Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

“Grupos topológicos d-independientes y algunas propiedades sobre redes numerables en el grupo maximal de Malykhin”

TESIS

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

PRESENTA:
Edgar Marquez Rodriguez
Matrícula: 2163802955
gedar100@gmail.com
ORCID:0000-0001-7409-8838

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Mikhail Tkachenko Galievich

JURADO:
Presidente:
Dr. Mikhail Tkachenko Galievich
Secretario:
Dr. Vladimir Tkachuk Vladimirovich
Vocal:
Dr. Richard Gordon Wilson Roberts
Vocal:
Dr. Salvador García Ferreira

Iztapalapa, Ciudad de México a 30 de octubre del 2024

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

A mi familia,

No encuentro palabras suficientes para expresar lo profundamente agradecido que estoy por todo el apoyo y la ayuda que me han brindado en este camino. Su amor, paciencia y aliento incondicional han sido mi motor para superar cada desafío y obstáculo que se presentó en el proceso.

Este logro no habría sido posible sin su guía, confianza y constante ánimo. Espero, algún día, poder devolverles todo lo que me han dado. Me siento inmensamente afortunado de tenerlos en mi vida, y siempre llevaré conmigo el valor de su apoyo.

A mi maestro Mikhail Tkachenko,

Muchísimas gracias, profesor, por haberme tomado bajo su tutela y por brindarme las herramientas necesarias para entender este fascinante mundo de las matemáticas. Aprecio profundamente cada una de nuestras conversaciones, en las que analizábamos problemas y explorábamos posibles soluciones; esos momentos no solo fueron enriquecedores, sino también muy gratificantes para mí.

Finalmente, quiero agradecerle sinceramente por su paciencia y dedicación, que fueron fundamentales para mi aprendizaje y crecimiento. Su guía ha dejado una huella imborrable en mi.

Índice general

Resumen

El presente trabajo esta centrado en el área de los grupos topológicos. Una parte de este trabajo esta dedicada al estudio de los grupos topológicos llamados d-independientes. Dado un grupo topológico G de cardinalidad mayor o igual que $\mathfrak{c}$, se dice que G es un grupo *d-independiente* si para cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un subgrupo denso y numerable H de G tal que $S \cap H = \{e_G\}$, donde e_G es el elemento identidad de G. Algunos ejemplos de grupos d-independientes son el grupo de los números reales $\mathbb{R}$ y el grupo del círculo unitario de los números complejos $\mathbb{T}$.

Uno de los principales objetivos de la tesis es dar una caracterización de los grupos abelianos, compactos y metrizables que son d-independientes. Dicha caracterización aparece en el teorema 3.3.1 y establece que un grupo topológico compacto y metrizable G es d-independiente si y solo si G es máximamente fragmentable si y solo si G es un M-grupo si y solo si el grupo G contiene elementos de orden infinito o bien G es un grupo acotado, con la descomposición $G = \bigoplus_{i=1}^{k} G_{p_i}$ en la suma directa de sus componentes p_i-primarias, donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos distintos dos a dos y para todo $i \leq k$ y $n \in \mathbb{N}^+$, se cumple que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$.

La segunda parte de este trabajo está dedicada al estudio del siguiente problema: ¿Es verdad que cualquier grupo topológico (abeliano) numerable y no discreto tiene una red numerable con elementos infinitos? Este problema surge de manera natural como complemento a [34, Lemma 2.27], en donde se establece que si un grupo topológico abeliano G tiene una red numerable, el grupo G tiene cardinalidad κ y $cf(\kappa) > \omega$, entonces G tiene una red numerable $\mathcal{N}$ tal que $|N| = \kappa$, para cada $N \in \mathcal{N}$.

Usaremos el grupo maximal de Malykhin $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ del teorema 4.2.5 y la propiedad de no resolubilidad de los espacios topológicos maximales para demostrar que bajo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ (ver [12]), el grupo topológico numerable y no discreto $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ no admite una red numerable con elementos infinitos.

Introducción

Los grupos topológicos son una importante rama de las matemáticas que combina la teoría de grupos y la topología. En términos generales, un grupo topológico es un grupo que esta equipado con una topología, lo que permite hablar sobre la cercanía y la convergencia de los elementos del grupo. Para que la topología sea compatible con la estructura de grupo, debe cumplir ciertas propiedades, como la continuidad de la operación de grupo y la inversa de cada elemento del grupo.

La teoría de grupos topológicos tiene aplicaciones en muchas áreas de las matemáticas, como la geometría, la teoría de números, la física y la teoría de la medida. Entre las aplicaciones más importantes se encuentran la teoría de la representación de grupos, la teoría de Lie y la teoría de los números algebraicos.

Existen varios ejemplos importantes de grupos topológicos, como los grupos de Lie y los grupos de homeomorfismos de espacios topológicos. La teoría de grupos topológicos es un tema extenso y profundo en matemáticas, con numerosas áreas de investigación y una gran cantidad de aplicaciones importantes en otros campos de la ciencia y la tecnología.

A continuación introducimos algunos conceptos relacionados con la teoría de conjuntos que serán de ayuda más adelante. El concepto de número cardinal en teoría de conjuntos se introduce para clasificar y estudiar los diferentes tipos de infinitos. En este contexto, la cardinalidad de los números naturales $\mathbb{N}$ se denota por ω. Los conjuntos de los números enteros $\mathbb{Z}$ y de los números racionales $\mathbb{Q}$ tienen el mismo cardinal que los números naturales. Así todos los conjuntos anteriores se llaman numerables. Por otra parte, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene un cardinal más grande denotado por $\mathfrak{c}$ y su valor es igual a 2^ω. La cardinalidad de un conjunto se denota por el símbolo $|A|$ donde A es el conjunto en cuestión.

Este trabajo se estructura en cuatro capítulos. El primer capítulo se enfoca en los temas esenciales requeridos para el desarrollo de los capítulos subsecuentes. Por ejemplo, se exponen algunas propiedades básicas de los grupos topológicos en general. Cabe destacar que todas estas propiedades se encuentran detalladas en [4], esta obra constituye una referencia estándar en el ámbito de los grupos topológicos. También se mencionan los grupos topológicos ω-estrechos y algunas de sus propiedades más importantes. Por ejemplo, se demostrará que cualquier grupo separable es ω-estrecho y que esta propiedad se conserva bajo homomorfismos continuos y sobreyectivos. En la parte final del primer capítulo, se aborda el estudio de la estructura de los grupos compactos y abelianos. Estos resultados proporcionan una herramienta fundamental para el desarrollo de los dos capítulos siguientes. De esta manera, se sientan las bases teóricas necesarias para profundizar en los temas que se tratarán en el resto del texto. La estructura de los grupos topológicos compactos y abelianos ha sido objeto de estudio por diversos autores. En este trabajo, nos basamos principalmente en el desarrollo presentado en [4], pero también recomendamos al lector interesado que consulte los textos [5], [17], [18], [20], [21] y [35]. Estos trabajos complementan y profundizan en el tema, proporcionando diferentes enfoques y perspectivas.

En el segundo capítulo se presenta una introducción a los grupos máximamente fragmentables y a los M-grupos. Estas clases de grupos son relativamente nuevas y tomaremos como base los artículos [8] y [11], respectivamente.

En [8], W. Comfort y D. Dikranjan estudian los subgrupos densos de grupos abelianos compactos desde otro punto de vista. Definen el *núcleo de densidad*, denotado por $den(G)$, de un grupo topológico G como la intersección de la familia de subgrupos densos de G. Demuestran que para un grupo abeliano compacto G, el subgrupo $den(G)$ es siempre finito y que existen dos subgrupos densos D_1 y D_2 de G tales que $D_1 \cap D_2 = den(G)$. Se menciona en la página 329 de [8] que si p y q son números primos distintos, entonces el grupo abeliano compacto y metrizable $K = \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)$ satisface $\{0\} \times \mathbb{Z}(q) \subset den(K)$, por lo que el grupo $den(K)$ no es trivial. De hecho, [8, Theorem B(b)] implica que $den(K) = \{0\} \times \mathbb{Z}(q) \cong \mathbb{Z}(q)$. También se deduce de [8, Lemma 2.13] que para un grupo abeliano compacto G, $den(G) \neq \{e\}$ solo si G es un grupo acotado, es decir, $mG = \{e\}$ para algún entero $m \geq 1$. Por lo tanto, si $den(G) = \{e\}$, entonces se pueden encontrar dos subgrupos densos D_1 y D_2 de G que satisfacen $D_1 \cap D_2 = \{e\}$.

Con esta última igualdad en mente, los autores de [8] definen a un grupo topológico G con $|G| = \kappa \geq \omega$ como *máximamente fragmentable* si contiene una familia *independiente* $\{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ de subgrupos densos, es decir, si

$$D_\alpha \cap \big\langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} D_\beta \big\rangle = \{e\},$$

para cada $\alpha \in \kappa$. Resulta que la propiedad de ser máximamente fragmentable en la clase de grupos abelianos y compactos implica varias restricciones en la estructura algebraica de los grupos, como se muestra en los teoremas B, C y D de [8].

En [11], D. Dikranjan y D. Shakhmatov estudian los M-grupos y algunas de sus propiedades principales. Un grupo G es un grupo de Markov, o simplemente, un M-grupo si todos los subgrupos propios e incondicionalmente cerrados de G tienen índice por lo menos $\mathfrak{c}$. En ese trabajo los autores demuestran que cualquier M-grupo abeliano admite una topología conexa. También, los autores presentan en [11, Proposition 1.4] una caracterización muy útil de los M-grupos abelianos. Ellos demuestran que un grupo abeliano G es un M-grupo si y solo si, para cada $m \in \mathbb{N}$, $mG = \{e\}$ o $|mG| \geq \mathfrak{c}$.

Veremos más adelante que el concepto de M-grupo y grupo máximamente fragmentable estan relacionados profundamente en la clase de los grupos abelianos, compactos y metrizables. Cabe aclarar que pondremos especial atención a los resultados de [8] y [11] que necesitaremos más adelante en el capítulo 3.

El tercer capítulo de este trabajo se dedica por completo al estudio de los grupos topológicos d-independientes y sus principales propiedades. En general, el análisis de los subgrupos densos de grupos topológicos (compactos) tiene una larga tradición y está lleno de resultados profundos, especialmente para grupos abelianos. En este trabajo, nos enfocaremos de manera particular en el análisis de los subgrupos densos y numerables. Un grupo topológico G con $|G| \geq \mathfrak{c}$ se llama *d-independiente* si para todo subgrupo S de G con $|S| < \mathfrak{c}$, se puede encontrar un subgrupo denso y numerable H del grupo G tal que $S \cap H = \{e\}$. En este contexto, el término d-independiente se abrevia de la expresión "densamente independiente" y describe la independencia del subgrupo H, el cual es denso y numerable en la definición previa, con respecto al subgrupo S. Es importante destacar que todo grupo d-independiente es separable. La noción de grupo topológico d-independiente aparece por primera vez en [27]. En este trabajo A. Leiderman y M. Tkachenko demuestran que si κ es un cardinal tal que $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y S es un subgrupo del grupo compacto $C = \mathbb{Z}(2)^\kappa$ tal que $|S| < \mathfrak{c}$, entonces C contiene un subconjunto independiente, denso y numerable X tal que $\langle X \rangle \cap S = \{e\}$ (ver [27, Proposition 3.2]).

En nuestra terminología esto implica que el grupo C es d-independiente. Este resultado es utilizado en [27] para probar que existen grupos topológicos abelianos y pseudocompactos G y H tales que todos los subgrupos cerrados de G y H son separables pero el grupo $G \times H$ contiene un subgrupo cerrado y σ-compacto que no es separable. También, en [27] los autores muestran que la propiedad de ser d-independiente no se puede extender a grupos abelianos, compactos, metrizables que son de torsión. Para probar la afirmación muestran que si $G_1 = \mathbb{Z}(2)^\omega$ y $G_2 = \mathbb{Z}(4)$, entonces para el grupo $G = G_1 \times G_2$ y el subgrupo $S = \{e_{G_1}\} \times G_2$ de G, cualquier subgrupo denso D de G es tal que $|D \cap S| > 1$ (ver [27, Remark 3.3]). En [41], los autores probaron que si S es un subgrupo de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ tal que $|S| \leq \mathfrak{c}$, entonces existe $x \in \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ tal que $\langle x \rangle$ es denso en $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ y $S \cap \langle x \rangle = \{e\}$. Por lo tanto, el grupo $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ es d-independiente.

En este trabajo se presenta un estudio exhaustivo de los grupos topológicos d-independientes. En la sección 3.1, se demuestra que cualquier grupo abeliano d-independiente es un M-grupo. Además, en la proposición 3.1.4 se establece que cualquier grupo topológico abeliano segundo numerable con cardinalidad mayor o igual que $\mathfrak{c}$ es d-independiente si y solo si es máximamente fragmentable. En el teorema 3.1.30, se demuestra que si G es un grupo topológico abeliano separable y de estrechez numerable, y satisface alguna de las siguientes condiciones: $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$ o G es un M-grupo de torsión acotada, entonces G es d-independiente.

En la sección 3.2 se aborda el tema del producto de grupos topológicos y su relación con la d-independencia. Se demuestra que el producto de cualquier familia con cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ de grupos d-independientes es también d-independiente, como se establece en la proposición 3.2.1. Además, en el teorema 3.2.3, se demuestra que el producto de una familia de grupos topológicos es d-independiente incluso si algunos de los factores no cumplen esta propiedad.

