



Casa abierta al tiempo

**Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa**

DIVISIÓN DE CIENCIAS
BÁSICAS E INGENIERÍA

Posgrado en Ciencias (Física)

**"Polarización y caracterización de haces
cilíndricos parabólicos"**

Tesis: para obtener el grado
de Maestro en Ciencias (Física)

Presenta

Jesús Feliciano Zenón

Matrícula: 2221801174

Correo: jesusenon@gmail.com

Asesor: Dr. Manuel Fernández Guasti
Departamento de CBI

Jurado:

Presidente: Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda

Secretario: Dr. Manuel Fernández Guasti

Vocal: Dr. Moisés Martínez Mares

Iztapalapa, Ciudad de México a 3 de octubre de 2024

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por la beca otorgada para la realización de mis estudios.

A mi asesor el Dr. Manuel Fernández Guasti, por brindarme la oportunidad de realizar mi tesis de maestría bajo su dirección, en brindarme las herramientas suficientes para realizar este proyecto.

Al Prof. S Chávez-Cerda por sus valiosas correcciones sobre el uso correcto de las funciones cilíndricas parabólicas, así como valiosa bibliografía.

A mi familia por su apoyo incondicional.

Resumen

Los haces estructurados han suscitado un gran interés en los últimos años debido a su versatilidad y a las diversas aplicaciones que ofrecen en campos como las comunicaciones ópticas, la micromanipulación y el procesamiento de información cuántica, entre otros. Estos haces tienen una distribución espacial compleja de la polarización y amplitud, que puede describirse matemáticamente a través de funciones especiales. Ejemplos de haces estructurados incluyen los haces gaussianos, Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss, Bessel, y los haces de Airy.

Entre estos, los haces escalares se caracterizan por una distribución de intensidad que es independiente de la polarización y pueden describirse mediante soluciones de la ecuación de Helmholtz, como los haces gaussianos y Bessel. A diferencia de los haces vectoriales, donde la polarización varía en el espacio, los haces escalares ofrecen una estructura más simple y han sido ampliamente utilizados en aplicaciones ópticas tradicionales, como la transmisión de información a través de fibra óptica.

En este trabajo se hace un enfoque en haces con simetría cilíndrica parabólica, cuyas soluciones se conocen como funciones de Weber o cilíndricas parabólicas. Las soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz homogénea, se pueden escribir en términos de polarizaciones ortogonales, que surgen de la simetría de Heaviside-Larmor (HL). Dichas soluciones tienen polarizaciones que dependen de la posición, de manera que son haces estructurados. A partir de estas soluciones hemos determinado, la helicidad, el flujo de helicidad, la energía y el flujo de energía. La helicidad y flujo de helicidad contienen la información del contenido rotacional en estos haces. Es posible modificar las soluciones ortogonales para favorecer ciertos tipos de polarización. Se analizan y visualizan distintos casos que exhiben propiedades muy interesantes que no están presentes en las ondas planas como: polarización elíptica en un plano que involucra las tres componentes vectoriales, elipticidad como función de la posición, entre otras más.

En este trabajo se han obtenido algunos resultados colaterales relevantes, una descripción matemática alterna de la polarización elíptica y su medición experimental. Con base en parámetros que se relacionan directamente con los semiejes y la inclinación de la elipse, se plantea un método experimental directo para medir el estado de polarización de la luz. Con este método se pueden obviar los parámetros de Stokes.

Abstract

Structured beams have garnered significant interest in recent years due to their versatility and the wide range of applications they offer in fields such as optical communications, micromanipulation, and quantum information processing, among others. These beams exhibit a complex spatial distribution of polarization and amplitude, which can be mathematically described using special functions. Examples of structured beams include Gaussian beams, Hermite-Gauss beams, Laguerre-Gauss beams, Bessel beams, and Airy beams.

Among these, scalar beams are characterized by an intensity distribution that is independent of polarization and can be described by solutions to the Helmholtz equation, such as Gaussian and Bessel beams. Unlike vector beams, where polarization varies across space, scalar beams provide a simpler structure and have been widely used in traditional optical applications, such as the transmission of information through optical fibers.

The solutions to the homogeneous Helmholtz vector equation can be written in terms of orthogonal polarizations, which arise from the Heaviside-Larmor (HL) symmetry. These solutions have polarizations that depend on the position, so that they are structured beams. From these solutions we have determined helicity, helicity flow, energy and energy flow. The helicity and helicity flux contain the information of the rotational content in these beams. It is possible to modify orthogonal solutions to favor certain types of polarization. Different cases are analyzed and visualized that exhibit very interesting properties that are not present in plane waves, such as: elliptical polarization in a plane that involves the three vector components, ellipticity as a function of position, among others.

In this work, some important collateral results have been obtained. An alternate mathematical description of elliptical polarization, based on parameters that are directly related to the semi-axes and the inclination of the ellipse. A direct experimental method is proposed to measure the state of polarization of light. With this method the Stokes parameters can be ignored.

Índice general

I Soluciones vectoriales	14
1. Trabajo previo	15
2. Ondas cilíndricas parabólicas	18
2.1. Coordenadas cilíndricas parabólicas	18
2.2. Ecuación escalar de Helmholtz	21
2.2.1. Caso fundamental, $a = 0$	24
2.2.2. Ondas contrapropagantes	25
2.2.3. Ondas viajeras	28
2.3. Soluciones vectoriales	31
2.3.1. Campos \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} en coordenadas cartesianas y frentes de onda	32
2.3.1.1. Planos equifotales	33
2.3.1.2. Planos de equifase	34
2.4. Casos específicos	35
2.4.1. Caso fundamental $a = 0$	35
2.4.1.1. Campo \mathbf{E}_{φ_1}	35
2.4.1.2. Campo \mathbf{E}_{φ_2}	39
2.4.2. $a > 0$	42
2.5. Contraste entre soluciones escalares y soluciones vectoriales	50
2.6. Contraste con otras soluciones	53
2.7. Campos reales	54
2.7.1. Campo \mathbf{E}_{φ_1}	54
2.7.2. Campo \mathbf{E}_{φ_2}	54
2.8. Vector de Poynting	55
2.8.1. Vector de Poynting real	55
2.8.2. Vector de Poynting complejo	57
2.8.3. Relación entre el vector de Poynting real y complejo	58
2.9. Haces cilíndricos parabólicos polarizados en otras direcciones	61
2.9.1. Solución con \mathbf{U}_x	61
2.9.2. Solución con \mathbf{U}_y	62

3. Contenido rotacional	64
3.1. Rotacional y divergencia del campo eléctrico y magnético	64
3.2. Helicidad y flujo de helicidad	65
3.2.1. Unidades	67
3.2.2. Helicidad y flujo en términos de \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2}	67
3.3. Contenido rotacional en ondas planas	69
3.4. Contenido rotacional en haces cilíndricos parabólicos	71
3.5. Polarización preferencialmente circular	75
3.5.1. Estado de polarización \mathbf{E}_{φ_1}	76
3.5.2. Estado de polarización \mathbf{E}_{φ_2}	77
3.5.3. Contenido rotacional	78
3.6. Polarización preferencialmente elíptica	79
II Polarización local	81
4. Polarización	82
4.1. Polarización elíptica	84
4.2. Parámetros de Stokes	85
4.3. Esfera de Poincaré	86
5. Ondas planas	89
5.1. Parámetros de la polarización	89
5.2. Ángulos de la polarización	94
6. Métodos de extremales	97
6.1. Método híbrido	97
6.1.1. Precisiones sobre el método de extremales	99
6.2. Método de ángulos	101
6.2.1. Método para luz polarizada	101
6.2.2. Método para luz polarizada con una cantidad depolarizada	101
6.3. Método de intensidades	103
6.4. Parámetros de Stokes sin medir intensidades	104
7. Mediciones experimentales	106
7.1. Método híbrido	106
7.1.1. Método tradicional	108
7.1.2. Comparación de resultados	109
7.2. Método de ángulos e intensidades	111
7.2.1. Láser Nd:YAG	112
7.2.2. Polarización elíptica derecha, con pendiente positiva	113
7.2.3. Polarización elíptica izquierda, con pendiente positiva	115
7.2.4. Polarización elíptica derecha, con pendiente negativa	116
7.2.5. Polarización elíptica izquierda, con pendiente negativa	118
8. Conclusiones y perspectivas	120

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	7
9. Bibliografía	122
A. Coordenadas cilíndricas parabólicas	126
A.1. Vectores unitarios	126
A.2. Operadores vectoriales	127
A.3. Ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas parabólicas	127
A.4. Vector de onda	129

Índice de figuras

2.1. Sistema de coordenadas cilíndrico parabólico, conformado por la intersección de dos cilindros parabólicos y un plano.	19
2.2. Superficies coordenadas.	21
2.3. El gráfico en color rojo representa la solución impar \mathcal{P}_e , y el gráfico punteado, la solución par \mathcal{P}_o , para $a = 0$	23
2.4. Representación de la amplitud y fase a la ecuación de Helmholtz, con base en la ecuación (2.2.6).	25
2.5. Amplitud de las ondas contrapropagantes escalares con soluciones pares, referentes a la ecuación (2.2.7) $P_e(a, \tau, \sigma)$. Se puede observar que para $a = 0$, existe una cresta con un patrón circular en el origen. A medida que el valor de a incrementa, el foco de los perfiles parabólicos que abren sobre el eje negativo x , comienza a crecer.	26
2.6. Amplitud de contrapropagantes escalares con soluciones impares, correspondientes a la ecuación (2.2.8) $P_o(a, \tau, \sigma)$. Las regiones oscuras representan los nodos y las regiones blancas las crestas de la amplitud de las soluciones.	27
2.7. Contraste entre amplitudes de una onda par escalar contrapropagante para $a = -4$. Los gráficos se generan sobre el plano \hat{e}_x, \hat{e}_y , el motivo de no colocar los ejes, es porque [1] así lo reporta, y con fines de comparación, se omiten los ejes de la subfigura 2.7a.	28
2.8. Intensidad de la onda viajera escalar $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valores a a	29
2.9. Fase de la ondas viajera $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valore de a	30
2.10. Polarización elíptica debida a la solución \mathbf{E}_{φ_1} con $a = 0$ cuando $\tau = \sigma$. La proyección sobre el plano \hat{e}_x, \hat{e}_y es polarización lineal.	37
2.11. Intensidades del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$. Se puede observar que cada amplitud mantiene una simetría respecto al eje y . La intensidad de la componente \hat{e}_z muestra en el origen dos crestas separadas por una línea nodal tenue.	38

2.12. Intensidades del campo \mathbf{E}_{φ_2} para $a = 0$. Estas intensidades son muy similares a las reportadas en la figura 2.11, ya que como se demostró anteriormente, $(\mathbf{E}_{\varphi_1})_x$ es proporcional a $(\mathbf{E}_{\varphi_2})_y$ y de la misma forma $(\mathbf{E}_{\varphi_1})_y$ es proporcional a $(\mathbf{E}_{\varphi_2})_x$ 40

2.13. Fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$. Se puede observar como la fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ mantiene un patrón de simetría de perfiles parabólicos sobre el eje y . La fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ exhibe esta naturaleza de perfiles parabólicos, sin embargo, la fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_y$ no muestra este patrón. 41

2.14. Soluciones del campo eléctrico \mathbf{E} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ para $a = 0$ y $z = 0$ 42

2.15. Ortogonalidad de las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} sobre el plano cartesiano. 42

2.16. Intensidad de las componentes del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$. Las cuatro intensidades muestran un comportamiento similar, donde los perfiles parabólicos abren en dirección negativa al eje x 43

2.17. Intensidades de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_2} , e intensidad total para $a = 1$ 44

2.18. Fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$. Se puede observar como la fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ muestra perfiles parabólicos que abren sobre la parte negativa del eje x . La fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ exhibe esta naturaleza de perfiles parabólicos, sin embargo, en una vecindad cercana al origen, existe un parabólico el cual abre en dirección contraria a los perfiles principales. La fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_y$ exhibe un patrón circular, lo cual resulta interesante, ya que es la única fase de las componentes que muestra este comportamiento. 45

2.19. Soluciones del campo eléctrico \mathbf{E} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ para $a = 1$ y $z = 0$ 46

2.20. Intensidades de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} e intensidad total, para $a = 2$ 47

2.21. Intensidad de las componentes vectoriales e intensidad total del campo \mathbf{E}_{φ_2} para $a = 2$ 48

2.22. Fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 2$. La fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ muestra perfiles parabólicos donde han aumentado su foco respecto al caso $a = 1$. La fase de la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ sigue mostrando esta naturaleza de perfiles parabólicos, sin embargo, los perfiles parabólicos que abren en dirección positiva del eje x , son más pronunciados. 49

2.23. Soluciones de la parte real del campo eléctrico \mathbf{E} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ para $a = 1$ y $z = 0$ 50

2.24. Comparación entre la solución escalar y soluciones vectoriales para $a = 0$. La intensidad de la onda viajera muestra un gran relación entre la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} , sin embargo, no son las mismas intensidades. La línea nodal sobre el eje x se encuentra más pronunciada en la solución escalar. 51

2.25. Comparación entre la solución escalar y soluciones vectoriales para $a = 0$. La intensidad de la onda viajera muestra un gran relación entre la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} , sin embargo, no son las mismas intensidades. La línea nodal sobre el eje x se encuentra más pronunciada en la solución escalar.	52
2.26. Amplitud de la componente \hat{e}_z del vector de Poynting complejo para diferentes valores de a . La simetría respecto al eje y se mantiene para el caso fundamental $a = 0$	60
3.1. Parte real del flujo de helicidad para diferentes valores de a	72
3.2. Magnitud de la helicidad con base en la ecuación (3.2.7a) para diferentes valores de a	73
4.1. Polarización del campo eléctrico para diferentes valores de a_x y δ . Estos valores modifican el estado de polarización del campo. El ángulo ψ representa la inclinación respecto al eje x	83
4.2. Esfera de Polarización de Poincaré	88
5.1. Elipse con polarización izquierda. El ángulo ψ del eje mayor respecto al eje x se encuentra sólo en términos de φ_1 y $-\varphi_2$. El ángulo χ se encuentra en términos de u_{0x} y u_{0y}	91
5.2. Transformación de polarización elíptica a lineal	95
5.3. Representación de los ángulos ψ y χ en un mismo estado de polarización.	96
6.1. Ángulo de intensidad máxima.	98
6.2. Ángulo de intensidad mínima.	98
6.3. Determinación de quiralidad y luz depolarizada.	99
6.4. Esquemas para la determinación del estado de polarización de la luz	102
7.1. Elipse con polarización izquierda a una inclinación de ψ grados.	110
7.2. Dispersión de los valores de ψ y χ , los puntos color azul corresponden al método de Born & Wolf y los puntos anaranjados al método de extremales.	110
7.3. Diferentes estados de polarización abordados por ambos métodos. Las elipse representan las incertidumbres	111

Índice de cuadros

7.1. Medición de las cantidades que permiten obtener la polarización de la luz.	106
7.2. Intensidades registradas con base en el método de Born & Wolf.	108
7.3. Comparación de resultados entre ambos métodos, D, P significan depolarización y polarización respectivamente y RS, la relación de semiejes.	109
7.4. Parámetros de Stokes con base en ambos métodos.	111
7.5. Valores reportados con base el Láser Nd:Yag.	112
7.6. Intensidades reportadas con base el Láser Nd:Yag.	112
7.7. Valores obtenidos mediante el método de Born & Wolf.	113
7.8. Ángulos mínimos.	113
7.9. Intensidades reportadas con base al método de intensidades.	114
7.10. Valores obtenidos mediante el método de Stokes.	114
7.11. Ángulos mínimos.	115
7.12. Intensidades reportadas con base al método de intensidades.	115
7.13. Valores obtenidos mediante el método de Stokes.	116
7.14. Ángulos mínimos.	116
7.15. Intensidades reportadas con base al método de intensidades.	117
7.16. Valores obtenidos mediante el método de Stokes.	117
7.17. Ángulos mínimos.	118
7.18. Intensidades reportadas con base al método de intensidades.	118
7.19. Valores obtenidos mediante el método de Stokes.	119

Introducción

La luz se concibe como una onda electromagnética, donde las ecuaciones de Maxwell juegan el rol principal. Se pueden estudiar las propiedades que conllevan el contemplar a la luz de esta forma, una de ellas es la polarización, la cual describe la dirección en que oscilan los campos eléctricos y magnéticos, donde la dirección de propagación es ortogonal a la oscilación de los campos.

La simetría de Heaviside-Larmor (HL) es una transformación que intercambia el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{H} , $\mathbf{E} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\mathbf{E}$. Cuando estos campos son ortogonales, la transformación se convierte en una rotación en sentido antihorario de $\pi/2$. Esta simetría se puede utilizar para obtener soluciones a las ecuaciones de Maxwell [2].

Se calculan soluciones vectoriales para el sistema coordenado cilíndrico parabólico. Dichas soluciones se construyen a partir de un vector semilla y la solución escalar de Helmholtz. Las funciones cilíndricas parabólicas describen estas soluciones. En el capítulo 2 se estudian estas soluciones con base en el vector semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, y se muestran gráficos que ayudan a entender el comportamiento de estas soluciones. Un resultado es polarización elíptica la cual se encuentra oscilando en un plano que involucra las tres componentes vectoriales, y otro resultado es polarización elíptica sobre el plano cartesiano. A partir de estas soluciones, se calcula el vector de Poynting real y complejo, así como los planos de equifase y planos equifotales. Posteriormente, se usan diferentes tipos de semillas para obtener nuevas soluciones.

En el capítulo 3 se calcula el contenido rotacional con base en las soluciones obtenidas con el vector semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. Con base en las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} , se construyen nuevos estados de polarización. De tal forma que se presentan dos diferentes formas de construir nuevos estados de polarización, la primera mostrada en el capítulo 2.

En con propósito de medir de polarización localmente, se hace un enfoque en las ondas planas. En el capítulo 4 se presenta el tratamiento convencional de la polarización. Posteriormente en el capítulo 5, se ofrece una solución paramétrica de la elipse, que involucra dos parámetros que describen de forma independiente la inclinación de la elipse y la relación entre sus semiejes. Los métodos de extremos que se plantean en la segunda parte, centran su objetivo en determinar estos parámetros, obviando los parámetros de Stokes, y se muestran en el capítulo 6. Posteriormente, en el capítulo 7 se muestran resultados experimentales

de los métodos de extremales y el tradicional, y en el capítulo 8, se muestran las conclusiones.

Parte I

Soluciones vectoriales

Capítulo 1

Trabajo previo

La electrodinámica clásica tiene como base las ecuaciones de Maxwell, el campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} fungen como protagonistas. Con base en las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener dos ecuaciones de onda vectorial para estos campos. Frecuentemente el punto de partida es resolver la ecuación de onda escalar, encontrar la solución vectorial a partir de estos campos escalares no es tarea sencilla, autores como [3, 4, 5] plantean encontrar soluciones vectoriales a partir de soluciones escalares. Sin embargo, las soluciones son extensas y en ocasiones se tornan confusas. La tarea se vuelve aún más complicada cuando se desean encontrar estas soluciones en algún otro sistema coordenado que no sea el sistema cartesiano.

Para este trabajo, los sistemas coordenados de interés resultan ser los sistemas con simetría cilíndrica, los cuales son: coordenadas cilíndricas circulares [2, 6], coordenadas cilíndricas elípticas [7, 8] y coordenadas cilíndricas parabólicas [9, 10, 11, 8, 12, 13]. El primer sistema coordenado resulta ser el más estudiado, sin embargo, los dos siguientes sistemas a pesar de tener aportaciones, éstas son menores en comparación con el primer sistema. En los siguientes capítulos se da un enfoque en el sistema de coordenadas cilíndrico parabólico.

Encontrar soluciones del campo eléctrico y magnético, es frecuentemente un objetivo en electrodinámica. En este trabajo se usa la idea que plantea [2], la cual consiste en usar la solución de la ecuación escalar de Helmholtz y un vector semilla \mathbf{u} , para posteriormente construir un vector $\mathbf{U} = \psi \mathbf{u}$, el cual debe satisfacer la ecuación vectorial de Helmholtz.

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} para un medio lineal no dispersivo isotrópico y homogéneo, en ausencia de fuentes, satisfacen la ecuación de Helmholtz homogénea

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{H} = 0.$$

Ya que los campos tienen divergencia cero, el campo eléctrico se puede escribir como el rotacional de un vector $\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{U}$. La unidad imaginaria i asegura que la polarización de los campos se mantenga [2]¹, y k^{-1} preserva que las unidades

¹La unidad imaginaria en [3, pp. 393] está ausente

se mantengan coherentes [2]. Al sustituir la expresión del campo eléctrico en la ecuación de Helmholtz, e intercambiar el orden de los operadores, se obtiene $\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U}) = 0$, entonces

$$(\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U}) = \nabla \Upsilon,$$

donde $\nabla \Upsilon$ representa el gradiente de una función. El motivo de colocar el gradiente después de la igualdad, es porque el rotacional de un gradiente es cero, por lo que $\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U}$ se debe poder escribir como un gradiente².

La transformación de Heaviside-Larmor (HL), intercambia el campo eléctrico y magnético, $\mathbf{E} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}$. Si los campos son ortogonales, la transformación es una rotación de $\pi/2$ en sentido antihorario. Una nueva solución puede escribirse como una combinación lineal de la solución original, y de la solución que surge a partir de la simetría HL. La solución es

$$\mathbf{E}^{(g)} = \wp_2 \mathbf{E} + \wp_1 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H},$$

donde \wp_1 , \wp_2 son constantes que corresponden a diferentes estados de polarización. Si $\wp_2 \mathbf{E}$ se toma como punto de referencia, el término \wp_1 involucra una rotación de $\pi/2$ en dirección a las manecillas del reloj, y la solución se convierte en

$$\mathbf{E}^{(g)} = \wp_2 \mathbf{E} - \frac{i}{k} \wp_1 (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Las soluciones generales para el campo eléctrico y magnético, en términos del vector \mathbf{U} y $\nabla \Upsilon$ son [2]

$$\mathbf{E} = \wp_1 \left(\mathbf{U} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \Upsilon \right) + \wp_2 \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{U},$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\wp_2 \left(\mathbf{U} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \Upsilon \right) \right) - \wp_1 \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{U},$$

donde el superíndice (g) por ha quitado por economía.

Las soluciones vectoriales se construyen a partir de la ecuación escalar de Helmholtz $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, sea $\mathbf{U} = \psi \mathbf{u}$, donde el vector \mathbf{u} se conoce como el vector semilla y ψ la solución a la ecuación escalar de Helmholtz. Las soluciones de campo eléctrico y magnético, en términos de ψ y \mathbf{u} son [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \wp_1 \left(\psi \mathbf{u} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \psi \cdot \mathbf{u} + \psi \nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{k^2} \nabla \Upsilon \right) \\ + \wp_2 \frac{i}{k} (\nabla \psi \times \mathbf{u} + \psi \nabla \times \mathbf{u}), \quad (1.0.1a) \end{aligned}$$

²El gradiente $\nabla \Upsilon$ es omitido por [3, 14]

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\wp_2 \left(\psi \mathbf{u} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \psi \cdot \mathbf{u} + \psi \nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{k^2} \nabla \Upsilon \right) - \wp_1 \frac{i}{k} (\nabla \psi \times \mathbf{u} + \psi \nabla \times \mathbf{u}) \right]. \quad (1.0.1b)$$

Para encontrar las soluciones de los campos electromagnéticos, es necesario encontrar la solución a la ecuación escalar de Helmholtz, posteriormente proponer un vector semilla \mathbf{u} , para evaluar $\mathbf{U} = \psi \mathbf{u}$ en la ecuación vectorial de Helmholtz $(\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U}) = \nabla \Upsilon$. Si $(\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U})$ se puede escribir como un gradiente, el vector semilla \mathbf{u} es válido para encontrar los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} .

En la primera parte de este trabajo, se analizan las soluciones \mathbf{E} y \mathbf{H} para el sistema de coordenadas cilíndrico parabólico. Posteriormente, en la segunda parte, se analiza el sistema cartesiano, donde las ondas planas son soluciones.

Capítulo 2

Ondas cilíndricas parabólicas

2.1. Coordenadas cilíndricas parabólicas

Las coordenadas cilíndricas parabólicas son un sistema de coordenadas ortogonales tridimensionales, que resultan de la proyección del sistema de coordenadas parabólicas bidimensional en la dirección perpendicular z . Así, las superficies coordenadas son cilindros parabólicos confocales, y el sistema se visualiza en la figura 2.1. Las coordenadas en este sistema son (τ, σ, z) , y sus dominios están definidos en [15, 5, pp. 501-502]

$$0 \leq \tau < \infty, \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad -\infty < z < \infty.$$

La relación de estas nuevas coordenadas con las coordenadas cartesianas es ¹ [15, 5, p. 21]

$$x = \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2), \quad (2.1.1a)$$

$$y = \tau\sigma, \quad (2.1.1b)$$

$$z = z. \quad (2.1.1c)$$

¹Algunos autores como [7], usan la definición de Arfken [16], el cual define $x = \tau\sigma$ y $y = \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2)$.

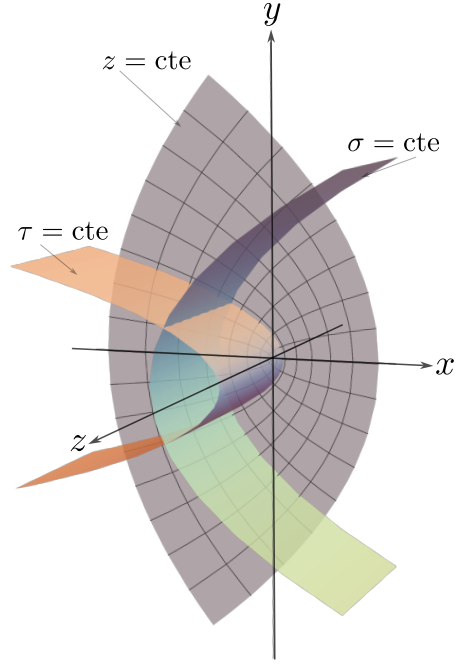


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cilíndrico parabólico, conformado por la intersección de dos cilindros parabólicos y un plano.

Los factores de escala en este sistema son

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}, \quad h_3 = 1. \quad (2.1.2)$$

Las coordenadas τ , σ en términos de x y y son

$$\tau = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}, \quad (2.1.3a)$$

$$\sigma = \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}. \quad (2.1.3b)$$

Esta nueva base puede relacionarse con la base fundamental de las coordenadas cartesianas mediante las relaciones (ver apéndice A)

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{1}{h_1} (-\sigma \hat{\mathbf{e}}_x + \tau \hat{\mathbf{e}}_y), \quad (2.1.4a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\tau = \frac{1}{h_1} (\tau \hat{\mathbf{e}}_x + \sigma \hat{\mathbf{e}}_y), \quad (2.1.4b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.1.4c)$$

e inversamente

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \frac{1}{h_1} (\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau - \sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma), \quad (2.1.5a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_y = \frac{1}{h_1} (\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau + \tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma), \quad (2.1.5b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.1.5c)$$

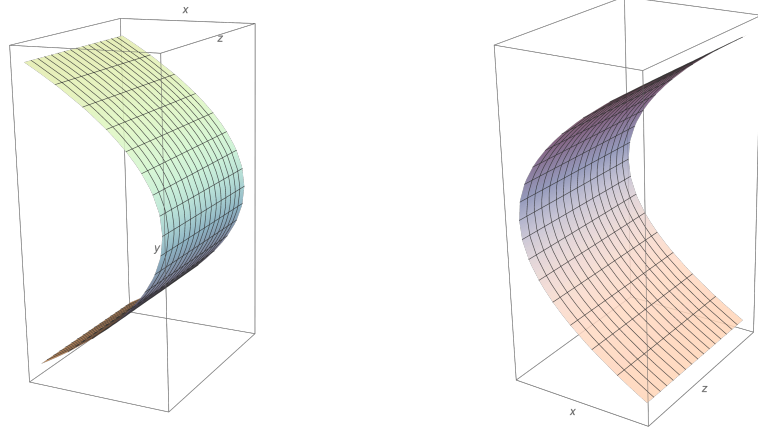
Al analizar las ecuaciones (2.1.1a) y (2.1.1b) se obtiene [15]

$$y^2 = -2\tau^2 x + \tau^4, \quad (2.1.6a)$$

si se toma un valor constante de τ , la ecuación (2.1.6a) describe una parábola que abre en la dirección negativa del eje x , y se representa en la figura 2.2a. Con las mismas ecuaciones (2.1.1a) y (2.1.1b), se obtiene una segunda ecuación que contiene la variable sigma

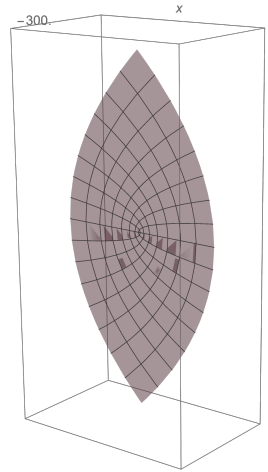
$$y^2 = 2\sigma^2 x + \sigma^4. \quad (2.1.6b)$$

Al tomar σ constante, la ecuación (2.1.6b) representa la ecuación de una parábola, pero esta abre en la dirección positiva del eje x . Esta parábola se representa en la figura 2.2b. El caso más general es considerar $\tau \neq \sigma$, de esta forma, el sistema coordenado cilíndrico parabólico tiene la intersección de dos parábolas diferentes. La ecuación (2.1.1c) es la ecuación de un plano al tomar z constante, es común que este plano se represente con la forma de una "hoja", debido a la delimitación de la intersección entre las dos parábolas, su visualización está en la figura 2.2c. Sin embargo, la representación del plano z constante puede tener otra forma.



(a) Cilindro parabólico con τ constante ($\tau = 8$).

(b) Cilindro hiperbólico con σ constante ($\sigma = -16$).



(c) Planos para z constante ($z = 300$).

Figura 2.2: Superficies coordenadas.

2.2. Ecuación escalar de Helmholtz

La ecuación escalar de Helmholtz es

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

al considerar el método de separación de variables $\psi = V(\tau)U(\sigma)Z(z)$, la ecuación diferencial de Helmholtz en el sistema coordenado cilíndrico parabólico

se puede descomponer en una ecuación para la variable τ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + (\tau^2 - a) V = 0, \quad (2.2.1a)$$

otra ecuación para la variable σ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + (\sigma^2 + a) U = 0, \quad (2.2.1b)$$

y una ecuación para la variable z

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + Z k_z^2 = 0. \quad (2.2.1c)$$

Las ecuaciones (2.2.1a) y (2.2.1b) se pueden escribir como

$$\partial_\xi^2 \mathcal{P} + (\xi \pm a) \mathcal{P} = 0, \quad (2.2.2)$$

la cual tiene como solución

$$\mathcal{P}(\pm a, \xi) = \mathcal{P}(\pm a, 0) \mathcal{P}_e(\pm a, \xi) + i \mathcal{P}'(\pm a, 0) \mathcal{P}_o(\pm a, \xi), \quad (2.2.3)$$

donde ξ representa una variable muda (la cual puede representar a τ o σ) y $\mathcal{P}(\pm a, 0) = 2^{-\frac{3}{4}} \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} ia)}{\Gamma(\frac{3}{4} \pm \frac{1}{2} ia)} \right|^{1/2}$, $\mathcal{P}'(\pm a, 0) = -2^{-\frac{1}{4}} \left| \frac{\Gamma(\frac{3}{4} \pm \frac{1}{2} ia)}{\Gamma(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} ia)} \right|^{1/2}$, son constantes de normalización. Los subíndices e y o hacen referencia a par e impar, respectivamente. El parámetro a es conocido como el parámetro parabólico adimensional [17] y adquiere valores continuos en el espacio de los reales. La solución par $\mathcal{P}_e(\pm a, \tau)$ se puede escribir en términos de una exponencial compleja y la función hipergeométrica $M(a_1, b_1, \tau)$ o función de Kummer [18]

$$\mathcal{P}_e(\pm a, \xi) = e^{-\frac{1}{4} i \xi^2} M\left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} ia, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} i \xi^2\right), \quad (2.2.4)$$

esta solución tiene una paridad respecto a la variable ξ .

La solución impar $\mathcal{P}_o(\pm a, \xi)$ también se puede escribir de forma semejante a la solución par $\mathcal{P}_e(\pm a, \xi)$, sin embargo, la solución impar contiene como factor extra la coordenada ξ , la cual rompe con la paridad respecto a la variable ξ [18]

$$\mathcal{P}_o(\pm a, \xi) = \xi e^{-\frac{1}{4} i \xi^2} M\left(\frac{3}{4} \mp \frac{1}{2} ia, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} i \xi^2\right). \quad (2.2.5)$$

La ecuación de Helmholtz en el sistema coordenada cilíndrico parabólico, tiene otras soluciones, las cuales reciben el nombre de funciones de Weber [15], sin embargo, estas funciones no cumplen la condición de radiación de Sommerfeld [19, 20], la cual establece que las soluciones a la ecuación de Helmholtz solo irradian hacia el exterior desde fuentes conocidas. Además de que en infinito, las soluciones deben de caer a cero. Las funciones cilíndricas parabólicas $\mathcal{P}_e(\pm a, \xi)$

y $\mathcal{P}_o(\pm a, \xi)$ cumplen con este criterio, las funciones de Weber no ². Estamos completamente agradecidos por tan valiosa observación por parte del Prof. S. Chávez-Cerda, ya que de no ser así, se usarían las funciones incorrectas.

El comportamiento oscilatorio de las soluciones $\mathcal{P}_e(0, \xi)$ y $\mathcal{P}_o(0, \xi)$ se puede observar en la figura 2.3

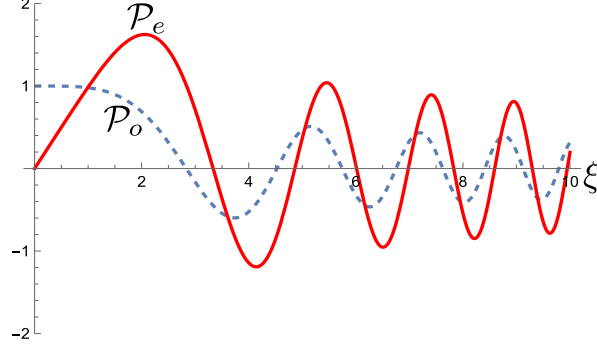


Figura 2.3: El gráfico en color rojo representa la solución impar \mathcal{P}_e , y el gráfico punteado, la solución par \mathcal{P}_o , para $a = 0$.

La ecuación (2.2.1c) tiene como solución general $Z(z) = e^{ik_z z}$. Por la tanto, la solución general a la ecuación escalar de Helmholtz es $\psi(\tau, \sigma, z, t) = \mathcal{P}(a, \tau) \mathcal{P}(-a, \sigma) Z(z) e^{-i\omega t}$, al sustituir de forma explícita las funciones

$$\psi(\tau, \sigma, z, t) = [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + iP_{oe}(a, \tau, \sigma) + iP_{eo}(a, \tau, \sigma)] e^{i(k_z z - \omega t)}$$

donde $P_e(a, \tau, \sigma) = \mathcal{P}_e(-a, 0) \mathcal{P}_e(a, 0) \mathcal{P}_e(a, \tau) \mathcal{P}_e(-a, \sigma)$,
 $P_o(a, \tau, \sigma) = \mathcal{P}'_o(-a, 0) \mathcal{P}'_o(a, 0) \mathcal{P}_o(a, \tau) \mathcal{P}_o(-a, \sigma)$,
 $P_{oe}(a, \tau, \sigma) = \mathcal{P}_e(-a, 0) \mathcal{P}'_o(a, 0) \mathcal{P}_o(a, \tau) \mathcal{P}_e(-a, \sigma)$ y
 $P_{eo}(a, \tau, \sigma) = \mathcal{P}_e(a, 0) \mathcal{P}'_o(-a, 0) \mathcal{P}_e(a, \tau) \mathcal{P}_o(-a, \sigma)$. Se ha tomado la opción de usar cursiva para las soluciones individuales, sin embargo, al considerar un producto de soluciones, se deja de usar cursiva, para evitar la confusión.

