criterio de Routh.	51
4.5.2 Regiones del espacio de parámetros.	52
4.5.3 Curvas del espacio de parámetros.	57
4.5.4 Puntos del espacio de parámetros	59
4.6 Gráfica asociada	63

4.6.1	Ejemplo de construcción.	64
4.6.2	Submatrices de la matriz de adyacencia.	67
5	Simulaciones Computacionales.	71
5.1	Regiones.	72
5.1.1	Región 2.	72
5.1.1.1	Simulación computacional.	73
5.1.2	Región 3.	75
5.1.2.1	Simulación computacional.	75
5.1.3	Región 4.	78
5.1.3.1	Simulación computacional.	78
5.1.4	Región 5.	80
5.1.4.1	Simulación computacional.	80
5.1.5	Región 6.	82
5.1.5.1	Simulación computacional.	82
5.1.6	Región 7.	85
5.1.6.1	Simulación computacional.	85
5.1.7	Región 9.	87
5.1.7.1	Simulación computacional.	88
5.1.8	Región 10.	90
5.1.8.1	Simulación computacional.	90
5.1.9	Región 12.	92
5.1.9.1	Simulación computacional.	92
5.1.10	Región 16.	94
5.1.10.1	Simulación computacional.	94
5.2	Curvas.	97
5.2.1	Análisis.	97
5.2.2	Variedad central asociada a la curva	102
6	Caos en el sistema de Rocard.	112
6.1	Atractor caótico.	112
6.1.1	Caos.	112
6.1.2	Atractor extraño.	115
6.1.2.1	Ejemplos de atractores.	116
	Punto fijo estable.	116
	Ciclo límite.	117
6.1.2.2	Ejemplos de atractores extraños	118
6.1.3	Divergencia exponencial de trayectorias.	120
6.2	Exponente de Lyapunov del sistema de Rocard.	126
6.3	Sistemas dinámicos discretos unidimensionales.	127
6.3.1	Representación Gráfica.	129
6.3.2	Punto fijos, orbitas periódicas.	130
6.3.3	Bifurcaciones.	131
6.4	Período tres implica caos.	135
6.4.1	Lemas previos	136
6.4.2	Demostración del Teorema.	144

6.5	Teorema de Sharkovskii	147
6.5.1	Lemas previos	151
6.5.2	Demostración del Teorema.	163
6.6	Discretización de Rocard.	168
6.7	Atractores caóticos de Rocard.	177
7	Trabajo a futuro.	182
8	Conclusión.	183
	Bibliografía.	185
	Apéndices	186
A	Apéndice	186
A1	Teorema Routh-Hurwitz	186
A1.1	Tabla de Routh-Hurwitz	186
A1.2	Ejemplo de tabla de Routh-Hurwitz	187
A2	Teoremas referentes a Cardano-Ferrari	188
A3	Sistema dinámico como objeto en programación.	189
A3.1	Objeto anidado.	192
A3.2	Ejemplo de uso.	196

Índice de cuadros

3.1.1	Tabla de Routh-Hurwitz para sistema lineal $\dot{X} = AX$	23
3.1.2	Criterio de Routh-Hurwitz expresiones simplificadas.	23
3.1.3	Raíces para el polinomio (3.1.4) con la condición $p_1q_1 \neq 0$	27
3.1.4	Resumen de conjuntos bajo las condiciones de parámetros η y ε	32
4.3.1	Criterio de Routh-Hurwitz expresiones simplificadas.	38
4.3.2	Raíces para el polinomio (4.2.4) con las condiciones de $p_2q_2 \neq 0$	41
4.4.1	Tabla de Routh-Hurwitz para el polinomio característico asociada los punto P_2 y P_3	42
4.4.2	Simplificación de las condiciones para los parámetros del criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico en los punto P_2 y P_3	42
4.4.3	Posibilidad de estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema.	43
4.5.1	Resumen de regiones bajo las condiciones de parámetros η y ε en Δ_1 y Δ_2	53
4.5.2	Resumen de curvas con condiciones de parámetros η y ε	58
4.5.3	Iteraciones para el punto h_3	60
4.5.4	Iteraciones para el punto p_4	61
4.5.5	Resumen de puntos y sus condiciones de parámetros η y ε	63
4.6.1	Tabla con los elementos la fila que corresponde con la región cuatro de la matriz A	64
4.6.2	Tabla con los elementos la fila que corresponde con la región cuatro de la matriz B	65

Índice de figuras

1.1.1	Triángulo de referencia.	3
1.1.2	Respuesta al oscilador armónico amortiguado.	4
1.1.3	Respuesta al oscilador armónico amortiguado con resistencia negativa.	5
2.3.1	Modelo compartimental lineal	17
3.1.1	Región de parámetros ε y η donde la linealización del punto en el origen es estable.	23
3.1.2	Dinámica cerca del punto fijo en el origen.	28
3.1.3	Regiones de comportamiento del sistema lineal.	29
4.4.1	Región de parámetros ε y η donde la linealización de los puntos diferentes al origen son estables.	43
4.5.1	Regiones donde aparecen los puntos fijos distintos del origen. . .	44
4.5.2	Dinámica cerca de los puntos fijos fuera del origen.	45
4.5.3	Dinámica cerca de los puntos fijos fuera del origen en la región donde se cumple $\varepsilon/\eta \geq -1$	45
4.5.4	Regiones del sistema no lineal.	46
4.6.1	Ejemplo de construcción de la región cuatro para la matriz A . . .	65

4.6.2	Ejemplo de construcción de la región cuatro para la matriz B .	66
4.6.3	Notación de los elementos del grafo.	70
4.6.4	Grafo asociado al espacio de parámetros.	70
5.1.1	Solución numérica del sistema con $\eta = -0.5$, $\varepsilon = 1$, $t_f = 10$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	74
5.1.2	Solución numérica del sistema con $\eta = 1.$, $\varepsilon = 1.$, $t_f = 15$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	77
5.1.3	Solución numérica del sistema con $\eta = -1.25$, $\varepsilon = 1.0$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	79
5.1.4	Solución numérica del sistema con $\eta = -1.25$, $\varepsilon = 1.0$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	81
5.1.5	Solución numérica del sistema con $\eta = -3.5$, $\varepsilon = 3.0$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	84
5.1.6	Solución numérica del sistema con $\eta = -2.14$, $\varepsilon = 2.2$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	86
5.1.7	Solución numérica del sistema con $\eta = 2.5$, $\varepsilon = 5$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	89
5.1.8	Solución numérica del sistema con $\eta = -2$, $\varepsilon = 1.95$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	91
5.1.9	Solución numérica del sistema con $\eta = -2.13$, $\varepsilon = 2.1$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.	93
5.1.10	Solución numérica del sistema con $\eta = -2.5$, $\varepsilon = 1$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, $X_0 = (0.3, -0.05, 0)$.	95

5.2.1	Campo vectorial sobre la variedad central presentada en la curva Γ_1 con $\varepsilon = 3$	110
5.2.2	Integración numérica bajo la condición $\varepsilon = -\eta$, con $\varepsilon = 3$	111
5.2.3	Diagrama Fase de la curva Γ_1 y su variedad central asociada	111
6.1.1	Solución numérica para el sistema de Lorenz con dos condiciones iniciales cercanas.	120
6.1.2	Sensibilidad de las condiciones iniciales $\Phi(t, \mathbf{x}_1)$ y $\Phi(t, \mathbf{x}_2)$ separadas por el vector $\delta(t)$	121
6.1.3	Gráfica $\ln \ \delta(t)\ $ vs t con pendiente λ	122
6.1.4	Fallo en la predicción por el error de medición $\ \delta(0)\ $	124
6.2.1	Gráfica $\ln \left(\frac{\ \delta(t)\ }{\ \delta_0\ } \right)$ con respecto t para el sistema de Rocard	127
6.3.1	órbitade $f(x) = 2x(1 - x)$	129
6.3.2	Se muestra la gráfica algunos elementos de la familia cuadrática $f_a(x) = a - x^2$ antes, durante y después de una bifurcación de silla-nodo.	133
6.3.3	Diagrama de bifurcación de la familia de funciones $f_a(x) = a - x^2$	134
6.3.4	Se muestra la gráfica de la familia cuadrática $f_a(x) = a - x^2$ antes y después de una bifurcación de duplicación de período.	135
6.5.1	Gráfica de la función en el ejemplo 5.1.	149
6.5.2	Gráfica de la partición del ejemplo 5.1.	149
6.5.3	Subgráfica para la partición del lema	151
6.6.1	Discretización de la integración numérica.	168

6.6.2	Representaciones gráficas de las orbitas de los máximos de las integraciones numéricas.	171
6.6.3	Los mapas de bifurcación en el intervalo $\eta \in (-1.34, -0.65)$ para cada una de las tres soluciones numéricas para el sistema de Rocard. 173	
6.6.4	Los mapas de bifurcación en el intervalo $\eta \in (-1.02, -0.97)$ para cada una de las tres soluciones numéricas del sistema de Rocard. 175	
6.7.1	Diagrama fase con parámetros $\eta = -0.97$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$	178
6.7.2	Diagrama fase con parámetros $\eta = -1$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$	179
6.7.3	Diagrama fase con parámetros $\eta = -1.014$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$	179
6.7.4	Diagrama fase con parámetros $\eta = -1.2$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$	180
6.7.5	Diagrama fase con parámetros $\eta = -1.34$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$	181

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Osciladores

1.1.1. Oscilador armónico amortiguado.

Un oscilador armónico con amortiguamiento es un sistema dinámico descrito por una ecuación diferencial que modela el comportamiento de una partícula de masa m sometida a una fuerza restauradora proporcional a su desplazamiento desde la posición de equilibrio, y una fuerza de amortiguamiento proporcional a su velocidad.

La ecuación diferencial que describe un oscilador armónico amortiguado está dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (1.1.1)$$

donde,

- m es la masa de la partícula,
- $x(t)$ es la posición de la partícula en función del tiempo t ,
- c es el coeficiente de amortiguamiento, determinado por la resistencia del medio al movimiento,
- k es la constante del resorte, que representa la fuerza restauradora del sistema.

El término $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ representa la energía cinética de la partícula, $c \frac{dx}{dt}$ modela la

fuerza de amortiguamiento, y kx describe la fuerza restauradora del resorte. La presencia del término de amortiguamiento da cuenta de la disipación de energía a medida que la partícula se mueve, lo que resulta en un decaimiento exponencial de las oscilaciones.

Este modelo se utiliza para describir sistemas físicos donde la resistencia del medio y la fuerza restauradora son factores significativos, como en el caso de amortiguadores de vehículos, sistemas de suspensión, oscilaciones en circuitos eléctricos, entre otros.

Los parámetros m, k, c son considerados positivos; en caso que $c = 0$, se obtiene el oscilador armónico. La ecuación diferencial ordinaria que describe un oscilador con un resorte, se simplifica en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1.2)$$

con $\alpha = c/m$ y $\omega^2 = k/m$. El polinomio característico asociado esta dado por

$$p(r) = r^2 + \alpha r + \omega^2,$$

Las raíces de este polinomio están dadas por,

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Para el caso en que $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$,

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (1.1.3)$$

es la solución general de (1.1.3).

El escenario donde $\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$, da lugar a raíces complejas conjugadas,

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{4\omega^2 - \alpha^2}}{2},$$

y la solución general se expresa, usando la fórmula de Euler, como

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\alpha^2}{4}}t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\alpha^2}{4}}t \right) \right]. \quad (1.1.4)$$

Una expresión de la forma $C_1 \sin(\beta) + C_2 \cos(\beta)$ se puede simplificar, para mostrar que se tiene un movimiento periódico. Por medio de la identidad trigonométrica del coseno de la suma de ángulos,

$$R \sin(\beta + \phi) = R(\sin(\beta) \cos(\phi) + \cos(\beta) \sin(\phi)), \quad (1.1.5)$$

donde las ecuaciones que relacionan C_1 , C_2 , R , y ϕ son las siguientes:

$$R \sin(\phi) = C_1,$$

$$R \cos(\phi) = C_2,$$

al dividir estas ecuaciones,

$$\tan(\phi) = \frac{C_1}{C_2},$$

entonces,

$$\phi = \arctan \left(\frac{C_1}{C_2} \right).$$

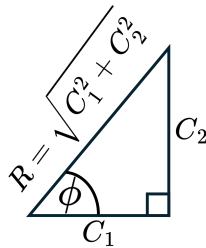


Figura 1.1.1: Triángulo de referencia.

De esta forma al usar (1.1.5), la expresión $C_1 \sin(\beta) + C_2 \cos(\beta)$ se transforma,

$$C_1 \sin(\beta) + C_2 \cos(\beta) = R \sin(\beta + \phi),$$

donde R es la amplitud y ϕ es el ángulo de fase. Entonces la solución general

(1.1.4) se puede escribir en la forma

$$x(t) = Re^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \left(\left[\sqrt{\omega^2 - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] + \phi \right). \quad (1.1.6)$$

Así se obtienen oscilaciones sinusoidales con decrecimientos exponencial, donde $x = 0$ es un punto de equilibrio asintoticamente estable. Esto debido al amortiguamiento debido al medio ambiente.

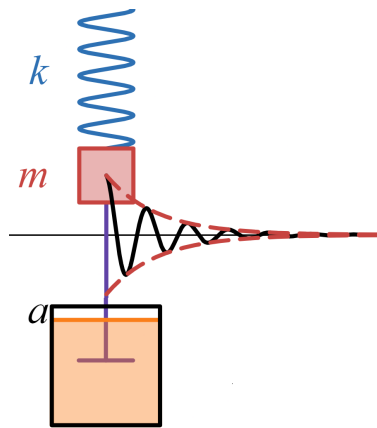


Figura 1.1.2: Respuesta al oscilador armónico amortiguado.

Por otra parte, si asumimos que si la resistencia al medio es $\alpha < 0$, entonces, de la expresión (1.1.6) la solución oscilatoria muestra un crecimiento exponencial,

$$x(t) = Re^{\frac{\alpha}{2}t} \sin \left(\left[\sqrt{\omega^2 - \frac{\alpha^2}{4}} t \right] + \phi \right), \quad (1.1.7)$$

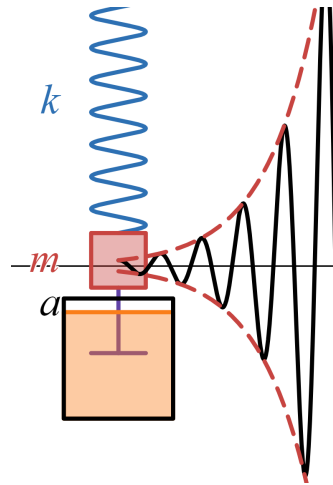


Figura 1.1.3: Respuesta al oscilador armónico amortiguado con resistencia negativa.

Cuando el parámetro $\alpha < 0$ se utiliza en la ecuación diferencial, este modela un comportamiento en el cual, en lugar de que la fricción del medio disipe la energía y detenga el movimiento, la condición negativa implica que se está añadiendo energía al sistema. Esto genera un mecanismo de retroalimentación positiva, que puede dar lugar a oscilaciones crecientes o incluso a comportamientos inestables si no hay otros factores que limiten este aporte de energía.

1.1.2. Oscilador de relajación.

La solución de la ecuación diferencial (1.1.2) desde el punto de vista físico tiene como consecuencia que el resorte se rompa, ya que la amplitud crece exponencialmente.

Para expresar las limitaciones de la amplitud se puede asumir que la resistencia α del medio fuese positiva en valores grandes de x y negativa para valores pequeños, entonces sustituimos α con la expresión $\alpha - 3\gamma x^2$, en la expresión (1.1.2) así se obtiene

$$\ddot{x} - (\alpha - 3\gamma x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1.8)$$

donde α , γ y ω son parámetros positivos, se propone el siguiente cambio de

variables espacial y la reparametrización temporal:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} v, \quad (1.1.9)$$

$$t' = \omega t. \quad (1.1.10)$$

El objetivo es reescribir la ecuación (1.1.8) en términos de la nueva variable v y el nuevo tiempo t' .

Primero, se deriva la relación (1.1.9) respecto al tiempo t , utilizando la regla de la cadena. Hay que observar que v depende de t' y t' depende de t , por lo tanto,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \frac{dv}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt}. \quad (1.1.11)$$

Como $t' = \omega t$, entonces:

$$\frac{dt'}{dt} = \omega. \quad (1.1.12)$$

Por lo que, la primera derivada de x queda expresada como:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega \frac{dv}{dt'} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega v', \quad (1.1.13)$$

donde, de ahora en adelante, la notación $v' = \frac{dv}{dt'}$ denota la derivada de v respecto a la nueva variable de tiempo t' .

De manera análoga, derivando nuevamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} (\dot{x}) = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega \frac{d}{dt} (v') \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega \frac{dv'}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega \frac{dv'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega \frac{dv'}{dt'} \cdot \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega^2 \frac{d^2v}{dt'^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega^2 v''. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Ahora se reescribir cada término de la ecuación (1.1.8), para el primer término,

$$\ddot{x} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega^2 v''.$$

Para el segundo término primero hay que observar que:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} v \implies x^2 = \frac{\alpha}{3\gamma} v^2.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha - 3\gamma x^2 &= \alpha - 3\gamma \left(\frac{\alpha}{3\gamma} v^2 \right) \\ &= \alpha(1 - v^2). \end{aligned}$$

La derivada \dot{x} se ha calculado en (1.1.13), por lo que el segundo término de la ecuación original es:

$$- (\alpha - 3\gamma x^2) \dot{x} = -\alpha(1 - v^2) \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega v'.$$

Para el tercer término:

$$\omega^2 x = \omega^2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} v.$$

Entonces la ecuación (1.1.8) ha sido transformada y se obtiene,

$$\sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega^2 v'' - \alpha(1 - v^2) \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} \omega v' + \omega^2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}} v = 0. \quad (1.1.15)$$

Debe de notarse que todos los términos tienen un factor común $\sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}$, el cual es posible dividir a toda la ecuación, resultando:

$$\omega^2 v'' - \alpha(1 - v^2) \omega v' + \omega^2 v = 0. \quad (1.1.16)$$

Al dividir toda la ecuación entre ω^2 , finalmente se obtiene:

$$v'' - \frac{\alpha}{\omega} (1 - v^2) v' + v = 0, \quad (1.1.17)$$

donde $v' = \frac{dv}{dt'}$ y $v'' = \frac{d^2v}{dt'^2}$. Esta es la forma transformada de la ecuación (1.1.8),

al tomar $\alpha/\omega = \varepsilon$, se obtiene llamado oscilador de relajación no,

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0. \quad (1.1.18)$$

El hecho de que un oscilador esté “cerca” de un oscilador armónico abre varias posibilidades de análisis. Al comparar las ecuaciones (1.1.18) y (1.1.2), se observa que el parámetro α ahora es una función $\alpha(v) = -\varepsilon(1 - v^2)$ que depende directamente de la solución de la ecuación diferencial. Esta función no es una elección arbitraria, ya que presenta las siguientes propiedades:

- Si $|v| < 1$, entonces $\alpha(v) > 0$.
- Si $|v| > 1$, entonces $\alpha(v) < 0$.

Por lo tanto,

1. Para valores $|v| < 1$, la retroalimentación aumenta la amplitud de las oscilaciones, lo que sugiere un comportamiento de amplificación.
2. En cambio, cuando la solución crece y $|v| > 1$, la retroalimentación provoca una disminución en la amplitud de las oscilaciones, introduciendo un efecto de amortiguamiento.

Este comportamiento genera una dinámica que oscila entre las características de un oscilador amortiguado, como se muestra en la figura 1.1.2, y las de un oscilador con resistencia negativa, ilustrado en la figura 1.1.3. Este balance entre amplificación y amortiguamiento define el fenómeno de autoexcitación característico del oscilador de Van der Pol.

1.2. Oscilador de relajación en economía.

Lo referente a esta sección tiene como referencia a [Assous and Carret \(2021\)](#).

Durante el período de entreguerras, se llevaron a cabo investigaciones en el campo de la economía con el propósito de desarrollar un modelo oscilatorio que permitiese variar la frecuencia de las oscilaciones sin afectar la amplitud, el objetivo de crear un modelo es poder considerar las diversas partes que componen el organismo económico; por ejemplo, el precio, número de consumidores y poder de producción. Para de esta forma, comprender cómo regular la dinámica de estas variables.

En 1928, el matemático neerlandés Ludwig Hamburger propuso la utilización de osciladores de relajación. Su interés se centraba en los ciclos económicos, y su objetivo primordial era emplear estos osciladores para transformar la economía en una disciplina científica, siguiendo un enfoque análogo al utilizado en biología en ese entonces.

En la búsqueda de un modelo apropiado, surgió una analogía mecánica que permitió establecer un formalismo matemático, similar al proceso seguido en la física para desarrollar leyes físicas. Hamburger presentó una analogía inspirada en los osciladores de relajación, la cual se traduce en una metáfora mecánica que se asemeja a un tanque que se llena. La dinámica de este tanque depende tanto del volumen del mismo como del flujo de agua que ingresa.

En 1931 el físico neerlandés Balthasar Van der Pol, reconocido por sus contribuciones en el desarrollo de osciladores de relajación, impulsó a Hamburger a publicar su trabajo titulado *Analogie des fluctuations économiques et des oscillations de relaxation* [Hamburger \(1931\)](#) (analogía de las fluctuaciones económicas y de los osciladores de relajación en español), lo que se buscaba crear una convergencia entre los aspectos físicos y económicos.

En su estudio, se evidencia que los osciladores de relajación manifiestan ciclos auto-sostenidos, los cuales, si bien son periódicos, no siguen una forma sinusoidal clásica. La atracción principal radica en la generación irregular de esta periodicidad, preservando la amplitud inalterada. Esta analogía se establece al comparar dicho comportamiento con las dinámicas económicas, resaltando la conexión entre la falta de regularidad en los ciclos y la preservación de la amplitud.

Por otro lado, Van der Pol se plantea la interrogante acerca de si la periodicidad en la vida económica se atribuye más a las cualidades intrínsecas de la economía que a influencias externas. Este planteamiento sugiere la posibilidad de que las fluctuaciones económicas encuentren sus raíces en características inherentes al sistema económico en sí mismo, en lugar de ser resultado exclusivo de fuerzas externas.

Un hallazgo significativo de Hamburger fue la integración de las acciones de mercado con el oscilador de Van der Pol (1.1.18). En este contexto, el parámetro α de la ecuación del oscilador amortiguado (1.1.2), se vincula con los rendimientos de una acción, dando como resultado una representación gráfica que experimenta

variaciones en frecuencia sin afectar de manera significativa la amplitud.

No obstante, existieron tres causas fundamentales que gradualmente motivaron el abandono de la investigación:

1. La presencia de competencia en el ámbito de la generación de teoría económica. En 1933, el economista Jan Tinbergen logró avances significativos en la construcción de modelos económicos dinámicos en mercados específicos, desarrollando múltiples ciclos económicos que evidenciaban una superioridad en la obtención de resultados respecto a los análisis efectuados por Hamburger mediante el empleo de osciladores de relajación.
2. La incapacidad del modelo de oscilador de relajación para captar el colapso económico. Dado que las investigaciones en ciclos económicos se llevaron a cabo tras la Gran Depresión en 1929 y los osciladores de relajación, en el análisis local, exhibían ciclos límite pero no contemplaban la posibilidad de colapso, es decir, en caso de ser correcto el modelo, este carecía de la capacidad de representar el fenómeno del colapso económico, tal como ocurrió durante el desplome en el mercado de valores.
3. La implementación lineal del oscilador de relajación. En 1935, el economista polaco Michal Kalecki desarrolló un modelo lineal de los osciladores de relajación. Sin embargo, antes de la publicación de Kalecki, Ragnar Frisch, un economista noruego que trabajaba con los osciladores de relajación, criticó su enfoque. Aunque el modelo de Kalecki demostró su funcionalidad con datos empíricos, fue posteriormente censurado como “dogma” por el economista estadounidense Paul Samuelson en 1975. Es crucial destacar que en ese período también existían modelos no lineales que fueron ignorados, y la crítica se aplicó de manera generalizada a toda la analogía.

En este contexto, en 1941, el matemático francés Yvis Rocard publicó su libro *Théorie des oscillateurs* Rocard (1941) (Teoría de los osciladores en español), en la cual detalla exhaustivamente los osciladores de relajación y sus aplicaciones en áreas como teoría económica, electricidad y acústica. En el capítulo 5, dedicado a los osciladores en las teorías económicas, Rocard aborda el oscilador propuesto por Kalecki. Este particular tipo de oscilador ya había sido objeto de críticas desde sus inicios por parte de Frisch. Este cuestionamiento inicial por parte de Frisch y posteriormente por Samuelson contribuyó a que el libro no alcanzara una

relevancia significativa en el ámbito económico ni matemático.

En un giro inesperado de eventos en 1951, el físico estadounidense Richard Goodwin conoce al profesor de física aplicada francés Philippe Le Corbeiller en la Universidad de Harvard, reconocido por sus notables contribuciones en la teoría y aplicaciones de sistemas no lineales, entre ellos los auto-osciladores. Este encuentro propicia que Goodwin se adentre en la teoría de los osciladores de relajación.

Con la meta de obtener una explicación detallada de las trayectorias económicas, considerando un movimiento con amplitud constante, Goodwin se embarca en la aplicación de oscilaciones de relajación. Goodwin logra implementar este enfoque en diversas instancias, logrando capturar la asimetría entre los períodos de crecimiento y depreciación económica. Estudiar estas contribuciones quedan fuera del alcance de este trabajo, el propósito es brindar un contexto histórico sobre la aportación de Rocard.

Capítulo 2

Oscilador económico de relajación.

El fenómeno de las oscilaciones económicas ha suscitado el interés de los economistas. Sin embargo, para aquellos comprometidos genuinamente con un enfoque científico, surge el desafío de determinar un modelo que represente los equilibrios de las magnitudes u objetos económicos, como la producción y los precios.

Con este fin, se busca el desarrollo de modelos capaces de representar las oscilaciones entre las variables, similar a lo observado en los osciladores de relajación. El propósito era establecer leyes dinámicas que reconsideraran las variaciones temporales entre los diferentes objetos económicos.

Las relaciones directas que pueden establecerse entre los objetos económicos y las tasas de cambio a lo largo del tiempo tienen el potencial de describir la naturaleza intrínseca de la economía.

En su libro *Teoría de los osciladores*, en el capítulo 5, Rocard presenta una contribución al modelo de Kalecki. Sin embargo, Rocard describe como su propia aportación el comportamiento de la economía mediante un sistema de tres ecuaciones diferenciales, en el cual se plantea únicamente la existencia de órbitas periódicas.

El objetivo central de esta tesis consiste en estudiar las características del sistema de ecuaciones diferenciales propuesto por Rocard y analizar sus implicaciones económicas.

2.1. Modelo económico diferencial.

Las secciones 2.1 y 2.2 tiene como referencia [Rocard \(1941\)](#).

A continuación se presenta el modelo propuesto por Rocard.

Se supone que y representa el precio de un bien, y_1 es el número de consumidores de este bien, o su consumo total, y y_2 es el grado de herramientas, o poder de producción, introducido en la fabricación de este bien y que tiende a reducir su precio.

El incremento por unidad de tiempo del número de consumidores y_1 disminuye si hay una fracción significativa de la población que consume el bien, y también debe disminuir si el precio de y es alto, en relación a un estado de equilibrio,

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + by, \quad (2.1.1)$$

con a positivo, b se supone negativo, a y b son coeficientes que se piden por ejemplo para un análisis estadístico de las correlaciones entre y_1 e y .

Los fabricantes, por el contrario, se ven tentados a aumentar las herramientas dedicadas a esta producción, en función de la cantidad de consumidores para cumplir la demanda existente y el costo de producción del bien,

$$\frac{dy_2}{dt} = k(y + y_1), \quad (2.1.2)$$

Además, un aumento de los medios mecánicos y_2 puestos a disposición de la producción debe dar lugar a una tendencia a la baja del precio, de ahí que la velocidad de reducción de precios, se puede expresar como,

$$m \frac{dy}{dt} = -y_2, \quad (2.1.3)$$

En las ecuaciones (2.1.2) y (2.1.3), k y m son dos nuevos coeficientes por determinar, lo esperado es que ambos tengan el mismo signo. El modelo supone la interacción entre las variables sin tener en cuenta los factores externos o ajenos a esas tres variables.

Finalmente, el modelo basado en las tres leyes económicas (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3),

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + b \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right] y, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k(y + y_1), \quad (2.1.5)$$

$$m \frac{dy}{dt} = -y_2. \quad (2.1.6)$$

Este modelo refleja la idea de que la introducción de herramientas que reducen el precio y la capacidad de los fabricantes para adaptarse a nuevas herramientas en el proceso de producción es clave. Este razonamiento es especialmente relevante en el contexto de productos que compiten entre sí, donde las herramientas utilizadas para su fabricación son iguales o muy similares. Esto refuerza la conexión entre las dinámicas económicas, los costos de producción y las estrategias de competencia en mercados modernos.

La psicología del consumidor interviene y constituye un elemento de inestabilidad ya que en la primera ecuación (2.1.1) que relaciona la variación de consumidores con respecto al precio y la cantidad de consumidores, es donde se puede ver que la variación en el precio de un producto afecta en el interés de los consumidores, lo que implica que b no sea necesariamente negativa, si existe un precio de equilibrio denotado por y_0 donde el vendedor y consumidor están de acuerdo con el precio del bien, entonces se tiene dos casos,

- Si el precio es mayor a y_0 , la cantidad de clientes por unidad de tiempo decrece ya que el producto es más caro.
- Si el precio es menor a y_0 , la cantidad de clientes por unidad de tiempo aumenta ya que el producto es más barato.

Lo que indica que b tiene un comportamiento definido.

- si y es pequeño entonces $b > 0$.
- si y es grande entonces $b < 0$.

En consecuencia se reemplaza b en la ecuación (2.1.1) con,

$$b \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right], \quad (2.1.7)$$

para tomar en cuenta las consecuencias anteriores, de esta forma, las ecuaciones del sistema dejan de ser lineales y su tratamiento se vuelve más difícil. Se tiene el sistema de 3 ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -ay_1 + b \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right] y, \\ \frac{dy_2}{dt} &= k(y + y_1), \\ m \frac{dy}{dt} &= -y_2.\end{aligned}$$

En la sección 2.4 se describirá la forma obtener la ecuación diferencial de tercer orden

$$m \frac{d^3y}{dt^3} + ma \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + k \left[a + b \left(1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right) \right] y = 0.$$

En esta se consideran las sustituciones en los parámetros dadas por

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad a = \varepsilon\omega, \quad b = \eta\omega, \quad y = y_0z, \quad y_0 \neq 0.$$

La relación $\omega^2 = k/m$ genera que k y m deben tener el mismo signo y a y b son múltiplos de ω . Así se obtiene la ecuación no lineal de tercer orden,

$$\frac{d^3z}{dt^3} + \varepsilon\omega \frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 \frac{dz}{dt} + \omega^3 \left[\varepsilon + \eta (1 - z^2) \right] z = 0, \quad (2.1.8)$$

2.2. Justificación del modelo económico.

El modelo económico lineal en la sección anterior se enuncian las variables,

- (i) y = precio del servicio o producto,
- (ii) y_1 = cantidad de clientes o consumo, y
- (iii) y_2 = cantidad de recursos materiales o maquinas (tooling).

Regresando al sistema lineal,

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + by \quad (2.2.1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k(y + y_1) \quad (2.2.2)$$

$$m \frac{dy}{dt} = -y_2 \quad (2.2.3)$$

En este modelo, la primera ecuación es una expresión dinámica de la demanda que incluye parte del concepto de Walras de *encaisse désirée* (es decir, el aumento en el consumo aumentará la demanda de dinero, lo que a su vez aumentará el precio y , por lo tanto, disminuirá el consumo) y la ley clásica de la demanda (la cantidad comprada varía inversamente con el precio).

Si el parámetro a es positivo, este representa la tasa de crecimiento del número de consumidores o la tasa de crecimiento del consumo total; en caso contrario, $a < 0$, el parámetro representa un decrecimiento; si $b < 0$, entonces representa la tasa de crecimiento del precio del producto; en caso contrario $b > 0$ representa un decrecimiento del mismo.

La segunda ecuación, que no es común hoy en día, es una expresión dinámica de la oferta, y $y + y_1$ puede interpretarse como la demanda nominal, y k puede considerarse como la tasa de crecimiento de esta demanda nominal. La tercera ecuación es una expresión dinámica del precio, que depende solo de la oferta.

Al reescribir la tercera ecuación como $dy/dt = -y_2/m$, se observa que m corresponde a la tasa de crecimiento de la parte del capital en el proceso de producción. De hecho, cuando $m < 0$, se tiene una desinversión en el capital físico, y cuando $m > 0$, se tiene una inversión en el capital físico.

Desde un punto de vista del modelado en la primera ecuación se tiene que la variación de clientes depende entre la relación de la oferta y demanda, a mayor precio de oferta (variable y) entonces menor demanda, es decir, clientes (variable y_1). La segunda ecuación modela la variación de los recursos materiales y es proporcional a la cantidad de clientes (variable y_1) dado un precio (variable y). La tercera ecuación modela la variación del precio disminuye si aumentan los recursos disponibles. Además y_0 es el valor de equilibrio del crecimiento o decrecimiento del precio.

2.3. El Modelo lineal como un tipo de modelo compartimental.

Un modelo compartimental en el contexto de sistemas de ecuaciones diferenciales se refiere a una representación matemática de cómo una población se divide en diferentes compartimentos o categorías y los elementos de cada categoría pueden moverse entre los compartimentos a lo largo del tiempo. Estos modelos compartimentales son ampliamente utilizados en epidemiología, biología, ecología y otras disciplinas para analizar y predecir la propagación de enfermedades, la dinámica de poblaciones y otros fenómenos relacionados.

Las transiciones entre los compartimentos por unidad de tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales que determinan la manera cambian las poblaciones en cada compartimento con respecto al tiempo. Estas ecuaciones se basan en tasas de transmisión, recuperación, natalidad, mortalidad u otros factores relevantes.

Los modelos compartimentales permiten comprender cómo evoluciona una población a lo largo del tiempo, cómo se propaga una enfermedad, cómo cambian las proporciones en cada compartimento y cómo diferentes intervenciones pueden afectar la dinámica del sistema.

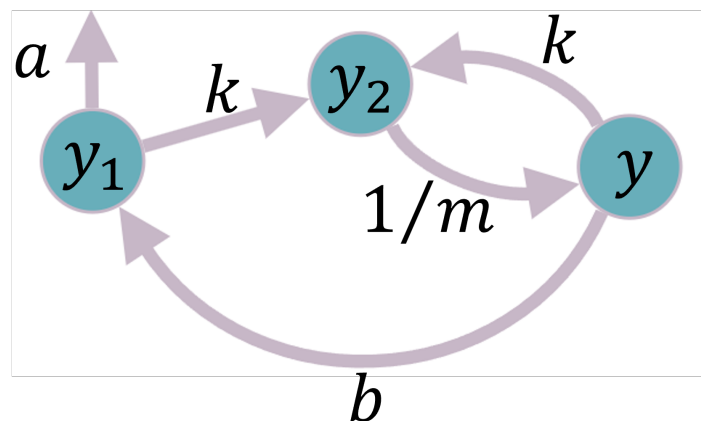


Figura 2.3.1: Modelo compartimental lineal

Para el modelo del sistema considerado los compartimentos están dados, respectivamente por el precio del producto, el número de clientes y la cantidad de recursos materiales, las flechas entre los bloques indican las transiciones o flujos

entre los diferentes compartimentos. Estas flechas representan las tasas de cambio o las transiciones que ocurren en el sistema con el tiempo. Hay que observar que para este modelo,

- La flecha de y_1 a y_2 representa la tasa de crecimiento k con la que el número de clientes se convierte en número de materiales.
- La flecha de y_2 a y representa la tasa de crecimiento $1/m$ con la que el número de materiales se convierte en el precio del producto.
- La flecha de y a y_2 representa la tasa de crecimiento k con la que el precio del producto se convierte en el número de materiales.
- La flecha de y a y_1 representa la tasa de crecimiento b con la que el precio del producto se convierte en el número de clientes.
- La flecha que sale de y_1 representa la tasa de pérdida a con la que el número de clientes disminuye.

2.4. Ecuación de tercer orden equivalente.

En esta sección se reescribirá el sistema de ecuaciones (2.2.1) - (2.2.3) como una ecuación de tercer orden, para ello se toma la tercera ecuación (2.2.3) y se deriva dos veces respecto de t ,

$$m \ddot{y} = -\ddot{y}_2. \quad (2.4.1)$$

Ahora, se deriva respecto de t la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (2.2.2), obteniendo

$$\ddot{y}_2 = k(\dot{y} + \dot{y}_1). \quad (2.4.2)$$

Para sustituir \ddot{y}_2 en la ecuación (2.4.1) y así obtener,

$$m \ddot{y} = -k(\dot{y} + \dot{y}_1). \quad (2.4.3)$$

Se toma la primera ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales (2.2.1) y la segunda ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales (2.2.2), se multiplican

por k y b respectivamente, se restan y se despeja $k\dot{y}_1$,

$$k\dot{y}_1 = -aky_1 + b(\dot{y}_2 - ky_1). \quad (2.4.4)$$

Se toma la segunda ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales (2.2.2), despejar ky y ky_1 , obteniendo

$$\begin{aligned} ky &= \dot{y}_2 - ky_1 \\ ky_1 &= \dot{y}_2 - ky. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Las ecuaciones (2.4.5) se sustituyen en (2.4.4), por lo que,

$$k\dot{y}_1 = -a(\dot{y}_2 - ky) + bky. \quad (2.4.6)$$

Al derivar la tercera ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales (2.2.3),

$$m\ddot{y} = -\dot{y}_2, \quad (2.4.7)$$

y sustituyendo la ecuación (2.4.7) en la ecuación (2.4.6) se obtiene

$$k\dot{y}_1 = am\ddot{y} + ak\dot{y} + bky. \quad (2.4.8)$$

Ahora, la ecuación (2.4.8) se sustituye en la ecuación (2.4.3) y se obtiene la ecuación diferencial lineal de tercer orden homogénea,

$$m\ddot{y} + am\ddot{y} + k\dot{y} + k(a+b)y = 0. \quad (2.4.9)$$

Capítulo 3

Análisis dinámico del modelo lineal

3.1. Análisis dinámico.

Para analizar la dinámica del sistema de ecuaciones diferenciales en base a la variación de los parámetros primero se reduce la cantidad de parámetros mediante cambios de variables en a la ecuación diferencial de tercer orden (2.4.9). Se divide entre m , para introducir las sustituciones,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad a = \varepsilon\omega, \quad b = \eta\omega, \quad y = y_0z, \quad y_0 \neq 0, \quad (3.1.1)$$

Esto, con la motivación de reducir la cantidad de parámetros en medida de lo posible.

Es fundamental destacar que la dependencia de ω^2 conlleva a la necesidad de que las magnitudes de las variables k y m , es decir, la tasa de crecimiento del capital m y la tasa de crecimiento de la demanda nominal k son ambas crecientes o decrecientes, por lo tanto, compartan el mismo signo, con la condición adicional de que m no sea igual a cero, entonces al sustituir las relaciones (3.1.1) en la ecuación diferencial de tercer orden (2.4.9), observemos

$$y_0 \ddot{z} + y_0 \varepsilon \omega \dot{z} + y_0 \omega^2 z + \omega^2 (\varepsilon \omega + \eta \omega) y_0 z = 0,$$

expresión que se simplifica,

$$\ddot{z} + \varepsilon\omega\ddot{z} + \omega^2\dot{z} + \omega^2(\varepsilon\omega + \eta\omega)z = 0.$$

Ahora se reescribe la ecuación de tercer orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello se toma $\dot{z} = x$, al derivar respecto del tiempo se obtiene $\ddot{z} = \dot{x}$ y $\ddot{z} = \ddot{x}$, se toma la ecuación diferencial de tercer orden (2.4.9), entonces se despeja \ddot{z} ,

$$\ddot{z} = -\varepsilon\omega\ddot{z} - \omega^2\dot{z} - \omega^2(\varepsilon\omega + \eta\omega)z,$$

es decir,

$$\ddot{x} = -\varepsilon\omega\ddot{x} - \omega^2x - \omega^2(\varepsilon\omega + \eta\omega)z,$$

Se toma $\dot{y} = \omega(\varepsilon + \eta)z$, con lo que se obtiene:

$$\ddot{x} = -\varepsilon\omega\dot{x} + \omega^2\dot{z} - \omega^2\dot{y}$$

Ahora se realiza una integración respecto t además de factorizar $-\omega$, por lo que,

$$\dot{x} = -\omega(\varepsilon x + \omega y + \omega z).$$

De esta forma genera un sistema dinámico de tres ecuaciones diferenciales de primer orden (3.1.2) a partir del sistema de ecuaciones diferenciales (2.2.1) - (2.2.3),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega(\varepsilon x + \omega y + \omega z) \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(\varepsilon + \eta)z \\ \frac{dz}{dt} &= x \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

En forma matricial, se tiene

$$\dot{X} = AX \tag{3.1.3}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\omega\varepsilon & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & \omega(\varepsilon + \eta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La linealización del sistema de ecuaciones lineales (3.1.2) representada en la matriz A , lo que implica que la estabilidad global del sistema está dada por los vectores propios del polinomio característico asociados a la matriz A y sus correspondientes valores propios.

3.1.1. Polinomio y raíces características.

Se puede observar que el sistema dinámico (3.1.3) es lineal. Claramente $P_1 = (0, 0, 0)$ es único punto fijo. Se calcula el polinomio característico del sistema:

$$\begin{aligned} H_{P_1}(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\omega\varepsilon - \lambda & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & -\lambda & \omega(\varepsilon + \eta) \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\lambda & \omega(\varepsilon + \eta) \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -\omega\varepsilon - \lambda & -\omega^2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\omega^2(\omega)(\varepsilon + \eta) - (-\lambda)(-\omega^2) + (-\lambda)(-\lambda)(-\varepsilon\omega - \lambda) \\ &= -\lambda^3 - \varepsilon\omega\lambda^2 - \omega^2\lambda - \omega^3(\varepsilon + \eta), \end{aligned}$$

de esta forma, polinomio característico asociado al punto de equilibrio P_1 corresponde a

$$H_{P_1}(\lambda) = \lambda^3 + \varepsilon\omega\lambda^2 + \omega^2\lambda + \omega^3(\varepsilon + \eta). \quad (3.1.4)$$

3.1.1.1. Información dinámica a partir del criterio de Routh-Hurwitz.

Se construye la tabla de Routh-Hurwitz (ver anexo A1.1) para encontrar los valores de los parámetros para los cuales el sistema es estable.

La estabilidad del punto fijo esta dada si en su respectiva tabla de Routh-Hurwitz no existen cambios de signo en la primera columna. Dado el cambio de variable (3.1.1), se tiene que el parámetro $\omega > 0$, con lo que se analizan los elementos correspondientes a la primera columna de la tabla (3.1.1).

Tabla de Routh-Hurwitz	
1	ω^2
$\varepsilon\omega$	$\varepsilon\omega^3 + \eta\omega^3$
$-\frac{\eta\omega^2}{\varepsilon}$	0
$\omega^3(\varepsilon + \eta)$	0

Cuadro 3.1.1: Tabla de Routh-Hurwitz para sistema lineal $\dot{X} = AX$.

	Primer elemento	Segundo elemento	Tercer elemento
Condición	$\varepsilon\omega > 0$	$-\frac{\eta\omega^2}{\varepsilon} > 0$	$\omega^3(\varepsilon + \eta) > 0$
Simplificación	$\varepsilon > 0$	$\eta < 0$	$\varepsilon + \eta > 0$

Cuadro 3.1.2: Criterio de Routh-Hurwitz expresiones simplificadas.

Con lo que se obtiene que la linealización en el tiene que el origen es estable cuando se cumplen las condiciones $\varepsilon > 0$, $\eta < 0$ y $\varepsilon + \eta > 0$. A continuación se elaborará un espacio de parámetros bidimensional con los parámetros en la figura (3.1.1).

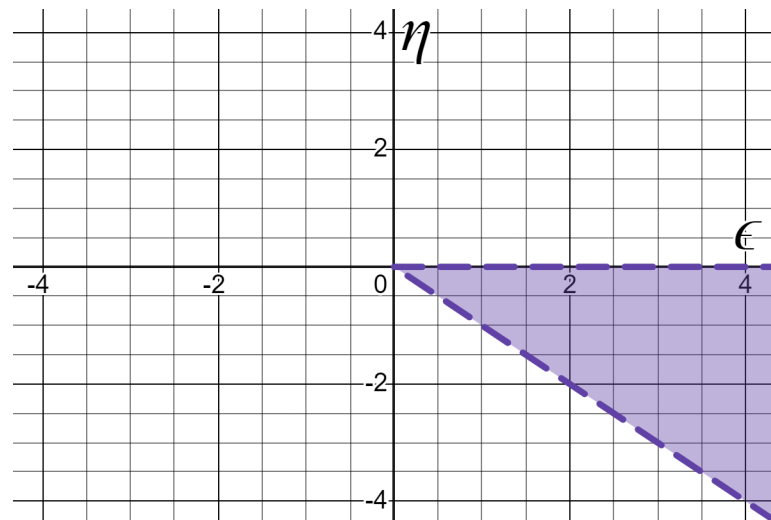


Figura 3.1.1: Región de parámetros ε y η donde la linealización del punto en el origen es estable.