En el teorema 3.3.1 de la sección 3.3 se establece que un grupo topológico compacto metrizable y abeliano G es d-independiente si y solo si G es máximamente fragmentable si y solo si G es un M-grupo si y solo si o bien el grupo G contiene elementos de orden infinito o bien G es un grupo acotado, con la descomposición $G = \bigoplus_{i=1}^k G_{p_i}$ en la suma directa de sus componentes p_i-primarias, donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos distintos dos a dos y para todo $i \leq k$ y $n \in \mathbb{N}^+$, se cumple que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$. Entonces el teorema 3.3.1 proporciona una caracterización de los grupos abelianos que son compactos y metrizables, y que además son d-independientes. En este caso, este resultado nos muestra la estrecha relación que existe entre esta propiedad y los M-grupos, así como con los grupos máximamente fragmentables. El objetivo de la última sección del tercer capítulo es extender la equivalencia de los enunciados (a), (b) y (d) del teorema 3.3.1 a grupos abelianos localmente compactos. En consecuencia, se puede demostrar en el teorema 3.4.2 que las propiedades de ser d-independiente, M-grupo y grupo máximamente fragmentable son equivalentes para grupos abelianos localmente compactos que son segundos numerables y no discretos.

En el lema 3.1.28 se establece que si un grupo topológico abeliano G tiene una red numerable $\mathcal{N}$, y su cardinalidad es κ con $cf(\kappa) > \omega$, entonces existe otra red numerable $\mathcal{M}$ en G tal que cada conjunto en $\mathcal{M}$ tiene la misma cardinalidad que G, es decir, κ. Esta propiedad nos lleva a preguntarnos si los grupos topológicos numerables tienen una propiedad similar. Es decir, ¿Es verdad que cualquier grupo topológico (abeliano) numerable y no discreto tiene una red numerable con elementos infinitos? En el último capítulo de este trabajo, abordamos esta pregunta y presentamos una solución a este problema. En este sentido, usaremos el grupo maximal de Malykhin $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ del teorema 4.2.5 y la propiedad de no resolubilidad de los espacios topológicos maximales para demostrar que bajo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ (ver [12]), el grupo topológico numerable y no discreto $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ no admite una red numerable con elementos infinitos. En la sección 4.1 comenzamos abordando el tema de los grupos extremadamente disconexos, dado que cualquier espacio maximal es extremadamente disconexo. Este concepto será fundamental en el desarrollo del capítulo 4 y para su presentación nos basamos principalmente en los resultados de las referencias [1] y [4]. En particular, en [4] se dedica una sección completa a los grupos extremadamente disconexos y a los grupos maximales.

Posteriormente, en la sección 4.2, construimos el grupo maximal $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ y mostramos algunas de las propiedades que se deducen durante su construcción, como por ejemplo el lema 4.2.7. Finalmente, en la última sección del cuarto capítulo, se presenta la solución al problema planteado anteriormente.

En este trabajo, se hará uso de diversas fuentes bibliográficas para apoyar y respaldar los argumentos presentados. Entre las referencias más relevantes se incluyen: [4], [13], [22], [26], [39] y [40]. Además, para cada sección en particular se han utilizado otros materiales de investigación pertinentes.

Es importante destacar que, en el contexto de grupos abelianos, se usará una notación aditiva y, en ocasiones, se emplearán los símbolos 0 y e para referirse a la identidad de los grupos. En particular, para el grupo $\mathbb{T}$, se utilizará comúnmente el símbolo 1 como su elemento identidad. También se empleará la abreviatura LCA para la clase de grupos abelianos localmente compactos.

Cabe mencionar que, a menos que se indique lo contrario, todos los grupos y espacios topológicos considerados en este trabajo serán de Hausdorff.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría de los grupos topológicos es una rama fascinante de las matemáticas que combina dos áreas fundamentales: la teoría de los grupos y la topología. Estos grupos se definen como aquellos que tienen una estructura de grupo compatible con una topología determinada. La idea de los grupos topológicos surgió a principios del siglo XX gracias al trabajo del matemático francés Élie Cartan y el matemático alemán Hermann Weyl, quien en 1925 introdujo el concepto de "grupo compacto". Este concepto se refiere a un grupo topológico que es también un espacio topológico compacto. Durante la década de 1930, la teoría de los grupos topológicos tuvo un importante desarrollo gracias al trabajo de varios matemáticos destacados, incluyendo a Henri Cartan y Kurt Hirsch. En particular, Cartan contribuyó al desarrollo de la teoría de los grupos de Lie, que son grupos topológicos que también son variedades diferenciables. En resumen, la teoría de los grupos topológicos es una rama importante de las matemáticas que ha tenido un gran impacto en áreas como la física teórica y que sigue siendo objeto de estudio e investigación hasta el día de hoy.

En este capítulo, se presentan algunos resultados básicos acerca de la teoría de grupos topológicos, así como la definición de algunos conceptos que serán estudiados a lo largo del trabajo. En la sección final de este capítulo, presentaremos una introducción a la estructura de los grupos topológicos abelianos y compactos. Esta información será necesaria para la sección 3.3 del tercer capítulo de este trabajo.

1.1. Conceptos y propiedades básicas de los grupos topológicos

El propósito de esta sección es dar una breve introducción a la teoría de grupos topológicos y puesto que existe una abundante bibliografía al respecto, se omitirá la mayoría de las demostraciones. El lector interesado en una lectura más profunda puede consultar [4], el cual contiene un extenso desarrollo sobre los grupos topológicos. La teoría de grupos topológicos parte de la interacción de dos ramas fundamentales de la matemática: la teoría de grupos y la topología. Intuitivamente un grupo topológico es un conjunto con una operación binaria que lo convierte en un grupo y con una estructura topológica que cumple además que la multiplicación y la operación inversa son funciones continuas.

Desde este punto de vista, cada grupo dotado con la topología discreta automáticamente se convierte en un grupo topológico.

Los grupos topológicos fueron estudiados *per se* por primera vez por Otto Schreier en 1926 y por Franciszek Leja en 1927 en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* en donde aparece por primera vez la definición de grupo topológico.

Definición 1.1.1. *Sea G un conjunto con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G. Entonces G se llama grupo topológico si se cumplen las siguientes condiciones:*

a) $(G, \cdot)$ *es un grupo.*

b) (G, τ) *es un espacio topológico.*

c) *Las funciones* $l_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ *y* $l_2 : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ *dadas por* $l_1(x, y) = x \cdot y$ *y* $l_2(x) = x^{-1}$ *son continuas, donde* x^{-1} *es el inverso del elemento* x*.*

En ocasiones se prescindirá del uso del símbolo $\cdot$ de la operación binaria, además cuando se hable de grupos abelianos o conmutativos se usará el símbolo $+$ para la operación binaria, así como también una notación aditiva. El símbolo e_G denotará a la identidad del grupo G. Cuando no cause confusión simplemente se hará referencia a G como grupo topológico en lugar de la terna $(G, \cdot, \tau)$.

Algunos ejemplos de grupos topológicos son los siguientes:

a) El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual.

b) El grupo del círculo unitario de los números complejos denotado por $\mathbb{T}$, el cual consiste de todos los números complejos de la forma $e^{2\pi ix}$ donde $x \in \mathbb{R}$, con la multiplicación de los números complejos y la topología que hereda como subespacio del plano complejo.

c) Cualquier grupo con la topología indiscreta.

d) El grupo multiplicativo de los numeros reales positivos con la topología usual.

e) El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ no degeneradas, con la multiplicación usual de matrices y dotado con la topología inducida por el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$.

f) El grupo $GL(n, \mathbb{C})$ de matrices $n \times n$ no degeneradas, con la multiplicación usual de matrices y dotado con la topología inducida por el espacio $\mathbb{C}^{n^2}$.

Alternativamente a la definición de grupo topológico tenemos el siguiente lema:

Lema 1.1.2. *Sean $(G, \cdot)$ un grupo y τ una topología en G. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y solo si la función $l_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ dada como $l_3(x, y) = xy^{-1}$ es continua.*

Así como en teoría de grupos existen los isomorfismos y en topología existen los homeomorfismos, en teoría de grupos topológicos podemos definir las funciones que preservan tanto la estructura algebraica como la topológica.

Definición 1.1.3. *Sean G y H grupos topológicos. Una función $f : G \longrightarrow H$ se llama homomorfismo continuo si es un homomorfismo de grupos y es continua. Además, si f es homeomorfismo, entonces f se llama isomorfismo topológico. En este caso G y H son topológicamente isomorfos.*

Los siguientes resultados muestran algunas propiedades de los grupos topológicos.

Teorema 1.1.4. *Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento, entonces las funciones $\varrho_g : G \longrightarrow G$ y $\lambda_g : G \longrightarrow G$ definidas para cada $x \in G$ como $\varrho_g(x) = xg$ y $\lambda_g(x) = gx$ son homeomorfismos. Además la función $f : G \longrightarrow G$ dada como $f(x) = x^{-1}$ es también un homeomorfismo.*

Las funciones ϱ_g y λ_g del teorema 1.1.4 se llaman traslaciones por la derecha e izquierda de g, respectivamente.

Teorema 1.1.5. *Sean G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base local para la identidad e_G del grupo. Entonces las familias $\{xU : x \in G,\ U \in \mathcal{B}\}$ y $\{Ux : x \in G,\ U \in \mathcal{B}\}$ son bases para la topología de G.*

En lo sucesivo se denotará por $\mathcal{B}$ a la familia de vecindades abiertas de e_G en grupo topológico G. Dado un subconjunto E de un espacio topológico X, se define la cerradura de E como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a E. En este trabajo la cerradura de un subconjunto E será denotada como $\overline{E}$.

En un grupo G, el subconjunto $A \cdot B$ o simplemente AB se define como el conjunto $\{ab : a \in A, b \in B\}$, donde A y B son subconjuntos de G. Asimismo, A^{-1} representa al subconjunto $\{a^{-1} : a \in A\}$.

Teorema 1.1.6. *Sea G un grupo topológico.*

a) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$.

b) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^n \subseteq U$, donde $V^n = V \cdot V \cdot \dots \cdot V$, n factores.

c) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{V} \subseteq U$.

Otra forma de enunciar el inciso a) del teorema 1.1.6 es decir que las vecindades simétricas de e_G constituyen una base local para la identidad e_G del grupo topológico G.

Proposición 1.1.7. *Sean G un grupo topológico, $g \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G. Entonces:*

a) Si O es abierto, entonces los conjuntos gO, Og, O^{-1}, MO y OM son abiertos.

b) Si A es cerrado, entonces aA, Aa y A^{-1} son subconjuntos cerrados.

c) Si A y B son compactos, entonces AB y A^{-1} son compactos.

d) Se cumple que

$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{B}} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{B}} WA.$$

Teorema 1.1.8. *Sea G un grupo topológico T_0 y $\mathcal{W}$ una base local de e_G. Entonces:*

a) Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{W}$, existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

b) Para cualesquiera $U \in \mathcal{W}$ y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $Vx \subseteq U$.

c) Para cualesquiera $U \in \mathcal{W}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.

d) Para cada $U \in \mathcal{W}$, existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $V^2 \subseteq U$.

e) Para cada $U \in \mathcal{W}$, existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

f) Se cumple que

$$\{e_G\} = \bigcap \mathcal{W}.$$

Recíprocamente, si G es un grupo y $\mathcal{W}$ es una familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones anteriores entonces la familia $\mathcal{W}_G = \{Ua : a \in G,\ U \in \mathcal{W}\}$ es una base para una topología τ tal que (G, τ) es un grupo topológico T_0. Adicionalmente, la familia $\{aU : a \in G,\ U \in \mathcal{W}\}$ es una base para la misma topología en G.

Teorema 1.1.9. *Todo grupo topológico es un espacio regular.*

Proposición 1.1.10. *Todo grupo topológico T_1 es Tychonoff.*

Sea G un grupo topológico. Entonces la función l_3 definida en el lema 1.1.2 es continua. Si D es un subgrupo de G y consideramos a D con la topología que hereda como subespacio de G, entonces se cumple que la función $l_3|_D$ es continua. Por lo tanto, aplicando nuevamente el lema 1.1.2 se tiene que D es un grupo topológico. Lo anterior se resume en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.11. *Sea G un grupo topológico y D un subgrupo de G con la topología relativa como subespacio de G. Entonces D es un grupo topológico.*

Para evitar confusión entre los espacios topológicos normales y los subgrupos que son normales (desde el punto de vista algebraico), se llamará a estos últimos subgrupos invariantes.

Proposición 1.1.12. *Sea D un subgrupo de un grupo topológico G. Entonces se satisface lo siguiente:*

a) La cerradura $\overline{D}$ de D es un subgrupo de G.

b) Si D es un subgrupo invariante de G, entonces $\overline{D}$ es un subgrupo invariante de G.

c) D es abierto si y solo si su interior no es vacío.

d) Si G es Hausdorff y D es abeliano, entonces $\overline{D}$ es abeliano.

Corolario 1.1.13. *Si G es un grupo topológico, entonces $\overline{\{e\}}$ es un subgrupo cerrado e invariante de G.*

Otra propiedad interesante de los grupos topológicos es la siguiente:

Proposición 1.1.14. *Cualquier subgrupo abierto de un grupo topológico también es cerrado.*

Proposición 1.1.15. *Si U es una vecindad simétrica de la identidad e_G de un grupo topológico G, entonces $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ es un subgrupo abierto (por lo tanto, cerrado) de G.*

Usando la proposición anterior para grupos conexos tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.16. *Sea G un grupo topológico conexo y U una vecindad de la identidad e_G. Entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, es decir, cualquier grupo conexo es generado por cualquier vecindad de e_G.*

Ahora pasaremos al estudio de algunas operaciones importantes en grupos topológicos.

Sean G un grupo topológico y D un subgrupo de G. Entonces G/D es el conjunto de todas las clases laterales derechas de D, es decir, $G/D = \{Da : a \in G\}$. Introducimos en G/D una topología como sigue:

Si $\mathcal{B}$ es una base del grupo topológico G, para cada $U \in \mathcal{B}$ definamos $U^* = \{Dx : x \in U\}$ y $\mathcal{B}^* = \{U^* : U \in \mathcal{B}\}$.

Proposición 1.1.17. *Sea G un grupo topológico. Para todo subgrupo D de G, $\mathcal{B}^*$ es una base para una topología en G/D. Si D es cerrado, la topología en G/D es T_1.*

El espacio topológico G/D recibe el nombre de espacio cociente de G entre D. Si D es invariante, entonces el conjunto G/D con la operación $(Da)(Db) = Dab$, para cada $a, b \in G$, es un grupo también, en este caso G/D se llama grupo cociente.