La amplitud de la solución a la ecuación escalar de Helmholtz es

$$|\psi| = \sqrt{(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))^2 + (P_{oe}(a, \tau, \sigma) + P_{eo}(a, \tau, \sigma))^2},$$

y su fase es

$$\varphi = k_z z - \omega t + \arctan\left(\frac{P_{oe}(a, \tau, \sigma) + P_{eo}(a, \tau, \sigma)}{P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)}\right).$$

En la siguiente subsección se toma el caso fundamental con $a = 0$, para estudiar el comportamiento y fase de la solución ψ .

²Las ondas planas no satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld, ya que para ellas, incluso la condición $E = 0$ no se lleva a cabo en el infinito, es decir, se atenúan.

2.2.1. Caso fundamental, $a = 0$

Para entender el comportamiento de estas soluciones, se analiza el caso fundamental, cuando el parámetro parabólico, $a = 0$. Para este caso los productos de las soluciones pares e impares son

$$P_e(0, \tau, \sigma) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \sqrt{\tau\sigma} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right),$$

$$P_o(0, \tau, \sigma) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \sqrt{\tau\sigma} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right);$$

donde $J_{\frac{1}{4}}$ representa la función de Bessel de primer tipo [18]. El producto de función par por función impar $P_{eo}(0, \tau, \sigma)$ es

$$P_{eo}(0, \tau, \sigma) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\tau\sigma} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right).$$

La función $P_{oe}(0, \tau, \sigma)$ es muy similar a $P_{eo}(0, \tau, \sigma)$, la única diferencia es el cambio de signo del subíndice de la función de Bessel, por lo tanto $P_{oe}(0, \tau, \sigma)$

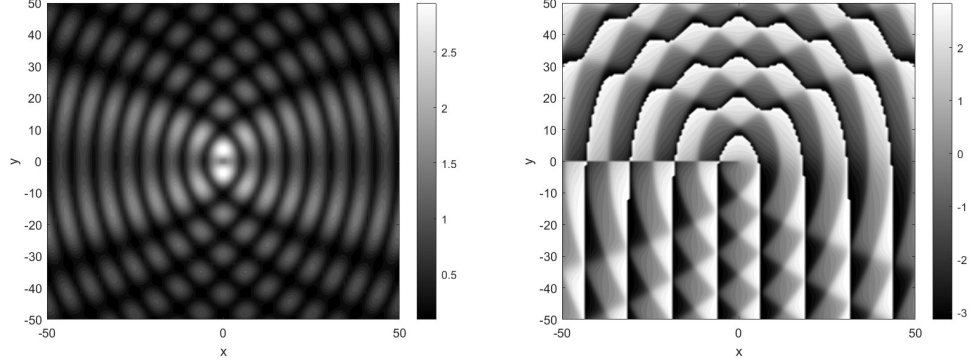
$$\text{es } P_{oe}(0, \tau, \sigma) = P_{eo}(0, \tau, \sigma) \frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}.$$

Con un poco de álgebra, la solución a la ecuación escalar de Helmholtz ψ con $a = 0$ se puede escribir como

$$\psi(\tau, \sigma, z, t) = \frac{\pi\sqrt{2\sigma\tau}}{8} \sqrt{J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\tau^2}{4}\right)} \sqrt{J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}$$

$$\exp\left[i\left(k_z z - \omega t - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}\right) - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}\right)\right)\right]. \quad (2.2.6)$$

En la figura 2.4 se muestra la amplitud y la fase de la ecuación de Helmholtz para el valor de $a = 0$ sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$, con base en la ecuación (2.2.6).



(a) Amplitud de la solución a la ecuación escalar de Helmholtz para $a = 0$ (b) Fase de la solución a la ecuación escalar de Helmholtz para $a = 0$

Figura 2.4: Representación de la amplitud y fase a la ecuación de Helmholtz, con base en la ecuación (2.2.6).

La amplitud como la fase de la figura 2.2.6 muestran un comportamiento similar, donde existen dos perfiles parabólicos simétricos respecto al eje y .

2.2.2. Ondas contrapropagantes

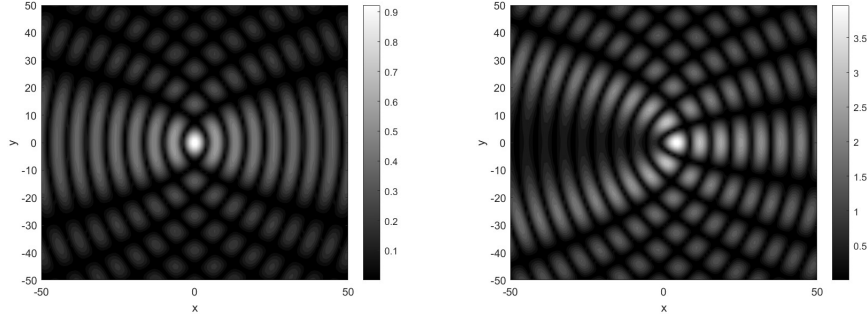
En algunos tratamientos tales como [21, 1], usan la solución a la ecuación escalar de Helmholtz y las relacionan con haces parabólicos, comúnmente llamados "campos ópticos invariantes de propagación". En la sección 2.3 se muestran las soluciones del campo eléctrico y magnético para este sistema coordenado. En esta subsección se aborda la idea campos escalares, con el objetivo de poder contrastar estas soluciones, con las soluciones a las ecuaciones de Maxwell. Comúnmente la primera solución al sistema coordenado cilíndrico parabólico es considerar la solución par $P_e(a, \tau, \sigma)$, la siguiente solución es considerar la solución impar $P_o(a, \tau, \sigma)$. Se usa el producto de las soluciones cilíndricas parabólicas, sin embargo, se toma la parte par o impar de la solución, no se considera la solución general en el espacio de los complejos, considerar como solución general, la suma de la solución par más la solución impar, implica que la solución general se encuentre en el espacio de los reales.

La solución general en el espacio de los reales a la ecuación (2.2.2) es $\mathcal{P}(\pm a, \xi) = \mathcal{P}(\pm a, 0) \mathcal{P}_e(\pm a, \xi) + \mathcal{P}'(\pm a, 0) \mathcal{P}_o(\pm a, \xi)$, sin embargo, al trabajar con esta solución, no se puede escribir en términos de una amplitud y una fase, tal como se hizo anteriormente con la solución ψ . Al multiplicar por la dependencia temporal $e^{-i\omega t}$ la solución $\mathcal{P}(\pm a, \xi)$, desplazarse en el espacio o en tiempo resultan cosas distintas. En la solución (2.2.6) a la ecuación escalar de Helmholtz, la solución representa una onda viajera, precisamente porque desplazarse en el espacio o en el tiempo resultan lo mismo.

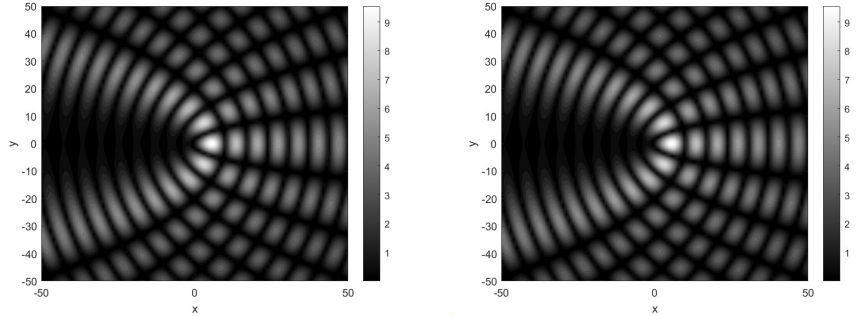
En la figura 2.5 se representan las ondas $P_e(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valores

de a , donde $P_e(a, \tau, \sigma)$ es

$$P_e(a, \tau, \sigma) = \mathcal{P}_e(-a, 0) \mathcal{P}_e(a, 0) \mathcal{P}_e(a, \tau) \mathcal{P}_e(-a, \sigma) \quad (2.2.7)$$



(a) $a = 0$. El máximo se encuentra en el origen del sistema de referencia, posteriormente el mínimo y el máximo se alternan. (b) $a = 1$. La simetría se rompe, sin embargo, el máximo se mantiene en el origen. El perfil que abre en dirección negativa al eje x contiene una región de valores cercanos al mínimo.



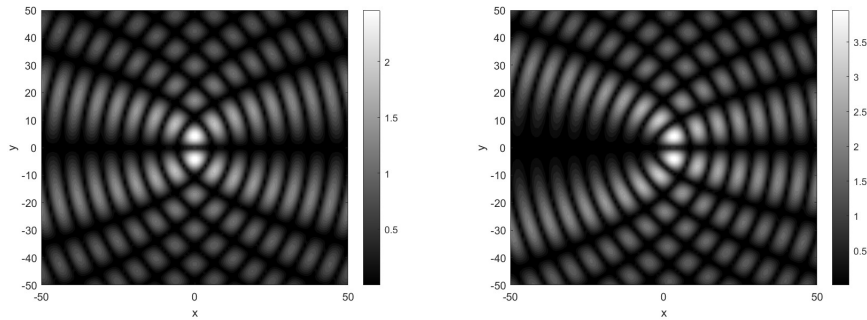
(c) $a = 1.5$. A medida que el valor de a aumenta, los valores de la amplitud también lo hacen. (d) $a = 2$. El perfil parabólico que abre en dirección negativa sobre el eje x ha aumentado el valor de su foco. Dentro de esa región, se encuentra una región de valores cercanos al mínimo.

Figura 2.5: Amplitud de las ondas contrapropagantes escalares con soluciones pares, referentes a la ecuación (2.2.7) $P_e(a, \tau, \sigma)$. Se puede observar que para $a = 0$, existe una cresta con un patrón circular en el origen. A medida que el valor de a incrementa, el foco de los perfiles parabólicos que abren sobre el eje negativo x , comienza a crecer.

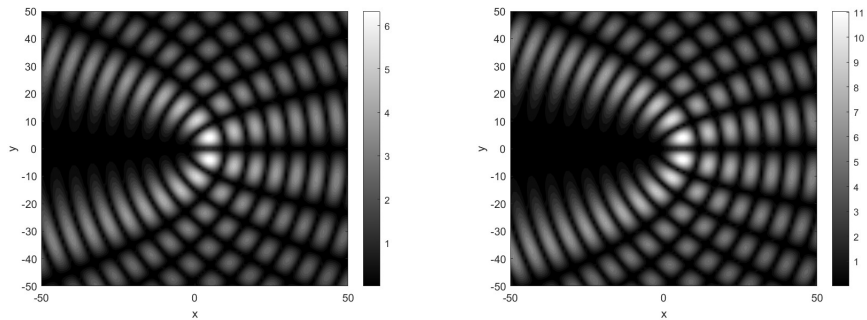
En la figura 2.6 se representan las ondas $P_o(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valores de a , donde $P_o(a, \tau, \sigma)$ es

$$P_o(a, \tau, \sigma) = \mathcal{P}'_o(-a, 0) \mathcal{P}'_o(a, 0) \mathcal{P}_o(a, \tau) \mathcal{P}_o(-a, \sigma) \quad (2.2.8)$$

Se puede observar en ambos gráficos, que el parámetro a modifica como abren los perfiles parabólicos respecto al eje x , cuando a es negativo, se genera una reflexión sobre el eje y . Cuando $a = 0$, se puede observar una simetría de los perfiles parabólicos sobre el eje y . Cuando $a > 0$, la distancia focal de los perfiles que se encuentra en mayoritariamente en el segundo y tercer cuadrante es mayor, respecto a los perfiles que se encuentran mayoritariamente en los primer y cuarto cuadrante.



(a) $a = 0$. A diferencia que el caso anterior, existe una línea nodal sobre el eje x , lo que hace que haya dos máximos cercanos al origen. (b) $a = 1$. Los máximos se mantiene relativamente iguales al caso anterior, sin embargo, dado que la simetría se ha roto, la parte izquierda de estos máximos es cóncava.



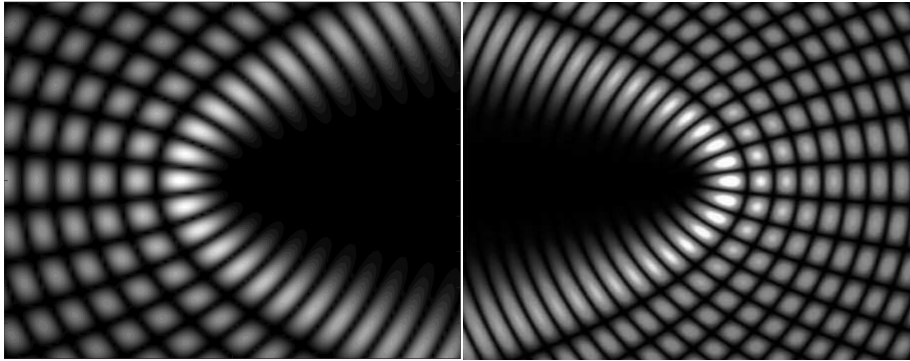
(c) $a = 1.5$. A medida que el valor de a aumenta, los valores de la amplitud también lo hacen. (d) $a = 2$. El perfil parabólico que abre en dirección negativa sobre el eje x ha aumentado el valor de su foco. Dentro de esa región, se encuentra una región de valores cercanos al mínimo.

Figura 2.6: Amplitud de contrapropagantes escalares con soluciones impares, correspondientes a la ecuación (2.2.8) $P_o(a, \tau, \sigma)$. Las regiones oscuras representan los nodos y las regiones blancas las crestas de la amplitud de las soluciones.

Una diferencia entre la amplitud de $P_e(a, \tau, \sigma)$ y $P_o(a, \tau, \sigma)$ radica que para las soluciones impares, existe una línea nodal sobre el eje x . Lo cual genera que

para $a = 0$, el patrón circular que existe en las solución par, ya no se encuentre en la amplitud para la solución impar.

En la figura 2.7 se muestra una comparación entre la onda propagante con $a = -4$ con la reportada por Sabino et al [1].



(a) Onda contrapropagante con base en la ecuación (2.2.7).

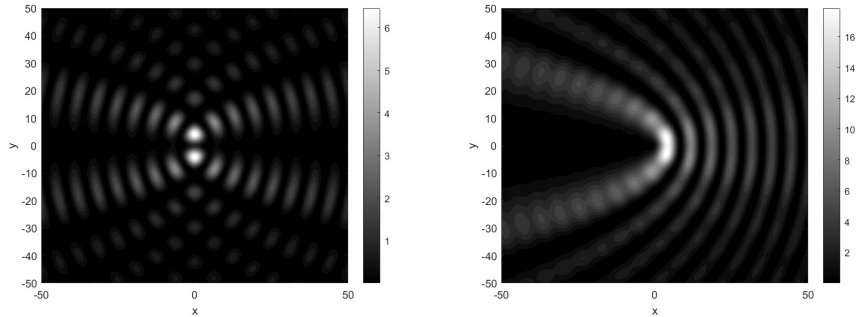
(b) Solución par reportada por [1]

Figura 2.7: Contraste entre amplitudes de una onda par escalar contrapropagante para $a = -4$. Los gráficos se generan sobre el plano \hat{e}_x, \hat{e}_y , el motivo de no colocar los ejes, es porque [1] así lo reporta, y con fines de comparación, se omiten los ejes de la subfigura 2.7a.

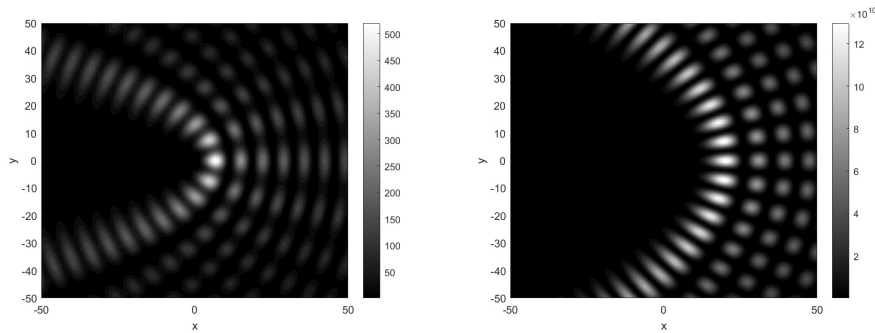
Los gráficos que se reportan aquí difieren en como abren las parábolas, esto se debe a que en este tratamiento, las coordenadas τ y σ están definidas en los intervalos $\tau \in [0, \infty)$ y $\sigma \in (-\infty, \infty)$, sin embargo, en [21, 1, 7] estas coordenadas están definidas de forma contraria, de tal forma que $\tau \in (\infty, \infty)$ y $\sigma \in [0, \infty)$. Esta diferente definición repercute en una reflexión sobre el eje y .

2.2.3. Ondas viajeras

Se toma el caso de una onda viajera, donde la solución es $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$, esta solución tiene una amplitud y una fase. En la figura 2.8 se muestran las intensidades de la onda viajera para diferentes valores de a . Algo que se puede ver inmediatamente es la ausencia de una simetría sobre el eje y para el modo fundamental $a = 0$.



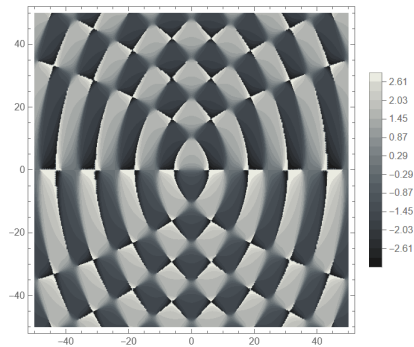
(a) $a = 0$. Este patrón es muy similar al caso anterior para soluciones impares, ya que existen dos máximos cercanos al origen, separados por una región nodal sobre el eje x . (b) $a = 1$. La simetría se ha roto, y los perfiles parabólicos (color blanco) muestran una tendencia que abre en dirección negativa del eje x .



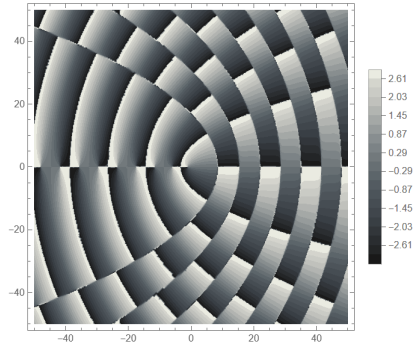
(c) $a = 2$. Esta tendencia se mantiene, sin embargo, el foco de los perfiles parabólicos aumenta, al igual que el valor de la intensidad. (d) $a = 8$. El foco de los perfiles aumentó considerablemente respecto a los casos anteriores, y en una gran parte de los cuadrantes dos y tres, se encuentra una región de mínimo.

Figura 2.8: Intensidad de la onda viajera escalar $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valores a .

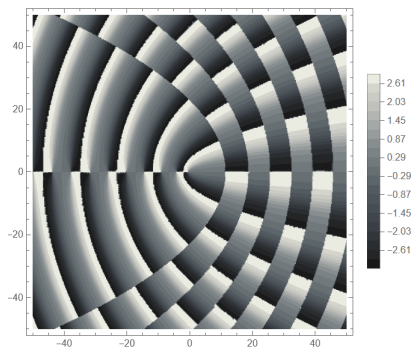
El parámetro a modifica como abren los perfiles parabólicos, a medida que el parámetro a comienza a crecer, los perfiles parabólicos tiene una mayor abertura sobre el eje x . En la figura 2.9 se muestra la fase de la solución $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valores de a .



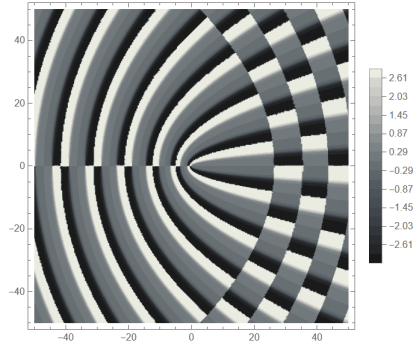
(a) $a = 0$. Esta fase muestra una simetría sobre el eje y , sin embargo, también muestra una antisimetría respecto al eje x , ya que sobre este eje se cambio de un valor máximo a uno mínimo.



(b) $a = 1$. La simetría se ha roto. Cada región contrastante muestra un corrimiento del mínimo al máximo.



(c) $a = 2$. Los perfiles parabólicos que abren en dirección negativa del eje x , han aumentado el valor de su foco.



(d) $a = 8$. También se muestra una antisimetría respecto al eje x , ya que el mínimo se alterna con el máximo.

Figura 2.9: Fase de la ondas viajera $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para diferentes valore de a .

Se puede observar como para el caso fundamental $a = 0$, la fase muestra una simetría sobre el eje y , similar a lo observado para el caso de ondas contrapropagantes, a medida que el factor parabólico a crece esta simetría se rompe, sin embargo, siguen existiendo perfiles parabólicos que abren tanto en la dirección positiva del eje x , como en la dirección negativa. El foco de los perfiles que abre en dirección negativa al eje x , comienza a crecer a medida que el valor de a es más grande.

2.3. Soluciones vectoriales

Los campos \mathbf{E}_{φ_1} en términos de la solución escalar de Helmholtz ψ y el vector semilla \mathbf{u} es [2]

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \psi \mathbf{u} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \psi \cdot \mathbf{u} + \psi \nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{k^2} \nabla \Upsilon. \quad (2.3.1a)$$

La segunda solución \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{k} \nabla \psi \times \mathbf{u} + \psi \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.3.1b)$$

donde $\mathbf{E} = \varphi_1 \mathbf{E}_{\varphi_1} + \varphi_2 \mathbf{E}_{\varphi_2}$, y las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} son linealmente independientes. En otros textos [3, 4], el campo \mathbf{E}_{φ_2} se asocia al campo transversal eléctrico, por no tener componente en la dirección z . Si se propone como vector semilla $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_z$, esto implica que $\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = 0$, $\nabla \Upsilon = 0$ y $\nabla \times \hat{\mathbf{e}}_z = 0$. Los campos se simplifican a

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \psi \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{e}}_z), \quad \mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{k} \nabla \psi \times \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (2.3.2)$$

al sustituir la solución a la ecuación escalar de Helmholtz $\psi = U(-a, \sigma) V(a, \sigma) Z(z)$, el campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = & -\frac{ik_z}{h_1 k^2} (U(-a, \sigma) \partial_\tau V(a, \tau) \hat{\mathbf{e}}_\tau + V(a, \tau) \partial_\sigma U(-a, \sigma) \hat{\mathbf{e}}_\sigma) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ & + \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) V(a, \tau) U(-a, \sigma) e^{i(k_z z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

y el campo \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{h_1 k} (V(a, \tau) \partial_\sigma U(-a, \sigma) \hat{\mathbf{e}}_\tau - U(-a, \sigma) \partial_\tau V(a, \tau) \hat{\mathbf{e}}_\sigma) e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Al sustituir de forma explícita las funciones cilíndricas parabólicas, el campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = & \left[-\frac{ik_z}{h_1 k^2} (\partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau + \partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma) + \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (2.3.3a) \end{aligned}$$

resulta interesante como el operador ∂_τ se encuentra sólo en la componente τ del campo, así mismo, el operador ∂_σ se encuentra únicamente en la componente τ de éste.

El campo \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_2} = & \frac{i}{h_1 k} (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau - \partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma) \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (2.3.3b) \end{aligned}$$

aquí la amplitud de la componente τ del campo \mathbf{E}_{φ_2} corresponden a la amplitud de la componente σ del campo \mathbf{E}_{φ_1} , con la única diferencia de un signo negativo. De la misma forma, ocurre algo similar respecto a la amplitud de la componente σ del campo \mathbf{E}_{φ_2} y su relación directa con la amplitud de la componente τ del campo \mathbf{E}_{φ_1} . A partir de la observación anterior, se concluye que $(\mathbf{E}_{\varphi_2})_\tau = -\frac{k}{k_z}(\mathbf{E}_{\varphi_1})_\sigma$ y $(\mathbf{E}_{\varphi_2})_\sigma = \frac{k}{k_z}(\mathbf{E}_{\varphi_1})_\tau$.

Al tomar el producto punto entre las soluciones

$\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_2} = [(\mathbf{E}_{\varphi_1})_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau + (\mathbf{E}_{\varphi_1})_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma + (\mathbf{E}_{\varphi_1})_z \hat{\mathbf{e}}_z] \cdot [(\mathbf{E}_{\varphi_2})_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau + (\mathbf{E}_{\varphi_2})_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma]$, se obtiene

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_2} = (\mathbf{E}_{\varphi_1})_\tau (\mathbf{E}_{\varphi_2})_\tau + (\mathbf{E}_{\varphi_1})_\sigma (\mathbf{E}_{\varphi_2})_\sigma,$$

se usan las relaciones entre las amplitudes de las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2}

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{k}{k_z} \left(-(\mathbf{E}_{\varphi_1})_\tau (\mathbf{E}_{\varphi_1})_\sigma + (\mathbf{E}_{\varphi_1})_\sigma (\mathbf{E}_{\varphi_1})_\tau \right) = 0.$$

Las soluciones del campo eléctrico son ortogonales.

2.3.1. Campos \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} en coordenadas cartesianas y frentes de onda

Los programas para graficar campos vectoriales, se basan en los vectores unitarios del sistema cartesiano. A lo largo de este trabajo, se trabaja tanto con la base de vectores unitarios de este sistema, pero también con la base de vectores unitarios del sistema cartesiano, con el objetivo de visualizar sus gráficas.

El campo \mathbf{E}_{φ_1} en término de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = & \left[\frac{k_z}{h_1^2 k^2} ((\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_x + (\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_y) + \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \hat{\mathbf{e}}_z, \right] \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.3.4a)$$

al igual que en término de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$, el campo \mathbf{E}_{φ_1} muestra una simetría respecto a las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$.

El campo \mathbf{E}_{φ_2} en término de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_2} = & \frac{1}{h_1^2 k} ((\sigma \partial_\sigma + \tau \partial_\tau) \hat{\mathbf{e}}_x + (\sigma \partial_\tau - \tau \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_y) \\ & [P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma) - i(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (2.3.4b)$$

En la siguiente subsubsección se usan los valores de las amplitudes, para poder representar de forma gráfico el comportamiento de estas cantidades sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$.

2.3.1.1. Planos equifotales

A partir de las amplitudes de los campos \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} , se pueden construir los planos equifotales [22]. Se toma cada amplitud de los campos como constante, y se generan diferentes planos equifotales. El campo \mathbf{E}_{φ_1} tiene tres amplitudes que están asociadas a sus componentes vectoriales, entonces \mathbf{E}_{φ_1} tiene tres diferentes planos equifotales para cada valor de p .

La amplitud de la componente x del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_1}|_x = \frac{k_z}{h_1^2 k^2} \left[((\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) (P_1(a, \tau, \sigma) + P_2(a, \tau, \sigma)))^2 + ((\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 \right]^{1/2}, \quad (2.3.5a)$$

el plano equifotal depende de las coordenadas τ y σ , por lo que este plano equifotal es perpendicular a la dirección de propagación z . La amplitud de la componente y del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_1}|_y = \frac{k_z}{h_1^2 k^2} \left[((\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma) (P_1(a, \tau, \sigma) + P_2(a, \tau, \sigma)))^2 + ((\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 \right]^{1/2}, \quad (2.3.5b)$$

este plano es muy similar al plano (2.3.5a), la única diferencia radica en el cambio del operador $(\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \rightarrow (\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma)$.

La amplitud de la componente z del campo \mathbf{E}_{φ_1} depende exclusivamente de las soluciones $P_1(a, \tau, \sigma)$, $P_2(a, \tau, \sigma)$, $P_e(a, \tau, \sigma)$ y $P_o(a, \tau, \sigma)$, y no de sus derivadas

$$|\mathbf{E}_{\varphi_1}|_z = \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \left[(P_1(a, \tau, \sigma) + P_2(a, \tau, \sigma))^2 + (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))^2 \right]^{1/2}. \quad (2.3.5c)$$

Un caso similar ocurre con \mathbf{E}_{φ_2} , que tiene dos planos equifotales para cada valor de a . La amplitud de la componente x de la solución \mathbf{E}_{φ_2} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_2}|_x = \frac{1}{h_1^2 k} \left[((\sigma \partial_\sigma + \tau \partial_\tau) (P_1(a, \tau, \sigma) + P_2(a, \tau, \sigma)))^2 + ((\sigma \partial_\sigma + \tau \partial_\tau) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 \right]^{1/2}, \quad (2.3.6a)$$

El plano equifotal asociado a la componente y de la solución \mathbf{E}_{φ_2} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_2}|_y = \frac{1}{h_1^2 k} \left[((\sigma \partial_\tau - \tau \partial_\sigma) (P_1(a, \tau, \sigma) + P_2(a, \tau, \sigma)))^2 + ((\sigma \partial_\tau - \tau \partial_\sigma) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 \right]^{1/2}. \quad (2.3.6b)$$

Los planos equifotales de \mathbf{E}_{φ_2} son muy similares a los planos de la solución \mathbf{E}_{φ_1} , sin embargo, son diferentes. Nótese que las soluciones vectoriales ofrecen seis planos equifotales, hay mayor información con base a estas soluciones. Usar sólo soluciones escalares limita la información, ya que solo hay un plano equifotal.

2.3.1.2. Planos de equifase

Los planos de equifase se construyen a partir de la fase que tienen los campos [22]

Las fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} se pueden determinar inmediatamente. La fase de la componente x es

$$\varphi_{x_1} = k_z z - \omega t - \arctan \left(\frac{(\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))}{(\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))} \right), \quad (2.3.7a)$$

se debe de tener cuidado y no eliminar el operador $(\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma)$ a pesar de que se encuentre en el numerador como en el denominador. La fase de la componente y del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\varphi_{y_1} = k_z z - \omega t - \arctan \left(\frac{(\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))}{(\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma) (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))} \right). \quad (2.3.7b)$$

Nótese que esta fase es muy similar con respecto a la componente x , lo único que cambia es el operador $(\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma)$. La fase de la componente z del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\varphi_{z_1} = k_z z - \omega t \arctan \left(\frac{P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)}{P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)} \right), \quad (2.3.7c)$$

para esta fase, no hay operadores, sólo se encuentran involucradas productos de las funciones cilíndricas parabólicas, esto mismo ocurre con el plano equifotal (2.3.5c).

Para el campo \mathbf{E}_{φ_2} , en plano de equifase de la componente x es

$$\varphi_{x_2} = k_z z - \omega t - \arctan \left(\frac{(\sigma \partial_\sigma + \tau \partial_\tau) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))}{(\sigma \partial_\sigma + \tau \partial_\tau) (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))} \right), \quad (2.3.8a)$$

y la fase correspondiente a la componente y es

$$\varphi_{y_2} = k_z z - \omega t - \arctan \left(\frac{(\sigma \partial_\tau - \tau \partial_\sigma) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))}{(\sigma \partial_\tau - \tau \partial_\sigma) (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))} \right). \quad (2.3.8b)$$

Todas estas ecuaciones muestran relaciones entre ellas, la principal es que las derivadas de las funciones pares $P_e(a, \tau, \sigma)$ e impares $P_o(a, \tau, \sigma)$ se encuentran en el numerador para las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ de las fases, así mismo, las derivadas de las funciones $P_{eo}(a, \tau, \sigma)$ y $P_{oe}(a, \tau, \sigma)$ se encuentran en el denominador. La única diferencia radica en el cambio de las variables τ y σ .

2.4. Casos específicos

Con el objetivo de analizar las soluciones del campo eléctrico, se analizan casos específicos.

2.4.1. Caso fundamental $a = 0$

2.4.1.1. Campo \mathbf{E}_{φ_1}

El primer caso que se analiza es $a = 0$, las soluciones del campo eléctrico son $\mathbf{E}_{\varphi_1} = (\mathbf{E}_{\varphi_1})_{\tau} \hat{\mathbf{e}}_{\tau} + (\mathbf{E}_{\varphi_1})_{\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\sigma} + (\mathbf{E}_{\varphi_1})_z \hat{\mathbf{e}}_z$ y $\mathbf{E}_{\varphi_2} = (\mathbf{E}_{\varphi_2})_{\tau} \hat{\mathbf{e}}_{\tau} + (\mathbf{E}_{\varphi_2})_{\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}$. El propósito de analizar las magnitudes de las componentes por separado, se debe a dos motivos, el primero es porque las soluciones son más extensas que las soluciones escalares, por lo tanto, escribir las soluciones del campo eléctrico en una sola ecuación genera confusión. El segundo motivo se debe a querer analizar y poder contrastar, la amplitud de las magnitudes, y la amplitud total, con las soluciones escalares.

La amplitud de la componente $\hat{\mathbf{e}}_{\tau}$ del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_1}|_{\tau} = \frac{k_z}{h_1 k^2} \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2}}{16 \sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2}} \sqrt{\left(\tau^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + \tau^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + 2J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\tau^2}{4}\right)\right)^2 + 32}, \quad (2.4.1a)$$

y su respectiva fase es

$$\varphi_{\tau_1} = -\arctan\left(\frac{4\sqrt{2}/\pi}{\tau^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + \tau^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + 2J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}\right) + k_z z - \omega t - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}\right) - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad (2.4.1b)$$

los términos del numerador y el denominador son muy similares, sin embargo, no son los mismos.

La amplitud de la componente σ del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_1}|_{\sigma} = \frac{k_z}{h_1 k^2} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2}}{16 \sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2}} \sqrt{\left(\sigma^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + \sigma^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + 2J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2\right)^2 + 32}, \quad (2.4.1c)$$

y su respectiva fase es

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma_1} = & -\arctan \left(\frac{4\sqrt{2}/\pi}{\sigma^2 J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right) J_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right) + \sigma^2 J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right) J_{-\frac{5}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right) + 2J_{-\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{\sigma^2}{4} \right)} \right) \\ & + k_z z - \omega t - \arctan \left(\frac{J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right)}{J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right)} \right) - \arctan \left(\frac{J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\tau^2}{4} \right)}{J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\tau^2}{4} \right)} \right) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.4.1d)$$

Se puede observar que ambas componentes tienen amplitudes y fases diferentes, por lo que sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$ el campo \mathbf{E}_{φ_1} está polarizado elípticamente. Sin embargo, tanto la amplitud como la fase entre diferentes componentes son muy similares, la única diferencia es el cambio $\tau \rightarrow \sigma$. Cuando $\tau = \sigma$, la amplitud y la fase es la misma para ambas componentes, por lo que para este caso, el campo \mathbf{E}_{φ_1} está linealmente polarizado a 45° respecto al eje τ .

La componente z del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_1}|_z = \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \frac{\sqrt{2}\pi\sqrt{\sigma\tau}}{8} \sqrt{J_{-\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{\tau^2}{4} \right) + J_{\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{\tau^2}{4} \right)} \sqrt{J_{-\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{\sigma^2}{4} \right) + J_{\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{\sigma^2}{4} \right)}, \quad (2.4.1e)$$

y su respectiva amplitud es

$$\varphi_{z_1} = k_z z - \omega t - \arctan \left(\frac{J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\tau^2}{4} \right)}{J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\tau^2}{4} \right)} \right) - \arctan \left(\frac{J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right)}{J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma^2}{4} \right)} \right). \quad (2.4.1f)$$

Tanto la amplitud como la fase de esta componente son diferentes a las componentes τ y σ . El campo \mathbf{E}_{φ_1} está elípticamente polarizado sobre un plano que involucra las tres componentes vectoriales. Cuando se considera $\tau = \sigma$, se mencionó que el campo sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$ está linealmente polarizado a 45° , al considerar la componente z , el campo \mathbf{E}_{φ_1} está elípticamente polarizado, un semieje de la elipse se encuentra sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$ (lo que ocasiona que la proyección sobre este plano, sea polarización lineal), y el otro semieje es paralelo al eje de propagación z . En la figura 2.10 se muestra el caso cuando $\tau = \sigma$ para la solución \mathbf{E}_{φ_1} con el valor $a = 0$. Sobre el plano cartesiano, la proyección de la solución \mathbf{E}_{φ_1} es polarización lineal con una inclinación de -45° , la cual corresponden a un semieje de la elipse. En la dirección de propagación, se encuentra paralelo el semieje restante, por lo que la solución \mathbf{E}_{φ_1} representa polarización elíptica.