3.1.1.2. Análisis de polinomio característico.

Dado que se tiene un sistema de tercer orden, el polinomio característico resulta de grado 3, por lo que se utiliza la formula de Cardano-Ferrari (ver anexo A2.1).

En el problema principal, se calcula el valor del discriminante Δ del teorema de Cardano-Ferrari en función de los parámetros, es decir, el discriminante $\hat{\Delta}_1(\varepsilon, \eta, \omega)$

para el polinomio H_{P_1} (3.1.4). Primero, se determina el valor de p para este primer polinomio, usamos la notación p_1 para distinguirlo,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3\omega^2 - (\varepsilon\omega)^2}{3} \\ &= \omega^2 \left(\frac{3 - \varepsilon^2}{3} \right), \end{aligned}$$

ahora se calculan el valor de q , con la notación q_1 ,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2(\varepsilon\omega)^3 - 9(\varepsilon\omega)\omega^2 + 27(\omega^3(\varepsilon + \eta))}{27} \\ &= \frac{\omega^3}{27}(2\varepsilon^3 - 9\varepsilon + 27\varepsilon + 27\eta) \\ &= \frac{\omega^3}{27}(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta), \end{aligned}$$

por lo tanto, el valor de $\hat{\Delta}_1(\varepsilon, \eta, \omega)$ está dado por,

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_1(\varepsilon, \eta, \omega) &= \left(\frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p_1}{3} \right)^2, \\ &= \left(\frac{\omega^3}{2(27)}(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta) \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{3} \left(\frac{3 - \varepsilon^2}{3} \right) \right)^3, \\ &= \frac{\omega^6}{2^2(27)^2}(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta)^2 + \frac{\omega^6}{3^3} \left(\frac{3 - \varepsilon^2}{3} \right)^3, \\ &= \frac{\omega^6}{2^2 \cdot 3^6}(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta)^2 + \frac{\omega^6}{3^6} (3 - \varepsilon^2)^3, \end{aligned}$$

donde se busca donde el valor de cambia de signo con la motivación de encontrar las condiciones del teorema para determinar el tipo de solución de solución a la ecuación de tercer grado (ver anexo A2.2). Por lo tanto,

$$\frac{1}{4}(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3 = 0,$$

se puede observar que para $\omega = 0$, el polinomio característico H_{P_1} (3.1.4) se reduce a $H_{P_1}(\lambda) = \lambda^3$, cuyas raíces son idénticas e iguales a cero. Por otro lado, para $\omega \neq 0$ se tiene la expresión

$$\Delta_1(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} \left(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta \right)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3, \quad (3.1.5)$$

Para simplificar la notación, se denota $\Delta_1(\varepsilon, \eta) = \Delta_1$, observando que este discriminante no depende del valor de ω . Esto implica que el parámetro ω no influye en la determinación del tipo de raíces del polinomio característico H_{P_1} . En otras palabras, aunque ω afecta la escala de la dinámica del sistema de ecuaciones diferenciales, no altera la naturaleza cualitativa del comportamiento del sistema, la cual está determinada por los tipos de raíces que surgen como soluciones de la ecuación cúbica asociada.

Se puede observar que la expresión (3.1.5) es una expresión implícita que involucra la combinación de los parámetros η y ε , es posible obtener una expresión explícita al despejar el parámetro η , para Δ_1 . De la ecuación

$$\frac{1}{4}(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3 = 0.$$

Se tiene que,

$$(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta)^2 = -4(3 - \varepsilon^2)^3,$$

es decir,

$$2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta = \pm\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}.$$

En resumen,

$$\eta = \frac{2}{27} \left(-\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) \pm \sqrt{(\varepsilon^2 - 3)^3} \right). \quad (3.1.6)$$

Con lo que obtiene una expresión $\eta_1(\varepsilon)$ para el parámetro η en términos de ε ,

$$\eta_1(\varepsilon) = \frac{2}{27} \left(-\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) \pm \sqrt{(\varepsilon^2 - 3)^3} \right). \quad (3.1.7)$$

Dada la raíz cuadrada en la expresión (3.1.7), existe un intervalo de valores de ε donde se obtienen valores complejos para $\eta_1(\varepsilon)$, los cuales no son de nuestro interés. Estos están dados por aquellos ε tales que

$$(\varepsilon^2 - 3)^3 < 0, \quad (3.1.8)$$

es decir,

$$\varepsilon^2 - 3 < 0, \quad (3.1.9)$$

y

$$|\varepsilon| < \sqrt{3}. \quad (3.1.10)$$

Ahora, se busca determinar el valor del valor de Δ_1 en la región $|\varepsilon| < \sqrt{3}$, es decir, si se tiene un $\varepsilon' \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ que signo tiene la expresión $\Delta_1(\varepsilon', \eta)$,

$$\Delta_1(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} \underbrace{(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta)^2}_{\text{Siempre positivo}} + (3 - \varepsilon^2)^3$$

Donde ε está acotado por $|\varepsilon| < \sqrt{3}$ entonces $3 - \varepsilon^2$ siempre es positivo, por lo tanto, en la región $|\varepsilon| < \sqrt{3}$ el valor de $\Delta_1(\varepsilon, \eta) > 0$, es decir, por el teorema A2.2, se tiene dos raíces son complejas conjugadas y una real.

Dado el teorema A2.2 se encuentra los valores donde el valor de $\Delta_1(\varepsilon, \eta) = 0$ con la condición de que $p = q = 0$, entonces para $p_1 = 0$ se calcula el valor de ε_1 correspondiente,

$$3 - \varepsilon_1^2 = 0$$

de donde,

$$-\varepsilon_1^2 = -3,$$

de esta forma,

$$\varepsilon_1 = \pm\sqrt{3}. \quad (3.1.11)$$

Para $q_1 = 0$ se calcula el valor de η_1 ,

$$2\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 + 9) + 27\eta_1 = 0,$$

así,

$$27\eta_1 = -2\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 + 9),$$

finalmente,

$$\eta_1 = \frac{1}{27} (-2\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 + 9)). \quad (3.1.12)$$

se tiene que con el valor de $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{27} (-2(\pm\sqrt{3})((\pm\sqrt{3})^2 + 9)) \\ &= \frac{1}{27} (\mp 2\sqrt{3}(3 + 9)) \\ &= \mp \frac{24}{27}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Así,

$$\eta_1(\pm\sqrt{3}) = \mp\frac{8}{9}\sqrt{3}. \quad (3.1.13)$$

A partir del Teorema de Cardano-Ferrari es posible elaborar un espacio de parámetros bidimensional para estudiar el comportamiento de las raíces del polinomio característico del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Dicho comportamiento brinda información local del punto de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales. Ahora hay que identificar estos puntos $(\pm\sqrt{3} \mp \frac{8}{9}\sqrt{3})$ en el espacio de parámetros.

Hay que observar que en los puntos $\eta_1^+ = (\sqrt{3}, -8/9\sqrt{3})$ y $\eta_1^- = (-\sqrt{3}, 8/9\sqrt{3})$ se tiene que el determinante es nulo $\Delta_1(\pm\sqrt{3}, \mp\frac{8}{9}\sqrt{3}) = 0$. Por el teorema de Cardano-Ferrari para el discriminante (ver anexo A2.2), se tienen una raíz triple con valor $\lambda = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}\omega$.

Para la condición $\Delta_1 = 0$, con $pq \neq 0$, se debe cumplir $\varepsilon > \sqrt{3}$, donde se tiene una raíz doble y una raíz simple, las cuales están dadas en la tabla 3.1.3 y se calculan haciendo uso del teorema A2.2,

Tipo de raíz	$\Delta_1 = 0, p_1q_1 \neq 0$
Raíz doble	$-\frac{3q_1}{2p_1} + \frac{\varepsilon\omega}{3}$
Raíz simple	$-\frac{4p_1^2}{9q_1} + \frac{\varepsilon\omega}{3}$

Cuadro 3.1.3: Raíces para el polinomio (3.1.4) con la condición $p_1q_1 \neq 0$

Hay que observar que la expresión Δ_1 (3.1.5) depende únicamente de dos parámetros η y ε , entonces la variación de estos parámetros generan condiciones distintas para Δ_1 . Por el teorema de Cardano-Ferrari del discriminante, se tienen tres posibilidades para las raíces del polinomio característico (3.1.4), es decir, tres tipos de comportamientos globales en el sistema dinámico alrededor del punto fijo, dicho comportamiento se puede visualizar en un mapa bidimensional en el plano

(η, ε) . De esta forma las raíces del polinomio característico tiene tres posibilidades de acuerdo al signo de Δ_1 . Esto se determina tres regiones dicho plano,

Proposición 3.1.1. *Sea el determinante $\Delta_1(\varepsilon, \eta)$ se puede determinar tres regiones en el plano bidimensional (η, ε) .*

- *Cuando $\Delta(\varepsilon, \eta) > 0$, dos raíces son complejas conjugadas y una raíz es real, región color verde.*
- *En caso de que $\Delta(\varepsilon, \eta) = 0$, todas las raíces son reales y al menos dos de ellas son iguales, curva color naranja.*
- *Si $\Delta(\varepsilon, \eta) < 0$, todas las raíces son reales distintas, región color amarillo.*

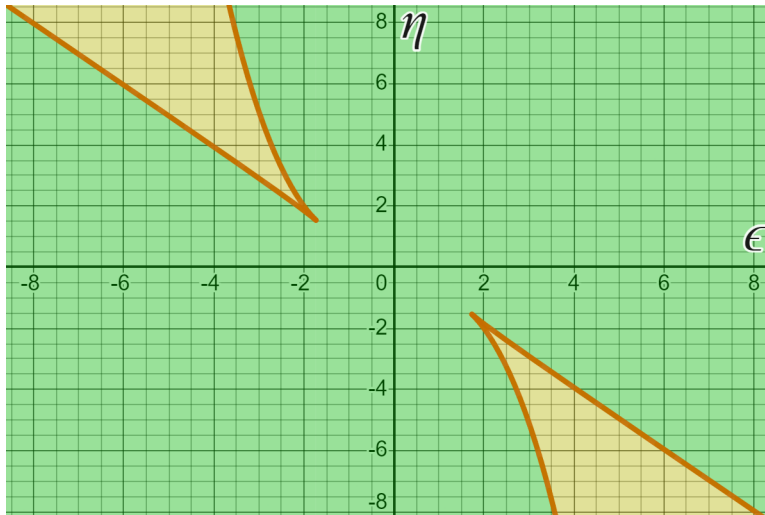


Figura 3.1.2: Dinámica cerca del punto fijo en el origen.

3.1.2. Dinámica de los puntos de equilibrio.

La construcción de un mapa que guarde toda la información sobre posibles comportamientos dinámicos en el sistema de ecuaciones (3.1.2) es vital para comprender el comportamientos del sistema de interés.

Para el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (3.1.2), se obtiene la expresión de Δ_1 , donde se observa que el parámetro ω no influye en la determinación de la combinación de posibles raíces del polinomio característico (3.1.4). Esto implica que, aunque ω afecte la escala de Δ_1 , no modifica la dinámica de los puntos fijos.

A continuación, se construye un mapa bidimensional que muestra la información sobre las raíces del polinomio característico en función de los parámetros (ε, η) .

Este mapa se obtiene a partir de la expresión de Δ_1 en (3.1.5), la cual permite analizar la dinámica global alrededor de los puntos fijos. Para esto, se utiliza la figura (3.1.2) y el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz presentado en la tabla (3.1.1), con el fin de evaluar la estabilidad de las soluciones en función de los valores de los parámetros.

Para un estudio más visual, hay que determinar regiones distintas, que están delimitadas analíticamente por el signo de la expresión Δ_1 y por las simplificaciones del criterio de Routh-Hurwitz de la tabla (3.1.2).

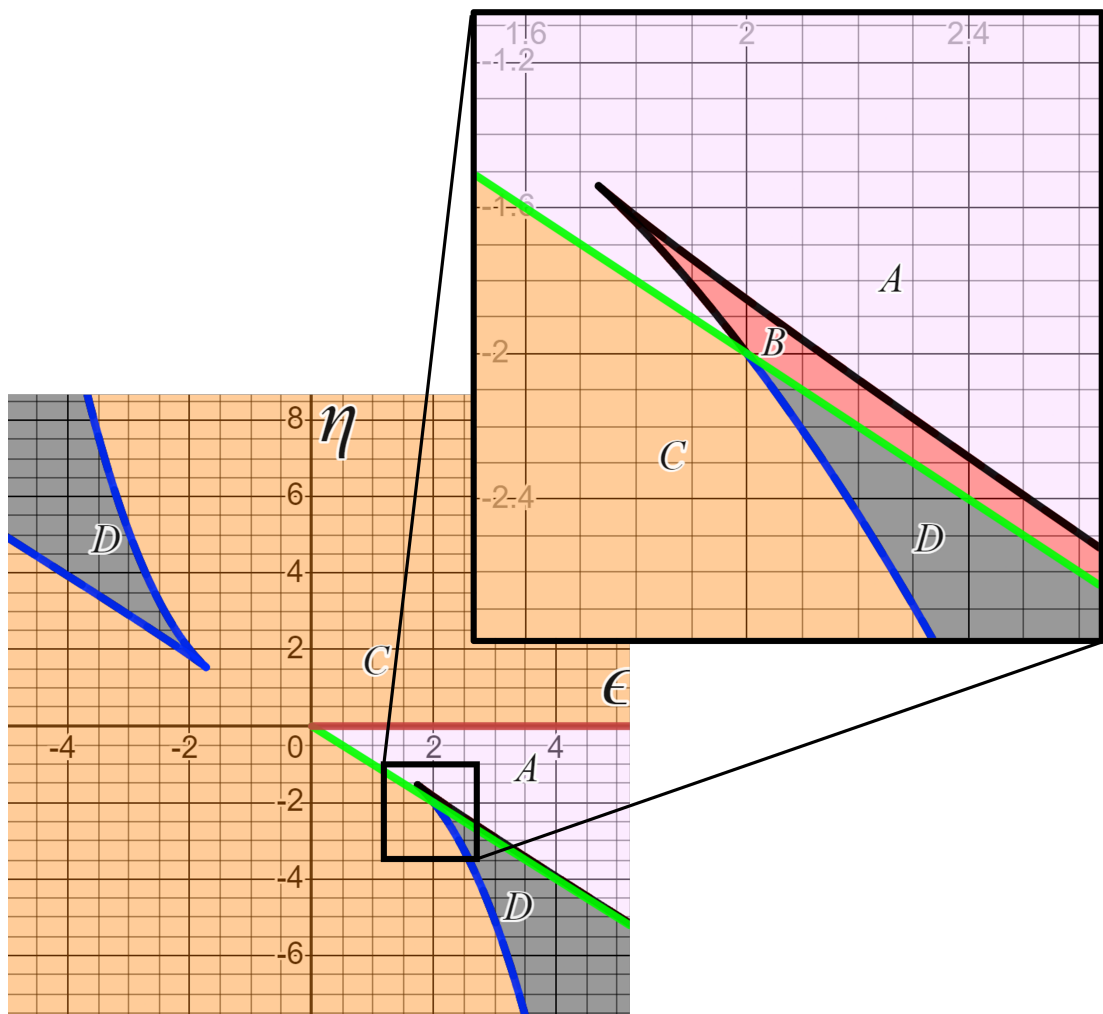


Figura 3.1.3: Regiones de comportamiento del sistema lineal.

De esta forma se obtienen cuatro regiones que se describen a continuación,

- Para $\Delta_1 > 0$, se tiene una raíz real y dos raíces complejas, donde el criterio de Routh-Hurwitz genera dos regiones,
 - Región A: Se cumple $\varepsilon + \eta > 0$ y $\eta < 0$; en esta región se tienen tres raíces con parte real negativa; por lo que, el sistema es estable.
 - Región C: Se cumple $\eta > 0$ o simultáneamente $\varepsilon + \eta < 0$ y $\eta < 0$; es decir, que no se cumple el criterio de estabilidad de Routh, Se tiene al menos una raíz con parte real positiva, por lo tanto, el sistema es inestable.
- Para $\Delta_1 < 0$, se tiene tres raíces simples, donde el criterio de Routh-Hurwitz genera dos regiones,
 - Región B: En esta región se satisfacen las desigualdades $\varepsilon + \eta > 0$ y $\eta < 0$; es decir, se cumple se cumple el criterio de estabilidad de Routh. Por lo que se tienen tres raíces con parte real negativa, es decir, el sistema es estable.
 - Región D: Se cumple la desigualdad $\eta > 0$ o simultáneamente las desigualdes $\varepsilon + \eta < 0$ y $\eta < 0$, es decir, no se cumple el criterio de estabilidad de Routh, de esta forma, se tiene al menos una raíz positiva, es decir, el sistema es inestable.

Además, hay 4 curvas que se describen a continuación y delimitan las región recién descritas.

- La curva generada por la igualdad $\Delta_1 = 0$: sobre los puntos de esta curvas todas las raíces son reales y al menos dos de ellas son iguales. El criterio de Routh-Hurwitz genera dos curvas en ella.
 1. Al conjunto determinado por las restricción $\varepsilon + \eta > 0$ y $\eta < 0$ se le denota \mathcal{C}_1 , el cual se encuentra dentro de la región de estabilidad del criterio de Routh; por lo tanto, las tres raíces son son negativas, es decir, el punto de equilibrio es estable, por lo tanto, el sistema es estable (curva color negro en la figura 3.1.3).
 2. Ahora, bajo las restricción $\eta > 0$ o simultáneamente $\varepsilon + \eta < 0$ y $\eta < 0$, se tiene un conjunto que denotamos \mathcal{C}_2 , este se encuentra fuera de la

región de estabilidad, uno de los tres valores propios es positivo, es decir, el punto de equilibrio es inestable, por lo tanto, el sistema es inestable (curva azul en la figura 3.1.3).

- La curva generada por $\varepsilon + \eta = 0$:
 3. Bajo la restricción de $\eta < 0$ se tiene el conjunto que denotamos por \mathcal{C}_3 . En este se observa la transición de región estable a inestable (curva color verde en la figura 3.1.3).
- La curva que es generada por $\eta = 0$:
 4. Bajo la restricción de $\varepsilon > 0$ a este conjunto se le denota \mathcal{C}_4 , donde se observa la transición de región estable a inestable (curva rojo en la figura 3.1.3).

Hay 4 puntos puntos destacables en el diagrama:

1. El origen $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$, en este caso en que se reduce el polinomio característico a la expresión $\lambda^3 + \omega^2\lambda = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)$, entonces se tiene las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$, es decir, una raíz nula y dos raíces complejas puras. Este punto genera las condiciones necesarias para la posible aparición de una bifurcación de tipo fold-Hopf.
2. El punto $(\varepsilon, \eta) = (\sqrt{3}, -\frac{8}{9}\sqrt{3})$, límite de condición para $\eta_1(\varepsilon)$, como se muestra en (3.1.13), es el valor para la condición $p_1 = q_1 = 0$ con lo que se generan tres raíces idénticas negativas; por lo tanto, el sistema es estable ya que cumple con las condiciones del criterio de Routh-Hurwitz 3.1.2.
3. El punto $(\varepsilon, \eta) = (-\sqrt{3}, \frac{8}{9}\sqrt{3})$, límite de condición para $\eta_1(\varepsilon)$, como se muestra en (3.1.13), es el valor para la condición $p_1 = q_1 = 0$ con lo que se generan tres raíces idénticas inestables porque no cumple con el criterio de Routh-Hurwitz.
4. El punto $(\varepsilon, \eta) = (2, -2)$, en este caso que se reduce el polinomio característico a la expresión $\lambda^3 + 2\omega^2\lambda^2 + \omega^2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\omega^2\lambda + \omega^2) = \lambda(\lambda + \omega)^2$; entonces se tiene las raíces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = -\omega$. Al tratarse de un sistema lineal y con la aparición de un $\lambda_1 = 0$ muestra que las soluciones son perpendiculares al vector propio asociado a λ_1 .

Finalmente se construye una tabla con las condiciones que se cumplen en cada

región, en ella se usan los siguiente símbolos, los cuales denotan:

- ✓ se cumple la condición.
- × se niega la condición.
- – no se considera la condición, ya que se consideran las mínimas condiciones.

Hay conjuntos que toman más de una fila, esto denota que la unión de los conjuntos que forman cada fila son las que definen al conjunto.

Conjuntos	Condiciones					
	$\Delta_1 > 0$	$\Delta_1 = 0$	$\eta + \varepsilon > 0$	$\eta < 0$	$\eta = 0$	$\eta + \varepsilon = 0$
Región A	✓	×	✓	✓	–	–
Región B	×	×	✓	✓	–	–
Región C	✓	×	×	✓	–	–
	✓	×	–	×	–	–
Región D	×	×	×	✓	–	–
	×	×	–	×	–	–
\mathcal{C}_1	–	✓	✓	✓	–	–
\mathcal{C}_2	–	✓	×	✓	–	–
	–	✓	–	×	–	–
\mathcal{C}_3	–	–	–	✓	–	✓
\mathcal{C}_4	–	–	✓	–	✓	–

Cuadro 3.1.4: Resumen de conjuntos bajo las condiciones de parámetros η y ε

Capítulo 4

Análisis dinámico del modelo no lineal.

En el capítulo cuatro, se justifica reemplazar el término lineal by en la primera ecuación de Rocard (2.2.1) por el término $b\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)y$, lo que introduce una no linealidad en el sistema,

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + b\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)y, \quad (4.0.1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k(y + y_1), \quad (4.0.2)$$

$$m\frac{dy}{dt} = -y_2. \quad (4.0.3)$$

Este cambio transforma el sistema original en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, permitiendo capturar dinámicas más complejas y comportamientos no lineales que no podrían ser descritos adecuadamente mediante el modelo lineal original.

De manera análoga al capítulo anterior, al realizar la sustitución mencionada, la ecuación diferencial de tercer orden equivalente se deduce aplicando los pasos correspondientes. Con esta modificación, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de tercer orden,

$$m\ddot{y} + am\ddot{y} + k\dot{y} + k\left[a + b\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\right]y = 0. \quad (4.0.4)$$

A la ecuación diferencial de tercer orden (4.0.4), se divide entre m con el objetivo de simplificar los coeficientes. Posteriormente, se introducen las siguientes sustituciones:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad a = \varepsilon\omega, \quad b = \eta\omega, \quad y = y_0z, \quad y_0 \neq 0,$$

Con estas sustituciones, la ecuación resultante adquiere la forma adimensionalizada, lo que facilita el análisis de su dinámica. La ecuación diferencial transformada es:

$$y_0 \ddot{z} + y_0 \varepsilon \omega \dot{z} + y_0 \omega^2 z + \omega^2 [\varepsilon \omega + \eta \omega] y_0 z = 0,$$

Esta forma simplificada permite explorar las propiedades cualitativas del sistema y realizar simulaciones numéricas con parámetros más manejables,

$$\ddot{z} + \varepsilon \omega \dot{z} + \omega^2 z + \omega^3 [\varepsilon + \eta (1 - z^2)] z = 0. \quad (4.0.5)$$

A la ecuación de tercer orden (4.0.5) se modifica nuevamente con el propósito de obtener una solución con comportamiento de oscilador donde su frecuencia dependa más en la amplitud. Para ello, se considera la sustitución $1 - z^2$ por la expresión $1 - z^2 - \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}$,

$$\ddot{z} + \varepsilon \omega \dot{z} + \omega^2 z + \omega^3 \left[\varepsilon + \eta \left(1 - z^2 - \frac{\dot{z}^2}{\omega^2} \right) \right] z = 0. \quad (4.0.6)$$

Para reescribir la ecuación de tercer orden (4.0.6) como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se despeja \dot{z}

$$\dot{z} = -\varepsilon \omega \dot{z} + \omega^2 z - \omega^3 \left[\varepsilon + \eta \left(1 - z^2 - \frac{\dot{z}^2}{\omega^2} \right) \right] z,$$

se introducen las siguientes sustituciones,

$$z = x, \quad \dot{z} = \dot{x}, \quad \ddot{z} = \ddot{x}, \quad \dot{\dot{z}} = \dot{\ddot{x}}.$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación diferencial de tercer orden (4.0.6) se

obtiene,

$$\ddot{x} = -\varepsilon\omega\dot{x} + \omega^2\dot{z} - \omega^3 \left[\varepsilon + \eta \left(1 - z^2 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \right] z.$$

Ahora se toma $\dot{y} = \omega \left[\varepsilon + \eta \left(1 - z^2 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \right] z$, con lo que se obtiene

$$\ddot{x} = -\varepsilon\omega\dot{x} + \omega^2\dot{z} - \omega^2\dot{y}.$$

Se integra respecto t y se factoriza $-\omega$,

$$\dot{x} = -\omega(\varepsilon x + \omega y + \omega z) + c_1,$$

La constante c_1 resulta de la integración respecto del tiempo, esta constante desplaza la solución, es decir, el comportamiento c_1 unidades en la variable x , para simplificar se puede tomar $c_1 = 0$.

Con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones de primer orden no lineal de Rocard [Rocard \(1941\)](#) el nuevo sistema dinámico de Rocard se define por el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega(\varepsilon x + \omega y + \omega z), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega \left[\varepsilon + \eta \left(1 - z^2 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \right] z, \\ \frac{dz}{dt} &= x, \end{aligned} \tag{4.0.7}$$

4.1. Puntos de equilibrio

Ahora se calculan los puntos de equilibrio que presenta el sistema de ecuaciones diferenciales (4.0.7), son tales que,

$$-\omega(\varepsilon x + \omega y + \omega z) = 0, \tag{4.1.1}$$

$$\omega \left[\varepsilon + \eta \left(1 - z^2 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \right] z = 0, \tag{4.1.2}$$

$$x = 0. \tag{4.1.3}$$

Para calcular los punto de equilibrio se sustituye (4.1.3) en (4.1.1) y (4.1.2),

además $\omega, z \neq 0$ con lo que se obtienen las relaciones,

$$y = -z, \quad (4.1.4)$$

$$\eta(1 - z^2) = -\varepsilon. \quad (4.1.5)$$

De la expresión (4.1.5),

$$z = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\eta}} \quad (4.1.6)$$

Todos los puntos de equilibrio se encuentran sobre los planos plano $x = 0$ y $z = -y$. Entonces los puntos de equilibrios están dados por,

$$P_1 = (0, 0, 0), \quad (4.1.7)$$

$$P_2 = \left(0, \sqrt{\frac{\eta + \varepsilon}{\eta}}, -\sqrt{\frac{\eta + \varepsilon}{\eta}}\right), \quad (4.1.8)$$

$$P_3 = \left(0, -\sqrt{\frac{\eta + \varepsilon}{\eta}}, \sqrt{\frac{\eta + \varepsilon}{\eta}}\right). \quad (4.1.9)$$

Los puntos de equilibrios distintos del origen P_2 y P_3 deben de cumplir que la coordenada z (4.1.6) sea un valor real,

$$1 + \frac{\varepsilon}{\eta} \geq 0,$$

es decir,

$$\frac{\varepsilon}{\eta} \geq -1. \quad (4.1.10)$$

4.2. Linealización en puntos de equilibrio

Ahora se obtendrá el comportamiento local alrededor de los puntos de equilibrio, para ello se obtiene una linealización del sistema de ecuaciones (4.0.7), para ello se calcula la matriz Jacobiana del sistema de dinámico,

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\varepsilon & -\omega^2 & -\omega^2 \\ -2\frac{\eta}{\omega}xz & 0 & -\frac{\eta}{\omega}x^2 + \omega(\varepsilon + \eta - 3\eta z^2) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Se calcula la estabilidad en el punto de equilibrio $P_1 = (0, 0, 0)$, para ello se evalúa la matriz Jacobiana (4.2.1) en el punto de equilibrio P_1 entonces se obtiene,

$$DF(P_1) = \begin{pmatrix} -\omega\varepsilon & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & \omega(\varepsilon + \eta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Esta matriz corresponde a la misma matriz del sistema de ecuaciones lineales (3.1.3), y el polinomio característico corresponde con,

$$H_{P_1}(\lambda) = \lambda^3 + \varepsilon\omega\lambda^2 + \omega^2\lambda + \omega^3(\varepsilon + \eta),$$

el polinomio característico coincide con la ecuación (3.1.4).

El polinomio característico que corresponde con los puntos P_2 y P_3 es idéntico dado que la matriz Jacobiana DF en la relación (4.2.1) no depende la componente y y la componente z se eleva al cuadrado, entonces,

$$DF(P_2) = DF(P_3) = \begin{bmatrix} -\omega\varepsilon & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & -2\omega(\varepsilon + \eta) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Se calcula el polinomio característico de la matriz Jacobiana evaluada en P_2 y P_3 :

$$\begin{aligned} H_{P_{2,3}}(\lambda) &= |DF(P_2) - \lambda I| = |DF(P_3) - \lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} -\omega\varepsilon - \lambda & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & -\lambda & -2\omega(\varepsilon + \eta) \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\lambda & -2\omega(\varepsilon + \eta) \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -\omega\varepsilon - \lambda & -\omega^2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\omega^2(-2\omega(\varepsilon + \eta)) - (-\lambda)(-\omega^2) + (-\lambda)(-\lambda)(-\varepsilon\omega - \lambda) \\ &= -\lambda^3 - \varepsilon\omega\lambda^2 - \omega^2\lambda + 2\omega^3(\varepsilon + \eta) \end{aligned}$$

En resumen, el polinomio característico en los puntos de equilibrio P_2 y P_3 está

dado por,

$$H_{P_2}(\lambda) = H_{P_3}(\lambda) = \lambda^3 + \varepsilon\omega\lambda^2 + \omega^2\lambda - 2\omega^3(\varepsilon + \eta) \quad (4.2.4)$$

4.3. Análisis de polinomios característicos

Dado que el polinomio característico de la linealización del origen es igual que el polinomio característico del sistema lineal (3.1.2), entonces se obtiene el mismo análisis ya realizado en el capítulo anterior para el comportamiento local alrededor del origen.

Las condiciones de estabilidad dadas por el criterio de Routh son,

	Primer elemento	Segundo elemento	Tercer elemento
Condición	$\varepsilon\omega > 0$	$-\frac{\eta\omega^2}{\varepsilon} > 0$	$\omega^3(\varepsilon + \eta) > 0$
Simplificación	$\varepsilon > 0$	$\eta < 0$	$\varepsilon + \eta > 0$

Cuadro 4.3.1: Criterio de Routh-Hurwitz expresiones simplificadas.

El discriminante asociado del polinomio característico asociado al origen corresponde con,

$$\Delta_1(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} \left(2\varepsilon(\varepsilon^2 + 9) + 27\eta \right)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3.$$

Para calcular el valor de $\hat{\Delta}_2(\varepsilon, \eta, \omega)$ para el polinomio H_{P_2} , primero se calcula el valor de p_2 ,

$$p_2 = \frac{3\omega^2 - (\varepsilon\omega)^2}{3} = \omega^2 \left(\frac{3 - \varepsilon^2}{3} \right),$$

también se calcula el valor de q_2 ,

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{2(\varepsilon\omega)^3 - 9(\varepsilon\omega)\omega^2 + 27(-2\omega^3(\varepsilon + \eta))}{27}, \\ &= \frac{\omega^3}{27} (2\varepsilon^3 - 9\varepsilon - 54\varepsilon - 54\eta), \\ &= \frac{\omega^3}{27} (\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta), \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_2(\varepsilon, \eta, \omega) &= \left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{3}\right)^2, \\ &= \frac{\omega^6}{4 \cdot 3^6} (\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta)^2 + \frac{\omega^6}{3^6} (3 - \varepsilon^2)^3,\end{aligned}$$

donde lo que se busca es donde el valor de cambia de signo con la motivación de encontrar las condiciones del teorema A2.2, por lo tanto,

$$\frac{1}{4} (\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3 = 0.$$

Donde $\omega \neq 0$ se obtiene la expresión siguiente,

$$\Delta_2(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} (\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3. \quad (4.3.1)$$

Por simplicidad $\Delta_2(\varepsilon, \eta) = \Delta_2$, observemos que la dinámica cualitativa local del sistema no depende del valor de ω , la dinámica local alrededor de los puntos de equilibrio del sistema no depende de parámetro ω pues $\omega > 0$.

El discriminante (3.1.5) es una expresión que depende de los parámetros η y ε , ahora se obtiene una expresión dos posibles expresiones para el parámetro η ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} (\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3 &= 0, \\ \varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta &= \pm \sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3} \\ \eta &= -\frac{1}{54} \left(-\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) \pm 2\sqrt{(\varepsilon^2 - 3)^3} \right),\end{aligned}$$

Se tiene dos posibles expresiones para η en términos de ε .

$$\eta_2(\varepsilon) = -\frac{1}{54} \left(-\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) \pm 2\sqrt{(\varepsilon^2 - 3)^3} \right). \quad (4.3.2)$$

Dada la raíz cuadrada en la expresión (4.3.2), se debe encontrar el intervalo de

valores de ε donde está definida la expresión $\eta_2(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}(\varepsilon^2 - 3)^3 &> 0, \\ \varepsilon^2 - 3 &> 0, \\ \varepsilon^2 &> 3, \\ |\varepsilon| &> \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ahora busca determinar el valor del discriminante Δ_2 en la región $|\varepsilon| < \sqrt{3}$, para el valor de Δ_2 (4.3.1),

$$\Delta_2(\varepsilon, \eta) = \underbrace{\frac{1}{4} (\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54\eta)^2}_{\text{Siempre positivo}} + (3 - \varepsilon^2)^3.$$

En la región $|\varepsilon| < \sqrt{3}$ el valor del discriminante $\Delta_2(\varepsilon, \eta) > 0$, es decir, por el teorema (A2.2), se tiene dos raíces son complejas conjugadas y una real.

Los valores donde se cumple $\Delta_2(\varepsilon, \eta) = 0$ con la condición de que $p = q = 0$, para p_2 el análisis es el mismo que para p_1 dado que $p_1 = p_2$, en estos casos se tiene que $\varepsilon_2 = \pm\sqrt{3}$. Para q_2 se obtiene $\varepsilon_2 = \pm\sqrt{3}$, con lo que se calcula η_2 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(2\varepsilon_2^2 - 63) - 54\eta_2 &= 0, \\ -54\eta_2 &= -\varepsilon_2(2\varepsilon_2^2 - 63),\end{aligned}$$

se sustituye el valor $\varepsilon_2 = \pm\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\eta_2 &= -\frac{1}{54} \left(-(\pm\sqrt{3})(2(\pm\sqrt{3})^2 - 63) \right), \\ \eta_2 &= -\frac{1}{54} \left(\mp\sqrt{3}(2(3) - 63) \right),\end{aligned}$$

con lo que se tiene el punto,

$$\eta_2(\pm\sqrt{3}) = \mp\frac{57}{54}\sqrt{3}. \quad (4.3.3)$$

Para el valor de $\Delta_2(\pm\sqrt{3}, \mp\frac{57}{54}\sqrt{3}) = 0$, por el teorema de Cardano-Ferrari A2.2

se tienen raíces triples en $\lambda = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}\omega$.

Para la condición de $\Delta_2 = 0$ con $pq \neq 0$, se debe de cumplir $\varepsilon > \sqrt{3}$ ya que para la región $\varepsilon < \sqrt{3}$ se tiene un discriminante siempre positivo, con ayuda del teorema A2.2 se tiene una raíz doble y la raíz simple, las cuales están dadas por:

Tipo de raíz	$\Delta_2 = 0$
Raíz doble	$-\frac{3q_2}{2p_2} + \frac{\varepsilon\omega}{3}$
Raíz simple	$-\frac{4p_2^2}{9q_2} + \frac{\varepsilon\omega}{3}$

Cuadro 4.3.2: Raíces para el polinomio (4.2.4) con las condiciones de $p_2q_2 \neq 0$

4.4. Consecuencias del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.

Se toma el polinomio característico de la linealización del origen, ecuación (3.1.4), que coincide con el análisis del sistema lineal (3.1.3).

Ahora se toma el polinomio característico de la linealización de los puntos fijos fuera del origen, ecuación (4.2.4), se construye su respectiva tabla para el criterio de Routh-Hurwitz:

Tabla de Routh-Hurwitz	
1	ω^2
$\varepsilon\omega$	$-2\varepsilon\omega^3 - 2\eta\omega^3$
$\frac{\omega^2 \cdot (3\varepsilon + 2\eta)}{\varepsilon}$	0
$2\omega^3(-\varepsilon - \eta)$	0

Cuadro 4.4.1: Tabla de Routh-Hurwitz para el polinomio característico asociada los punto P_2 y P_3 .

La estabilidad del punto fijo está dada si en su respectiva tabla de Routh-Hurwitz no existen cambios de signo en la primera columna, donde dado el cambio de variable (3.1.1), implica que el parámetro $\omega > 0$, con lo que se analizan los elementos correspondientes a la primera columna de la tabla (4.4.1),

	Primer elemento	Segundo elemento	Tercer elemento
Condición	$\varepsilon\omega > 0$	$\frac{\omega^2(3\varepsilon+2\eta)}{\varepsilon} > 0$	$2\omega^3(-\varepsilon - \eta) > 0$
Simplificación	$\varepsilon > 0$	$3\varepsilon + 2\eta > 0$	$\varepsilon + \eta < 0$

Cuadro 4.4.2: Simplificación de las condiciones para los parámetros del criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico en los punto P_2 y P_3 .

De esta forma los puntos distintos del origen son estables cuando se cumplen las condiciones $\varepsilon > 0$, $3\varepsilon + 2\eta > 0$ y $\varepsilon + \eta < 0$. Se elabora una mapa con los dos parámetros en la figura (4.4.1).

Dada la condición $\varepsilon + \eta > 0$ se puede concluir que en la linealización de los puntos de equilibrio del sistema (2.2.2) no se puede tener que todos los puntos de equilibrio son estables simultáneamente; por lo tanto, se tienen tres casos para la estabilidad en la linealización cuando se tienen tres puntos fijos,

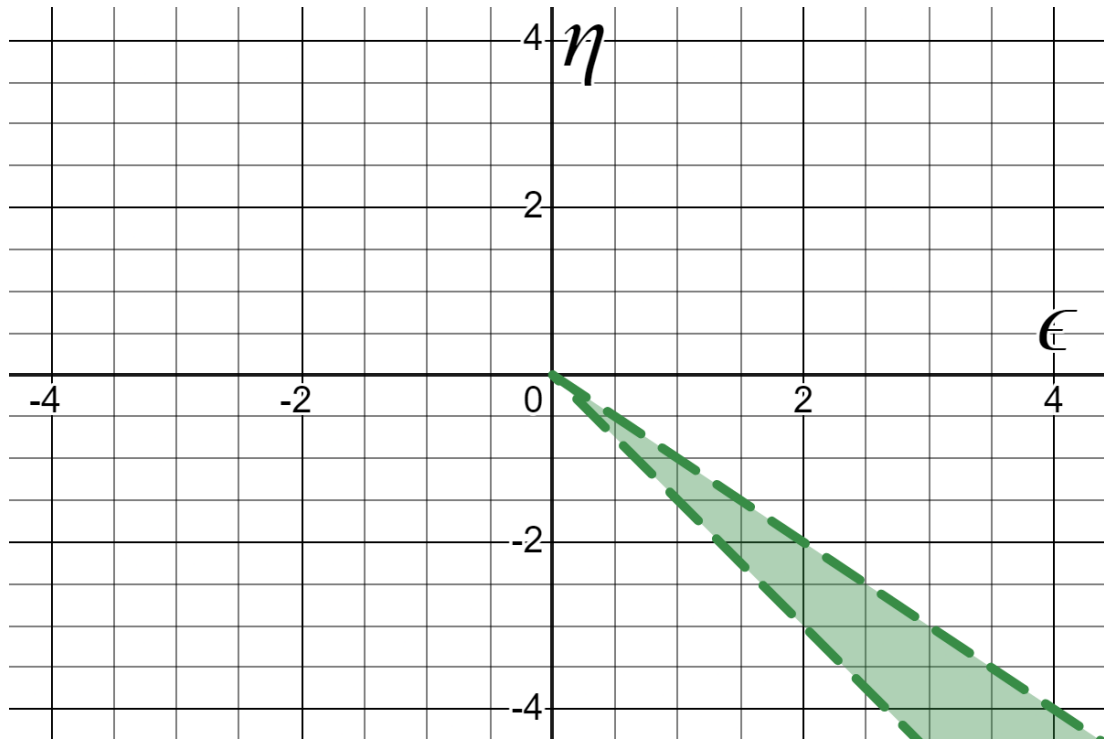


Figura 4.4.1: Región de parámetros ε y η donde la linealización de los puntos diferentes al origen son estables.

Caso	Punto en el origen P_1	Puntos P_2 y P_3	Color de región
1	Inestable	Inestables	Región blanca de figuras 3.1.1 y 3.1.1
2	Estable	No existen los puntos	Región morada figura 3.1.1
3	Inestable	Estables	Región verde figura 4.4.1

Cuadro 4.4.3: Posibilidad de estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema.

Se observa que en el comportamiento local alrededor de los puntos de equilibrio del sistema no hay estabilidad simultanea en los puntos de equilibrio.

4.5. Conjuntos de parámetros.

Se puede observar que la linealización del sistema (2.2.2) obtiene que ω no afecta en la determinación del discriminante en la linealización cerca de los puntos fijos, el valor de $\Delta_2(\varepsilon, \eta)$ que se muestran en las relaciones (4.3.1) y (3.1.5) respectivamente, se puede elaborar un mapa en dos dimensiones para observar el comportamiento de los tres puntos fijos con ayuda de los teoremas de Routh-Hurwitz y Cardano-Ferrari.

La idea central es usar la información obtenida por los dos teoremas para los dos polinomios característicos y la condición de existencia de los puntos distintos del origen.

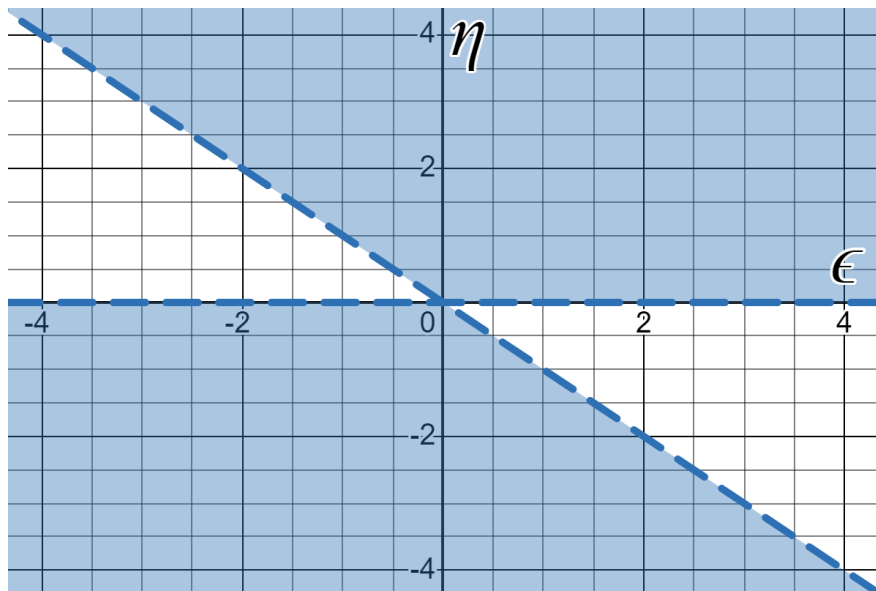


Figura 4.5.1: Regiones donde aparecen los puntos fijos distintos del origen.

Dados los puntos de equilibrio para el sistema no lineal (4.1.7) - (4.1.9), se debe cumplir la relación $\varepsilon/\eta \geq -1$. El eje horizontal representa a la variable ε y el eje vertical representa η .

La región en color azul es donde la combinación de parámetros genera 3 puntos de fijos, mientras que fuera de esta región solo se tiene un punto fijo en el origen. Se obtiene la figura correspondiente a $\Delta_2(\varepsilon, \eta)$ que se muestra en la ecuación (4.3.1).

La figura 3.1.3 para $\Delta_1(\varepsilon, \eta)$ en el análisis lineales la misma la figura para la estabilidad local alrededor del origen.

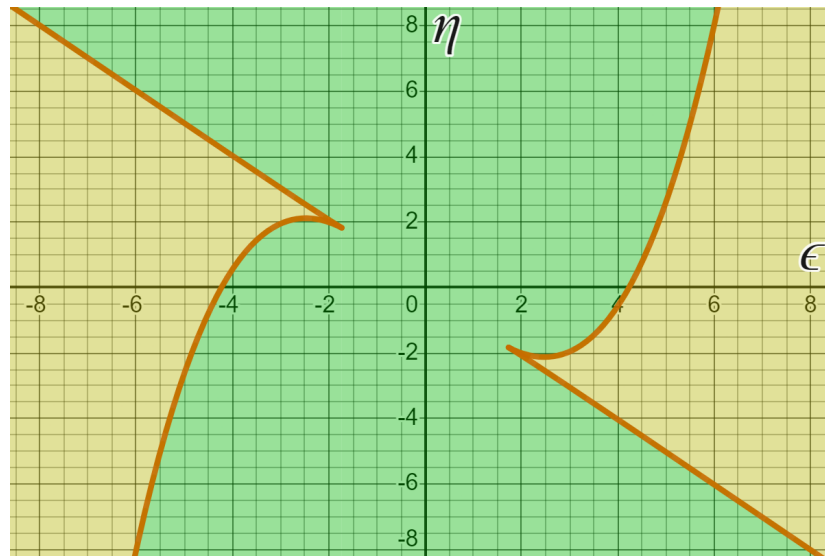


Figura 4.5.2: Dinámica cerca de los puntos fijos fuera del origen.