Proposición 1.1.18. *Si G es un grupo topológico y D es un subgrupo cerrado de G, entonces la función canónica $\pi : G \longrightarrow G/D$ dada por $\pi(x) = Dx$ para todo $x \in G$ es continua y abierta.*

Teorema 1.1.19. *Sean G un grupo topológico T_1 y D un subgrupo cerrado de G. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) El espacio topológico G/D es un espacio regular y por lo tanto de Hausdorff.

b) El espacio topológico G/D es discreto si y solo si D es abierto en G.

Teorema 1.1.20. *Sean G un grupo topológico y D un subgrupo cerrado e invariante de G. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) El grupo G/D con la topología cociente es un grupo topológico.

b) La función canónica $\pi : G \longrightarrow G/D$ es un homomorfismo abierto y continuo.

c) El grupo G/D es un espacio T_1 y por lo tanto regular.

d) El grupo G/D es discreto si y solo si D es abierto.

Definición 1.1.21. *Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X y Y es perfecta si f es cerrada, sobreyectiva y para todo $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es compacto en X.*

Teorema 1.1.22. *Sean G un grupo topológico y D un subgrupo compacto, entonces la funcion canónica $\pi : G \longrightarrow G/D$ es perfecta.*

Otra importante operación en grupos topológicos es el producto. Sea $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de grupos topológicos. El producto directo o producto cartesiano de la familia η es el conjunto que consiste de los elementos $x = (x_\alpha)$, donde $x_\alpha \in G_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Tal conjunto es denotado por $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$. Si para cada par de elementos (x_α) y (y_α) del producto cartesiano definimos la operación $(x_\alpha)(y_\alpha) = (x_\alpha y_\alpha)$, entonces $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ toma una estructura de grupo. El elemento identidad de $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ es $e = (e_{G_\alpha})$ y para cada $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in I} G_\alpha$, se tiene que $(x_\alpha)^{-1} = (x_\alpha^{-1})$. La topología de Tychonoff es compatible con la estructura de grupo de $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$, pues la función $l : \prod_{\alpha\in I} G_\alpha \times \prod_{\alpha\in I} G_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ dada como $l((x_\alpha), (y_\alpha)) = (x_\alpha y_\alpha^{-1})$ es continua. Esto es, el grupo $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ dotado con la topología de Tychonoff es un grupo topológico.

Ahora pasaremos a definir algunos subgrupos importantes del producto. Sean $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y tomemos $b = (b_\alpha) \in X$. El Σ-producto de η con punto base b es el subespacio de X que consiste de todos los puntos $x = (x_\alpha) \in X$ tales que solo una cantidad numerable de x_α es distinto de b_α. Este subespacio es denotado por $\Sigma\prod\{X_\alpha : \alpha \in I\}(b)$ o por $\Sigma\prod\eta(b)$. De manera similar se define el σ-producto de η con punto base b como el subespacio de X que consiste de todos los puntos $x = (x_\alpha) \in X$ tales que solo una cantidad finita de x_α es distinta de b_α. El σ-producto se denota por $\sigma\prod\{X_\alpha : \alpha \in I\}(b)$ o por $\sigma\prod\eta(b)$.

Proposición 1.1.23. *Suponga que $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de grupos topológicos, e_α es el elemento identidad de G_α y $G = \prod_{\alpha\in I} G_\alpha$. Entonces el Σ-producto $\Sigma\prod\eta$ y el σ-producto $\sigma\prod\eta$ con punto base $e = (e_\alpha)$ son subgrupos densos de G.*

Algunas propiedades importantes de la teoría de grupos como la torsión, divisibilidad y torsión libre también resultan ser muy útiles en la teoría de grupos topológicos.

Definición 1.1.24. *Sea G un grupo y $g \in G$. El elemento g se llama de torsión si existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $g^n = e_G$. Si todo elemento de G es de torsión, entonces G es llamado de torsión. Si $g \in G$, tal que g es distinto de e_G y es un elemento de torsión, entonces el mínimo $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $g^n = e_G$ es el orden de g y se denota como $o(g) = n$. Si existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $o(g) \leq m$ para todo $g \in G$, entonces el grupo G es un grupo de torsión acotada o de exponente finito. El menor $m \in \mathbb{N}^+$ con esta propiedad se llama exponente del grupo G y usualmente se denota por $exp(G)$. Un grupo G que no tiene elementos de torsión, salvo la identidad del grupo G, se llama libre de torsión.*

Definición 1.1.25. *Supongamos que A es un subconjunto no vacío de un grupo abeliano G. Si para cualesquiera elementos distintos $a_1, \ldots, a_n \in A$ y cualesquiera enteros $m_1, \ldots, m_n$, la igualdad $m_1a_1 + \cdots + m_na_n = e$ implica que $m_ia_i = e$, para cualquiera $i = 1, \ldots, n$, entonces decimos que A es un conjunto linealmente independiente o simplemente independiente de G.*

Si el grupo G no es de torsión, se puede considerar la familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos independientes de G cuyos elementos son de orden infinito. Tal familia se puede ordenar parcialmente por la inclusión. Por el lema de Zorn, cada elemento de $\mathcal{I}$ esta contenido en un elemento maximal de $\mathcal{I}$. El siguiente resultado se puede encontrar en [39, 4.2.1].

Teorema 1.1.26. *Supongamos que A y B son elementos maximales de $\mathcal{I}$. Entonces $|A| = |B|$.*

En este contexto, denotamos por $r_0(G)$ a la cardinalidad de un elemento maximal de $\mathcal{I}$. Por lo tanto $r_0(G)$ está bien definido.

El grupo aditivo $\mathbb{R}$ de los números reales es un ejemplo de un grupo libre de torsión. Para cada entero $n \geq 2$, denotemos por $\mathbb{Z}(n)$ al grupo discreto $\{0, \ldots, n-1\}$ con adición módulo n. Si p es un número primo, entonces $\mathbb{Z}(p)$ es un grupo de torsión acotada y p es el exponente de $\mathbb{Z}(p)$.

En lo sucesivo $tor(G)$ denotará al conjunto de todos los elementos de torsión de un grupo G. Claramente si G es un grupo abeliano, entonces $tor(G)$ es un subgrupo de G. En este contexto $tor(G)$ es llamado el subgrupo de torsión de G.

Definición 1.1.27. *Un elemento g de un grupo abeliano G es divisible en G entre un entero positivo m si $g = mh$, para algún $h \in G$. Un grupo abeliano G es divisible si cada elemento de G es divisible entre cada entero positivo.*

La siguiente proposición nos muestra una manera más simple de ver a los grupos divisibles.

Proposición 1.1.28. *Sea G un grupo y consideremos el conjunto*

$$nG = \{nx : x \in G\},$$

entonces G es divisible si y solo si $G = nG$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$.

Ejemplo 1.1.29. El grupo del círculo unitario de los números complejos $\mathbb{T}$ es divisible. En efecto, de acuerdo con la proposición 1.1.28 es suficiente con demostrar la igualdad $\mathbb{T} = n\mathbb{T}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Es claro que $n\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Por lo tanto, solo resta demostrar $\mathbb{T} \subseteq n\mathbb{T}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Sean $z \in \mathbb{T}$ y $n \in \mathbb{N}^+$. Debemos demostrar que $z \in n\mathbb{T}$. Para el polinomio $nx = z$ existe $y \in \mathbb{T}$ que lo satisface. Es decir, $ny = z$ para algún $y \in \mathbb{T}$. Así $z \in n\mathbb{T}$ y, por lo tanto, $\mathbb{T} = n\mathbb{T}$.

En [4, Theorem 9.6.15] se demuestra que las propiedades de divisibilidad y conexidad son equivalentes en grupos compactos abelianos.

Definición 1.1.30. *Un subgrupo H de un grupo abeliano G se dice que es puro si $nG \cap H = nH$ para cada entero $n > 0$. Es decir, H es puro si todo elemento de H que es divisible entre n en G, también es divisible entre n en H.*

Definición 1.1.31. *Sea G un grupo abeliano, decimos que G es casi libre de torsión, si para cada $n \in \mathbb{N}^+$, el grupo $G[n] = \{x \in G : nx = e_G\}$ es finito.*

Algunos ejemplos de grupos casi libres de torsión son $\mathbb{T}$ y el grupo $\mathbb{Z}(p^\infty)$ que es el grupo que consiste de los elementos $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^{(p^n)} = 1$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. También se cumple que si G es un grupo casi libre de torsión, entonces $|tor(G)| \leq \omega$.

1.2. Grupos ω-estrechos

En esta sección se estudia la clase de grupos topológicos ω-estrechos. Estos grupos fueron introducidos por I. Guran en [19] para caracterizar a los subgrupos de productos de familias de grupos topológicos segundo numerables.

Definición 1.2.1. *Un grupo topológico G es ω-estrecho si para toda vecindad U de la identidad de G existe un conjunto numerable $A \subseteq G$ tal que $G = AU$.*

Proposición 1.2.2. *Sea G un grupo topológico ω-estrecho tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Si U es una vecindad de la identidad en G, entonces $|U| = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea U una vecindad de la identidad en G. Puesto que G es ω-estrecho, existe $A \subset G$ tal que $|A| \leq \omega$ y $G = AU$. La familia $\mathcal{U} = \{xU : x \in A\}$ es una cubierta numerable de G, donde $|xU| = |U|$ para todo $x \in A$. Como $|G| = \mathfrak{c}$, se sigue que $|U| = \mathfrak{c}$. $\square$

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos no vacíos mutuamente ajenos de X es llamada una familia celular. La celularidad de X se define por $c(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una familia celular$\} + \omega$.*

Definición 1.2.4. *La densidad de X se define como*

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso en } X\} + \omega.$$

Proposición 1.2.5. *Si G es un grupo topológico con celularidad numerable, entonces G es ω-estrecho.*

Demostración. Sea U una vecindad de e_G y supongamos que $G \neq AU$ para cada subconjunto numerable A de G. Tomemos a V como una vecindad simétrica de la identidad en G tal que $V \cdot V^{-1} \subset U$. Construyamos recursivamente una sucesión $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de elementos de G como sigue: sea $x_0 = e_G$. Si $\gamma < \omega_1$ y los elementos x_α ya fueron definidos para cada $\alpha < \gamma$, podemos tomar $x_\gamma \in G \setminus (A_\gamma \cdot U)$, donde $A_\gamma = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Por construcción, si $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$, entonces $x_{\alpha_2} \notin x_{\alpha_1}U$. Finalmente probaremos que $\{x_\alpha V : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular. Sean $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$ y supongamos que $(x_{\alpha_1}V) \cap (x_{\alpha_2}V) \neq \emptyset$. Entonces existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $x_{\alpha_1}v_1 = x_{\alpha_2}v_2$, es decir, $x_{\alpha_2} = x_{\alpha_1}v_1v_2^{-1}$ y así $x_{\alpha_2} \in x_{\alpha_1}V \cdot V^{-1} \subset x_{\alpha_1}U$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior, G es ω-estrecho. □

Puesto que $c(X) \leq d(X)$ para todo espacio X, deducimos de la proposición anterior lo siguiente:

Corolario 1.2.6. *Si G es un grupo topológico separable, entonces G es ω-estrecho.*

Los siguientes resultados muestran que la clase de grupos topológicos ω-estrechos es estable bajo operaciones de gran importancia.

Proposición 1.2.7. *Sean G y H grupos topológicos. Si G es ω-estrecho y si existe un homomorfismo continuo y sobre $f : G \longrightarrow H$, entonces H es ω-estrecho.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico ω-estrecho. Sea U una vecindad abierta de la identidad e_H de H. Como f es continua, existe una vecindad V de la identidad e_G de G tal que $f(V) \subset U$. Como G es ω-estrecho, existe un subconjunto numerable A de G tal que $AV = G$. Por lo tanto $f(A)f(V) = f(AV) = f(G) = H$, de donde, $f(A)U = H$. Como A es numerable, se tiene que $f(A)$ es numerable y por lo tanto H es ω-estrecho. □

Proposición 1.2.8. *Sea $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de grupos topológicos ω-estrechos. Entonces $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es ω-estrecho.*

Demostración. Sea U un abierto básico de G tal que $e_G = (e_{G_\alpha})_{\alpha \in I} \in U$. Digamos que $U = \prod_{\alpha \in B} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} G_\alpha$, donde B es un subconjunto finito de I. Dado que G_α es ω-estrecho para cada $\alpha \in I$, existe un subconjunto numerable A_α de G_α tal que $U_\alpha A_\alpha = G_\alpha$. Considere el subconjunto $A = \prod_{\alpha\in B} A_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus B}\{e_\alpha\}$. Como B es finito se tiene que A es un subconjunto numerable de G. Finalmente se cumple que

$$
\begin{aligned}
AU &= (\prod_{\alpha\in B} A_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus B}\{e_\alpha\})(\prod_{\alpha\in B} U_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus B} G_\alpha)\\
&= \prod_{\alpha\in B} A_\alpha U_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus B} G_\alpha\\
&= \prod_{\alpha\in B} G_\alpha \times \prod_{\alpha\in I\setminus B} G_\alpha\\
&= \prod_{\alpha\in I} G_\alpha = G.
\end{aligned}
$$

Como lo anterior sucede para cualquier abierto básico U se concluye que G es ω-estrecho. □

El siguiente resultado muestra que la propiedad de ser ω-estrecho se hereda a subgrupos.