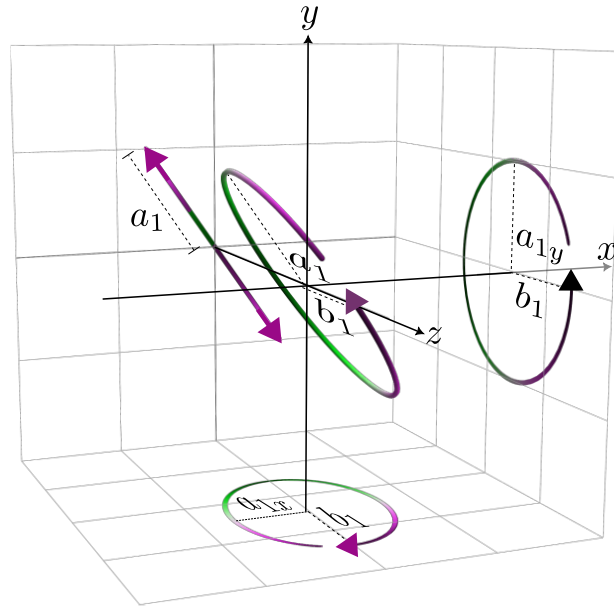


Figura 2.10: Polarización elíptica debida a la solución \mathbf{E}_{φ_1} con $a = 0$ cuando $\tau = \sigma$. La proyección sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ es polarización lineal.

El motivo de colocar la polarización lineal en una diferente orientación de la que se describió anteriormente, es con el único fin de poder apreciar todos los detalles de las diferentes polarizaciones.

En la figura 2.11 se muestran las intensidades de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para el caso $a = 0$. Las amplitudes se grafican con base en la ecuación (2.3.4a).

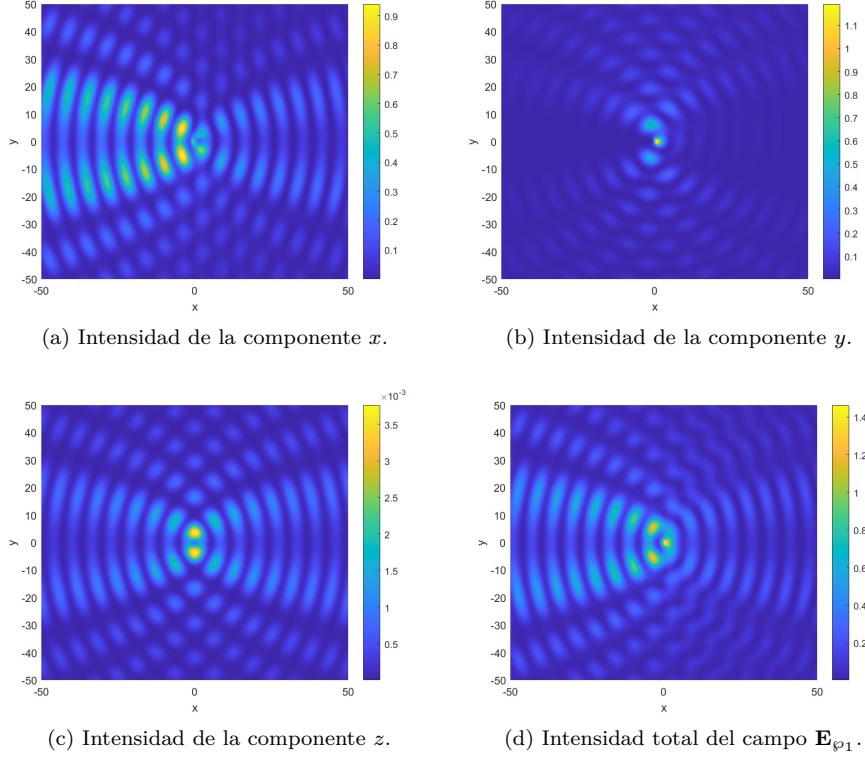


Figura 2.11: Intensidades del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$. Se puede observar que cada amplitud mantiene una simetría respecto al eje y . La intensidad de la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ muestra en el origen dos crestas separadas por una línea nodal tenue.

Cada componente de los campos (2.3.4a) y (2.3.4b) se puede escribir en notación polar, al igual como se hizo en este caso, sin embargo, las expresiones serán mucho más extensas, esto porque, en el caso anterior, la componente τ del campo es $(\mathbf{E}_{\varphi_1})_\tau = -\frac{ik_z}{h_1 k^2} U(-a, \sigma) \partial_\tau V(a, \tau) e^{i(k_z z - \omega t)}$. Nótese el contraste entre esta componente y la componente x del campo \mathbf{E}_{φ_1} de la expresión (2.3.4a), la componente x contienen una diferencia de dos productos, por lo que escribir esta componente en su notación polar, generará una expresión mucho más compleja en contraste con la ecuaciones (2.4.1a) y (2.4.1b).

2.4.1.2. Campo \mathbf{E}_{φ_2}

La amplitud de la componente $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ campo \mathbf{E}_{φ_2} es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_2}|_\tau = \frac{1}{h_1 k} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \frac{\sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2}}{8\sqrt{2}\sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2}} \sqrt{\left(\pi\sigma^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + \pi\sigma^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + 2\pi J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2\right)^2 + 32}, \quad (2.4.2a)$$

y su respectiva fase es

$$\varphi_{\tau_2} = -\arctan\left(\frac{4\sqrt{2}}{\left(\pi\sigma^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + \pi\sigma^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + 2\pi J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2\right)}\right) k_z z - \omega t - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}\right) - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (2.4.2b)$$

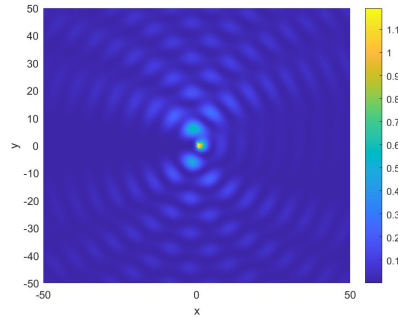
La amplitud de la componente $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ es

$$|\mathbf{E}_{\varphi_2}|_\sigma = -\frac{k_z}{h_1 k^2} \sqrt{\frac{\sigma}{\tau}} \frac{\sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)^2}}{8\sqrt{2}\sqrt{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2 + J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2}} \sqrt{\left(\pi\tau^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + \pi\tau^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + 2\pi J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2\right)^2 - 32},$$

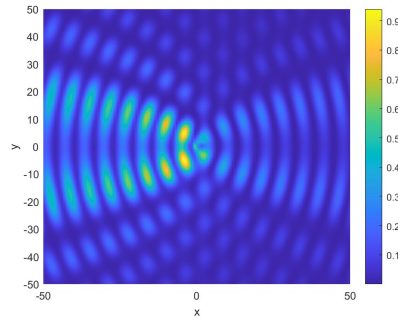
y su respectiva fase es

$$\varphi_{\sigma_2} = -\arctan\left(\frac{4\sqrt{2}}{\left(\pi\tau^2 J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + \pi\tau^2 J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) J_{-\frac{5}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + 2\pi J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)^2\right)}\right) k_z z - \omega t - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}\right) - \arctan\left(\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\tau^2}{4}\right)}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (2.4.2c)$$

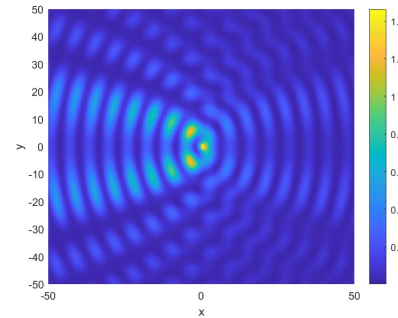
Cada componente del campo \mathbf{E}_{φ_2} tiene amplitud y fase diferente, por lo tanto el campo \mathbf{E}_{φ_2} está elípticamente polarizado sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$. Cuando $\tau = \sigma$, el campo \mathbf{E}_{φ_2} está linealmente polarizado a -45° sobre el eje τ , debido al signo negativo de la componente σ del campo. En la figura 2.12 se muestran las intensidades de las componentes, y la intensidad total del campo \mathbf{E}_{φ_2} , con base en la ecuación (2.3.4b).



(a) Intensidad de la componente x .



(b) Amplitud de la componente y

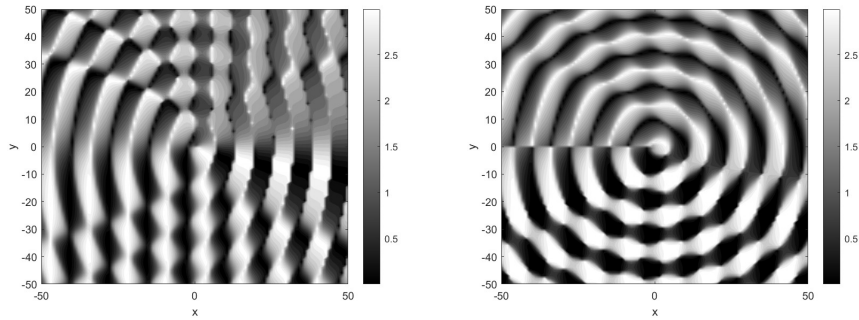


(c) Intensidad total del campo \mathbf{E}_{φ_2} .

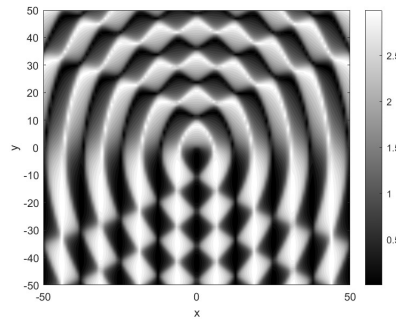
Figura 2.12: Intensidades del campo \mathbf{E}_{φ_2} para $a = 0$. Estas intensidades son muy similares a las reportadas en la figura 2.11, ya que como se demostró anteriormente, $(\mathbf{E}_{\varphi_1})_x$ es proporcional a $(\mathbf{E}_{\varphi_2})_y$ y de la misma forma $(\mathbf{E}_{\varphi_1})_y$ es proporcional a $(\mathbf{E}_{\varphi_2})_x$.

En la figura 2.13 se muestran las fases de las diferentes componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$. Dado que la componente \hat{e}_x del campo \mathbf{E}_{φ_1} es proporcional a la componente \hat{e}_y del campo \mathbf{E}_{φ_1} , y la componente \hat{e}_y del cam-

po \mathbf{E}_{φ_1} es proporcional a la componente \hat{e}_x del campo \mathbf{E}_{φ_1} . Las fases para las componentes vectoriales son semejantes a las mostradas en la figura 2.13. Es por este motivo que las fases de las componentes vectoriales de \mathbf{E}_{φ_2} no se colocan.



(a) Fase de la componente \hat{e}_x del campo \mathbf{E}_{φ_1} . (b) Fase de la componente \hat{e}_y del campo \mathbf{E}_{φ_1} .



(c) Fase de la componente \hat{e}_z del campo \mathbf{E}_{φ_1} .

Figura 2.13: Fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$. Se puede observar como la fase de la componente \hat{e}_z mantiene un patrón de simetría de perfiles parabólicos sobre el eje y . La fase de la componente \hat{e}_x exhibe esta naturaleza de perfiles parabólicos, sin embargo, la fase de la componente \hat{e}_y no muestra este patrón.

Las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} se representan en la figura 2.14, sin embargo, en contraste con las imágenes mostradas anteriormente, aquí se representan las soluciones en sus componentes vectoriales \hat{e}_x y \hat{e}_y sobre el plano cartesiano. La subfigura 2.14a muestra la solución \mathbf{E}_{φ_1} , la cual muestra como en los cuadrantes 3 y 4 las líneas de campo se curvan, además las líneas de campo muestran una simetría sobre el eje y . La solución \mathbf{E}_{φ_2} se representa en la subfigura 2.14b y al igual que la solución anterior, existe una simetría sobre el eje y . En el primer y segundo cuadrante, las líneas de campo muestran un comportamiento del tipo remolino alrededor de tres regiones.

En la figura 2.15 se muestra de forma gráfica y clara la ortogonalidad entre

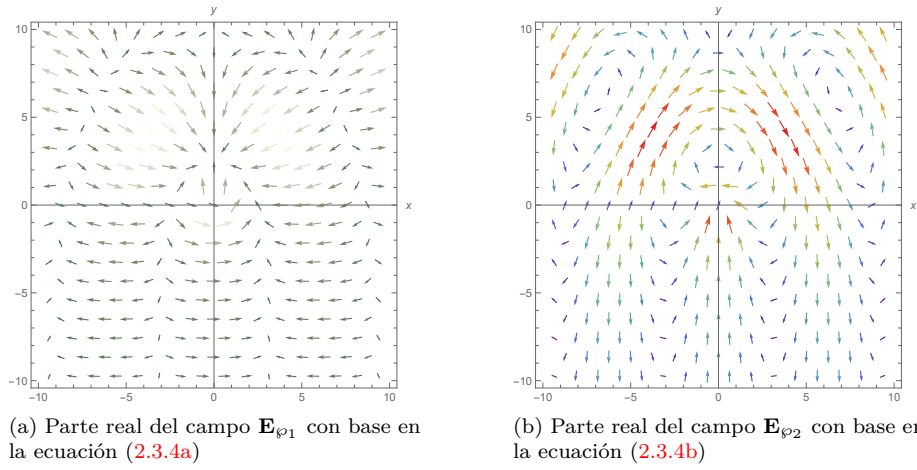


Figura 2.14: Soluciones del campo eléctrico \mathbf{E} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ para $a = 0$ y $z = 0$.

las funciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} para el caso $a = 0$.

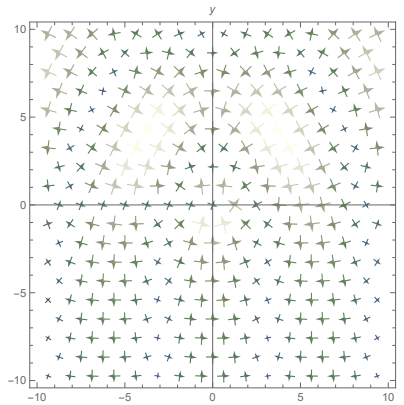


Figura 2.15: Ortogonalidad de las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} sobre el plano cartesiano.

2.4.2. $a > 0$

En la figura (2.11) se representan las intensidades de las diferentes componentes vectoriales de la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$, así como la intensidad total de \mathbf{E}_{φ_1}

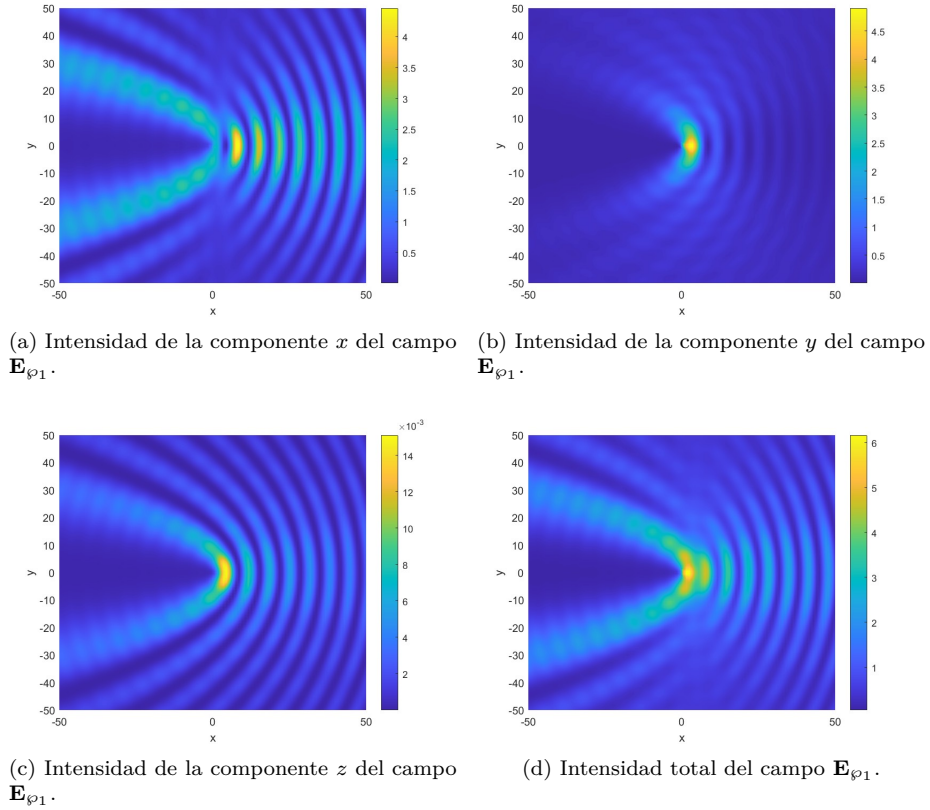


Figura 2.16: Intensidad de las componentes del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$. Las cuatro intensidades muestran un comportamiento similar, donde los perfiles parabólicos abren en dirección negativa al eje x .

Se puede observar que la simetría en las subfiguras de la figura (2.11) se ha roto. Ahora solo los perfiles parabólicos se encuentran orientados sobre el eje x , en dirección negativa. Nótese que los perfiles a primera vista parecieran continuos, sin embargo, no lo son. Los perfiles parabólicos corresponden a la superficie $\tau = \text{cte}$, cual se representa en la figura 2.1, pero esta curva tiene una intersección con la superficie $\sigma = \text{cte}$, por lo tanto, los perfiles no pueden ser continuos.

En la figura 2.17 se representan las intensidades de las diferentes componentes vectoriales de la solución \mathbf{E}_{φ_2} para $a = 1$.

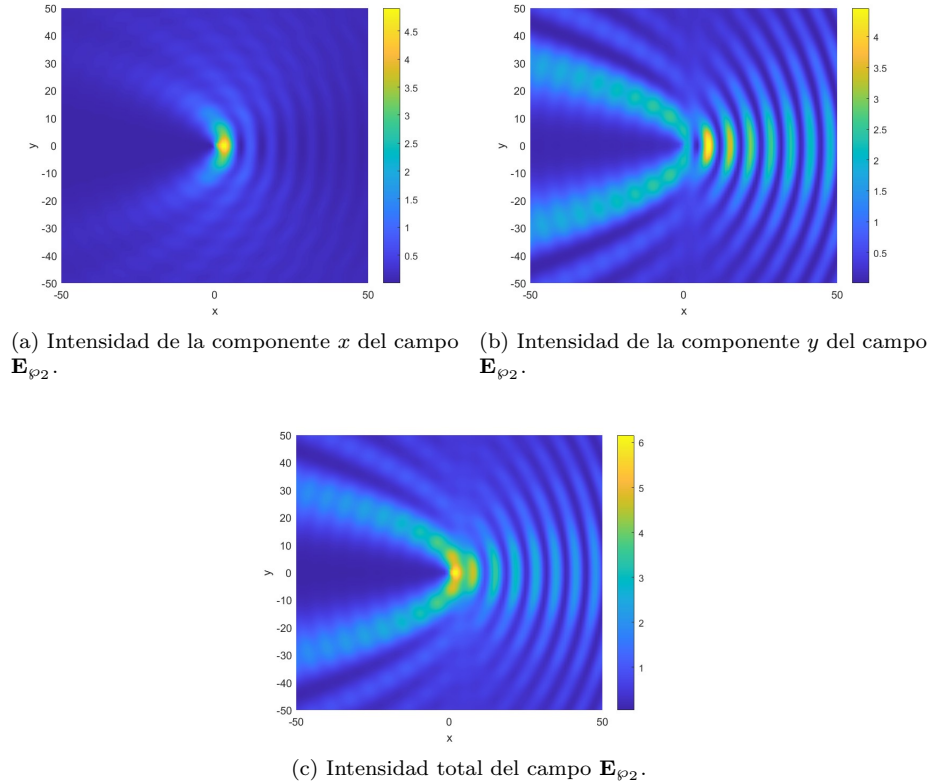
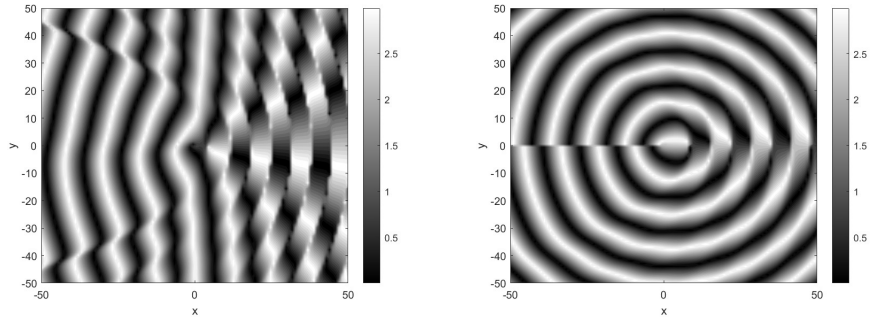
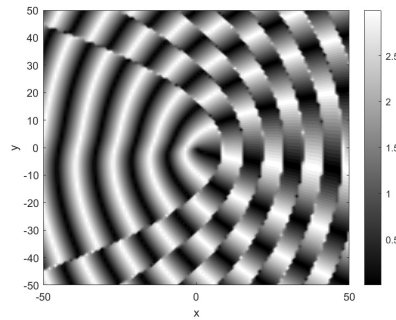


Figura 2.17: Intensidades de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_2} , e intensidad total para $a = 1$.

Al igual que el caso anterior para \mathbf{E}_{φ_1} con $a = 1$, las amplitudes del campo \mathbf{E}_{φ_2} ya no tienen perfiles parabólicos simétricos respecto al eje y . Solo hay perfiles parabólicos que abren en dirección negativa del eje x . La idea de que las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} ofrezcan los perfiles parabólicos de forma independiente, es sensato, debido a que son soluciones linealmente independientes. En la figura 2.18 se muestran las fases de las diferentes componentes vectoriales de \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$.



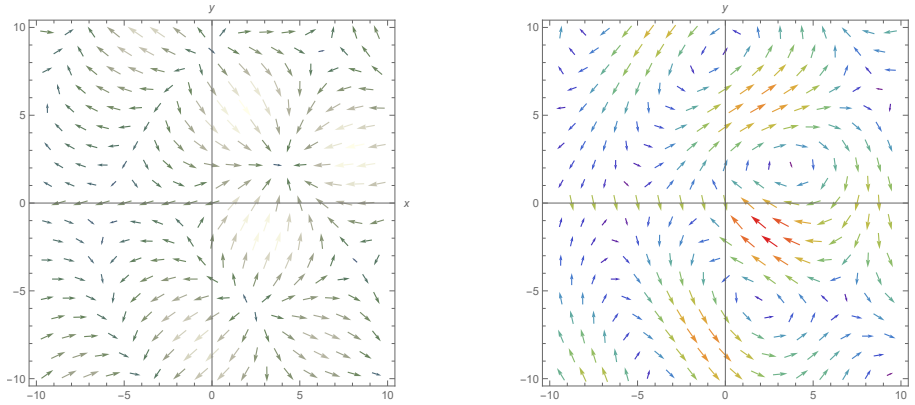
(a) Fase de la componente \hat{e}_x del campo \mathbf{E}_{φ_1} . (b) Fase de la componente \hat{e}_y del campo \mathbf{E}_{φ_1} .



(c) Fase de la componente \hat{e}_z del campo \mathbf{E}_{φ_1} .

Figura 2.18: Fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$. Se puede observar como la fase de la componente \hat{e}_z muestra perfiles parabólicos que abren sobre la parte negativa del eje x . La fase de la componente \hat{e}_x exhibe esta naturaleza de perfiles parabólicos, sin embargo, en una vecindad cercana al origen, existe un parabólico el cual abre en dirección contraria a los perfiles principales. La fase de la componente \hat{e}_y exhibe un patrón circular, lo cual resulta interesante, ya que es la única fase de las componentes que muestra este comportamiento.

Las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} se representan en la figura 2.19, sin embargo, en contraste con las imágenes mostradas anteriormente, aquí se representan las soluciones en sus componentes vectoriales \hat{e}_x y \hat{e}_y sobre el plano cartesiano.



(a) Parte real del campo \mathbf{E}_{φ_1} con base en la ecuación (2.3.4a)

(b) Parte real del campo \mathbf{E}_{φ_2} con base en la ecuación (2.3.4b)

Figura 2.19: Soluciones del campo eléctrico \mathbf{E} con base en la semilla \hat{e}_z para $a = 1$ y $z = 0$

En la subfigura 2.19a se representa la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$, el comportamiento en contraste con la subfigura 2.14a ha dado un cambio. Sobre el plano cartesiano se muestran dos perfiles parabólicos en el segundo y cuarto cuadrante. La solución \mathbf{E}_{φ_2} se muestra en la subfigura 2.19b, la cual muestra tres remolinos alrededor del plano cartesiano. El remolino que se encuentra en el primer cuadrante, sobre su vecindad, las líneas de campo tienen un comportamiento circular.

En la figura 2.20 se representan las amplitudes de las diferentes componentes vectoriales de la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 2$.

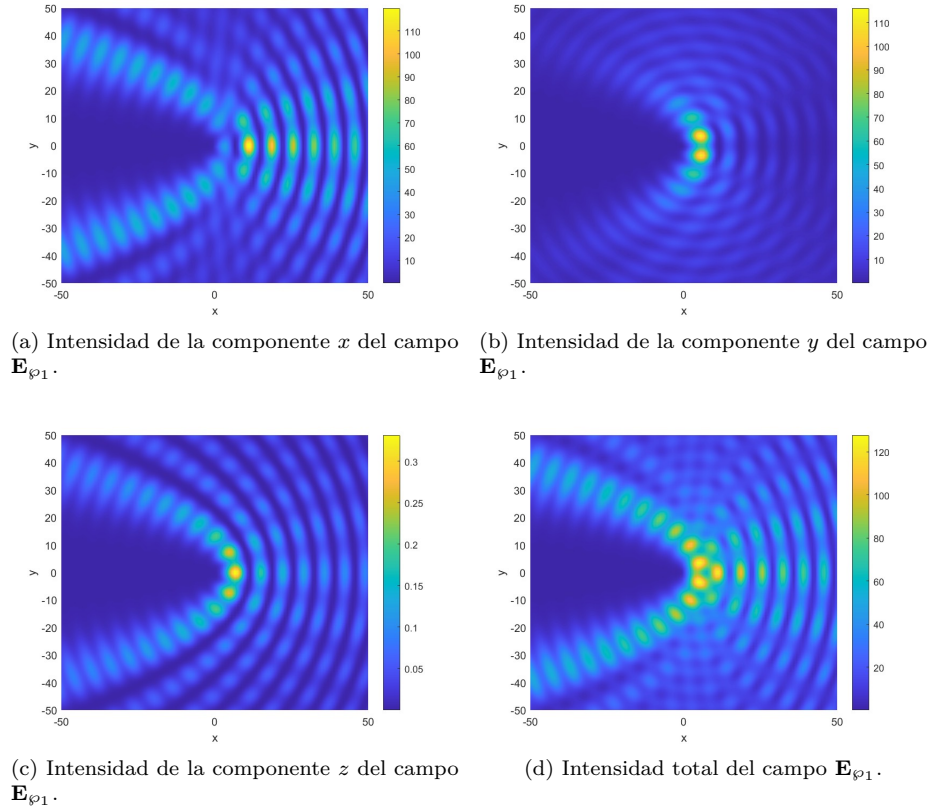


Figura 2.20: Intensidades de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} e intensidad total, para $a = 2$

Los perfiles mostrados en la figura 2.20 parecerían iguales a los perfiles de la figura (2.11) correspondiente al caso con $a = 1$. Sin embargo, el foco de los perfiles parabólicos ha incrementado. Esto muestra que el parámetro a , está relacionado íntimamente con el foco.

En la figura (2.21) se representan las intensidades de las diferentes componentes vectoriales de la solución \mathbf{E}_{φ_2} para $a = 2$.

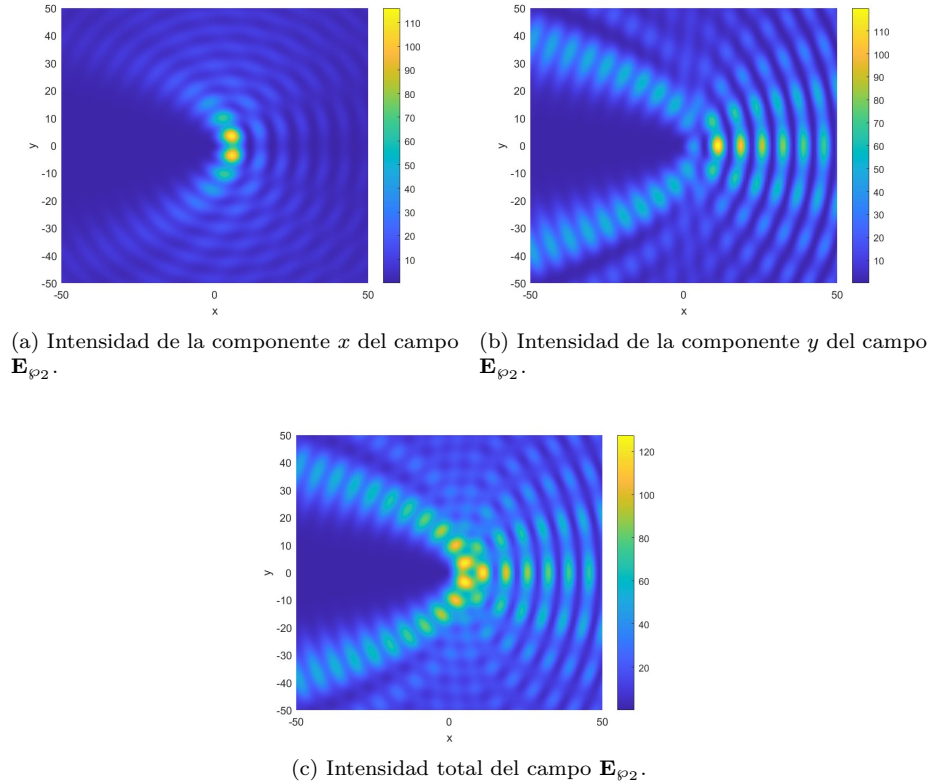
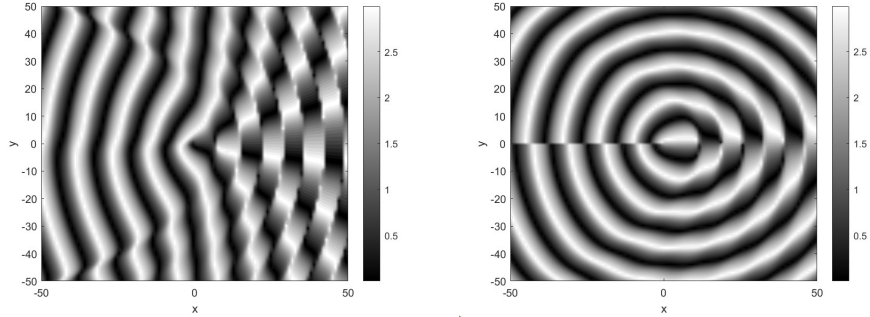
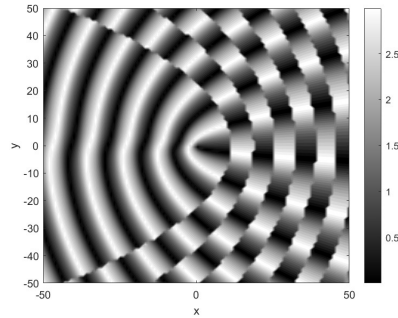


Figura 2.21: Intensidad de las componentes vectoriales e intensidad total del campo \mathbf{E}_{φ_2} para $a = 2$.

Ocurre un caso análogo con esta segunda solución para $a = 2$, donde hay perfiles parabólicos, los cuales son similares a la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 2$. En la figura 2.23 se representan las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} en sus componentes vectoriales $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ sobre el plano cartesiano. En la figura 2.22 se muestran las fases de las diferentes componentes vectoriales de \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 1$.



(a) Fase de la componente \hat{e}_x del campo \mathbf{E}_{φ_1} . (b) Fase de la componente \hat{e}_y del campo \mathbf{E}_{φ_1} .



(c) Fase de la componente \hat{e}_z del campo \mathbf{E}_{φ_1} .

Figura 2.22: Fases de las componentes vectoriales del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 2$. La fase de la componente \hat{e}_z muestra perfiles parabólicos donde han aumentado su foco respecto al caso $a = 1$. La fase de la componente \hat{e}_x sigue mostrando esta naturaleza de perfiles parabólicos, sin embargo, los perfiles parabólicos que abren en dirección positiva del eje x , son más pronunciados.

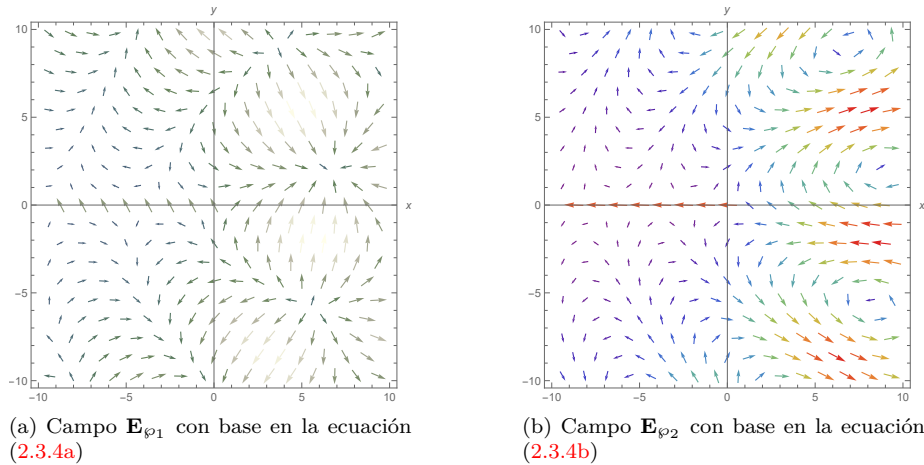


Figura 2.23: Soluciones de la parte real del campo eléctrico \mathbf{E} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ para $a = 1$ y $z = 0$

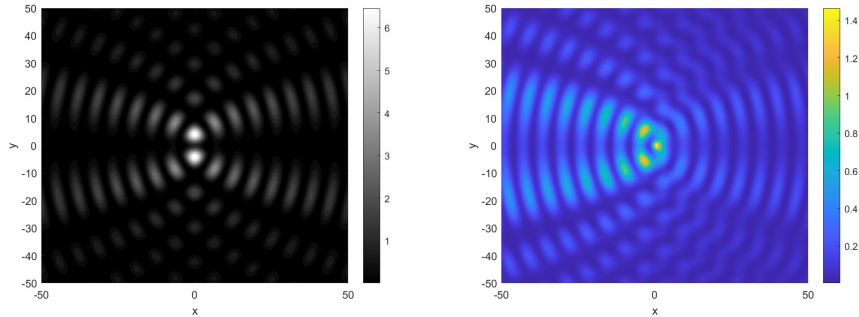
La subfigura 2.23a muestra la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 2$, en este figura los perfiles parabólicos están más pronunciados, los cuales apuntan en la dirección negativa del eje x . En la subfigura 2.23b se representa la solución \mathbf{E}_{φ_2} , donde los tres remolinos permanecen, sin embargo, estos se han desplazado en dirección positiva del eje x . Esta subfigura muestra diferentes perfiles parabólicos, los cuales apuntan en la dirección negativa del eje x .