Dado que solo en la región azul de la figura (4.5.1) se encuentran las condiciones para que existan puntos fijos distintos del origen, entonces debe limitarse la figura (4.5.2) a la región azul de la figura (4.5.1), con lo que se obtiene la figura (4.5.3).

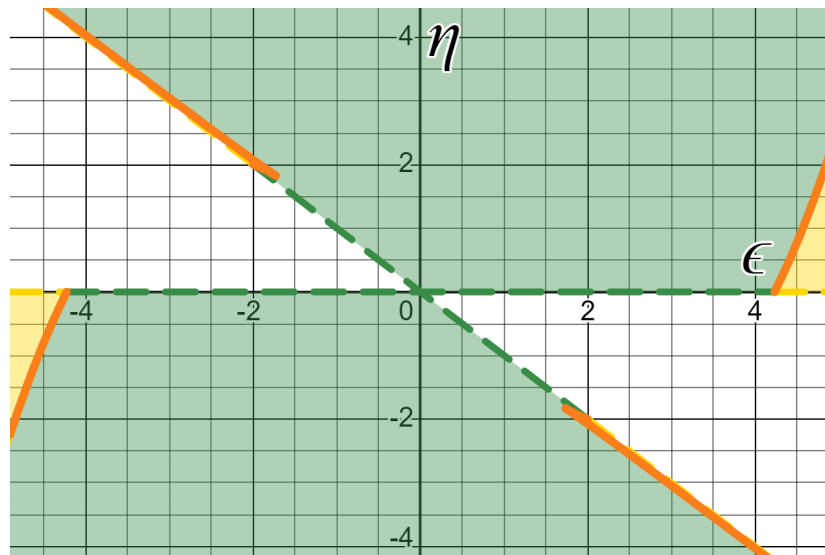


Figura 4.5.3: Dinámica cerca de los puntos fijos fuera del origen en la región donde se cumple $\varepsilon/\eta \geq -1$.

Al analizar los polinomios característicos en función del discriminante en las figuras (3.1.2), (4.5.3) y su estabilidad de los puntos de equilibrio con los criterio de Routh-Hurwitz en las tablas (3.1.2) y (4.4.2), entonces se generan 16 regiones diferentes delimitadas por 28 curvas y 13 puntos de intersección.

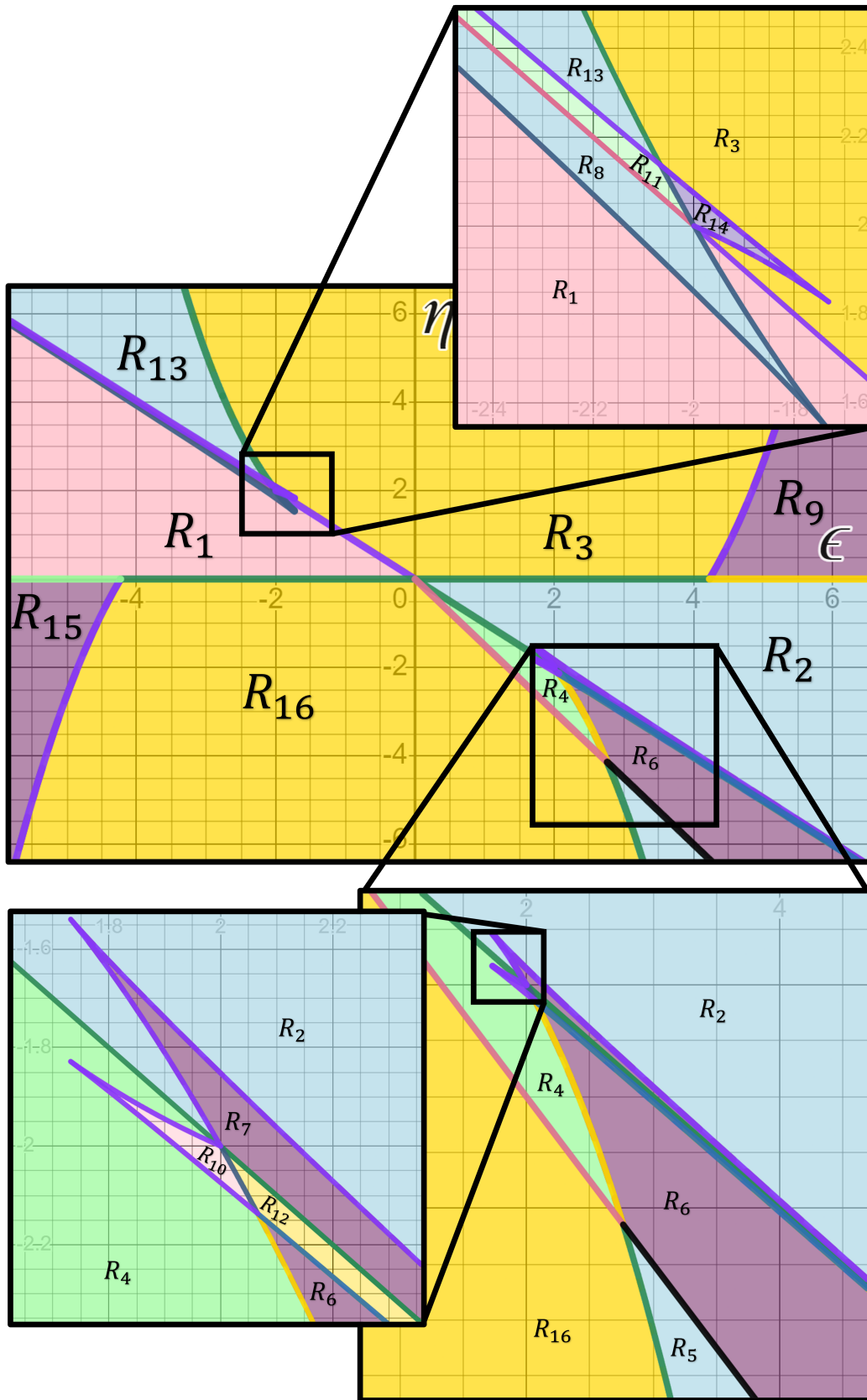


Figura 4.5.4: Regiones del sistema no lineal.

Como se ha comentado en el sistema (4.0.1) - (4.0.3) el parámetro ω no afecta para la determinación local de la dinámica de los puntos fijos, ya que al calcular los discriminantes $\Delta_1(\varepsilon, \eta)$ y $\Delta_2(\varepsilon, \eta)$ estos no dependen del parámetro ω que se muestran en las relaciones (3.1.5) y (4.3.1), se puede elaborar un mapa en dos dimensiones de la información de las raíces del polinomio característico que dan la dinámica de los puntos fijos, esta información se analiza en las figuras (3.1.2) y (4.5.2), además de considerar la estabilidad mediante el criterio de Routh-Hurwitz que se obtiene en las tablas (3.1.1) y (4.4.1).

4.5.1. Casos especiales para los polinomios característicos.

4.5.1.1. Raíces igual a cero en los polinomios.

Es importante analizar los polinomios característicos $H_{P_2}(\lambda)$ y $H_{P_1}(\lambda)$, en especial donde la parte real de las raíces de dichos polinomios es cero, para ello se toma primero $H_{P_1}(0) = 0$, es decir, que condiciones de los parámetros generan $\lambda = 0$ como raíz del polinomio

$$H_{P_1}(0) = 0^3 + \varepsilon\omega(0)^2 + \omega^2(0) + \omega^3(\varepsilon + \eta) = \omega^3(\varepsilon + \eta) = 0,$$

es decir,

$$\varepsilon = -\eta. \quad (4.5.1)$$

Ahora para $H_{P_2}(0) = 0$,

$$H_{P_2}(0) = 0^3 + \varepsilon\omega(0)^2 + \omega^2(0) - 2\omega^3(\varepsilon + \eta) = -2\omega^3(\varepsilon + \eta) = 0,$$

se obtiene la misma relación que expresión (4.5.1), los polinomios $H_{P_2}(\lambda)$ y $H_{P_1}(\lambda)$ bajo la condición de $\varepsilon = -\eta$, resultan en el mismo polinomio,

$$H_{P_1}^*(\lambda) = H_{P_2}^*(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - \eta\omega\lambda + \omega^2) \quad (4.5.2)$$

El polinomio cuadrático resultante de la factorización no cuenta con otra raíces igual a cero, ya que $\omega > 0$, además $\eta = 0$ obtiene raíces complejas imaginarias puras, es decir, bajo la condiciones $\eta = \varepsilon = 0$, se tiene una raíces iguala cero y dos imaginarias puras conjugadas. El único punto de equilibrio es el origen.

4.5.1.2. Raíces imaginarias puras conjugadas.

Para encontrar la existencia de raíces imaginarias puras conjugadas, se toma primero el polinomio característico $H_{P_1}(\lambda)$ y se sustituye $\lambda = ib$ y $\lambda = -ib$, con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} H_{P_1}(ib) &= (ib)^3 + \varepsilon\omega(ib)^2 + \omega^2(ib) + \omega^3(\varepsilon + \eta), \\ &= -ib^3 - \varepsilon\omega b^2 + \omega^2 ib + \omega^3(\varepsilon + \eta), \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

además,

$$\begin{aligned} H_{P_1}(-ib) &= (-ib)^3 + \varepsilon\omega(-ib)^2 + \omega^2(-ib) + \omega^3(\varepsilon + \eta), \\ &= ib^3 - \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib + \omega^3(\varepsilon + \eta), \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

si $\lambda = \pm ib$ son raíces del polinomio característico asociado al origen, entonces, $H_{P_1}(-ib) = H_{P_1}(ib) = -H_{P_1}(ib) = -H_{P_1}(-ib) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_{P_1}(-ib) &= H_{P_1}(ib), \\ ib^3 - \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib + \omega^3(\varepsilon + \eta) &= -ib^3 - \varepsilon\omega b^2 + \omega^2 ib + \omega^3(\varepsilon + \eta), \\ 2ib^3 - 2i\omega^2 b &= 0, \\ 2bi(b^2 - \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Dado que $b \neq 0$, entonces se tiene la condición para el parámetro $\omega = \pm b$, ahora se toma $H_{P_1}(-ib) = -H_{P_1}(ib)$,

$$\begin{aligned} H_{P_1}(-ib) &= -H_{P_1}(ib), \\ ib^3 - \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib + \omega^3(\varepsilon + \eta) &= ib^3 + \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib - \omega^3(\varepsilon + \eta), \\ -2b^2\varepsilon\omega + 2\varepsilon\omega^3 + 2\eta\omega^3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

como $\omega = \pm b$, entonces de la expresión (4.5.6) resulta en:

$$\begin{aligned} 2\eta\omega^3 &= 0 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

por lo tanto, se tiene la condición $\eta = 0$, y la variable ε queda como variable libre, entonces el polinomio característico bajo la condición $\eta = 0$ resulta en,

$$H_{P_1}(\lambda) = \lambda^3 + \varepsilon b\lambda^2 + b^2\lambda + \omega^3\varepsilon = (\lambda - ib)(\lambda + ib)(\lambda + b\varepsilon). \quad (4.5.8)$$

Además para la condición $\eta = 0$, el único punto de equilibrio es el origen.

Para encontrar la existencia de raíces imaginarias puras conjugadas, en el segundo polinomio característico $H_{P_2}(\lambda)$ y se realiza el mismo procedimiento, sustituir $\lambda = ib$ y $\lambda = -ib$, con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} H_{P_2}(ib) &= (ib)^3 + \varepsilon\omega(ib)^2 + \omega^2(ib) - 2\omega^3(\varepsilon + \eta), \\ &= -ib^3 - \varepsilon\omega b^2 + i\omega^2 b - 2\omega^3(\varepsilon + \eta), \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

además,

$$\begin{aligned} H_{P_2}(-ib) &= (-ib)^3 + \varepsilon\omega(-ib)^2 + \omega^2(-ib) - 2\omega^3(\varepsilon + \eta), \\ &= ib^3 - \varepsilon\omega b^2 - i\omega^2 b - 2\omega^3(\varepsilon + \eta), \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

si $\lambda = \pm ib$ son raíces del polinomio característico asociado al origen, entonces, $H_{P_1}(-ib) = H_{P_1}(ib) = -H_{P_1}(ib) = -H_{P_1}(-ib) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_{P_2}(-ib) &= H_{P_2}(ib), \\ ib^3 - \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib - 2\omega^3(\varepsilon + \eta) &= -ib^3 - \varepsilon\omega b^2 + \omega^2 ib - 2\omega^3(\varepsilon + \eta), \\ 2ib^3 - 2i\omega^2 b &= 0, \\ 2bi(b^2 - \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Dado que $b \neq 0$, entonces se tiene la condición para el parámetro $\omega = \pm b$, ahora se toma $H_{P_2}(-ib) = -H_{P_2}(ib)$,

$$\begin{aligned} H_{P_2}(-ib) &= -H_{P_2}(ib), \\ ib^3 - \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib - 2\omega^3(\varepsilon + \eta) &= ib^3 + \varepsilon\omega b^2 - \omega^2 ib + 2\omega^3(\varepsilon + \eta), \\ -4\omega \left(\frac{1}{2}b^2\varepsilon + \varepsilon\omega^2 + \eta\omega^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

como $\omega = \pm b$, entonces de la expresión (4.5.12) resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\omega^2\varepsilon + \eta\omega^2 &= 0 \\ \eta &= -\frac{3}{2}\varepsilon \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

por lo tanto, se tiene la condición $\eta = -3\varepsilon/2$, y la variable ε queda como variable

libre, entonces el polinomio característico bajo la condición $\eta = -3\varepsilon/2$ resulta en,

$$H_{P_2}(\lambda) = \lambda^3 + \varepsilon b \lambda^2 + b^2 \lambda + \omega^3 \varepsilon = (\lambda - ib)(\lambda + ib)(\lambda + b\varepsilon). \quad (4.5.14)$$

Además para la condición $\eta = -3\varepsilon/2$ los puntos de equilibrio P_2 y P_3 se encuentran bien definidos y a una distancia fija del origen,

$$\begin{aligned} |P_2| = |P_3| &= \sqrt{0^2 + \left(\pm \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}\varepsilon}{-\frac{3}{2}\varepsilon}} \right)^2 + \left(\mp \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}\varepsilon}{-\frac{3}{2}\varepsilon}} \right)^2}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

por lo tanto, los puntos P_2 y P_3 se encuentran a una distancia de $\sqrt{2/3}$ del origen.

4.5.1.3. Relación con el criterio de Routh.

La condición de existencia de los puntos diferentes del origen se encuentra delimitado con la condición 4.5.1, lo que indica que existe una variedad central asociada al cero, esta variedad aparece en los tres puntos de equilibrio, donde se muestra que exactamente en ese valor $\eta = -\varepsilon$ los 3 puntos de equilibrio son el origen, lo que puede indicar un tipo de bifurcación de tridente.

Para el polinomio característico asociado al origen (3.1.4) se tiene que bajo la condición $\eta = 0$ (4.5.7), se tiene raíces imaginarias puras, que implican una posible bifurcación de tipo Hopf, además la condición $\eta = 0$ delimita una parte de la región generada por el criterio de Routh siendo la cota superior del segundo elemento de la tabla 3.1.2.

Para el polinomio característico asociado a los puntos distintos del origen (4.2.4) se tiene que bajo la condición $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$ (4.5.13), se tiene raíces imaginarias puras, que implican una posible bifurcación de tipo Hopf, además la condición $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$ delimita una parte de la región generada por el criterio de Routh siendo la cota superior del segundo elemento de la tabla 4.4.2.

4.5.2. Regiones del espacio de parámetros.

Ahora con la información sobre la tabla de Routh-Hurwitz, los discriminantes de los polinomios característicos y la condición de existencia de los puntos de equilibrio distintos del origen se puede generar regiones con comportamientos locales definidos por el Teorema de Cardano-Ferrari A2.2 y el criterio de Routh A1.1.

Se construye una tabla con la información de las condiciones que se cumplen en cada región, en ella se usan los siguiente símbolos, que tienen los significados que se en listan,

- ✓ se cumple la condición.
- × se niega la condición.
- – no se considera la condición ya que es consecuencia de las anteriores o no es válida.

Las condiciones resultantes con los símbolos ✓ y × son las mínimas y éstas implican las condiciones que que están marcadas con el símbolo – , es por ello, que no se consideran. También es posible que se tomen condiciones como negar la existencia de los puntos diferentes del origen lo que implica que el discriminante para los puntos distintos del origen no se considera puesto que no existen, esto sucede en la región 1 en la tabla, 4.5.1.

Regiones	Condiciones					
	$\Delta_1 > 0$	$\Delta_2 > 0$	$\eta + \varepsilon > 0$	$\eta < 0$	$\varepsilon/\eta > -1$	$3\varepsilon + 2\eta > 0$
1	✓	—	×	×	×	×
2	✓	—	✓	✓	×	✓
3	✓	✓	✓	×	✓	—
4	✓	✓	×	✓	✓	✓
5	×	✓	×	✓	✓	×
6	×	✓	×	✓	✓	✓
7	×	—	✓	✓	×	✓
8	×	—	×	×	×	×
9	✓	×	✓	×	✓	✓
10	✓	×	×	✓	✓	✓
11	×	×	✓	×	✓	×
12	×	×	×	✓	✓	✓
13	×	✓	✓	×	✓	—
14	✓	×	✓	✓	✓	×
15	✓	×	×	✓	✓	×
16	✓	✓	×	✓	✓	×

Cuadro 4.5.1: Resumen de regiones bajo las condiciones de parámetros η y ε en Δ_1 y Δ_2

Se describe la estabilidad local del sistema en las 16 regiones señaladas en la figura 4.5.4, además como ya se verificaron todas las condiciones donde la linealización falla, es decir, donde la parte imaginaria de las raíces del polinomio característico se anulan, entonces, las 16 regiones a continuación siempre tienen parte real distinta de cero, ya que no cumplen ninguna de las condiciones (4.5.7) y (4.5.13),:

1. Región 1. El origen es el único punto fijo.

- Las raíces del polinomio característico δ_1 generan una raíz real y dos raíces complejas conjugadas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- El punto fijo del origen es inestable.

2. Región 2. El origen es el único punto fijo.

- Las raíces del polinomio característico generan una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- El punto fijo del origen es estable.

3. Región 3. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces de los polinomios característicos generan una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- Los 3 puntos fijos son inestables.

4. Región 4. Se tienen 3 puntos fijos.

- Las raíces de los polinomios característicos generan una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- El punto en el origen es inestable.
- Los puntos fuera del origen son estables.

5. Región 5. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces del polinomio característico del origen generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor

del punto fijo.

- Las raíces de los polinomios característicos distintos del origen generan una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- Todos los puntos fijos son inestables.

6. Región 6. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces del polinomio característico del origen generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- Las raíces de los polinomios característicos distintos del origen una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- Los puntos fijos fuera del origen son estables.
- El origen es inestable.

7. Región 7. El origen es el único punto fijo.

- Las raíces del polinomio característico del origen generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- El origen es estable.

8. Región 8. El origen es el único punto fijo.

- Las raíces del polinomio característico del origen generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- El origen es inestable.

9. Región 9. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces del polinomio característico del origen generan una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.

- Las raíces de los polinomios característicos distintos del origen generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- Todos los puntos fijos son inestables.

10. Región 10. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces del polinomio característico del origen generan una raíz real y dos raíces complejas, es decir, el sistema genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- Las raíces de los polinomios característicos distintos del origen generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor del punto fijo.
- El origen es inestable.
- Los puntos fijos fuera del origen son estables.

11. Región 11. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces de todos los polinomios característicos generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor de los punto fijo.
- Todos los puntos fijos son inestable.

12. Región 12. Se tiene 3 puntos fijos.

- Las raíces de todos los polinomios característicos generan tres raíces reales distintas, es decir, el sistema NO genera oscilaciones alrededor de los punto fijo.
- El origen es inestable.
- Los puntos fijos fuera del origen son estables.

Se construye una tabla con el resumen de las condiciones que se cumplen en cada curva, donde se usan los siguiente símbolos que denotan:

- ✓ se cumple la condición.
- × se niega la condición.
- – no se considera la condición.

4.5.3. Curvas del espacio de parámetros.

Las condiciones resultantes con los símbolos ✓ y × son las mínimas y éstas implican las condiciones que que están marcadas con el símbolo – , es por ello, que no se consideran, también es posible que la curva principal sea la cota de la desigualdad que no se este tomando a consideración, esto sucede en la curva Γ_1 donde la curva principal es $\varepsilon/\eta > -1$ y no se considera $\varepsilon/\eta = -1$ ya que es la cota de la desigualdad.

Γ_i	Curva principal	Restricciones				
		$\Delta_1 > 0$	$\Delta_2 > 0$	$\eta < 0$	$\varepsilon/\eta > -1$	$3\varepsilon + 2\eta > 0$
1	$\frac{\varepsilon}{\eta} = -1$	×	×	✓	—	✓
2	$\frac{\varepsilon}{\eta} = -1$	×	×	×	—	×
3	$\frac{\varepsilon}{\eta} = -1$	✓	✓	✓	—	✓
4	$\frac{\varepsilon}{\eta} = -1$	✓	✓	×	—	×
5	$\Delta_1 = 0$	—	×	×	✓	×
6	$\Delta_1 = 0$	—	×	✓	✓	✓
7	$\eta = \eta_1^-(\varepsilon)$	—	—	✓	×	✓
8	$\eta = \eta_1^+(\varepsilon)$	—	—	✓	×	✓
9	$\eta = \eta_1^-(\varepsilon)$	—	—	×	×	×
10	$\eta = \eta_1^+(\varepsilon)$	—	—	×	×	×
11	$\Delta_1 = 0$	—	✓	✓	✓	×
12	$\Delta_1 = 0$	—	✓	×	✓	✓
13	$\Delta_1 = 0$	—	✓	×	✓	×
14	$\Delta_1 = 0$	—	✓	✓	✓	✓
15	$\Delta_2 = 0$	×	—	×	✓	×
16	$\Delta_2 = 0$	×	—	✓	✓	✓
17	$\eta = \eta_2^-(\varepsilon)$	✓	—	✓	✓	✓
18	$\eta = \eta_2^+(\varepsilon)$	✓	—	✓	✓	✓
19	$\Delta_2 = 0$	✓	—	✓	✓	×
20	$\Delta_2 = 0$	✓	—	×	✓	✓
21	$\eta = \eta_2^-(\varepsilon)$	✓	—	×	✓	×
22	$\eta = \eta_2^+(\varepsilon)$	✓	—	×	✓	×
23	$\eta = 0$	—	✓	—	—	✓
24	$\eta = 0$	—	×	—	—	✓
25	$\eta = 0$	—	✓	—	—	×
26	$\eta = 0$	—	×	—	—	×
27	$3\varepsilon + 2\eta = 0$	✓	✓	✓	✓	—
28	$3\varepsilon + 2\eta = 0$	×	✓	✓	✓	—

Cuadro 4.5.2: Resumen de curvas con condiciones de parámetros η y ε .

Se debe resaltar que las curvas Γ_1 a Γ_4 corresponden con la condición (4.5.1) que implica que existe un cero en los polinomios característicos de todos los puntos de equilibrio del sistema, por lo tanto, la linealización no aplica en dichas curvas.

Además en las curvas Γ_{23} a Γ_{26} corresponden con la condición (4.5.7) que implica que existe raíces complejas imaginarias puras conjugadas en el polinomio característico asociado al origen, por lo tanto, la linealización no aplica en dichas curvas.

Para finalizar las curvas Γ_{27} y Γ_{28} corresponden con la condición (4.5.13) que implica que existe raíces complejas imaginarias puras conjugadas en el polinomio

característico asociado a los puntos distintos del origen, por lo tanto, la linealización no aplica en dichas curvas.

El resto de curvas puede ser descrito el comportamiento local con los teorema de Routh y Cardano.

4.5.4. Puntos del espacio de parámetros

Los puntos de interés en la figura (4.5.4) son aquellos donde se crea una unión con distintas región, ya que la dinámica alrededor de este punto puede representar una alta sensibilidad a que cualquier variación en los parámetros puede desencadenar en comportamientos diferentes, por ejemplo, el origen es un punto de interés ya que conecta distintas regiones y curvas.

En el análisis de los polinomios característicos del origen y los puntos fuera del origen se encontraron los puntos muestran que existen dos puntos $(\pm\sqrt{3}, \mp\frac{57}{54}\sqrt{3})$ (4.3.3) donde las tres raíces de la linealización son idénticas, de la misma forma se encontró que para el origen existen dos puntos $(\pm\sqrt{3}, \mp\frac{8}{9}\sqrt{3})$ (3.1.13).

Pero aún existen puntos por determinar en el espacio de parámetros

La curva generada por $\Delta_1(\varepsilon, \eta) = 0$ se intersecta con las curvas $\varepsilon/\eta = -1$ y $3\varepsilon + 2\eta = 0$, primero se toma la condición $\varepsilon = -\eta$ en la curva $\Delta_1 = 0$,

$$\begin{aligned}\Delta_1(-\eta, \eta) &= 0, \\ \frac{1}{4} \left(2(-\eta)((-\eta)^2 + 9) + 27\eta \right)^2 + (3 - (-\eta)^2)^3 &= 0, \\ (-2\eta^3 + 9\eta)^2 + 4(3 - \eta^2)^3 &= 0.\end{aligned}$$

El procedimiento es análogo para $\Delta_2 = 0$ bajo la misma condición $\varepsilon = -\eta$,

$$\begin{aligned}\Delta_2(-\eta, \eta) &= 0, \\ \frac{1}{4} \left(-\eta(2(-\eta)^2 - 63) - 54\eta \right)^2 + (3 - (-\eta)^2)^3 &= 0, \\ (-2\eta^3 + 9\eta)^2 + 4(3 - \eta^2)^3 &= 0,\end{aligned}$$

Se llega a la misma relación con ambas expresiones Δ_1 y Δ_2 , con lo que se muestran que se tiene una intersección entre las dos curvas formadas por $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = 0$

y la curva $\varepsilon/\eta = -1$, se continua con la simplificación para encontrar el punto exacto,

$$\begin{aligned} 4\eta^6 - 36\eta^4 + 81\eta^2 + 108 - 108\eta^2 + 36\eta^4 - 4\eta^6 &= 0, \\ 108 - 27\eta^2 &= 0, \\ -27(\eta^2 - 4) &= 0, \end{aligned}$$

con lo que se tienen dos soluciones $\eta = \pm 2$, dado que se encuentra en la curva $\varepsilon/\eta = -1$, entonces el punto de intersección está dado por $h_1 = (2, -2)$ y $h_2 = (-2, 2)$. Existe dos puntos de intersección entre las curvas generadas por las ecuaciones η_2 (4.3.2) y η_1 (3.1.7), para $\varepsilon > 0$ para el primero se toma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{27} \left(-2\varepsilon (x^2 + 9) - \sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3} \right) &= -\frac{1}{54} \left(-\varepsilon (2\varepsilon^2 - 63) + \sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3} \right), \\ -2\varepsilon (\varepsilon^2 + 9) &= \frac{1}{2}\varepsilon (2\varepsilon^2 - 63) + \frac{1}{2}\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}, \\ 3\varepsilon^3 - \frac{27}{2}\varepsilon &= -\frac{1}{2}\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}. \end{aligned}$$

Ya que la solución a la ecuación anterior implica resolver una ecuación de grado 6 entonces se implementa un algoritmo numérico con el fin de obtener una aproximación, para ello se utiliza el método de punto fijo, donde a partir de la última expresión se encuentra una función para iterar,

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{27}{6}\varepsilon - \frac{1}{6}\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}}. \quad (4.5.15)$$

Se toma $f^n(\varepsilon)$ como la n -iteración de la función (4.5.15), entonces se obtiene la siguiente tabla de iteraciones,

n	$f^n(2)$
1	2.05408004925
2	2.06413778459
3	2.06587305341
4	2.06616821560
5	2.06621829807

Cuadro 4.5.3: Iteraciones para el punto h_3

Entonces se obtiene $\eta_1(2.06621829807) = \eta_2(2.06621829807) = -2.13682571104$, por lo tanto, el punto $h_3 = (2.06621829807, -2.13682571104)$. La solución exacta

se puede encontrar en el apéndice.

De forma similar para el segundo punto de intersección, se puede hacer el análisis para $\varepsilon < 0$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{27} \left(-2\varepsilon (\varepsilon^2 + 9) + \sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3} \right) &= -\frac{1}{54} \left(-\varepsilon (2\varepsilon^2 - 63) - \sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3} \right), \\ -2\varepsilon (\varepsilon^2 + 9) &= \frac{1}{2}\varepsilon (2\varepsilon^2 - 63) - \frac{1}{2}\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}, \\ 3\varepsilon^3 - \frac{27}{2}\varepsilon &= \frac{1}{2}\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}. \end{aligned}$$

Ya que la solución a la ecuación implica resolver una ecuación de grado 6 entonces se implementa nuevamente un algoritmo numérico para obtener una aproximación, para ello se utiliza el método de punto fijo, donde a partir de la última expresión se encuentra una función para iterar,

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{27}{6}\varepsilon + \frac{1}{6}\sqrt{-4(3 - \varepsilon^2)^3}} \quad (4.5.16)$$

Se toma $f^n(\varepsilon)$ como la n -iteración de la función (4.5.16), entonces se obtiene la siguiente tabla de iteraciones,

Cuadro 4.5.4: Iteraciones para el punto p_4

n	$f^n(-2)$
1	-2.05408004925
2	-2.06413778459
3	-2.06587305341
4	-2.06616821560
5	-2.06621829807

Entonces se obtienen $\eta_1(-2.06621829807) = \eta_2(-2.06621829807) = 2.13682571104$, por lo tanto, el punto $h_4 = (-2.06621829807, 2.13682571104)$, la solución exacta se puede encontrar en el apéndice. Debe de notarse que la coordenada ε para los puntos h_3 y h_4 tienen en valor absoluto el mismo valor.

La curva $\Delta_1 = 0$ intersecta con la curva $3\varepsilon + 2\eta = 0$, para ello se sustituye la

condición $-3/2\varepsilon = \eta$ en el valor de $\Delta_1 = 0$,

$$\begin{aligned}\Delta_1\left(\varepsilon, -\frac{2}{3}\varepsilon\right) &= 0, \\ \left(\varepsilon^3 + 18\varepsilon - \frac{81}{2}\varepsilon\right)^2 + 4(3 - \varepsilon^2)^3 &= 0, \\ \frac{27}{4}(-8\varepsilon^4 + 59\varepsilon^2 + 16) &= 0.\end{aligned}\tag{4.5.17}$$

Se tiene cuatro soluciones, para resolver, se realiza un cambio de variable $x = \varepsilon^2$,

$$8x^2 - 59x - 16 = 0,$$

cuyas soluciones estás dadas por,

$$x_{1,2} = \frac{1}{16}(59 \pm 11\sqrt{33}).$$

Las cuatro soluciones de (4.5.17) corresponden con los valores,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2} &= \pm \frac{1}{4}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}, \\ \varepsilon_{3,4} &= \pm \frac{1}{4}i\sqrt{11\sqrt{33} - 59}.\end{aligned}$$

Se encuentran dos intersecciones de la recta $3\varepsilon + 2\eta = 0$ con la curva $\Delta_1 = 0$, entonces se tiene los puntos $h_5 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}, -\frac{3}{8}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}\right)$ y $h_6 = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}, \frac{3}{8}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}\right)$.

El último par de puntos por encontrar tales que $\Delta_2(\varepsilon, 0) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\varepsilon(2\varepsilon^2 - 63) - 54(0)\right)^2 + (3 - \varepsilon^2)^3 &= 0, \\ 3969\varepsilon^2 - 252\varepsilon^4 + 4\varepsilon^6 + 108 - 108\varepsilon^2 + 36\varepsilon^4 - 4\varepsilon^6 &= 0, \\ 27(-8\varepsilon^4 + 143\varepsilon^2 + 4) &= 0.\end{aligned}\tag{4.5.18}$$

Así, se obtiene un polinomio de orden cuatro, al usar $x = \varepsilon^2$ da lugar al polinomio,

$$-8x^2 + 143x + 4 = 0,$$

sus soluciones son,

$$x_{1,2} = -\frac{1}{16} \left(-143 \pm 19\sqrt{57} \right).$$

Al devolver el cambio de variable, se obtiene las soluciones de la ecuación (4.5.18),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \pm \frac{1}{4} \sqrt{143 + 19\sqrt{57}}, \\ \varepsilon_{3,4} &= \pm \frac{1}{4} i \sqrt{19\sqrt{57} - 143}. \end{aligned}$$

Entonces se tienen las dos intersecciones de la recta $3\varepsilon + 2\eta = 0$ con la curva $\Delta_1 = 0$, dadas por los puntos $h_7 = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{143 + 19\sqrt{57}}, 0 \right)$ y $h_8 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{143 + 19\sqrt{57}}, 0 \right)$.

Punto	Valor de ε	Valor de η
O	0	0
η_1^+	$\sqrt{3}$	$-\frac{8}{9}\sqrt{3}$
η_1^-	$-\sqrt{3}$	$\frac{8}{9}\sqrt{3}$
η_2^+	$\sqrt{3}$	$-\frac{57}{54}\sqrt{3}$
η_2^-	$-\sqrt{3}$	$\frac{57}{54}\sqrt{3}$
h_1	2	-2
h_2	-2	2
h_3	2.06621829807	-2.13682571104
h_4	-2.06621829807	2.13682571104
h_5	$\frac{1}{4}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}$	$-\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}$
h_6	$-\frac{1}{4}\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}$	$\sqrt{59 + 11\sqrt{33}}$
h_7	$-\frac{1}{4}\sqrt{143 + 19\sqrt{57}}$	0
h_8	$\frac{1}{4}\sqrt{143 + 19\sqrt{57}}$	0

Cuadro 4.5.5: Resumen de puntos y sus condiciones de parámetros η y ε .

4.6. Gráfica asociada

La información obtenida de los cálculos de las regiones, las curvas y los puntos genera conjuntos distintos de combinaciones de parámetros donde la dinámica del sistema es distinta, con ayuda de un grafo se puede guardar la relación entre los conjuntos por medio de aristas, cada vértice representa un conjunto y los arista representa la existencia de una trayectoria en el espacio de los parámetros para cambiar el comportamiento del sistema.

Al tomar las tablas 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.5, entonces se tienen 57 conjuntos diferentes, por lo tanto, 57 comportamientos locales diferentes en el sistema de ecuaciones diferenciales planteado. Debe de notarse que ningún conjunto de regiones, curvas o puntos son adyacentes a si misma, es decir, toda región es separada de las otras regiones por curvas o puntos. Esto mismo sucede para las curvas y los puntos, esto implica que la matriz de adyacencia contiene matrices de ceros en la diagonal que corresponden con las regiones, curvas y puntos.

La matriz de adyacencia está conformada por,

$$\begin{pmatrix} 0_{16 \times 16} & A_{16 \times 28} & B_{16 \times 13} \\ A_{28 \times 16}^T & 0_{28 \times 28} & C_{28 \times 13} \\ B_{13 \times 16}^T & C_{13 \times 28}^T & 0_{13 \times 13} \end{pmatrix}_{57 \times 57} \quad (4.6.1)$$

donde las matrices representan lo siguiente.

- Matriz A relaciones entre las regiones y las curvas.
- Matriz B relaciones entre regiones y puntos.
- Matriz C relaciones entre curvas y puntos.

Las matrices A , B y C están compuestas por ceros y unos, el número uno indicando que existe una trayectoria en el espacio de parámetros para cambiar de un comportamiento a otro, con esta información es posible cambiar los parámetros a un conjunto de interés particular o la posibilidad de llevarlo a un conjunto particular sin pasar por algún conjunto no deseado.

4.6.1. Ejemplo de construcción.

Las matrices que contienen relaciones con las regiones corresponde con las matrices A y B , para el ejemplo se elige la región cuatro, para la matriz A , se tiene, En la

Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8	Γ_9	Γ_{10}	Γ_{11}	Γ_{12}	Γ_{13}	Γ_{14}	Γ_{15}	Γ_{16}	Γ_{17}	Γ_{18}	Γ_{19}	Γ_{20}	Γ_{21}	Γ_{22}	Γ_{23}	Γ_{24}	Γ_{25}	Γ_{26}	Γ_{27}	Γ_{28}	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Cuadro 4.6.1: Tabla con los elementos la fila que corresponde con la región cuatro de la matriz A

figura 4.6.1 se puede ver las relaciones que están marcadas con uno, éstas implican que delimitan el comportamiento de la región cuatro mediante curvas,

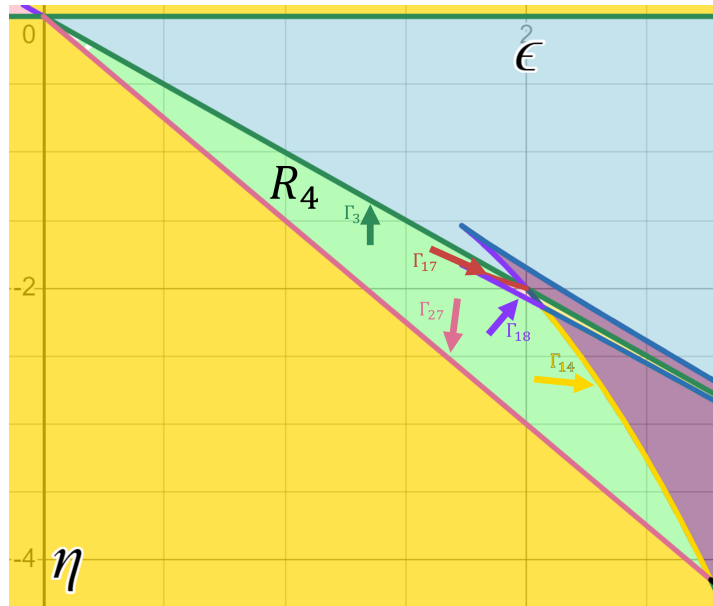


Figura 4.6.1: Ejemplo de construcción de la región cuatro para la matriz A .

Para la matriz B es la relación entre la región cuatro y los puntos,

	O	η_1^+	η_1^-	η_2^+	η_2^-	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
R_4	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0

Cuadro 4.6.2: Tabla con los elementos la fila que corresponde con la región cuatro de la matriz B .

Explícitamente se muestran los puntos que delimitan a la región cuatro en la figura 4.6.2,

Este mismo proceso se repite con las 16 regiones entonces se obtiene la matriz A y B , la matriz C sigue el mismo procedimiento pero ahora enfocándose en el punto deseado.

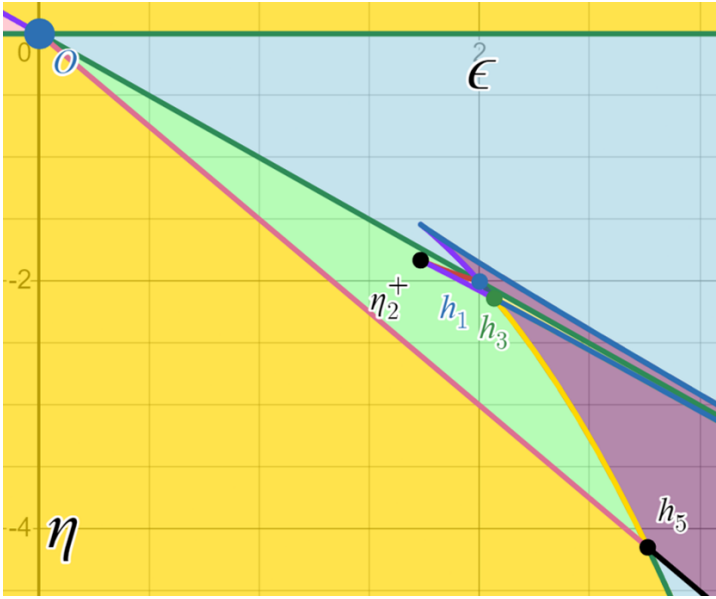


Figura 4.6.2: Ejemplo de construcción de la región cuatro para la matriz B.

Explícitamente se tiene la matriz B :

$$\begin{array}{c}
 O \quad \eta_1^+ \quad \eta_1^- \quad \eta_2^+ \quad \eta_2^- \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \quad h_5 \quad h_6 \quad h_7 \quad h_8 \\
 \left. \begin{array}{l}
 R_1 \\
 R_2 \\
 R_3 \\
 R_4 \\
 R_5 \\
 R_6 \\
 R_7 \\
 R_8 \\
 R_9 \\
 R_{10} \\
 R_{11} \\
 R_{12} \\
 R_{13} \\
 R_{14} \\
 R_{15} \\
 R_{16}
 \end{array} \right\} \begin{array}{cccccccccccccc}
 \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1}
 \end{array} \right) \quad (4.6.3)
 \end{array}$$

Explícitamente se tiene la matriz C :

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_1 \\
 \Gamma_2 \\
 \Gamma_3 \\
 \Gamma_4 \\
 \Gamma_5 \\
 \Gamma_6 \\
 \Gamma_7 \\
 \Gamma_8 \\
 \Gamma_9 \\
 \Gamma_{10} \\
 \Gamma_{11} \\
 \Gamma_{12} \\
 \Gamma_{13} \\
 \Gamma_{14} \\
 \Gamma_{15} \\
 \Gamma_{16} \\
 \Gamma_{17} \\
 \Gamma_{18} \\
 \Gamma_{19} \\
 \Gamma_{20} \\
 \Gamma_{21} \\
 \Gamma_{22} \\
 \Gamma_{23} \\
 \Gamma_{24} \\
 \Gamma_{25} \\
 \Gamma_{26} \\
 \Gamma_{27} \\
 \Gamma_{28}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 O & \eta_1^+ & \eta_1^- & \eta_2^+ & \eta_2^- & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \tag{4.6.4}$$

Para visualizar el grafo primero se define una nomenclatura visual en la figura 4.6.3.

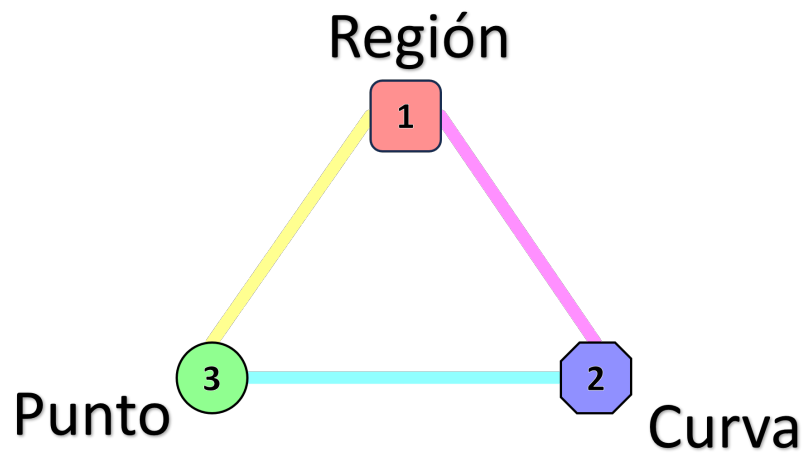


Figura 4.6.3: Notación de los elementos del grafo.

Visualmente el grafo asociado al espacio de parámetros corresponde con lo que se ve en la figura 4.6.4

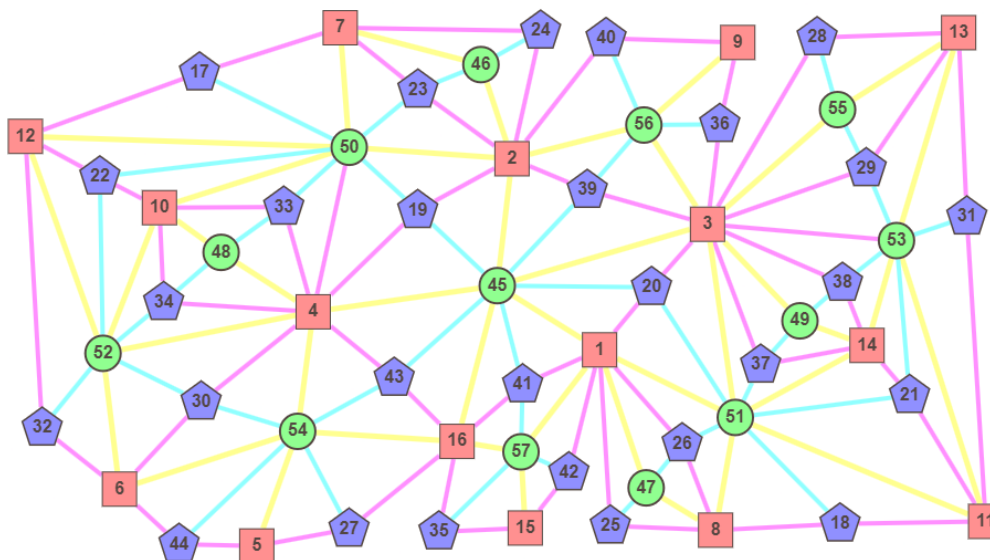


Figura 4.6.4: Grafo asociado al espacio de parámetros.

Capítulo 5

Simulaciones Computacionales.

La información recopilada en los capítulos anteriores ha permitido identificar la existencia de una amplia variedad de comportamientos dinámicos. En este capítulo, se describe detalladamente la relación entre los resultados analíticos y la integración numérica en las regiones donde el comportamiento de las soluciones que son acotadas.