Proposición 1.2.9. *Cualquier subgrupo de un grupo topológico ω-estrecho es ω-estrecho.*

Demostración. Sean G un grupo topológico ω-estrecho y H un subgrupo de G. Tomemos una vecindad U de la identidad e en H. Existen vecindades V y W de e en G, tales que $V\cap H = U$ y $W^{-1}W \subseteq V$. Como G es ω-estrecho, podemos encontrar un subconjunto numerable K de G tal que $K\cdot W = G$. Si $x\in K$ y xW interseca al subgrupo H, escogemos un punto $a_x \in H\cap(xW)$; en otro caso, hacemos $a_x = e$. Se tiene que el conjunto $A = \{a_x : x\in K\}$ es numerable. Finalmente veamos que $A\cdot U = H$. La inclusión $A\cdot U\subseteq H$ es clara, pues A y U son subconjuntos de H. Sea $y\in H$ un elemento arbitrario. Como $K\cdot W = G$, se tiene que existe $x\in K$ tal que $y\in xW$. Entonces $a_x\in xW$, o bien $x\in a_xW^{-1}$ y por lo tanto,

$$y \in xW \subseteq a_xW^{-1}\cdot W \subseteq a_xV.$$

Puesto que $y, a_x \in H$, concluimos que $a_x^{-1}y \in V\cap H\subseteq U$. Así, $y\in a_xU$ y la inclusión $H\subseteq A\cdot U$ queda demostrada. □

Otro resultado importante de los grupos topológicos ω-estrechos es el siguiente.

Proposición 1.2.10. *Cualquier grupo topológico ω-estrecho y primero numerable tiene una base numerable.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base local de la identidad e_G de G. Como G es ω-estrecho, para cada $n \in \omega$ existen conjuntos numerables $C_n \subset G$ tales que $U_n C_n = G$. Entonces la familia $\mathcal{D} = \{xU_n : x \in C_n,\ n \in \omega\}$ es numerable y, por lo tanto, solo resta ver que $\mathcal{D}$ es una base del grupo G.

Sea O una vecindad de un punto $a \in G$. Como $\{U_n : n \in \omega\}$ es una base local de e_G, existen $k, l \in \omega$ tales que $aU_k \subset O$ y $U_l^{-1}U_l \subset U_k$. Además existe $x \in C_l$ tal que $a \in xU_l$ y por consiguiente $x \in aU_l^{-1}$. Por lo tanto

$$xU_l \subset (aU_l^{-1})U_l = a(U_l^{-1}U_l) \subset aU_k \subset O,$$

esto es, xU_l es una vecindad abierta de a y $xU_l \subset O$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es una base numerable para G. □

El siguiente teorema es el más importante de la sección, en el se aborda una caracterización de suma importancia para los grupos topológicos ω-estrechos.

Teorema 1.2.11. [**I. Guran**] *Sea G un grupo topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) El grupo G es ω-estrecho.

b) El grupo G es topológicamente isomorfo a un subgrupo del producto topológico de alguna familia de grupos segundo numerables.

La demostración de este teorema se omitirá en este trabajo pero puede consultarse en [19] y [4, Theorem 3.4.23].

1.3. Dualidad de Pontryagin-van Kampen en grupos compactos y discretos

En la parte final de este capítulo presentaremos de manera breve algunos de los teoremas más relevantes acerca de la estructura de los grupos compactos y abelianos. Nos apoyaremos en la referencia bibliográfica [4] que hemos utilizado a lo largo de todo el trabajo. De la misma manera se recomiendan [5], [21], [20] y [35], en donde se presenta un estudio detallado de este tema.

Para comprender la estructura de los grupos compactos y abelianos, es fundamental tener un conocimiento profundo de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. Por lo tanto, en el inicio de esta sección nos enfocaremos en explorar esta importante teoría. Cabe decir que algunos de estos resultados serán de gran utilidad en capítulos posteriores.

En general, la teoría de Pontryagin-van Kampen establece una relación entre un grupo topológico abeliano G y su grupo dual $\hat{G}$, el cual consiste de todos los homomorfismos continuos de G en el grupo del círculo $\mathbb{T}$.

Definición 1.3.1. *Sea G un grupo topológico abeliano. Un carácter de G es un homomorfismo continuo $\psi : G \longrightarrow \mathbb{T}$. La colección de todos los caracteres se llama el dual de Pontryagin del grupo G o simplemente el dual del grupo G y es denotado por $\hat{G}$.*

Si para cada par de elementos $\psi_1, \psi_2 \in \hat{G}$ y $g \in G$, se define la operación $(\psi_1 + \psi_2)(g) = \psi_1(g)\psi_2(g)$, entonces $\hat{G}$ se convierte en un grupo abeliano, pues $\mathbb{T}$ es un grupo abeliano.

Sea G un grupo topológico abeliano y compacto, entonces el grupo dual $\hat{G}$ de G dotado con la topología discreta se transforma en un grupo topológico. De manera análoga, si G es un grupo topológico abeliano y discreto, entonces $\hat{G}$ con la topología de la convergencia puntual se convierte en un grupo topológico, [35, Proposition 29]. De este modo, si G es compacto, equiparemos a su dual con la topología discreta; mientras que, si G es discreto, el dual tendrá la topología de la convergencia puntual.

Para un grupo topológico abeliano G se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si G es compacto, entonces $\hat{G}$ es discreto, [20, Theorem 23.17].

b) Si G es discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto, [20, Theorem 23.17].

c) Si G es un grupo compacto, entonces G es conexo si y solo si $\hat{G}$ es libre de torsión, [20, Theorem 24.25].

d) Si G es compacto y Hausdorff, entonces G es metrizable si y solo si $\hat{G}$ es numerable, [20, Theorem 24.17].

Por lo anterior, podemos ver que hay propiedades topológicas que pueden caracterizarse mediante propiedades algebraicas de su grupo dual.

Antes de continuar, enunciamos algunos conceptos conocidos sobre C_p-teoría. Sean X un espacio de Tychonoff y G un grupo topológico. Denotamos por $C_p(X,G)$ al conjunto de todas las funciones continuas de X en G. Si $f_1, f_2 \in C_p(X,G)$, entonces $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$ define una operación binaria en $C_p(X,G)$. Con la topología de la convergencia puntual y con la operación $+$ introducida anteriormente, el espacio $C_p(X,G)$ es un grupo topológico. Para cada $x \in X$ existe una correspondiente función evaluación $\hat{x} : C_p(X,G) \longrightarrow G$, definida por $\hat{x}(f) = f(x)$, para cada $f \in C_p(X,G)$. Claramente la función $\hat{x}$ es continua. Si Y es un subespacio de $C_p(X,G)$, definimos la función $\Psi_Y : X \longrightarrow C_p(Y,G)$ que asigna a cada $x \in X$ la restricción de $\hat{x}$ a el espacio Y. La función Ψ_Y es conocida como la función reflexión o evaluación y es continua para cada subespacio Y de $C_p(X,G)$.

Si H y G son grupos topológicos, denotamos por $Hom_p(H,G)$ al subespacio de $C_p(H,G)$ que consiste de todos los homomorfismos continuos de H a G.

Proposición 1.3.2. *Si G y H son grupos topológicos, entonces el subespacio $Hom_p(H,G)$ es cerrado en $C_p(H,G)$.*

Demostración. Sean x, y elementos distintos de H y consideremos el conjunto:

$$F(x,y) = \{f \in C_p(H,G) : f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1}\}.$$

Entonces $F(x,y)$ es un subespacio cerrado de $C_p(H,G)$ para cada $x, y \in H$. El subespacio $Hom_p(H,G)$ es la intersección de los conjuntos $F(x,y)$, con $x, y \in H$. Por lo anterior $H_p(H,G)$ es cerrado en $C_p(H,G)$. □

Proposición 1.3.3. *Sean G y H grupos topológicos. Si G es abeliano, entonces $Hom_p(H,G)$ es un subgrupo topológico del grupo topológico $C_p(H,G)$.*

Demostración. En la demostración usaremos una notación aditiva para los grupos G y $Hom_p(H,G)$. Sean $x, y \in H$ y $f, g \in Hom_p(H,G)$. Entonces para el elemento $f + g$ de $C_p(H,G)$ se tiene:

$$\begin{aligned}(f+g)(xy) &= f(xy) + g(xy) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y)\\ &= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y))\\ &= (f+g)(x) + (f+g)(y).\end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}(f+g)(x^{-1}) &= f(x^{-1}) + g(x^{-1}) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))\\ &= -((f+g)(x)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f+g \in Hom_p(H,G)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}(-f)(xy) &= -(f(xy)) = -(f(x)+f(y)) = -f(x)-f(y) \\ &= (-f)(x)+(-f)(y).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}(-f)(x^{-1}) &= -(f(x^{-1})) = -(-(f(x))) \\ &= -((-f)(x)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $-f \in Hom_p(H,G)$. Por lo anterior, $Hom_p(H,G)$ es cerrado bajo las operaciones de suma e inverso. Por lo tanto $Hom_p(H,G)$ es un subgrupo del grupo topológico $C_p(H,G)$. □

Teorema 1.3.4. *Sean G y H grupos topológicos. Si G es abeliano y Ψ es la función reflexión Ψ_Y, donde $Y = Hom_p(H,G)$, entonces Ψ es un homomorfismo continuo de H al grupo topológico abeliano $Hom_p(Hom_p(H,G),G)$.*

Demostración. Claramente Ψ es una función continua. Por la proposición 1.3.3, $Hom_p(Hom_p(H,G),G)$ es un grupo topológico. Puesto que $C_p(H,G)$ es abeliano, se tiene que $Hom_p(Hom_p(H,G),G)$ es un grupo abeliano.

Para ver que Ψ es homomorfismo, tomemos $a,b \in H$ y $f \in Y$, donde $Y = Hom_p(H,G)$. Entonces $\Psi(ab)(f) = f(ab) = f(a)f(b) = \Psi(a)(f)\Psi(b)(f)$ y por lo tanto, $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$. De manera análoga se puede demostrar que $\Psi(-a) = -\Psi(a)$. Por lo anterior se tiene que Ψ es un homomorfismo continuo. □

Proposición 1.3.5. [**L. S. Pontryagin**] *Si G es un grupo abeliano y discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto y Hausdorff.*

Demostración. Si G es discreto, entonces cualquier función $f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ será continua. Por lo tanto, $C_p(G,\mathbb{T})$ coincide con el producto $\mathbb{T}^G$ con la topología de Tychonoff. Como $\mathbb{T}^G$ es compacto y Hausdorff, se tiene que $C_p(G,\mathbb{T})$ es compacto y Hausdorff. Por otro lado, $\hat{G}$ coincide con $Hom_p(G,\mathbb{T})$. Por la proposición 1.3.2 se tiene que $\hat{G}$ es cerrado en $C_p(G,\mathbb{T})$. Por lo tanto $\hat{G}$ es compacto y Hausdorff. □

La siguiente proposición es una consecuencia del teorema 1.3.4.

Proposición 1.3.6. *Para cualquier grupo topológico compacto y abeliano G, la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un homomorfismo continuo.*

Lema 1.3.7. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Si $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es la función evaluación, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) La función evaluación Ψ es uno a uno.

b) El grupo G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Es decir, para cada $g, h \in G$, con $g \neq h$, existe $f \in \hat{G}$ tal que $f(g) \neq f(h)$.

Demostración. Para la prueba de la necesidad, supongamos que $g, h \in G$, $g \neq h$, son tales que $f(g) = f(h)$, para cada $f \in \hat{G}$. Entonces $\hat{g}(f) = \hat{h}(f)$, para todo $f \in \hat{G}$. Por lo tanto $\hat{g} = \hat{h}$, es decir, $\Psi(g) = \Psi(h)$. Como Ψ es uno a uno, se tiene que $g = h$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto G tiene suficientes caracteres para separar puntos.

Para demostrar la suficiencia, supongamos que G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Sean $g, h \in G$ tales que $g \neq h$. Entonces existe $f \in \hat{G}$ tal que $f(g) \neq f(h)$, es decir, $\hat{g}(f) \neq \hat{h}(f)$. Por lo tanto $\hat{g} \neq \hat{h}$. De donde $\Psi(g) \neq \Psi(h)$. $\square$

La demostración del siguiente teorema fundamental puede consultarse en [36] y en [4, Theorem 9.4.11].

Teorema 1.3.8. [**Peter, Weyl**] *Todo grupo compacto y abeliano tiene suficientes caracteres para separar puntos.*

Como una consecuencia del teorema 1.3.8 y el lema 1.3.7 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.3.9. *Para cualquier grupo topológico compacto y abeliano G, la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es uno a uno.*

El siguente ejemplo presenta al dual del grupo discreto $\mathbb{Z}$, el cual, por la proposición 1.3.5 debe ser compacto y Hausdorff.

Ejemplo 1.3.10. El grupo dual de Pontryagin $\hat{\mathbb{Z}}$ del grupo discreto $\mathbb{Z}$ es el grupo compacto $\mathbb{T}$. Si $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ es un carácter de $\mathbb{Z}$, este está determinado por el valor $h(1) \in \mathbb{T}$, con $1 \in \mathbb{Z}$, pues $\mathbb{Z}$ es generado por 1. Además $h(1)$ puede ser cualquier elemento de $\mathbb{T}$. Por lo anterior cualquier elección de un número complejo en $\mathbb{T}$ da un carácter en $\hat{\mathbb{Z}}$. Finalmente, si V es un abierto básico de h en la topología de la convergencia puntual en $\hat{\mathbb{Z}}$, entonces V corresponde a una vecindad arbitraria de $h(1)$ en el espacio $\mathbb{T}$. De esto, $\hat{\mathbb{Z}}$ es isomorfo y homeomorfo al grupo $\mathbb{T}$.

Los siguientes resultados son hechos conocidos sobre el grupo de los números reales los cuales se mencionan con el propósito de establecer el grupo dual del grupo $\mathbb{T}$.