Se obtuvieron cinco expresiones para las amplitudes, y cinco ecuaciones que describen la fase de estas soluciones, más las componentes vectoriales. Claramente las soluciones escalares distan de ofrecer los resultados de las soluciones vectoriales, por lo tanto, se observa la importancia de obtener soluciones a las ecuaciones de Maxwell para comprender el comportamiento de los campos electromagnéticos en distintos sistemas coordenados.

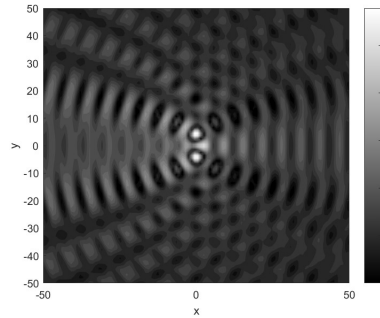
2.5. Contraste entre soluciones escalares y soluciones vectoriales

Una vez obtenidas las soluciones vectoriales a las ecuaciones de Maxwell, se hace un contraste con las soluciones escalares, con el objetivo de analizar las diferencias en torno a las intensidades.

En la figura 2.24c se muestra una comparación para el valor $a = 0$ entre intensidad de la onda viajera (tratamiento escalar) y la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} (solución vectorial).



(a) Intensidad de la onda viajera escalar $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para $a = 0$, presentada en la subsección 2.2.3. (b) Intensidad de la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$.

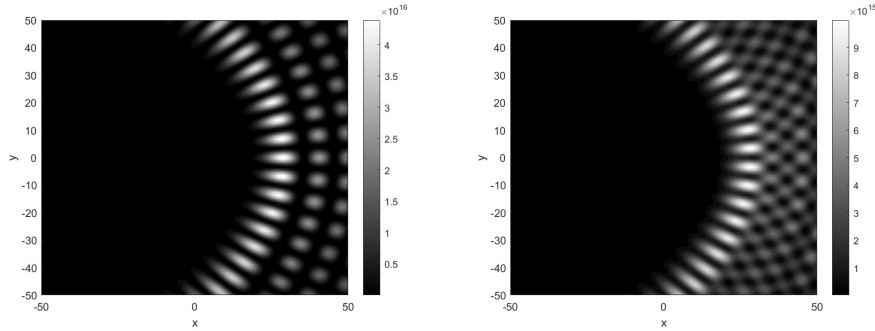


(c) Diferencia entre la intensidad de la onda viajera y la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 0$.

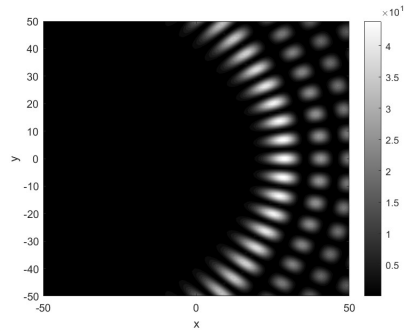
Figura 2.24: Comparación entre la solución escalar y soluciones vectoriales para $a = 0$. La intensidad de la onda viajera muestra un gran relación entre la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} , sin embargo, no son las mismas intensidades. La línea nodal sobre el eje x se encuentra más pronunciada en la solución escalar.

La subfigura 2.24c ofrece una diferencia entre la solución escalar y la solución vectorial, en esta figura se muestra que existe una diferencia entre la intensidad escalar y vectorial. Las crestas son más tenues respecto a las intensidades, y los nodos son mayores en esta subfigura, sin embargo, son diferentes intensidades.

En la figura 2.25c se muestra una comparación para el valor $a = 0$ entre intensidad de la onda viajera (tratamiento escalar) y la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} (solución vectorial).



(a) Intensidad de la onda viajera escalar $P_e(a, \tau, \sigma) + i P_o(a, \tau, \sigma)$ para $a = 12$.
 (b) Intensidad de la solución \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 12$.



(c) Diferencia entre la intensidad de la onda viajera y la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} para $a = 12$.

Figura 2.25: Comparación entre la solución escalar y soluciones vectoriales para $a = 0$. La intensidad de la onda viajera muestra un gran relación entre la intensidad del campo \mathbf{E}_{φ_1} , sin embargo, no son las mismas intensidades. La línea nodal sobre el eje x se encuentra más pronunciada en la solución escalar.

Las subfiguras 2.25a y 2.25b muestran un patrón muy similar, donde a primera vista se podría decir que son igual, o casi iguales. Sin embargo, en la subfigura 2.25c se muestra la diferencia entre estas dos intensidades, donde muestra que existe una diferencia entre estas dos intensidades, donde el orden de magnitud es considerable. Esta diferencia mantiene un patrón muy similar a los que se muestran en las subfiguras 2.25a y 2.25b, sin embargo, las crestas son más tenues, y se encuentran más separadas, a diferencia de los casos 2.25a y 2.25b.

2.6. Contraste con otras soluciones

En [17] se encuentra el campo eléctrico en el sistema coordenado cilíndrico parabólico, con base en los vectores \mathbf{M} y \mathbf{N} , donde el vector \mathbf{M} y \mathbf{N} son [3, 14]

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \nabla \times (\psi \mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{U}, \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \mathbf{U},\end{aligned}$$

a partir de estos vectores, el campo eléctrico es [3]

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -(a_n \mathbf{M} + b_n \mathbf{N}) \\ &= -\left(a_n \nabla \times \mathbf{U} + b_n \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}\right).\end{aligned}$$

El campo eléctrico reportado por [2] es

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \wp_2 \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{U} + \wp_1 \frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} \\ &= \wp_2 \mathbf{E}_{\wp_2} + \wp_1 \mathbf{E}_{\wp_1},\end{aligned}$$

se puede observar que el campo \mathbf{E}_{\wp_2} es proporcional al vector \mathbf{M} y que el campo \mathbf{E}_{\wp_1} es proporcional al campo \mathbf{E}_{\wp_1} . Sin embargo, la diferencia radica en que en el vector \mathbf{M} está ausente el factor k^{-1} la unidad imaginaria i . En el vector \mathbf{N} sólo está k elevado a la menos uno, sin embargo, en el vector \mathbf{E}_{\wp_1} , este va como k^{-2} . La ausencia de estos factores repercute de forma significativa en la solución del campo eléctrico.

Por ejemplo, en coordenadas cartesianas, al proponer el vector \mathbf{U} como polarización lineal, $\mathbf{U} = \psi \hat{\mathbf{e}}_x$, el campo eléctrico a partir del formalismo de campos complementarios es

$$\mathbf{E} = \wp_1 \psi \hat{\mathbf{e}}_x - \wp_2 \psi \hat{\mathbf{e}}_y,$$

el campo eléctrico está linealmente polarizado sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$. Cada solución \mathbf{E}_{\wp_1} y \mathbf{E}_{\wp_2} está linealmente polarizada, y son ortogonales.

El campo eléctrico a partir de los potenciales \mathbf{M} y \mathbf{N} es $\mathbf{E}_{\text{Stratton}} = a_1 k \psi \hat{\mathbf{e}}_x + i a_2 k \psi \hat{\mathbf{e}}_y$, este campo está circularmente polarizado. La polarización lineal del vector semilla \mathbf{U} no se conservó, debido al factor i en la componente y del campo eléctrico.

Cuando se proponen como vector semilla $\mathbf{U} = \psi \hat{\mathbf{e}}_x$, la ecuación vectorial del Helmholtz es $\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U} = 0$, sin embargo, el caso más general de la ecuación vectorial de Helmholtz es

$$\nabla^2 \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U} = \nabla \Upsilon.$$

Para este caso el gradiente $\nabla \Upsilon = 0$, por lo que este factor no repercute en las solución general del campo eléctrico. En otro tipo de sistemas ortogonales, tales como coordenadas esféricas [2] o cónicas, al proponer el vector $\mathbf{U} = \psi k \mathbf{r}$, el gradiente $\nabla \Upsilon \neq 0$, por lo que tiene relevancia en la solución general del campo eléctrico y magnético. Este factor $\nabla \Upsilon$, al igual que la unidad imaginaria i , se encuentran ausentes en el formalismo clásico, que tiene como base los vectores \mathbf{M} y \mathbf{N} .

2.7. Campos reales

En esta sección se calculan la parte real de las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con el propósito de calcular más adelante otras cantidades, el vector de Poynting, helicidad y flujo de helicidad. En especial el vector de Poynting real, ya que esta cantidad depende explícitamente de la parte real del campo eléctrico y magnético.

2.7.1. Campo \mathbf{E}_{φ_1}

La parte real del campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1} &= \frac{k_z}{h_1 k^2} (\partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau + \partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma) [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa \\ &\quad (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa] \\ &+ \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) [(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa - (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa] \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

donde $\varkappa = k_z z - \omega t$. Esta solución se puede escribir en término de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas, con la ayuda de las relaciones (2.1.4a) y (2.1.4b), de tal forma que el campo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1} &= \frac{k_z}{h_1^2 k^2} [(\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_x + (\sigma \partial_\tau + \tau \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_y] \\ &\quad [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa + (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa] \\ &+ \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) [(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa - (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa] \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ son muy similares, la diferencia se encuentra marcada en el cambio de las variables τ y σ .

2.7.2. Campo \mathbf{E}_{φ_2}

La parte real del campo \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2} &= -\frac{1}{h_1 k} (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau - \partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma) \\ &\quad [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa + (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa], \end{aligned}$$

esta solución se puede escribir en término de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas, con la ayuda de las relaciones (2.1.4a) y (2.1.4b), de tal forma que el campo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2} &= -\frac{1}{h_1^2 k} [(\tau \partial_\sigma + \sigma \partial_\tau) \hat{\mathbf{e}}_x - (\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_y] \\ &\quad [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa + (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa]. \end{aligned}$$

Al igual que la parte real de la solución \mathbf{E}_{φ_1} , la parte real del campo \mathbf{E}_{φ_2} muestra una simetría entre las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$, con la única diferencia del cambio de las variables τ y σ .

2.8. Vector de Poynting

El vector de Poynting representa el flujo de energía direccional de los campos electromagnéticos. La unidad en el SI es W/m^2 , lo cual indica la transferencia de energía por unidad de área.

A lo largo de las siguientes subsecciones se aborda el vector de Poynting real y complejo, y se evalúan estos vectores con base en los campos \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} , que se obtuvieron con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. La relación entre ambos vectores de Poynting se discute al final de la sección. A lo largo de los siguientes planteamientos, se usa la normalización $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$, con el fin de conservar la intensidad a pesar de la orientación de los campos. Con esta normalización se espera eliminar la dependencia de los parámetros φ_1 y φ_2 en el vector de Poynting.

2.8.1. Vector de Poynting real

El vector de Poynting real está definido por [4, pp. 259]

$$\mathbf{S}^{\mathbb{R}} = \text{Re}\mathbf{E} \times \text{Re}\mathbf{H},$$

entonces el vector \mathbf{S} en términos de $\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1}$, $\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2}$, $\text{Re}\mathbf{H}_{\varphi_1}$ y $\text{Re}\mathbf{H}_{\varphi_2}$ es

$$\mathbf{S}^{\mathbb{R}} = (\varphi_1 \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1} + \varphi_2 \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2}) \times (\varphi_1 \text{Re}\mathbf{H}_{\varphi_1} + \varphi_2 \text{Re}\mathbf{H}_{\varphi_2}),$$

pero $\mathbf{H}_{\varphi_1} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{\varphi_2}$ y $\mathbf{H}_{\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{\varphi_1}$, entonces

$$\mathbf{S}^{\mathbb{R}} = (\varphi_1 \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1} + \varphi_2 \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2}) \times \left(-\varphi_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2} + \varphi_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1} \right).$$

Con un poco de álgebra el vector de Poynting se puede escribir como

$$\mathbf{S}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2} \times \text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1}) \quad (2.8.1)$$

Este resultado es general, para cualquier campo eléctrico y magnético, además que la dependencia de los parámetros φ_1 y φ_2 se ha ido. El vector de Poynting $\mathbf{S}^{\mathbb{R}}$ es ortogonal a los campos $\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1}$ y $\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2}$, entonces

$$\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{S}^{\mathbb{R}} = 0,$$

$$\text{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2} \cdot \mathbf{S}^{\mathbb{R}} = 0.$$

El vector de Poynting en términos de las amplitudes de los campos \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{\mathbb{R}} = & \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2})_{\sigma} (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1})_z \hat{\mathbf{e}}_{\tau} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2})_{\tau} (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1})_z \hat{\mathbf{e}}_{\sigma} \\ & + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [(\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2})_{\tau} (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1})_{\sigma} - (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2})_{\sigma} (\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1})_{\tau}] \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Con los campos $\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_1}$ y $\operatorname{Re}\mathbf{E}_{\varphi_2}$ que se determinaron en la sección 2.7, y la ecuación (2.8.2), se puede determinar las componentes del vector de Poynting real. La componente $\hat{\mathbf{e}}_{\tau}$ del vector de Poynting es

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^{\mathbb{R}})_{\tau} = & \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \\ & \partial_{\tau} [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos^2 \varkappa + (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa \sin \varkappa] \\ & - \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ & \partial_{\tau} [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa \sin \varkappa + (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \sin^2 \varkappa], \end{aligned} \quad (2.8.3a)$$

se puede ver inmediatamente que en el límite paraxial $k_z \approx k$, esta componente se anula por completo. Se puede observar cierta simetría entre los términos del segundo y cuarto renglón, sin embargo, ya no es posible una factorización extra. La componente $\hat{\mathbf{e}}_{\sigma}$ es

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^{\mathbb{R}})_{\sigma} = & \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \partial_{\sigma} (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \\ & [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) - P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \sin^2 \varkappa - (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \sin \varkappa \cos \varkappa] \\ & + \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \partial_{\sigma} (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ & [(P_{eo}(a, \tau, \sigma) - P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \cos \varkappa \sin \varkappa - (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \cos^2 \varkappa], \end{aligned} \quad (2.8.3b)$$

al igual que la componente $\hat{\mathbf{e}}_{\tau}$, ésta se anula en el límite paraxial. Esta componente comparte una relación casi inmediata con la componente $\hat{\mathbf{e}}_{\tau}$, sin embargo, las derivadas actúan sobre los términos contrarios respecto a la componente $\hat{\mathbf{e}}_{\tau}$.

La componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S}^{\mathbb{R}}\right)_z &= -\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}k_z}{h_1^2k^3} \left[\left((\partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)))^2 + (\partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)))^2 \right) \cos^2 \varkappa \right. \\ &+ \left. \left[(\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 + (\partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 \right] \sin^2 \varkappa \right] \\ &- \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}k_z}{h_1^2k^3} \left[\partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \right. \\ &\quad \left. \partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \right] \sin \varkappa \cos \varkappa, \end{aligned} \quad (2.8.3c)$$

esta componente a diferencia de las componentes anteriores, no se elimina en el límite paraxial, además esta componente contiene términos cuadráticos.

2.8.2. Vector de Poynting complejo

El vector de Poynting complejo es [3, pp. 137]

$$\mathbf{S}^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*),$$

algunos autores como [23, 24, 12, 25] trabajan con este vector en vez del vector de Poynting real. En la subsección 2.8.3 se entiende el por qué este motivo.

La parte real del vector de Poynting complejo es

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathbf{S}^{\mathbb{C}} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \text{Re} (\wp_1^2 \mathbf{E}_{\wp_1} \times \mathbf{E}_{\wp_2}^* + \wp_2^2 \mathbf{E}_{\wp_1}^* \times \mathbf{E}_{\wp_2}) \quad (2.8.4) \\ &+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \wp_2 \wp_1 \text{Re} (\mathbf{E}_{\wp_1} \times \mathbf{E}_{\wp_1}^* + \mathbf{E}_{\wp_2} \times \mathbf{E}_{\wp_2}^*), \end{aligned}$$

con un poco de álgebra y considerar la parte real e imaginaria del campo ($\mathbf{E}_{\wp_1} = \text{Re}\mathbf{E}_{\wp_1} + i\text{Im}\mathbf{E}_{\wp_1}$ y $\mathbf{E}_{\wp_2} = \text{Re}\mathbf{E}_{\wp_2} + i\text{Im}\mathbf{E}_{\wp_2}$), la parte real del vector de Poynting complejo es

$$\text{Re } \mathbf{S}^{\mathbb{C}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\text{Re} (\mathbf{E}_{\wp_2}) \times \text{Re} (\mathbf{E}_{\wp_1}) + \text{Im} (\mathbf{E}_{\wp_2}) \times \text{Im} (\mathbf{E}_{\wp_1})). \quad (2.8.5)$$

Al tomar los productos cruz, la componente τ de la parte real del vector de Poynting complejo es

$$\begin{aligned} \left(\text{Re } \mathbf{S}^{\mathbb{C}}\right)_\tau &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \left[(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \right. \\ &\quad \left. - (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \right], \end{aligned} \quad (2.8.6a)$$

esta componente al igual que la componente $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ del vector de Poynting real, se anula en el límite paraxial. Existe una relación entre la componte (2.8.3a) y

(2.8.6a), sin embargo, aun no está completamente claro. En la sección 2.8.3 se muestra de forma clara esta relación.

La componente $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ es

$$\begin{aligned} \left(\text{Re } \mathbf{S}^{\text{C}}\right)_\sigma &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) [(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ &\quad - (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))], \end{aligned} \quad (2.8.6b)$$

esta componente es muy similar a la componente $\hat{\mathbf{e}}_\tau$, la única diferencia es la variable sobre que actúa la derivada.

La componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

$$\begin{aligned} \left(\text{Re } \mathbf{S}^{\text{C}}\right)_z &= -\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} k_z}{h_1^2 k^3} \left[(\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 + (\partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)))^2 \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 + (\partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)))^2 \right], \end{aligned} \quad (2.8.6c)$$

esta componente no se anula en el límite paraxial, por lo que en el límite paraxial, la dirección del vector de Poynting complejo es la misma que la del vector de Poynting real, la cual corresponde al eje de propagación z .

2.8.3. Relación entre el vector de Poynting real y complejo

Al tomar el promedio temporal sobre un periodo del vector de Poynting real \mathbf{S}^{R} , los términos que contengan la función $\sin \varkappa \cos \varkappa$ son cero, ya que $\int_0^\pi \sin(k_z z - \omega t) \cos(k_z z - \omega t) dt = 0$, y los términos que contengan las funciones $\sin^2 \varkappa$ o $\cos^2 \varkappa$ tendrán un factor de $1/2$, ya que $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(k_z z - \omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(k_z z - \omega t) dt = 1/2$. Por lo tanto, el promedio temporal de la componente $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ del vector de Poynting real es

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{S}_\tau^{\text{R}} \right\rangle_T &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) [(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ &\quad - (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))], \end{aligned} \quad (2.8.7a)$$

inmediatamente se puede ver que existe una relación entre la componente (2.8.6a),

de tal forma que $\left\langle \mathbf{S}_\tau^{\text{R}} \right\rangle_T = \frac{1}{2} \left(\text{Re } \mathbf{S}^{\text{C}}\right)_\tau$.

La componente $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ es

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{S}_\sigma^{\text{R}} \right\rangle_T &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{h_1 k} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) [(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ &\quad - (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))], \end{aligned} \quad (2.8.7b)$$

de la misma forma, hay una relación directa entre la componente $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ de la parte real del vector de Poynting complejo, de tal forma que $\langle \mathbf{S}_\sigma^{\mathbb{R}} \rangle_T = \frac{1}{2} (\text{Re } \mathbf{S}^{\mathbb{C}})_\sigma$.

La componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

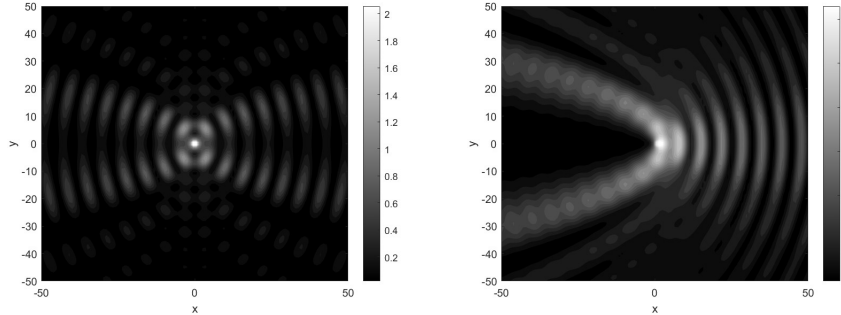
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_z^{\mathbb{R}} \rangle_T = & -\frac{1}{2} \frac{k_z}{h_1^2 k^3} \left[(\partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)))^2 + (\partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)))^2 \right. \\ & \left. + (\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 + (\partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)))^2 \right], \end{aligned} \quad (2.8.7c)$$

esta componente también se relaciona con la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ de la parte real del vector de Poynting complejo. A partir de estas observaciones, se puede llegar a la conclusión de que

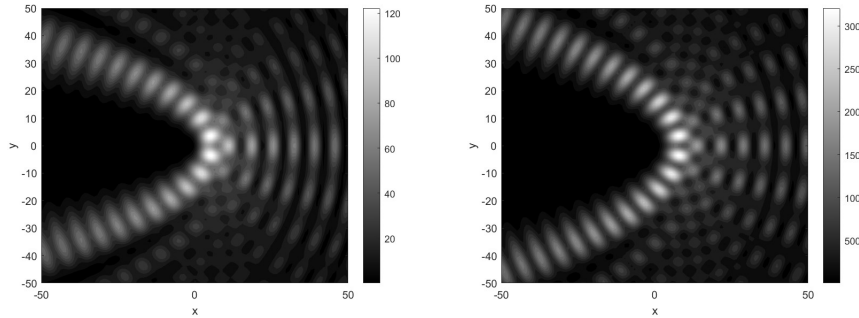
$$\langle \mathbf{S}^{\mathbb{R}} \rangle_T = \frac{1}{2} \text{Re } \mathbf{S}^{\mathbb{C}}. \quad (2.8.8)$$

Este resultado es válido para ondas planas y lo reporta [3], sin embargo, para ondas cilíndricas parabólicas también se cumple.

Es común trabajar con el promedio temporal del vector de Poynting real, ya que a este promedio es el que se puede medir experimentalmente. El por qué se usa el vector de Poynting complejo en vez del real, se debe a la relación (2.8.8). Para este caso, calcular la parte real del vector de Poynting complejo resultó más extensa que el cálculo del vector de Poynting real, sin embargo, en ondas planas, trabajar con el vector de Poynting complejo resulta más eficaz que su contraparte real. En la figura 2.26 se muestra la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del vector de Poynting complejo, que a su vez, es proporcional a la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del promedio temporal del vector de Poynting real.



(a) $a = 0$. El valor máximo se encuentra en el origen, posteriormente se desprenden líneas nodales sobre el eje x y eje y . (b) $a = 1$. La simetría se ha roto y los perfiles parabólicos abren en dirección negativa del eje x .



(c) $a = 2$. A medida que el valor de a aumenta, los valores de las amplitudes aumentan. (d) $a = 3$. El perfil parabólico predominante ha aumentado el valor de su foco, y se puede notar que en las regiones cercanas al origen, están los valores cercanos al máximo.

Figura 2.26: Amplitud de la componente \hat{e}_z del vector de Poynting complejo para diferentes valores de a . La simetría respecto al eje y se mantiene para el caso fundamental $a = 0$.

Para el caso fundamental $a = 0$, se observa una simetría para la componente \hat{e}_z del vector de Poynting, cuando $a > 0$, esta simetría se rompe y aparece un perfil parabólico con un mayor foco que abre en dirección negativa del eje x , y otros perfil parabólico que abren en la dirección positiva del eje x . Sin embargo, el perfil parabólico predominante es el que abre en dirección negativa al eje x , donde conforme a incrementa, el foco de este perfil aumenta.

2.9. Haces cilíndricos parabólicos polarizados en otras direcciones

Al considerar los vectores $\mathbf{U}_x = \psi \hat{\mathbf{e}}_x$ y $\mathbf{U}_y = \psi \hat{\mathbf{e}}_y$, la ecuación vectorial de Helmholtz se satisface, lo que genera nuevas soluciones las cuales se encuentran mayormente polarizadas en una dirección. Las semillas determinan la preferencia en la dirección de polarización. Estas semillas que se muestran en esta sección sólo dan hincapié a la existencia de nuevas soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz.

$$\mathbf{U}_x = \psi \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\psi}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau - \sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma), \quad (2.9.1a)$$

$$\mathbf{U}_y = \psi \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{\psi}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau + \tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma). \quad (2.9.1b)$$

El motivo de no usar los vectores $\psi \hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\psi \hat{\mathbf{e}}_\sigma$, es porque no satisfacen la ecuación vectorial de Helmholtz. Entonces surge la idea de construir semillas a partir de los vectores base de otro sistema coordenado.

2.9.1. Solución con \mathbf{U}_x

Al considera el vector $\mathbf{U}_x = \psi \hat{\mathbf{e}}_x$, el campo eléctrico \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = & \left\{ \frac{1}{k^2 h_1^6} [(h_1^2 (\sigma^2 \partial_\sigma^2 + \tau^2 \partial_\tau^2 - 2\sigma\tau \partial_\tau \partial_\sigma) + (\sigma^2 - \tau^2) (\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \right. \\ & + 2\sigma\tau (\tau \partial_\sigma + \sigma \partial_\tau) + k^2 h_1^6) \hat{\mathbf{e}}_x + (h_1^2 (\sigma\tau (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) + (\tau^2 - \sigma^2) \partial_\tau \partial_\sigma) \\ & \left. (\sigma^2 - \tau^2) (\tau \partial_\sigma + \sigma \partial_\tau) + 2\sigma\tau (\sigma \partial_\sigma - \tau \partial_\tau)) \hat{\mathbf{e}}_y] + \frac{ik_z}{k^2 h_1^2} (\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_z \right\} \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{ik_z z}. \quad (2.9.2a) \end{aligned}$$

La ecuación (2.9.2a) a pesar de ser extensa, muestra que el término en color púrpura es el dominante, ya que no decae en función de k . Este término se encuentra en la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$, y es

$\psi = [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{ik_z z}$. Para el espectro visible $k \sim 10^6$, por lo tanto los demás factores en comparación con ψ son pequeños, y se pueden despreciar. Al despreciar los términos en las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$, el campo \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = & \left(\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{ik_z}{k^2 h_1^2} (\tau \partial_\tau - \sigma \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_z \right) \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{ik_z z}, \quad (2.9.2b) \end{aligned}$$

el campo \mathbf{E}_{φ_1} en esta aproximación, es polarización elíptica que está oscilando sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$, ya que la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ tiene el factor de i . Sobre el

plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ el haz está linealmente polarizado en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_x$, lo cual es consistente debido a la semilla $\hat{\mathbf{e}}_x$. Esto nos indica que no se puede tener polarización completamente en la dirección x , sin embargo, la polarización de la solución \mathbf{E}_{φ_1} se encontrará preferencialmente polarizada en la dirección de la semilla, sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$.

El campo eléctrico \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = - \left(\frac{k_z}{k} \hat{\mathbf{e}}_y + i \frac{(\tau \partial_\sigma + \sigma \partial_\tau)}{k h_1^2} \hat{\mathbf{e}}_z \right) [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{ik_z z}, \quad (2.9.2c)$$

la solución está linealmente polarizada en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_y$ sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y$. El campo \mathbf{E}_{φ_2} tiene una polarización elíptica sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$, debido al factor i en la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$. Las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} son polarizaciones elípticas, que se encuentran oscilando en planos diferentes.

El producto punto entre las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} no es cero, lo cual resulta interesante, ya que ofrece la interpretación de que las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} no son ortogonales. Una posible respuesta a este resultado puede radicar en el tipo de vector semilla que se usó. La base de vectores unitarios del sistema coordenado cilíndrico parabólico es $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$, el vector $\hat{\mathbf{e}}_y$ no forma parte de esta base. La ortogonalidad en las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} está presente cuando se usó el vector semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, el cual sí pertenece a la base de este sistema coordenado.

2.9.2. Solución con \mathbf{U}_y

Al considera el vector $\mathbf{U}_y = \psi \hat{\mathbf{e}}_y$, el campo eléctrico \mathbf{E}_{φ_1} al considerar los términos dominantes (al igual que el caso anterior) es

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \left(\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{ik_z}{k^2 h_1^2} (\tau \partial_\sigma + \sigma \partial_\tau) \hat{\mathbf{e}}_z \right) [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{ik_z z}, \quad (2.9.3a)$$

esta solución está elípticamente polarizada sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$. Sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ el haz está linealmente polarizado, y la intensidad está en función de las coordenadas.

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = - \left(\frac{k_z}{k} \hat{\mathbf{e}}_x + i \frac{(\sigma \partial_\sigma - \tau \partial_\tau)}{k h_1^2} \hat{\mathbf{e}}_z \right) [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{ik_z z}. \quad (2.9.3b)$$

La solución \mathbf{E}_{φ_2} es polarización elíptica, que está oscilando sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$.

Las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} son polarizaciones elípticas, la primera oscilando en el plano $\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$ y la segunda en el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$.

Con base en las semillas $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ es posible construir un nuevo vector \mathbf{U} , como una combinación lineal de éstas, por ejemplo, $\mathbf{U}_\pm = \psi \hat{\mathbf{e}}_\pm = \psi \frac{(\hat{\mathbf{e}}_x \pm i \hat{\mathbf{e}}_y)}{\sqrt{2}}$. Este

nuevo vector también es solución a la ecuación vectorial de Helmholtz. Al tomar el resultado de que las semillas $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ generan una polarización lineal preferencial en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$, respectivamente. Se espera que el vector semilla $\hat{\mathbf{e}}_{\pm}$ genere términos dominantes que hagan referencia a polarización circular.

Capítulo 3

Contenido rotacional

En este capítulo se analiza las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, correspondientes a las ecuaciones (2.3.3a) y (2.3.3b), respectivamente. El objetivo es encontrar el contenido rotacional en estas soluciones. Posteriormente con base en estas soluciones, se construyen nuevos estados de polarización.

3.1. Rotacional y divergencia del campo eléctrico y magnético

El rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F} = (F_\tau, F_\sigma, F_z)$ en coordenadas cilíndricas parabólicas es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} = & \left(\frac{\partial_\sigma F_z}{h_1} - \partial_z F_\sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau + \left(\partial_z F_\tau - \frac{\partial_\tau F_z}{h_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \\ & + \frac{1}{h_1^2} (\partial_\tau (h_1 F_\sigma) - \partial_\sigma (h_1 F_\tau)) \hat{\mathbf{e}}_z,\end{aligned}$$

con h_1 el factor de escala presentado al inicio de la sección 2.

El rotacional del campo \mathbf{E}_{φ_1} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_{\varphi_1} = & \frac{1}{h_1} \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau - \partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma) \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}\end{aligned}$$

y el rotacional para \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_{\varphi_2} = & \left[-\frac{k_z}{h_1 k} (\partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau + \partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma) + \frac{i}{k} \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)},\end{aligned}$$

El campo eléctrico general es $\mathbf{E} = \wp_1 \mathbf{E}_{\wp_1} + \wp_2 \mathbf{E}_{\wp_2}$, entonces su rotacional se puede escribir como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = & \left[\frac{1}{h_1} \left(\wp_1 \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) \partial_\sigma - \wp_2 \frac{k_z}{k} \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau \right. \\ & \left. - \frac{1}{h_1} \left(\wp_1 \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) \partial_\tau - \wp_2 \frac{k_z}{k} \partial_\sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma + \wp_2 \frac{i}{k} \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}. \end{aligned}$$

El rotacional del campo magnético es

$$\nabla \times \mathbf{H} = \wp_1 \nabla \times \mathbf{H}_{\wp_1} + \wp_2 \nabla \times \mathbf{H}_{\wp_2},$$

pero $\mathbf{H}_{\wp_1} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{\wp_2}$ y $\mathbf{H}_{\wp_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{\wp_1}$, entonces el rotacional se convierte en

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\wp_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \nabla \times \mathbf{E}_{\wp_2} + \wp_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \nabla \times \mathbf{E}_{\wp_1}.$$

La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F} = (F_\tau, F_\sigma, F_z)$ en coordenadas cilíndricas parabólicas es

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial (h_1 F_\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial (h_1 F_\sigma)}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

La divergencia de las soluciones \mathbf{E}_{\wp_1} y \mathbf{E}_{\wp_2} es cero, por la tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Al igual que en el caso anterior, se puede calcular la divergencia del campo magnético con el resultado anterior, pero los campos \mathbf{E}_{\wp_1} y \mathbf{E}_{\wp_2} tienen divergencia nula, lo que ocasiona que la divergencia del campo magnético será cero.

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Este resultado es justamente algo que se debería esperar, ya que en el tratamiento de [2], las fuentes son nulas.

3.2. Helicidad y flujo de helicidad

Los potenciales electromagnéticos son de gran relevancia para calcular campos electromagnéticos. El potencial escalar ϕ_A y potencial vectorial \mathbf{A} , son los protagonistas al momento de calcular el campo eléctrico y magnético. El motivo es que los potenciales en ecuaciones de onda homogéneas involucran la carga y la corriente como términos fuente. La solución se escribe fácilmente en términos de funciones de Green retardadas [26]. Los potenciales vectoriales han adquirido un papel destacado en el contenido de momento angular. El flujo y la helicidad

se asocian a estos potenciales. Estas cantidades no pueden estar relacionadas con la invariancia de gauge, ya que estas cantidades deben ser invariantes. La simetría de Heaviside-Larmor, tiene la inclusión de un segundo potencial \mathbf{C} [27, 28], el cual lleva como nombre potencial de Bateman. El campo eléctrico se relaciona mediante el rotacional de este potencial y el campo magnético mediante la derivada temporal. En ausencia de cargas o corrientes, el potencial vectorial \mathbf{A} satisface la ecuación de onda homogénea. El campo eléctrico y magnético se pueden escribir en término de este potencial

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A},$$

con el nuevo potencial \mathbf{C} , dichos campos se pueden escribir en término de éste, de tal forma que [26]

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \partial_t \mathbf{C}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{C}.$$

En la estructura escalonada de las ecuaciones electromagnéticas, los campos libres están dados por la derivada temporal del vector potencial \mathbf{A} y \mathbf{C} [2]

$$\mathbf{E} \equiv -\partial_t \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{H} \equiv -\partial_t \mathbf{C}, \quad (3.2.1)$$

con $\mathbf{C} = \frac{1}{\mu} \mathbf{A}$. Para una onda monocromática con frecuencia ω , la relación entre los campos y los potenciales es

$$\mathbf{E} = i\omega \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} = -i\omega^{-1} \mathbf{E}, \quad (3.2.2a)$$

$$\mathbf{H} = i\omega \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} = -i\omega^{-1} \mathbf{H}. \quad (3.2.2b)$$

La solución general de campo eléctrico y magnético es $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$. La helicidad compleja, definida a partir del formalismo de campos complementarios [2], en términos de los potenciales vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{C} es [2]

$$\frac{c}{\mu} \varrho_{AC^*}^{\mathbf{C}} = \sqrt{\mu\varepsilon} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{E}), \quad (3.2.3a)$$

El flujo de helicidad complejo es

$$\frac{c}{\mu} \Phi_{AC^*}^{\mathbf{C}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}^* \times \mathbf{A} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} \times \mathbf{C}^*. \quad (3.2.3b)$$

para $\mathbf{A}, \mathbf{H}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{E} \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$. Afanasiev [29] presenta la helicidad en su notación integral, sin embargo, la idea se mantiene. La representación integral de (3.2.3b) con el factor $\frac{1}{2}$ se considera como la representación total del espín [30], $S = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A} + \mathbf{H} \times \mathbf{C}) dV$.