Se analizan las regiones, curvas y puntos que aparecen en la figura 4.5.4 y que se encuentran representados con el grafo 4.6.4. El análisis de los 57 diferentes conjuntos resulta ser un proceso bastante extenso. Por esta razón, se enfocan únicamente en las regiones que presentan soluciones globalmente acotadas para el sistema de ecuaciones diferenciales. Esto implica seleccionar aquellas áreas donde las soluciones no divergen hacia el infinito y exhiben un comportamiento confinado dentro de límites definidos en el espacio de fase.

Este enfoque permite centrar el análisis en dinámicas más manejables y físicamente relevantes, descartando regiones donde las soluciones sean inestables o tiendan a valores no acotados. De esta manera, se logra reducir significativamente la complejidad del estudio, mientras se mantiene el interés en comportamientos que son de mayor interés para aplicaciones prácticas y teóricas.

Para realizar este análisis se enuncian sus características y posteriormente se obtiene una simulación computacional. Las simulaciones se obtienen usando el método de Range-Kutta de orden cuarto, para todas las simulación se especifica el incremento en la variable temporal Δt para la integración numérica, tiempo final de integración t_f , las condiciones iniciales, los valores de los parámetros ε y

η . Para el parámetro ω se mantiene constante con $\omega = 2$ ya que este parámetro no afecta en el análisis local o los puntos de equilibrio.

Para las simulaciones presentadas a continuación, cada figura del diagrama de fase contiene un hipervínculo. Al hacer clic en la figura, se abre el navegador con una versión interactiva de la misma en la red. Invitamos al lector a navegar algunas de estas simulaciones.

5.1. Regiones.

Para revisar el comportamiento del sistema dinámico en cada región se mencionan las condiciones que se cumplen, esto con apoyo de la tabla 4.5.1, y se señalan las implicaciones en el sistema dinámico; recordemos que la tabla 4.5.1 contiene el resumen de la información descrita por los discriminantes Δ_1 (3.1.5) y Δ_2 (4.3.1), además de las condiciones de estabilidad descritas por el criterio de Routh-Hurwitz en las tablas 3.1.2 y 4.4.2 y la condición de existencia de los puntos distintos del origen, con todo esto se realizan las soluciones computacionales con ayuda del código que se encuentra en el apéndice.

Las regiones seleccionadas corresponden a aquellas que no presentan inestabilidad global en la integración numérica; es decir, aquellas donde las soluciones no divergen la solución hacia el infinito. Las regiones que no han sido simuladas pueden ser analizadas utilizando el código proporcionado en el apéndice.

5.1.1. Región 2.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen no se cumple, (es decir, $\varepsilon/\eta < -1$), lo que implica que solamente existe un solo punto de equilibrio en el origen.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que corresponde con tabla (3.1.2) se cumplen, por lo tanto, la parte real de la raíz del polinomio característico es negativa para las tres raíces, lo que implica que el origen es estable.

Además se tiene que $\Delta_1 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas con parte real distinta de cero, esto dado que

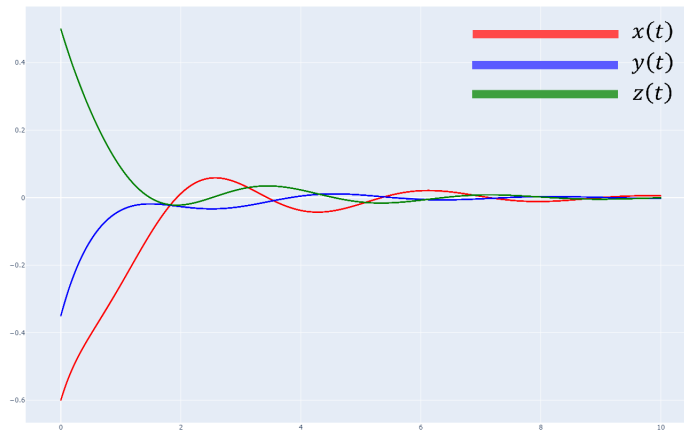
no cumple ninguna de las condiciones para la existencia de parte real cero en el polinomio característico para el punto en el origen, esto implica que los valores cercanos al punto P_1 generan oscilaciones alrededor del mismo.

En resumen, existe un único punto de equilibrio en el origen, dicho punto es estable y genera oscilaciones alrededor del punto.

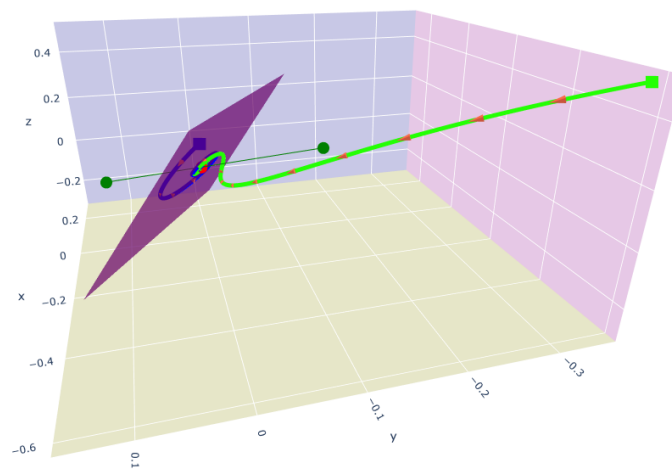
5.1.1.1. Simulación computacional.

La integración numérica de la figura 5.1.1a muestra lo esperado, es decir, un punto de equilibrio en el origen estable con oscilaciones alrededor del mismo.

Se construye el diagrama fase en la figura 5.1.1b, donde se señala el vector propio asociado al valor propio real del sistema de ecuaciones diferenciales y el plano asociado a los valores propios complejos, además se indica la dirección del campo vectorial.



(a) Integración numérica región 2.



(b) Diagrama fase de la región 2 con condiciones iniciales $X_1 = (-0.6, -0.35, 0.5)$ y $X_2 = (0, 0, 0.1)$.

Figura 5.1.1: Solución numérica del sistema con $\eta = -0.5$, $\varepsilon = 1$, $t_f = 10$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.2. Región 3.

La condición para generar puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen tres puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen P_1 , que corresponde con tabla (3.1.2) no se cumplen, por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), las condiciones de la tabla (4.4.2) no se cumplen, en consecuencia, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica los puntos P_2 y P_3 son inestables.

Además, como se tiene que $\Delta_1 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico en el punto en el origen P_1 y estas raíces tienen parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen generan oscilaciones alrededor del origen.

Además, se tiene que $\Delta_2 > 0$ entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico para los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$, esto implica que los valores cercanos a dichos puntos generan oscilaciones alrededor de los mismos.

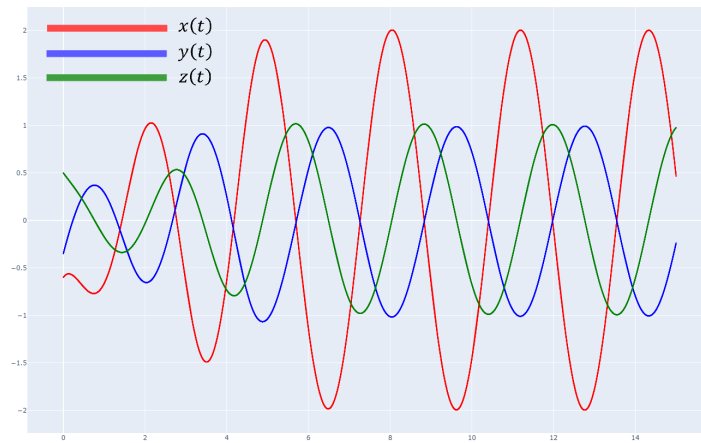
En resumen, existen tres puntos de equilibrio, los 3 puntos son inestables y generan oscilaciones alrededor de cada punto.

5.1.2.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que

proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Integración numérica de la región 3.

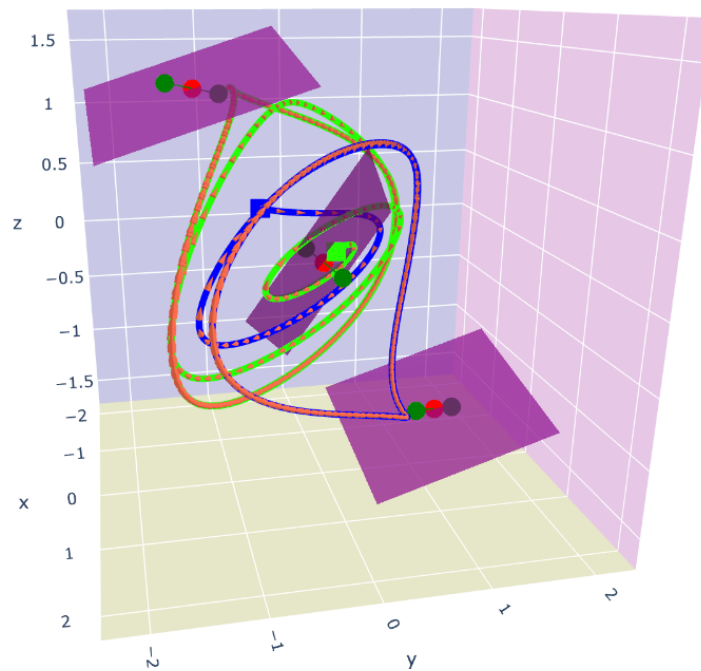
(b) Diagrama fase de la región 3 con condiciones iniciales $X_1 = (-0.6, -0.35, 0.5)$, $X_2 = (0.5, 1.5, -1.4)$, $X_3 = (-0.5, -1.5, 1.4)$.

Figura 5.1.2: Solución numérica del sistema con $\eta = 1.$, $\varepsilon = 1.$, $t_f = 15$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.3. Región 4.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple, es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen tres puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que corresponde con tabla (3.1.2) no se cumplen, por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), las condiciones de la tabla (4.4.2) se cumplen, en consecuencia, todas las raíces tienen parte real negativa, lo que implica que los puntos P_2 y P_3 son estables.

Además, como se tiene que $\Delta_1 > 0$ entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico en el punto en el origen P_1 y estas raíces tienen parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen generan oscilaciones alrededor del origen.

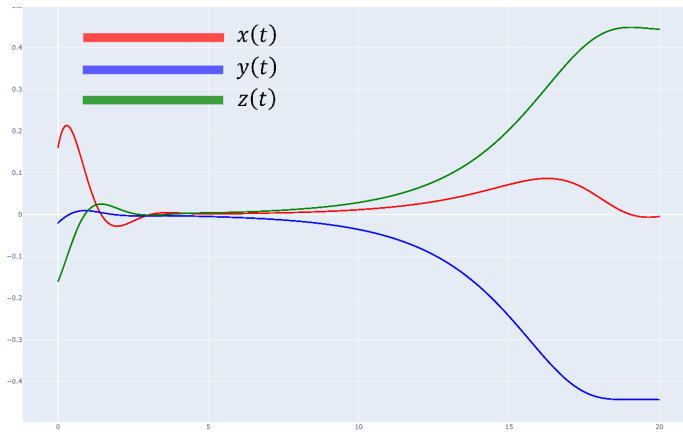
Además, se tiene que $\Delta_2 > 0$ entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico para los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$, esto implica que los valores cercanos a dichos puntos generan oscilaciones alrededor de los mismos.

En resumen, existen tres puntos de equilibrio, el punto en el origen es inestable y los puntos P_2 y P_3 son estables y todos los puntos generan oscilaciones alrededor de cada uno.

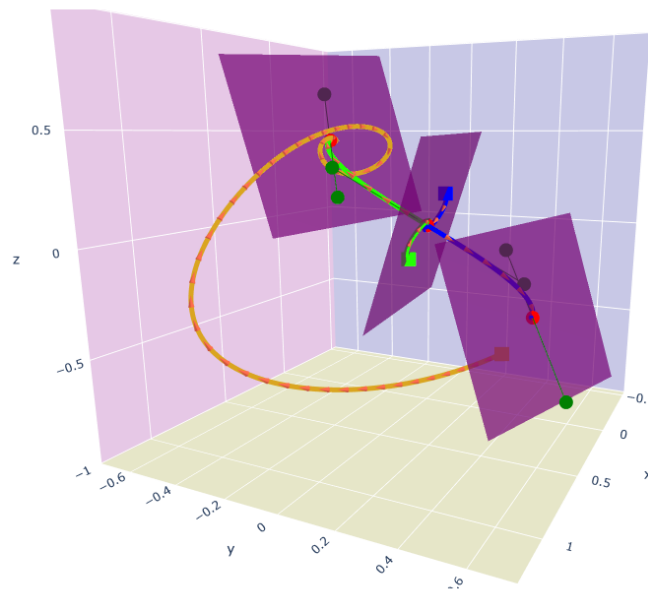
5.1.3.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Integración numérica de la región 4.



(b) Diagrama fase de la región 4 con condiciones iniciales $X_1 = (0.16, -0.02, -0.16)$, $X_2 = (-0.16, 0.02, 0.16)$, $X_3 = (-0.35, 0.23, -0.8)$.

Figura 5.1.3: Solución numérica del sistema con $\eta = -1.25$, $\varepsilon = 1.0$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.4. Región 5.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen tres puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que corresponde con tabla (3.1.2) no se cumplen, por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), condiciones de la tabla (4.4.2) no se cumplen; en consecuencia, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que los puntos P_2 y P_3 son inestables.

Además, como se tiene que $\Delta_1 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico en el punto en el origen P_1 y estas raíces tiene parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen generan oscilaciones alrededor del origen.

Además, se tiene que $\Delta_2 > 0$ entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico para los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$, esto implica que los valores cercanos a dichos puntos presentan oscilaciones alrededor de los mismos.

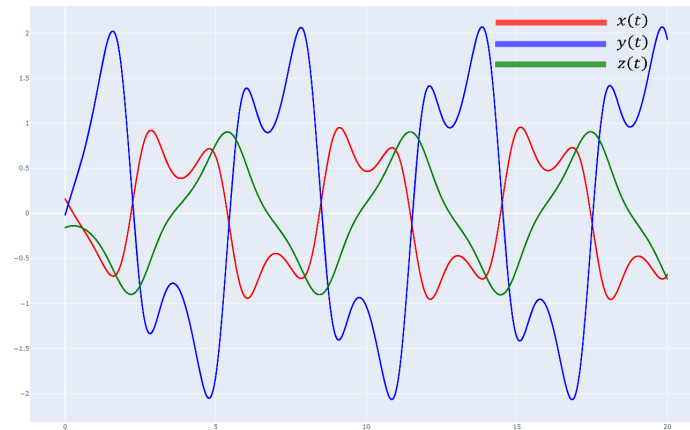
En resumen, existen tres puntos de equilibrio, los tres puntos son inestables y todos los puntos generan oscilaciones alrededor de cada uno.

5.1.4.1. Simulación computacional.

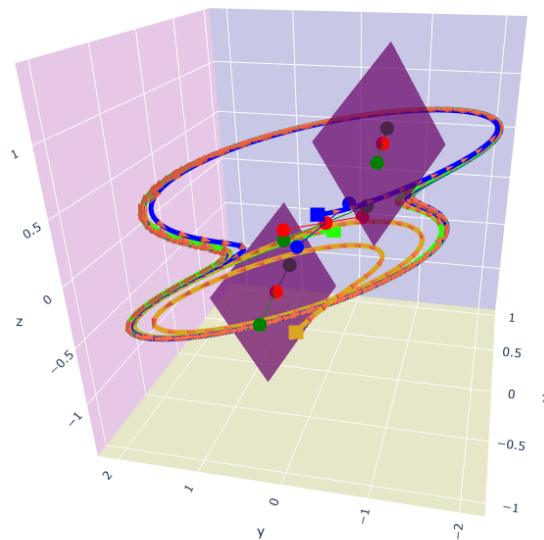
Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que

proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Integración numérica de la región 5.



(b) Diagrama fase de la región 5 con condiciones iniciales $X_1 = (0.16, -0.02, -0.16)$, $X_2 = (-0.16, 0.02, 0.16)$, $X_3 = (-0.35, 0.23, -0.8)$.

Figura 5.1.4: Solución numérica del sistema con $\eta = -1.25$, $\varepsilon = 1.0$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.5. Región 6.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen tres puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que corresponde con tabla (3.1.2) no se cumplen, por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), las condiciones de la tabla (4.4.2) se cumplen; en consecuencia, todas las raíces tienen parte real negativa, lo que implica que los puntos P_2 y P_3 son estables.

Además se tiene que $\Delta_1 < 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico en el origen P_1 y estas raíces tienen parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen NO generan oscilaciones alrededor del origen.

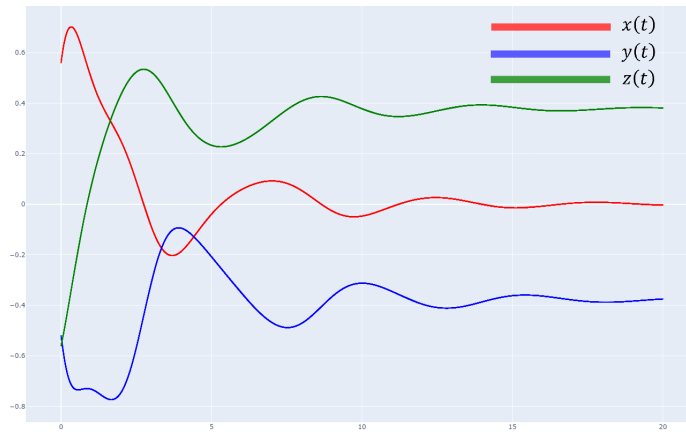
Además, se tiene que $\Delta_2 > 0$ entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico para los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$, esto implica que los valores cercanos a dichos puntos generan oscilaciones alrededor de los mismos.

En resumen, existen 3 puntos de equilibrio, el origen es inestable y los dos puntos fuera del origen son estables, además el punto P_1 no presenta oscilaciones alrededor y los puntos P_2 y P_3 presentan oscilaciones.

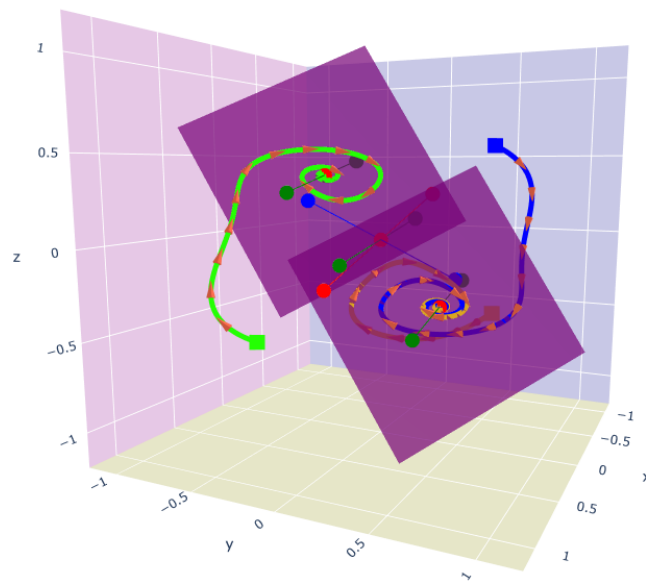
5.1.5.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Integración numérica de la región 6.



(b) Diagrama fase de la región 6 con condiciones iniciales $X_1 = (0.56, -0.52, -0.55)$, $X_2 = (-0.56, 0.52, 0.56)$, $X_3 = (-0.55, 0.53, -0.5)$.

Figura 5.1.5: Solución numérica del sistema con $\eta = -3.5$, $\varepsilon = 3.0$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.6. Región 7.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen no se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta < -1$, lo que implica que solamente existe un solo punto de equilibrio en el origen.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que corresponde con tabla (3.1.2) se cumplen, por lo tanto, la parte real de la raíz del polinomio característico es negativa para las tres raíces, lo que implica que el origen es estable.

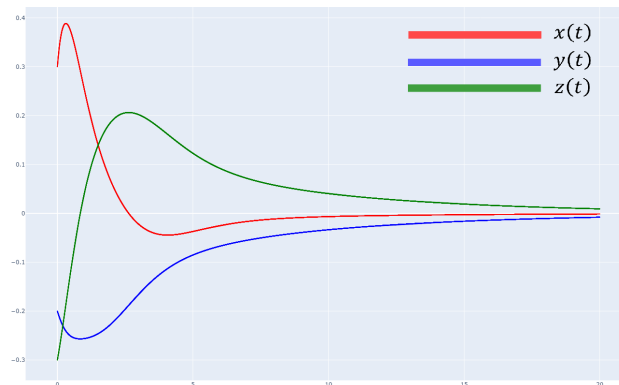
Además se tiene que $\Delta_1 < 0$, entonces por el teorema A2.2 se tienen tres raíces reales distintas en el polinomio característico en el punto en el origen P_1 , esto implica que los valores cercanos al origen no presentan oscilaciones alrededor del origen.

En resumen, existe un único punto de equilibrio, el punto P_1 , es decir, el origen el cual no presenta oscilaciones alrededor.

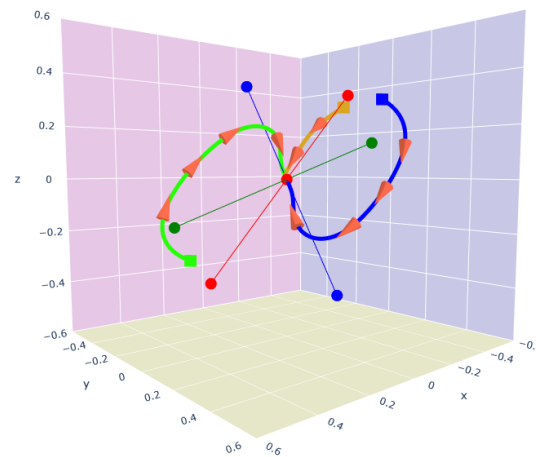
5.1.6.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales del único punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno al punto de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad del puntos de equilibrio y las regiones de atracción.



(a) Integración numérica de la región 7.



(b) Diagrama fase de la región 7 con condiciones iniciales
 $X_1 = (0.56, -0.52, -0.55)$, $X_2 = (-0.56, 0.52, 0.56)$,
 $X_3 = (-0.55, 0.53, -0.5)$.

Figura 5.1.6: Solución numérica del sistema con $\eta = -2.14$, $\varepsilon = 2.2$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.7. Región 9.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen tres puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que corresponde con tabla (3.1.2) no se cumplen, por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), condiciones de la tabla (4.4.2) no se cumplen; en consecuencia, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que los puntos P_2 y P_3 son inestables.

Además, como se tiene que $\Delta_1 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas para el polinomio característico en el punto P_1 y estas raíces tiene parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen presentan oscilaciones alrededor del origen.

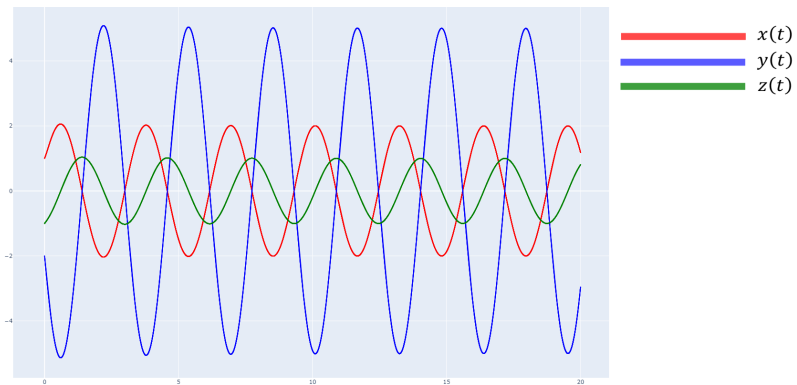
Además, se tiene que $\Delta_2 < 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas para el polinomio característico en los puntos P_2 y P_3 , con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$; esto implica que los valores cercanos a dichos puntos no presentan oscilaciones alrededor de los mismos.

En resumen, el sistema cuenta con tres puntos de equilibrio. El punto P_1 exhibe oscilaciones a su alrededor y es inestable, mientras que los puntos P_2 y P_3 no presentan oscilaciones y también son inestables. Es importante destacar que, aunque todos los puntos son inestables según el análisis de la linealización, el sistema presenta un ciclo límite, como se evidencia en la simulación computacional mostrada en la figura (5.1.7b). Este comportamiento indica la presencia de dinámicas no lineales que estabilizan las trayectorias globales en un patrón oscilatorio cerrado, a pesar de la inestabilidad local de los puntos de equilibrio.

5.1.7.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Integración numérica de la región 9.

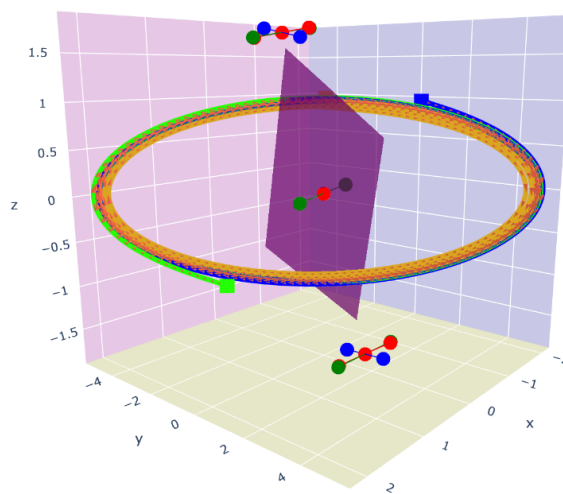
(b) Diagrama fase de la región 9 con condiciones iniciales $X_1 = (1, -2, -1)$, $X_2 = (-1, 2, 1)$, $X_3 = (-1, -2, 1)$.

Figura 5.1.7: Solución numérica del sistema con $\eta = 2.5$, $\varepsilon = 5$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.8. Región 10.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen tres puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico del punto de equilibrio en el origen $P_1 = (0, 0, 0)$ (4.1.7), que se muestran en la tabla (3.1.2) no se cumplen. Por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), dadas en la tabla (4.4.2) se cumplen, en consecuencia, todas las raíces tiene parte real negativa, lo que implica los puntos P_2 y P_3 son estables.

Además, como se tiene que $\Delta_1 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas para el polinomio característico en el origen y estas raíces tiene parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen presentan oscilaciones alrededor.

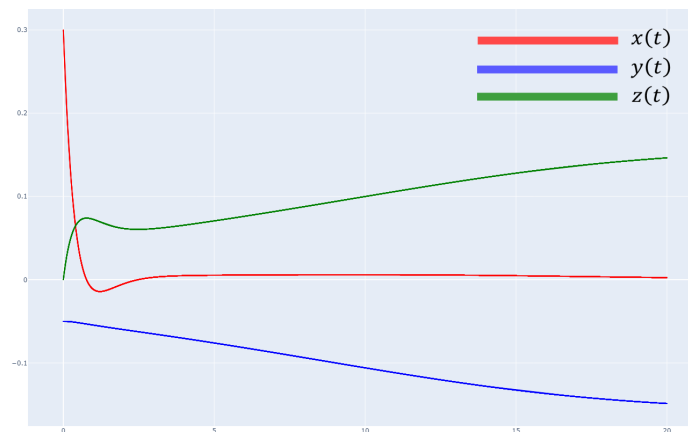
Además, se tiene que $\Delta_2 < 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas para el polinomio característico en los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$, esto implica que los valores cercanos a dichos puntos no presentan oscilaciones alrededor de los mismos.

En resumen, el sistema presenta tres puntos de equilibrio. El punto P_1 exhibe oscilaciones a su alrededor y es inestable, mientras que los puntos P_2 y P_3 no presentan oscilaciones y son estables.

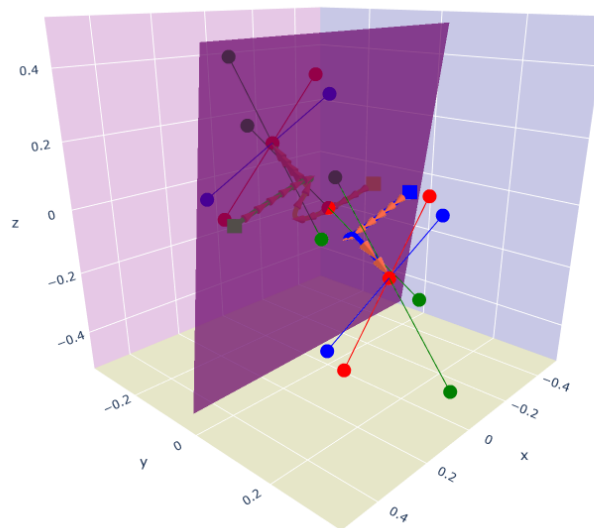
5.1.8.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Integración numérica de la región 10.



(b) Diagrama fase de la región 10 con condiciones iniciales $X_1 = (0.3, -0.05, 0)$, $X_2 = (-0.3, 0.05, 0)$, $X_3 = (-0.3, -0.05, 0)$.

Figura 5.1.8: Solución numérica del sistema con $\eta = -2$, $\varepsilon = 1.95$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

5.1.9. Región 12.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen 3 puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico asociado al punto de equilibrio en el origen (4.1.7), dada en la tabla (3.1.2) no se cumplen; por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico de los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.8) y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ (4.1.9), dadas en la tabla (4.4.2) se cumplen; en consecuencia, todas las raíces tiene parte real negativa, lo que implica los puntos P_2 y P_3 son estables.

Además $\Delta_1 < 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas para el polinomio característico en el origen P_1 y estas raíces tiene parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$, esto implica que los valores cercanos al origen no presentan oscilaciones alrededor del origen.

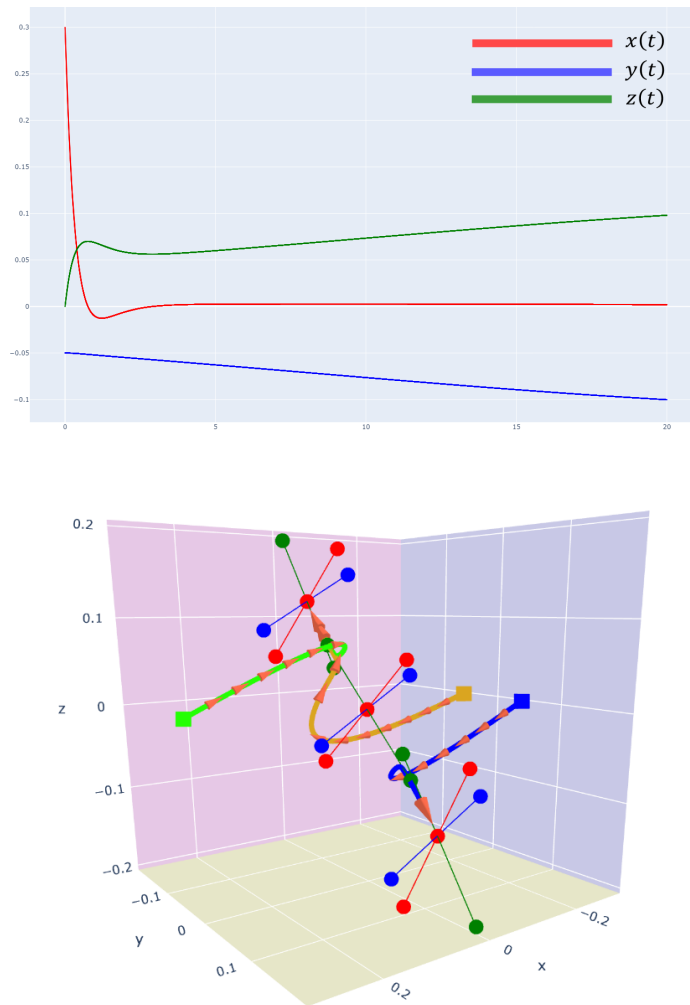
Además, se tiene que $\Delta_2 < 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico para los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$; esto implica que los valores cercanos a dichos puntos no presentan oscilaciones alrededor de los mismos.

En resumen, el sistema cuenta con tres puntos de equilibrio. El punto P_1 genera oscilaciones a su alrededor y es inestable, mientras que los puntos P_2 y P_3 no generan oscilaciones y son estables.

5.1.9.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema. La soluciones que se generaran en las regiones



(a) Diagrama fase de la región 12 con condiciones iniciales $X_1 = (0.3, -0.05, 0)$, $X_2 = (-0.3, 0.05, 0)$, $X_3 = (-0.3, -0.05, 0)$.

Figura 5.1.9: Solución numérica del sistema con $\eta = -2.13$, $\varepsilon = 2.1$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

10 y 12 son similares pero se puede observar la diferencia en los diagramas fase de las figuras 5.1.8b y 5.1.9a ya que el origen es distinto en la linealización.

5.1.10. Región 16.

La condición para generar los puntos de equilibrio fuera del origen sí se cumple; es decir, $\varepsilon/\eta \geq -1$. Esto implica que existen 3 puntos de equilibrio.

Las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico asociado al punto de equilibrio en el origen, se muestra en la tabla (3.1.2) no se cumplen; por lo tanto, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica que el punto P_1 es inestable.

Por otra parte, las condiciones dadas por el criterio de Routh-Hurwitz para el polinomio característico asociados a los puntos de equilibrio $P_2 = (0, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$ y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \varepsilon/\eta}, \sqrt{1 + \varepsilon/\eta})$, que se muestran en la tabla (4.4.2) no se cumplen; en consecuencia, al menos una raíz tiene parte real positiva, lo que implica los puntos P_2 y P_3 son inestables.

Además, como $\Delta_1 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico en el punto en el origen P_1 y estas raíces tiene parte real distinta de cero ya que no cumplen las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = 0$. Esto implica que los valores cercanos al origen presenta oscilaciones alrededor del origen.

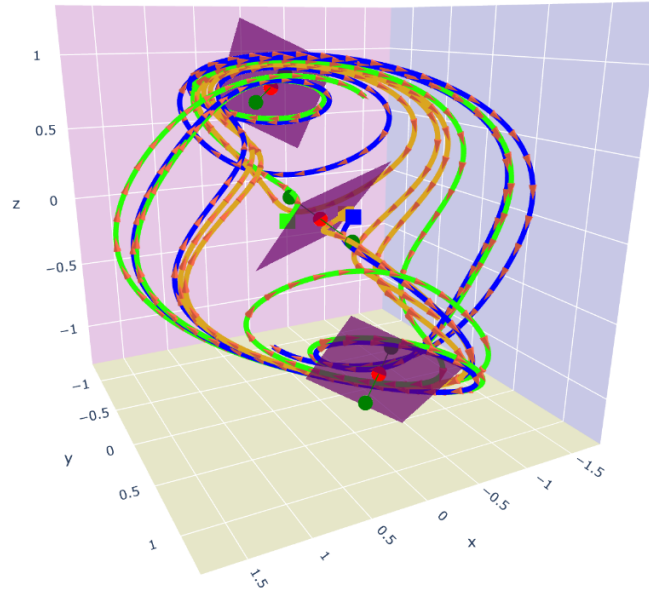
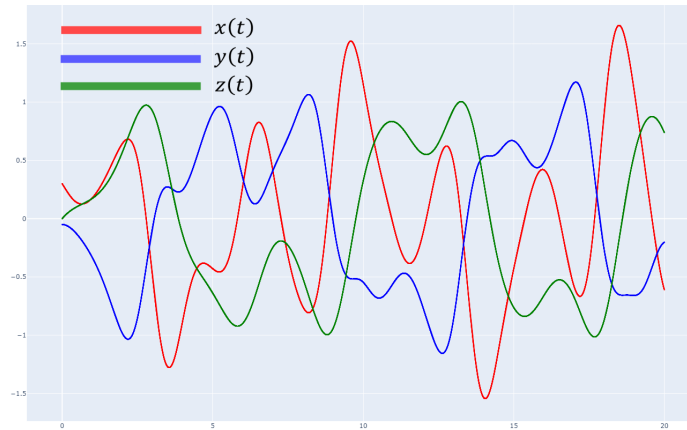
Además, se tiene que $\Delta_2 > 0$, entonces por el teorema A2.2 se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas en el polinomio característico para los puntos P_2 y P_3 con parte real distinta de cero ya que no cumplen con las condiciones $\varepsilon = -\eta$ ni $\eta = -\frac{3}{2}\varepsilon$; esto implica que los valores cercanos a dichos puntos presentan oscilaciones alrededor de los mismos.

En resumen, el sistema cuenta con tres puntos de equilibrio: P_1 , P_2 y P_3 . Todos estos puntos generan oscilaciones a su alrededor y son inestables, lo que indica que las trayectorias cercanas divergen de los puntos de equilibrio.

5.1.10.1. Simulación computacional.

Se construye el diagrama de fase correspondiente, en el cual se destacan los vectores propios asociados a los valores propios reales de cada punto de equilibrio en el sistema de ecuaciones diferenciales. Adicionalmente, se representa el plano definido por los vectores propios correspondientes a la parte oscilatoria, es decir, aquellos relacionados con los valores propios complejos conjugados.

En el diagrama también se indica la dirección del campo vectorial, lo que proporciona una visión clara de cómo las trayectorias evolucionan en torno a los puntos de equilibrio y cómo interactúan con las estructuras inherentes del sistema. Este enfoque permite identificar características esenciales de la dinámica, como la estabilidad de los puntos de equilibrio, las regiones de atracción y los patrones de oscilación que surgen del sistema.



(a) Diagrama fase de la región 16 con las condiciones $X_1 = (0.3, -0.05, 0)$, $X_2 = (-0.3, 0.05, 0)$, $X_3 = (-0.3, -0.05, 0)$.

Figura 5.1.10: Solución numérica del sistema con $\eta = -2.5$, $\varepsilon = 1$, $t_f = 20$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, $X_0 = (0.3, -0.05, 0)$.

Las regiones no simuladas no cumplen con el criterio de Routh-Hurwitz para la

estabilidad en ninguno de los puntos al realizar la linealización, y las simulaciones correspondientes muestran comportamientos inestables. Sin embargo, en las regiones tres, cinco, nueve y dieciséis, aunque tampoco se satisfacen las condiciones de estabilidad según dicho criterio, se identifican parámetros específicos donde las soluciones convergen hacia un atractor, revelando un comportamiento dinámico más estructurado en contraste con las regiones restantes. Esto sugiere la presencia de fenómenos que no pueden ser completamente explicados únicamente por la estabilidad lineal.

5.2. Curvas.

Para revisar el comportamiento del sistema dinámico en la curvas que son las fronteras que dividen a las regiones, se menciona las condiciones que se cumplen, esto con apoyo de la tabla 4.5.2, y se señalan las implicaciones en el sistema dinámico, posteriormente se agregan las soluciones computacionales que se describen a detalle en el capítulo simulaciones computacionales.

Las curvas que no han sido simuladas pueden ser obtenidas utilizando la librería del anexo, siguiendo las mismas ideas desarrolladas.

Existen casos, donde las raíces de los polinomios característicos asociados a cada puntos del sistema de ecuaciones diferenciales, tienen parte real nula, es decir que la linealización genera resultados sobre el comportamiento local, para ello es necesario incluir una aproximación de orden más alto, ya sea orden dos o superior.

Estas condiciones corresponden con,

- $\eta = 0$ (4.5.7) para $P_1 = (0, 0, 0)$, esta condición genera raíces complejas imaginarias puras conjugadas.
- $2\eta = -3\varepsilon$ (4.5.13) para $P_2 = (0, \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\eta}}, -\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\eta}})$ y $P_3 = (0, -\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\eta}}, \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\eta}})$, esta condición genera raíces complejas imaginarias puras conjugadas.
- $\eta = -\varepsilon$ (4.5.1) que es valida para todos los puntos de equilibrio, esta condición con $\varepsilon \neq 0$ genera un cero como raíz de los polinomios característicos asociados a los puntos de equilibrio.

Bajo las curvas que cumplan estas condiciones existe la posibilidad de una bifurcación en el sistema de ecuaciones diferenciales, es decir, un cambio en la topología del comportamiento en el sistema de ecuaciones diferenciales.

5.2.1. Análisis.

En primer lugar se analiza la condición $\varepsilon = -\eta$, esta condición es válida para las curvas Γ_1 a Γ_4 , las curvas Γ_1 y Γ_3 son la frontera de las regiones de estabilidad de los polinomios característicos asociados a todos los puntos de equilibrio. Por el lado contrario las curvas Γ_2 y Γ_4 no cumplen con las condiciones de estabilidad, por lo que, estas curvas en la parte lineal ya son inestables.

Se toma el sistema dinámico (4.0.7) en forma matricial y se sustituye la condición $\varepsilon = -\eta$ y $\omega = 2$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\varepsilon x - 4y - 4z \\ \frac{\varepsilon}{2}x^2z + 2\varepsilon z^3 \\ x \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

Para este sistema es posible reescribirlo separando la parte lineal y no lineal,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + F \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2\varepsilon x - 4y - 4z \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon}{2}x^2z + 2\varepsilon z^3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

recordar que $\varepsilon = -\eta$ genera que todos los puntos de equilibrio sean idénticos al origen, por lo tanto, al calcular las matrices Jacobianas (3.1.3) y (4.2.1) en los puntos P_1, P_2 y P_3 bajo la relación $\varepsilon = -\eta$ resultan en la misma matriz, la cual esta dada por,

$$J = \begin{bmatrix} -2\varepsilon & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

De la misma manera, los polinomios característicos (3.1.4) y (4.2.4) coinciden bajo la condición $\varepsilon = -\eta$, y están dadas por,

$$H_{P_1}(\lambda) = H_{P_2}(\lambda) = H_{P_3}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \varepsilon\omega\lambda^2 + \omega^2),$$

cuyas las raíces son $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}$. Se tiene un valor propio nulo en λ_1 , por lo tanto, no se puede realizar la linealización. Para ello se calcula la variedad central asociada a ese valor propio nulo.

Para $\sqrt{\varepsilon^2 - 4}$ los valores para $|\varepsilon| < 2$ y $|\varepsilon| > 2$ resultan respectivamente en números complejos y reales, por lo que, el calculo de las variedades centrales es diferente.

Además, la condición $\varepsilon > 0$ es una condición para la estabilidad para todos los puntos de equilibrio, por lo tanto, esto comprueba que las curvas Γ_2 y Γ_4 son inestables. El caso $|\varepsilon| = 2$ genera valores propios repetidos, lo que implica, que el

calco de la variedad central también es diferente.

Definición 5.2.1 (Variedad invariante). *Wiggins (2003)* Un conjunto invariante $S \in \mathbb{R}$ es una variedad invariante C^r ($r \geq 1$), si S tiene la estructura de una variedad diferenciable C^r ($r \geq 1$).

Ahora, \mathbb{R}^n puede ser expresado como la suma directa de tres subespacios denotados por E^s , E^u y E^c , los cuales se definen *Wiggins (2003)*, respectivamente como,

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{e_1, \dots, e_s\}, \\ E^u &= \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}, \quad s + u + c = n, \\ E^c &= \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}, \end{aligned}$$

donde $\{e_1, \dots, e_s\}$ son los vectores propios generalizados de la matriz asociada a la linealización del campo vectorial, que corresponden con los valores propios generalizados, con parte real negativa, $E^u = \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$ son con los vectores propios generalizados que corresponden con los valores propios con parte real positiva y $E^c = \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$ son los vectores propios que corresponden con los valores propios con parte real nula. E^s , E^u y E^c son referidos como los subespacios estable, inestable y central, respectivamente.

La variedad central para campos vectoriales se descompone el campo vectorial en sus componentes en E^c y E^s , tienen la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y), \\ \dot{y} &= Bx + g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

donde,

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \quad Df(0, 0) = 0 \\ g(0, 0) &= 0, \quad Dg(0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Definición 5.2.2 (Variedad central). *Wiggins (2003)* Una variedad invariante es llamada variedad central del sistema de ecuaciones (5.2.3) si localmente puede ser

representado de la siguiente manera:

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para δ suficientemente pequeña.

Hay que señalar que las condiciones $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$ implican que $W^c(0)$ es tangente a E^c en $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 5.2.1 (Existencia de la variedad central). *Existe una variedad central C^r para (5.2.3). La dinámica de (5.2.3) restringida a la variedad central es, para una u suficientemente pequeña, dada por el campo vectorial c -dimensional,*

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^c. \quad (5.2.5)$$

El siguiente resultado implica que la dinámica de (5.2.5) cerca de $u = 0$ determina la dinámica de (5.2.3) cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

Teorema 5.2.2 (Estabilidad del sistema dinámico).

- *Suponer que la solución cero de la variedad central (5.2.5) es asintóticamente estable (o inestable), entonces la cero solución del campo vectorial (5.2.3) es también es asintóticamente estable (o inestable).*
- *Suponer que la cero solución de la variedad central (5.2.5) es estable, entonces si $(x(t), y(t))$ es una solución del campo vectorial (5.2.3) con $(x(0), y(0))$ suficientemente pequeño, existe una solución $u(t)$ de la variedad central (5.2.5) que cuando $t \rightarrow \infty$,*

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

Lo que implica que la dinámica es capturada por la variedad central.

La dinámica es capturada por la variedad central, lo que significa la estabilidad del campo vectorial se encuentra en la variedad central, este teorema establece que para condiciones iniciales del sistema suficientemente cerca al origen, las

trayectorias a través de estas condiciones se acercan asintóticamente a la variedad central.