Lema 1.3.11. *Cada subgrupo no discreto H de $\mathbb{R}$ es denso.*

Demostración. Debemos probar que $H\cap(x-\epsilon, x+\epsilon) \neq \emptyset$ para cualquier $\epsilon > 0$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Como H no es discreto, 0 no es un punto aislado, entonces existe $x_\epsilon \in H \cap (0, \epsilon)$. Como los intervalos $[nx_\epsilon, (n+1)x_\epsilon]$, $n = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots$ cubren a $\mathbb{R}$ y tienen tamaño menor a ϵ, para alguna n, se cumple que $nx_\epsilon \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Claramente $nx_\epsilon \in H$, pues H es subgrupo. $\square$

Lema 1.3.12. *Sea A un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$. Entonces $A = \{0\}$, $A = \mathbb{R}$ o A es un subgrupo discreto de la forma $a\mathbb{Z}$, para alguna $a > 0$.*

Demostración. Si A es cerrado y propio, entonces A no es denso en $\mathbb{R}$. Así A debe ser discreto por el lema 1.3.11. Si $A \neq \{0\}$, entonces A contiene algún número real positivo b. Entonces $[0, b] \cap A$ es un subconjunto cerrado no vacío del subconjunto compacto $[0, b]$. Por lo tanto $[0, b] \cap A$ es compacto y discreto. De donde $[0, b] \cap A$ es finito. Por lo anterior existe $a > 0$, tal que a es el elemento mínimo positivo en A. Para cada $x \in A$, sea $\left[\frac{x}{a}\right]$ la parte entera de $\frac{x}{a}$. Entonces $x - \left[\frac{x}{a}\right] a \in A$ y como $\left[\frac{x}{a}\right] \leq \frac{x}{a} < 1 + \left[\frac{x}{a}\right]$ se tiene que $0 \leq x - \left[\frac{x}{a}\right] a < a$. Como a es el mínimo elemento positivo de A, se sigue que

$$x - \left[\frac{x}{a}\right] a = 0.$$

Por lo tanto, $x = na$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

El siguiente resultado determina los subgrupos cerrados de $\mathbb{T}$. En particular declara que cada subgrupo cerrado infinito de $\mathbb{T}$ coincide con $\mathbb{T}$.

Proposición 1.3.13. *Sea K un subgrupo de $\mathbb{T}$. Si K es cerrado, entonces $K = \mathbb{T}$ o K es cíclico finito.*

Demostración. Sea K un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. Además supongamos que $K \neq \{1\}$. Recordando que $\mathbb{T}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, consideremos la función canónica $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Entonces π es un homomorfismo continuo y abierto. Por lo anterior, $\pi^{-1}(K)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$ y por el lema 1.3.12, $\pi^{-1}(K) = \mathbb{R}$ o $\pi^{-1}(K)$ es un grupo cíclico discreto. Si $\pi^{-1}(K) = \mathbb{R}$, entonces $K = \pi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pues π es una función sobreyectiva. Si $\pi^{-1}(K) = \langle r \rangle$, para algún $r \in \mathbb{R}$, entonces $K = \langle \pi(r) \rangle$. Además como

$\pi^{-1}(K)$ es discreto, y la función π es abierta, tenemos que K es discreto. Puesto que $\mathbb{T}$ es compacto, se tiene que K es finito. $\square$

Como una consecuencia de la proposición 1.3.13 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.3.14. *Si K es un subgrupo cerrado y conexo de $\mathbb{T}$, entonces $K = \mathbb{T}$ o $K = \{1\}$.*

Demostración. Como K es cerrado, por la proposición 1.3.13 se tiene que $K = \mathbb{T}$ o K es cíclico finito. Como K es conexo, $K = \mathbb{T}$ o $K = \{1\}$. $\square$

Proposición 1.3.15. *Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe solo un subgrupo de $\mathbb{T}$ que consta de exactamente n elementos.*

Ahora se expone el grupo dual de Pontryagin del grupo del círculo $\mathbb{T}$.

Ejemplo 1.3.16. El grupo dual de Pontryagin $\hat{\mathbb{T}}$ del grupo compacto $\mathbb{T}$ es el grupo discreto $\mathbb{Z}$. Sea $h : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ un carácter de $\hat{\mathbb{T}}$ y denotemos por K al nucleo de h. Si h no es trivial, entonces por la proposición 1.3.13, K es un subgrupo cíclico finito de $\mathbb{T}$. Por la proposición 1.3.15, existe solo un subgrupo de $\mathbb{T}$ que consta de exactamente n elementos, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, cada carácter $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ tiene la forma $f(z) = z^n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Por lo anterior, existe una correspondencia entre el grupo de caracteres y el conjunto de números enteros. Por lo tanto, $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$.

Definición 1.3.17. *Supongamos que G es un grupo topológico compacto o discreto. Decimos que G satisface la dualidad de Pontryagin o que G es un grupo reflexivo si la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico.*

Los siguientes resultados muestran que los grupos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}$ satisfacen la dualidad de Pontryagin.

Proposición 1.3.18. *La función evaluación $\Psi : \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\hat{\mathbb{T}}}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. La función identidad separa los puntos de $\mathbb{T}$ y por el lema 1.3.7 se tiene que la función evaluación Ψ de $\mathbb{T}$ a $\hat{\hat{\mathbb{T}}}$ es uno a uno. Como $\mathbb{T}$ es compacto, se tiene que $\Psi(\mathbb{T})$ es un subgrupo cerrado infinito de $\hat{\hat{\mathbb{T}}}$. Por los ejemplos anteriores tenemos que $\mathbb{T} = \hat{\hat{\mathbb{T}}}$. Por la proposición 1.3.13 tenemos que $\Psi(\mathbb{T}) = \hat{\hat{\mathbb{T}}}$. Finalmente como Ψ es continua y $\mathbb{T}$ es compacto, tenemos que Ψ es un isomorfismo topológico. $\square$

Proposición 1.3.19. *La función evaluación $\Psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\hat{\mathbb{Z}}}$ es un isomorfismo topológico.*

Proposición 1.3.20. *Sea K un grupo topológico cíclico finito. Entonces $\hat{K}$ es isomorfo a K.*

Demostración. Suponga que $K = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Entonces $\psi \in \hat{K}$ si y solo si $\psi(1) = z \in \mathbb{T}$, con $z^n = 1$. Es decir $\psi(1)$ solo tiene n posibilidades, a saber, las n-ésimas raices de la unidad. Por lo tanto, la correspondencia $\psi \longrightarrow \psi(1) \in W$, donde, $W = \{e^{\frac{2\pi i k}{n}} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ es una biyección. Por lo tanto, $\hat{K} \simeq W \simeq K$. $\square$

Proposición 1.3.21. *La función evaluación de K al grupo $\hat{\hat{K}}$ es un isomorfismo topológico, para cualquier grupo cíclico finito K con la topología discreta.*

Por las proposiciones anteriores se sigue que $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ y cualquier grupo cíclico finito satisfacen la dualidad de Pontryagin. De acuerdo con la teoría de grupos, un grupo G se dice finitamente generado si existe un subconjunto finito S de G tal que $\langle S \rangle = G$. Cualquier grupo abeliano finitamente generado es el producto de un número finito de grupos cíclicos, finitos o infinitos.

El siguiente teorema puede encontrarse en [38].

Teorema 1.3.22. [**L. S. Pontryagin**] *Supongamos que G es el producto de una colección finita de grupos abelianos y discretos G_i, $i = 1, \dots, m$, donde cada G_i satisface la dualidad de Pontryagin, X_i es el grupo de caracteres de G_i, $X = \prod_{i=1}^m X_i$, y $[x, a] = x_1(a_1) \cdot \ldots \cdot x_m(a_m)$, para cada $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$ y cada $a = (a_1, \dots, a_m) \in G$. Entonces $[\cdot, \cdot]$ cumple lo siguiente:*

a) Para cada $x \in X$, la correspondencia $a \longrightarrow [x, a]$, donde a corre sobre G, es un carácter sobre el grupo G.

b) Para cada carácter $f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ de G, existe $x \in X$ tal que $f(a) = [x, a]$, para cada $a \in G$.

c) Para cada $a \in G$, la correspondencia $x \longrightarrow [x, a]$, donde x corre sobre X, es un carácter continuo sobre el grupo compacto X.

d) Para cada carácter continuo $\psi : X \longrightarrow \mathbb{T}$, existe $a \in G$ tal que $\psi(x) = [x, a]$, para cada $x \in X$.

Demostración.

Primero probemos a). Utilizando una notación aditiva para el grupo G se tiene que:

$$\begin{aligned}
[x, a+b] &= \prod_{k=1}^{m} x_k(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{m} x_k(a_k) \cdot \prod_{k=1}^{m} x_k(b_k) \\
&= [x, a] \cdot [x, b],
\end{aligned}$$

para cualesquiera $a, b \in G$. Así la correspondencia $a \longrightarrow [x, a]$ es un carácter en G.

Para demostrar b) notemos que G_i puede ser identificado canónicamente con el subgrupo de G que consiste de todos los $a \in G$ tales que cada coordenada a_j de a, excepto a_i, es el elemento identidad e_j de G_j.

Sea $x_i = f|_{G_i}$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Entonces x_i es un carácter en G_i. Consideremos $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$. Tomemos cualquier $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G$. Bajo esta interpretación de G_i, tenemos que $G_i \subset G$ y $a = a_1 + \cdots + a_m$. Así tenemos que

$$[x, a] = \prod_{k=1}^{m} x_k(a_k) = \prod_{k=1}^{m} f(a_k) = f(a).$$

La prueba de c) es análoga a la prueba de 1.

Finalmente demostremos d). Podemos emplear el mismo procedimiento del inciso b) para pensar a X_i como un subgrupo topológico de X. Entonces $\psi_i = \psi|_{X_i}$ es un carácter continuo en X_i, para cada $i = 1, \ldots, m$. Dado que G_i satisface la dualidad de Pontryagin, existe $a_i \in G_i$ tal que $\psi(x_i) = x_i(a_i)$, para cada $x_i \in X_i$. Sea $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G$. Entonces $\psi(x) = [x, a]$, para cada $x \in X$. □

Como una consecuencia inmediata del teorema 1.3.22 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.3.23. *Supongamos que G es el producto de una cantidad finita de grupos abelianos discretos G_i, $i = 1 \ldots, m$, donde cada G_i satisface la dualidad de Pontryagin. Entonces el grupo dual $\hat{G}$ de G es el producto de los grupos duales $\hat{G}_i$, $i = 1 \ldots, m$, y los grupos G y $\hat{G}$ también satisfacen la dualidad de Pontryagin.*

Corolario 1.3.24. *Supongamos que G es el producto de una colección finita de grupos compactos elementales (el grupo topológico $\mathbb{T}$ y todos los grupos cíclicos finitos). Entonces G satisface la dualidad de Pontryagin.*

Demostración. La prueba se sigue del corolario 1.3.23 y las proposiciones 1.3.18 y 1.3.21. □

Otro resultado interesante acerca de los grupos compactos elementales es el siguiente:

Proposición 1.3.25. *Supongamos que F es un subgrupo cerrado del grupo topológico $\mathbb{T}^n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces F es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales.*

Demostración. La demostración se hará por inducción. Usando la proposición 1.3.13 se tiene el caso cuando $n = 1$. Supongamos que cualquier subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^{n-1}$ es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales. Considere la proyección natural p de $\mathbb{T}^n$ sobre $\mathbb{T}^{n-1}$, donde $n > 1$. Como F es cerrado, $p(F)$ es cerrado, así satisface la hipótesis, es decir, $p(F)$ es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales. Por la proposición 1.3.13 se tiene que $K = \ker(p|F)$ es finito o $K = \ker(p) = \mathbb{T}$, pues K es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. Por lo tanto F es topológicamente isomorfo al producto $K \times p(F)$. □

Las siguientes proposiciones serán de utilidad en las demostraciones de los teoremas de dualidad expuestos al final de esta sección.

Proposición 1.3.26. *Supongamos que G es un grupo abeliano y compacto. Si f es un elemento de $\hat{\hat{G}}$, esto es, f es un homomorfismo de $\hat{G}$ a $\mathbb{T}$, entonces para cada conjunto finito $h_1, \ldots, h_m$ de elementos de $\hat{G}$, existe $a \in G$ tal que $f(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$.*

Demostración. Consideremos el homomorfismo continuo $\rho : G \longrightarrow \mathbb{T}^m$ dado como $\rho(g) = (h_1(g), \ldots, h_m(g))$. Sea $F = \ker(\rho) = \bigcap_{i=1}^{m} \ker h_i$, entonces F es un subgrupo cerrado de G. Por lo tanto, el grupo cociente G/F es topológicamente isomorfo a $\rho(G)$. Como G es compacto se tiene que G/F es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^m$. Así G/F es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales, por la proposición 1.3.25. Ahora por el corolario 1.3.24 se tiene que G/F

satisface la dualidad de Pontryagin. Sea $\pi : G \longrightarrow G/F$ el homomorfismo cociente. Consideremos la función $\pi^* : \widehat{G/F} \longrightarrow \hat{G}$, donde $\pi^*(q) = q \circ \pi$, para cada $q \in \widehat{G/F}$. Entonces π^* es un isomorfismo de $\widehat{G/F}$ sobre un subgrupo M de $\hat{G}$ tal que $h_i \in M$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Sean $q_1, \ldots, q_m$ en $\widehat{G/F}$ tales que $\pi^*(q_i) = h_i$, para cada $i = 1 \ldots, m$.

Por otro lado, $\phi = f \circ \pi^*$ es un carácter en $\widehat{G/F}$. Como $\widehat{G/F}$ satisface la dualidad de Pontryagin existe $c \in G/F$ tal que $\phi(q_i) = q_i(c)$, para $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, $\phi(q_i) = f(\pi^*(q_i)) = f(h_i)$, para $i = 1, \ldots, m$. Tomemos $a \in G$ tal que $\pi(a) = c$. Como $h_i = q_i \circ \pi$, se tiene que $h_i(a) = q_i(\pi(a)) = q_i(c)$. Así, $f(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. □

Proposición 1.3.27. *Existe una vecindad abierta V de la identidad 1 del grupo $\mathbb{T}$ tal que el único subgrupo de $\mathbb{T}$ contenido en V es $\{1\}$. De hecho, se puede tomar la vecindad $V = \{e^{\pi i x} : \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$.*

Proposición 1.3.28. *Para cualquier grupo abeliano y compacto G y cualquier subgrupo propio cerrado H de G, existe un carácter no trivial f en G tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$.*

Demostración. Como G es compacto se tiene que G/H es un grupo topológico compacto, además, como H es un subgrupo propio cerrado de G se sigue que G/H no es trivial. Aplicando el teorema 1.3.8, existe un carácter no trivial f' en el grupo cociente G/H. Sea $f = f' \circ \pi$, donde π es el homomorfismo cociente de G sobre G/H. Claramente, f es un carácter de G y $f(h) = 1$ para cada $h \in H$. □

El siguiente resultado muestra que cada grupo topológico discreto tiene suficientes caracteres para separar puntos.