Al tomar el complejo conjugado de la helicidad y el flujo complejo, resultan

$$\frac{c}{\mu} (\varrho_{AC^*}^{\mathbf{C}})^* = \sqrt{\mu\varepsilon} (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{H} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^*), \quad (3.2.3c)$$

$$\frac{c}{\mu} \left(\Phi_{AC^*}^C \right)^* = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times \mathbf{A}^* + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}^* \times \mathbf{C}. \quad (3.2.3d)$$

El complejo conjugado de la helicidad y el flujo se pueden escribir como

$$\frac{c}{\mu} \left(\varrho_{AC^*}^C \right)^* = \frac{c}{\mu} \varrho_{A^*C}, \quad \frac{c}{\mu} \left(\Phi_{AC^*}^C \right)^* = \Phi_{A^*C}^C. \quad (3.2.4)$$

3.2.1. Unidades

Las unidades de momento angular son

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = [\text{J s}],$$

las unidades de $\frac{c}{\mu} \varrho_{AC^*}^C$ son

$$\left[\frac{c}{\mu} \varrho_{AC^*}^C \right] = [\sqrt{\mu\varepsilon} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{E})] = [\text{J s m}^{-3}],$$

y las unidades de $\frac{c}{\mu} \Phi_{AC^*}^C$ son

$$\left[\frac{c}{\mu} \Phi_{AC^*}^C \right] = \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}^* \times \mathbf{A} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} \times \mathbf{C}^* \right] = [\text{J s m}^{-2} \text{s}^{-1}].$$

La helicidad tiene unidades de momento angular por unidad de volumen, una densidad volumétrica. El flujo de helicidad también tiene unidades de momento angular por unidad de área, una densidad superficial de momento angular por unidad de tiempo, o energía por unidad de área. El flujo de helicidad hace referencia a la cantidad de momento angular por unidad de área por unidad de tiempo, que se origina debido a las soluciones de campo eléctrico. La relación entre la helicidad y el flujo es

$$\left[\frac{c}{\mu} \Phi_{AC} \right] = \left[c \left(\frac{c}{\mu} \varrho_{AC} \right) \right].$$

3.2.2. Helicidad y flujo en términos de \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2}

Los campos eléctrico y magnético son

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\varrho_1 \mathbf{E}_{\varphi_1} + \varrho_2 \mathbf{E}_{\varphi_2}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (\varrho_1 \mathbf{H}_{\varphi_1} + \varrho_2 \mathbf{H}_{\varphi_2}) e^{-i\omega t}, \quad (3.2.5a)$$

pero $\mathbf{H}_{\varphi_1} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{\varphi_2}$ y $\mathbf{H}_{\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}_{\varphi_1}$, entonces el campo magnético en términos de \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (-\varrho_1 \mathbf{E}_{\varphi_2} + \varrho_2 \mathbf{E}_{\varphi_1}) e^{-i\omega t}. \quad (3.2.5b)$$

El potencial vectorial \mathbf{A} con ayuda de las ecuaciones (3.2.2a) y (3.2.2b), se pueden escribir en términos de \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2}

$$\mathbf{A} = -\frac{i}{\omega} (\varrho_1 \mathbf{E}_{\varphi_1} + \varrho_2 \mathbf{E}_{\varphi_2}) e^{-i\omega t}, \quad (3.2.5c)$$

de la misma forma, el potencial \mathbf{C} con ayuda de las ecuaciones (3.2.2a) y (3.2.2b) es

$$\mathbf{C} = -\frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (-\wp_1 \mathbf{E}_{\wp_2} + \wp_2 \mathbf{E}_{\wp_1}) e^{-i\omega t}. \quad (3.2.5d)$$

Con las ecuaciones (3.2.5a)–(3.2.5d) se puede calcular la helicidad y el flujo. Si la helicidad es $\sqrt{\mu\varepsilon} (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{H} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^*)$, al desarrollar la diferencia de productos escalares dentro del paréntesis se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{E} = \\ & -2i\omega^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\wp_2^2 \mathbf{E}_{\wp_2} \cdot \mathbf{E}_{\wp_1}^* - \wp_1^2 \mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}^* + \wp_1 \wp_2 (\mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \mathbf{E}_{\wp_1}^* - \mathbf{E}_{\wp_2} \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}^*)], \end{aligned}$$

por lo tanto, la helicidad es

$$\begin{aligned} & \frac{c}{\mu} \varrho_{AC}^C = \\ & -2i\varepsilon\omega^{-1} [\wp_2^2 \mathbf{E}_{\wp_2} \cdot \mathbf{E}_{\wp_1}^* - \wp_1^2 \mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}^* + \wp_1 \wp_2 (\mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \mathbf{E}_{\wp_1}^* - \mathbf{E}_{\wp_2} \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}^*)], \end{aligned}$$

al tomar el complejo conjugado

$$\begin{aligned} & \frac{c}{\mu} (\varrho_{AC}^C)^* = \frac{c}{\mu} \varrho_{A^*C}^C = \\ & 2i\varepsilon\omega^{-1} [\wp_2^2 \mathbf{E}_{\wp_2}^* \cdot \mathbf{E}_{\wp_1} - \wp_1^2 \mathbf{E}_{\wp_1}^* \cdot \mathbf{E}_{\wp_2} - \wp_1 \wp_2 (\mathbf{E}_{\wp_1}^* \cdot \mathbf{E}_{\wp_1} - \mathbf{E}_{\wp_2}^* \cdot \mathbf{E}_{\wp_2})]. \end{aligned}$$

El flujo es igual a $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times \mathbf{A}^* + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}^* \times \mathbf{C}$, al desarrollar la suma de los productos vectoriales se obtiene

$$\frac{c}{\mu} \Phi_{AC}^C = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} i\omega^{-1} (\mathbf{E}_{\wp_2} \times \mathbf{E}_{\wp_2}^* - \mathbf{E}_{\wp_1}^* \times \mathbf{E}_{\wp_1}),$$

y su complejo conjugado es

$$\left(\frac{c}{\mu} \Phi_{AC}^C \right)^* = \frac{c}{\mu} \Phi_{A^*C}^C = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} i\omega^{-1} (-\mathbf{E}_{\wp_1}^* \times \mathbf{E}_{\wp_1} + \mathbf{E}_{\wp_2} \times \mathbf{E}_{\wp_2}^*).$$

Las cantidades reportadas en (3.2.3a) y (3.2.3b) son cantidades complejas, sin embargo, lo que se desea encontrar físicamente son cantidades reales. La helicidad y el flujo se deben construir como una combinación lineal entre $\frac{c}{\mu} \varrho_{AC}^C$, $\frac{c}{\mu} \Phi_{AC}^C$ y sus complejos conjugados, de tal forma la helicidad es

$$\frac{c}{\mu} \varrho_{AC} = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu} (\varrho_{AC}^C + \varrho_{A^*C}^C), \quad (3.2.6a)$$

y el flujo de helicidad es

$$\frac{c}{\mu} \Phi_{AC} = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu} (\Phi_{AC}^C + \Phi_{A^*C}^C). \quad (3.2.6b)$$

Con esta combinación lineal, la helicidad ya no depende de los parámetros \wp_1 y \wp_2 .

La helicidad $\frac{c}{\mu}\varrho_{AC}$ en términos de los campos \mathbf{E}_{\wp_1} y \mathbf{E}_{\wp_2} es

$$\frac{c}{\mu}\varrho_{AC} = i\omega^{-1}\varepsilon (\mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}^* - \mathbf{E}_{\wp_1}^* \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}). \quad (3.2.7a)$$

Notar que en la ecuación (3.2.7a) en formalismo de campos complementarios está presente, esto porque el complejo conjugado de $\mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}^*$ es $\mathbf{E}_{\wp_1}^* \cdot \mathbf{E}_{\wp_2}$. Al tomar la diferencia de una cantidad compleja con su complejo conjugado, el resultado es dos veces la parte imaginaria de la cantidad compleja. El factor i asegura que la helicidad se convierta en una cantidad real. En la sección 3.3 se muestra el contenido rotacional en ondas planas, y la helicidad tiene un factor de cuatro en el resultado, contrario a lo que comúnmente se reporta, donde la helicidad tiene un factor de dos. Sin embargo, se ve muy claro porque en el formalismo de campos complementarios, la helicidad tiene un factor doble.

El flujo de helicidad $\frac{c}{\mu}\Phi_{AC}$ es

$$\frac{c}{\mu}\Phi_{AC} = i\omega^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{E}_{\wp_2} \times \mathbf{E}_{\wp_2}^* - \mathbf{E}_{\wp_1}^* \times \mathbf{E}_{\wp_1}). \quad (3.2.7b)$$

Al tomar la parte real e imaginaria de los campos ($\mathbf{E}_{\wp_1} = \text{Re}\mathbf{E}_{\wp_1} + i\text{Im}\mathbf{E}_{\wp_1}$ y $\mathbf{E}_{\wp_2} = \text{Re}\mathbf{E}_{\wp_2} + i\text{Im}\mathbf{E}_{\wp_2}$), la helicidad es

$$\frac{c}{\mu}\varrho_{AC} = 2\omega^{-1}\varepsilon (\text{Re}\mathbf{E}_{\wp_1} \cdot \text{Im}\mathbf{E}_{\wp_2} - \text{Re}\mathbf{E}_{\wp_2} \cdot \text{Im}\mathbf{E}_{\wp_1}), \quad (3.2.8a)$$

y el flujo de helicidad es

$$\frac{c}{\mu}\Phi_{AC} = 2\omega^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\text{Re}\mathbf{E}_{\wp_2} \times \text{Im}\mathbf{E}_{\wp_2} + \text{Re}\mathbf{E}_{\wp_1} \times \text{Im}\mathbf{E}_{\wp_1}), \quad (3.2.8b)$$

con estas expresiones es más claro que la helicidad $\frac{c}{\mu}\varrho_{AC}$ y el flujo $\frac{c}{\mu}\Phi_{AC}$ son cantidades reales, construidas a partir de campos complejos.

3.3. Contenido rotacional en ondas planas

Como referente, veamos cuál es el contenido rotacional en ondas planas.

En coordenadas cartesianas, al considerar el vector $\mathbf{U} = E_0 (u_{0x}\hat{\mathbf{e}}_x \mp iu_{0y}\hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz-\omega t)}$, la solución para el campo electromagnético es [2]

$$\mathbf{E} = E_0 (\wp_1 (u_{0x}\hat{\mathbf{e}}_x \pm iu_{0y}\hat{\mathbf{e}}_y) + \wp_2 (-u_{0x}\hat{\mathbf{e}}_y \mp iu_{0y}\hat{\mathbf{e}}_x)) e^{i(kz-\omega t)},$$

la cual es polarización elíptica y se aborda con más detalle en el capítulo 5.

Los campos \mathbf{E}_{\wp_1} para ondas planas es

$$\mathbf{E}_{\wp_1} = E_0 (u_{0x}\hat{\mathbf{e}}_x \mp iu_{0y}\hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz-\omega t)},$$

y el campo \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = E_0 (-u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_y \mp iu_{0y} \hat{\mathbf{e}}_x) e^{i(kz - \omega t)}.$$

La helicidad y el flujo se pueden calcular al usar las ecuaciones (3.2.7a) y (3.2.7b), y son

$$\frac{c}{\mu} \varrho_{AC} = \mp \varepsilon \frac{4}{\omega} E_0^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(2 - e^2)}, \quad \frac{c}{\mu} \Phi_{AC} = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{4}{\omega} E_0^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(2 - e^2)} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (3.3.1)$$

donde e es la eccentricidad. Estos resultados corresponden a los reportados por [2]. Para la helicidad, los productos $\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_1}^*$ y $\mathbf{E}_{\varphi_2} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_2}^*$, son iguales. El factor 4 es debido a la suma de los productos $\mathbf{E}_{\varphi_2} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_1}^*$ y $\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_2}^*$, lo cual resulta interesante, ya que al trabajar en el tratamiento real, el factor es 2 en vez de 4. En el tratamiento complejo se usa la idea de campos complementarios, por lo que cada campo tiene la contribución de 2 para la helicidad. Para el flujo de helicidad ocurre algo similar, cada producto $\mathbf{E}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{E}_{\varphi_2}^*$ y $\mathbf{E}_{\varphi_2} \times \mathbf{E}_{\varphi_1}^*$ tiene un factor de 2, por lo que la suma de estos productos genera el factor de 4.

Cuando la eccentricidad $e = 0$, se trata de polarización circular, la helicidad y el flujo son

$$\frac{c}{\mu} \varrho_{AC} = \mp \varepsilon \frac{2}{\omega} E_0^2, \quad \frac{c}{\mu} \Phi_{AC} = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{2}{\omega} E_0^2 \hat{\mathbf{e}}_z.$$

La polarización lineal existe cuando $e = 1$, donde claramente la helicidad y el flujo son nulos. Ondas planas con polarización lineal no tienen contenido rotacional.

Al usar la expresión (2.8.1) para calcular el vector de Poynting real, se obtiene

$$\mathbf{S}^{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 (u_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t) - u_{0y}^2 \sin^2(kz - \omega t)) \hat{\mathbf{e}}_z,$$

y el promedio temporal es

$$\langle \mathbf{S}^{\mathbb{R}} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2) \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Con la expresión (2.8.5) se obtiene el promedio del vector de Poynting

$$\frac{1}{2} \text{Re} \mathbf{S}^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2) \hat{\mathbf{e}}_z,$$

Se verifica que el promedio temporal del vector de Poynting real, es igual a un medio de la parte real del vector de Poynting complejo.

3.4. Contenido rotacional en haces cilíndricos parabólicos

El flujo de helicidad respecto a los soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

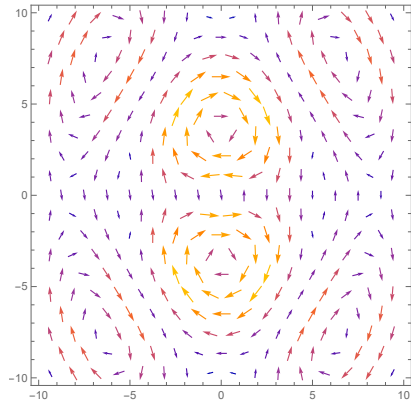
$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu} \Phi_{AC} = & - \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_z}{h_1^2 \omega k^2} [(\tau \partial_\sigma + \sigma \partial_\tau) \hat{\mathbf{e}}_x + (\sigma \partial_\sigma - \tau \partial_\tau) \hat{\mathbf{e}}_y] \\ & \left[(P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))^2 + (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))^2 \right] \\ & + 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right)}{h_1^2 \omega k^2} [\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ & \quad - \partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (3.4.1) \end{aligned}$$

se puede observar que las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ son muy simétricas, lo que cambia de la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ respecto a la componente $\hat{\mathbf{e}}_y$ es $\tau \rightarrow \sigma$ y $\sigma \rightarrow -\tau$. Este cambio se puede observar como una rotación de $\pi/2$ en sentido antihorario de los ejes τ y σ . Esta analogía resulta interesante, ya que a lo largo de este trabajo, se ha usado el formalismo de los campos complementarios, donde el formalismo surge a partir de la simetría HL, la cual rota el campo eléctrico y magnético $\mathbf{E} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{E}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}$. La componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del flujo muestra dos términos muy semejantes, sin embargo, cada término es derivado respecto a una variable. En la figura 3.1 se muestra el flujo de helicidad sobre el plano cartesiano, para diferentes valores de a . Para el caso fundamental (subfigura 3.1a), el flujo de helicidad muestra una simetría sobre el eje x y eje y , donde se pueden observar seis remolinos, aunque los más pronunciados son los que se encuentran en el centro del plano. La subfigura 3.1b rompe con la simetría sobre el eje y , sin embargo, la simetría sobre el eje x se mantiene. Además de mostrar un perfil parabólico que apunta en la dirección positiva del eje x . Para el caso $a = 2$ (subfigura 3.1c), aparecen 3 remolinos, algo que sucede con la solución \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, donde en la frontera de los remolinos, se pueden apreciar perfiles parabólicos. En la subfigura 3.1d se muestra el caso $a = 3$, donde los remolinos se han mantenido, pero con un ligero desplazamiento en la dirección positiva del eje x . De la misma forma, los perfiles parabólicos se encuentra aquí pero más pronunciados.

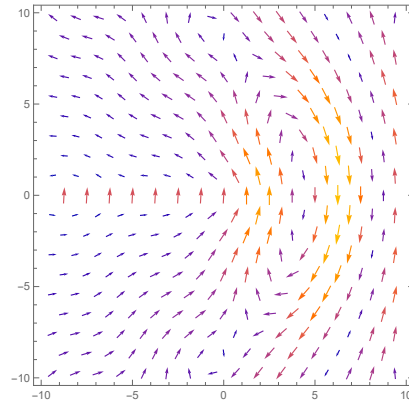
La helicidad respecto a los soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu} \varrho_{AC} = & \pm 4 \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{k_z}{h_1^2 k^3} [\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \\ & - \partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] . \quad (3.4.2) \end{aligned}$$

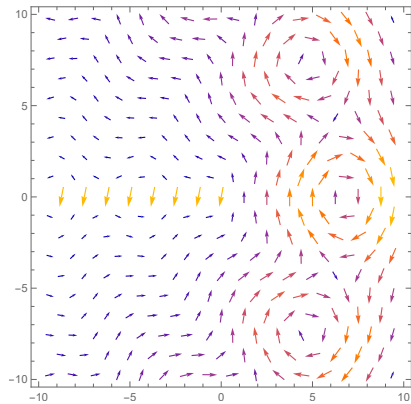
En la figura 3.2 se muestra la helicidad para diferentes valores de a .



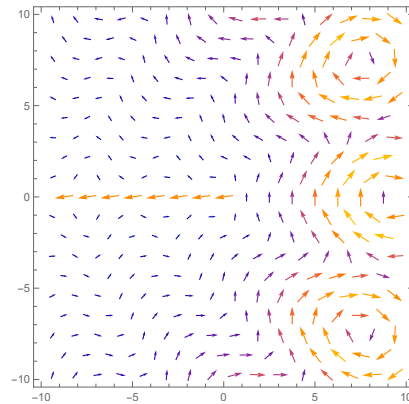
(a) $a = 0$. Dado que las líneas de campo giran o muestran un enroscamiento sobre un eje, muestra que el sistema tiene una helicidad alta.



(b) $a = 1$. Las líneas de campos muestran un enroscamiento alrededor de los cuadrantes uno y cuatro.

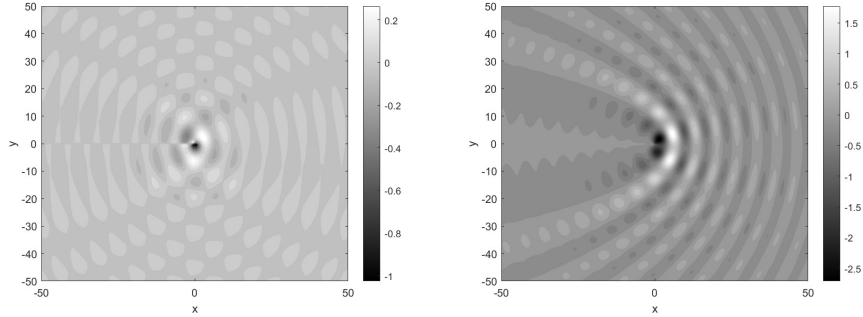


(c) $a = 2$. En la región del primer y cuarto cuadrante existen tres regiones con un alto enrollamiento.

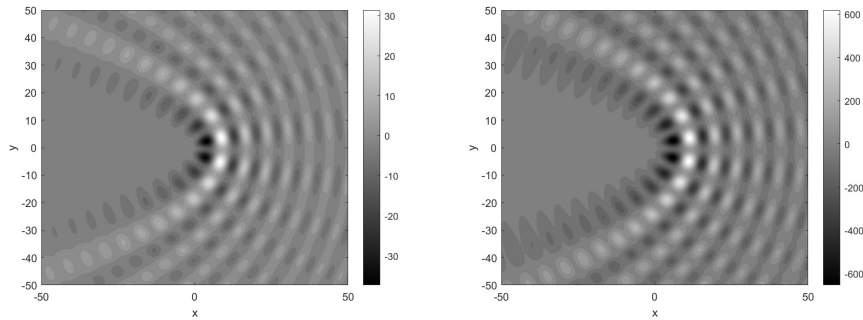


(d) $a = 3$. Las regiones de enrollamiento se mantienen del caso anterior, sin embargo, los regiones se deforman ligeramente.

Figura 3.1: Parte real del flujo de helicidad para diferentes valores de a .



(a) $a = 0$. Cerca del origen se encuentra el mínimo, que hace referencia a polarización circular con polarización izquierda.
 (b) $a = 1$. Se muestra que el máximo y mínimo se encuentran cercanos al origen, por lo tanto, cerca el origen se encuentran los estados con polarización circular.



(c) $a = 2$. A medida que el valor de a aumenta, (d) $a = 3$. Cada perfil parabólico alterna entre los límites del máximo y mínimo aumentan, sin polarización derecha (color blanco) y polarización izquierda (color negro), el máximo y mínimo se concentran cerca al origen.

Figura 3.2: Magnitud de la helicidad con base en la ecuación (3.2.7a) para diferentes valores de a .

Se puede observar que los patrones de la helicidad son muy similares a las amplitudes de las componentes de las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. Para el caso fundamental $a = 0$, se mantiene una simetría de perfiles parabólicos respecto al eje y , sin embargo, cuando $a > 0$, los perfiles parabólicos sólo apuntan en dirección positiva del eje x . A medida que el valor de a incrementa, el foco de los perfiles parabólicos aumenta. La magnitud de la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del flujo tiene una representación casi similar a la mostrada en la figura 3.2, ya que esta amplitud es proporcional a la helicidad. Las gráficas de la figura 3.2 nos muestran la proyecciones de los estados de polarización sobre el eje de propagación (eje z). En este contexto, los colores blanco y negro representan los valores máximo y mínimo, respectivamente. La polarización circular derecha está asociada al color blanco, mientras que la polarización circular izquierda se vincula

con el color negro. Entre estos extremos, se encuentran los estados de polarización lineal y elíptica: el valor cero indica polarización lineal, los valores mayores a cero pero menores al máximo corresponden a polarización elíptica derecha, y los valores menores a cero pero mayores al mínimo representan polarización elíptica izquierda.

Esta cantidad es muy similar a la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del flujo de helicidad, esta relación es evidente debido a la ecuación

$$\nabla \cdot \Phi_{AC} + \partial_t \varrho_{AC} = 0. \quad (3.4.3)$$

Ninguna de las dos cantidades (flujo y helicidad) depende del tiempo ni de la coordenada z , por lo que la ecuación (3.4.3) se reduce a $\nabla \cdot \Phi_{AC}(\tau, \sigma) = 0$. El flujo de helicidad en término de los vectores unitarios del sistema cilíndrico parabólico es

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu} \Phi_{AC} = & - \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_z}{h_1 \omega k^2} (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau - \partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma) \\ & \left[\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))^2 + \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))^2 \right] \\ & + 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right)}{h_1^2 \omega k^2} \left[\partial_\sigma (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\tau (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma)) \right. \\ & \left. [-\partial_\tau (P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma)) \partial_\sigma (P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] \right] \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

la divergencia en el sistema cilíndrico parabólico es $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1^2} (\partial_\tau (h_1 F_\tau) + \partial_\sigma (h_1 F_\sigma)) + \partial_z F_z$, por lo tanto al aplicar la divergencia sobre el flujo de helicidad, los términos que determinan que esta divergencia es nula son $\frac{1}{h_1} (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau - \partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma)$. Al aplicar el operador ∇ sobre estos términos resulta en $(\partial_\tau \partial_\sigma - \partial_\tau \partial_\sigma)$, al considerar que se pueden intercambiar el orden de las derivadas $\partial_\tau \partial_\sigma - \partial_\tau \partial_\sigma = 0$, por lo que la divergencia del flujo de helicidad es cero.

En el límite paraxial $k_z \approx k$, las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ del flujo de helicidad se anulan debido al factor $\left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right)$. La componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del flujo se duplica, debido al factor $\left(1 + \frac{k_z^2}{k^2}\right)$, este hecho implica que esta componente esté relacionada directamente con la helicidad, de tal forma que

$$c \left(\frac{c}{\mu} \varrho_{AC} \right)_{\text{paraxial}} = \left(\frac{c}{\mu} \Phi_{AC} \right)_{z\text{-paraxial}} \quad (3.4.4)$$

El flujo de helicidad no necesita ser paralelo a $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, puede tener componentes transversales respecto a la propagación de la onda [31, 32], sin embargo, este flujo de helicidad sólo tiene componentes transversales respecto a la dirección de propagación. Que el flujo de helicidad y la helicidad sean diferentes de cero, indica que las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} tienen momento angular.

3.5. Polarización preferencialmente circular

Las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} correspondientes a las ecuaciones (2.3.3a) y (2.3.3b), con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ son ortogonales. A partir de estas soluciones se puede generar polarización circular como una combinación de estas soluciones, de tal forma que se construye un nuevo campo \mathbf{E}_{φ_1}

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{E}'_{\varphi_1} \pm i \mathbf{E}'_{\varphi_2}),$$

donde \mathbf{E}'_{φ_1} y \mathbf{E}'_{φ_2} son las soluciones originales a la ecuación vectorial de Helmholtz, con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. El signo positivo hace referencia a polarización derecha \odot , y el signo negativo a polarización izquierda \ominus .

A partir de este nuevo campo \mathbf{E}_{φ_1} , se puede determinar \mathbf{E}_{φ_2} como su rotacional

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{E}_{\varphi_1}.$$

El nuevo estado \mathbf{E}_{φ_1} , generado con en la combinación lineal de los campos \mathbf{E}'_{φ_1} y \mathbf{E}'_{φ_2} , con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{h_1 k} \left[\left(\mp \partial_\sigma - \frac{ik_z}{k} \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau + \left(\pm \partial_\tau - \frac{ik_z}{k} \partial_\sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \right] + \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.5.1a)$$

dada la simetría en las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, es razonable encontrar simetría entre las componentes $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ de la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} . En el límite paraxial la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = \frac{(\mp \partial_\sigma - i \partial_\tau)}{\sqrt{2} h_1 k} (\hat{\mathbf{e}}_\tau \pm i \hat{\mathbf{e}}_\sigma) \\ [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}, \end{aligned}$$

la cual inmediatamente se puede interpretar como polarización circular sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$, en la subsección 3.5.1 se aborda con más detalle este resultado.

El estado \mathbf{E}_{φ_2} , obtenido a partir del rotacional de (3.5.1a) es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{\sqrt{2} k h_1} \left[\left(\left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) \partial_\sigma \mp \frac{ik_z}{k} \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau \right. \\ \left. + \left(\mp \frac{ik_z}{k} \partial_\sigma - \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \pm \frac{1}{h_1 k} (k^2 - k_z^2) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.5.1b)$$

De la misma forma que la solución (3.5.1a), la solución \mathbf{E}_{φ_2} mantiene una simetría entre las componente $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$. En el límite paraxial, la solución (3.5.1b)

es

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{\sqrt{2}kh_1} (-\partial_\sigma \mp i\partial_\tau) (\hat{\mathbf{e}}_\tau \pm i\hat{\mathbf{e}}_\sigma) [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)},$$

donde se ve casi de forma directa una polarización circular sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$. Al considerar el límite paraxial, la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ se anula por completo, lo que muestra que esta solución está circularmente polarizada en el plano cartesiano.

3.5.1. Estado de polarización \mathbf{E}_{φ_1}

Al inicio de la sección 3.5 se observó que la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} en el límite paraxial se polarización circular sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$. Con el propósito de entender mejor la polarización de esta solución, se escribe en términos de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_1} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{h_1^2 k} \left[\left(\tau \left(\mp \partial_\sigma - i \frac{k_z}{k} \partial_\tau \right) - \sigma \left(\pm \partial_\tau - i \frac{k_z}{k} \partial_\sigma \right) \right) \hat{\mathbf{e}}_x \right. \right. \\ & \left. \left. \pm i \left(\tau \left(\mp \frac{k_z}{k} \partial_\sigma - i \partial_\tau \right) - \sigma \left(\pm \frac{k_z}{k} \partial_\tau - i \partial_\sigma \right) \right) \hat{\mathbf{e}}_y \right] + \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

se puede ver como las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ de la ecuación (3.5.2) son muy similares, lo único que impide que las amplitudes de estas componentes sean igual se debe al factor k_z/k , por lo tanto, en el límite paraxial $k_z \approx k$, la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} está circularmente polarizada sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$. La nueva solución se puede escribir en términos de una amplitud y una fase, de tal forma que la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ es

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\varphi_1})_x = & \frac{1}{\sqrt{2}h_1^2 k} \left[(\partial_\tau \psi)^2 \left(\sigma^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \tau^2 \right) + (\partial_\sigma \psi)^2 \left(\tau^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \sigma^2 \right) + \right. \\ & \left. 2\tau\sigma\partial_\sigma\psi\partial_\tau\psi \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \right]^{1/2} \exp \left(i \left(\arctan \left(\mp \frac{k_z}{k} \frac{(\sigma\partial_\sigma - \tau\partial_\tau)\psi}{(\tau\partial_\sigma + \sigma\partial_\tau)\psi} \right) + k_z z - \omega t \right) \right), \end{aligned}$$

la componente $\hat{\mathbf{e}}_y$ es

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\varphi_1})_y = & \frac{1}{\sqrt{2}h_1^2 k} \left[(\partial_\tau \psi)^2 \left(\tau^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \sigma^2 \right) + (\partial_\sigma \psi)^2 \left(\sigma^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \tau^2 \right) \right. \\ & \left. - 2\tau\sigma\partial_\sigma\psi\partial_\tau\psi \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \right] \exp \left(i \left(\arctan \left(\pm \frac{k_z}{k} \frac{(\tau\partial_\sigma + \sigma\partial_\tau)\psi}{(\tau\partial_\tau - \sigma\partial_\sigma)\psi} \right) + k_z z - \omega t \right) \right). \end{aligned}$$

Se puede observar una relación entre las amplitudes y las fases, sin embargo, no son idénticas. La componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ del nuevo campo \mathbf{E}_{φ_1} es $(\mathbf{E}_{\varphi_1})_z = \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \psi$.

Donde ψ es la solución a la ecuación escalar de Helmholtz en el sistema cilíndrico parabólico. A pesar de ser extensa la ecuación, se puede observar que las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ son muy parecidas. La diferencia de fase entre la componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ es $\mp\pi/2$, porque la cantidad $\pm(\sigma\partial_\sigma - \tau\partial_\tau)\psi$ rota del eje imaginario al eje real, y la cantidad $(\tau\partial_\sigma + \sigma\partial_\tau)$ rota del eje real al eje imaginario, la cual es una rotación en sentido antihorario de $\pi/2$. La nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} está elípticamente polarizada, y la proyección sobre los planos $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y)$, $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z)$, $(\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$ son polarizaciones elípticas. Sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ el campo está elípticamente polarizado, donde los semiejes se encuentran alineados con los ejes cartesianos, ya que hay una diferencia de $\pi/2$ entre estas componentes. Al momento de tomar el límite paraxial, la amplitud para ambas componentes es $\frac{1}{\sqrt{2}k}\sqrt{(\partial_\tau\psi)^2 + (\partial_\sigma\psi)^2}$, por lo tanto, la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} es

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}k}\sqrt{(\partial_\tau\psi)^2 + (\partial_\sigma\psi)^2}(\hat{\mathbf{e}}_x \mp i\hat{\mathbf{e}}_y)e^{i(kz-\omega t)},$$

donde inmediatamente se puede observar la polarización circular.

3.5.2. Estado de polarización \mathbf{E}_{φ_2}

Al inicio de la sección 3.5 se observó que la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} en el límite paraxial el campo está circularmente polarizado sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$. Con el propósito de entender mejor la polarización de esta solución, se escribe en términos de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas en términos de una amplitud y fase. La componente $\hat{\mathbf{e}}_x$ es

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\varphi_2})_x &= \frac{1}{\sqrt{2}kh_1^2} \left[(\partial_\sigma\psi)^2 \left(\left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right)^2 \tau^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \sigma^2 \right) \right. \\ &+ (\partial_\tau\psi)^2 \left(\left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right)^2 \sigma^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \tau^2 \right) + 2\tau\sigma\partial_\tau\psi\partial_\sigma\psi \left(\left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right)^2 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \Big]^{1/2} \\ &\quad \exp \left[i \arctan \left(\pm \frac{k_z}{k} \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right) \frac{(\tau\partial_\sigma + \sigma\partial_\tau)\psi}{(\sigma\partial_\sigma - \tau\partial_\tau)\psi} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5.3a)$$

la componente $\hat{\mathbf{e}}_y$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\varphi_2})_y &= \frac{1}{\sqrt{2}kh_1^2} \left[(\partial_\sigma\psi)^2 \left(\sigma^2 \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right)^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \tau^2 \right) \right. \\ &+ (\partial_\tau\psi)^2 \left(\tau^2 \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right)^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \sigma^2 \right) - 2\tau\sigma\partial_\tau\psi\partial_\sigma\psi \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \Big]^{1/2} \\ &\quad \exp \left[i \arctan \left(\mp \frac{k_z}{k} \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2}\right) \frac{(\sigma\partial_\sigma - \tau\partial_\tau)\psi}{(\sigma\partial_\tau + \tau\partial_\sigma)\psi} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5.3b)$$

las expresiones (3.5.3a) y (3.5.3b) son extensas, sin embargo, el motivo de escribirla de esta forma es para observar de forma casi inmediata la similitud entre

las componentes $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$, las cuales son iguales al momento de tomar el límite paraxial. Al igual que la solución anterior, la diferencia de fase entre estas componentes es de $\pm\pi/2$, ya que $(\tau\partial_\sigma + \sigma\partial_\tau)$ pasa de estar en el eje imaginario a estar en el eje real, y $(\sigma\partial_\sigma - \tau\partial_\tau)$ pasa de estar en el eje real a estar en el eje imaginario. El signo $+$ indica una rotación en sentido horario, y el signo negativo una rotación en el sentido antihorario.

Al tomar el límite paraxial, la nueva solución \mathbf{E}_{φ_2} es

$$\mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{1}{\sqrt{2}k} \sqrt{|\partial_\sigma\psi|^2 + |\partial_\tau\psi|^2} (\mp i\hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz-\omega t)}$$

donde la nueva solución \mathbf{E}_{φ_2} se encuentra circularmente polarizada sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$, al igual que la solución anterior, sin embargo, la diferencia radica en los signos. Cuando se elige el primer signo, el campo \mathbf{E}_{φ_1} tiene asociada polarización derecha \odot , y el campo \mathbf{E}_{φ_2} tiene asociada polarización izquierda \ominus , al tomar el segundo signo $-$, pasa lo contrario. Se puede observar de forma directa la ortogonalidad entre ambas soluciones. La nueva solución \mathbf{E}_{φ_2} se construya a partir del rotacional de la nueva solución \mathbf{E}_{φ_1} con el factor $\frac{i}{k}$, al ignorar este factor extra, las nuevas soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} no son ortogonales, ya que la solución \mathbf{E}_{φ_2} será $\mathbf{E}_{\varphi_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\partial_\sigma\psi)^2 + (\partial_\tau\psi)^2} (-i\hat{\mathbf{e}}_x \pm \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz-\omega t)}$, la cual si representa polarización circular, donde el signo positivo es polarización derecha, y el signo negativo es polarización izquierda. Nótese que si se elige el primer signo se está trabajando con polarización derecha, sin embargo, la polarización de \mathbf{E}_{φ_1} también es polarización derecha (al tomar el primer signo), por lo tanto las soluciones además de no tener la misma amplitud, tienen la misma dirección de polarización, por lo que no son soluciones ortogonales. Se muestra la importancia de añadir el factor $\frac{i}{k}$ a la solución \mathbf{E}_{φ_2} . Por este motivo se usa este tratamiento para encontrar soluciones a las ecuaciones de Maxwell, ya que en [3, 14], este factor está ausente.

Se acaba de presentar una forma de obtener polarización circular con base en las soluciones originales \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. Sin embargo, existe otra forma de obtener polarización circular, la cual se basa en lo presentado en la sección 2.9, donde se propone usar la semilla $\hat{\mathbf{e}}_\pm$ para generar polarización preferencialmente circular. De esta forma, existen dos formas para generar polarización circular.