Para calcular la variedad central se debe retomar la definición [Wiggins \(2003\)](#),

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}. \quad (5.2.6)$$

Para δ suficientemente pequeña, dada la invariancia de la dinámica de (5.2.3), se genera una ecuación diferencial parcial cuasi-lineal donde $h(x)$ debe satisfacerse. Para ello,

1. Las coordenadas (x, y) para cualquier punto en $W^c(0)$ debe satisfacer,

$$y = h(x). \quad (5.2.7)$$

2. Al diferenciar (5.2.7) con respecto al tiempo, implica que las coordenadas (\dot{x}, \dot{y}) de cualquier punto en $W^c(0)$ debe satisfacer,

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (5.2.8)$$

3. Cualquier punto en $W^c(0)$ obedece la dinámica generada por (5.2.3), por lo tanto, al sustituir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, h(x)), \\ \dot{y} &= Bh(x) + g(x, h(x)), \end{aligned}$$

en (5.2.8) genera,

$$\mathcal{N}(h(x)) \equiv Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (5.2.9)$$

La ecuación (5.2.9) es una ecuación diferencial parcial cuasi-lineal que $h(x)$ debe satisfacer, se necesita encontrar la solución a esta ecuación para obtener la variedad central.

Es probable que resolver (5.2.9) sea más difícil que el problema original, sin embargo, es posible calcular una aproximación mediante una serie de potencias para aproximar a $h(x)$.

5.2.2. Variedad central asociada a la curva

Se escoge la curva Γ_1 para calcular la variedad central asociada, ya que la curva Γ_3 tienen valores propios conjugados y las curvas Γ_2 y Γ_4 tienen una variedad inestable asociada.

Para realizar el calculo de la variedad central hay que obtener la forma canónica de Jordan, es decir, los vectores propios asociados a cada valor propio. Para el valor $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2\varepsilon & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 \longleftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon & -4 & -4 \end{bmatrix} R_3 + 2\varepsilon R_1 \rightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ahora se calcula el kernel,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con lo que se tienen las expresiones,

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \\ v_2 + v_3 &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, el kernel corresponde con,

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} v_3.$$

Para $\lambda_{2,3}$,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -2\varepsilon + \varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & -4 & -4 \\ 0 & \varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \longleftrightarrow R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 / (\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & -4 & -4 \end{bmatrix} R_3 + (\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4})R_1 \rightarrow R_3 \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora de calcula el kernel,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con lo que se tienen las expresiones,

$$\begin{aligned} v_2 &= 0, \\ v_1 + (\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - 4})v_3 &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, el kernel corresponde con,

$$V_{2,3} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4})v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_3,$$

Una vez calculados los tres vectores propios asociados a su respectivo valor propio, se escribe la forma canónica de Jordan de la matriz (5.2.2),

$$\begin{bmatrix} -2\varepsilon & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}\Lambda P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ | & | & | \end{bmatrix},$$

donde,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

con la matriz P y P^{-1} se tiene las transformaciones lineales para cambiar entre los espacios (x, y, z) y (u, v, w) , entonces para la transformación $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} -y \\ \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + y \left(-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) z \\ \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + y \left(-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) z \end{bmatrix},$$

entonces para la transformación $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4} & -\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4} \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} v(-\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4}) + w(-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4}) \\ -u \\ u + v + w \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora se separan la parte lineal y no lineal del sistema de ecuaciones (5.2.1),

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + F \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right),$$

ahora se usa el cambio de coordenadas $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$,

$$P \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + F \left(P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right),$$

la expresión anterior es multiplicada por P^{-1} ,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = P^{-1}AP \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + P^{-1}F \left(P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right).$$

La expresión $P^{-1}AP$ resulta ser la matriz diagonal de la forma canónica de Jordan,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + P^{-1}F \left(P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right),$$

lo que implica que bajo la transformación $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ que el flujo del sistema dinámico está alineado con los vectores de la linealización, para encontrar la información del flujo en la dirección el valor propio nulo observaremos la parte no lineal bajo la transformación $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} F \left(\begin{bmatrix} v(-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) \\ -u \\ u + v + w \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

es calculada la parte no lineal,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \left(0.5 \left(v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) \right)^2 + 2.0(u + v + w)^2 \right) (u + v + w) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

se calcula el ultimo producto de matrices para obtener la parte no lineal bajo las coordenadas (u, v, w) ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) \right)^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w) \\ \varepsilon \left(-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \left(v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) \right)^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w) \\ \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \left(v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) \right)^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esta expresión reescribe el sistema (5.2.1) de la forma (5.2.3). Ahora la idea es aproximar las funciones v y w en función de u , para ello se toman los polinomios

mayores a uno, es decir, la parte que no captura la linealización,

$$v(u) = a_0u^2 + a_1u^3, \quad (5.2.10)$$

$$w(u) = b_0u^2 + b_1u^3, \quad (5.2.11)$$

para calcular $h(u)$ se debe satisfacer la condición (5.2.9), para ello se identifican todas las partes de la condición,

$$h(u) = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0u^2 + a_1u^3 \\ b_0u^2 + b_1u^3 \end{bmatrix},$$

$$A = \lambda_1 = 0,$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} & 0 \\ 0 & -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \end{bmatrix},$$

$$f(u, h(u)) = -\varepsilon \left(\frac{1}{2} (v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}))^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w),$$

$$g(u, h(u)) = \begin{bmatrix} \varepsilon \left(-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} (v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}))^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w) \\ \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} (v(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}) + w(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}))^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w) \end{bmatrix}.$$

Debe de notarse que las expresiones $f(u, h(u))$ y $g(u, h(u))$ siguen expresadas en función de (u, v, w) para aplicar la condición es hace falta sustituir v y w por las aproximaciones definidas en $h(u)$. Ahora se aplica la condición (5.2.9),

$$Dh(u)[Au + f(u, h(u))] - Bh(u) - g(u, h(u)) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 2a_0u + 3a_1u^2 \\ 2b_0u + 3b_1u^2 \end{bmatrix} f(u, h(u)) - \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0u^2 + a_1u^3 \\ b_0u^2 + b_1u^3 \end{bmatrix} - g(u, h(u)) = 0.$$

Para aproximar la expresión de $h(u)$ se necesitan los coeficientes, al simplificar la expresión anterior se obtienen productos de orden superior a tres, para facilitar la solución de los coeficientes se toma las potencias de u hasta orden tres, con lo que la condición para (5.2.9) para este ejercicio resulta en:

$$\begin{bmatrix} a_0\varepsilon u^2 + a_0u^2\sqrt{\varepsilon^2 - 4} + a_1\varepsilon u^3 + a_1u^3\sqrt{\varepsilon^2 - 4} + \frac{\varepsilon^2 u^3}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} - \varepsilon u^3 \\ b_0\varepsilon u^2 - b_0u^2\sqrt{\varepsilon^2 - 4} + b_1\varepsilon u^3 - b_1u^3\sqrt{\varepsilon^2 - 4} - \frac{\varepsilon^2 u^3}{\sqrt{\varepsilon^2 - 4}} - \varepsilon u^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Se factoriza términos en común,

$$\begin{bmatrix} \left(a_1 \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 4}} - \epsilon \right) u^2 + a_0 \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) u^3 \\ \left(b_1 \left(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) - \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 4}} - \epsilon \right) u^2 + b_0 \left(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) u^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo que queda por resolver es cuando los coeficientes de los polinomios son iguales a cero,

$$\begin{aligned} a_1 \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 4}} - \epsilon &= 0, \\ a_0 \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) &= 0, \\ b_1 \left(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) - \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 4}} - \epsilon &= 0, \\ b_0 \left(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) &= 0, \end{aligned}$$

no olvidar que la curva Γ_1 tiene la condición de $\epsilon > 2$, por lo tanto, la solución para los coeficientes resulta en,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4}, \\ b_0 &= 0, \\ b_1 &= \frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4}, \end{aligned}$$

con esta información se puede obtener $h(u)$,

$$h(u) = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 \\ \left(\frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 \end{bmatrix}, \quad (5.2.12)$$

Ahora con esta información podemos obtener el comportamiento sobre la variedad central \dot{u} ,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, h(u)), \\ \dot{u} &= -\epsilon \left(\frac{1}{2} \left(v \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) + w \left(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4} \right) \right)^2 + 2(u + v + w)^2 \right) (u + v + w), \end{aligned}$$

Se usan las aproximaciones para v y w ,

$$\begin{aligned}
\dot{u} &\approx -\epsilon \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 (\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 4}) + \left(\frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 (\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 4}) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. 2 \left(u + \left(\frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 + \left(\frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 \right)^2 \right) \\
&\quad \left(u + \left(\frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 + \left(\frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 \right), \\
&\approx -\epsilon \left(\frac{1}{2} \left(\left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 4}} \right) u^3 + \left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 4}} \right) u^3 \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. 2 \left(u + \left(\frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 + \left(\frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 \right)^2 \right) \\
&\quad \left(u + \left(\frac{-\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 + \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 + \left(\frac{-\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4}}{\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 4} - 4} \right) u^3 \right), \\
&\approx -\epsilon \left(\frac{1}{2} (2\epsilon u^3)^2 + 2 (u + \epsilon^2 u^3)^2 \right) (u + \epsilon^2 u^3), \\
&\approx -\epsilon (2\epsilon^2 u^6 + 2 (u^2 + 2\epsilon^2 u^4 + \epsilon^4 u^6)) (u + \epsilon^2 u^3), \\
&\approx -2\epsilon u^3 - 6\epsilon^3 u^5 - 2\epsilon^3 u^7 - 6\epsilon^5 u^7 - 2\epsilon^5 u^9 - 2\epsilon^7 u^9
\end{aligned}$$

se toman el términos de menor orden,

$$\dot{u} \approx -2\epsilon u^3, \quad (5.2.13)$$

ahora se puede estudiar el campo vectorial sobre la variedad central de forma gráfica como se observa en la figura 5.2.1.

La variedad central es localmente estable, ya que el campo vectorial asociado a la variedad es estable para toda u .

Es posible realizar una integración numérica sobre una de estas curvas para verificar los resultados, dicha integración se encuentra en la figura 5.2.2.

La integración numérica muestra que existe un lento decaimiento hacia el cero en las 3 soluciones. Se puede observar el diagrama fase y la correspondiente variedad central en la figura .

Debe hacerse notar que la expresión (5.2.13), es valida para la curva Γ_1 y Γ_2 , pero Γ_2 se encuentra en el segundo cuadrante, es decir, en lugar de tener una variedad estable se tiene una variedad inestable, además la estabilidad de la variedad central también es inestable ya que la expresión (5.2.13) es validad para ambas curvas

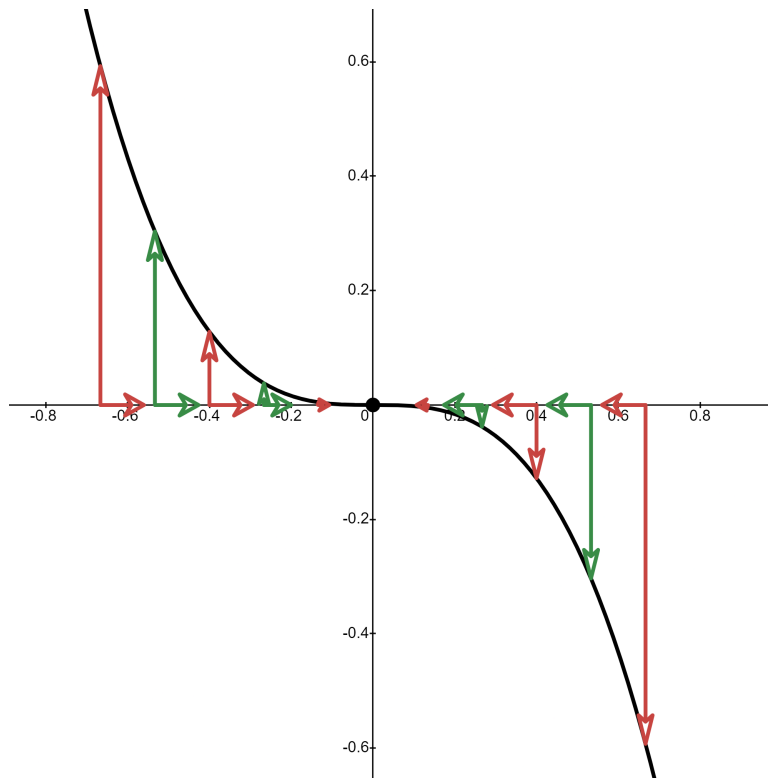


Figura 5.2.1: Campo vectorial sobre la variedad central presentada en la curva Γ_1 con $\varepsilon = 3$.

y para $\varepsilon < 0$ se invierte el sentido del flujo del campo vectorial sobre la variedad central, es decir, es inestable.

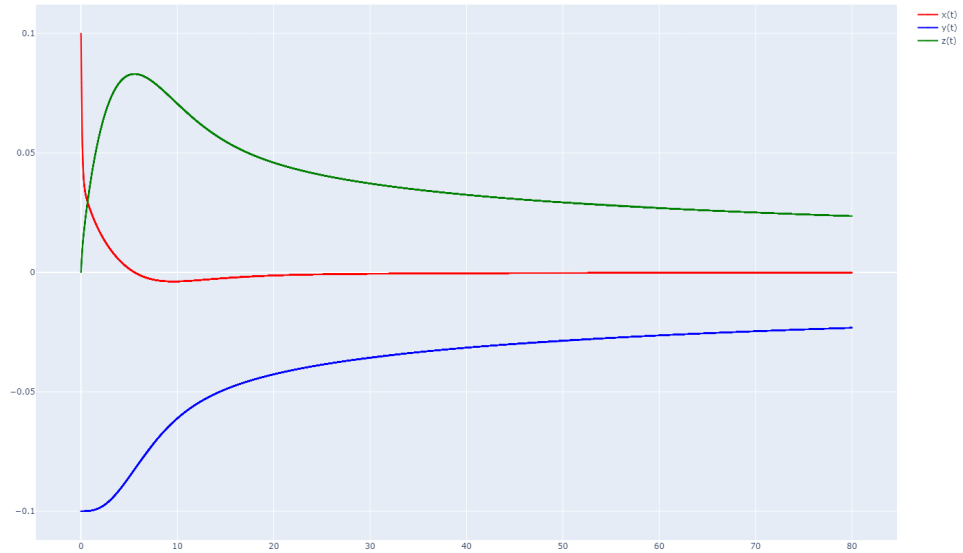


Figura 5.2.2: Integración numérica bajo la condición $\varepsilon = -\eta$, con $\varepsilon = 3$.

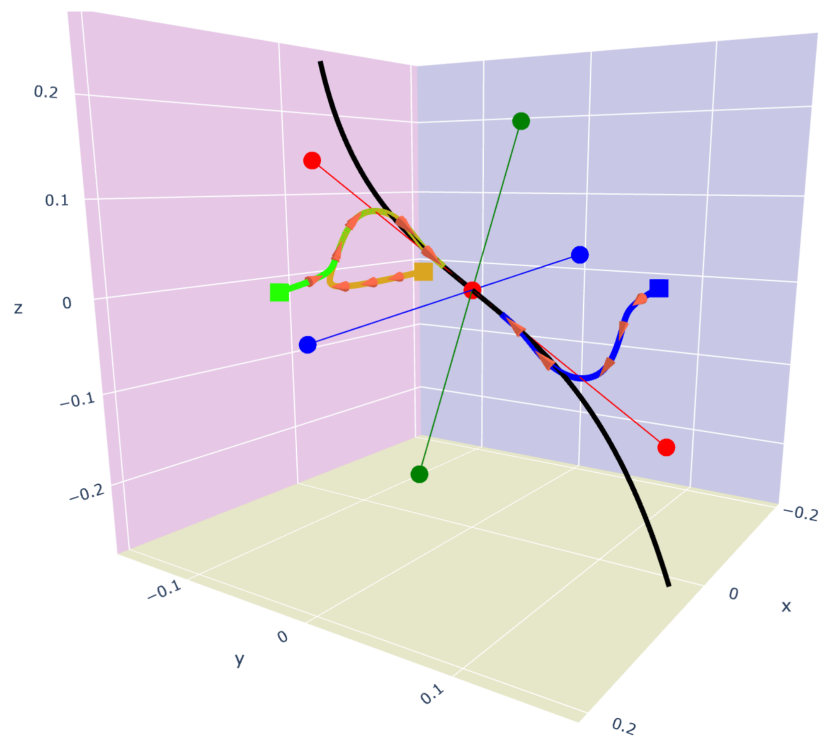


Figura 5.2.3: Diagrama Fase de la curva Γ_1 y su variedad central asociada

Capítulo 6

Caos en el sistema de Rocard.

6.1. Atractor caótico.

Para la información correspondiente a las sección 6.1 se ha tomado como referencia básica a [Strogatz \(2018\)](#).

6.1.1. Caos.

En general el **caos** es un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que exhibe una dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Algunas definiciones destacables,

Definición 6.1.1. ([Robinson. \(1995\)](#)) Una función f en un espacio métrico X se dice que es caótico si tienen un conjunto invariante Y , además cumple que f es transitivo sobre Y y f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en Y .

Definición 6.1.2. ([Wiggins \(2003\)](#)) Λ se dice que es caótica si, la solución al sistema dinámico autónomo $\Phi(t, \mathbf{x})$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales y $\Phi(t, \mathbf{x})$ es topológicamente transitivo en Λ .

Definición 6.1.3. ([Alligood et al. \(2000\)](#)) Sea una función f en la recta real \mathbb{R} y $\mathcal{O} = \{x_1, x_2, \dots\}$ una órbita acotada de f . Entonces la órbita es caótica si \mathcal{O} no es asintóticamente periódica y \mathcal{O} tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

Definición 6.1.4. ([Devaney \(1989\)](#)) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Se dice que f es caótica si cumple las siguientes tres

condiciones:

1. **Transitividad topológica:** f es topológicamente transitiva.
2. **Densidad de los puntos periódicos:** El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X .
3. **Sensibilidad a las condiciones iniciales:** Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Definición 6.1.5 (Transitividad topológica [Devaney \(1989\)](#)). Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Se dice que f es topológicamente transitiva si para cualesquiera abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Para la definición de caos en los sistemas dinámicos hay que tener diferentes factores, se seguirá con la definición de [Devaney \(1989\)](#) pero primero es necesario destacar elementos fundamentales.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = F(X), \tag{6.1.1}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave (de clase \mathbb{C}^∞).

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, denotemos por $x(t) = \phi(t, \mathbf{x})$ a la solución de (6.1.1) tal que

$$x(0) = \phi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \tag{6.1.2}$$

De esta forma, cuando la solución está definida en todo \mathbb{R} , tenemos una función

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x}).$$

Es usual denotar, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t, \bullet) = \phi_t(\bullet)$. En consecuencia, de (6.1.2),

tenemos que

$$\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es la identidad,

$$\phi_0(\mathbf{x}) = id_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}. \quad (6.1.3)$$

Además, si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, entonces para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1}(\mathbf{x}) = \phi_{t_2}(\phi_{t_1}(\mathbf{x})) = \phi_{t_2+t_1}(\mathbf{x}). \quad (6.1.4)$$

Es de notar que (6.1.3) y (6.1.4) implican que la inversa $(\phi_t)^{-1}$ existe y está dada por $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

Una función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi(t, \mathbf{x})$, tal que satisface las igualdades (6.1.3) y (6.1.4) se conoce como un sistema dinámico.

La definición de caos de Devaney busca capturar tres aspectos fundamentales del comportamiento caótico en sistemas dinámicos deterministas. A continuación se explica cada una de las condiciones que debe cumplir una función $f : X \rightarrow X$ sobre un espacio métrico (X, d) para ser considerada caótica en el sentido de Devaney:

1. Transitividad topológica:

Esta propiedad implica que la dinámica de f no está confinada a una región del espacio: cualquier parte del espacio eventualmente se puede mezclar con cualquier otra.

Lo que señala es que cualquier región del espacio eventualmente se mueve, bajo iteración de f , lo suficientemente cerca de cualquier otra región.

2. Densidad de los puntos periódicos:

El conjunto de puntos periódicos es denso en X , lo que significa que en cualquier parte del espacio, por más pequeña que sea, hay puntos periódicos arbitrariamente cercanos.

Para todo $x \in X$ y todo entorno abierto U de x , existe un punto periódico $p \in U$, es decir, $f^k(p) = p$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

El comportamiento caótico puede parecer aleatorio, está tejido sobre una

estructura de comportamiento repetitivo (puntos periódicos) que están por todas partes.

3. Sensibilidad a las condiciones iniciales:

Esta propiedad formaliza la idea de que una pequeña perturbación en las condiciones iniciales puede llevar a trayectorias muy diferentes con el tiempo.

Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Lo que implica que no importa qué tan cerca elijas dos puntos, sus órbitas eventualmente se separarán por al menos δ . Esta es la llamada “dependencia sensible a las condiciones iniciales”.

Por tanto, el caos en un sistema dinámico requiere sensibilidad a condiciones iniciales, transitividad topológica, la presencia de un comportamiento aperiódico o densidad de puntos periódicos en una región invariante y acotada del espacio de fases.

6.1.2. Atractor extraño.

Definición 6.1.6 (Atractor). *Un atractor es un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, cerrado, que satisface las siguientes propiedades,*

1. *A es un conjunto invariante,*

$$\forall \mathbf{x}_0 \in A, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t, \mathbf{x}_0) \in A.$$

Es decir, cualquier trayectoria que comienza en A , permanece en A para todo tiempo t .

2. *Existencia de una región de atracción U ,*

$$\exists U \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto, con } A \subset U, \text{ tal que si } \mathbf{x}_0 \in U,$$

$$\text{entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, \mathbf{x}_0), A) = 0.$$

Esto significa que existe una vecindad U de A donde todas las trayectorias

que comienzan en U tienden a A cuando $t \rightarrow \infty$.

3. A es mínima,

$$\nexists A' \subset A \text{ con } A' \neq A \text{ tal que } A' \text{ satisface 1 y 2.}$$

Es decir, no hay subconjuntos propios de A que sean invariantes y que atraigan un conjunto abierto de condiciones iniciales.

6.1.2.1. Ejemplos de atractores.

Punto fijo estable. Supongamos que \mathbf{x}_* es un **punto fijo estable**, es decir,

$$\Phi(t, \mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_* \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y existe una vecindad abierta U de \mathbf{x}_* tal que para toda $\mathbf{x}_0 \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*.$$

Por demostrar que el conjunto $A = \{\mathbf{x}_*\}$ es un atractor de acuerdo con la definición.

1. **Invarianza:** Tomamos $\mathbf{x}_0 \in A = \{\mathbf{x}_*\}$. Entonces, por ser un punto fijo, $\Phi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y claramente $\mathbf{x}_* \in A$. Así, A es invariante.
2. **Existencia de una región de atracción:** Por hipótesis, existe un abierto U tal que para toda $\mathbf{x}_0 \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*.$$

Observamos que

$$d(\Phi(t, \mathbf{x}_0), A) = \|\Phi(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_*\|,$$

así que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, \mathbf{x}_0), A) = 0.$$

Por lo tanto, U es una región de atracción para A .

3. **Minimalidad:** El conjunto $A = \{\mathbf{x}_*\}$ no tiene subconjuntos propios no vacíos. El único subconjunto propio es el vacío, el cual no es invariante. Por lo tanto, A es mínima.

Concluimos que $\{\mathbf{x}_*\}$ es un atractor.

En general todo sistema con un punto fijo estable contiene un atractor.

Ciclo límite. Sea el sistema:

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Observación: La ecuación para r es independiente de θ y describe un sistema radial clásico con un ciclo límite en $r = 1$.

Ahora para la ecuación

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

posee tres soluciones estacionarias: $r = 0$, que es inestable, y $r = 1$, que es estable. La solución $r(t)$ tiende a 1 para cualquier condición inicial $r_0 \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Esto implica que todas las trayectorias, salvo la solución trivial en el origen, tienden al círculo $r = 1$ en el plano (x, y) .

Por lo tanto, el sistema tiene un **ciclo límite** estable, definido por el conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ahora se verificar que el ciclo límite A cumple con la definición formal de atractor.

1. **Invarianza:** Si $(x_0, y_0) \in A$, entonces $r(0) = 1$, y la ecuación para $r(t)$ implica que $r(t) = 1$ para todo t . Así, la trayectoria permanece en el conjunto A , cumpliendo:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t, (x_0, y_0)) \in A.$$

2. **Existencia de una región de atracción:** Para cualquier condición inicial (x_0, y_0) con $x_0^2 + y_0^2 > 0$, la solución $r(t)$ de la ecuación $\dot{r} = r(1 - r^2)$ satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1.$$

Por lo tanto, existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que toda

trayectoria con condición inicial en U converge a A . Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\Phi(t, (x_0, y_0)), A) = 0.$$

3. **Minimalidad:** No existe subconjunto propio $A' \subset A$ que sea invariante y que atraiga un conjunto abierto de condiciones iniciales, pues toda la dinámica asintótica fuera del origen converge precisamente al círculo $r = 1$, y no a subconjuntos propios de él.

El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es un ciclo límite estable y cumple con las tres condiciones de la definición de atractor. Por lo tanto, el sistema dado tiene un atractor no trivial que es un ciclo límite.

Definición 6.1.7 (Atractor extraño). *Un atractor $A \subset \mathbb{R}^n$ se denomina **extraño** si, además de cumplir con la definición de atractor, muestra dependencia sensible a las condiciones iniciales. Esto implica que:*

1. ***A es un atractor:** Satisface las propiedades de invariancia, atracción y minimalidad.*
2. ***A tiene al menos un exponente de Liapunov positivo.** Esto implica que dos trayectorias $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ con condiciones iniciales cercanas $\mathbf{x}_1(0) \approx \mathbf{x}_2(0)$ divergen exponencialmente con el tiempo:*

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)\|, \quad \text{con } \lambda > 0.$$

3. ***A está contenido en una región acotada del espacio fase:***

$$\exists K > 0 \text{ tal que } \forall \mathbf{x}_0 \in A, \quad \sup_{t \geq 0} \|\Phi_t(\mathbf{x}_0)\| < K.$$

Es decir, aunque las trayectorias divergen exponencialmente en ciertas direcciones, permanecen dentro de una región finita del espacio fase.

6.1.2.2. Ejemplos de atractores extraños

Sea el sistema dinámico extendido de tipo Lorenz dado por:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = -X - Y - XZ + BX, \\ \dot{Z} = -Z + XY, \end{cases} \quad (6.1.5)$$

donde $B > 0$ es un parámetro que puede ser suficientemente grande.

En [Ovsiyannikov and Turaev \(2016\)](#), los autores demuestran que para ciertos valores de los parámetros (en particular, para $\gamma = 1$, $\delta > 0$, y $B \gg 1$), el sistema anterior presenta un atractor de Lorenz en el sentido geométrico introducido por Afraimovich–Bykov–Shilnikov. La prueba se basa en la detección de una mariposa homoclínica (homoclinic butterfly) asociada a un punto de silla con valor de silla cero, junto con la verificación rigurosa de uno de los criterios de Shilnikov para el nacimiento del atractor de Lorenz.

Siguiendo la definición formal de atractor geométrico de tipo Lorenz discutida en [Ovsiyannikov and Turaev \(2016\)](#), el conjunto que se identifica como atractor cumple con las siguientes propiedades clave:

- Invarianza topológica del conjunto.
- Existencia de foliaciones invariantes con propiedades de contracción/expansión.
- Dinámica transitable y densa en órbitas periódicas tipo silla.
- Robustez estructural frente a perturbaciones suaves.
- Atracción asintótica de todas las órbitas contenidas en una vecindad absorbente.

Por lo tanto, este conjunto cumple con los criterios para ser considerado un **atractor extraño**, lo que confirma de manera rigurosa la existencia del atractor de Lorenz bajo un conjunto abierto de valores paramétricos.

El resultado citado en [Ovsiyannikov and Turaev \(2016\)](#) constituye una demostración analítica del nacimiento de un atractor de Lorenz en un modelo extendido tridimensional. Este trabajo aporta evidencia matemática sólida sobre la presencia de caos robusto en una amplia clase de sistemas dinámicos, más allá del modelo clásico de Lorenz.

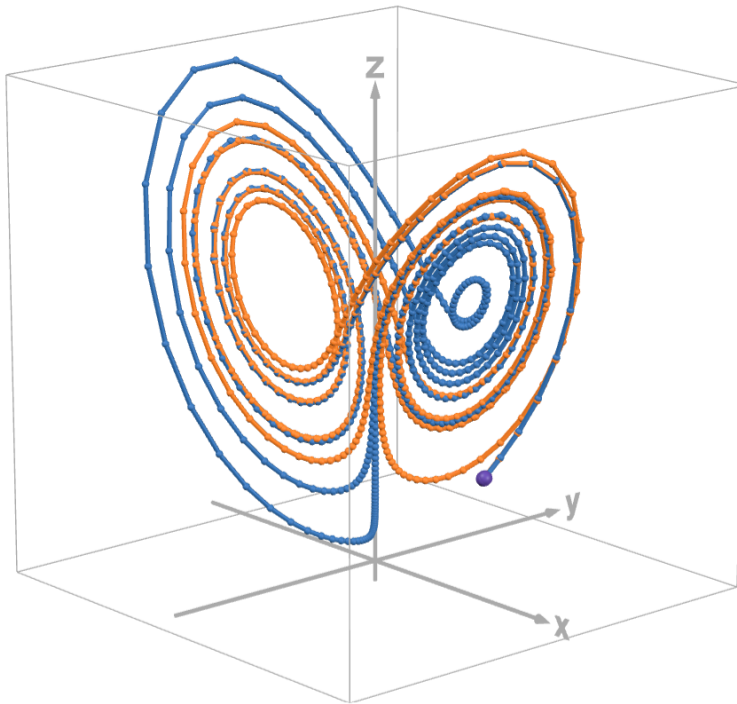


Figura 6.1.1: Solución numérica para el sistema de Lorenz con dos condiciones iniciales cercanas.

6.1.3. Divergencia exponencial de trayectorias.

Si el sistema posee un atractor con dependencia sensible a las condiciones iniciales, entonces cualesquiera dos trayectorias o soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales $\Phi(t, \mathbf{x}_1)$ y $\Phi(t, \mathbf{x}_2)$ con condiciones iniciales tales que $0 < \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \ll 1$ muy próximas divergen exponencialmente en el tiempo. Específicamente, si se considera la diferencia entre las trayectorias,

$$\delta(t) = \Phi(t, \mathbf{x}_1) - \Phi(t, \mathbf{x}_2), \quad (6.1.6)$$

entonces existe un exponente de Liapunov positivo $\lambda > 0$ tal que

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta(0)\|e^{\lambda t}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (6.1.7)$$

Esto implica que, a medida que $t \rightarrow \infty$, las trayectorias evolucionan hacia comportamientos completamente distintos, aunque inicialmente eran casi idénticas.

En consecuencia, las trayectorias cercanas pueden terminar en cualquier región

del atractor, lo que tiene una implicación práctica significativa: la predicción a largo plazo en un sistema con estas propiedades se vuelve prácticamente imposible, ya que pequeñas variaciones o errores en medición en las condiciones iniciales se amplifican de manera exponencial, lo que implica que llevará a resultados completamente diferentes a pesar de venir de condiciones iniciales cercanas.

Las trayectorias $\Phi(t, \mathbf{x}_1)$ y $\Phi(t, \mathbf{x}_2)$ sobre el atractor en el tiempo t están dado por

$$\Phi(t, \mathbf{x}_2) = \Phi(t, \mathbf{x}_1) + \delta(t),$$

donde $\delta(t)$ es un pequeño vector de separación con una longitud inicial tal que $0 < \|\delta(0)\| \ll 1$.

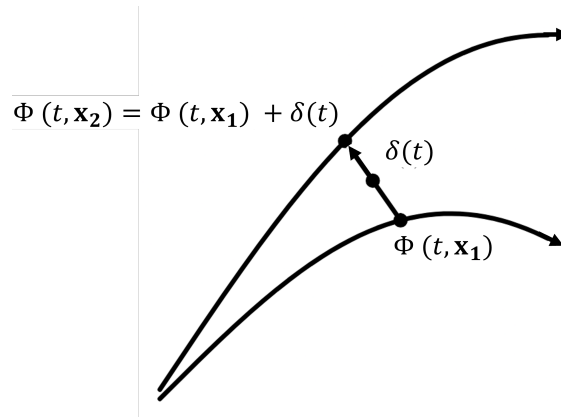


Figura 6.1.2: Sensibilidad de las condiciones iniciales $\Phi(t, \mathbf{x}_1)$ y $\Phi(t, \mathbf{x}_2)$ separadas por el vector $\delta(t)$.

En un sistema dinámico con un atractor extraño, la distancia entre dos trayectorias inicialmente cercanas, denotada por $\delta(t)$ (6.1.6), crece hasta alcanzar un valor máximo determinado por el tamaño del atractor.

donde $\delta(0)$ es la separación inicial y $\lambda > 0$ es el exponente de Liapunov. Esta expresión indica que las trayectorias cercanas se separan exponencialmente en el tiempo. Al aplicar el logaritmo natural a ambos lados de la expresión (6.1.7),

$$\begin{aligned} \ln \|\delta(t)\| &\sim \ln \left(\|\delta(0)\| e^{\lambda t} \right), \\ \ln \|\delta(t)\| &\sim \ln \|\delta(0)\| + \lambda t \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Al graficar $\ln \|\delta(t)\|$ en función de t , se obtiene una curva que se aproxima a una

línea recta con pendiente positiva igual al exponente de Liapunov λ .

Este comportamiento confirma una de las condiciones para que el sistema presente un comportamiento caótico, ya que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conducen a diferencias macroscópicas en la evolución temporal de las trayectorias.

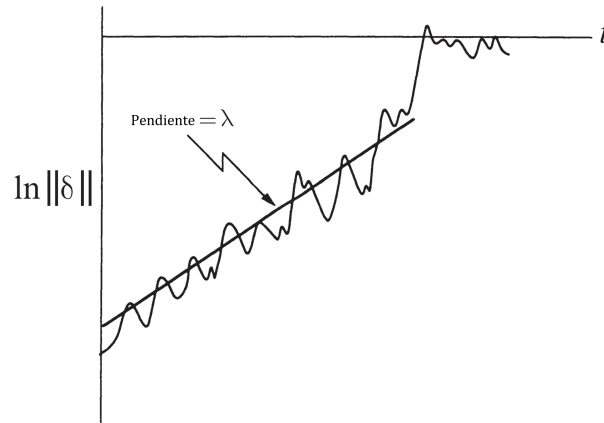


Figura 6.1.3: Gráfica $\ln \|\delta(t)\|$ vs t con pendiente λ .

Es necesario señalar algunos detalles adicionales sobre el comportamiento de la separación entre trayectorias,

1. **No linealidad exacta en la curva de separación:** La curva $\ln \|\delta(t)\|$ en función del tiempo nunca es exactamente una línea recta, ya que presenta ondulaciones debido a que la intensidad de la divergencia exponencial varía ligeramente a lo largo del atractor. Es importante que, la divergencia exponencial se detiene cuando la separación entre trayectorias es comparable al **diámetro** del atractor, ya que los atractores son objetos acotados. Este fenómeno explica la nivelación o saturación observada en la curva de la figura 6.1.3.
2. **Definición formal del exponente de Liapunov:** El número λ se suele llamar **exponente de Liapunov**, aunque este es un uso impreciso del término por dos razones:
 - En un sistema de dimensión n , existen en realidad n exponentes de Liapunov distintos, es decir, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, definidos de la siguiente manera,

$$\delta(t) \sim e^{I_n \Lambda t} \delta(0),$$

con $\delta(t), \Lambda \in \mathbb{R}^n$ e I_n es la matriz identidad de tamaño n .

Al considerar la evolución de una esfera infinitesimal con centro en \mathbf{x}_1 y radio $\|\delta(0)\|$. Durante su evolución del tiempo, la esfera se distorsionará hasta convertirse en un elipsoide infinitesimal, ya que cada dirección de la esfera crecerá con respecto a cada λ_k para $k = 1, \dots, n$.

La longitud del eje principal k -ésimo del elipsoide. Entonces, su evolución sigue la relación:

$$\delta_k(t) \sim \delta_k(0)e^{\lambda_k t},$$

donde λ_k son los exponentes de Liapunov. Para valores grandes de t , el diámetro del elipsoide está controlado por el exponente λ_k más positivo. Por lo tanto, el valor λ que hemos considerado hasta ahora es en realidad el **mayor exponente de Liapunov** del sistema.

- El valor de λ **depende levemente de la trayectoria elegida**. Para obtener una estimación precisa, se debe promediar sobre muchos puntos diferentes en la misma trayectoria para determinar el valor verdadero de λ .

Cuando un sistema dinámico posee un exponente de Liapunov positivo, existe un **horizonte temporal** más allá del cual la predicción del comportamiento del sistema deja de ser válida. Esto se debe a la sensibilidad con respecto las condiciones iniciales, como se ilustra en la Figura 6.1.4.

Si suponemos que realizamos una medición de las condiciones iniciales de un sistema experimental con una precisión extremadamente alta, aún así, debido a la naturaleza de las mediciones físicas, siempre existirá un error inicial $\|\delta(0)\|$ entre nuestra estimación y el estado inicial verdadero del sistema.

Dado que la evolución de la separación entre trayectorias cercanas sigue la relación (6.1.7) con $\lambda > 0$ el mayor exponente de Liapunov, esto implica que, para algún tiempo finito t^* , la magnitud $\|\delta(t^*)\|$ se vuelve comparable con la escala del sistema, haciendo que las predicciones sean inexactas. En consecuencia, siempre existe un tiempo crítico t^* en el cual la incertidumbre inicial amplificada por la dinámica del sistema alcanza un umbral significativo, más allá del cual cualquier predicción sobre la evolución del sistema pierde validez.

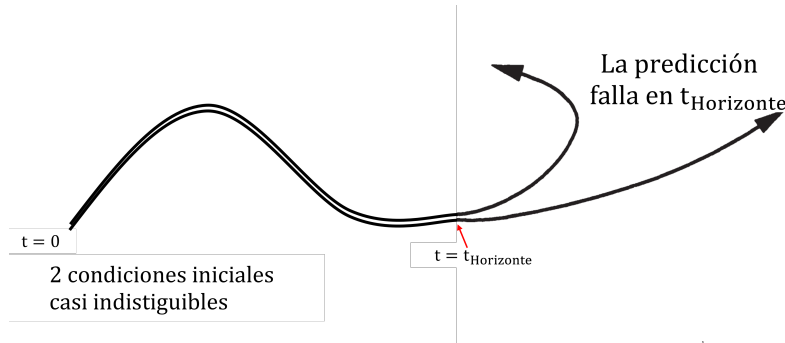


Figura 6.1.4: Fallo en la predicción por el error de medición $\|\delta(0)\|$.

Después de un tiempo t , la diferencia entre trayectorias en un sistema con exponente de Liapunov positivo crece según la expresión (6.1.7)

Si se define a como una medida de nuestra tolerancia, es decir, un margen de error aceptable en la predicción, entonces consideramos que la predicción es válida mientras se cumplan las desigualdades,

$$0 \leq \|\delta(t)\| \leq a.$$

Cuando la separación entre trayectorias supera este máximo, es decir, cuando $\|\delta(t)\| \geq a$, la predicción deja de ser confiable. Al resolver la ecuación $\|\delta(t)\| = a$ para t ,

$$\begin{aligned} \|\delta(0)\|e^{\lambda t} &= a, \\ e^{\lambda t} &= \frac{a}{\|\delta(0)\|}, \\ t &= \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\|\delta(0)\|} \right), \end{aligned}$$

se obtiene el tiempo característico después del cual la predicción pierde validez. Este valor temporal es conocido como **horizonte de predictibilidad**, el cual está aproximado por,

$$t_{\text{Horizonte}} \sim O \left(\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\|\delta(0)\|} \right) \right). \quad (6.1.9)$$

Este resultado indica que el horizonte de predictibilidad está determinado por el exponente de Liapunov λ y la relación entre la tolerancia a y el error inicial $\|\delta(0)\|$.

Sistemas con exponentes de Liapunov mayores tienen horizontes de predictibilidad más cortos, lo que implica una menor capacidad para realizar predicciones a largo plazo.

La dependencia logarítmica de $\|\delta(0)\|$ en la ecuación (6.1.9) es lo que dificulta la predicción a largo plazo. Para mostrar este efecto se considera un sistema con sensibilidad a las condiciones iniciales caracterizado por un exponente de Lyapunov λ .

Si se busca mantener un error en la predicción dentro de un margen de $1 \gg a > 0$, y se consideran dos condiciones iniciales

- La primera con un error inicial $\|\delta_1(0)\| = 10^{-n}$.
- La segunda con un error inicial $\|\delta_2(0)\| = 10^{-2n}$, que es 10^n veces más precisa que la primera.

Ambas condiciones iniciales evolucionan en el tiempo hasta alcanzar un máximo a , lo que define sus respectivos horizontes de predictibilidad $t_{\text{Horizonte},1}$ y $t_{\text{Horizonte},2}$, dados por la ecuación (6.1.9):

$$t_{\text{Horizonte},1} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a}{\|\delta_1(0)\|}\right)\right),$$

$$t_{\text{Horizonte},2} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a}{\|\delta_2(0)\|}\right)\right).$$

Al dividir ambas expresiones, se obtiene la razón entre los tiempos de predictibilidad,

$$\frac{t_{\text{Horizonte},2}}{t_{\text{Horizonte},1}} = \frac{\ln\left(\frac{a}{\|\delta_2(0)\|}\right)}{\ln\left(\frac{a}{\|\delta_1(0)\|}\right)} = \frac{\ln(a) - \ln(10^{-2n})}{\ln(a) - \ln(10^{-n})}.$$

es decir,

$$\frac{t_{\text{Horizonte},2}}{t_{\text{Horizonte},1}} = \frac{\ln(a) + 2n \ln 10}{\ln(a) + n \ln 10}.$$

Finalmente, al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{\text{Horizonte},2}}{t_{\text{Horizonte},1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a) + 2n \ln 10}{\ln(a) + n \ln 10} = 2.$$

Esto implica que, aunque la segunda condición inicial es 10^n veces más precisa que la primera, su horizonte de predictibilidad solo máximo el doble.

Este resultado resalta una característica fundamental de los sistemas con sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que mejorar la precisión de las condiciones iniciales no prolonga significativamente el tiempo durante el cual las predicciones son válidas, debido a la naturaleza logarítmica de la dependencia en $\|\delta(0)\|$.

6.2. Exponente de Lyapunov del sistema de Rocard.

El sistema de Rocard (4.0.1) - (4.0.3) presenta regiones de interés donde existe inestabilidad local pero en las simulaciones computacionales aparecen regiones atractoras de soluciones. Para este sistema determinista es posible calcular el exponente de Lyapunov y determinar sobre la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para el sistema de Rocard se calcula el exponente de Lyapunov computacionalmente. Al resolver la ecuación,

$$\|\delta(t)\| = \|\delta_0\|e^{\lambda t}$$

para λ , se obtiene,

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|} \right).$$

Para iniciar se considera una pequeña diferencia entre dos condiciones iniciales, tomando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (0.05 + 10^{-12}, 0.05, 0.05) \text{ y} \\ \mathbf{x}_2 &= (0.05 - 10^{-12}, 0.05, 0.05); \end{aligned}$$

de esta forma $\|\delta(0)\| = \|\Phi(0, \mathbf{x}_1) - \Phi(0, \mathbf{x}_2)\| \approx 1.99 \times 10^{-12}$. Para el sistema dinámico se escoge la región 16 con valores cercanos a la región cuatro, esta elección no es arbitraria, ya que la región 16 presenta inestabilidad en los análisis locales a los puntos fijos y la región 4 presenta estabilidad de la figura 4.5.4, por lo que se espera un comportamiento transitorio.

Los valores para los parámetros y la integración numérica corresponden con $\eta = -1.28$, $\omega = 2$, $\varepsilon = 0.5$, con un intervalo de tiempo $t \in (0, 140)$ y $n = 100,000$ iteraciones.

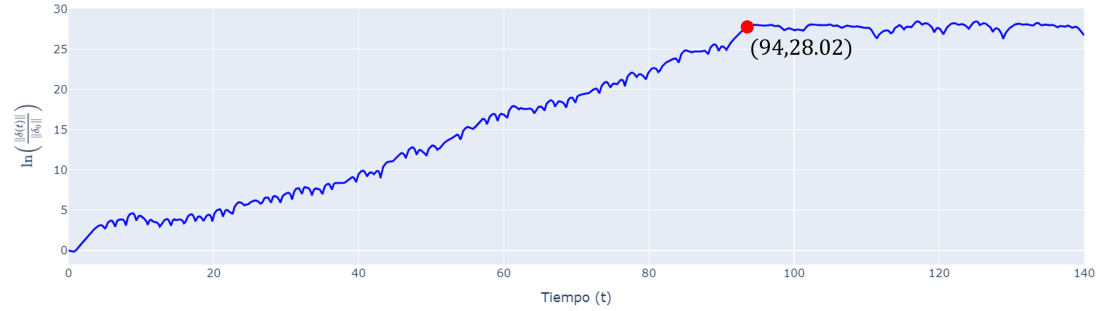


Figura 6.2.1: Gráfica $\ln\left(\frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta_0\|}\right)$ con respecto t para el sistema de Rocard

Se obtiene una imagen similar a la Figura 6.1.3, donde la pendiente puede calcularse a partir de dos puntos. El primer punto corresponde con el origen, dado que para $t = 0$ se tiene

$$\ln\left(\frac{\|\delta(0)\|}{\|\delta(0)\|}\right) = 0.$$

El segundo punto se encuentra en la Figura 6.2.1 en la coordenada (94, 28.02). Es decir, el exponente de Lyapunov se obtiene a partir de la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto (94, 28.02), por lo que,

$$\lambda = \frac{28.02}{94} \approx 0.29808.$$

Este resultado muestra que el sistema es sensible a las condiciones iniciales, lo cual es una de las características fundamentales para la presencia de caos en un sistema dinámico como se menciona en las sección 6.1.1.