Proposición 1.3.29. *Para cualquier grupo abeliano G y cualquier elemento $a \in G$ distinto de la identidad e_G de G, existe un homomorfismo f de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$ tal que $f(a) \neq 1$.*

De manera análoga, utilizando la proposición 1.3.29 en el cociente G/H obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.30. *Para cualquier grupo abeliano y discreto G y cualquier subgrupo propio H de G, existe un carácter no trivial f en G tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$.*

Presentamos a continuación los resultados más importantes de esta sección, los cuales demuestran que todo grupo abeliano compacto o discreto satisface la dualidad de Pontryagin-van Kampen. A estos teoremas se les suele llamar los teoremas de dualidad para grupos compactos y discretos.

El teorema 1.3.31 fue probado por Pontryagin para grupos abelianos, compactos y metrizables en [37]. Poco después se extendió a grupos abelianos, localmente compactos no necesariamente metrizables por E. van Kampen en [24].

Teorema 1.3.31. [**L. S. Pontryagin, E. van Kampen**] *Si G es un grupo abeliano y compacto, entonces la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 1.3.6 se cumple que la función evaluación Ψ de G sobre $\hat{\hat{G}}$ es un homomorfismo continuo. Por el teorema 1.3.8, existen suficientes caracteres en G para separar puntos de G, por lo tanto, por el corolario 1.3.9, la función evaluación Ψ es uno a uno.

Puesto que G es compacto, se sigue que Ψ es un isomorfismo topológico de G sobre el subgrupo cerrado $B = \Psi(G)$ de $\hat{\hat{G}}$. Para demostrar que la función evaluación es un isomorfismo topológico solo resta demostrar que $B = \hat{\hat{G}}$.

Supongamos lo contrario. Sea $M = \hat{\hat{G}}$. Entonces M/B es un grupo topológico abeliano, compacto y no trivial. Como B es un subgrupo cerrado de $\hat{\hat{G}}$, por la proposición 1.3.28, podemos encontrar un carácter no trivial ξ en M tal que $\xi(b) = 1$, para cada $b \in B$. Además, por la proposición 1.3.27, existe una vecindad V de 1 en $\mathbb{T}$ tal que V no contiene subgrupos no triviales. Como ξ es continua, existe una vecindad abierta W del elemento identidad e_M de M tal que $\xi(W) \subset V$.

De acuerdo con la definición de topología de la convergencia puntual, existe una colección finita $h_1, h_2, \ldots, h_m$ de elementos de $\hat{G}$ y $\varepsilon > 0$ tal que la siguiente condición se cumple:

$$\text{si } f \in M \text{ y } |f(h_i) - 1| < \varepsilon \text{ para cada } i = 1, \ldots, m, \text{ entonces } f \in W. \quad (1.1)$$

Sea $L = \{f \in M : f(h_i) = 1 \text{ para cada } i = 1, \ldots, m\}$. Entonces L es un subgrupo de M y $L \subset W$. Puesto que $\xi(W) \subset V$, entonces $\xi(L) \subset V$. Como ξ es un homomorfismo, $\xi(L)$ es un subgrupo de $\mathbb{T}$. Así $\xi(L)$ es un subgrupo de $\mathbb{T}$ contenido en V. Por la elección de V se sigue que $\xi(L) = \{1\}$.

Tomemos ahora cualquier $f \in M$. Demostraremos que $\xi(f) = 1$. Por la proposición 1.3.26, existe $a \in G$ tal que $f(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Por la definición de la función evaluación Ψ, para $g = \Psi(a)$ se cumple también que $g(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto $(fg^{-1})(h_i) = 1$, para cada $i = 1, \ldots, m$, es decir, $fg^{-1} \in L$. Así $\xi(fg^{-1}) = 1$ y nuevamente, como ξ es un homomorfismo se tiene que $\xi(f) = \xi(g)$. Como $g = \Psi(a) \in \Psi(G) = B$, tenemos que $\xi(g) = 1$, por la elección de ξ. De esto último se tiene que $\xi(f) = 1$. Por la arbitrariedad de f, se tiene que $\xi(f) = 1$ para cada $f \in M$, pero esto es una contradicción pues ξ es un carácter no trivial. Por lo tanto $B = \hat{\hat{G}}$ y así la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico. $\square$

Teorema 1.3.32. *Si G es un grupo abeliano y discreto, entonces la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo (topológico).*

Demostración. Primero veamos que Ψ es uno a uno. Sean $g, h \in G$, tales que $g \neq h$. Por lo anterior se tiene que $gh^{-1} \neq e_G$. Así, por la proposición 1.3.29 existe un carácter f de G a $\mathbb{T}$ tal que $f(gh^{-1}) \neq e_G$. De donde $f(g) \neq f(h)$. Por lo tanto, $\hat{g}(f) \neq \hat{h}(f)$, así $\hat{g} \neq \hat{h}$. Por la definición de Ψ se tiene que $\Psi(g) \neq \Psi(h)$. Por lo tanto, Ψ es uno a uno. Por el teorema 1.3.4 tenemos que Ψ es un homomorfismo. Así resta probar que Ψ es sobreyectiva. Supongamos por el contrario que Ψ no es sobreyectiva. Sea $H = \Psi(G)$. Entonces H es un subgrupo propio del grupo abeliano y discreto $\hat{\hat{G}}$. Por el corolario 1.3.30, existe un carácter no trivial $f : \hat{\hat{G}} \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$.

Por otro lado, puesto que G es discreto se tiene que $\hat{G}$ es compacto. Aplicando el teorema 1.3.31 se tiene que la función evaluación de $\hat{G}$ a su segundo grupo dual es sobreyectiva. Así, para el carácter f existe $\chi \in \hat{G}$ tal que

$$f(y) = y(\chi), \text{ para cada } y \in \hat{\hat{G}}. \tag{1.2}$$

Como f es un carácter no trivial se tiene que χ es un carácter no trivial en G. Por lo tanto, existe $a \in G$ tal que $\chi(a) \neq 1$.

Tomemos $h_0 = \Psi(a)$. Entonces $h_0(\chi) = \chi(a) \neq 1$. Por otro lado, $f(h_0) = 1$, pues $h_0 \in H = \Psi(G)$. Finalmente, por (1.2) tenemos que $h_0(\chi) = f(h_0)$. Por lo tanto, $h_0(\chi) = 1$ es una contradicción. Así se tiene que Ψ es sobreyectiva y, por lo tanto, un isomorfismo. $\square$

1.4. Teoremas estructurales para los grupos compactos abelianos

El propósito de esta sección es estudiar algunas propiedades de los grupos abelianos y compactos utilizando la teoría de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. Los siguientes resultados técnicos serán de utilidad más adelante.

Corolario 1.4.1. *Supongamos que G es un grupo abeliano, compacto o discreto, y H un subgrupo cerrado de $\hat{G}$ que separa elementos de G. Entonces $H = \hat{G}$.*

Demostración. Supongamos que $H \neq \hat{G}$. Como G es un grupo abeliano, compacto o discreto, aplicando las proposiciones 1.3.30 y 1.3.28, existe un carácter no trivial f de $\hat{G}$, tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$. Por los teoremas 1.3.31 y 1.3.32, existe $a \in G$, tal que $f(y) = y(a)$, para cada $y \in \hat{G}$. Además $a \neq e_G$, pues f es no trivial. Como H separa los elementos de G, existe $h \in H$ tal que $h(a) \neq 1$. Por otro lado, por la elección de f y de a tenemos que $h(a) = f(h) = 1$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 1.4.2. *Sea G un grupo topológico, compacto o discreto, y H un subgrupo cerrado de G. Entonces la función restricción $\phi : \hat{G} \longrightarrow \hat{H}$ dada por $\phi(f) = f|_H$, para cada $f \in \hat{G}$, es un homomorfismo continuo y abierto del grupo topológico $\hat{G}$ sobre el grupo topológico $\hat{H}$.*

Demostración. Claramente ϕ es un homomorfismo continuo. Como $\hat{G}$ y $\hat{H}$ son ambos compactos o discretos, la función ϕ es cerrada y, por lo tanto, cociente. De esto se sigue que ϕ es abierta. Solo falta demostrar que ϕ es sobreyectiva. El subgrupo $\phi(\hat{G})$ separa los elementos de H, pues $\hat{G}$ separa los elementos de G. Como ϕ es cerrada, $\phi(\hat{G})$ es un subgrupo cerrado de $\hat{H}$. Se sigue del corolario 1.4.1 que $\phi(\hat{G}) = \hat{H}$. □

Teorema 1.4.3. *Suponga que G es un grupo abeliano, compacto o discreto, H es un subgrupo cerrado de G, y f es un carácter continuo en H. Entonces existe un carácter continuo g en G tal que $g|_H = f$.*

Demostración. Por la proposición 1.4.2, la función restricción $\phi : \hat{G} \longrightarrow \hat{H}$ dada por $\phi(f) = f|_H$, para cada $f \in \hat{G}$, es un homomorfismo continuo y abierto del grupo topológico $\hat{G}$ sobre el grupo topológico $\hat{H}$. En particular, si f es un carácter continuo en H, como ϕ es sobreyectiva, existe $g \in \hat{G}$ tal que $g|_H = f$. □

Teorema 1.4.4. *Si G es un grupo finito abeliano, entonces el grupo $\hat{G}$ es isomorfo a G.*

Demostración. Cualquier grupo abeliano finito es el producto de un número finito de grupos cíclicos. Por la proposición 1.3.20, el grupo de caracteres de un grupo cíclico K es isomorfo a K. Por el corolario 1.3.23 se tiene que $\hat{G}$ es isomorfo a G. $\square$

Teorema 1.4.5. *Para cualquier grupo abeliano, discreto y finitamente generado G, el grupo dual $\hat{G}$ es el producto de una familia finita de grupos cada uno de los cuales es o bien un grupo cíclico finito o el grupo del círculo $\mathbb{T}$.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo abeliano, discreto y finitamente generado. Entonces G es el producto de una colección finita de grupos, cada uno de los cuales es un grupo cíclico finito o el grupo discreto $\mathbb{Z}$. Aplicando la proposición 1.3.20, el corolario 1.3.23 y el hecho que $\hat{\mathbb{Z}}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}$, llegamos a la conclusión deseada. $\square$

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [13, Theorem 1.1.14].

Teorema 1.4.6. *Si el peso de un espacio topológico X es menor o igual a $\mathfrak{m}$, entonces para cualquier familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de X existe $S_0 \subset S$ tal que $|S_0| \leq \mathfrak{m}$ y $\bigcup_{s\in S_0} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$.*

El próximo resultado apoyado de la dualidad de Pontryagin muestra que una propiedad puramente topológica corresponde a una propiedad de una naturaleza totalmente diferente en el grupo dual.

Teorema 1.4.7. *El peso de un grupo abeliano compacto e infinito G coincide con la cardinalidad de su grupo dual.*

Demostración. Sea e el elemento identidad de G. Consideremos los conjuntos $X = G\setminus\{e\}$, y $F_f = X \cap \ker(f)$, para cada $f \in \hat{G}$. Entonces $\xi = \{F_f : f \in \hat{G}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tales que $\bigcap \xi = \emptyset$, pues los caracteres continuos de G separan elementos de G. Sea τ el peso de G. De acuerdo con el teorema 1.4.6, existe una subfamilia η de ξ tal que $\bigcap \eta = \emptyset$ y $|\eta| \leq \tau$. En otras palabras, existe un subconjunto H de $\hat{G}$ tal que $|H| \leq \tau$ y $\bigcap\{\ker(f) : f \in H\} = \{e\}$. Además, podemos suponer que H es un subgrupo de $\hat{G}$. Puesto que H separa elementos de G, se sigue del corolario 1.4.1 que $H = \hat{G}$. Por lo tanto $|\hat{G}| \leq \tau$.

Finalmente, supongamos que $|\hat{G}| = \tau$ para algún cardinal $\tau \geq \omega$. Como $\hat{G}$ es discreto se tiene que el espacio $\hat{\hat{G}}$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{T}^{\hat{G}} \cong \mathbb{T}^{\tau}$. Denotemos por $w(\mathbb{T}^{\tau})$ al peso de $\mathbb{T}^{\tau}$. Como G es homeomorfo a $\hat{\hat{G}}$, y $w(\mathbb{T}^{\tau}) \leq \tau$, se sigue que $w(G) \leq \tau$. Por lo tanto $w(G) = |\hat{G}|$. □

El siguiente teorema muestra una caracterización de los grupos topológicos metrizables a partir del primer axioma de numerabilidad.

Teorema 1.4.8. [**G. Birkhoff, S. Kakutani**] *Un grupo topológico es metrizable si y solo si es primero numerable.*

La demostración de este teorema se omitirá pero puede consultarse en [23], [6] y [4, Theorem 3.3.12]. Como una consecuencia inmediata de los teoremas 1.4.7 y 1.4.8 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.4.9. *Un grupo abeliano compacto e infinito es metrizable si y solo si su grupo dual $\hat{G}$ es numerable.*

De los teoremas de dualidad para grupos abelianos discretos y compactos y el corolario anterior se deriva el siguiente resultado:

Corolario 1.4.10. *Un grupo abeliano discreto e infinito G es numerable si y solo si su grupo dual $\hat{G}$ es segundo numerable.*

Lema 1.4.11. *Suponga que f es un carácter continuo no trivial sobre un grupo abeliano compacto G. Entonces f es de orden infinito en $\hat{G}$ si y solo si $f(G)$ es un subespacio conexo de $\mathbb{T}$.*

Demostración. Suponga que $f(G)$ es conexo. Como G es compacto y f es continua, entonces $f(G)$ es un subgrupo cerrado y conexo de $\mathbb{T}$. Se sigue de la proposición 1.3.14 que $f(G) = \mathbb{T}$. Como $\mathbb{T}$ es un grupo divisible, se tiene que $f^n(G) = \mathbb{T}$, para cada entero positivo n, donde, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que $f^n(x) = f(x) \cdot f^{n-1}(x)$. Así el homomorfismo f^n no es trivial para cada entero positivo n. Por lo tanto, f es de orden infinito.