3.5.3. Contenido rotacional

Con base en las ecuaciones (3.2.7a) y (3.2.7b) se determina el contenido rotacional de las nuevas soluciones (3.5.1a) y (3.5.1b), la helicidad es

$$\frac{c}{\mu} \varrho_{AC} = \pm \frac{\varepsilon}{k^2 \omega h_1^2} \left[\left(\frac{3k_z^2}{k^2} - 1 \right) (\partial_\sigma^2 + \partial_\tau^2) + (k^2 - k_z^2) \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \right] \\ \left((P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))^2 + (P_{oe}(a, \tau, \sigma) + P_{eo}(a, \tau, \sigma))^2 \right), \quad (3.5.4a)$$

esta cantidad muestra una simetría entre los primero dos términos, de hecho, en el límite paraxial, estos dos términos son iguales, y el tercer término se anula. El flujo de helicidad es

$$\frac{c}{\mu} \Phi_{AC} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_z}{h_1 \omega k^2} \left[\left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\tau - \partial_\tau \hat{\mathbf{e}}_\sigma) \pm \frac{2k_z^2}{h_1 k^3} (\partial_\sigma^2 + \partial_\tau^2) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ \left((P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma))^2 + (P_{oe}(a, \tau, \sigma) + P_{eo}(a, \tau, \sigma))^2 \right), \quad (3.5.4b)$$

donde la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$ es la de mayor peso, en comparación con las otras componentes, ya que en el límite paraxial, el flujo es paralelo a la dirección de propagación. En este límite, la magnitud del flujo es proporcional a la helicidad, tal como se mostró en la ecuación (3.4.4), en donde se trabajó con las soluciones originales. Para el caso donde se trabajó con las soluciones originales \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, ningún término en la helicidad se elimina, sin embargo, en la ecuación (3.5.4a), el último término se cancela en el límite paraxial. Dado que en el límite paraxial, las nuevas soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} está circularmente polarizadas sobre el plano cartesiano, es evidente que el flujo se encuentra sólo en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_z$, ya que este es el caso que reporta [2] para polarización circular.

3.6. Polarización preferencialmente elíptica

En el caso anterior, el nuevo estado \mathbf{E}_{φ_1} se construyó como $\mathbf{E}_{\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{E}'_{\varphi_1} \pm i \mathbf{E}'_{\varphi_2})$, sin embargo, este estado \mathbf{E}_{φ_1} se puede generalizar como

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \varphi'_1 \mathbf{E}_{\varphi_1} + \varphi'_2 \mathbf{E}_{\varphi_2}, \quad (3.6.1)$$

donde φ'_1 y $\varphi'_2 \in \mathbb{C}$, y cumplen la condición $|\varphi'_1|^2 + |\varphi'_2|^2 = 1$, lo cual implica la conservación de la energía a pesar de tener diferentes estados de polarización. Si $\varphi'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\varphi'_2 = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$, se obtiene el caso anterior. Si ahora estos parámetros son

$$\varphi'_1 = \frac{u_a}{\sqrt{2}}, \quad \varphi'_2 = \pm \frac{i u_b}{\sqrt{2}},$$

donde u_a y u_b son el semi eje mayor y menor de una elipse, respectivamente.

El nuevo estado \mathbf{E}_{φ_1} con base en la ecuación (3.6.1) es

$$\mathbf{E}_{\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{h_1 k} \left(- \left(u_a \frac{ik_z}{k} \partial_\tau \pm u_b \partial_\sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau + \left(-u_a \frac{ik_z}{k} \partial_\sigma \pm u_b \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \right) \right. \\ \left. + u_a \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (3.6.2a)$$

el semieje u_b se encuentra contenido en el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$ y el semieje u_a se encuentra en todo el espacio.

El nuevo estado \mathbf{E}_{φ_2} , construido a partir del rotacional de la ecuación (3.6.2a) es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi_2} = & \frac{i}{\sqrt{2}kh_1} \left[\left(u_a \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) \partial_\sigma \mp u_b \frac{ik_z}{k} \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau \right. \\ & \left. + \left(\mp u_b \frac{ik_z}{k} \partial_\sigma - u_a \left(1 - \frac{2k_z^2}{k^2} \right) \partial_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \pm \frac{u_b}{h_1 k} (k^2 - k_z^2) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ & [P_e(a, \tau, \sigma) - P_o(a, \tau, \sigma) + i(P_{eo}(a, \tau, \sigma) + P_{oe}(a, \tau, \sigma))] e^{i(k_z z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.6.2b)$$

Al igual que en el caso anterior, se puede calcular la helicidad y el flujo de helicidad, sin embargo, estas cantidades serán muy similares a las reportadas en la sección anterior. Cuando $u_a = u_b = 1$, se tendrán los resultados que se reportaron anteriormente.

A lo largo de esta primera parte, se han obtenido resultados muy interesantes. Desde la solución \mathbf{E}_{φ_1} con base en la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, la cual está elípticamente polarizada en un plano que involucra las tres componentes vectoriales, donde su proyección sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ es polarización lineal y las proyecciones sobre los planos restantes son polarizaciones elípticas.

Otro resultado interesante reside en el vector de Poynting, ya que el vector de Poynting real resultó tener contribución en las tres componentes vectoriales, sin embargo, al tomar su promedio temporal; la contribución resultante sólo apunta en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_z$. En ondas planas, el vector de Poynting real, sólo tiene contribución en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_z$, la cual corresponden con la dirección de propagación; al tomar su promedio temporal, la contribución se mantiene. Surge la pregunta, ¿por qué las componentes $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ se anulan, al tomar el promedio temporal?

Al momento de calcular el contenido rotacional con base en los campos \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} , con la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, resultó que dichas soluciones ofrecen información de momento angular en el campo eléctrico y magnético

Parte II

Polarización local

Capítulo 4

Polarización

Supongamos que tenemos un campo eléctrico \mathbf{E} , donde hay dos ondas linealmente polarizadas con amplitudes a_x y a_y , que se propagan a lo largo del eje z , estas ondas se encuentran en planos mutuamente perpendiculares, con una diferencia de fase $\delta = \delta_2 - \delta_1$ entre ellas. La fase δ_2 corresponde a la fase inicial de la componente y , y la fase δ_1 corresponde a la fase inicial de la componente x del campo \mathbf{E} . Se toman los planos $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$ y $\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$ como los planos de polarización. El campo eléctrico se puede describir como [33]

$$\mathbf{E} = a_x \cos(\tau + \delta_1) \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \cos(\tau + \delta_2) \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (4.0.1a)$$

o también representarse en su notación compleja

$$\mathbf{E} = a_x e^{i(\tau + \delta_1)} \hat{\mathbf{e}}_x + a_y e^{i(\tau + \delta_2)} \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (4.0.1b)$$

con $\tau = kz - \omega t$. Observar que se está tomando el caso más general, en donde $a_x \neq a_y$ y δ puede tomar cualquier valor. Si se modifican las fases iniciales de la ecuación (4.0.1a), es decir, se asocia una diferencia de fase general δ a una sola componente del campo \mathbf{E} , entonces

$$\mathbf{E} = a_x \cos \tau \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \cos(\tau + \delta) \hat{\mathbf{e}}_y,$$

o en su notación compleja

$$\mathbf{E} = (a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y e^{i\delta} \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i\tau}. \quad (4.0.2a)$$

La expresión (4.0.2a) puede tomar diferentes tipos de polarización como, lineal, circular o elíptica. Por ejemplo, para $\delta = \pi n$ con $n = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$ el campo eléctrico se convierte en polarización lineal y cuando $\delta = 0$ y $a_x = a_y$, la expresión se convierte en polarización circular. Cuando el valor de δ es diferente a estos valores, el campo eléctrico es polarización elíptica.

Al parametrizar la ecuación (4.0.2a) y normalizar la intensidad del campo eléctrico como $a_x^2 + a_y^2 = 1$, el campo se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \left(a_x \hat{\mathbf{e}}_x + \sqrt{1 - a_x^2} e^{i\delta} \hat{\mathbf{e}}_y \right) e^{i\tau},$$

y su parte real es

$$\mathbf{E}^{\mathbb{R}} = a_x \cos \tau \hat{\mathbf{e}}_x + \sqrt{1 - a_x^2} \cos (\tau + \delta) \hat{\mathbf{e}}_y.$$

Al modificar a_x y δ se cubrirán todos los estados de polarización posibles en el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$. En la figura 4.1 se muestran algunos estados de polarización.

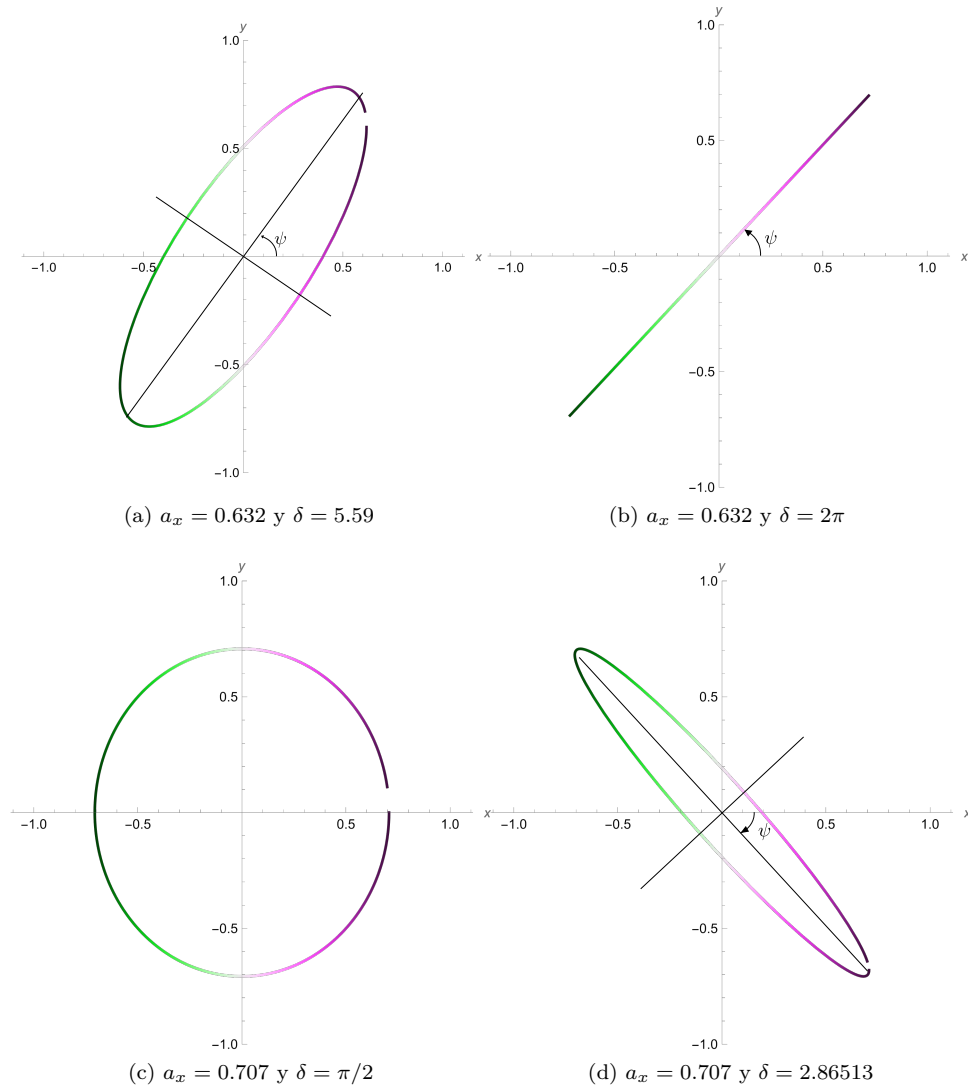


Figura 4.1: Polarización del campo eléctrico para diferentes valores de a_x y δ . Estos valores modifican el estado de polarización del campo. El ángulo ψ representa la inclinación respecto al eje x .

4.1. Polarización elíptica

Se renombra la componente \hat{e}_y del campo (4.0.1a) como E_{0y} , al expandirla se obtiene

$$E_{0y} = a_y \cos \tau \cos \delta_2 - a_y [1 - \cos^2 \tau]^{1/2} \sin \delta_2, \quad (4.1.1a)$$

de la misma, se renombra la componente \hat{e}_x como E_{0x} , y se expande

$$E_{0x} = a_x \cos \tau \cos \delta_1 - a_x [1 - \cos^2 \tau]^{1/2} \sin \delta_1, \quad (4.1.1b)$$

al tomar el cuadrado de las expresiones (4.1.1a) y (4.1.1b)

$$\left(\frac{E_{0x}}{a_x}\right)^2 = \cos^2 \tau \cos^2 \delta_1 + (1 - \cos^2 \tau) \sin^2 \delta_1 - 2 \cos \tau \cos \delta_1 \sin \delta_1 \sin \tau, \quad (4.1.2a)$$

$$\left(\frac{E_{0y}}{a_y}\right)^2 = \cos^2 \tau \cos^2 \delta_2 + (1 - \cos^2 \tau) \sin^2 \delta_2 - 2 \cos \tau \cos \delta_2 \sin \delta_2 \sin \tau. \quad (4.1.2b)$$

Posteriormente se toma la suma de los cuadrados

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_{0x}}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_{0y}}{a_y}\right)^2 &= \cos^2 \tau (\cos^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_2 - \sin^2 \delta_1 - \sin^2 \delta_2) \\ &\quad - 2 \cos \tau \sin \tau (\cos \delta_1 \sin \delta_1 + \cos \delta_2 \sin \delta_2) \\ &\quad + (\sin^2 \delta_1 + \sin^2 \delta_2), \end{aligned}$$

se toma una diferencia de fase relativa entre ambas componentes, se puede decir que la diferencia está asociada a una sola componente, de tal forma que $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = \delta$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_{0x}}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_{0y}}{a_y}\right)^2 &= \cos^2 \tau (1 + \cos^2 \delta - \sin^2 \delta) \\ &\quad - 2 \cos \tau \sin \tau (\cos \delta \sin \delta) + \sin^2 \delta, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

al distribuir los términos y escribir el $\sin^2 \delta$ como $\sin^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta$, se llega a

$$\left(\frac{E_{0x}}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_{0y}}{a_y}\right)^2 = 2 \cos^2 \tau \cos \delta - 2 \cos \tau \sin \tau (\cos \delta \sin \delta) + \sin^2 \delta,$$

se factorizan términos en común

$$\left(\frac{E_{0x}}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_{0y}}{a_y}\right)^2 = 2 \cos \delta \cos \tau (\cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta) + \sin^2 \delta.$$

El término del paréntesis es proporcional al producto de las componentes \hat{e}_x y \hat{e}_y del campo eléctrico, ya que

$$\begin{aligned} \frac{E_{0x} E_{0y}}{a_x a_y} &= \cos \tau \cos (\tau + \delta) \\ &= \cos \tau (\cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta), \end{aligned}$$

con lo que finalmente se obtiene la expresión

$$\frac{E_{0x}^2}{a_x^2} + \frac{E_{0y}^2}{a_y^2} - \frac{2E_{0x}E_{0y}}{a_x a_y} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (4.1.4)$$

La expresión (4.1.4) corresponde a la ecuación implícita de una elipse, la cual se encuentra inclinada respecto al eje x . La inclinación y el valor de los semiejes de la elipse, dependen de los valores de δ , a_x y a_y . Para verificar esta afirmación, se rota el campo eléctrico $\mathbf{E} = E_{0x} \hat{\mathbf{e}}_x + E_{0y} \hat{\mathbf{e}}_y$, ψ grados respecto al sistema original $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$, a un nuevo sistema de referencia $\hat{\mathbf{e}}_\xi$, $\hat{\mathbf{e}}_\eta$. Esto se consigue con la siguiente transformación

$$E_\xi = -E_{0x} \sin \psi + E_{0y} \cos \psi, \quad (4.1.5a)$$

$$E_\eta = E_{0x} \cos \psi + E_{0y} \sin \psi. \quad (4.1.5b)$$

Se sabe que las ecuaciones de la elipse en el nuevo sistema de referencia $\hat{\mathbf{e}}_\xi$, $\hat{\mathbf{e}}_\eta$ son [33]

$$E_\xi = a \cos(\tau + \delta_0), \quad (4.1.5c)$$

$$E_\eta = \pm b \sin(\tau + \delta_0), \quad (4.1.5d)$$

donde a y b representan las nuevas amplitudes en este nuevo sistema. Los dos signos en la ecuación (4.1.5d) hacen referencia a las dos posibles orientaciones en esa dirección del campo eléctrico [33]. La fase δ_0 representa una fase inicial en estas componentes.

Al hacer un análisis entre las ecuaciones (4.1.5a) y (4.1.5b) con (4.1.5c) y (4.1.5d), se obtienen los siguientes resultados [33]

$$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2, \quad (4.1.6a)$$

$$\tan 2\psi = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2}, \quad (4.1.6b)$$

$$\sin 2\chi = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2}. \quad (4.1.6c)$$

El ángulo ψ representa la inclinación del semieje mayor de la elipse respecto al eje x , y la tangente del ángulo χ representa el cociente entre el semieje b y a . El motivo de escribir el seno de χ y no la tangente, se debe a la relación directa con los parámetros de Stokes, que se muestran a continuación.

4.2. Parámetros de Stokes

Los parámetros de Stokes para una onda plana cuasi-monocromática se definen como [33]

$$S_0 = \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle, \quad (4.2.1a)$$

$$S_1 = \langle a_x^2 \rangle - \langle a_y^2 \rangle, \quad (4.2.1b)$$

$$S_2 = \langle 2a_x a_y \cos \delta \rangle, \quad (4.2.1c)$$

$$S_3 = \langle 2a_x a_y \sin \delta \rangle. \quad (4.2.1d)$$

Estos parámetros en término de intensidades son [33]

$$S_0 = I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0), \quad (4.2.2a)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \quad (4.2.2b)$$

$$S_2 = I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \quad (4.2.2c)$$

$$S_3 = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2). \quad (4.2.2d)$$

Donde el primero número en el paréntesis corresponde a la orientación de un polarizador lineal, y el segundo al retardo que se le aplica a la luz. La determinación de estos parámetros requiere un polarizador lineal y una placa retardadora de $\lambda/4$.

El grado de polarización de la luz se define como [33]

$$P = \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{tot}}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0},$$

donde I_{pol} representa la intensidad de luz polarizada, y I_{tot} la intensidad total.

Estos parámetros se relacionan inmediatamente con las ecuaciones (4.1.6b) y (4.1.6c), de la siguiente forma [33]

$$\tan 2\psi = \frac{S_2}{S_1}, \quad 0 \leq \psi < \pi, \quad (4.2.3)$$

$$\sin 2\chi = \frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}, \quad -\pi/4 < \chi \leq \pi/4. \quad (4.2.4)$$

Los parámetros de Stokes determinan el estado de polarización de la luz, ya que a partir de éstos, se pueden determinar los ángulos ψ y χ .

4.3. Esfera de Poincaré

La esfera de Poincaré es un modelo que permite la representación de los estados de polarización de la luz, y se construye a partir de la definición de los parámetros de Stokes [34, 35, 36, 37, 33]

$$s_1 = \frac{S_1}{S_0} = \cos 2\chi \cos 2\psi, \quad (4.3.1a)$$

$$s_2 = \frac{S_2}{S_0} = \cos 2\chi \sin 2\psi, \quad (4.3.1b)$$

$$s_3 = \frac{S_3}{S_0} = \sin 2\chi, \quad (4.3.1c)$$

donde S_0 , S_1 , S_2 y S_3 son los parámetros de Stokes. Cuando la luz está completamente polarizada se cumple $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$, si no fuese el caso, los parámetros se tienen que normalizar respecto a la intensidad de luz polarizada $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$. Se considera un campo eléctrico, donde dos ondas planas se propagan en la dirección z . En el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ que se encuentra oscilando el campo eléctrico.

Para todos los estados de polarización, el primer parámetro de Stokes $s_0 = 1$ (teniendo en cuenta la normalización y considerar luz polarizada). La polarización lineal horizontal (paralela al eje x) tiene asociado los parámetros, $s_1 = 1$ y $s_2 = s_3 = 0$. Los parámetros $s_1 = -1$ y $s_1 = s_3 = 0$ describen polarización vertical (paralela el eje y). Y los parámetros $s_2 = 1$ y $s_1 = s_3 = 0$ describen polarización con una inclinación de 45° respecto al eje x .

La esfera de Poincaré se encuentra en el espacio de los parámetros de Stokes, con los ejes s_1 , s_2 y s_3 . El ángulo ψ se mide respecto al eje s_1 , y está definido en $0 \leq \psi < \pi$. El ángulo χ se mide respecto al plano s_1, s_2 , y está definido en los valores $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$, cuando el ángulo χ es negativo aborda los estados con polarización izquierda, y cuando χ es positivo cubre los estados con polarización derecha. En la figura 4.2 se muestra una representación de la esfera de polarización de Poincaré.

Las ecuaciones (4.3.1a)–(4.3.1c) están descritas como función de ángulos dobles, es por este motivo que aunque $0 \leq \psi < \pi$, este cubre todas las posibles orientaciones sobre el ecuador de la esfera. El ángulo χ también está descrito como ángulo doble, a pesar de que $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$, aborda todas las elipticidades a lo largo del hemisferio de la esfera debido a este factor.

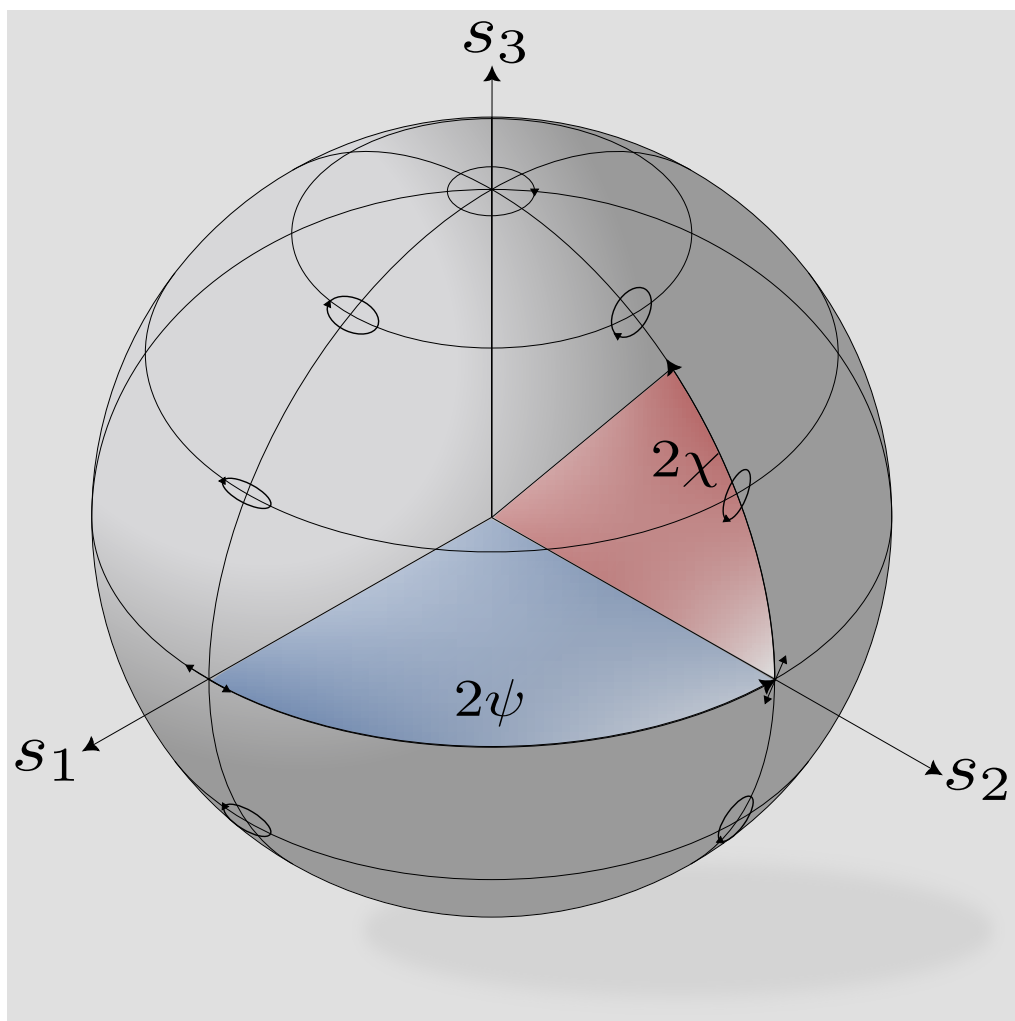


Figura 4.2: Esfera de Polarización de Poincaré

Capítulo 5

Ondas planas

5.1. Parámetros de la polarización

Para ondas planas, la solución escalar compleja a la ecuación de Helmholtz es $\psi = ae^{i\varphi}$, donde a representa la amplitud, la fase $\varphi = kz - \omega t$, donde k es la magnitud del vector de onda, ω la frecuencia angular y t el tiempo. El campo eléctrico (1.0.1a) se convierte en [2]

$$\mathbf{E} = \wp_1 \left(\psi \hat{\mathbf{u}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \psi \hat{\mathbf{k}} \right) - \wp_2 \psi \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}} \quad (5.1.1)$$

con $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ y $\hat{\mathbf{u}}$ hace referencia a los vectores unitarios del sistema cartesiano. Al proponer al vector \mathbf{U} como polarización elíptica $\mathbf{U} = (u_{0x}\hat{\mathbf{e}}_x \mp u_{0y}\hat{\mathbf{e}}_y)\psi$. Con la condición anterior se fija que la intensidad sea la misma para cualquier polarización elíptica, $\psi = E_0 e^{i\varphi}$ con E_0 la amplitud. La ecuación (5.1.1) es [2]

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\varphi} (\wp_1 u_{0x} \mp i\wp_2 u_{0y}) \hat{\mathbf{e}}_x + E_0 e^{i\varphi} (-\wp_2 u_{0x} \mp i\wp_1 u_{0y}) \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (5.1.2)$$

donde \wp_1 y $-\wp_2$ son las proyecciones $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ de un vector unitario alineado con el semi eje mayor de la elipse sobre el eje x , u_{0x} y u_{0y} representan el semi eje mayor y menor de la elipse respectivamente. Si u_{0x} y u_{0y} son positivos, el signo negativo hace referencia a la polarización derecha, y el signo positivo a polarización izquierda. Los parámetros que describen la polarización elíptica cumplen [2]

$$\begin{aligned} \wp_1^2 + \wp_2^2 &= 1, \quad 0 \leq \wp_1^2 \leq 1; \\ u_{0x}^2 + u_{0y}^2 &= 1, \quad 0 \leq u_{0x}^2 \leq 1. \end{aligned}$$

La parte real de \mathbf{E} es

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 (\wp_1 u_{0x} \cos \varphi \pm \wp_2 u_{0y} \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_x \\ &+ E_0 (-\wp_2 u_{0x} \cos \varphi \pm \wp_1 u_{0y} \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Cuando se modifica u_{0x} , cambia la relación entre los semiejes de la elipse, por otro lado, cuando se modifica \wp_1 , cambia la inclinación del semieje mayor de la elipse respecto al eje x . Estos parámetros son independientes, relacionándose directamente con los ángulos ψ y χ que caracterizan a la esfera de Poincaré, en contraste con el tratamiento usual donde quedan acoplados [33].

Los términos de polarización \wp_1 y $-\wp_2$ de la ecuación (5.1.2) se factorizan

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\varphi} \wp_1 (u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_x \mp i u_{0y} \hat{\mathbf{e}}_y) + E_0 e^{i\varphi} \wp_2 (\mp i u_{0y} \hat{\mathbf{e}}_x - u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_y).$$

Los términos de los paréntesis son polarizaciones elípticas alineadas con el sistema $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ y son ortogonales, porque $(u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_x \mp i u_{0y} \hat{\mathbf{e}}_y) \cdot (\mp i u_{0y} \hat{\mathbf{e}}_x - u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_y) = 0$. Si se modifica \wp_1 y $-\wp_2$, la elipticidad se mantiene pero rotan los semiejes de la elipse en contra de las manecillas del reloj, en el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ con un ángulo

$$\psi = -\arctan\left(\frac{\wp_2}{\wp_1}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \psi \leq \frac{\pi}{2} \bmod \pi. \quad (5.1.4)$$

En geometría analítica a partir de la definición de los semiejes de la elipse, se introduce el ángulo χ [38]

$$\chi = \pm \arctan\left(\frac{u_{0y}}{u_{0x}}\right), \quad -\frac{\pi}{4} < \chi \leq \frac{\pi}{4}. \quad (5.1.5)$$

Los ángulos ψ y χ se representan en la figura 5.1. Es posible obtener expresiones para los ángulos dobles, aunque en este procedimiento son innecesarias.

$$\tan 2\psi = -\frac{2\wp_1\wp_2}{\wp_1^2 - \wp_2^2},$$

$$\tan 2\chi = \frac{2u_{0x}u_{0y}}{u_{0x}^2 - u_{0y}^2}.$$

La expresión (5.1.2) surge de la simetría Heaviside Larmor, la cual, la cual se aborda en [26, 2, 32], si $\wp_1 = 1$ y $\wp_2 = 0$, la expresión (5.1.2) resulta polarización elíptica cuyos semiejes se encuentran alineados con el sistema de referencia $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$.

En el análisis de Born & Wolf, tal y como se planteó en el capítulo anterior, se parte de la expresión del campo eléctrico, las cuales son dos ondas planas linealmente polarizadas en planos mutuamente perpendiculares [33]

$$\mathbf{E} = a_x \cos(\tau + \delta_1) \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \cos(\tau + \delta_2) \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (5.1.7)$$

Se modifica δ para obtener distintos estados de polarización, sin embargo, modifica tanto elipticidad como la orientación de la elipse, de manera que estas cantidades se encuentran acopladas.

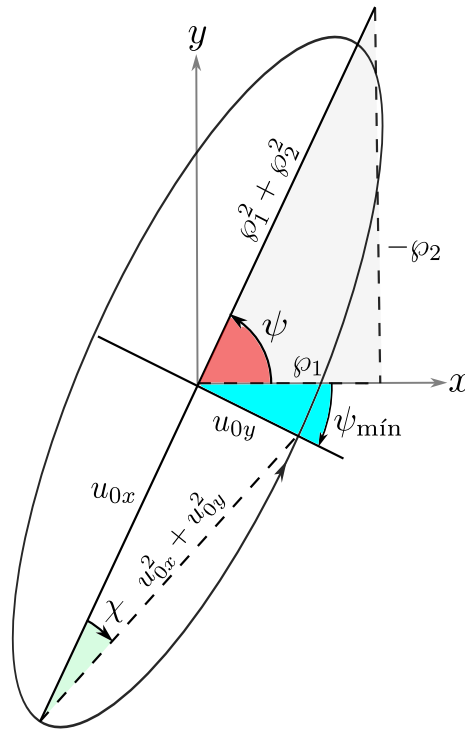


Figura 5.1: Elipse con polarización izquierda. El ángulo ψ del eje mayor respecto al eje x se encuentra sólo en términos de ϕ_1 y $-\phi_2$. El ángulo χ se encuentra en términos de u_{0x} y u_{0y} .

Para buscar una relación directa entre las ecuaciones (5.1.3) y (5.1.7), sólo es necesario expandir los ángulos de (5.1.7) e igualar los coeficientes

$$a_x \cos \delta_1 = E_0 \wp_1 u_{0x}, \quad (5.1.8a)$$

$$-a_x \sin \delta_1 = \pm E_0 \sqrt{1 - \wp_1^2} \sqrt{1 - u_{0x}^2}, \quad (5.1.8b)$$

$$a_y \cos \delta_2 = -E_0 \sqrt{1 - \wp_1^2} u_{0x}, \quad (5.1.8c)$$

$$-a_y \sin \delta_2 = \pm E_0 \wp_1 \sqrt{1 - u_{0x}^2}. \quad (5.1.8d)$$

Al tomar el cociente entre las ecuaciones (5.1.8b) y (5.1.8a) se obtiene

$$\tan \delta_1 = \mp \frac{\sqrt{1 - \wp_1^2} \sqrt{1 - u_{0x}^2}}{\wp_1 u_{0x}} = \mp \frac{\wp_2 u_{0y}}{\wp_1 u_{0x}},$$

al despejar δ_1

$$\delta_1 = \mp \arctan \left(\frac{\wp_2 u_{0y}}{\wp_1 u_{0x}} \right). \quad (5.1.9)$$

De forma análoga, el cociente entre (5.1.8d) y (5.1.8c)

$$\tan \delta_2 = \pm \frac{\wp_1 \sqrt{1 - u_{0x}^2}}{\sqrt{1 - \wp_1^2} u_{0x}} = \pm \frac{\wp_1 u_{0y}}{\wp_2 u_{0x}},$$

se despeja δ_2

$$\delta_2 = \pm \arctan \left(\frac{\wp_1 u_{0y}}{\wp_2 u_{0x}} \right). \quad (5.1.10)$$

Con la definición de $\delta = \delta_2 - \delta_1$ se obtiene δ en términos de \wp_1 y u_{0x}

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_2 - \delta_1 = \arctan \left(\pm \frac{\wp_1 u_{0y}}{\wp_2 u_{0x}} \right) - \arctan \left(\mp \frac{\wp_2 u_{0y}}{\wp_1 u_{0x}} \right) \\ &= \pm \left(\arctan \left(\frac{\wp_1 u_{0y}}{\wp_2 u_{0x}} \right) + \arctan \left(\frac{\wp_2 u_{0y}}{\wp_1 u_{0x}} \right) \right). \end{aligned}$$

Con la identidad trigonométrica $\arctan \alpha + \arctan \beta = \arctan \left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} \right)$ y un poco de álgebra

$$\tan \delta = \pm \frac{u_{0x} u_{0y}}{\wp_1 \wp_2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)},$$

con las relaciones $\cos \delta = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \delta}$ y $\sin \delta = \tan \delta / \sqrt{1 + \tan^2 \delta}$, se obtiene

$$\cos \delta = \frac{\wp_1 \wp_2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)}{\sqrt{\wp_1^2 \wp_2^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)^2 + u_{0x}^2 u_{0y}^2}}, \quad (5.1.11)$$

$$\sin \delta = \frac{u_{0x} u_{0y}}{\sqrt{\wp_1^2 \wp_2^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)^2 + u_{0x}^2 u_{0y}^2}}. \quad (5.1.12)$$

Al tomar la suma del cuadrado de las ecuaciones (5.1.8a) y (5.1.8b)

$$a_x = E_0 \sqrt{(1 - \wp_1^2)(1 - u_{0x}^2) + \wp_1^2 u_{0x}^2} = E_0 \sqrt{a_2^2 u_{0y}^2 + \wp_1^2 u_{0x}^2}. \quad (5.1.13)$$

De forma análoga, al tomar la suma del cuadrado de las expresiones (5.1.8c) y (5.1.8d)

$$a_y = E_0 \sqrt{(1 - \wp_1^2) u_{0x}^2 + \wp_1^2 (1 - u_{0x}^2)} = E_0 \sqrt{\wp_2^2 u_{0x}^2 + \wp_1^2 u_{0y}^2}. \quad (5.1.14)$$

La suma de cuadrados de (5.1.13) y (5.1.14) es

$$\begin{aligned} a_x^2 + a_y^2 &= E_0^2 (\wp_1^2 u_{0x}^2 + \wp_2^2 u_{0y}^2) + E_0^2 (\wp_2^2 u_{0x}^2 + \wp_1^2 u_{0y}^2) \\ &= E_0^2 (\wp_1^2 (u_{0x}^2 + u_{0y}^2) + \wp_2^2 (u_{0x}^2 + u_{0y}^2)) = E_0^2. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Los resultados se resumen en [39]

$$\delta_1 = \mp \arctan \left(\frac{\wp_2 u_{0y}}{\wp_1 u_{0x}} \right), \quad (5.1.16a)$$

$$\delta_2 = \pm \arctan \left(\frac{\wp_1 u_{0y}}{\wp_2 u_{0x}} \right), \quad (5.1.16b)$$

$$\cos \delta = \frac{\wp_1 \wp_2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)}{\sqrt{\wp_1^2 \wp_2^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)^2 + u_{0x}^2 u_{0y}^2}}, \quad (5.1.16c)$$

$$\sin \delta = \frac{u_{0x} u_{0y}}{\sqrt{\wp_1^2 \wp_2^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)^2 + u_{0x}^2 u_{0y}^2}}, \quad (5.1.16d)$$

$$\tan \delta = \pm \frac{u_{0x} u_{0y}}{\wp_1 \wp_2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)}. \quad (5.1.16e)$$

$$a_x = E_0 \sqrt{\wp_2^2 u_{0y}^2 + \wp_1^2 u_{0x}^2}, \quad (5.1.16f)$$

$$a_y = E_0 \sqrt{\wp_2^2 u_{0x}^2 + \wp_1^2 u_{0y}^2}, \quad (5.1.16g)$$

Las expresiones (5.1.16a) y (5.1.16b) se pueden obtener a partir de la representación polar de la expresión (5.1.2).