6.3. Sistemas dinámicos discretos unidimensionales.

Para la información correspondiente a la sección 6.3 se ha tomado como referencia básica a [Alligood et al. \(2000\)](#). Para establecer que el sistema de Rocard exhibe comportamiento caótico, es necesario verificar las siguientes propiedades fundamentales:

- **Transitividad topológica:** f es topológicamente transitiva.
- **Densidad de los puntos periódicos:** El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X .
- **Sensibilidad a las condiciones iniciales:** pequeñas variaciones en el estado inicial del sistema conducen a trayectorias que divergen exponencialmente con el tiempo.

En la sección 6.2 se ha demostrado que el sistema de Rorcard es sensible a las condiciones iniciales. Además por construcción, el sistema de Rorcard es determinista. Para probar la transitividad topológica y la densidad de puntos periódicos se lleva a cabo una discretización del sistema, obteniendo una función discreta que conserva las propiedades esenciales de la dinámica del sistema continuo, de esta manera poder utilizar la definición de [Devaney \(1989\)](#).

Antes de proceder con el análisis del sistema discreto, es necesario introducir algunas definiciones y resultados fundamentales en teoría de sistemas dinámicos discretos. Posteriormente, se construirá un función de bifurcaciones discreta, es decir, una gráfica con los distintos valores de la órbita para distintos valores en un rango de un parámetro del sistema, el cual permitirá analizar el comportamiento de las soluciones en términos de la variación de los parámetros del sistema.

Definición 6.3.1 (Sistema dinámico discreto unidimensional). *Una función $f : A \rightarrow A$ con $A \subset \mathbb{R}$ se denomina sistema dinámico discreto unidimensional, por ejemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea x un punto en \mathbb{R} y sea f una función en \mathbb{R} . La órbita de x bajo f es el conjunto de puntos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ donde*

$$\underbrace{f \circ (f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = f^n(x).$$

El punto de partida x de la órbita se llama valor inicial de la órbita.

Definición 6.3.2 (Órbita). *Sea x un punto y sea f una función. La órbita de x bajo f es el conjunto de puntos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. El punto de partida x de la órbita se denomina valor inicial de la órbita.*

Definición 6.3.3 (Punto fijo). *Un punto p es un punto fijo de la función f si $f(p) = p$.*

6.3.1. Representación Gráfica.

Para un sistema dinámico discreto cuyo dominio es \mathbb{R} , se puede hacer un gráfico de una órbita, la idea es utilizar la siguiente técnica gráfica. Dibujar el gráfico de la función f junto con la línea diagonal $y = x$, correspondiente con la función identidad.

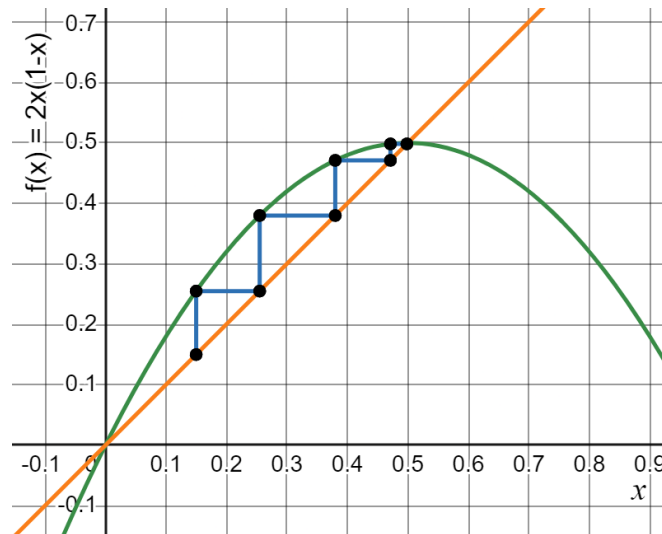


Figura 6.3.1: órbitade $f(x) = 2x(1 - x)$.

En la Figura 6.3.1, se muestran la gráfica de la función $f(x) = 2x(1 - x)$ y la diagonal $y = x$. Lo primero que queda claro en una imagen de este tipo es la ubicación de los puntos fijos de f , ya que corresponden a las intersecciones de $y = f(x)$ con la línea $y = x$, dado que en estos puntos el valor de entrada x y el valor de salida $f(x)$ son idénticos. Esto implica que x es un punto fijo. La figura 6.3.1 muestra que los puntos fijos de $f(x) = 2x(1 - x)$ son $x = 0$ y $x = 0.5$. Estos valores se obtiene al resolver la ecuación $2x(1 - x) = x$

La representación gráfica de una órbita se realiza de la siguiente manera: se toma el valor de entrada $x = 0.15$, que representa la condición inicial, y se calcula la salida $f(0.15)$. En la figura 6.3.1, el valor de salida es 0.255. Para encontrar $f(0.255)$, se considera 0.255 como el nuevo valor de entrada. Para convertir un valor de salida en un valor de entrada, se traza una línea horizontal desde el punto $(0.15, 0.255)$ hasta la línea diagonal $y = x$. En la figura 6.3.1, se observa un segmento de línea vertical que comienza en $x = 0.15$, representando la evaluación de la función, seguido por un segmento punteado horizontal que convierte la salida

en una nueva entrada para repetir el proceso iterativamente. De esta manera, la órbita queda definida por la sucesión

$$\{0.15, 0.255, 0.37995, 0.471176, \dots\}.$$

De la representación gráfica de la órbita con valor inicial $x = 0.15$ en la figura 6.3.1, se observa cómo esta converge al punto fijo $x = 0.5$. Esto significa que la órbita con condición inicial $x = 0.15$ queda atrapada en $x = 0.5$ y no puede moverse más allá de este punto fijo.

Finalmente, una regla sencilla para interpretar la representación gráfica de una órbita es la siguiente: Si la gráfica está por encima de la línea diagonal $y = x$, la órbita se mueve hacia la derecha hasta llegar a la identidad; si la gráfica está por debajo de la línea diagonal, la órbita se mueve hacia la izquierda hasta llegar a la recta $y = x$.

6.3.2. Punto fijos, orbitas periódicas.

En un sistema de tiempo discreto, existen dos tipos distintos de puntos fijos. Un punto fijo **estable** tiene la propiedad de que los puntos cercanos a él se mueven aún más cerca del punto fijo bajo la dinámica del sistema. Por otro lado, un punto fijo **inestable** es aquel en el que los puntos cercanos se alejan a medida que aumenta el número de iteraciones.

El concepto de *cercanía* se formaliza mediante la noción de vecindad $N_\epsilon(p)$, definida como el conjunto de todos los números reales dentro de una distancia ϵ del punto p . Específicamente,

$$N_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \epsilon\}$$

con $0 < \epsilon \ll 1$. De esta manera se tiene puntos x muy ϵ -ceranos de p .

Definición 6.3.4 (Punto repulsor y atractor). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $p \in \mathbb{R}$ un número real tal que $f(p) = p$, es decir, p es un punto fijo.*

- *Si todos los puntos suficientemente cercanos a p son atraídos hacia p , entonces p se llama un **sumidero** o **punto fijo atractor**. Es decir, existe*

un $\epsilon > 0$ tal que para todo x en el entorno $N_\epsilon(p)$, se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p.$$

- Por el contrario, si todos los puntos suficientemente cercanos a p son repelidos desde p , entonces p se llama una **fente o punto fijo repulsor**. Más precisamente, si existe un entorno $N_\epsilon(p)$ tal que cada $x \in N_\epsilon(p)$, excepto p en sí mismo, eventualmente se dirige fuera de $N_\epsilon(p)$, entonces p es una **fente**.

Teorema 6.3.1 (Estabilidad de un punto fijo.). *Alligood et al. (2000)* Sea f una función (suave) en \mathbb{R} , y p es un punto fijo de f ,

- Si $|f'(p)| < 1$, entonces p es un **punto fijo estable**.
- Si $|f'(p)| > 1$, entonces p es un **punto fijo inestable**.

Definición 6.3.5 (Puntos periódicos.). *Alligood et al. (2000)* Sea f una función en \mathbb{R} . A un punto p se le llama un punto periódico de período k si $f^k(p) = p$, y si k es el entero positivo más pequeño que satisface esta condición. La órbita con punto inicial p (que consta de k puntos) se llama órbita periódica de período k .

La estabilidad de las órbitas periódicas se observa en los puntos cercanos a la órbita periódica que pueden quedar atrapados o repelidos por la órbita.

Teorema 6.3.2 (estabilidad de las orbitas.). *Alligood et al. (2000)* La órbita periódica $\{p_1, \dots, p_k\}$ es un sumidero si,

$$|f'(p_k) \cdots f'(p_1)| < 1,$$

y un fuente si,

$$|f'(p_k) \cdots f'(p_1)| > 1.$$

6.3.3. Bifurcaciones.

El comportamiento de un sistema dinámico discreto con un punto fijo estable es relativamente sencillo, ya que cualquier trayectoria que inicia en las cercanías del punto fijo, esta convergerá hacia él con el tiempo, incluso ante pequeñas perturbaciones. Sin embargo, cuando el sistema depende de ciertos parámetros, la

variación de estos puede inducir cambios cualitativos en la dinámica.

En particular, a medida que un parámetro se modifica, un punto fijo que inicialmente era estable puede perder su estabilidad, dando lugar a nuevos comportamientos como oscilaciones periódicas o incluso dando lugar a una dinámica caótica. Este tipo de transiciones suelen estar asociadas a fenómenos llamados bifurcación, los cuales son clave en el análisis de la evolución de los sistemas dinámicos en términos de sus parámetros.

Los sistemas dinámicos que dependen de un valor de parámetro a en el cual el número o la estabilidad de puntos fijos o puntos periódicos cambia, entonces a es conocido como valor de bifurcación.

Definición 6.3.6 (familia de funciones dependientes de un parámetro). *Una familia de funciones dependientes de un parámetro tiene la forma,*

$$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (\alpha, x) \mapsto f_\alpha(x).$$

En esta familia de funciones muestra que existe una función f_a para cada valor de un parámetro $a \in I$ con $I \subset \mathbb{R}$.

Los dos tipos de bifurcaciones básicos son:

- La transición en el comportamiento del sistema, en la cual una región previamente carente de puntos fijos da lugar a la aparición de puntos fijos, corresponde a una bifurcación de tipo nodo de silla.
- La bifurcación de duplicación de período se caracteriza por la pérdida de estabilidad de un punto fijo, acompañada de la aparición simultánea de una nueva órbita con el doble del período original.

Ambas bifurcaciones básicas se dan en la familia cuadrática unidimensional $f_a(x) = a - x^2$, donde a es un parámetro escalar. Para estudiar el parámetro se hace referencia a la figura 6.3.2. Cuando $a < -1/4$ no existen puntos fijos; en el valor $a = -1/4$ la gráfica f_a es tangente a la línea $y = a$, por lo que, existe exactamente un punto de equilibrio en el punto $x = -1/2$. Para a estrictamente mayor a $-1/4$, la función f_a cruza con línea $y = x$ en exactamente dos puntos, lo que genera la creación de dos puntos fijos.

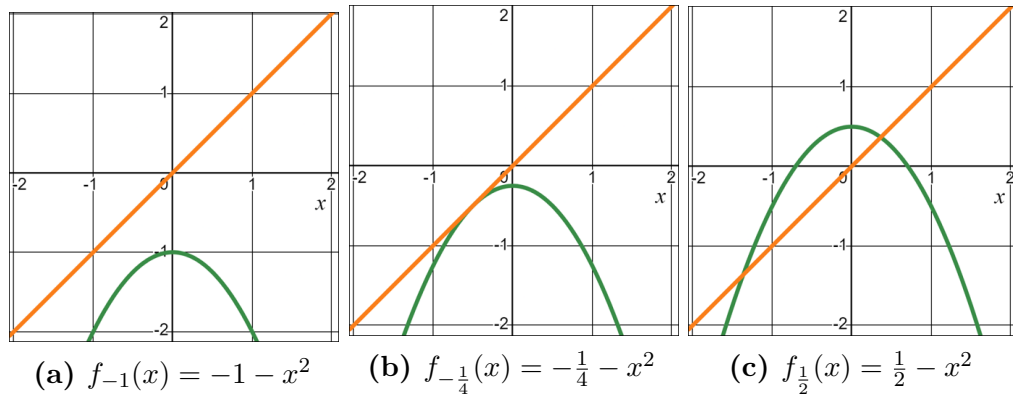


Figura 6.3.2: Se muestra la gráfica algunos elementos de la familia cuadrática $f_a(x) = a - x^2$ antes, durante y después de una bifurcación de silla-nodo.

El punto $(a, x) = (-1/2, -1/4)$ corresponde a un punto de bifurcación para la función f ya que el número de punto fijos, como función de a , cambia cuando a pasa por el valor $a = -1/4$, cuando $a = 1/2$ la función f tiene un punto fijo repulsor en $x = (-1 - \sqrt{3})/2$ y un punto fijo atractor en $x = (-1 + \sqrt{3})/2$. El caso en el que un par de puntos fijos aparecen en una región donde no había ninguno, a medida que se varía un parámetro a , se denomina bifurcación de tipo silla-nodo.

En una bifurcación de silla-nodo, nacen dos puntos fijos de f_a , uno estable y otro inestable, a medida que aumenta el parámetro a . Por supuesto, esto es una cuestión de perspectiva. Alternativamente, es posible que los dos puntos fijos desaparecen a medida que a disminuye.

Para las funciones en los que el espacio de estados es unidimensional, esta bifurcación también se denomina a veces bifurcación tangente. Este nombre proviene del hecho de que la derivada f'_a en una órbita de bifurcación de silla-nodo de punto fijo debe ser igual a $+1$, y por lo tanto, el gráfico debe ser tangente a la línea $y = x$.

En la figura 6.3.2 se muestran gráficos del espacio de estados, donde se obtiene la gráfica de la función f_a antes, durante y después del valor de bifurcación. Un tipo diferente de gráfico comprime la información del espacio de estados de modo que se pueda ver la variación en función del parámetro a , este tipo de gráfico, ejemplificado en la figura 6.3.3, se denomina **diagrama de bifurcación**. El eje vertical corresponde al espacio de estados. Solo se representan los puntos significativos en el espacio de estados, estos corresponden a los puntos fijos,

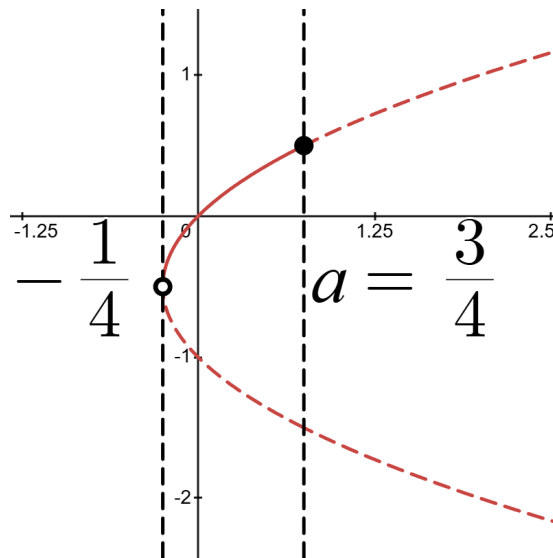


Figura 6.3.3: Diagrama de bifurcación de la familia de funciones $f_a(x) = a - x^2$

En la figura 6.3.3 muestra los puntos fijos de f_a (eje vertical) como función de a (eje horizontal) cerca de la bifurcación de tipo silla-nodo, es decir, valores alrededor de la vecindad $a = -1/2$. Los puntos fijos que atraen se muestran con una curva continua y los puntos fijos que repelen se muestran con una curva punteada. Por ejemplo, cuando $a = 0$, la función f tiene dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor.

Hay que observar que el punto $(3/4, 1/2)$ representa un paso de la curva de puntos fijos de línea continua a línea discontinua, lo que indica un cambio en la estabilidad. La forma en que los puntos fijos cambian la estabilidad es que $f'_a(x) = -2x$ cambia entre ± 1 a medida que varía el parámetro a . A medida que a aumenta de $-1/4$ a $-3/4$, la derivada de f'_a en el punto fijo que atrae disminuye de $+1$ a -1 , es decir, hay un cambio de estabilidad. Para $a > 3/4$, la derivada de f'_a en este punto fijo ha cruzado el valor -1 , y el punto fijo se convierte en un repulsor. En el rango de parámetros $(3/4, \infty)$, la función f_a no tiene atractores de puntos fijos, es decir, la órbita no tienen a un valor.

Sin embargo, f_a tiene un atractor de período dos para $a \in [3/4, 5/4]$. En $a = 3/4$, los dos puntos en esta órbita se separan del punto fijo $x = 1/2$. Para a ligeramente mayor que $1/2$, un punto en la órbita es mayor que $1/2$ y el otro es menor que $1/2$. Esta bifurcación se llama **bifurcación de duplicación de período**. En la Figura 6.3.4 se muestra el gráfico de f_a para valores de a antes, y después de la bifurcación de duplicación de período, donde anteriormente existía un punto fijo

aparecen una órbita de período dos.

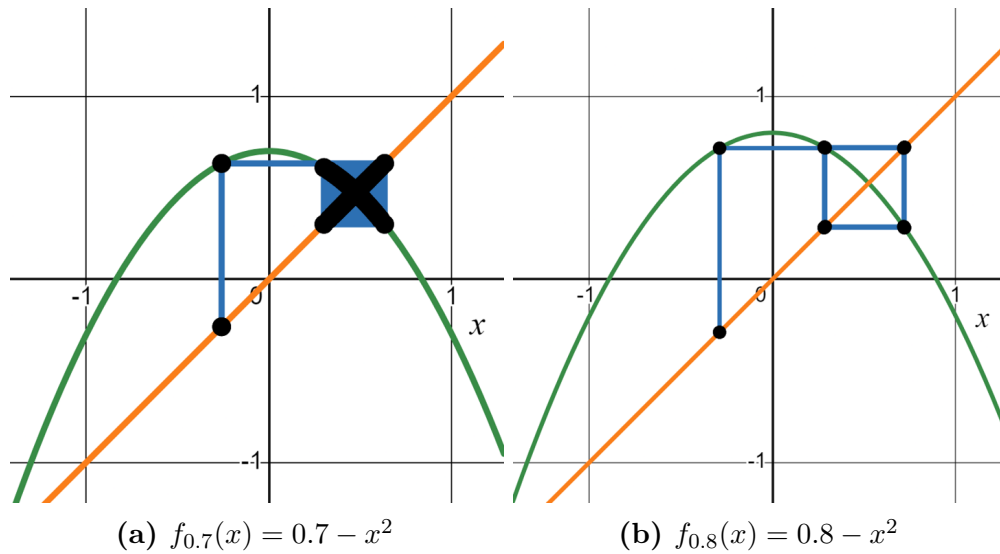


Figura 6.3.4: Se muestra la gráfica de la familia cuadrática $f_a(x) = a - x^2$ antes y después de una bifurcación de duplicación de período.

6.4. Período tres implica caos.

Para la información correspondiente a la sección 6.4 se ha tomado como referencia básica a [Robinson. \(1995\)](#).

Una vez demostrada la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales y dado que el sistema de Rocard es un sistema determinista, es necesario verificar la densidad de los puntos periódicos de sus soluciones para demostrar que existe un comportamiento caótico en el sistema.

Para encontrar que un sistema tiene densidad en los puntos periódicos es suficiente con tener la presencia de una órbita de período tres, ya que esto implica la presencia de todos los períodos.

La definición de caos que se adoptará en este trabajo es [Devaney \(1989\)](#).

La existencia de órbitas de todos los periodos implica que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se pueden encontrar soluciones de periodo n . Dado que el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente, siempre es posible considerar valores de n tan grandes como se requiera, lo que garantiza

la aperiodicidad en las soluciones del sistema como menciona la definición de [Strogatz \(2018\)](#).

Esto permitirá finalmente demostrar que el sistema de Rocard presenta comportamiento caótico. Además, el espacio de parámetros previamente definido facilitará la identificación de las regiones en las que se manifiesta el caos.

Teorema 6.4.1 (Li & Yorke). *Si se tiene una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y existe un punto a que satisface que:*

1. $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$,
2. $f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$,

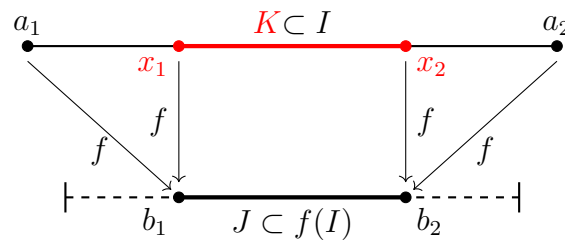
entonces f tiene puntos de todos los períodos.

Este resultado es una señal fuerte de caos, donde hace falta probar la sensibilidad a las condiciones iniciales, en general, la presencia de ciclos de todos los períodos sugiere una dinámica rica y compleja.

Para realizar la demostración del Teorema es primordial demostrar cuatro lemas previos.

6.4.1. Lemas previos

Lema 6.4.1. *Si I y J son dos intervalos cerrados y $f(I) \supset J$ entonces existe un subintervalo $K \subset I$ tal que $f(K) = J$, $f(\text{int}(K)) = \text{int}(J)$ y $f(\partial K) = \partial J$.*



Demostración.

Sea $J = [b_1, b_2]$. Como $f(I) \supset J$, existen puntos $a_1, a_2 \in I$ tales que $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 < a_2$. Sea X_1 el conjunto definido por

$$X_1 = \{x \in [a_1, a_2] \mid f(x) = b_1\}.$$

Como X_1 es no vacío y acotado superiormente, Se define su supremo como

$$x_1 = \sup X_1.$$

Dado que la función f es continua en I , y dado que el conjunto de puntos donde $f(x) = b_1$ es no vacío (pues contiene a a_1), se sigue que el supremo x_1 está bien definido y pertenece a $[a_1, a_2]$.

Para justificar que $f(x_1) = b_1$, observamos lo siguiente: dado que x_1 es el supremo del conjunto de puntos donde $f(x) = b_1$, existe una sucesión de puntos $\{x_n\}$ tales que $x_n \rightarrow x_1$ y $f(x_n) = b_1$ para toda n . Como f es continua en x_1 , tomando el límite en ambos lados de $f(x_n) = b_1$, se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_1) = b_1.$$

Esto prueba que $f(x_1) = b_1$.

Además, por la definición de supremo, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x \in (x_1 - \varepsilon, x_1]$ tal que $f(x) = b_1$. Como x_1 es el supremo de los puntos que mapean en b_1 . Observación, si $x_1 = a_2$ entonces $f(x_1) = f(a_2)$ pero $f(x_1) = b_1$ entonces $f(a_2) = b_1$ aquí se tiene una contradicción dado que por hipótesis $f(a_2) = b_2$. Por otro lado si $x_1 > a_2$ entonces $x_1 \notin [a_1, a_2]$ pero nuevamente se tiene una contradicción ya que por definición de x_1 se tiene que $x_1 \in [a_1, a_2]$, por lo tanto, $x_1 < a_2$.

Ahora, sea X_2 el conjunto definido por

$$X_2 = \{x \in [x_1, a_2] \mid f(x) = b_2\}.$$

Como X_2 es no vacío y acotado inferiormente, se define su ínfimo como

$$x_2 = \inf X_2.$$

De manera análoga al caso de x_1 , este ínfimo está bien definido y satisface $f(x_2) = b_2$ por continuidad de f .

Definidos estos dos puntos, ahora se demuestra que $x_1 < x_2$, primero si $x_1 = x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2) = b_1 = b_2$, lo que es una contradicción ya que por hipótesis

$b_1 \neq b_2$.

Por definición $x_2 \geq x_1$ pero $x_1 \neq x_2$ pues $f(x_1) = b_1$ y $f(x_2) = b_2$, por lo tanto, $x_2 > x_1$. Asimismo, se tiene que $a_1 \leq x_1 < x_2 \leq a_2$.

Definimos entonces el subintervalo $K = [x_1, x_2]$. Se tiene entonces que:

$$f(\{x_1, x_2\}) = \{b_1, b_2\}.$$

Para ver que $f(K) = J$, tomemos cualquier $y \in (b_1, b_2)$. Hay que probar que existe algún $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Como f es continua en $[x_1, x_2]$ y satisface:

$$f(x_1) = b_1, \quad f(x_2) = b_2,$$

por el teorema del valor intermedio (TVI), se garantiza que para cada $y \in (b_1, b_2)$ existe un $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Esto implica que:

$$f((x_1, x_2)) = (b_1, b_2),$$

por lo que $f(\text{int}(K)) = \text{int}(J)$.

Finalmente, probemos que $f(\partial K) = \partial J$. Por las definiciones de x_1 y x_2 , se tiene que $f((x_1, x_2))$ solo contiene valores en (b_1, b_2) , es decir, no puede tomar los valores b_1 ni b_2 en el interior del intervalo. Como $f(x_1) = b_1$ y $f(x_2) = b_2$, se sigue que los únicos puntos donde f puede tomar los valores de la frontera de J son precisamente x_1 y x_2 . Por lo tanto,

$$f(\partial K) = \{f(x_1), f(x_2)\} = \{b_1, b_2\} = \partial J.$$

Así, se ha construido un subintervalo $K = [x_1, x_2] \subset I$ que satisface las tres condiciones del enunciado:

- $f(K) = J$,
- $f(\text{int}(K)) = \text{int}(J)$,
- $f(\partial K) = \partial J$.

Por lo tanto, se concluye que existe el subintervalo buscado, lo que prueba el lema.

Definición 6.4.1. *Un intervalo I f -cubre un intervalo J siempre que $f(I) \supset J$. Esto se denota de la forma $I \rightarrow J$.*

Lema 6.4.2. *Si existen dos puntos a y b distintos tales que $f(a) > a$ y $f(b) < b$, y que $[a, b]$ está contenido en el dominio de f , entonces existe un punto fijo de f en el intervalo (a, b) .*

Demostración. Se define la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - x.$$

Nuestro objetivo es demostrar que existe algún $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, lo que equivale a demostrar que $f(c) = c$, es decir, que c es un punto fijo de f .

Primero se evalúa $g(x)$ en los puntos dados. Dado que se proporciona que $f(a) > a$ y $f(b) < b$, al evaluar $g(x)$ en a y b se obtiene:

$$g(a) = f(a) - a > 0,$$

$$g(b) = f(b) - b < 0.$$

Esto significa que $g(a)$ es positivo y $g(b)$ es negativo.

Ahora se verifica las condiciones para aplicar el TVI. Para poder aplicar el TVI, es necesario verificar que $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$. Dado que f es continua en $[a, b]$, entonces la función $g(x) = f(x) - x$ también es continua en $[a, b]$, pues la función identidad x es continua en todo \mathbb{R} y la resta de funciones continuas sigue siendo continua.

Por lo tanto, $g(x)$ es continua en $[a, b]$.

El TVI establece que si una función continua $g(x)$ toma valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo cerrado, entonces debe existir al menos un punto c en el intervalo donde $g(c) = 0$.

previamente se verifica que $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, y además $g(x)$ es continua en $[a, b]$, por lo tanto, con el Teorema del Valor Intermedio, $\forall u \in (g(a), g(b))$, entonces existe $c \in (a, b)$, tal que, $g(c) = u$, en particular $0 \in (g(a), g(b))$, por lo tanto, existe $c' \in (a, b)$ tal que

$$g(c') = 0.$$

Dado que $g(c') = 0$, se tiene que

$$f(c') - c' = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c') = c'.$$

Por lo tanto, el punto c' es un punto fijo de f en el intervalo (a, b) .

Lema 6.4.3. *Si un intervalo cerrado I se f -cubre a sí mismo, entonces f tiene un punto fijo en I .*

Demostración. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado tal que $f(I) \supseteq I$, es decir, f cubre a I .

Por el lema 6.4.1, se garantiza la existencia de un subintervalo $K = [x_1, x_2] \subset I$ tal que la imagen de K bajo f es exactamente I , es decir,

$$f(K) = I = [a, b]. \quad (6.4.1)$$

Esto implica que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ alcanzan los extremos de I , lo que da lugar a dos casos posibles:

1. $f(x_1) = a = x_1$ y $f(x_2) = b = x_2$.
2. $f(x_1) = a < x_1$ y $f(x_2) = b > x_2$.

Caso 1: Si se cumple $f(x_1) = x_1$ o $f(x_2) = x_2$, entonces se ha encontrado un punto fijo de f y la demostración concluye.

Caso 2: Si en cambio $f(x_1) < x_1$ y $f(x_2) > x_2$, entonces se tiene que f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ y satisface la condición

$$f(x_1) - x_1 \leq 0 \quad \text{y} \quad f(x_2) - x_2 \geq 0. \quad (6.4.2)$$

Por el teorema del valor intermedio aplicado a la función auxiliar $g(x) = f(x) - x$, se garantiza la existencia de un punto $c \in [x_1, x_2]$, se hace uso del lema 6.4.2.

En ambos casos, se ha probado que existe un punto fijo en I .

Lema 6.4.4. *Si se supone que $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_n = J_0$ es un ciclo con $f(J_k) \supset J_{k+1}$ para $k = 0, \dots, n-1$, entonces:*

1. *Existe un punto fijo x_0 de f^n tal que $f^k(x_0) \in J_k$ para $k = 0, \dots, n$.*

2. Además:

- Este ciclo no se forma al recorrer p veces un ciclo más corto de longitud m , donde $mp = n$.
- Se cumple que $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$ a menos que $J_i = J_k$.

Si el punto periódico x_0 de la parte (1) se encuentra en el interior de J_0 , entonces su período mínimo es n .

Demostración: Se inicia de la hipótesis de que existe un ciclo de intervalos

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \cdots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_n = J_0,$$

donde para cada $k = 0, 1, \dots, n-1$ se cumple que

$$f(J_k) \supset J_{k+1}.$$

El objetivo es demostrar, mediante un argumento inductivo, dos afirmaciones:

1. Existencia de punto fijo para f^n : Se probará que existe un punto x_0 tal que $f^n(x_0) = x_0$ y además, para cada $k = 0, 1, \dots, n$, se tiene que $f^k(x_0) \in J_k$.
2. Periodicidad mínima: Si el punto fijo x_0 de f^n se encuentra en el interior de J_0 , entonces su período mínimo es n ; es decir, no se trata de repetir p veces un ciclo de longitud m (con $mp = n$).

Para lograr esto, se utiliza la siguiente afirmación inductiva (denotada por (S_j)):

(S_j): Existe un subintervalo $K_j \subset J_0$ tal que, para cada $i = 1, 2, \dots, j$, se cumple:

- $f^i(K_j) \subset J_i$.
- $f^i(\text{int}(K_j)) \subset \text{int}(J_i)$.
- $f^j(K_j) = J_j$.

El objetivo final es probar (S_n) . posteriormente se obtiene la existencia de un punto fijo x_0 para f^n .

Para $j = 1$, se quiere encontrar un subintervalo $K_1 \subset J_0$ tal que:

- $f(K_1) \subset J_1$,

- $f(\text{int}(K_1)) \subset \text{int}(J_1)$,
- $f(K_1) = J_1$.

El Lema 6.4.1 establece que si $f(J_0) \supset J_1$ entonces existe un subintervalo $K_1 \subset J_0$ que se evalúa de forma exacta sobre J_1 , es decir, $f(K_1) = J_1$ y, además, la imagen del interior de K_1 queda contenida en el interior de J_1 . Esto prueba el caso base (S_1).

Ahora se verifica el paso inductivo. Supongamos que la afirmación (S_{k-1}) es cierta para algún k con $2 \leq k \leq n$. Es decir, existe un subintervalo $K_{k-1} \subset J_0$ tal que para cada $i = 1, \dots, k-1$ se cumple:

- $f^i(K_{k-1}) \subset J_i$,
- $f^i(\text{int}(K_{k-1})) \subset \text{int}(J_i)$,
- $f^{k-1}(K_{k-1}) = J_{k-1}$.

Se debe demostrar que existe un subintervalo $K_k \subset K_{k-1}$ que verifique:

- $f^k(K_k) \subset J_k$ y, en efecto, $f^k(K_k) = J_k$,
- $f^k(\text{int}(K_k)) \subset \text{int}(J_k)$,
- Además, para $i = 1, \dots, k-1$, se conserva que $f^i(K_k) \subset J_i$ (ya que $K_k \subset K_{k-1}$ y la aplicación de f^i a K_k permanece dentro de J_i por la hipótesis inductiva).

Como $f^{k-1}(K_{k-1}) = J_{k-1}$ por la hipótesis inductiva, al aplicar f se tiene:

$$f^k(K_{k-1}) = f\left(f^{k-1}(K_{k-1})\right) = f(J_{k-1}).$$

Pero la hipótesis del enunciado nos dice que $f(J_{k-1}) \supset J_k$. Es decir,

$$f^k(K_{k-1}) \supset J_k.$$

Esto significa que la imagen de K_{k-1} bajo f^k cubre al menos a J_k .

Dado que $f^k(K_{k-1}) \supset J_k$ y f (o en este caso la iteración f^k) se puede aplicar nuevamente el Lema 6.4.1 para deducir que existe un subintervalo $K_k \subset K_{k-1}$ tal que:

$$f^k(K_k) = J_k \quad \text{y} \quad f^k(\text{int}(K_k)) = \text{int}(J_k).$$

Esta construcción garantiza que se preservan las inclusiones para las imágenes de los interiores y se ajusta el subintervalo para que la imagen exacta sea J_k .

Dado que $K_k \subset K_{k-1}$ y ya se tenía que para cada $i = 1, \dots, k-1$:

$$f^i(K_{k-1}) \subset J_i,$$

entonces,

$$f^i(K_k) \subset f^i(K_{k-1}) \subset J_i.$$

Es decir, las propiedades relativas a las imágenes intermedias se mantienen.

Con lo anterior se concluye que la afirmación (S_k) se cumple. Esto completa el paso inductivo.

Una vez que se ha demostrado (S_n) , se tiene un subintervalo $K_n \subset J_0$ tal que

$$f^n(K_n) = J_0.$$

Además, se tiene que

$$f^i(K_n) \subset J_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

y en particular, para el interior:

$$f^n(\text{int}(K_n)) = \text{int}(J_0).$$

Mediante los Lemas 6.4.2 y 6.4.3 estos lemas garantizan la existencia de un punto fijo para una iteración de la función, se deduce que f^n tiene un punto fijo x_0 en K_n . Por lo tanto, se cumple:

$$f^n(x_0) = x_0,$$

y, dado que $x_0 \in K_n \subset J_0$, además se tiene que para cada $i = 0, 1, \dots, n$:

$$f^i(x_0) \in J_i.$$

Esto demuestra la parte (1) del lema.

Para demostrar que el punto fijo x_0 tiene período mínimo n (bajo la condición de que $x_0 \in \text{int}(J_0)$), se argumenta lo siguiente:

Si $x_0 \in \partial J_0$ y $f(x_0) = x_0$ entonces se tiene una contradicción ya que se construye un ciclo de tal manera que $f^n(x_0) = x_0$, entonces $x_0 \in \text{int}(J_0)$.

Dado que $f^n(K_n) = J_0$, también se tiene que en el interior

$$f^n(\text{int}(K_n)) = \text{int}(J_0).$$

Ya que $x_0 \in \text{int}(J_0)$ y dado que $f^n(x_0) = x_0$, entonces, $x_0 \in \text{int}(K_n)$, lo que implica que

$$f^i(x_0) \in \text{int}(J_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Dado que x_0 es un punto fijo de f^n , se obtiene que $f^n(x_0) = x_0$, asegurando que x_0 permanece en $\text{int}(J_0)$ en cada iteración.

Si el período de x_0 fuera menor que n , existiría un entero $m < n$ tal que $f^m(x_0) = x_0$. Esto implicaría que el ciclo de intervalos es el resultado de recorrer p veces un ciclo más corto de longitud m , con $mp = n$. Sin embargo, la construcción de los intervalos garantiza que el ciclo completo tiene longitud n y no es generado por un ciclo más corto repetido. Esta contradicción establece que el período mínimo de x_0 debe ser precisamente n .

Ahora falta probar que si $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$ entonces $i \neq j$. Si $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$ con $i = j$ entonces,

$$\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_i) = \text{int}(J_i) \neq \emptyset,$$

por lo tanto es falso que $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$ con $i = j$, por lo tanto, $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$ entonces $i \neq j$ es verdadero.

Con esto se concluye la parte (2) del lema.

6.4.2. Demostración del Teorema.

Teorema 6.4.2 (Li & Yorke). *Si se tiene una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y existe un punto a que satisface que:*

1. $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$,
2. $f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$,

entonces f tiene puntos de todos los periodos.

Demostración del teorema 6.4.1. Sin pérdida de generalidad, supondremos que se cumple la primera condición:

$$f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a).$$

Se analiza en detalle el primer caso, donde se cumplen las siguientes condiciones:

- $f(a) = b > a$,
- $f^2(a) = f(b) = c > f(a) = b$, y
- $f^3(a) = f(c) = d \leq a$.

Ahora, se define los intervalos:

- $I_1 = [a, b]$,
- $I_2 = [b, c]$.

Se observa que:

1. I_1 **f -cubre** I_2 , es decir, $f(I_1) \supseteq I_2$.
2. I_2 **f -cubre** tanto I_1 como I_2 , es decir, $f(I_2) \supseteq I_1 \cup I_2$.

Como $f(I_2) \supseteq I_2$, el lema 6.4.3 muestra la existencia de un punto fijo en I_2 , es decir, un $x \in I_2$ tal que $f(x) = x$.

Se busca probar que existe un punto periódico de período exactamente n para cualquier $n \geq 2$.

Se considera un ciclo de longitud n estructurado como:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1.$$

Es decir, f manda I_1 a I_2 , y luego f manda I_2 repetidamente a sí mismo hasta regresar a I_1 en el paso n .

Por el lema 6.4.4, existe un punto $x_0 \in I_1$ tal que:

$$f^n(x_0) = x_0$$

y además,

$$f^j(x_0) \in I_2 \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1.$$

Ahora hay que probar que x_0 tiene período exactamente n , es decir, que no existe un k con $1 \leq k < n$ tal que $f^k(x_0) = x_0$.

El objetivo es demostrar que si existe un punto x_0 en $I_1 = [a, b]$ tal que $f^n(x_0) = x_0$, entonces no puede existir un k con $1 \leq k < n$ tal que $f^k(x_0) = x_0$. En otras palabras, se busca demostrar que el período de x_0 es exactamente n .

Para ello, se asume que existe un k en el intervalo $1 \leq k < n$ tal que $f^k(x_0) = x_0$. Por el lema 6.4.4 $x_0 \in I_1$ y $f^j(x_0) \in I_2$ para $j = 1, \dots, n-1$. Si x_0 es de período menor a n entonces $x_0 \in I_2$, esto implica que x_0 debe pertenecer a la intersección $I_1 \cap I_2$, la cual está formada únicamente por el punto b , es decir, $x_0 = b$.

Ahora para $k = 1$, $f(b) = b$ pero esto es una contradicción ya que por hipótesis $f(b) = c$ con $b < c$.

Para el caso $k = 2$. Si $f^2(b) = b$, se tiene que:

$$f^2(b) = f^3(a).$$

Sin embargo, de la hipótesis del teorema se sabe que:

$$f^3(a) \leq a.$$

Dado que $a < b$, se obtiene la siguiente contradicción:

$$b = f^2(b) = f^3(a) \leq a < b.$$

Por lo tanto, la igualdad $f^2(b) = b$ es imposible.

Para el caso $k \geq 3$. Ahora se asume que existe un entero $k \geq 3$ tal que $f^k(b) = b$.

En particular, se sabe por el lema 6.4.4 que $f^j(b) \in I_2 = [b, c]$, lo que implica que:

$$f^j(b) \geq b.$$

Por otro lado, de la hipótesis del teorema, se cumple que:

$$f^2(b) = f^3(a) \leq a.$$

Dado que $a < b$, se obtiene la desigualdad:

$$f^2(b) \leq a < b.$$

Se observa aquí una contradicción, pues no es posible que $f^2(b) \leq a$ y simultáneamente $b \leq f^2(b)$ cuando $a < b$. El objetivo es demostrar que $f^j(b) \geq b$ para $k \geq 3$; sin embargo, la hipótesis del teorema muestra que, al iterar dos veces la función f , no puede existir un punto fijo que satisfaga las condiciones dadas. En particular, la relación $f^2(b) = f^3(a) \leq a$ implica que, en la segunda iteración, el supuesto punto fijo $x_0 = b$ se encuentra en el intervalo $[d, a]$.

Así, para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$, la segunda iteración satisface $f^2(b) \in [d, a]$, lo que contradice el Lema 6.4.4, ya que este garantiza que $f^j(b) \in I_2$.

Dado que en ambos casos se obtiene una contradicción, se concluye que no puede existir un k con $1 \leq k < n$ tal que $f^k(x_0) = x_0$. En consecuencia, el punto x_0 tiene exactamente período n , completando así la demostración.

6.5. Teorema de Sharkovskii

Para poder enunciar el teorema de Sharkovskii, es necesario introducir un nuevo tipo de orden en el conjunto de los números enteros positivos. Este orden, denominado *orden de Sharkovskii*, se representa mediante el símbolo especial \triangleright , que indica precedencia según esta relación particular, y no debe confundirse con el orden usual de los números naturales.

El orden de Sharkovskii comienza con los números impares mayores que uno, los cuales se disponen en orden decreciente, es decir, en sentido opuesto al orden

natural. De este modo, se establece la primera parte de esta ordenación especial.

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 11 \triangleright \dots$$

A continuación, se incorporan al orden de Sharkovskii todos los enteros que resultan de multiplicar por dos un número impar. Posteriormente, se agregan los enteros que resultan de multiplicar un número impar por potencias crecientes de dos. Es decir, la ordenación sigue el siguiente esquema:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^{n+1} \cdot 3 \triangleright 2^{n+1} \cdot 5 \triangleright \dots$$

Finalmente, se añaden al orden todas las potencias de dos, dispuestas en orden decreciente, es decir:

$$\dots \triangleright 2^{n+1} \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

De esta manera, se ha definido un orden total sobre el conjunto de los enteros positivos. Aunque esta ordenación puede parecer inusual a primera vista, es precisamente la estructura que determina qué períodos de puntos periódicos implican la existencia de otros períodos, tal como lo establece el *Teorema de Sharkovskii*.

Teorema 6.5.1 (Teorema de Sharkovskii). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si f posee un punto de período n , y que $n \triangleright k$ en el orden de Sharkovskii. Entonces, f también posee un punto de período k . (Por período se entiende el mínimo período del punto.)*

Hasta concluir la demostración del teorema, se asumirá que f es una función continua de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R} , como se indica en la hipótesis. La demostración del teorema se basa en identificar ciertos intervalos que se *cubren* mutuamente de formas particulares mediante la función f . Para expresar con claridad estas ideas, se introduce la siguiente definición de un tipo específico de grafo.

Definición 6.5.1. *Sea $\mathcal{A} = \{I_1, \dots, I_n\}$ una partición del intervalo I en subintervalos cerrados con interiores no vacíos y mutuamente disjuntos. Un grafo \mathcal{A} -asociado a f es un grafo dirigido cuyos vértices están dados por los intervalos I_i , y existe una arista dirigida desde I_i hacia I_j , si f -cubre I_j a partir de I_i ; es*

decir, si $f(I_i) \supset I_j$. Este grafo también se denomina grafo asociado a la partición.

Ejemplo 6.5.1. Sea f una función cuyo grafo asociado, ilustrado en la figura 6.5.1, corresponde a una partición del intervalo en tres subintervalos I_1, I_2, I_3 . Sea que I_1 f -cubre I_2 , I_2 f -cubre I_1 y I_2 y I_3 . El grafo correspondiente a esta partición se muestra en la Figura 6.5.2.

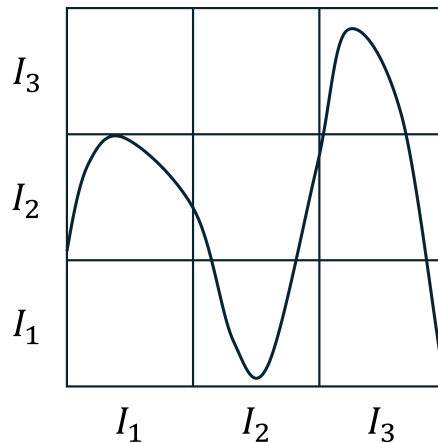


Figura 6.5.1: Gráfica de la función en el ejemplo 5.1.

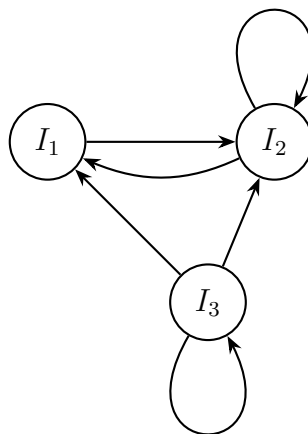


Figura 6.5.2: Gráfica de la partición del ejemplo 5.1.

Para comenzar se considera el caso en que n es un número impar que satisface las siguientes condiciones:

- (i) $n > 1$,
- (ii) la función f posee un punto x de período n , y no existen puntos de período impar k tales que $1 < k < n$.

Para demostrar el teorema de Sharkovskii en este caso particular, Peter Stefan propuso una estrategia basada en la construcción de una órbita con un patrón especial sobre la recta real. Sea x_1 un punto n -periódico de la función f , y al definir la órbita como $x_i = f^{i-1}(x_1)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Stefan mostró que se puede encontrar una órbita tal que sus puntos estén ordenados de la siguiente manera:

$$x_n < x_{n-2} < \dots < x_a < x_1 < x_2 < x_4 < \dots < x_{n-1}$$

donde a es igual a 3 si n es impar. (La reflexión de este ordenamiento es decir, invertir todos los signos de desigualdad también es válida.) Un punto periódico cuya órbita posee este tipo de ordenamiento se denomina *órbita de tipo Stefan*.