Ahora supongamos que $f \in \hat{G}$ y $n \in \mathbb{N}$ satisfacen que $f^n(x) = 1$, para cada $x \in G$, donde f es un carácter distinto del elemento identidad de $\hat{G}$. Sea $K_n = \{z \in \mathbb{T} : z^n = 1\}$ y $H = f(G)$. Entonces $H \subset K_n$ y H contiene al elemento 1 y al menos un elemento más de $\mathbb{T}$ pues f no es trivial. Como K_n contiene exactamente n elementos se sigue que H es un subespacio finito que contiene más de un elemento. Por lo tanto $H = f(G)$ es disconexo. □

El siguiente resultado será de utilidad más adelante. La demostración es simple y puede consultarse en [4, Theorem 3.1.8].

Proposición 1.4.12. *Suponga que G es un grupo topológico y F es una vecindad compacta y abierta de la identidad e de G. Entonces existe un subgrupo compacto y abierto H de G, tal que $H \subset F$.*

A continuación presentamos uno de los resultados más interesantes acerca de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. El cual determina que para los grupos topológicos abelianos y compactos existen propiedades topológicas que pueden caracterizarse en términos de propiedades puramente algebraicas de su grupo dual. Este resultado aparece en [37] y [38].

Teorema 1.4.13. [**L. S. Pontryagin**] *Sea G un grupo abeliano y compacto. Entonces G es conexo si y solo si el grupo dual $\hat{G}$ es libre de torsión.*

Demostración. Supongamos que G es conexo. Sea f un carácter no trivial de G. Entonces $f(G)$ es conexo y por el lema 1.4.11 se tiene que f es de orden infinito en $\hat{G}$. Como esto ocurre para todo carácter no trivial de G, se cumple que $\hat{G}$ es libre de torsión.

Ahora supongamos que G es disconexo. Entonces existe un subconjunto abierto y cerrado U de G que contiene al elemento identidad e de G. Por la proposición 1.4.12 existe un subgrupo abierto y cerrado H de G, tal que $H \subset U$.

Consideremos el grupo cociente G/H. Como H es abierto y cerrado se tiene que G/H es discreto, compacto y contiene más de un elemento, es decir, G/H es finito y no trivial. Por lo tanto, existe un carácter no trivial ϕ en G/H. Sea $f = \phi \circ p$, donde $p : G \longrightarrow G/H$ es el homomorfismo canónico. Por lo tanto, f es un carácter no trivial en G, y $f(G) = \phi(G/H)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{T}$ que contiene más de un elemento. Por lo tanto, $f(G)$ es disconexo. Aplicando nuevamente el lema 1.4.11 se tiene que f es de orden finito en $\hat{G}$. □

Recordemos que un espacio topológico X es totalmente disconexo si para cada $x \in X$, la componente conexa C_x de x es el conjunto $\{x\}$. Por otro lado, un espacio topológico X tiene dimensión 0 o es 0-dimensional si X tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados en X.

La demostración de los siguientes resultados referentes a espacios totalmente disconexos puede consultarse en [4, Proposition 3.1.7] y [4, Theorem 3.1.14], respectivamente.

Proposición 1.4.14. *Sea X un espacio topológico Hausdorff, totalmente disconexo y localmente compacto. Entonces X es 0-dimensional.*

Teorema 1.4.15. *Sean G un grupo topológico localmente compacto totalmente disconexo y H un subgrupo cerrado de G. Entonces el cociente G/H es 0-dimensional.*

El siguiente teorema es una caracterización de los grupos topológicos abelianos y compactos que son totalmente disconexos.

Teorema 1.4.16. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Entonces G es totalmente disconexo si y solo si el grupo dual $\hat{G}$ es de torsión.*

Demostración. Supongamos que G es totalmente disconexo. Por la proposición 1.4.14 se tiene que G es 0-dimensional. Sea f un carácter no trivial de G y defínase $F = f(G)$ y $H = \ker(f)$. La función f es cerrada pues G es un grupo compacto y f es un homomorfismo continuo. Por lo tanto, el subgrupo F de $\mathbb{T}$ es topológicamente isomorfo al grupo cociente G/H y la función f de G sobre el subespacio F de $\mathbb{T}$ es también abierta. Aplicando el teorema 1.4.15, tenemos que el grupo cociente G/H de G es 0-dimensional. Por lo tanto, F es 0-dimensional y así $F \neq \mathbb{T}$. Como f es un carácter no trivial, se tiene que $|F| > 1$. Por lo tanto, F es disconexo y por el lema 1.4.11 se tiene que f es de orden finito.

Ahora supongamos que G no es totalmente disconexo. Por lo tanto, existe un subconjunto conexo A de G tal que $|A| > 1$. Claramente, podemos asumir que el elemento identidad e_G de G esta en A. Sea $a \in A$ tal que $a \neq e_G$. Como G es compacto, por el teorema 1.3.8 existen suficientes caracteres para separar puntos. Así existe un carácter no trivial f de G, tal que $f(a) \neq 1$. Puesto que A es conexo, se tiene que $B = f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{T}$ que contiene más de un elemento. Dado que G es compacto se tiene que $f(G)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. Por lo anterior y puesto que $B \subset f(G)$ se tiene que $f(G)$ es un subgrupo cerrado e infinito de $\mathbb{T}$ y por la proposición 1.3.13, $f(G) = \mathbb{T}$, esto es, $f(G)$ es conexo. Por lo tanto, por el lema 1.4.11, f es de orden infinito en $\hat{G}$. □

Los siguientes resultados son consecuencia de los teoremas de dualidad y los teoremas 1.4.13 y 1.4.16, respectivamente.

Corolario 1.4.17. *Sea G un grupo abeliano y discreto. Entonces G no tiene elementos de orden finito distintos de la identidad si y solo si el grupo dual $\hat{G}$ es conexo.*

Corolario 1.4.18. *Sea G un grupo abeliano y discreto. Entonces G es de torsión si y solo si el grupo dual $\hat{G}$ es totalmente disconexo (equivalentemente, 0-dimensional).*

El siguiente teorema muestra una caracterización de los grupos topológicos abelianos compactos y conexos en términos de una propiedad puramente algebraica, a saber, la divisibilidad.

Teorema 1.4.19. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Entonces G es divisible si y solo si G es conexo.*

Demostración. Suponga que G es divisible. Sea f un carácter no trivial de G. Por el teorema 1.4.13, es suficiente probar que f es de orden infinito en $\hat{G}$, para obtener la conexidad de G.

Puesto que f es un carácter no trivial, existe $a \in G$ tal que $f(a) \neq 1$. Consideremos cualquier número entero $n > 0$. Como G es divisible, existe $b \in G$ tal que $nb = a$. Entonces $f^n(b) = (f(b))^n = f(nb) = f(a) \neq 1$. Por lo tanto $f(b) \neq 1$. Así f^n no es el elemento identidad de $\hat{G}$. Puesto que lo anterior es válido para cada entero positivo n, se concluye que f es de orden infinito en $\hat{G}$. Por lo tanto, G es conexo.

Supongamos ahora que G no es divisible. Sean $a \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $ny \neq a$ para cada $y \in G$. Consideremos el conjunto $F = \{ny : y \in G\}$. Claramente F es un subgrupo de G y $a \notin F$. Consideremos el producto topológico $G^n = \prod_{i=1}^n G_i$, donde cada $G_i = G$. Por lo tanto, G^n es un grupo topológico compacto. Si $\varphi : G^n \longrightarrow G$ es una función definida como $\varphi(x_1, \dots x_n) = \Sigma_{i=1}^n x_i$, tenemos que φ es una función continua. Sea Δ la diagonal del producto G^n. Como G^n es compacto y Δ es cerrado en G^n, se tiene que Δ es compacto. Como $\varphi(\Delta) = F$, concluimos que F es un subespacio compacto de G y, por lo tanto, F es cerrado en G. Por lo anterior, existe un carácter f en G tal que $f(a) \neq 1$ y $f(y) = 1$, para cada $y \in F$. Por el teorema 1.4.13, para demostrar que G es disconexo, es suficiente con demostrar que f^n es el elemento identidad de $\hat{G}$. Sea $x \in G$. Entonces $nx \in F$. De donde $f^n(x) = (f(x))^n = f(nx) = 1$. Como esto es válido para cada $x \in G$, se tiene que f^n es el elemento identidad de $\hat{G}$. □

El próximo resultado es conveniente a la hora de encontrar el dual de algunos grupos topológicos con ciertas caracteristicas.

Proposición 1.4.20. *Supongamos que $G = \oplus_{i \in I} G_i$ es la suma directa de grupos abelianos, y que G tiene la topología discreta. Entonces el grupo dual*

$\hat{G}$ es topológicamente isomorfo al producto topológico $X = \prod_{i\in I} \hat{G}_i$, donde $\hat{G}_i$ es el grupo dual de Pontryagin de G_i, para cada $i \in I$.

Demostración. Para cada $\chi = (\chi_i)_{i\in I}$ en X y cada $g \in G$, sea

$$[\chi, g] = \prod_{i\in I} \chi_i(g_i), \tag{1.3}$$

donde $g = \sum_{i\in I} g_i$ y $g_i \in G_i$, para cada $i \in I$. Es claro que la función $[\chi, \cdot]$ es un carácter de G, para cada $\chi \in X$.

Si $j \in I$, denote por H_j al subgrupo de G cuyos elementos $h = \sum_{i\in I} g_i$ satisfacen que $g_i = e_{G_i}$, para cada $i \neq j$. Así, H_j es topológicamente isomorfo a G_j. Para cada carácter χ de G, sea χ_j la restricción de χ al subgrupo H_j, $j \in I$. Entonces χ_j es un carácter de H_j y $\varphi(\chi) = (\chi_j)_{j\in I}$ es un elemento de X. Por (1.3) se tiene que $\chi(g) = [\varphi(\chi), g]$, para cada $g \in G$, esto es, $\chi = [\varphi(\chi), \cdot]$. Así la función $T : X \longrightarrow \hat{G}$ que manda los elementos $(\chi_i)_{i\in I}$ en los elementos $[\varphi(\chi), \cdot]$ es un isomorfismo algebraico. Como X esta dotado con la topología producto se tiene que T es continua. Finalmente, como X es compacto se tiene que T es un isomorfismo topológico. $\square$

Recordemos que un grupo abeliano de torsión es de torsión acotada si existe un número entero positivo m, tal que $mx = e_G$, para cada $x \in G$. El mínimo entero positivo con esta propiedad es llamado el *exponente* de G. A continuación se presenta de manera puntual la estructura de los grupos topológicos abelianos y compactos que tienen exponente un número primo.

Teorema 1.4.21. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto de exponente un número primo p. Entonces G es topológicamente isomorfo al grupo $\mathbb{Z}(p)^\kappa$, para algún cardinal $\kappa \geq 0$.*

Demostración. Puesto que G es compacto se tiene que $\hat{G}$ es discreto. Sea $f \in \hat{G}$ tal que f es no trivial. Entonces para cada $x \in G$ se tiene $f^p(x) = (f(x))^p = f(px) = f(e) = 1$, donde e es el elemento identidad de G. Por lo tanto, f es de orden p en $\hat{G}$. Considere $\hat{G}$ como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Z}(p)$. Si tomamos una base de Hamel para $\hat{G}$, tenemos que $\hat{G}$ es la suma directa de κ copias del grupo $\mathbb{Z}(p)$, para algun cardinal κ, digamos, $\hat{G} \cong \oplus_{\alpha<\kappa}\mathbb{Z}(p)_\alpha$. Por la proposición 1.4.20 se tiene que G es topológicamente isomorfo al producto de κ copias del grupo dual $\hat{\mathbb{Z}}(p) = \mathbb{Z}(p)$. $\square$

Corolario 1.4.22. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto. Entonces para cada número primo p, el subgrupo $G[p] = \{x \in G : px = e_G\}$ de G es topológicamente isomorfo al grupo $\mathbb{Z}(p)^\kappa$, para algún cardinal κ.*

Demostración. Para un número primo p considere el homomorfismo ϕ_p de G a G definido por $\phi_p(x) = px$, para cada $x \in G$. Entonces ϕ_p es continua y el kernel de ϕ_p coincide con $G[p]$. Por lo tanto, $G[p]$ es un subgrupo cerrado de G. Por lo anterior, como G es compacto, se tiene que $G[p]$ es compacto. Aplicando el teorema 1.4.21, se tiene el resultado. □

El siguiente teorema refleja una característica especial de la estructura algebraica de los grupos de torsión acotada. Una demostración puede encontrarse en [39, Theorem 4.3.5] y [40, Corollary 10.37].

Teorema 1.4.23. [**Prüfer, Baer**] *Sea G un grupo topológico abeliano de torsión acotada. Entonces G es isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos de orden finito.*

Finalmente mostramos en el siguiente teorema una caracterización de la estructura de los grupos abelianos compactos y de torsión.

Teorema 1.4.24. *Sea G un grupo topológico abeliano, compacto y de torsión. Entonces G es topológicamente isomorfo al producto finito*

$$\mathbb{Z}(n_1)^{\kappa_1} \times \mathbb{Z}(n_2)^{\kappa_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}(n_r)^{\kappa_r},$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_r$ son enteros positivos diferentes dos a dos y $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r$ son cardinales mayores o iguales a 1.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G[n] = \{x \in G : nx = e_G\}$. Como G es un grupo de torsión se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$. Además para cada $n \in \mathbb{N}$, $G[n]$ es un subgrupo cerrado de G. Puesto que G es compacto, este cumple la propiedad de Baire, por lo tanto $G[m]$ tiene interior no vacío para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, $G[m]$ es un subgrupo abierto de G. Por lo anterior el grupo cociente $G/G[m]$ es finito. Sea s el orden de $G/G[m]$. Como G es abeliano, se tiene que para cada $x \in G$, $msx = e_G$. Es decir G es un grupo de torsión acotada. Por lo tanto, el grupo dual de G, $\hat{G}$ es también de torsión acotada. Aplicando el teorema 1.4.23, tenemos que

$$\hat{G} \cong \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}(n_i)^{\kappa_i},$$

donde $n_1, \dots, n_r$ son enteros positivos diferentes dos a dos y $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ son números cardinales. Finalmente el resultado se obtiene aplicando el teorema 1.4.20. $\square$

Corolario 1.4.25. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Si G de torsión, entonces G es 0-dimensional.*

Si G es un grupo abeliano y p es un número primo, denotamos por G_p al conjunto de todos los elementos g de G tales que $p^n g = e$, para alguna $n \in \mathbb{N}^+$. Además, como G es abeliano el conjunto G_p es un subgrupo de G, el cual es llamado la componente p-primaria de G. Si $G = G_p$, para algún número primo p, entonces G es llamado un p-grupo.