Con base en la definición de los parámetros de Stokes en términos de las amplitudes a_x , a_y y la diferencia de fase δ [33, pp. 31]. Estos parámetros en términos de las nuevas variables son

$$S_0 = E_0^2 + 2I_{\text{nulo}}, \quad (5.1.17a)$$

$$S_1 = E_0^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2) (\wp_1^2 - \wp_2^2), \quad (5.1.17b)$$

$$S_2 = -2E_0^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2) \wp_1 \wp_2, \quad (5.1.17c)$$

$$S_3 = \pm 2E_0^2 u_{0x} u_{0y}. \quad (5.1.17d)$$

Donde $2I_{\text{multo}}$ representa la intensidad de luz depolarizada, en el capítulo 6 se dará más detalle a esta cantidad.

La representación usual del vector de Jones es [40] $\begin{pmatrix} a_x e^{i\delta_1} \\ a_y e^{i\delta_2} \end{pmatrix}$, y en términos de las variables de extremales es [39]

$$\begin{pmatrix} \wp_1 u_{0x} \mp i\wp_2 u_{0y} \\ -\wp_2 u_{0x} \mp i\wp_1 u_{0y} \end{pmatrix}, \quad (5.1.18)$$

cabe resaltar que el vector de Jones (5.1.18) ya está normalizado.

5.2. Ángulos de la polarización

Si $\wp_1 = 1$ y $\wp_2 = 0$, en la expresión (5.1.2), el campo es polarización elíptica, con el semieje mayor paralelo al eje x ($\psi = 0$),

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\varphi} (u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_x \mp i u_{0y} \hat{\mathbf{e}}_y).$$

Consideremos que esta onda incide a través de una placa retardadora de $\lambda/4$, que provoca un corrimiento de fase de $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ sobre su eje lento (se considera el eje y por convención), de esta manera se obtiene polarización lineal

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\varphi} (u_{0x} \hat{\mathbf{e}}_x \pm u_{0y} \hat{\mathbf{e}}_y),$$

con un ángulo de inclinación

$$\chi = \pm \arctan\left(\frac{u_{0y}}{u_{0x}}\right),$$

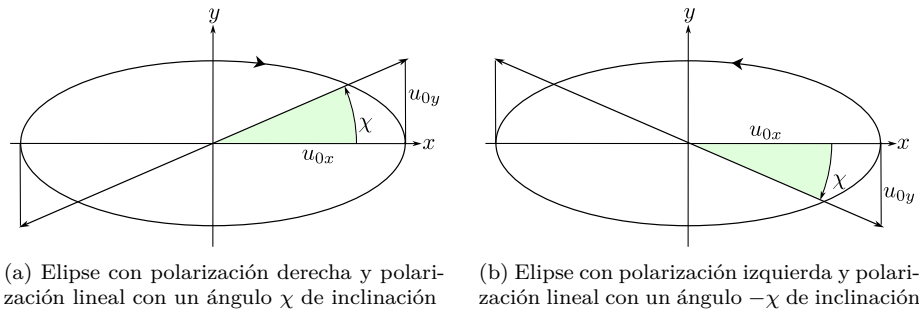
el cual corresponde a una de los ángulos de la esfera de Poincaré. Es común asociar al ángulo χ con la eccentricidad e

$$e = \sqrt{1 - \frac{u_{0y}^2}{u_{0x}^2}} = \sqrt{1 - \tan^2 \chi}.$$

En la figura 5.2 se muestran dos elipses con polarización derecha e izquierda, con sus semi ejes alineados con los ejes del sistema ($\psi = 0$). En estas imágenes se representa la transformación de polarización elíptica a lineal, donde la tangente del ángulo de inclinación de la polarización lineal corresponde al cociente del valor de los semiejes de la elipse, u_{0x} y u_{0y} . Consideremos polarización elíptica con el semieje mayor inclinado ψ grados respecto al eje x , y el semieje menor inclinado $\psi_{\text{mín}}$ grados respecto al eje x . Los ángulos ψ y $\psi_{\text{mín}}$ se relacionan como

$$\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ, \text{ mod } (90^\circ), \quad (5.2.1)$$

el motivo se coloca mod (90°) es porque las oscilaciones del campo eléctrico se están haciendo en dos cuadrantes diferentes, y su inclinación puede estar descrita por distintos ángulos.



(a) Elipse con polarización derecha y polarización lineal con un ángulo χ de inclinación (b) Elipse con polarización izquierda y polarización lineal con un ángulo $-\chi$ de inclinación

Figura 5.2: Transformación de polarización elíptica a lineal

Consideremos que la onda descrita por la ecuación (5.1.2) incide a través de la placa retardadora, sin embargo, para generar polarización lineal, el eje rápido de la placa debe estar inclinado ψ grados respecto al eje x , para que el corrimiento de fase ocurra sólo en la componente y del campo. En el sistema de referencia de la placa retardadora de $\lambda/4$, la elipse después de incidir en ella se transformará en polarización lineal con un ángulo de inclinación de χ (al igual que el caso anterior). Desde el punto de vista del sistema \hat{e}_x, \hat{e}_y , este ángulo tendrá una corrección que corresponde al desplazamiento de la placa retardadora respecto al eje x , el cual es ψ . La inclinación de la polarización lineal corresponde a la suma de los dos ángulos de la esfera de Poincaré

$$\psi + \chi.$$

En la figura 5.1 se muestra la relación inmediata entre los ángulos ψ y χ . Considerar que se analizó el caso más general, es cual es polarización elíptica con inclinación de ψ grados respecto al eje x . El contraste que existe con la figura 5.2 y 5.3 es el valor de ψ .

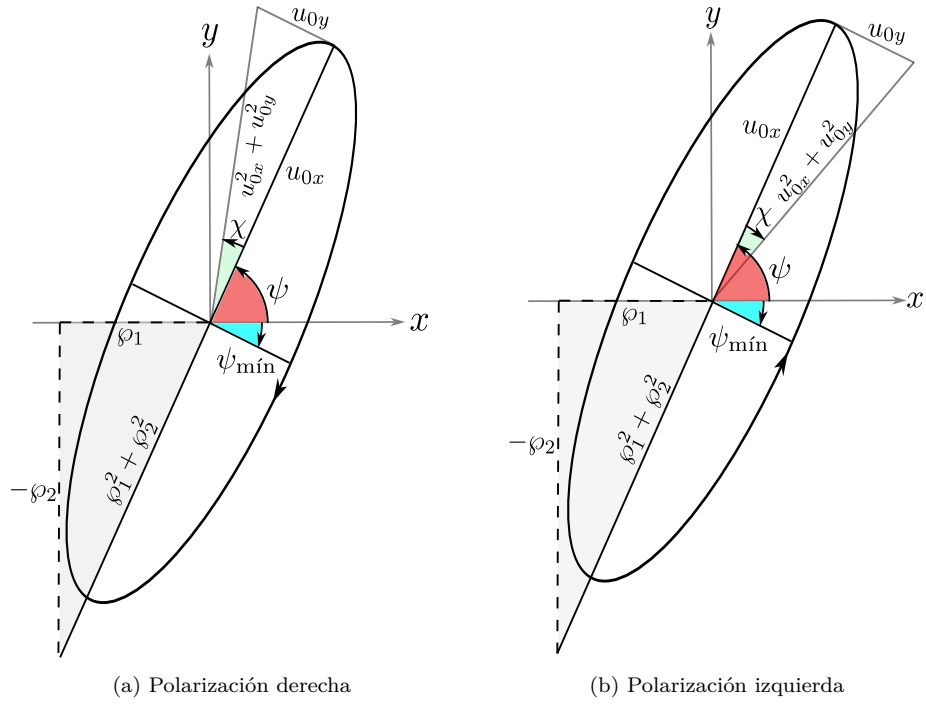


Figura 5.3: Representación de los ángulos ψ y χ en un mismo estado de polarización.

Capítulo 6

Métodos de extremales

Los procedimientos que se muestran a continuación, contempla un estado general de la polarización, el cual consiste en polarización elíptica con intensidad E_0^2 y luz depolarizada con intensidad I_d .

Antes de presentar los métodos se debe elegir un sistema de referencia para colocar los elementos ópticos, usualmente se elije al sistema \hat{e}_x, \hat{e}_y , donde el eje x es paralelo a la mesa óptica, para posteriormente alinear el eje del polarizador lineal paralelo al eje x , y el eje de propagación se toma como el eje z .

Se usa la convención de reportar los ángulos de los elementos ópticos y los estados de polarización como Born & Wolf [33], estando el observador viendo de frente al haz de luz. Se considera polarización derecha cuando el giro corresponde a la dirección de las manecillas del reloj \odot . La polarización izquierda se refieren cuando el giro es en dirección contraria a las manecillas del reloj \ominus .

Puesto que la luz depolarizada tiene la misma proyección en cualquier dirección, si incide luz depolarizada I_d a través del polarizador lineal, el 50 % de la energía incidente se absorbe en el polarizador lineal y el 50 % se transmite. El detector se ubica sobre el eje z después de todas las componentes.

6.1. Método híbrido

A continuación se muestra el procedimiento de medición

PROCEDIMIENTO DE MEDICIÓN

1. Se gira el polarizador lineal hasta obtener el máximo de intensidad (ver figura 6.1), en este punto se obtiene

$$I_{\text{máx}} = E_0^2 u_{0x}^2 + \frac{1}{2} I_d, \quad (6.1.1)$$

y se registra el ángulo del polarizador lineal ψ , que coincide con la inclinación del semieje mayor de la elipse y es directamente uno de los ángulos de la esfera de Poincaré.

- Se procede a girar el polarizador lineal hasta obtener el mínimo de intensidad, que será al ángulo $\psi_{\text{mín}} = \psi + 90^\circ$ (ver figura 6.2). Se obtiene

$$I_{\text{mín}} = E_0^2 u_{0y}^2 + \frac{1}{2} I_d. \quad (6.1.2)$$

- Sin mover el polarizador lineal se coloca un placa retardadora de $\lambda/4$ entre la fuente de luz y el polarizador lineal con el eje rápido a ψ grados (ver figura 6.3). Se gira el polarizador lineal en dirección contraria a las manecillas del reloj, si la intensidad aumenta será polarización izquierda, por el contrario, si la intensidad disminuye, será polarización derecha.
- Se continua girando el polarizador lineal en esa dirección hasta obtener una intensidad mínima (ver figura 6.3) que será

$$I_{\text{mulo}} = \frac{1}{2} I_d. \quad (6.1.3)$$

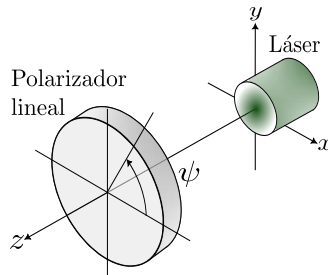


Figura 6.1: Ángulo de intensidad máxima.

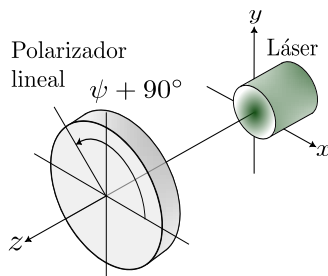


Figura 6.2: Ángulo de intensidad mínima.

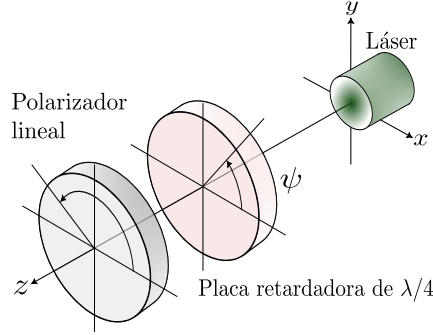


Figura 6.3: Determinación de quiralidad y luz depolarizada.

Tomando la suma de la intensidad máxima (6.1.1) y mínima (6.1.2) se obtiene

$$I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}} = E_0^2 (u_{0x}^2 + u_{0y}^2) + I_d = E_0^2 + 2I_{\text{nulo}}.$$

Restando $2I_{\text{nulo}}$ se obtiene la intensidad de la luz polarizada

$$E_0^2 = I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}} - 2I_{\text{nulo}}. \quad (6.1.4)$$

Con base en los resultados, de (6.1.1) y (6.1.3) se obtiene el semieje mayor de la elipse

$$u_{0x} = \sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}{E_0^2}}, \quad (6.1.5a)$$

de (6.1.1) y (6.1.3) se obtiene el semieje menor de la elipse

$$u_{0y} = \sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{E_0^2}}. \quad (6.1.5b)$$

Nótese que siempre se consideran las raíces positivas. Obtenidos los valores de u_{0x} y u_{0y} , se obtiene la razón de los semiejes de la elipse

$$\tan \chi = \pm \frac{u_{0y}}{u_{0x}}. \quad (6.1.6)$$

El signo positivo hace referencia a polarización derecha y el negativo a polarización izquierda, el cual se determinó en el cuarto paso del procedimiento de medición.

6.1.1. Precisiones sobre el método de extremales

El sello de este método consiste en la medición de intensidades máximas y mínimas, de ahí el nombre del método de extremales.

En la primera medición, si la intensidad no cambia con el giro del polarizador lineal, se podrá tener polarización circular, polarización circular y luz depolarizada, o luz completamente depolarizada.

En la segunda medición, si al ángulo $\psi_{\text{mín}}$ se registró una nula intensidad, se estará trabajando con polarización lineal completamente polarizada a ψ grados. Si fuese el caso donde $\psi_{\text{mín}} + 90^\circ \neq \psi$, es preferible tomar el valor de ψ como $\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ$. Desde un punto de vista experimental es mejor trabajar con mediciones de nulo.

En la tercera medición, la placa retardadora de $\lambda/4$ transforma la polarización elíptica incidente en polarización lineal. Para polarización incidente izquierda, la polarización después del retardador se ubicará en el segundo/cuarto cuadrante. Al girar el polarizador lineal contra las manecillas del reloj, la intensidad aumenta. Si la polarización fuese derecha, la intensidad disminuirá.

En las placas retardadoras comerciales usualmente existe una marca sobre los extremos del eje rápido. Si no fuese este el caso, en [41] se plantea una manera de medirlo, mediante la reflexión de un espejo metálico. El motivo de colocar el eje rápido de la placa retardadora de $\lambda/4$ a ψ grados es para que el semieje mayor de la elipse pase a través del eje rápido, para generar polarización lineal.

A la ecuación (6.1.6) se le asocian los signos positivo y negativo para poder hacer una distinción entre las diferentes direcciones del estado de polarización. En el procedimiento de medición se mostró la medición de los cuadrados u_{0x}^2 y u_{0y}^2 . Sin embargo, el signo del cociente entre u_{0x} y u_{0y} determina la quiralidad. Este signo se obtiene experimentalmente en la tercera medición.

Si en las primeras tres mediciones, la intensidad se mantiene constante, se podrá tener polarización circular, polarización circular y luz depolarizada, o luz completamente depolarizada. En el tercer paso se debe colocar la placa retardadora de $\lambda/4$ con el eje rápido a 45° . En la cuarta medición, si la luz se extingue con el polarizador lineal a 45° , la polarización del láser será polarización circular izquierda. Por el contrario, si la orientación del polarizador lineal fuese -45° , será polarización circular derecha. Si en la medición anterior no se registró una intensidad nula, sino un mínimo de intensidad, la luz está parcialmente polarizada, siendo el mínimo de intensidad $\frac{1}{2}I_d$.

En la cuarta medición, si I_{nulo} no cambia respecto a las mediciones anteriores ($I_{\text{máx}} = I_{\text{mín}} = I_{\text{nulo}}$) se tendrá luz completamente depolarizada. Para encontrar la intensidad de luz depolarizada es necesario separar la contribución de luz polarizada. Para separarla, la placa retardadora de $\lambda/4$ se coloca de manera que produce polarización lineal. El ángulo del polarizador lineal se coloca perpendicular al ángulo de salida de la polarización lineal obtenida del retardador. La contribución de luz remanente es entonces luz depolarizada $I_{\text{nulo}} = \frac{1}{2}I_d$. Si esta intensidad es cero $I_{\text{nulo}} = 0$, la luz está completamente polarizada.

6.2. Método de ángulos

En la sección 5.2 se mostró una relación directa entre los ángulos de la esfera de Poincaré, sin embargo, en ningún momento se planteó la idea de medir alguna intensidad para determinar estos ángulos.

La necesidad de cómo determinar χ , surge como consecuencia de que la suma de los ángulos de la esfera de Poincaré corresponde al ángulo de inclinación de la luz linealmente polarizada. Al colocar un polarizador lineal cruzado con la polarización lineal, el ángulo donde la intensidad será nula (si fuese luz completamente polarizada) o mínima (si fuese luz con una cantidad de luz depolarizada) corresponderá con

$$\theta_{\text{nulo}} = \psi_{\text{mín}} + \chi, \quad \rightarrow \quad \chi = \theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}}. \quad (6.2.1)$$

A continuación se plantea el método de medición, para determinar el estado de polarización. En el primer método se considerará luz polarizada, y aquí no es necesario medir ninguna intensidad. Sin embargo, para luz con una cantidad de luz depolarizada, es necesario hacer tres mediciones de intensidades, para determinar el estado de polarización.

6.2.1. Método para luz polarizada

El procedimiento para determinar el estado de polarización es

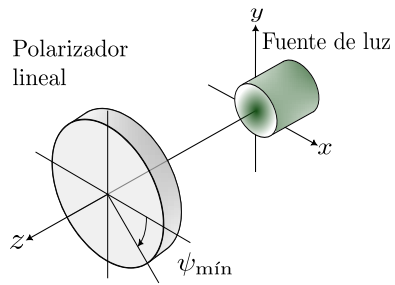
1. Se coloca el polarizador lineal alineado con el sistema \hat{e}_x, \hat{e}_y , y se comienza a girar (si la intensidad aumenta, girar en la dirección contraria) hasta obtener una intensidad mínima (ver figura 6.4a), se habrá encontrado $\psi_{\text{mín}}$.
2. Sin mover el polarizador lineal, se coloca una placa retardadora de $\lambda/4$ entre la fuente de luz y el polarizador lineal, con el lento a $\psi_{\text{mín}}$ grados respecto al eje x .
3. Se gira el polarizador lineal (si aumenta la intensidad girar en la dirección contraria) hasta obtener una intensidad nula (ver figura 6.4b), se habrá obtenido θ_{nulo} .

A partir del primer y segundo ángulo obtenido $\psi_{\text{mín}}$ y θ_{nulo} , respectivamente. Con la ecuación (6.2.1) se conoce el valor de χ .

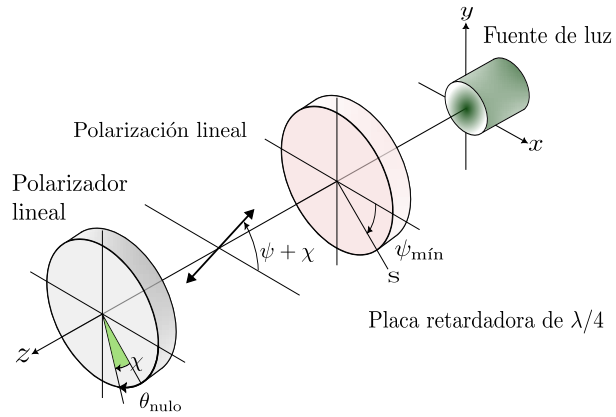
6.2.2. Método para luz polarizada con una cantidad de depolarizada

Se considera luz polarizada con un porcentaje de luz depolarizada, el procedimiento es el siguiente

1. Se coloca el polarizador lineal alineado con el sistema \hat{e}_x, \hat{e}_y , y se comienza a girar hasta obtener la intensidad máxima $I_{\text{máx}}$, se registra la intensidad máxima y el ángulo del polarizador, que corresponde a ψ .



(a) Ángulo para intensidad mínima



(b) Determinación del segundo ángulo de Poincaré

Figura 6.4: Esquemas para la determinación del estado de polarización de la luz

2. Se gira el polarizador lineal en la dirección contraria, hasta obtener la intensidad mínima (ver figura 6.4a), se registra la intensidad mínima $I_{\text{mín}}$ y el ángulo del polarizador, que corresponde a $\psi_{\text{mín}}$.
3. Sin mover el polarizador lineal, se coloca una placa retardadora de $\lambda/4$ entre la fuente de luz y el polarizador lineal, con el lento a $\psi_{\text{mín}}$ grados respecto al eje x .
4. Se gira el polarizador lineal (si aumenta la intensidad girar en la dirección contraria) hasta obtener una intensidad mínima (ver figura 6.4b), se registra el ángulo θ_{nulo} y la intensidad que corresponde a

$$I_{\text{nulo}} = \frac{1}{2}I_{\text{d}}.$$

El ángulo χ se determina a partir del segundo y cuarto paso, de tal forma que $\chi = \theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}}$.

Para encontrar el porcentaje de luz depolarizada, tomar el cociente

$$\%I_{\text{d}} = \frac{2I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}}.$$

La diferencia entre este procedimiento y el anterior, es que se deben medir intensidades, porque se considera luz polarizada con una cantidad de luz depolarizada. La cantidad de depolarización se determina midiendo intensidades.

6.3. Método de intensidades

Anteriormente se mostró el método para determinar el estado de polarización de la luz sin la necesidad de medir intensidades. Surge la pregunta de si se puede hacer el caso contrario, calcular el estado de polarización sólo con la medición de intensidades.

Este método se basa en los arreglos 6.1–6.3.

Considerando el caso más general, que es luz con una cantidad de luz depolarizada, la intensidad total es la suma de la intensidad máxima y mínima

$$I_{\text{total}} = I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}} = E_0^2 + I_{\text{d}},$$

con

$$I_{\text{máx}} = E_0^2 u_{0x}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{d}},$$

$$I_{\text{mín}} = E_0^2 u_{0y}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{d}},$$

$$E_0^2 = I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}} - 2I_{\text{nulo}}.$$

Al tomar el cociente entre las ecuaciones (6.1.1) y (6.1.2), se obtiene

$$\tan \chi = \pm \frac{u_{0y}}{u_{0x}} = \pm \sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}}. \quad (6.3.1)$$

La elipticidad χ es negativa si la intensidad decrece cuando el polarizador lineal se gira en dirección a las manecillas del reloj desde $\psi_{\text{mín}}$, con la placa retardadora de $\lambda/4$ en el arreglo.

El signo de χ es negativo si la intensidad decrece cuando el polarizador lineal se gira en dirección contraria a las manecillas del reloj desde $\psi_{\text{mín}}$. Se ha determinado la dirección de polarización.

La polarización del campo en la dirección x es

$$E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)} (\wp_1 u_{0x} \mp \wp_2 i u_{0y}).$$

La intensidad de E_x es

$$I_x - I_{\text{mulo}} = \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{E}_x^* = E_0^2 (\wp_1^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2) + u_{0y}^2), \quad (6.3.2)$$

donde la cantidad depolarizada se ha quitado de I_x .

Al despejar la proyección \wp_1 de la ecuación (6.3.2) se obtiene

$$\wp_1^2 = \frac{\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{E}_x^* - E_0^2 u_{0y}^2}{E_0^2 (u_{0x}^2 - u_{0y}^2)} = \frac{I_x - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}. \quad (6.3.3)$$

Las proyecciones cumplen la relación $\wp_1^2 + \wp_2^2 = 1$, entonces se puede determinar la proyección \wp_2

$$\wp_2^2 = \frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}. \quad (6.3.4)$$

Al tomar el cociente de las ecuaciones (6.3.3) y (6.3.4), se obtiene

$$\tan \psi = -\frac{\wp_2}{\wp_1} = \mp \sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_x - I_{\text{mín}}}}. \quad (6.3.5)$$

El signo de ψ es negativo si la intensidad decrece cuando el polarizador lineal se rota en dirección de las manecillas desde I_x a 0° hasta la intensidad mínima $I_{\text{mín}}$ a $\psi_{\text{mín}}$.

El signo de ψ es positivo si la intensidad decrece cuando el polarizador lineal se rota en dirección a las manecillas del reloj desde I_x (0°) hacia $I_{\text{mín}}$.

El estado de polarización quedó determinado sólo con la medición de intensidades, sin medir ángulos.

El método híbrido anterior resulta ser una combinación entre el método de ángulos e intensidades, sin embargo, ninguno recae en buscar los parámetros de Stokes.

6.4. Parámetros de Stokes sin medir intensidades

Anteriormente se determinaron los valores para ψ y χ con base en el registro de ángulos, entonces parámetros de Stokes se pueden determinar sin la necesidad de medir intensidades. Esto contrasta con la definición de estos parámetros,

los cuales se definen como una combinación lineal de intensidades. Con las ecuaciones (5.2.1) y (6.2.1), los parámetros de Stokes normalizados en términos de los ángulos θ_{nulo} y $\psi_{\text{mín}}$ son

$$s_1 = \cos 2\chi \cos 2\psi = -\cos [2(\theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}})] \cos (2\psi_{\text{mín}}), \quad (6.4.1a)$$

$$s_2 = \cos 2\chi \sin 2\psi = -\cos [2(\theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}})] \sin (2\psi_{\text{mín}}), \quad (6.4.1b)$$

$$s_3 = \sin 2\chi = \sin [2(\theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}})]. \quad (6.4.1c)$$

Estos parámetros para luz completamente polarizada se pueden determinar sólo con medir ángulos, sin la necesidad de medir intensidades.

Capítulo 7

Mediciones experimentales

El láser que se utilizó inicialmente está parcialmente polarizado, la contribución polarizada se muestra en la figura 5.1. Eventualmente, se modificó el estado de polarización de la luz para reportar diferentes estados de polarización, tanto lineal como elíptica.

Para comprobar la fiabilidad del método se realizaron mediciones con un láser Nd:YAG a 632 nm, con diferentes estados de polarización, elíptica, lineal, circular y una pequeña componente de luz depolarizada. Las incertidumbres se reportan con base en el criterio de resolución del instrumento, donde para lecturas digitales es ± 1 y para lecturas análogas la mitad de la escala mínima, para este caso ± 1 .

7.1. Método híbrido

Se comienza por introducir el polarizador lineal alineado con el eje x , dejando espacio entre él y la fuente, para posteriormente introducir un segundo elemento. Se gira el polarizador lineal en contra de las manecillas del reloj, hasta obtener la intensidad máxima $I_{\text{máx}} = 561$. Se registra el ángulo del polarizador lineal, en este caso 55° . Nótese que se ha obtenido el ángulo de la esfera de Poincaré ψ

Cantidad	Valor
$I_{\text{máx}}$	561 ± 1
ψ	$55^\circ \pm 1^\circ$
$I_{\text{mín}}$	56 ± 1
$\psi_{\text{mín}}$	$145^\circ \pm 1^\circ$
Quiralidad	-1
I_d	22 ± 1

Cuadro 7.1: Medición de las cantidades que permiten obtener la polarización de la luz.

de forma directa en la primer medición. Se vuelve a girar el polarizador lineal hasta obtener la intensidad mínima $I_{\text{mín}} = 56$ a un ángulo de 145° . Los ángulos ψ y $\psi_{\text{mín}}$ tienen una diferencia de 90° , no es necesario modificar ψ con base en $\psi_{\text{mín}}$, si este no fuera el caso, $\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ$.

Se coloca la placa retardadora de $\lambda/4$ entre el polarizador lineal y la fuente a 55° , y se comienza a girar el polarizador lineal en dirección contraria a las manecillas del reloj. La intensidad aumentó, indicando que es polarización izquierda, se continua girando el polarizador lineal hasta una intensidad mínima $I_{\text{nulo}} = 11$ a un ángulo de 309° .

La tabla 7.1 presenta las medidas obtenidas, correspondientes el desarrollo de extremales.

El porcentaje de luz depolarizada respecto a la máxima intensidad es

$$\% (2I_{\text{nulo}}) = \frac{22}{561 + 56} \times 100 = 3.5 \%,$$

la intensidad depolarizada E_0^2 es

$$E_0^2 = I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}} - 2I_{\text{nulo}} = 595 \pm 4.$$

donde su incertidumbre es la combinación lineal de las incertidumbres de $I_{\text{máx}}$, $I_{\text{mín}}$ y I_d .

Los semiejes de la elipse u_{0x} y u_{0y} con base en (6.1.1) y (6.1.5b) son.

$$u_{0x}^2 = 0.92 \pm 0.004, \quad (7.1.1a)$$

$$u_{0y}^2 = 0.075 \pm 0.002. \quad (7.1.1b)$$

La ecuación para la incertidumbre de u_{0x}^2 (y para las demás cantidades) se calcula mediante derivadas parciales para tener el error absoluto, la cual es es

$$\begin{aligned} \Delta u_{0x}^2 &= \left| \frac{I_{\text{máx}} - \frac{1}{2}I_d}{(E_0^2)^2} \right| \Delta E_0^2 \\ &+ \left| \frac{1}{E_0^2} \right| \Delta I_{\text{máx}} + \left| \frac{-\frac{1}{2}}{E_0^2} \right| \Delta I_d. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Se verifica que $u_{0x}^2 + u_{0y}^2 = 0.999$ el cual es muy cercano a uno, así mismo se obtiene el valor de χ

$$\chi = \arctan \left(-\sqrt{\frac{0.072}{0.92}} \right) = -15.96^\circ \pm 0.8^\circ.$$

Buscando la relación entre los semiejes

$$\begin{aligned} |u_{0y}| &= |\tan(-15.96)| |u_{0x}| \\ &= 0.28 |u_{0x}|. \end{aligned}$$

Cantidad	Valor
$I(0^\circ, 0)$	220 ± 5.5
$I(90^\circ, 0)$	398 ± 5.5
$I(45^\circ, 0)$	549 ± 5.5
$I(135^\circ, 0)$	70 ± 5.5
$I(45^\circ, \pi/2)$	162 ± 5.5
$I(135^\circ, \pi/2)$	469 ± 5.5

Cuadro 7.2: Intensidades registradas con base en el método de Born & Wolf.

El estado de polarización de la luz se determina por completo.

Valores complementarios

Otras variables se pueden calcular, dependiendo del formalismo que se utilice, aunque ya no sean necesarias, por ejemplo se obtienen las proyecciones del semieje mayor de la elipse \wp_1 y $-\wp_2$ con sus respectivas incertidumbres

$$\begin{aligned}\wp_1 &= \cos 55 = 0.57 \pm 0.01, \\ -\wp_2 &= \sin 55 = 0.81 \pm 0.01.\end{aligned}$$

Los parámetros de Stokes son

$$\begin{aligned}S_0 &= 617 \pm 6, \quad S_1 = -174 \pm 3, \\ S_2 &= 478 \pm 22, \quad S_3 = -296 \pm 6.\end{aligned}$$

El parámetro S_3 está definido como el producto de u_{0x} y u_{0y} . Sin embargo, como ambas cantidades se han considerado siempre positivas, este producto no define el signo, la quiralidad contiene esa información. Con base en la expresión (5.1.18) se calcula en vector de Jones normalizado

$$\begin{pmatrix} 0.54 + i 0.22 \\ -0.77 + i 0.15 \end{pmatrix}.$$

7.1.1. Método tradicional

Los resultados anteriores se contrastaron con las mediciones obtenidas por el método convencional. Con base en la tabla 7.2, se pueden encontrar los parámetros de Stokes

$$S_0 = I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0) = 618 \pm 11, \quad (7.1.4a)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0) = -178 \pm 11, \quad (7.1.4b)$$

$$S_2 = I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0) = 479 \pm 11, \quad (7.1.4c)$$

$$S_3 = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2) = -307 \pm 11. \quad (7.1.4d)$$

La parte depolarizada $\mathbf{S}^{(1)}$ es

$$\mathbf{S}^{(1)} = 21 \pm 7,$$

las componentes de la parte depolarizada tienen la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(1)} &= \frac{1}{I_{\text{tot}}} \left(S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, 0, 0, 0 \right) \\ &= (0.033, 0, 0, 0),\end{aligned}$$

con $I_{\text{tot}} = S_0$. Las componentes de la parte polarizada tienen la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(2)} &= \frac{(I_{\text{pol}}, S_1, S_2, S_3)}{I_{\text{pol}}} \\ &= (1, -0.29, 0.8, -0.51),\end{aligned}$$

con $I_{\text{pol}} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$. Los ángulos de la esfera de Poincaré ψ y χ son

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{S_2}{S_1} \right) = 55.19^\circ \pm 0.79^\circ, \quad (7.1.5a)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{S_3}{I_{\text{pol}}} \right) = -15.6^\circ \pm 0.8^\circ. \quad (7.1.5b)$$

Sea $\tan \chi = b/a$, donde b y a representan el semieje menor y semieje mayor de la elipse respectivamente. Se obtiene la relación entre los semiejes

$$\tan \chi = -0.28 = b/a \rightarrow |b| = 0.28|a|.$$

El grado de polarización es

$$P = \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{tot}}} = 0.96 \pm 0.04.$$

7.1.2. Comparación de resultados

En la tabla 7.3 se muestran los parámetros que determinan el estado de polarización, para ambos métodos.

	Método de extremales	Born & Wolf
D	0.039 ± 0.003	0.03 ± 0.01
P	0.960 ± 0.003	0.96 ± 0.04
ψ	$55^\circ \pm 1^\circ$	$55.19^\circ \pm 0.8^\circ$
χ	$-15.96 \pm 0.8^\circ$	$-15.6^\circ \pm 0.8^\circ$
RS	$ u_{0y} = 0.28 u_{0x} $	$ b = 0.28 a $

Cuadro 7.3: Comparación de resultados entre ambos métodos, D, P significan depolarización y polarización respectivamente y RS, la relación de semiejes.

En la tabla 7.3 se observa que los valores entre ambos procedimientos coinciden dentro del valor de sus incertidumbres. La figura 7.1 muestra el estado de polarización que se estuvo analizando.

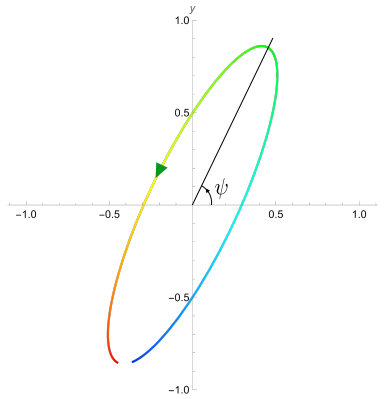


Figura 7.1: Elipse con polarización izquierda a una inclinación de ψ grados.

Los gráficos 7.2 y 7.3 ofrecen una comparación de ψ y χ para ambos métodos.