El Lema establece rigurosamente que, bajo las condiciones mencionadas, tal órbita existe efectivamente.

Dada una órbita como la descrita anteriormente, se definen los siguientes subintervalos asociados a los puntos periódicos x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} I_1 &= [x_1, x_2), \\ I_2 &= [x_3, x_1), \\ I_3 &= [x_2, x_4), \\ I_{2j} &= [x_{2j+1}, x_{2j-1}), \\ I_{2j-1} &= [x_{2j-2}, x_{2j}), \end{aligned}$$

para $j = 2, \dots, \frac{n-1}{2}$. La forma de estos intervalos está motivada por el ordenamiento especial de la órbita de tipo Stefan.

Debido a la estructura de dicha órbita, se cumple lo siguiente:

- (i) I_1 cubre a I_1 y a I_2 , es decir, $f(I_1) \supset I_1 \cup I_2$,
- (ii) para $2 \leq j \leq n-2$, se tiene que I_j cubre a I_{j+1} , es decir, $f(I_j) \supset I_{j+1}$,
- (iii) I_{n-1} cubre a todos los intervalos I_j con j impar.

La existencia de una órbita con estas propiedades implica que el grafo \mathcal{A} -asociado a f contiene un subgrafo con la estructura mostrada en la figura 6.5.3. A este

subgrafo se le conoce como *grafo de Stefan*.

Aplicando los lemas anteriores a dicho grafo de Stefan, se puede demostrar la existencia de todos los puntos periódicos correspondientes a los períodos que están implicados por n en el orden de Sharkovskii.

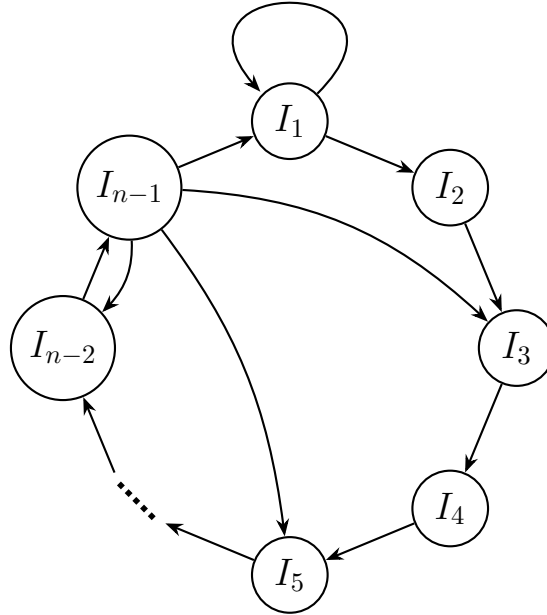


Figura 6.5.3: Subgráfica para la partición del lema .

6.5.1. Lemas previos

Lema 6.5.1. *Sea n un número impar tal que $n > 1$. Si la función f posee un punto x de período n , y que f no tiene puntos de período impar k con $1 < k < n$ (es decir, $k \triangleright n$ en el orden de Sharkovskii). Sea*

$$J = [\text{mín } \mathcal{O}(x), \text{máx } \mathcal{O}(x))$$

el intervalo que contiene la órbita de x , donde $\mathcal{O}(x)$ denota el conjunto de puntos de la órbita de x . Sea \mathcal{A} la partición de J inducida por los elementos de $\mathcal{O}(x)$. Entonces, el grafo \mathcal{A} -asociado a f contiene un subgrafo con la siguiente estructura:

Los intervalos I_1, \dots, I_{n-1} pueden numerarse de manera que tengan interiores disjuntos y cumplan las siguientes propiedades:

- (i) I_1 cubre a I_1 y I_2 , es decir, $f(I_1) \supset I_1 \cup I_2$,

(ii) para todo $2 \leq j \leq n - 2$, se cumple que $f(I_j) \supset I_{j+1}$,

(iii) $f(I_{n-1}) \supset I_j$ para todo j impar.

Este subgrafo se ilustra en la figura 6.5.3 y corresponde a lo que se denomina un grafo de Stefan.

Demostración. Sea $\mathcal{O}(x) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ la órbita del punto x , con los puntos ordenados de manera creciente en la recta real, es decir:

$$z_1 < z_2 < \dots < z_n.$$

Dado que $f(z_n) \in \mathcal{O}(x)$, y z_n es el mayor de los puntos de la órbita, se concluye que $f(z_n) < z_n$. De manera análoga, como $f(z_1) \in \mathcal{O}(x)$ y z_1 es el menor de ellos, se tiene que $f(z_1) > z_1$.

Se define

$$a = \text{máx}\{y \in \mathcal{O}(x) : f(y) > y\},$$

lo cual implica que $a \neq z_n$. Sea $a \in \mathcal{O}(x)$. Definimos $b \in \mathcal{O}(x)$ tal que

$$b = \text{mín}\{y \in \mathcal{O}(x) \mid y > a\}.$$

Es decir, b es el menor punto de la órbita $\mathcal{O}(x)$ que es estrictamente mayor que a en el orden usual de la recta real. Se define entonces el intervalo

$$I_1 = [a, b] \in \mathcal{A}.$$

Demostraremos que este intervalo I_1 cumple las condiciones enunciadas en el lema. La prueba se construye mediante una sucesión de afirmaciones que detallan el comportamiento dinámico de la función f sobre los intervalos definidos por la órbita.

- **Afirmación 1.** El intervalo I_1 se cubre a sí mismo: $f(I_1) \supset I_1$.
- **Afirmación 2.** Iterando la acción de la función f , el intervalo I_1 termina por cubrir todo el intervalo $J = [\text{mín } \mathcal{O}(x), \text{máx } \mathcal{O}(x)]$.
- **Afirmación 3.** Se construye una sucesión de intervalos I_1, I_2, \dots, I_{n-1} tal que cada uno cubre al siguiente, y todos ellos tienen interiores disjuntos.

- **Afirmación 4.** Existe un ciclo mínimo en el grafo \mathcal{A} formado por estos intervalos, de la forma

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1,$$

lo cual constituye un lazo de longitud $n - 1$ sobre intervalos distintos.

- **Afirmaciones 5 y 6.** Los intervalos I_j pueden ordenarse sobre la recta de modo que cumplen con las propiedades topológicas y dinámicas establecidas en el enunciado del lema: disjunción de interiores, relaciones de cobertura, y posición relativa.

Estas afirmaciones, combinadas, completan la demostración del lema. El subgrafo asociado a los intervalos I_1, \dots, I_{n-1} cumple entonces con la estructura descrita en la Figura 6.5.3.

Por demostrar. Afirmación 1. La imagen de I_1 se cubre a sí misma, es decir, $f(I_1) \supset I_1$.

Sabemos que $f(a) > a$, por lo tanto, $f(a) \geq b$. Además, como $b > a$, si $f(b) \geq b$, entonces hay dos posibilidades:

- $f(b) = b$, lo que significa que b es un punto fijo, lo cual es falso porque $b \in \mathcal{O}(x)$, es decir, $f(b) \neq b$ ya que al aplicar $f(b)$ adquiere el siguiente valor en la órbita.
- $f(b) > b$, entonces se obtiene un punto de la órbita que está a la derecha de b pero eso contradice el hecho de que b era el menor punto mayor que a en la órbita.

Entonces la única posibilidad lógica es $f(b) < b$, lo que implica $f(b) \leq a$. Por lo tanto, $f(I_1) \supset I_1$, como se quería demostrar.

Por demostrar. Afirmación 2. La imagen iterada $f^{n-2}(I_1)$ cubre todo el intervalo J , es decir, $f^{n-2}(I_1) \supset J$.

Dado que $f(I_1) \supset I_1$, entonces al aplicar f de nuevo,

$$f^2(I_1) = f(f(I_1)) \supset f(I_1),$$

ya que $I_1 = [a, b]$ con $a < b$, al aplicar de forma iterada se produce conjuntos

anidados,

$$f^{n-2}(I_1) \supset f^{n-3}(I_1) \supset \cdots \supset f(I_1) \supset I_1,$$

es decir, $f^{k+1}(I_1) \supset f^k(I_1)$. El número de puntos en $\mathcal{O}(x) \setminus \{a, b\}$ es $n - 2$, por lo que $z_n \in f^k(I_1)$ para algún $0 \leq k \leq n - 2$ dado el anidamiento, se concluye que $z_1, z_n \in f^{n-2}(I_1)$, y así, $f^{n-2}(I_1) \supset [z_1, z_n] = J$.

Por demostrar. Afirmación 3. Existe un intervalo $K_0 \in \mathcal{A}$, con $K_0 \neq I_1$, tal que $f(K_0) \supset I_1$.

Sea $I_1 = [a, b]$, un intervalo formado por dos puntos consecutivos de la órbita. Como n es impar, al considerar los puntos interiores de la órbita que no son extremos del intervalo I_1 , el número total $n - 2$ es impar, por lo que al dividir los puntos de $\mathcal{O}(x) \setminus \{a, b\}$ según su ubicación relativa a I_1 , uno de los dos lados (a la izquierda de a o a la derecha de b) contiene más puntos que el otro.

Se denota por $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}(x) \setminus \{a, b\}$ al conjunto de puntos ubicados en el lado que contiene estrictamente más puntos que el otro. Como f permuta cíclicamente los puntos de $\mathcal{O}(x)$, y la imagen de cada punto en la órbita sigue en la órbita, debe existir al menos una transición entre un punto cuya imagen está en \mathcal{P} y otro cuya imagen no lo está. Es decir, existen $y_1, y_2 \in \mathcal{O}(x)$ consecutivos en el orden de la recta real, tales que:

$$f(y_1) \in \mathcal{P}, \quad \text{y} \quad f(y_2) \notin \mathcal{P}, \quad \text{o viceversa.}$$

Tal transición se deduce por un argumento topológico similar al principio del valor intermedio: si una función continua sobre una órbita finita cambia de un subconjunto a su complemento, entonces necesariamente dicha transición ocurre sobre un intervalo entre dos puntos consecutivos. Como consecuencia, el intervalo $K_0 = [y_1, y_2]$ cumple que $f(K_0)$ contiene un subintervalo que conecta la imagen de un punto dentro de \mathcal{P} con uno fuera de \mathcal{P} . Este intervalo I_1 queda contenido en $f(K_0)$, es decir,

$$f(K_0) \supset I_1.$$

Además, como y_1 y y_2 no coinciden con los extremos de I_1 , se garantiza que $K_0 \neq I_1$, lo cual concluye la demostración.

Por demostrar. Afirmación 4. Existe un ciclo $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ con

$I_2 \neq I_1$. El ciclo más corto con esta propiedad tiene longitud $k = n - 1$.

El objetivo es demostrar que existe una sucesión de intervalos

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1,$$

donde $I_j \in \mathcal{A}$, $I_2 \neq I_1$, y tal que $f(I_j) \supset I_{j+1}$ para todo $1 \leq j < k$, y $f(I_k) \supset I_1$. Además, afirmamos que el ciclo más corto con esta propiedad tiene longitud $k = n - 1$.

En pasos anteriores, se construyó un intervalo $K_0 \in \mathcal{A}$, distinto de I_1 , tal que $f(K_0) \supset I_1$. Además, se demostró que

$$f^{n-2}(I_1) \supset K_0.$$

Combinando ambas inclusiones, se concluye que

$$f^{n-1}(I_1) \supset f(K_0) \supset I_1.$$

Por lo tanto, existe una secuencia de intervalos $I_1, I_2, \dots, I_{n-1} \in \mathcal{A}$ tal que:

$$f(I_j) \supset I_{j+1} \quad \text{para } 1 \leq j \leq n-2, \quad \text{y} \quad f(I_{n-1}) \supset I_1.$$

Esta sucesión define un ciclo de longitud $k = n - 1$, donde todos los intervalos pueden ser distintos.

Ahora, supongamos que existe un ciclo de la forma

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1,$$

con $2 \leq k < n - 1$. Consideramos el caso en que k sea el entero más pequeño para el cual existe tal ciclo. Como estamos asumiendo que el ciclo es el más corto posible, los intervalos I_1, \dots, I_k son todos distintos: si alguno se repitiera, podríamos extraer un subciclo más corto, lo que contradice la minimalidad de k .

Dado que $k \geq 2$, el número k o $k + 1$ es impar. Definimos $m \in \mathbb{N}$ como ese valor impar, es decir, $m = k$ si k es impar, o $m = k + 1$ si k es par. En ambos casos, se tiene:

$$1 < m < n, \quad m \text{ impar.}$$

Ahora existen dos posibles construcciones de un ciclo de longitud m :

- Si $m = k$, ya tenemos un ciclo de longitud impar:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_m \rightarrow I_1.$$

- Si $m = k + 1$, se construye el ciclo extendido añadiendo un intervalo adicional K_0 al final:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow K_0 \rightarrow I_1.$$

En ambos casos, se tiene una cadena de inclusiones entre intervalos:

$$f(I_1) \supset I_2, \quad f(I_2) \supset I_3, \quad \dots, \quad f(I_m) \supset I_1,$$

lo cual satisface las hipótesis del Lema 1.4. Este lema garantiza la existencia de un punto $z \in I_1$ tal que

$$f^m(z) = z.$$

Además, por la construcción de la familia \mathcal{A} , los intervalos son disjuntos en sus interiores, y los puntos de la órbita periódica se ubican en los interiores de estos intervalos. Por lo tanto, z no pertenece a la frontera de ninguno de ellos, y su periodo mínimo también es m .

Dado que m es impar y estrictamente menor que n , esto contradice la hipótesis de minimalidad de n como el menor periodo impar existente para f . Por lo tanto, la suposición inicial de que existe un ciclo con longitud $k < n - 1$ lleva a una contradicción.

En consecuencia, el ciclo más corto de intervalos con la propiedad $f(I_j) \supset I_{j+1}$, con $I_k \supset I_1$, debe tener longitud exactamente $k = n - 1$.

Por demostrar. Afirmación 5.

- (a) Si $f(I_j) \supset I_1$, entonces $j = 1$ o $j = n - 1$.
- (b) Para $j > i + 1$, no existe una arista dirigida de I_i a I_j en el grafo.
- (c) El intervalo I_1 cubre únicamente a I_1 y I_2 .

La parte (a) se deduce directamente de la parte afirmación 4. Las partes (b) y (c) se siguen del hecho de que el ciclo es el más corto posible; por lo tanto, no

pueden existir coberturas adicionales que acorten dicho ciclo sin contradecir su minimalidad.

Por demostrar. Afirmación 6. Ocurre una de las dos siguientes posibilidades:

- (i) El orden (en términos de la recta real) de los intervalos I_j en el ciclo descrito anteriormente es

$$I_{n-1} \leq I_{n-3} \leq \cdots \leq I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq \cdots \leq I_{n-2},$$

y el orden de los puntos de la órbita es

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \cdots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \cdots < f^{n-2}(a),$$

- (ii) Ambas ordenaciones anteriores están exactamente invertidas.

Sea $I_1 = [a, b]$, como se construyó en el anteriormente, se tiene que $f(a) = b$, de modo que $f(I_1) \supset I_2$, y que I_1 cubre únicamente a I_2 , que debe ser adyacente a I_1 .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $I_2 \leq I_1$ (la otra posibilidad da lugar al orden simétrico). Entonces $f(b) = c$ con $c < a$, lo que indica que el intervalo $I_2 = [c, a]$ está inmediatamente a la izquierda de I_1 . Además, el punto $f(a) = b$ se encuentra en el extremo derecho de I_1 , de modo que:

$$f(\partial I_1) = \{f(a), f(b)\} = \{b, c\}, \quad \text{y} \quad \partial I_2 = \{c, a\}.$$

Esto justifica que $I_2 \subset f(I_1)$, como parte de la definición de cobertura.

Como f es continua y $I_2 = [c, a]$ cubre un único intervalo I_3 ,

$$f(\partial I_2) = \{f(c), f(a)\} = \{f(c), b\},$$

y como $f(c) > b$ (ya que $c < a$ y f crece en esa región), se sigue que $f(I_2)$ está estrictamente por encima de b , y en particular no interseca el interior de I_1 .

Dado que:

- $f(a) = b \in I_1$, y
- $f(c) > b$,

entonces la imagen del intervalo I_2 es un subintervalo que se encuentra estrictamente a la derecha de I_1 . En particular, el intervalo $I_3 \subset f(I_2)$ debe ser adyacente a I_1 por la derecha, es decir, $I_3 \geq I_1$.

Además, por la afirmación 5(a), I_2 no cubre a I_1 , y por la parte (b), tampoco cubre a ningún I_j con $j > 3$, ya que solo cubre a I_3 . Como consecuencia, I_3 debe ser adyacente a I_1 por la derecha, reforzando la estructura intercalada de los intervalos.

Para generalizar esta estructura, supongamos que para cierto $k < n-1$, el intervalo I_k cubre únicamente al siguiente, I_{k+1} . Entonces, del mismo modo que antes:

- $f(I_k) \supset I_{k+1}$,
- y por la afirmación 5, I_k no cubre a ningún otro I_j .

Si I_k está inmediatamente a la izquierda (o derecha) de I_{k-2} , entonces I_{k+1} está en el lado opuesto respecto a I_k , es decir, se intercalan alrededor de I_1 . En particular:

I_2 está a la izquierda de I_1 , I_3 a la derecha de I_1 , I_4 a la izquierda de I_1 , etc.

Por inducción, se deduce que los intervalos están ordenados como:

$$I_{n-1} \leq I_{n-3} \leq \cdots \leq I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq \cdots \leq I_{n-2}.$$

Se sabe que cada $f^j(a)$ cae en la imagen del intervalo I_j , el cual cubre a I_{j+1} . A partir de esto, y por la forma en que los intervalos están ordenados de manera intercalada alrededor de I_1 , se concluye que los puntos de la órbita de a también siguen un patrón alternante con respecto a la posición de a .

En particular, el orden de los puntos en la órbita de a es:

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \cdots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \cdots < f^{n-2}(a),$$

lo cual está exactamente invertido respecto al orden de los intervalos:

$$I_{n-1} \leq I_{n-3} \leq \cdots \leq I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq \cdots \leq I_{n-2}.$$

Esto muestra que la ordenación de los puntos de la órbita es exactamente inversa

a la de los intervalos que los contienen, como se afirma en el enunciado.

Por demostrar. Afirmación 7. El intervalo I_{n-1} cubre a todos los I_j con j impar.

Sea $a \in I_1$ un punto de inicio de una órbita periódica de periodo n , donde $n \geq 3$ es impar. La órbita generada por a es:

$$\mathcal{O}(a) = \{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a)\},$$

con $f^n(a) = a$. Por construcción, los intervalos I_j están definidos como

$$I_j = [f^j(a), f^{j-2}(a)],$$

para los índices válidos que siguen el patrón intercalado.

En particular, se considera el intervalo:

$$I_{n-1} = [f^{n-1}(a), f^{n-3}(a)].$$

Se estudia la imagen de este intervalo bajo la aplicación f :

- En el extremo izquierdo, $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = a$.
- En el extremo derecho, $f(f^{n-3}(a)) = f^{n-2}(a)$.

El valor $f^{n-2}(a)$ corresponde al mayor punto de la órbita $\mathcal{O}(a)$, debido a la disposición intercalada de los puntos:

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \dots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \dots < f^{n-2}(a).$$

Dado que f es continua y f envía los extremos de I_{n-1} a los puntos a y $f^{n-2}(a)$, se concluye que:

$$f(I_{n-1}) \supset [a, f^{n-2}(a)].$$

Por la forma en que se han construido los intervalos I_j , por la construcción de los intervalos se tiene,

$$[a, f^{n-2}(a)] = I_1 \cup I_3 \cup \dots \cup I_{n-2}$$

ya que dichos intervalos corresponden a los subintervalos consecutivos definidos

por los puntos de la órbita ordenados de forma creciente entre a y $f^{n-2}(a)$.

Por lo tanto, se concluye que:

$$f(I_{n-1}) \supset I_1 \cup I_3 \cup \cdots \cup I_{n-2},$$

lo que prueba que I_{n-1} cubre a todos los I_j con j impar.

Con esto, todas las afirmaciones anteriores prueban el **Lema 6.5.1**.

Proposición 6.5.1. *El Teorema 6.5.1 es verdadero si n es impar y maximal en el orden de Sharkovskii.*

Se procede por casos, de acuerdo al valor del entero k cuya existencia se desea garantizar:

Caso (a). Sea k un entero par tal que $k < n$.

Considérese el ciclo de intervalos definido por

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-k} \rightarrow I_{n-k+1} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1},$$

el cual tiene longitud k . Dado que la sucesión de intervalos forma un ciclo, puede aplicarse el Lema 6.4.4, del cual se concluye la existencia de un punto $x_0 \in I_{n-1}$ tal que $f^k(x_0) = x_0$.

Los extremos del intervalo I_{n-1} corresponden a puntos de la órbita periódica de periodo n considerada inicialmente. En consecuencia, tales extremos tienen periodo exactamente igual a n , y no pueden ser candidatos a tener un periodo menor, como $k < n$. Como el Lema 6.4.4 asegura que $x_0 \in \text{int}(I_{n-1})$, se concluye que el periodo mínimo de x_0 es exactamente k , lo cual prueba este caso.

Caso (b). Sea $k > n$, ya sea par o impar.

En este caso, se construye un ciclo de intervalos de longitud k de la siguiente manera: primero se recorre el ciclo de longitud n

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1,$$

y posteriormente se repite el intervalo I_1 un total de $k - n$ veces, obteniéndose así

un ciclo de la forma

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1}_{k-n \text{ veces}}.$$

Este ciclo tiene longitud total k . Al aplicar nuevamente el Lema 6.4.4, se garantiza la existencia de un punto $x_0 \in I_1$ tal que $f^k(x_0) = x_0$.

En consecuencia, en ambos casos se ha demostrado que la existencia de un punto periódico de periodo n , siendo n impar y maximal en el orden de Sharkovskii, garantiza la existencia de puntos periódicos de cualquier otro periodo k tal que $n \triangleright k$. Esto concluye la demostración de la proposición.

El primer paso para demostrar el resultado para otros valores de n consiste en probar la existencia de un punto de período dos siempre que haya un punto de período par.

Proposición 6.5.2. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y supongamos que f tiene un punto periódico de período n , y contiene una órbita de tipo Stefan. Entonces, la dinámica inducida sobre la unión de los intervalos del grafo de Stefan es topológicamente transitiva.*

Sea a el menor punto de la órbita periódica de período n de f , con n impar y maximal. Como es sabido, la órbita de a genera un conjunto de intervalos

$$I_j = [f^j(a), f^{j+1}(a)] \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n-1,$$

ordenados de modo que cada I_j conecta consecutivamente los puntos de la órbita.

Definimos un grafo dirigido (conocido como el *grafo de Stefan*) en el que los vértices son los intervalos I_j , y existe una arista dirigida de I_j a I_k si

$$f(I_j) \supseteq I_k.$$

Este grafo tiene las siguientes propiedades clave cuando n es impar y maximal en el orden de Sharkovskii:

1. Existe un ciclo dirigido en el grafo que pasa por todos los vértices. Es decir, se puede recorrer todo el conjunto de intervalos aplicando iteraciones de f .

2. En particular, el intervalo I_{n-1} cubre todos los intervalos con índice impar. Como consecuencia, desde cualquier intervalo del grafo, las iteraciones de f eventualmente alcanzan cualquier otro intervalo del grafo.

Sea ahora U y V dos abiertos no vacíos contenidos en la unión de los intervalos del grafo. Como estos abiertos intersectan a alguno de los intervalos I_j , y dado que el grafo es conexo y contiene ciclos que recorren todos los vértices, existe una sucesión de iteraciones de f que lleva puntos de U hacia V .

Más formalmente, existen $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ tales que $U \cap I_j \neq \emptyset$ y $V \cap I_k \neq \emptyset$. Dado que existe una cadena de intervalos conectando I_j con I_k mediante imágenes sucesivas bajo f , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Esto cumple la definición de transitividad topológica sobre la unión de los intervalos I_j . Por tanto, el sistema dinámico inducido por f sobre el grafo de Stefan es topológicamente transitivo.

Lema 6.5.2. *Si f tiene un punto de período par, entonces tiene un punto de período dos.*

Sea n el menor entero mayor que uno (en el orden usual de los enteros, no el orden de Sharkovskii) tal que f tiene un punto de período n . Si n es impar, el resultado se sigue de la Proposición 1.7. Por lo tanto, sigue suponer que n es par.

Sea $\mathcal{O}(a)$ la órbita de un punto de período n , $I_1 = [a, b]$, y sea $J = [\min \mathcal{O}(a), \max \mathcal{O}(a)] = [A, B]$, como antes. En la demostración del Lema 6.5.1, el hecho de que n sea impar sólo se utilizó para asegurar la existencia de un intervalo $K_0 \in \mathcal{A}$ con $K_0 \neq I_1$ tal que $f(K_0) \supset I_1$.

Primero, hay que suponer que existe tal K_0 . Entonces hay un ciclo mínimo como en la demostración anterior, con $2 \leq k \leq n-1$. Como antes, I_{n-1} cubre a todos los I_j del otro lado, de modo que

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$$

es un ciclo de longitud dos, y por tanto existe un punto de período dos.

Ahora supongamos que no existe ningún $K_0 \in \mathcal{A}$ con $K_0 \neq I_1$ y $f(K_0) \supset I_1$. Entonces se sigue que:

- (i) Todos los puntos $x_j \in \mathcal{O}(a)$ con $x_j \leq a$ satisfacen $f(x_j) \geq b$.
- (ii) Todos los puntos $x_j \in \mathcal{O}(a)$ con $x_j \geq b$ satisfacen $f(x_j) \leq a$.

Dado que algunos puntos de $\mathcal{O}(a)$ son enviados a b y a B , se tiene que $b, B \in f([A, a])$, y por tanto

$$f([A, a]) \supset [b, B].$$

De manera similar, $f([b, B]) \subset [A, a]$. Así,

$$[A, a] \rightarrow [b, B] \rightarrow [A, a]$$

es un ciclo de longitud dos. Como los intervalos son disjuntos, debe existir un punto de período dos. Esto concluye la demostración.

6.5.2. Demostración del Teorema.

La demostración del Teorema de Sharkovskii se divide en los siguientes casos:

1. n es impar y maximal en el orden de Sharkovskii, y $n \triangleright k$.

Este caso está demostrado en la proposición 6.5.1. Para $k < n$ par, se considera un ciclo de longitud k dentro del ciclo de longitud n , y por el Lema 6.4.4, existe un punto de período k . Para $k > n$, si $x_0 \in I_1$ tiene $f^k(x_0) = x_0$, pero no está en la órbita de período n , entonces por el Lema 6.4.4, x_0 tiene período k , lo cual completa la prueba.

2. $n = 2^m$ y $n \triangleright k$, por lo que $k = 2^s$ con $0 \leq s < m$.

a) **Caso:** $s = 0$, es decir, f tiene un punto fijo.

Podemos definir a y b como antes, de modo que $f(a) \geq b$ y $f(b) \leq a$. Por lo tanto, $f([a, b]) \supset [a, b]$, y por el lema 6.4.3, f tiene un punto fijo.

b) **Caso:** $s = 1$.

Este caso se sigue directamente del Lema 6.5.2, el cual afirma que si f tiene un punto de período par, entonces tiene un punto de período 2.

c) **Caso:** $s > 1$.

Se parte del supuesto de que la función $f : I \rightarrow I$ tiene un punto periódico de período 2^m , y se desea demostrar que entonces f también tiene un punto periódico de período 2^s , donde $1 < s \leq m$.

Sea

$$g = f^{2^{m-s}}.$$

Es decir, g es la composición de f consigo misma 2^{m-s} veces. Como f tiene un punto periódico de período 2^m , se deduce que existe un punto $p \in I$ tal que

$$f^{2^m}(p) = p \quad \text{y} \quad f^j(p) \neq p \quad \text{para todo } 1 \leq j < 2^m.$$

Al definir $g = f^{2^{m-s}}$, se observa que:

$$g^{2^s}(p) = f^{2^{m-s} \cdot 2^s}(p) = f^{2^m}(p) = p,$$

lo que implica que p es un punto periódico de g de período 2^s . En particular, g tiene al menos un punto periódico de período 2^s . Esto garantiza que g tiene un punto periódico de algún período q tal que $q \mid 2^s$.

Ahora, se aplica el **Lema 6.5.2**, el cual establece que si una función continua definida sobre un intervalo tiene un punto periódico de período 2^r con $r \geq 2$, entonces también tiene un punto de período 2. En este caso, g tiene un punto periódico de período 2^s , y dado que $s \geq 2$ (porque $s > 1$ por hipótesis), el lema se puede aplicar a g . Por lo tanto, g tiene un punto x_0 de período 2, es decir:

$$g^2(x_0) = x_0 \quad \text{y} \quad g(x_0) \neq x_0.$$

Sustituyendo $g = f^{2^{m-s}}$, se obtiene:

$$f^{2^{m-s+1}}(x_0) = x_0 \quad \text{y} \quad f^{2^{m-s}}(x_0) \neq x_0.$$

Esto muestra que el punto x_0 es periódico para f , con algún período que divide 2^{m-s+1} , pero estrictamente mayor que 2^{m-s} . Es decir, el

período mínimo de x_0 bajo f es de la forma 2^t , con $t \leq s$.

A continuación, se analiza qué valores puede tomar t :

Si $t < s$, entonces x_0 sería un punto fijo para $g = f^{2^{m-s}}$, ya que:

$$g(x_0) = f^{2^{m-s}}(x_0) = x_0.$$

Pero esto contradice el hecho de que x_0 es un punto de período 2 para g , es decir, que $g(x_0) \neq x_0$. Por lo tanto, esta posibilidad se descarta.

Por lo tanto, debe cumplirse que $t = s$, es decir, el período de x_0 bajo f es exactamente 2^s , como se deseaba probar.

Esto concluye la demostración del caso $s > 1$, y por tanto queda probado que si f tiene un punto periódico de período 2^m , entonces también tiene un punto periódico de período 2^s para todo $s \leq m$.

3. $n = 2^m p$, con $p > 1$ impar, $m \geq 1$, n es maximal en el orden de Sharkovskii para f , y $n \triangleright k$. Se presentan tres subcasos posibles para k :

a) **Caso :** $k = 2^s q$, con $s \geq m + 1$, $q \geq 1$ impar.

Sea $g = f^{2^{s-m}}$. Como por hipótesis la función f tiene un punto de período

$$n = 2^m p, \quad \text{con } p > 1 \text{ impar,}$$

entonces la función compuesta $g = f^{2^{s-m}}$ tiene un punto periódico de período

$$\frac{2^m p}{2^{s-m}} = 2^{2m-s} p.$$

Como $s \geq m + 1$, se tiene que $2m - s \leq m - 1$, por lo tanto, el punto periódico tiene período

$$2^r p \quad \text{con } r \leq m - 1 \text{ y } r \geq 1.$$

En particular, este punto tiene un período que es el producto de una potencia de 2 con un número impar mayor que 1. Esto implica que g tiene un punto de período impar mayor que 1.

Como g tiene un punto de período impar mayor que 1, y ya se ha demostrado en la proposición 6.5.1, se deduce que g tiene puntos periódicos de todos los períodos que le siguen en el orden de Sharkovskii. En particular, como $q \geq 1$ es impar, existe un punto periódico de período q para g .

Ahora, como $g = f^{2^{s-m}}$ y g tiene un punto x_0 de período q , se tiene:

$$g^q(x_0) = x_0 \quad \implies \quad f^{q \cdot 2^{s-m}}(x_0) = f^{2^s q}(x_0) = x_0,$$

y como el período de x_0 bajo g es exactamente q , se concluye que el período de x_0 bajo f es exactamente

$$k = 2^s q.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que f tiene un punto de período k , como se quería.

b) **Caso:** $k = 2^s$ con $s \leq m$.

Se define la función compuesta $g = f^p$. La motivación de este paso es que, dado que f tiene un punto de período $2^m p$, entonces g tendrá un punto de período 2^m , ya que se elimina el factor impar p . Formalmente, si x_0 es un punto tal que $f^{2^m p}(x_0) = x_0$, entonces

$$g^{2^m}(x_0) = f^{2^m p}(x_0) = x_0,$$

por lo tanto, x_0 es un punto de período 2^m para la función g .

Ahora se aplica el resultado previamente demostrado para funciones que tienen un punto de período 2^m . En efecto, como $s \leq m$, se deduce que g también tiene un punto x_1 de período exactamente 2^s , es decir,

$$g^{2^s}(x_1) = x_1, \quad \text{y} \quad g^j(x_1) \neq x_1 \quad \text{para} \quad 1 \leq j < 2^s.$$

Recordando que $g = f^p$, se tiene que

$$f^{p \cdot 2^s}(x_1) = x_1,$$

por lo que x_1 es un punto periódico de f de período $k = 2^s p$.

Finalmente, como x_1 tiene período mínimo 2^s para g y p es impar, se concluye que el período mínimo de x_1 para f es exactamente $p \cdot 2^s = k$, ya que cualquier período menor implicaría un período menor para g , lo cual contradice la suposición.

Esto completa el caso en que $k = 2^s$ con $s \leq m$.

c) **Caso :** $k = 2^m q$ con q impar y $q > p$.

Definimos la función $g = f^{2^m}$. Como se asume que f tiene un punto de período $n = 2^m p$, se deduce que g tiene un punto de período p . Es decir, existe un punto x_0 tal que:

$$g^p(x_0) = f^{2^m p}(x_0) = x_0,$$

y como el período mínimo de x_0 para f es $2^m p$, entonces el período mínimo de x_0 para g debe ser p .

Dado que $p > 1$ es impar, y $q > p$, por la parte de la proposición 6.5.1, se garantiza que la función g tiene un punto de período q . Es decir, existe x_1 tal que:

$$g^q(x_1) = x_1 \quad \text{y} \quad g^j(x_1) \neq x_1 \quad \text{para todo } 1 \leq j < q.$$

Como $g = f^{2^m}$, esto implica que:

$$f^{2^m q}(x_1) = x_1,$$

y como el período mínimo de x_1 para g es q , se deduce que el período mínimo de x_1 para f es:

$$2^m q = k.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que f tiene un punto de período k , como se requería.

6.6. Discretización de Rocard.

En esta sección se establece la existencia de un punto de período tres en el sistema de Rocard, el cual está modelado por la ecuación (4.0.7). A partir de dicho sistema, es posible construir un conjunto discreto asociado. Para ello, se consideran las tres soluciones numéricas x , y y z , de las cuales se extrae una sucesión de máximos locales correspondientes a cada oscilación del sistema. Es decir, cada iteración se define como el valor máximo alcanzado en cada oscilación, como se ilustra en la figura 6.6.1. Con esta información es posible representar gráficamente el comportamiento discreto del sistema.

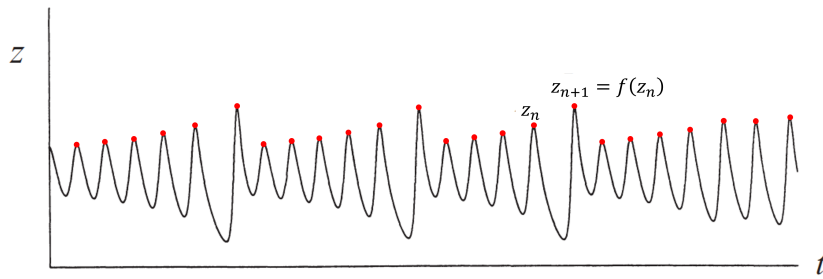


Figura 6.6.1: Discretización de la integración numérica.

De esta forma, se tiene una discretización para cada solución $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ la ecuación de recurrencia

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad (6.6.1)$$

donde el objetivo es analizar el comportamiento de la secuencia $\{z_n\}$ en relación con z_{n+1} . Los elementos de cada una de estas tres órbitas están determinados por los valores máximos de las integraciones numéricas para cada una de las tres variables x, y, z . Con esto se obtienen tres sistemas dinámicos discretos, cada uno correspondiente con los resultados de las integraciones numéricas del sistema 4.0.7.

Para determinar los valores máximos, primero se lleva a cabo la integración numérica, obteniendo tres conjuntos de datos correspondientes a las variables x, y, z en función del tiempo discretizado t_i . En particular, se consideran los valores en intervalos de tamaño Δt .

Cada conjunto de datos resultante de la integración numérica, representado por las secuencias $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_i\}_{i=1}^n$ y $\{z_i\}_{i=1}^n$, contiene exactamente n elementos, donde n es el número de subdivisiones del intervalo de integración.

El cálculo de los máximos locales, necesario para construir la órbita del sistema dinámico discreto, se realiza a partir de los conjuntos de datos $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_i\}_{i=1}^n$ y $\{z_i\}_{i=1}^n$, los cuales corresponden a las soluciones numéricas del sistema de ecuaciones diferenciales (4.0.7). Un máximo local se define como un valor en la secuencia que es estrictamente mayor que sus vecinos inmediatos. Es decir, un elemento x_i es un máximo local si y solo si se cumple,

$$x_{i-1} < x_i \text{ y } x_{i+1} < x_i, \quad \text{para } 1 < i < n - 1.$$

Esta condición asegura que x_i es mayor que el valor anterior x_{i-1} y el valor posterior x_{i+1} , es decir, x_i es el valor máximo en un intervalo local de tres puntos consecutivos: x_{i-1}, x_i, x_{i+1} . De manera similar, las condiciones para los máximos locales en y y z se expresan,

$$y_{i-1} < y_i \text{ y } y_{i+1} < y_i, \quad \text{para } 1 < i < n - 1.$$

además,

$$z_{i-1} < z_i \text{ y } z_{i+1} < z_i, \quad \text{para } 1 < i < n - 1.$$

Este enfoque garantiza que los puntos seleccionados son verdaderos máximos locales dentro del intervalo discretizado de valores. La condición $1 < i < n - 1$ es necesaria para poder evaluar los valores de x_{i-1} y x_{i+1} , evitando así puntos en los bordes de la secuencia que no tengan ambos vecinos disponibles.

De esta manera, las órbitas para los tres sistemas dinámicos discretos se obtienen como los conjuntos de máximos locales:

$$x_{\max} = \{x[i] \mid x[i-1] < x[i], x[i+1] < x[i], i > 1\}, \quad (6.6.2)$$

$$y_{\max} = \{y[i] \mid y[i-1] < y[i], y[i+1] < y[i], i > 1\}, \quad (6.6.3)$$

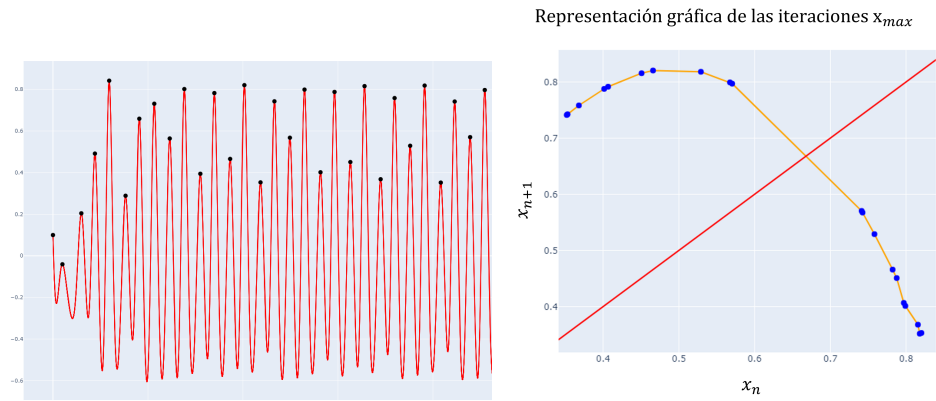
$$z_{\max} = \{z[i] \mid z[i-1] < z[i], z[i+1] < z[i], i > 1\}. \quad (6.6.4)$$

Debe de recordarse que por la forma en que se obtiene las órbitas, estas dependen fuertemente de los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales (4.0.7), es

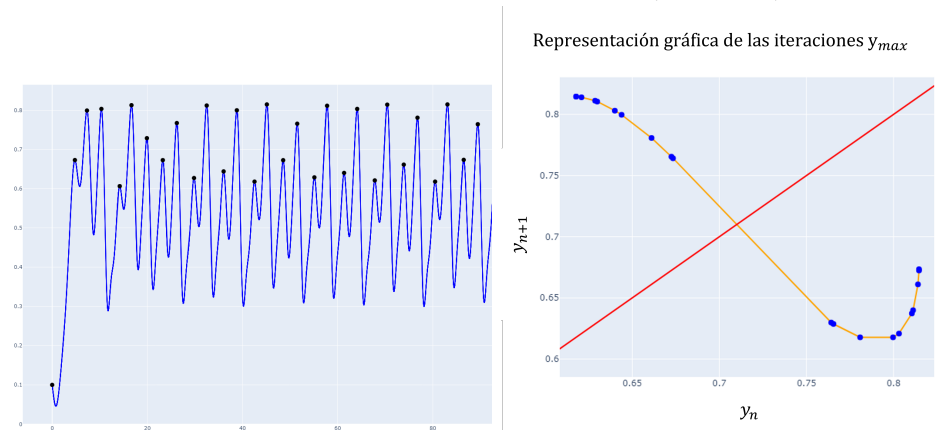
decir, $x_{\max}(\eta, \varepsilon, \omega), y_{\max}(\eta, \varepsilon, \omega), z_{\max}(\eta, \varepsilon, \omega)$

Entonces la idea para obtener la representación gráfica de estos sistemas dinámicos discretos se calcula la integración numérica con el código en el apéndice y obtener los máximos en cada oscilación con las expresiones (6.6.2), (6.6.3) y (6.6.4).

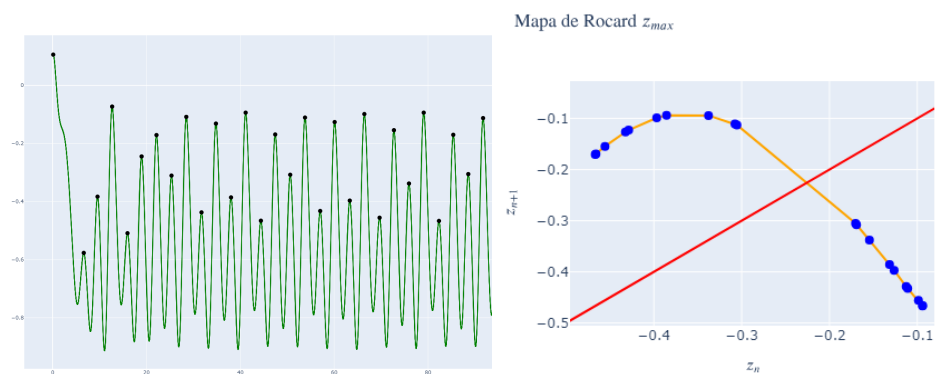
Para obtener el ejemplo de las órbitas $x_{\max}(-1, 0.5, 2), y_{\max}(-1, 0.5, 2), z_{\max}(-1, 0.5, 2)$ se calcula la integración numérica usando la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ y los parámetros $\omega = 2, \varepsilon = 0.5$ y $\eta = -1$ para el sistema (4.0.7), con un tiempo $t \in (0, 100)$ y $n = 100,000$ iteraciones,



(a) Integración numérica para $x(t)$ con los máximos señalados. (b) Representación gráfica de la órbita $x_{max}(-1, 0.5, 2)$.



(c) Integración numérica para $y(t)$ con los máximos señalados. (d) Representación gráfica de la órbita $y_{max}(-1, 0.5, 2)$.



(e) Integración numérica para $z(t)$ con los máximos señalados. (f) Representación gráfica de la órbita $z_{max}(-1, 0.5, 2)$.

Figura 6.6.2: Representaciones gráficas de las orbitas de los máximos de las integraciones numéricas.

Los puntos negros en las figuras 6.6.2a, 6.6.2c y 6.6.2e son los máximos locales de las integraciones numéricas $x(t_i), y(t_i), z(t_i)$ que representan los valores de las órbitas $x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}$ señalados con los puntos en azules de las figuras 6.6.2b, 6.6.2d y 6.6.2f

Para la construcción de los mapas de bifurcación, se realizan integraciones numéricas sucesivas en las cuales el parámetro η varía en el rango $(-1.34, -0.65)$, con 400 incrementos, es decir, se tiene el conjunto,

$$\eta_{\Delta} = \left\{ 0 \leq i \leq 399; \left(\frac{-0.65 + 1.34}{400} \right) i - 1.34 \right\}.$$

Se tiene tres mapas de bifurcación con las diferentes órbitas $x_{\max}(\eta_{\Delta}, 0.5, 2), y_{\max}(\eta_{\Delta}, 0.5, 2)$ y $z_{\max}(\eta_{\Delta}, 0.5, 2)$.

Cada mapa de bifurcación se obtiene tal que $\eta_{\Delta} \times x_{\max}(\eta_{\Delta_i}, 0.5, 2)$, es decir, mediante pares ordenados de las orbitas con cada uno de los valores de η_{Δ} .

Es importante señalar que para la construcción de los mapas de bifurcación, los primeros diez valores de las órbitas se no se colocan en la gráfica con el fin de eliminar los transitorios y garantizar que el comportamiento sea periódicamente estable, de esta forma capturar el comportamiento del sistema y no el transitorio dado por la condición inicial.

La representación gráfica de las órbitas describe el comportamiento de las soluciones numéricas del sistema (4.0.7) ya que muestra si los máximos tiene alguna periodicidad en cada oscilación, con ayuda del espacio de parámetros descrito en la figura 4.5.4 es posible trazar cualquier curva al obtener los pares ordenados del espacio de parámetros es posible calcular las órbitas $x_{\max}(\eta, \varepsilon, \omega), y_{\max}(\eta, \varepsilon, \omega)$ y $z_{\max}(\eta, \varepsilon, \omega)$.

Para seleccionar la curva en el espacio de parámetros, se considera un segmento de recta definido por $\varepsilon = 0.5$ con $\eta \in (-1.34, -0.65)$. Para calcular las órbitas, se emplean estas condiciones, además de establecer $\omega = 2$. Esta curva en el espacio de parámetros obtiene valores de distintas regiones, la región 4, donde se observa inestabilidad local en el origen y estabilidad en los puntos fuera de este, así como a la región 16, en la cual la estabilidad local es inestable en todos los puntos.

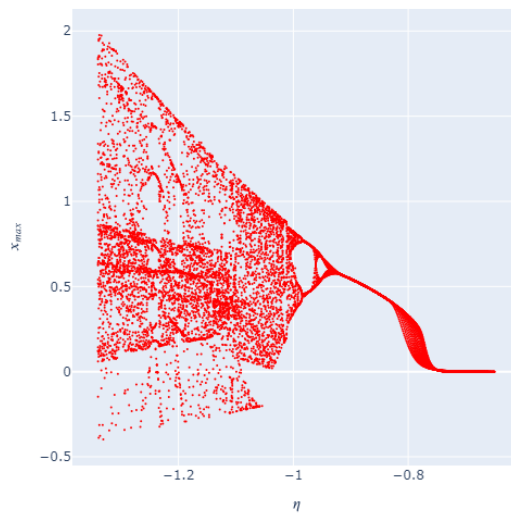
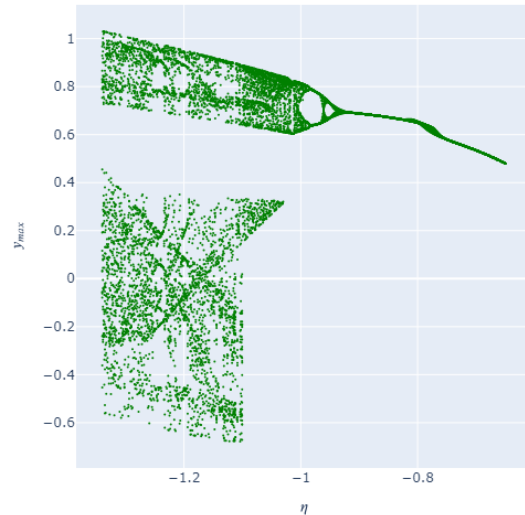
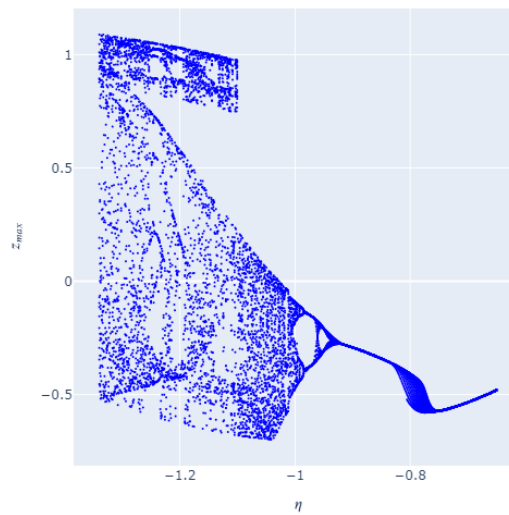
Mapa de bifurcación x_{max} (a) Mapa de bifurcación para x_{max} .Mapa de bifurcación y_{max} (b) Mapa de bifurcación para y_{max} .Mapa de bifurcación z_{max} (c) Mapa de bifurcación para z_{max} .

Figura 6.6.3: Los mapas de bifurcación en el intervalo $\eta \in (-1.34, -0.65)$ para cada una de las tres soluciones numéricas para el sistema de Rocard.

Para valores $\eta \in (-0.65, -0.75)$ y $\varepsilon = 0.5$ son valores que corresponden en la región 4, que tiene inestable el origen y los puntos de equilibrio distintos del origen son estables, en las figuras 6.6.3a, 6.6.3b y 6.6.3c se muestra este efecto al tener órbitas de período uno.

Para valores $\eta \in [-0.75, 1.34)$ y $\varepsilon = 0.5$ son valores que corresponden en la región 16, todos los puntos de equilibrio son inestables localmente, con las figuras 6.6.3a, 6.6.3b y 6.6.3c se muestra que existe un atractor, más específico aún, se trata de un atractor extraño ya que previamente se prueba que el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

Las órbitas $x_{\max}(\eta, 0.5, 2)$, $y_{\max}(\eta, 0.5, 2)$ y $z_{\max}(\eta, 0.5, 2)$ para $\eta \in [-0.75, 1.34)$ muestran una duplicación del periodo, la resolución de como se calculen estos diagramas dependen del poder computacional.

Al realizar un acercamiento en las figuras 6.6.3a, 6.6.3b y 6.6.3c, se observa la presencia de un período tres que aparece en los tres mapas de bifurcación. Esto se debe a que, al trazar una línea vertical correspondiente al valor $\eta = -1.014$ en los diagramas de bifurcación, dicha línea cruza tres veces cada uno de los diagramas. Estos cruces se detallan en las figuras 6.6.4a, 6.6.4b y 6.6.4c, donde una línea punteada señala claramente los puntos de intersección.

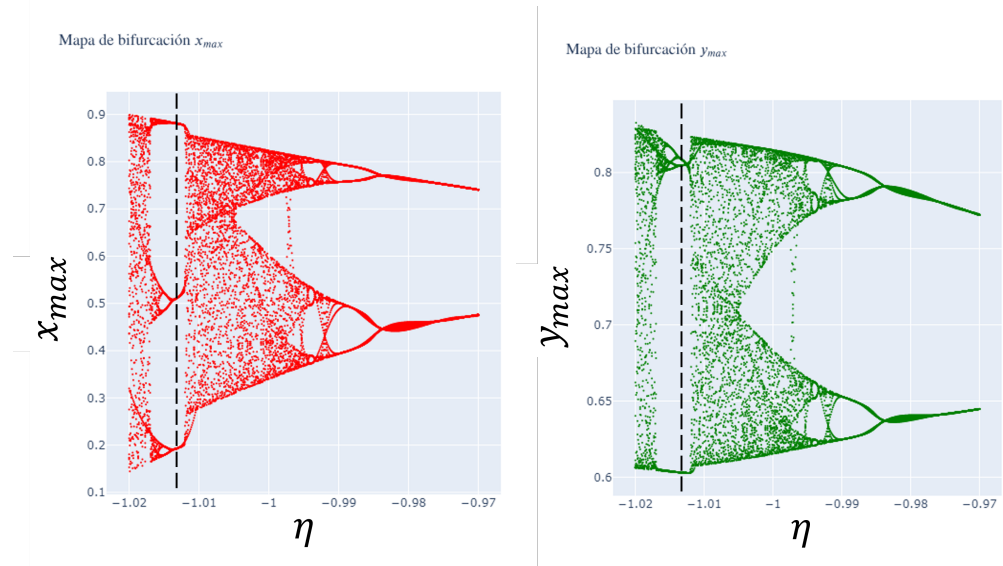
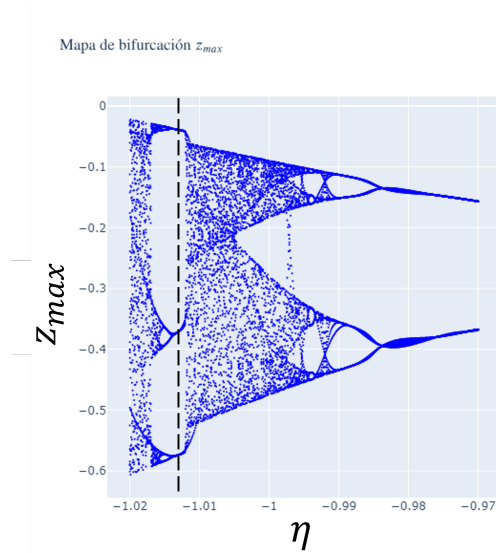
(a) Mapa de bifurcación para x_{max} .(b) Mapa de bifurcación para y_{max} .(c) Mapa de bifurcación para z_{max} .

Figura 6.6.4: Los mapas de bifurcación en el intervalo $\eta \in (-1.02, -0.97)$ para cada una de las tres soluciones numéricas del sistema de Rocard.

A partir de una simulación computacional del sistema, se ha identificado la existencia de una órbita periódica de período 3. Este hallazgo es altamente significativo, ya que, por el Teorema de Sharkovskii 6.5.1, la existencia de una órbita de período 3 implica la existencia de órbitas periódicas de todos los demás períodos naturales. En particular, esto recupera el resultado de Li y Yorke 6.4.1, quienes mostraron que “período tres implica caos”.

Además, mediante experimentación numérica se observó sensibilidad a las condiciones iniciales: trayectorias que parten de puntos cercanos divergen exponencialmente en el tiempo. Esto es evidencia empírica de una de las propiedades fundamentales del caos.

Por otra parte, dada la proposición 6.5.2, se verifica que la órbita de período 3 genera una dinámica que es topológicamente transitiva sobre la unión de los intervalos del grafo de Stefan. Esta propiedad garantiza la existencia de trayectorias que se aproximan arbitrariamente a cualquier región del espacio dinámico.

En conjunto, la presencia de:

1. transitividad topológica (garantizado por la proposición 6.5.2),
2. un conjunto denso de puntos periódicos (garantizado por el Teorema de Sharkovskii 6.5.1),
3. sensibilidad a las condiciones iniciales (garantizado por las simulaciones numéricas),

permite concluir que el sistema cumple con la definición de caos en el sentido de Devaney, por lo tanto, el sistema dinámico continuo (4.0.7) exhibe dinámica caótica. Esto implica que, para ciertos valores de los parámetros, el sistema presenta trayectorias altamente impredecibles a largo plazo.

Se ha demostrado que las condiciones $\varepsilon = 0.5$ y $\eta \in (-1.34, -0.97)$, las cuales representan una curva en el espacio de parámetros definida a lo largo de esta tesis, generan comportamientos caóticos. La elección de estos valores no es arbitraria, ya que se encuentran en la transición entre dos regiones: una donde al menos un punto de equilibrio local es estable y otra donde todos los puntos de equilibrio son inestables. Este análisis evidencia que el caos emerge precisamente en la transición entre estas dos regiones dinámicas.

Es factible analizar cada transición entre regiones con al menos un punto de equilibrio estable y aquellas donde no existe ningún punto de estabilidad. En dichas transiciones, es posible obtener resultados similares que evidencien la aparición de comportamientos caóticos. Lo que resulta en una forma posible de poder detectar rápidamente condiciones de parámetros donde a parece caos en el sistema.

En la figura 4.5.4 se pueden señalar rápidamente condiciones para los parámetros donde es posible encontrar comportamientos caóticos,

- $R_1 = \left\{ \eta, \varepsilon \in \mathbb{R} ; |\eta| < \frac{1}{2}\varepsilon \vee 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\sqrt{143 + 19\sqrt{57}} \right\}$, este conjunto contiene elementos de las regiones 2 y 3.
- $R_2 = \left\{ \eta, \varepsilon \in \mathbb{R} ; |\eta| < \varepsilon - \frac{1}{4}\sqrt{143 + 19\sqrt{57}} \right\}$, este conjunto contiene elementos de las regiones 3 y 9.
- $R_3 = \left\{ \eta, \varepsilon \in \mathbb{R} ; |3\varepsilon + 2\eta| < \frac{1}{2}\eta \right\}$, este conjunto contiene elementos de las regiones 4, 5, 6, y 16.
- $R_4 = \left\{ \eta, \varepsilon \in \mathbb{R} ; |\Delta_1(\eta, \varepsilon) - \eta| < \varepsilon \vee 3\varepsilon < -2\eta \right\}$, este conjunto contiene elementos de las regiones 5 y 16.
- $R_5 = \left\{ \eta, \varepsilon \in \mathbb{R} ; |\Delta_2(\eta, \varepsilon) - \eta| < 1.8 \vee \varepsilon > 0 \vee \eta > 0 \right\}$, este conjunto contiene elementos de las regiones 3 y 9.

Los conjuntos R_1 , R_2 y R_3 contienen elementos de dos regiones una de ellas genera soluciones al sistema de ecuaciones (4.0.7) donde localmente es estable para sus puntos fijos y la otra región contiene al menos dos puntos de inestabilidad.

Los conjuntos R_4 y R_5 contienen elementos donde las regiones generan soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales (4.0.7) donde localmente son inestables en todos los puntos fijos pero existen condiciones iniciales que en las simulaciones computacionales muestran un atractor.

6.7. Atractores caóticos de Rocard.

La información obtenida revela que los máximos locales exhiben un comportamiento caótico. Con base en ello, es posible construir los retratos de fase correspondientes a los valores donde se manifiesta dicho caos en los máximos

locales, lo que permite obtener una representación visual del comportamiento global del sistema.

A continuación se presentan distintos diagramas fase con las condiciones $\varepsilon = 0.5$ y $\eta \in (-1.34, -0.97)$ con un tiempo de integración $t = 100$ y $100,000$ iteraciones.

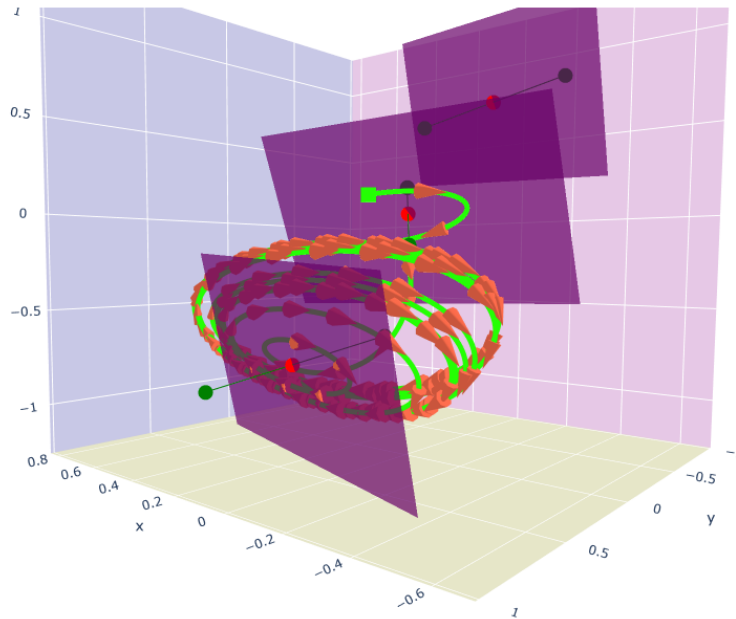


Figura 6.7.1: Diagrama fase con parámetros $\eta = -0.97$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$.

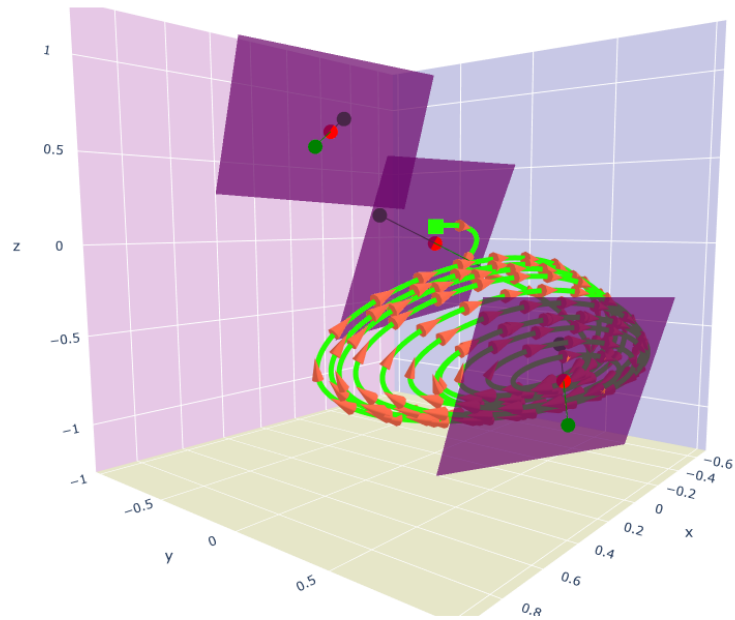


Figura 6.7.2: Diagrama fase con parámetros $\eta = -1$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$.

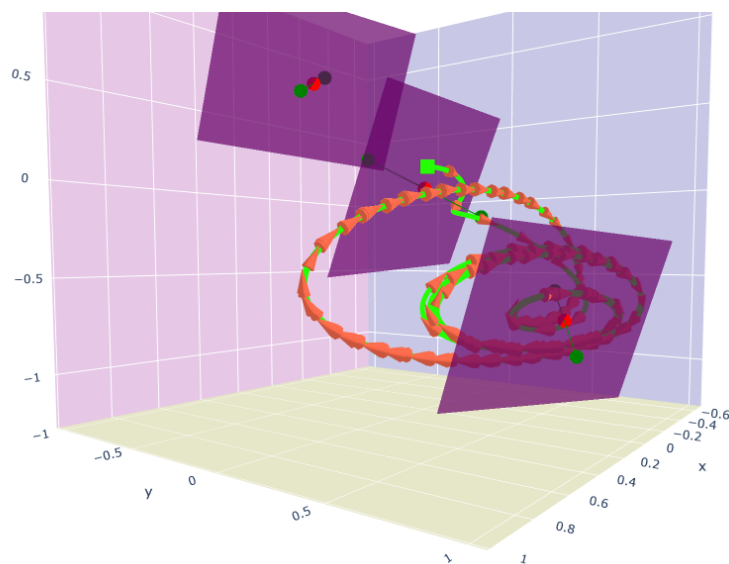


Figura 6.7.3: Diagrama fase con parámetros $\eta = -1.014$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$.

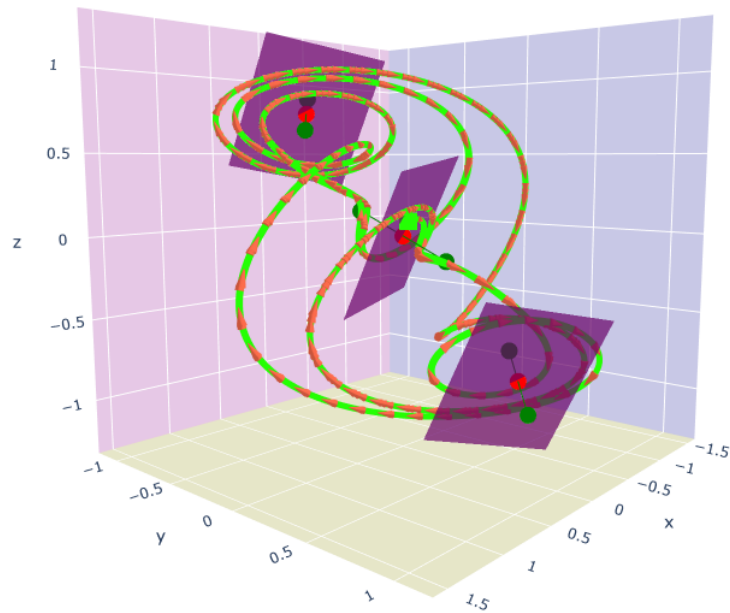


Figura 6.7.4: Diagrama fase con parámetros $\eta = -1.2$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$.

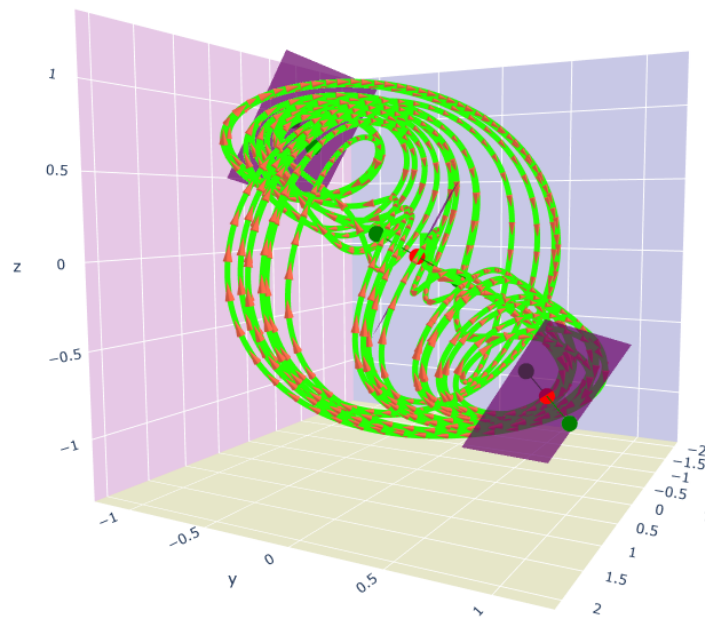


Figura 6.7.5: Diagrama fase con parámetros $\eta = -1.34$, $\varepsilon = 0.5$ y $\omega = 2$ con condiciones iniciales $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$.

La Figura 6.7.3 corresponde al valor del parámetro $\eta = -1.014$, donde las tres soluciones numéricas presentan un período tres en los máximos locales. Las integraciones numéricas realizadas se sitúan en la región dieciséis, caracterizada por la inestabilidad de todos los puntos de equilibrio según la linealización. Para valores menores de $\eta < -1.34$, la integración numérica indica que la dinámica global se torna inestable. Aunque aún no se ha encontrado un criterio general que permita determinar de forma sistemática el rango de aparición de los atractores mostrados en las figuras 6.7.1, 6.7.2, 6.7.3, 6.7.4 y 6.7.5, estos tienden a manifestarse en regiones de inestabilidad próximas a regiones estables.

Los retratos fase presentados coinciden con los obtenidos en el artículo [Ginoux et al. \(2022\)](#). Sin embargo, la información recopilada en este trabajo proporciona una guía o brújula para identificar un mayor número de atractores caóticos. Estos se localizan principalmente en las regiones inestables cercanas a las regiones estables, lo que permite una exploración más sistemática y detallada de estas transiciones dinámicas.

Capítulo 7

Trabajo a futuro.

A lo largo de los capítulos se realiza un estudio del sistema dinámico, sin embargo, resulta completamente extenso y sin cubrir todos los aspectos posibles, por lo que, se enuncian algunos aspectos por cubrir,

- Revisar todas curvas y puntos para poder determinar y encontrar bifurcaciones sobre las curvas.
- Realizar algún tipo de control de los parámetros para forzar las soluciones a permanecer en alguna región de interés.
- Realizar un código de programación simbólica para calcular las variedades centrales.
- Realizar un entorno con interfaz gráfica para poder observar distintos resultados en tiempo real y observar con más detalle los cambios en el sistema al mover los parámetros.
- Realizar el circuito físico en el laboratorio del sistema de Rocard (4.0.7).
- Usar el circuito con aritmética modular para realizar un verdadero generador de números aleatorios.
- Interpretar los resultados en el modelo económico.
- Usar datos reales de un producto para ver la relación encontrada matemáticamente entre el precio, el poder de producción y el número de consumidores para verificar los resultados obtenidos que implican caos.

Capítulo 8

Conclusión.

Este trabajo analiza un modelo económico que, retomado recientemente y de origen determinista, es capaz de generar comportamientos caóticos, lo que evidencia que la complejidad de los sistemas económicos puede surgir de las propias interacciones internas entre variables como precio, producción y consumo, sin necesidad de factores externos.

Inicialmente, se estudió el modelo lineal, determinando que el comportamiento cualitativo del sistema depende de dos parámetros, lo que permitió identificar regiones con distintos tipos de estabilidad. Posteriormente, al considerar el sistema no lineal, se hallaron dos nuevos puntos de equilibrio y se comprobó que la dinámica se vuelve más rica y sensible, especialmente cerca de ciertas combinaciones de parámetros donde aparecen bifurcaciones y fenómenos de transición entre regiones en el espacio de parámetros que generan con al menos punto de equilibrio estable a regiones sin puntos de equilibrio estables.

A través de simulaciones y análisis computacional, se detectaron regiones donde, aunque no existen puntos de equilibrio estables, el sistema presenta regiones de atracción y comportamientos caóticos, confirmados mediante la identificación de órbitas de periodo tres y sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto se logró mediante herramientas teóricas como el teorema de Sharkovskii y mapas de bifurcación.

Finalmente, se concluye que incluso un modelo económico simple y aislado, sin factores externos, puede desarrollar dinámica caótica, lo que subraya la capacidad inherente de los sistemas deterministas para generar comportamientos

impredecibles y complejos. Los métodos empleados en este análisis pueden extenderse a otros sistemas dinámicos, facilitando la detección de regiones caóticas en diferentes disciplinas.

Bibliografia

- Alligood, K. T., Sauer, T., and Yorke, J. A. (2000). *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Springer New York.
- Assous, M. and Carret, V. (2021). Relaxation oscillations in the early development of econometrics: coming (almost) full circle (1929-1951). *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Disponible en: www.researchgate.net.
- Castillo, C. I. (2000). Las fórmulas de Cardano-Ferrari. *Universitat de València*. Disponible en: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf>.
- Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to chaotic dynamical systems*. Westview Press, second edition.
- Ginoux, J.-M., Jovanovic, F., Meucci, R., and Llibre, J. (2022). Rocard's 1941 chaotic relaxation econometric oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 32(3):12.
- Hamburger, L. (1931). Analogie des fluctuations économiques et des oscillations de relaxation. *Indices du mouvement des affaires*, (9):1-35.
- Meinsma, G. (1995). Elementary proof of the Routh-Hurwitz test. *Systems & Control Letters*, 25(4):237-242.
- Ovsyannikov, I. I. and Turaev, D. V. (2016). Analytic proof of the existence of the lorenz attractor in the extended lorenz model. *Nonlinearity*, 30(1):115-137.
- Robinson, C. (1995). *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC press.
- Rocard, Y. (1941). *Théorie des oscillateurs*. Editions de la revue scientifique.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chapman and Hall/CRC, second edition.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer, second edition.

Apéndice A

Apéndice

A1. Teorema Routh-Hurwitz

Teorema A1.1 (Routh-Hurwitz). *Meinsma (1995)* Todas las raíces de un polinomio $P(s)$ dado se encuentran en el semiplano complejo izquierdo, cuando todas las entradas de la primera columna de la tabla de Routh no cambian de signo.

A1.1. Tabla de Routh-Hurwitz

Construcción de la tabla de Routh, dado un polinomio característico de la forma,

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

se construye las primeras dos filas de la tabla de Routh,

- **Primera fila:** $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots,$
- **Segunda fila:** $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots,$

las filas subsecuentes se calculan utilizando los elementos de las filas anteriores. El elemento de la fila i y columna j , denotado como $R_{i,j}$, se calcula de la siguiente manera:

$$R_{i,j} = \frac{-(R_{i-1,1} \cdot R_{i-2,j+1} - R_{i-2,1} \cdot R_{i-1,j+1})}{R_{i-1,1}}$$

donde $R_{i-1,1}$ es el primer elemento de la fila inmediatamente anterior, y $R_{i-2,j+1}$ y

$R_{i-1,j+1}$ son elementos correspondientes de las filas dos y una posiciones anteriores, respectivamente.

Para clarificar, si la primera columna de la fila i se denota como $R_{i,1}$, entonces el primer elemento de la fila $i + 1$ es:

$$R_{i+1,1} = \frac{-(R_{i,1} \cdot R_{i-1,2} - R_{i-1,1} \cdot R_{i,2})}{R_{i,1}}$$

Y los siguientes elementos de la fila se calculan de manera iterada.

A1.2. Ejemplo de tabla de Routh-Hurwitz

Consideremos un polinomio de tercer grado:

$$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

La tabla de Routh-Hurwitz sería:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\ s^2 & a_2 & a_0 & 0 \\ s^1 & R_{3,1} & R_{3,2} & \\ s^0 & R_{4,1} & & \end{array}$$

Donde,

$$R_{3,1} = \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2}$$

$$R_{3,2} = 0$$

$$R_{4,1} = a_0$$

La estabilidad del sistema se determina revisando los signos de los elementos en la primera columna. Si todos los elementos mantienen el mismo signo, entonces el sistema es estable.

A2. Teoremas referentes a Cardano-Ferrari

Teorema A2.1 (Cardano-Ferrari). *Castillo (2000)* Sea un cuerpo \mathbb{K} de característica distinta de 2 o 3 y sea $a, b, c \in \mathbb{K}$, entonces las raíces de la ecuación,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

en una cerradura algebraica de \mathbb{K} vienen dadas por:

$$x = u + v - \frac{a}{3},$$

donde,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad (\text{A2.1})$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (\text{A2.2})$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad (\text{A2.3})$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3}, \quad (\text{A2.4})$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}, \quad (\text{A2.5})$$

la raíz cuadrada de Δ se escoge arbitrariamente por la simetría en u y v , fijada ésta, las raíces cúbicas u y v se escogen de modo que $p = -3uv$.

Teorema A2.2. *Castillo (2000)* Dado el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c, \in \mathbb{R}$, entonces:

1. Si $\Delta = 0$ entonces todas sus raíces son reales, y al menos dos de ellas son iguales
 - Si $p = q = 0$ entonces la ecuación tiene una raíz triple $x = -\frac{a}{3}$
 - Si $pq \neq 0$ entonces la ecuación tiene una raíz doble $x_{1,2}$ y una simple

x_3 , dadas respectivamente por,

$$x_{1,2} = -\frac{3q}{2p} - \frac{a}{3},$$

$$x_3 = -\frac{4p^2}{9q} - \frac{a}{3}.$$

2. Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene una raíz real viene dada por,

$$x_1 = u + v - \frac{a}{3}.$$

donde la raíz cúbicas u y v son reales. Las otras dos raíces son imaginarias, y vienen dadas por,

$$x_{1,2} = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i.$$

Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación tiene tres raíces simples, que vienen dadas por,

$$x_{1,2,3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) - \frac{a}{3},$$

donde $k = 0, 1, 2$ y el ángulo $0 < \theta < \pi$ está determinado por,

$$\cos \theta = \frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

A3. Sistema dinámico como objeto en programación.

La motivación detrás de este capítulo es desarrollar una nueva librería de programación basada en el lenguaje Python para el análisis de sistemas dinámicos, con la capacidad de expandirse para cualquier tipo de sistema que conste de tres ecuaciones diferenciales. Esto ofrece la ventaja de tener un mayor control sobre los parámetros en los cálculos numéricos y la presentación de resultados.

La nueva librería llamada “DinamicalAnalysis” se fundamenta principalmente en dos herramientas esenciales: “SymPy” y “NumPy”. Cada una de estas bibliotecas

proporciona ventajas significativas en el análisis tanto numérico como analítico de sistemas dinámicos.

La librería NumPy tiene como función principal facilitar la manipulación eficiente de estructuras de datos multidimensionales, como matrices y arreglos, así como la ejecución de operaciones matemáticas de alto rendimiento. A su vez, la librería NumPy optimiza los largos cálculos numéricos mediante operaciones vectorizadas y gestión eficiente de memoria. Esta vectorización también se usa en el software Matlab.

La librería SymPy es una biblioteca de Python dedicada a la matemática simbólica. Su propósito principal es proporcionar herramientas para realizar cálculos simbólicos, donde las variables son tratadas como símbolos algebraicos en lugar de valores numéricos concretos.

Una ventaja considerable de utilizar el lenguaje de programación Python radica en su naturaleza de código abierto, lo que significa que es gratuito y accesible para cualquier persona. Del mismo modo, todas sus bibliotecas poseen esa misma versatilidad, lo que facilita su adopción y utilización en una amplia gama de proyectos y aplicaciones.

Mientras que NumPy se encarga de las aproximaciones numéricas, SymPy se dedica a realizar cálculos simbólicos para obtener resultados analíticos. Esto incluye determinar puntos fijos, realizar linealizaciones, calcular polinomios característicos y brindar apoyo en aproximaciones para el cálculo de las variedades centrales.

Además, la librería se encuentra registrada para uso de cualquier persona al ingresar al sistema de gestión de paquetes del lenguaje de programación Python, conocido abreviadamente como `pip`. Al realizar la ejecución del comando `pip install DinamicalAnalysis` se obtiene una copia exacta del código desarrollado a lo largo de este capítulo.

Para crear un objeto de programación primero es necesario determinar todas las propiedades que dicho objeto necesita al inicializarse. Para ello se crea un objeto llamado `RocardSystem` asociado al sistema de ecuaciones diferenciales que se inicialice con los siguientes argumentos: los parámetros de condición inicial X_0 , intervalo de tiempo de simulación t , número de iteraciones para la simulación N y los parámetros η , ϵ y ω , que corresponde con los parámetros del sistema analizados e a través de la tesis.

La inicialización de la variable se puede distinguir por las palabras reservadas `def __init__`. Para cada uno de los argumentos se les asignan por defecto valores predeterminados que corresponden con: `X_0 = np.zeros((3,1))`, `t = [0,50]`, `N = 1000`, `eta = -1.3`, `epsilon = 0.5` y `omega = 2`.

```

1 import sympy as sp
2 import numpy as np
3
4 class RocardSystem:
5     def __init__(self, X_0 = np.zeros((3,1)), t = [0,50], N =
6         1000, eta = -1.3 , epsilon = 0.5, omega = 2):
7
8         # Configurar impresión del código simbólico
9         sp.init_printing()
10
11        ### Generar las propiedades del objeto ###
12        # Integración numérica RK4
13        self.t = t
14        self.N = N
15        self.h = (t[1]-t[0])/N
16
17        # Variables simbólicas
18        self.x, self.y, self.z = sp.symbols('x,y,z')
19
20        # Vector de variables simbólicas
21        self.X = sp.Matrix([self.x, self.y, self.z])
22
23        # Parámetros
24        self.eta , self.ep, self.w = sp.symbols('eta,epsilon,
25        omega')
26
27        # Valores numéricos de parametros
28        self.parameters = {self.eta: eta, self.ep : epsilon, self
29        .w : omega}
30
31        # Punto inicial para integración numérica
32        self.X_0 = np.reshape(X_0, (3,1))
33
34        # Ecuación diferencial componente a componente
35        self.X_dot = -self.w*(self.ep*self.x + self.w*self.y +
36        self.w*self.z)
37        self.Y_dot = self.w*(self.ep + self.eta*(1-self.z**2-self

```

```

    .x**2/self.w**2))*self.z
34     self.Z_dot = 1.*self.x
35
36     # Vector diferencial
37     self.F = sp.Matrix([self.X_dot, self.Y_dot, self.Z_dot])
38
39     # linealización del sistema
40     self.J = sp.simplify(self.F.jacobian(self.X))

```

Listing A.1: Parte 1 de la inicialización del objeto llamado RocardSystem.

La primera función que se crea tiene la finalidad de actualizar los parámetros una vez ya creado el objeto de programación.

```

1
2 def update_parameters(self, eta=None, epsilon=None, omega=None):
3     if eta is not None:
4         self.parameters[self.eta] = eta
5     if epsilon is not None:
6         self.parameters[self.ep] = epsilon
7     if omega is not None:
8         self.parameters[self.w] = omega

```

Listing A.2: Función para actualizar los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales.

A3.1. Objeto anidado.

Dentro de la inicialización se crea otro objeto, con el objetivo de crear una propiedad en el objeto de programación y así realizar el cálculo de los puntos fijos, la linealización de los puntos de equilibrio y los polinomio característicos de forma simbólica, de modo que se tiene un objeto de programación anidado. Por lo tanto, genera una mejor organización y modularidad.

```

1 # Objeto anidado
2 self.calcular = self.Calcular(self)
3
4 ### Propiedades cualitativas ###
5 ## puntos fijos
6 self.puntos_fijos = self.calcular.puntos_fijos()
7
8 ## linealización
9 self.lin = self.calcular.linealizacion()

```

```

10
11 ## Polinomio caracteristico
12 self.pol_carac = self.calcular.pol_carac()
13
14 ## Resolver el sistema con RK4 con los parámetros introducidos
15 self.X_t = self.calcular.RK4()

```

Listing A.3: Parte 2 de la inicialización del objeto llamado RocardSystem.

Ahora se procede a crear la inicialización del objeto anidado para permitir el acceso a la información de la instancia creada en el nivel superior del objeto.

```

1 class Calcular:
2     def __init__(self, instancia):
3         self.info = instancia

```

Listing A.4: inicialización de la información de la instancia ya creada.

En las funciones de cálculo de puntos fijos, linealización y polinomios característicos se agrega la opción de cálculo en general, es decir, con los parámetros como variables simbólicas.

A continuación define primero la función para calcular los puntos fijos dentro del objeto Calcular.

```

1 def puntos_fijos(self, general = False):
2
3     self.info.puntos_fijos = sp.solve(self.info.F,
4                                       self.info.x,
5                                       self.info.y,
6                                       self.info.z, simplify=True)
7     puntos_fijos = sp.Matrix(self.info.puntos_fijos)
8
9     if not general:
10        self.info.puntos_fijos = puntos_fijos.subs(
11            [
12                (self.info.eta, self.info.parameters[self.info.eta]),
13                (self.info.ep , self.info.parameters[self.info.ep] ),
14                (self.info.w , self.info.parameters[self.info.w] )
15            ])
16
17        return self.info.puntos_fijos

```

Listing A.5: Función en el objeto anidado para calcular los puntos fijos.

Ahora se define la función para calcular la linealización, también dentro del objeto `Calcular`.

```

1 def linealizacion(self, general = False):
2     self.info.lin = 3*[None]
3
4     self.info.puntos_fijos = sp.Matrix(self.puntos_fijos(
5                                     general = general))
6
7     for i in range(3):
8         self.info.lin[i] = self.info.J.subs(
9             [
10                (n,punto) for n ,punto in zip(
11                    [self.info.x ,self.info.y ,self.info.z] ,
12                    self.info.puntos_fijos[i,:])
13            ])
14
15     if not general:
16         for i in range(3):
17             self.info.lin[i] = self.info.lin[i].subs(
18                 [
19                    (n,punto) for n ,punto in zip(
20                        [self.info.eta ,self.info.ep ,self.info.w] ,
21                        self.info.parameters.values())
22                ])
23     return self.info.lin

```

Listing A.6: Función en el objeto anidado para calcular la linealización.

En este momento, se define la función para calcular el polinomio característico dentro del objeto `Calcular`.

```

1 def pol_carac(self):
2
3     self.info.pol_carac = 3*[None]
4     for i in range(2):
5         self.info.pol_carac[i] = self.info.lin[i].charpoly()
6
7     return self.info.pol_carac

```

Listing A.7: Función en el objeto anidado para calcular los polinomios característico.

Finalmente, se procede a crear una función para calcular la solución numérica utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Durante el cálculo de la solución numérica, se incluye un argumento opcional para determinar el máximo de cada una de las tres soluciones del sistema de tres ecuaciones. Esto se logra verificando la diferencia de las soluciones en los tiempos $t_{i-1}-t_{i-2} > 0$ y $t_i-t_{i-1} < 0$. Además, se añade una condición para manejar el caso en que la solución no tenga límite, es decir, cuando esta tienda a infinito.

```

1 def RK4(self, maximos = False, max_value = 10**3):
2
3     X = self.info.X_0
4     t, N, h = self.info.t[0], self.info.N, self.info.h
5
6     self.info.X_t = np.zeros((3,N))
7     self.info.X_t[:,0] = X.flatten()
8
9     F = self.info.F.subs(
10    [
11    (n,param) for n,param in self.info.parameters.items()
12    ])
13
14    # Optimización de la variable computacional con NumPy
15    F = sp.lambdify(self.info.X, F, "numpy")
16
17
18    for i in range(1,N):
19        if X[0] > max_value or X[1] > max_value or X[2] >
max_value:
20            self.info.X_t = self.info.X_t[:, :i]
21            break
22
23        k_1 = h*F(*X.flatten())
24        k_2 = h*F(*(X + 1/2*k_1).flatten())
25        k_3 = h*F(*(X + 1/2*k_2).flatten())
26        k_4 = h*F(*(X + k_3).flatten())
27
28        X = X + 1/6*(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)
29
30        self.info.X_t[:,i] = X.flatten()
31
32        if i+1<N and maximos:
33            if i==1:

```

```

34         self.info.maximos = np.zeros(self.info.X_t.shape)
35         if self.info.X_t[0,i-1] - self.info.X_t[0,i-2] > 0
and self.info.X_t[0,i]- self.info.X_t[0,i-1]<0:
36             self.info.maximos[0,i-1] = self.info.X_t[0,i-1]
37
38         if self.info.X_t[1,i-1] - self.info.X_t[1,i-2] > 0
and self.info.X_t[1,i]- self.info.X_t[1,i-1]<0:
39             self.info.maximos[1,i-1] = self.info.X_t[1,i-1]
40
41         if self.info.X_t[2,i-1] - self.info.X_t[2,i-2] > 0
and self.info.X_t[2,i]- self.info.X_t[2,i-1]<0:
42             self.info.maximos[2,i-1] = self.info.X_t[2,i-1]
43
44     return self.info.X_t

```

Listing A.8: Función en el objeto anidado para calcular el método de Range-Kutta.

A3.2. Ejemplo de uso.

```

1 import DinamicalAnalysis as DA
2
3 # Tres condiciones iniciales diferentes
4 X_0 = np.array([[ 0.3, -0.3, -0.3],
5                 [-0.05, 0.05, -0.05],
6                 [ 0, 0, 0] ])
7 # tiempo para la simulación
8 t = [0,40]
9 #Iteraciones
10 N = 40000
11 #Valor máximo de paro para la integración numérica
12 max_value = 10
13 # llamada del objeto
14 sistema1 = DA.RocardSystem(X_0 = X_0[:,0] , t = t, N = N, epsilon
= 0.5, eta = -1.3, omega = 2.)
15
16 # Toda la información se encuentra guardada en la variable
sistema1
17
18 # Función vectorial
19 sistema1.F
20

```

```

21 #Linealización
22 sistema1.J
23
24 #Puntos fijos
25 sistema1.calcular.puntos_fijos(general=True)
26 sistema1.calcular.puntos_fijos()
27
28
29 #Linealización sobre los puntos fijos
30 sistema1.linealizacion(general=True)
31 sistema1.linealizacion()
32
33 #Polinomios cartacteristicos
34 sistema1.calcular.pol_carac()
35
36 # Integración numérica
37 sistema1.calcular.RK4(max_value = max_value)

```

Listing A.9: Ejemplo de código

Lo que genera como resultado:

Función vectorial

$$\begin{bmatrix} -\omega(\epsilon x + \omega y + \omega z) \\ \omega z \left(\epsilon + \eta \left(-z^2 + 1 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \right) \\ 1.0x \end{bmatrix}$$

Jacobiano de la función vectorial

$$\begin{bmatrix} -\epsilon\omega & -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\frac{2\eta x z}{\omega} & 0 & \epsilon\omega - 3\eta\omega z^2 + \eta\omega - \frac{\eta x^2}{\omega} \\ 1.0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puntos fijos

$$(0.0, 0.0, 0.0), \left(0.0, -\sqrt{\frac{\epsilon + \eta}{\eta}}, \sqrt{\frac{\epsilon + \eta}{\eta}} \right), \left(0.0, \sqrt{\frac{\epsilon + \eta}{\eta}}, -\sqrt{\frac{\epsilon + \eta}{\eta}} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.784464540552736 & 0.784464540552736 \\ 0.0 & 0.784464540552736 & -0.784464540552736 \end{bmatrix}$$

Linealización

$$\left[\left[\begin{array}{ccc} -\epsilon\omega & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & \epsilon\omega + \eta\omega \\ 1.0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} -\epsilon\omega & -\omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & \epsilon\omega + \eta\omega - 3\omega(\epsilon + \eta) \\ 1.0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right]$$

$$\left[\left[\begin{array}{ccc} -1.0 & -4.0 & -4.0 \\ 0 & 0 & -1.6 \\ 1.0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} -1.0 & -4.0 & -4.0 \\ 0 & 0 & 3.2 \\ 1.0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right]$$

Polinomio Característicos

$$\text{PurePoly}(1.0\lambda^3 + 1.0\lambda^2 + 4.0\lambda - 6.4, \lambda, \text{domain} = \mathbb{R}),$$

$$\text{PurePoly}(1.0\lambda^3 + 1.0\lambda^2 + 4.0\lambda + 12.8, \lambda, \text{domain} = \mathbb{R})$$

integración numérica

$$\begin{aligned} & [[3.0000 \times 10^{-01}, 2.9988 \times 10^{-01} \dots - 1.5564 \times 10^{+00}, -1.5559 \times 10^{+00}] \\ & [-5.0000 \times 10^{-02}, -5.0000 \times 10^{-02} \dots 1.6256 \times 10^{-01}, 1.6256 \times 10^{-01}] \\ & [0.0000 \times 10^{00}, 2.9994 \times 10^{-04} \dots 8.81844 \times 10^{-02}, 8.6628 \times 10^{-02}] \end{aligned}$$



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00249

Matrícula: 2222800064

Oscilador económico caótico de relajación de Rocard.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 12 del mes de diciembre del año 2025 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ
DRA. LUCIA IVONNE HERNANDEZ MARTINEZ
DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: GILBERTO GARCIA PADILLA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



GILBERTO GARCIA PADILLA
ALUMNO

REVISÓ

[Signature]
MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

[Signature]
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

[Signature]
DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL

[Signature]
DRA. LUCIA IVONNE HERNANDEZ MARTINEZ

SECRETARIO

[Signature]
DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