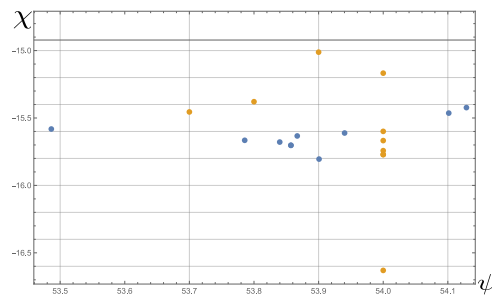


Figura 7.2: Dispersión de los valores de ψ y χ , los puntos color azul corresponden al método de Born & Wolf y los puntos anaranjados al método de extremales.

El gráfico 7.2 muestra una dispersión para los valores de ψ y χ (dichos valores se asocian a los resultados reportados anteriormente) por medio de los dos métodos. La coincidencia es notable, inclusive es difícil distinguir entre las dos mediciones.

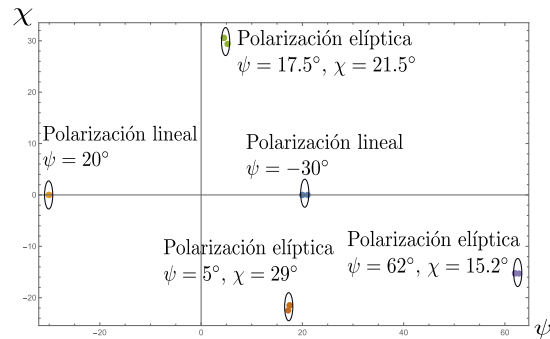


Figura 7.3: Diferentes estados de polarización abordados por ambos métodos. Las elipse representan las incertidumbres

El gráfico 7.3 muestra distintos estados de polarización con valores de ψ y χ , en esta gráfica ya es complicado distinguir la separación entre los punto. Se optó por no asociar cada punto a un método, porque para este gráfico no es necesario, lo que se pretende es mostrar la semejanza de los resultados de ψ y χ para ambos métodos.

P. Stokes	Extremales	B&W
S_0	617 ± 6	618 ± 11
S_1	-174 ± 3	-178 ± 11
S_2	478 ± 22	479 ± 11
S_3	-269 ± 6	-307 ± 11

Cuadro 7.4: Parámetros de Stokes con base en ambos métodos.

La tabla 7.4 muestra los parámetros de Stokes para ambos tratamientos, estos coinciden dentro del valor de sus incertidumbres.

Cabe mencionar que para verificar el método de extremales, se realizaron más de cincuenta medidas experimentales para cada estado, por lo que se tuvo una base de datos sólida al momento de reportar los estados de polarización.

A partir de este método se escribió el artículo [39].

7.2. Método de ángulos e intensidades

En esta sección se muestran resultados de diferentes estados de polarización. Los métodos de ángulos e intensidades se comparan favorablemente con el método tradicional. El motivo de tener juntos el método de ángulos e intensidades, es porque se comparan con el método tradicional, y por economía, los resultados del método tradicional se muestran sólo una vez.

7.2.1. Láser Nd:YAG

En la tabla 7.5 se muestra los dos ángulos registrados y la cantidad de intensidad depolarizada del láser. Al analizar los resultados de la tabla 7.5, se

Variable	Valor
$\psi_{\text{mín}}$	325°
θ_{nulo}	310°
I_d	22

Cuadro 7.5: Valores reportados con base el Láser Nd:Yag.

obtienen los ángulos de polarización

$$\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ = 55^\circ,$$

y

$$\chi = \theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}} = -50^\circ + 35^\circ = -15^\circ.$$

Además de la eccentricidad

$$e = \sqrt{1 - \tan^2 \chi} = \sqrt{1 - \tan^2 (-15.5)} = 0.96,$$

y la relación de semiejes

$$|u_{0x}| = |\tan (-15.5)| |u_{0y}| = 0.27 |u_{0y}|.$$

Intensidad	Valor
$I_{\text{máx}}$	561
$I_{\text{mín}}$	56
I_x	220
I_{nulo}	11

Cuadro 7.6: Intensidades reportadas con base el Láser Nd:Yag.

Con base en los resultados de la tabla 7.6 y las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.5), se determinan los ángulos ψ y χ

$$\chi = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}} \right) = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{56 - 11}{561 - 11}} \right) = -15.9^\circ,$$

$$\psi = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_x - I_{\text{mín}}}} \right) = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{561 - 220}{220 - 56}} \right) = 55.2^\circ.$$

Con base en el método de Born & Wolf se obtienen la tabla 7.7a con las intensidades correspondientes. Con los valores de la tabla 7.7b y las ecuaciones

Intensidad	Valor
$I(0^\circ, 0)$	220
$I(90^\circ, 0)$	398
$I(45^\circ, 0)$	549
$I(135^\circ, 0)$	70
$I(45^\circ, \pi/2)$	162
$I(135^\circ, \pi/2)$	469

(a) Intensidades reportadas con base el Láser Nd:Yag.

Parámetros de Stokes	Valor
s_0	1
s_1	-0.29
s_2	0.80
s_3	-0.51

(b) Parámetros de Stokes normalizados.

Cuadro 7.7: Valores obtenidos mediante el método de Born & Wolf.

(4.2.4)–(4.2.3), se calculan los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{-0.51}{\sqrt{0.29^2 + 0.8^2 + 0.51^2}} \right) = -15.5^\circ,$$

y

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{s_2}{s_1} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{0.8}{-0.29} \right) = 55^\circ,$$

que corresponden a los ángulos reportados por los métodos de ángulos e intensidades.

7.2.2. Polarización elíptica derecha, con pendiente positiva

En la tabla 7.8 se muestra los dos ángulos registrados y la cantidad de intensidad depolarizada del láser.

Variable	Valor
$\psi_{\text{mín}}$	339°
θ_{nulo}	5°

Cuadro 7.8: Ángulos mínimos.

Con los ángulos de la tabla 7.8, se obtienen los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ = 69^\circ,$$

y

$$\chi = \theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}} = 5 + 21^\circ = 26^\circ.$$

Además de la eccentricidad

$$e = \sqrt{1 - \tan^2 \chi} = \sqrt{1 - \tan^2 (26)} = 0.87,$$

Intensidad	Valor
$I_{\text{máx}}$	84
$I_{\text{mín}}$	21
I_x	29
I_{nulo}	0

Cuadro 7.9: Intensidades reportadas con base al método de intensidades.

y la relación de semejez

$$|u_{0x}| = |\tan(26)| |u_{0y}| = 0.48 |u_{0y}|.$$

Con base en los resultados de la tabla 7.9 y en las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.5), se determinan los ángulos ψ y χ

$$\chi = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}} \right) = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{21 - 0}{84 - 0}} \right) = 26.5^\circ,$$

$$\psi = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_x - I_{\text{mín}}}} \right) = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{84 - 29}{29 - 21}} \right) = 69.1^\circ.$$

Con base en el método de Born & Wolf se obtienen la tabla 7.10b con las intensidades correspondientes.

Intensidad	Valor
$I(0^\circ, 0)$	29
$I(90^\circ, 0)$	76
$I(45^\circ, 0)$	71
$I(135^\circ, 0)$	29
$I(45^\circ, \pi/2)$	93
$I(135^\circ, \pi/2)$	11

(a) Intensidades reportadas.

Parámetros de Stokes	Valor
s_0	1
s_1	-0.45
s_2	0.4
s_3	0.79

(b) Parámetros de Stokes.

Cuadro 7.10: Valores obtenidos mediante el método de Stokes.

Con los valores de la tabla 7.10b y las ecuaciones (4.2.4)–(4.2.3) se calculan los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{0.79}{\sqrt{0.45^2 + 0.4^2 + 0.79^2}} \right) = 26.1^\circ,$$

y

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{s_2}{s_1} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{0.4}{-0.45} \right) = 26.5^\circ,$$

que corresponden a los ángulos reportados anteriormente por el otro método.

7.2.3. Polarización elíptica izquierda, con pendiente positiva

En la tabla 7.11, se muestran los ángulos obtenidos con base el método de ángulos.

Variable	Valor
$\psi_{\text{mín}}$	317°
θ_{nulo}	292°

Cuadro 7.11: Ángulos mínimos.

Con los ángulos de la tabla 7.11, se obtienen los ángulos ψ y χ

$$\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ = 47^\circ,$$

y

$$\chi = \theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}} = -68.5^\circ + 43^\circ = -25^\circ.$$

Además de la eccentricidad

$$e = \sqrt{1 - \tan^2 \chi} = \sqrt{1 - \tan^2 (-25^\circ)} = 0.88,$$

y la relación de semiejes

$$|u_{0x}| = |\tan (-25^\circ)| |u_{0y}| = 0.46 |u_{0y}|.$$

Intensidad	Valor
$I_{\text{máx}}$	247
$I_{\text{mín}}$	55
I_x	143
I_{nulo}	0

Cuadro 7.12: Intensidades reportadas con base al método de intensidades.

Con base en los resultados de la tabla 7.12 y en las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.5), se determinan los ángulos ψ y χ

$$\chi = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}} \right) = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{55 - 0}{247 - 0}} \right) = -25.2^\circ,$$

$$\psi = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_x - I_{\text{mín}}}} \right) = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{561 - 220}{220 - 56}} \right) = 47.3^\circ.$$

Con base en el método de Born & Wolf se obtienen la tabla 7.13b con las intensidades correspondientes.

Intensidad	Valor
$I(0^\circ, 0)$	143
$I(90^\circ, 0)$	158
$I(45^\circ, 0)$	243
$I(135^\circ, 0)$	54
$I(45^\circ, \pi/2)$	35
$I(135^\circ, \pi/2)$	265

(a) Intensidades reportadas.

Parámetros de Stokes	Valor
s_0	1
s_1	-0.05
s_2	0.63
s_3	-0.77

(b) Parámetros de Stokes.

Cuadro 7.13: Valores obtenidos mediante el método de Stokes.

Con los valores de la tabla 7.13b y las ecuaciones (4.2.4)–(4.2.3) se calculan los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{-0.77}{\sqrt{0.05^2 + 0.63^2 + 0.77^2}} \right) = -25.2^\circ,$$

y

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{s_2}{s_1} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{0.62}{-0.04} \right) = 47.2^\circ,$$

que corresponden a los ángulos reportados por los métodos de ángulos e intensidades.

7.2.4. Polarización elíptica derecha, con pendiente negativa

Variable	Valor
$\psi_{\text{mín}}$	48°
θ_{nulo}	76°

Cuadro 7.14: Ángulos mínimos.

Analizando la tabla 7.14 se obtienen los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ = -42^\circ,$$

y

$$\chi = \theta_{\text{nulo}} - \psi_{\text{mín}} = 76^\circ - 48^\circ = 28^\circ.$$

Además de la eccentricidad

$$e = \sqrt{1 - \tan^2 \chi} = \sqrt{1 - \tan^2 (28)} = 0.84,$$

y la relación de semiejes

$$|u_{0x}| = |\tan(28)| |u_{0y}| = 0.53 |u_{0y}|.$$

Intensidad	Valor
$I_{\text{máx}}$	37
$I_{\text{mín}}$	11
I_x	25
I_{nulo}	0

Cuadro 7.15: Intensidades reportadas con base al método de intensidades.

Con base en los resultados de la tabla 7.15 y en las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.5), se determinan los ángulos ψ y χ

$$\chi = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}} \right) = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{11 - 0}{37 - 0}} \right) = 28.6^\circ,$$

$$\psi = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_x - I_{\text{mín}}}} \right) = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{37 - 25}{25 - 11}} \right) = -42.7^\circ.$$

Con base en el método de Born & Wolf se obtienen la tabla 7.16b con las intensidades correspondientes.

Intensidad	Valor
$I(0^\circ, 0)$	25
$I(90^\circ, 0)$	23
$I(45^\circ, 0)$	12
$I(135^\circ, 0)$	36
$I(45^\circ, \pi/2)$	41
$I(135^\circ, \pi/2)$	5

(a) Intensidades reportadas.

Parámetros de Stokes	Valor
s_0	1
s_1	0.04
s_2	-0.55
s_3	0.83

(b) Parámetros de Stokes.

Cuadro 7.16: Valores obtenidos mediante el método de Stokes.

Con los valores de la tabla 7.16b y las ecuaciones (4.2.4)–(4.2.3) se calculan los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{-0.83}{\sqrt{0.04^2 + 0.55^2 + 0.83^2}} \right) = 28.1^\circ,$$

y

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{s_2}{s_1} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-0.55}{0.04} \right) = -42.6^\circ,$$

que corresponden a los ángulos reportados por los métodos de ángulos e intensidades.

7.2.5. Polarización elíptica izquierda, con pendiente negativa

Variable	Valor
$\psi_{\text{mín}}$	69°
θ_{nulo}	54°

Cuadro 7.17: Ángulos mínimos.

Analizando la tabla 7.17 se obtienen los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\psi = \psi_{\text{mín}} + 90^\circ = 159^\circ \rightarrow -21^\circ,$$

y

$$\chi = \psi_{\text{mín}} - \theta_{\text{pol}} = 54^\circ - 69^\circ = -14^\circ.$$

Además de la eccentricidad

$$e = \sqrt{1 - \tan^2 \chi} = \sqrt{1 - \tan^2 (-15.5)} = 0.96,$$

y la relación de semiejes

$$|u_{0x}| = |\tan (-14.5)| |u_{0y}| = 0.25 |u_{0y}|.$$

Intensidad	Valor
$I_{\text{máx}}$	200
$I_{\text{mín}}$	14
I_x	175
I_{nulo}	0

Cuadro 7.18: Intensidades reportadas con base al método de intensidades.

Con base en los resultados de la tabla 7.18 y en las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.5), se determinan los ángulos ψ y χ

$$\chi = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{mín}} - I_{\text{nulo}}}{I_{\text{máx}} - I_{\text{nulo}}}} \right) = \pm \arctan \left(\sqrt{\frac{14 - 0}{200 - 0}} \right) = -14.8^\circ,$$

$$\psi = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{I_{\text{máx}} - I_x}{I_x - I_{\text{mín}}}} \right) = \mp \arctan \left(\sqrt{\frac{200 - 175}{175 - 14}} \right) = -21.7^\circ.$$

Con base en el método de Born & Wolf se obtienen la tabla 7.19b con las intensidades correspondientes Con los valores de la tabla 7.19b y las ecuaciones

Intensidad	Valor
$I(0^\circ, 0)$	175
$I(90^\circ, 0)$	39
$I(45^\circ, 0)$	44
$I(135^\circ, 0)$	172
$I(45^\circ, \pi/2)$	56
$I(135^\circ, \pi/2)$	160

(a) Intensidades reportadas.

Parámetros de Stokes	Valor
s_0	1
s_1	0.63
s_2	-0.59
s_3	-0.48

(b) Parámetros de Stokes.

Cuadro 7.19: Valores obtenidos mediante el método de Stokes.

(4.2.4)–(4.2.3) se calculan los ángulos de la esfera de Poincaré

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{-0.48}{\sqrt{0.63^2 + 0.59^2 + 0.48^2}} \right) = -14.5^\circ,$$

y

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{s_2}{s_1} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-0.59}{0.63} \right) = -21.6^\circ,$$

que corresponden a los ángulos reportados por los métodos de ángulos e intensidades.

Capítulo 8

Conclusiones y perspectivas

Las soluciones a las ecuaciones vectoriales de onda para el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{H} , con base en el vector semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$, en el sistema de coordenadas cilíndrico parabólico, son ortogonales. La solución \mathbf{E}_{φ_1} es polarización elíptica, la cual se encuentra en un plano que involucra las tres componentes vectoriales. Las proyecciones de esta elipse sobre los planos $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y)$, $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z)$ y $(\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$, representan diferentes tipos de polarización. Cuando $\tau = \sigma$, en el plano $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ la proyección resulta ser polarización lineal, sobre los planos restantes, la proyección es polarización elíptica. Los semiejes de la polarización elíptica se encuentran en término de las coordenadas τ y σ , lo que implica que la elipticidad se encuentra como función de estas coordenadas. La segunda solución \mathbf{E}_{φ_2} , es polarización elíptica oscilando sobre el plano $\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_\sigma$. A partir de estas soluciones se calculó la helicidad y el flujo de helicidad, donde ambas cantidades resultaron ser no nulas, indicando que las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} contienen momento angular. En el límite paraxial, el flujo de helicidad sólo tiene dirección en la componente $\hat{\mathbf{e}}_z$, y es proporcional a la helicidad.

Con las semillas $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ se pudieron obtener nuevas soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz. La primera semilla ofrece una solución con una polarización preferencialmente en la dirección x y la semilla $\hat{\mathbf{e}}_y$, ofrece una polarización preferencial en la dirección y . Ambas soluciones son polarizaciones elípticas, sin embargo, las soluciones \mathbf{E}_{φ_1} y \mathbf{E}_{φ_2} no son ortogonales, en contraste con las soluciones a partir de la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. Lo cual genera una interrogante, del por qué estas soluciones no son ortogonales. Al final del capítulo 2 se plantea una posible explicación a este comportamiento, el cual consiste en que los vectores $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ no forman parte del sistema de vectores unitarios que conforma el sistema de coordenadas cilíndrico parabólico. El vector $\hat{\mathbf{e}}_z$, si es parte de la base de vectores unitarios que conforma este sistema.

En el capítulo 3, se modificó el estado de polarización para obtener polarización preferencialmente circular. El contenido rotacional con base en estos estados de polarización tampoco es nulo, lo cual tiene sentido, ya que la polarización circular o elíptica contienen momento angular, tal como lo reporta [2, 6, 7]. En aproximación paraxial, la componente z del flujo de helicidad y la

helicidad también son proporcionales. Al final, se generalizan estos estados, con el objetivo de tener polarización preferencialmente elíptica.

En la segunda parte de este trabajo, se abordó de forma teórica y experimental, los métodos de extremales. Los parámetros \wp_1 y u_{0x} (o sus complementarios \wp_2 y u_{0y}), se relacionan directamente con los ángulos ψ y χ de la esfera de Poincaré. Estos métodos no se enfocan en determinar los parámetros de Stokes, en contraste con los métodos tradicionales [42, 43, 35], aunque ciertamente es posible encontrarlos como se mostró en el capítulo 5. Los parámetros \wp_1 y $-\wp_2$ surgen a partir de la simetría HL, y el cociente entre \wp_1 y $-\wp_2$ representa la tangente del ángulo de inclinación de la elipse $\tan \psi = -\frac{\wp_2}{\wp_1}$. Estos términos tiene el nombre de parámetros de polarización [2], y son de gran importancia al reportar soluciones vectoriales de las ecuaciones de Maxwell. Los parámetros u_{0x} y u_{0y} representan el semieje mayor y menor de la elipse respectivamente, su modificación cambia la elipticidad y el cociente entre u_{0y} y u_{0x} es $\tan \chi = \frac{u_{0y}}{u_{0x}}$.

Las soluciones que se obtuvieron en torno a las semillas $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$, se plantearon y describieron de forma sucinta, sin embargo, por cuestión de tiempo, no se caracterizaron en comparación con las soluciones de la semilla $\hat{\mathbf{e}}_z$. Así mismo, sólo se planteó la idea de generar polarización preferencialmente circular con base en el vector semilla $\hat{\mathbf{e}}_{\pm} = \hat{\mathbf{e}}_x \pm i \hat{\mathbf{e}}_y$, sin embargo, aun no se verifica.

Durante el desarrollo de esta tesis de maestría, dos artículos fueron realizados.

El primero con nombre: *Medición directa de la polarización de la luz* [39], y el segundo con nombre *Extrema method for the state of polarization evaluation* (en revisión)

Capítulo 9

Bibliografía

- [1] Miguel A. Bandres, Julio C. Gutiérrez-Vega, and Sabino Chávez-Cerda. Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Opt. Lett.*, 29(1):44–46, Jan 2004.
- [2] M. Fernández-Guasti. Vector wave solutions in electrodynamics: the Heaviside-Larmor symmetry and tiered potential invariance. *Phys. Scr.*, 98(10):105511, 2023.
- [3] J. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill, 1941.
- [4] D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 3rd edition, 1998.
- [5] P M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume I. McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, Toronto, 1953.
- [6] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia. Orbital angular momentum of a high-order bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(2):S82, March 2002.
- [7] K. Volke-Sepulveda and E. Ley-Koo. General construction and connections of vector propagation invariant optical fields: Te and tm modes and polarization states. *Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 8(10):867, 2006.
- [8] Z. Yong, M. Zhenwu, X. Danling, H. Shangling, D. Yiping, H. Qiaobing, L. Zhili, and D. Dongmei. Circular Mathieu and Weber autofocusing beams. *Opt. Lett.*, 47:3069–3062, 2022.
- [9] B. Rodríguez-Lara. Normalization of optical Weber waves and Weber-Gauss beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27:327–332, 2010.
- [10] B. Rodríguez-Lara and R. Jáuregui. Dynamical constants of structured photons with parabolic-cylindrical symmetry. *Phys. Rev. A*, 79(5):055806, 2009.

- [11] M. Bandres and B. M. Rodríguez-Lara. Nondiffracting accelerating waves: Weber waves and parabolic momentum. *New Journal of Physics*, 15(1):013054, 2013.
- [12] S. Sergey, V. Kotlyar, A. Nalimov, and E. Kozlova. The non-vortex inverse propagation of energy in a tightly focused high-order cylindrical vector beam. *IEEE Photonics Journal*, 11(4):1–10, 2019.
- [13] J. Gutiérrez-Vega, M. Bandres-Motola, E. Ley-Koo, K. Volke-Sepulveda, and S. Chavez-Cerda. Parabolic propagation-invariant optical beams. In *2003 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe (CLEO/Europe 2003) (IEEE Cat. No.03TH8666)*, pages 127–, 2003.
- [14] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume II. McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, Toronto, 1953.
- [15] P. Moon and D. Spencer. *Field Theory Handbook*. New York: Springer-Verlag, 2 edition, 1971.
- [16] G. Arfken, H. Weber, and F. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego, 2012.
- [17] Sergej Orlov, Pavel Gotovski, Justas Baltrukonis, Vytautas Jukna, and Titas Gertus. Optical engineering of vector beams with parabolic and elliptic cross-sections. In *Conference on Lasers and Electro-Optics*, page JTU2A.17. Optica Publishing Group, 2019.
- [18] Olver. F, Lozier. W, Boisvert. R, and C. Clark. *The NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [19] A. Sommerfeld. Die greensche funktion der schwingungsgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 21:309–352, 1912.
- [20] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*. 1949.
- [21] Carlos López-Mariscal, Miguel A. Bandres, Julio C. Gutiérrez-Vega, and Sabino Chávez-Cerda. Observation of parabolic nondiffracting optical fields. *Opt. Express*, 13(7):2364–2369, Apr 2005.
- [22] E. Linfoot and E. Wolf. Phase distribution near focus in an aberration-free diffraction image. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 69(8):823–832, aug 1956.
- [23] G. Gouesbet. Poynting theorem in terms of beam shape coefficients and applications to axisymmetric, dark and non-dark, vortex and non-vortex, beams. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 201:184–196, 2017.
- [24] I. Rondón-Ojeda and F. Soto-Eguibar. Properties of the Poynting vector for invariant beams: Negative propagation in Weber beams. *Wave Motion*, 78:176–184, 2018.

- [25] V. Domínguez-Rocha, C. Zagoya, and M. Martínez-Mares. Poynting's theorem for plane waves at an interface: A scattering matrix approach. *American Journal of Physics*, 76(7):621–625, July 2008.
- [26] M. Fernández-Guasti. Tiered structure and symmetry of the electromagnetic equations. *Journal of Modern Optics*, 68(20):1265–1271, 2021.
- [27] H. Bateman. *The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave Motion, on the basis of Maxwell's Equations (CUP)*, volume 8. Cambridge University Press, 1915.
- [28] R. Cameron. On the 'second potential' in electrodynamics. *Journal of Optics*, 16(1):015708, dec 2013.
- [29] G. Afanasiev and P. Stepanovsky. The helicity of the free electromagnetic field and its physical meaning. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 109(3):271–279, 1996.
- [30] Barnett. S. Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum. *Journal of Modern Optics*, 57(14-15):1339–1343, 2010. PMID: 24808629.
- [31] P. Banzer, M. Neugebauer, A. Aiello, C. Marquardt, N. Lindlein, T. Bauer, and G. Leuchs. The photonic wheel - demonstration of a state of light with purely transverse angular momentum. *Journal of the European Optical Society - Rapid publications*, 8(0), 2013.
- [32] M. Fernández-Guasti. Helicity continuity equation for electromagnetic field with sources. *Journal of Modern Optics*, 66(11):1265–1271, 2019.
- [33] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 7 edition, 1999.
- [34] R. Zhi-Cheng, K. Ling-Jun, L. Si-Min, Q. Sheng-Xia, L. Yongnan, T. Chenghou, and W. Hui-Tian. Generalized Poincaré. *Opt. Express*, 23(20):26586–26595, 2015.
- [35] G. Milione, H. Sztul, D. Nolan, and R. Alfano. Higher-order Poincaré sphere, Stokes parameters, and the angular momentum of light. *Phys. Rev. Lett.*, 107(5):053601, 2011.
- [36] Y. Xunong, L. Yachao, L. Xiaohui, Z. Xinxing, K. Yougang, L. Hailu, W. Shuangchun, and F. Dianyuan. Hybrid-order Poincaré sphere. *Phys. Rev. A*, 91(2):023801, 2015.
- [37] D Malacara. *Óptica básica*. Fondo de Cultura Económica, 3rd edition, 2015.
- [38] R. Silverman. *Modern calculus and analytic geometry*. New York : Macmillan, 1969.

- [39] J. Feliciano-Zenón and M. Fernández-Guasti. Medición directa de la polarización de la luz. *Rev. Mex. Fís*, 70(3):031304, May 2024.
- [40] D. Goldstein. *Polarized Light*. CRC Press, 3rd edition, 2011.
- [41] Petre Cătălin Logofătu. Simple method for determining the fast axis of a wave plate. *Optical Engineering*, 41(12), 2002.
- [42] R. Zhi-Cheng, K. Ling-Jun, L. Si-Min, Q. Sheng-Xia, L. Yongnan, T. Chenghou, and W. Hui-Tian. Full Stokes polarization imaging based on broadband liquid crystal polarization gratings. *Opt. Express*, 13(1), 2023.
- [43] J. López-Téllez, N. Bruce, and O. Rodríguez-Herrera. Characterization of optical polarization properties for liquid crystal-based retarders. *Applied optics*, 55(22):6025–6033, 2016.
- [44] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, volume ninth Dover printing, tenth GPO printing. Dover, New York, 1964.
- [45] M. Bruneau. *Fundamentals of Acoustics*. ISTE, 2006.

Apéndice A

Coordenadas cilíndricas parabólicas

A.1. Vectores unitarios

Dada la definición de las coordenadas τ, σ en término de las coordenadas x y y , presentadas en el capítulo 2, se pueden construir los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$. El primer vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ se construye como

$$\hat{\mathbf{e}}_\tau = \frac{\frac{\partial x}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_z}{\left| \frac{\partial x}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_z \right|},$$

donde $\frac{\partial x}{\partial \tau} = \tau$, $\frac{\partial y}{\partial \tau} = \sigma$ y $\frac{\partial z}{\partial \tau} = 0$. El factor de normalización es $(\sigma^2 + \tau^2)^{-1/2}$, el cual corresponde al factor de escala h_1 de este sistema. Al sustituir los resultados, se obtiene el vector unitario (2.1.4b).

El vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$, se construye de forma similar al vector $\hat{\mathbf{e}}_\tau$, la única diferencia es que ahora las derivadas son respecto a σ

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{\frac{\partial x}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_z}{\left| \frac{\partial x}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_z \right|},$$

las derivadas son $\frac{\partial x}{\partial \sigma} = -\sigma$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \tau$ y $\frac{\partial z}{\partial \sigma} = 0$. El factor de normalización también corresponde con el factor de escala. Al sustituir los resultados, se obtiene el vector unitario (2.1.4a)

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$, se pueden construir a partir de los vectores $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ y $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ como

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\tau \\ \hat{\mathbf{e}}_\sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{h_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \end{pmatrix},$$

al despejar el vector $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \end{pmatrix}$, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{h_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\tau \\ \hat{\mathbf{e}}_\sigma \end{pmatrix},$$

donde la matriz inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tau & -\sigma \\ \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

Al sustituir de forma explícita los valores, se obtiene los vectores unitarios (2.1.5a)–(2.1.5b).

A.2. Operadores vectoriales

Se pueden obtener los operadores en este sistema de coordenadas [15, p. 21]

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_1} (\partial_\tau \psi \hat{\mathbf{e}}_\tau + \partial_\sigma \psi \hat{\mathbf{e}}_\sigma) + \partial_z \psi \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (\text{A.2.1a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1^2} (\partial_\tau (h_1 F_\tau) + \partial_\sigma (h_1 F_\sigma)) + \partial_z F_z, \quad (\text{A.2.1b})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{1}{h_1} \partial_\sigma F_z - \partial_z F_\sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau + \left(\partial_z F_\tau - \frac{1}{h_1} \partial_\tau F_z \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \\ &\quad + \frac{1}{h_1^2} (\partial_\tau (h_1 F_\sigma) - \partial_\sigma (h_1 F_\tau)) \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned} \quad (\text{A.2.1c})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1^2} (\partial_\tau^2 f + \partial_\sigma^2 f) + \partial_z^2 f, \quad (\text{A.2.1d})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{F} &= \left(\nabla^2 F_\tau + \frac{2(\sigma \partial_\tau F_\sigma - \tau \partial_\sigma F_\sigma)}{h_1^2} - \frac{1}{h_1^4} F_\tau \right) \hat{\mathbf{e}}_\tau \\ &= + \left(\nabla^2 F_\sigma + \frac{2(\tau \partial_\sigma F_\tau - \sigma \partial_\tau F_\tau)}{h_1^2} - \frac{1}{h_1^4} F_\sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \\ &\quad + \nabla^2 F_z \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned} \quad (\text{A.2.1e})$$

con $h_1 = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$ el factor de escala.

A.3. Ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas parabólicas

Sea la ecuación diferencial de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

en coordenadas cilíndricas parabólicas la ecuación diferencial de Helmholtz es

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0.$$

Al realizar separación de variables

$$\psi(\sigma, \tau, z) \equiv U(\sigma) V(\tau) Z(z),$$

la ecuación de Helmholtz se convierte

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(VZ \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + UZ \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \right) + UV \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 UVZ = 0$$

al dividir entre UVZ

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (\text{A.3.1})$$

La función $Z(z)$ se puede separar del resto de la ecuación

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = q^4/4,$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -(k^2 - q^4/4) = -k_z^2,$$

con $q^4/4$ una constante de separación, la solución en Z es

$$Z(z) = Ae^{ik_z z}. \quad (\text{A.3.2})$$

El resto de la ecuación es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \right) + q^4/4 = 0, \\ \rightarrow & \left(\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \right) + (\sigma^2 + \tau^2) q^4/4 = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

la cual puede separarse de la forma

$$\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + q^4 \sigma^2/4 = -q^2 a,$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + q^4 \tau^2/4 = q^2 a,$$

con $q^2 a$ una constante de separación. Las ecuaciones para U y V se convierten en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + \left(\frac{q^4 \sigma^2}{4} + \frac{q^2 a}{2} \right) U = 0, \quad (\text{A.3.4a})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \left(\frac{q^4 \tau^2}{4} - \frac{q^2 a}{2} \right) V = 0. \quad (\text{A.3.4b})$$

Si $q^2 = 2k_t$, se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + (k_t^2 \sigma^2 + 2k_t a) U = 0, \quad (\text{A.3.4c})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + (k_t^2 \tau^2 - 2k_t a) V = 0. \quad (\text{A.3.4d})$$

que corresponden a las reportadas por [1]. Al tomar el cambio de variable $a\sigma \rightarrow \nu$, donde $a = \sqrt{2k_t}$, la ecuación (A.3.4d) es $\partial_\nu^2 V + (\nu/4 - a) V = 0$, la cuál satisface por las funciones cilíndricas parabólicas [44]. De la misma forma con la ecuación (A.3.4c), donde la única diferencia es el cambio de signo de $2k_t a$. En este trabajo, con fines de practicidad, se tomó a $k_t = 1$, de tal forma que las ecuaciones cilíndricas parabólicas se pueden escribir como $\partial_\xi^2 \mathcal{P} + (\xi \pm a) \mathcal{P} = 0$, donde ξ representa una variable muda. Las soluciones se presentaron en el capítulo 2.

A.4. Vector de onda

En la sección anterior se obtuvieron las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + \left(\frac{q^4 \sigma^2}{4} + \frac{q^2 a}{2} \right) U = 0, \quad (\text{A.4.1a})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \left(\frac{q^4 \tau^2}{4} - \frac{q^2 a}{2} \right) V = 0, \quad (\text{A.4.1b})$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z = 0. \quad (\text{A.4.1c})$$

La ecuación (A.4.1c) tiene una estructura del tipo ecuación de Helmholtz, para ver a las ecuaciones (A.4.1a) y (A.4.1b) como ecuación del tipo Helmholtz, se necesita tener algo de la forma

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} + k_\sigma^2 U = 0, \quad (\text{A.4.2a})$$

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + k_\tau^2 U = 0. \quad (\text{A.4.2b})$$

La idea de analizar las contribuciones del laplaciano de esta forma, para encontrar las componentes del vector de onda viene de [45]. Estas ecuaciones deben de tener el factor $(\sigma^2 + \tau^2)^{-1}$ porque este factor se encuentra en el laplaciano en coordenadas cilíndricas parabólicas. La función $Z(z)$ no tiene este factor, es

razonable que tampoco se encuentra en la ecuación (A.4.1c). Al comparar las ecuaciones (A.4.1a) y (A.4.1b) con (A.4.2a) y (A.4.2b) se obtienen los valores para k_σ^2 y k_τ^2

$$k_\sigma^2 = \frac{q^4 \sigma^2 / 4 + q^2 a / 2}{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (\text{A.4.3a})$$

$$k_\tau^2 = \frac{q^4 \sigma^2 / 4 - q^2 a / 2}{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (\text{A.4.3b})$$

$$k_z^2 = k^2 - q^4 / 4. \quad (\text{A.4.3c})$$

Al tomar la suma de cuadrados de las componentes

$$\begin{aligned} k_\sigma^2 + k_\tau^2 + k_z^2 &= \frac{q^4 \sigma^2 / 4 + q^2 a / 2}{\sigma^2 + \tau^2} + \frac{q^4 \sigma^2 / 4 - q^2 a / 2}{\sigma^2 + \tau^2} + k^2 - q^4 / 4 \\ &= \frac{q^4 / 4 (\sigma^2 + \tau^2)}{\sigma^2 + \tau^2} + k^2 - q^4 / 4 = k^2. \end{aligned}$$

Se cumple que la suma de cuadrados de las diferentes componentes del vector de onda es igual a la magnitud del vector de onda.

El factor parabólico a en términos de k_τ y k_σ es

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2 k_\tau^2}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} - \frac{\tau^2 k_\sigma^2}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} - 1 \right), \quad (\text{A.4.4a})$$

y la constante q en términos de k_τ y k_σ es

$$q = [4(k^2 - k_z^2)]^{1/4}. \quad (\text{A.4.4b})$$

El factor parabólico a muestra una dependencia de las coordenadas τ y σ , de aquí se entiende porque este factor modifica el foco de los perfiles parabólicos.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00144

Matrícula: 2221801174

Polarización y caracterización de haces cilíndricos parabólicos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 3 del mes de octubre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. KAREN PATRICIA VOLKE SEPULVEDA
DR. MOISES MARTINEZ MARES
DR. MANUEL FERNANDEZ GUASTI

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:



MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: JESUS FELICIANO ZENON

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:


aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

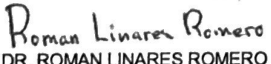
JESUS FELICIANO ZENON
ALUMNO

REVISÓ




MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI




DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTA




DRA. KAREN PATRICIA VOLKE SEPULVEDA

VOCAL



DR. MOISES MARTINEZ MARES

SECRETARIO



DR. MANUEL FERNANDEZ GUASTI