El siguiente resultado muestra la estructura de los grupos abelianos de torsión en términos de sus componentes p-primarias.

Teorema 1.4.26. [**El teorema de la descomposición primaria**] *En un grupo abeliano G el subgrupo de torsión $tor(G)$ de G es la suma directa de las componentes primarias de G.*

La demostración de este teorema se omitirá, pero puede consultarse en [39, teorema 4.1.1].

Usando los teoremas 1.4.24 y 1.4.26 podemos obtener la estructura algebraica de los p-grupos compactos y abelianos.

Teorema 1.4.27. *Si G es un grupo de torsión y G_p es la componente p-primaria de G, entonces G_p es topológicamente isomorfo al producto finito*

$$\mathbb{Z}(p^{n_1})^{\kappa_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}(p^{n_m})^{\kappa_m},$$

donde $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ son números cardinales que satisfacen $\kappa_j \leq \omega$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ y $n_1 < \cdots < n_m$ son enteros positivos.

El siguiente resultado es de mucha ayuda cuando se trabaja con grupos compactos abelianos de torsión ya que permite describir un poco más la estructura algebraica del grupo en sí. En particular, para grupos abelianos y compactos tenemos que la torsión se relaciona con la torsión acotada.

Proposición 1.4.28. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto. Si G es de torsión, entonces existe un número $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $mx = e_G$ para cada $x \in G$, es decir, G es de torsión acotada.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $G[n] = \{x \in G : nx = e_G\}$ es un subgrupo cerrado de G. Como G es de torsión, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$. Así por el Teorema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que $G[n_0]$ tiene interior no vacío en G. Además para cada $k \in \mathbb{N}$, $G[n_0] \subset G[kn_0]$, así $G[kn_0]$ es un subgrupo abierto de G. Como G es compacto y se cumple que $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G[kn_0]$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G = \bigcup_{k=1}^{k_0} G[kn_0]$. Consideremos $m = k_0!$, entonces $mx = e_G$ para cada $x \in G$. □

Un resultado similar para grupos conexos con la propiedad de Baire se obtiene como sigue.

Proposición 1.4.29. *Sea G un grupo de torsión con la propiedad de Baire y conexo. Entonces G es de torsión acotada.*

Demostración. Por hipótesis $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$ y $G[n]$ es un subgrupo cerrado de G. Como G tiene la propiedad de Baire, existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $G[k]$ tiene interior no vacío. Por lo tanto $G[k]$ es abierto en G. Puesto que G es conexo y $G[k]$ es cerrado y abierto, se tiene que $G = G[k]$. □

De hecho, podemos generalizar un poco más la proposición 1.4.28 como se verá más adelante.

Proposición 1.4.30. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto que no es de torsión. Entonces para cada sucesión $U_0, \ldots, U_n$ de conjuntos abiertos no vacíos de G, existe una sucesión $V_0, \ldots, V_n$ de conjuntos abiertos no vacíos tales que $V_i \subset U_i$ para cada $i \leq n$, y si $(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ y $\{x_0, \ldots, x_n\}$ satisfacen que $0 < \sum_{i=0}^{n} |k_i| \leq n(n+1)$ y $x_i \in V_i$ para cada $i \leq n$, entonces se tiene que $k_0x_0 + \cdots + k_nx_n \neq e_G$.*

Demostración. Tomemos un elemento arbitrario $(k_0, \ldots, k_n)$ de $\mathbb{Z}^{n+1}$ tal que

$$0 < \sum_{i=0}^{n} |k_i| \leq n(n+1).$$

La función $\pi : G^{n+1} \longrightarrow G$ definida como $\pi(x_0, \ldots, x_n) = k_0x_0 + \cdots + k_nx_n$ es un homomorfismo continuo. Sea $H = \pi(G^{n+1})$. Como G es compacto se tiene que el homomorfismo $\pi : G^{n+1} \longrightarrow H$ es abierto. Así, $U = \pi(U_0 \times \cdots \times U_n)$ es un abierto no vacío de H. Por la elección de $(k_0, \ldots, k_n)$, existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $k_j \neq 0$. Por hipótesis, G contiene un elemento de orden infinito z, así

$k_j z$ es un elemento de orden infinito de H. De donde, el grupo compacto H y el abierto U son infinitos.

Sea $y_i \in U_i$ para cada $i \leq n$ tal que $k_0 y_0 + \ldots + k_n y_n \neq e_G$. Como π es continua, existen conjuntos abiertos $W_0, \ldots, W_n$ de G tales que $y_i \in W_i$ para cada $i \leq n$ y $e_H \notin \pi(W_0 \times \cdots \times W_n)$. Consideremos el conjunto

$$M = \{(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} |k_i| \leq n(n+1) \text{ y } k_j \neq 0 \text{ para algún } j \leq n\}.$$

Como M es finito podemos repetir esta construcción un número finito de pasos (para cada elemento de M), para obtener los abiertos $V_0, \ldots, V_n$ requeridos. □

Lema 1.4.31. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto que no es de torsión. Entonces para cualquier conjunto abierto no vacío U de G, existe un conjunto independiente $A = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de elementos de orden infinito de G contenido en U. En particular, se cumple que $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea 2^n la familia de todas las funciones de $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $\{0, 1\} = 2$, donde $n \in \mathbb{N}^+$. Consideremos $\eta = \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n$. Vamos a construir una familia de abiertos no vacíos $\{V_f : f \in \eta\}$ de G que satisface las siguientes condiciones:

(a) Para cada $f, g \in 2^n$ tal que $f \neq g$ se cumple que $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$.

(b) Si $f, g \in \eta$ y g es una extensión propia de f, entonces $\overline{V_g} \subset V_f$.

(c) Si $k_f \in \mathbb{Z}$ satisface que $|k_f| \leq n$ y $x_f \in V_f$ para cada $f \in 2^n$, entonces $\sum_{f \in 2^n} k_f x_f = e_G$ si y solo si $k_f = 0$ para cada $f \in 2^n$.

Sea U cualquier abierto no vacío de G. Para $n = 1$ y las funciones $f = (0, 0)$ y $g = (0, 1)$, tomemos dos abiertos no vacíos U_f y U_g contenidos en U tales que $\overline{U_f} \cap \overline{U_g} = \emptyset$ y $\overline{U_f} \cup \overline{U_g} \subset U$. Si k_f y k_g estan en $\mathbb{Z}$ y son tales que $|k_f| \leq 1$ y $|k_g| \leq 1$, entonces $|k_f| + |k_g| \leq 2$. Así, aplicando la proposición 1.4.30, existen abiertos no vacíos V_f y V_g tales que si $x_f \in V_f$ y $x_g \in V_g$ entonces $k_f x_f + k_g x_g = e_G$ si y solo si $k_f = k_g = 0$. Además, como $V_f \subset U_f$ y $V_g \subset U_g$ y se cumple que $\overline{U_f} \cap \overline{U_g} = \emptyset$, entonces $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$.

Suponga que para $n \in \mathbb{N}^+$ hemos definido los abiertos V_f para cada $f \in 2^n$ y se cumplen las condiciones (a), (b) y (c).

Ahora probaremos que se cumplen las condiciones (a), (b) y (c) para $n+1 \in \mathbb{N}^+$. Para cada $f \in 2^n$ y cada $i = 0, 1$, denotemos por $f^\frown i$ a la función $g \in 2^{n+1}$ tal que $g|_n = f$ y $g(n) = i$. Como G es regular, podemos elegir abiertos no vacíos $U_{f^\frown 0}$ y $U_{f^\frown 1}$ en G tales que $\overline{U_{f^\frown 0}} \cap \overline{U_{f^\frown 1}} = \emptyset$ y $\overline{U_{f^\frown 0}} \cup \overline{U_{f^\frown 1}} \subset V_f$. Consideremos la familia de todos los abiertos $U_{f^\frown 0}$ y $U_{f^\frown 1}$, para cada $f \in 2^n$. Entonces esta familia consta de 2^{n+1} elementos. Si $k_{f^\frown i} \in \mathbb{Z}$ es tal que $|k_{f^\frown i}| \leq n+1$ para cada $i = 0, 1$ y cada $f \in 2^n$, entonces

$$\sum_{f \in 2^n} (|k_{f^\frown 0}| + |k_{f^\frown 1}|) \leq (n+1)2^{n+1} \leq (2^{n+1} - 1)2^{n+1}.$$

Así, por la proposición 1.4.30, para cada $f \in 2^n$ y cada $i = 1, 0$, existen abiertos no vacíos $V_{f^\frown i}$ de G tales que $\overline{V_{f^\frown i}} \subset U_{f^\frown i}$, y si $x_{f^\frown i} \in V_{f^\frown i}$, entonces la igualdad

$$\sum_{f \in 2^n} (k_{f^\frown 0} x_{f^\frown 0} + k_{f^\frown 1} x_{f^\frown 1}) = e_G$$

se cumple si y solo si $k_{f^\frown i} = 0$, para cada $f \in 2^n$ y cada $i = 0, 1$. Lo anterior prueba (c) para $n+1$. Para demostrar (b), sea $f \in 2^{n+1}$, entonces para cada $t \in \mathbb{N}^+$ tal que $t < n$, se tiene por hipótesis de inducción que $\overline{V_{f|_n}} \subset V_{f|_t}$, y puesto que por construcción se cumple que $\overline{V_f} \subset V_{f|_n}$, entonces $\overline{V_f} \subset V_{f|_t}$.

Para probar (a), sean $f, g \in 2^{n+1}$ tales que $f \neq g$. Entonces existe $t \in \mathbb{N}^+$ tal que $t \leq n$ y $f|_t \neq g|_t$, donde, $f|_t, g|_t \in 2^t$. Por hipótesis de inducción, $\overline{V_{f|_t}} \cap \overline{V_{g|_t}} = \emptyset$. Como $\overline{V_f} \subset V_{f|_t}$ y $\overline{V_g} \subset V_{g|_t}$, entonces $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$.

Lo anterior termina la construcción de la familia $\{V_f : f \in \eta\}$.

Por (b) y puesto que el grupo G es compacto, para cada $f \in 2^\omega$, el conjunto $K_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_{f|_n}}$ no es vacío. Para cada $f \in 2^\omega$, tomemos un elemento $x_f \in K_f$ y sea A el conjunto formado por todos los x_f. Veamos que todos los elementos de A son de orden infinito. Tomemos cualquier $x_f \in A$ y $n \in \mathbb{N}^+$ y veamos que $nx_f \neq e_G$. Para cada $g \in 2^n$ tal que $g \neq f|_n$, tomemos $k_g = 0$ y para $f|_n$ tomemos $k_{f|_n} = n$. Entonces por (c) para cada $x_g \in V_g$ y $x_f \in V_{f|_n}$ se cumple que

$$\begin{aligned} e_G &= \sum_{g \in 2^n \setminus \{f|_n\}} k_g x_g + k_{f|_n} x_f \\ &= k_{f|_n} x_f \\ &= n x_f \end{aligned}$$

si y solo si $n = 0$. Por lo anterior se concluye que $nx_f \neq e_G$. Dado que esto pasa para cada $n \in \mathbb{N}^+$, se sigue que x_f es de orden infinito.

Ahora veamos que $|A| = \mathfrak{c}$. Sean $f, g \in 2^\omega$ y supongamos que $f \neq g$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $f|_n \neq g|_n$. Por (a), se tiene que

$$\overline{V_{f|_n}} \cap \overline{V_{g|_n}} = \emptyset.$$

Por lo anterior y por la definición de K_f y K_g se sigue que

$$K_f \cap K_g = \emptyset.$$

Así, $x_f \neq x_g$. Como $|2^\omega| = \mathfrak{c}$, se sigue que $|A| = \mathfrak{c}$.

Finalmente veamos que A es linealmente independiente. Sea $y_{f_0}, \ldots, y_{f_m}$ una colección finita de elementos distintos de A, donde, $f_0, \ldots, f_m \in 2^\omega$. Tomemos cualquier $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $m + 1 \leq n$. Se cumple que el conjunto $\{f_0|_n, \ldots, f_m|_n\}$ está contenido en 2^n. Para cada $g \in 2^n$, sea $k_g \in \mathbb{Z}$ tal que $|k_g| \leq n$ y $k_g = 0$ si $g \neq f_i|_n$, donde $i \in \{0, \ldots, m\}$. Si $|k_{f_i|_n}| \neq 0$, para alguna $i \in \{0, \ldots, m\}$, entonces por la condición (c) se tiene que

$$k_{f_0|_n} y_{f_0} + \cdots + k_{f_m|_n} y_{f_m} \neq e_G.$$

Así, A es un conjunto linealmente independiente en G. $\square$

Un espacio *pseudocompacto* es un espacio de Tychonoff en el cual toda función continua real definida sobre él es acotada. Es decir, si f es una función continua de un espacio pseudocompacto X en los números reales, entonces $f(X)$ es un conjunto acotado en los reales. Los espacios pseudocompactos fueron definidos por Edwin Hewitt en 1948. Vemos claramente que cualquier espacio compacto es pseudocompacto. También tenemos que cualquier espacio pseudocompacto tiene la propiedad de Baire (ver [4, Lemma 9.11.1]). En el caso particular de los grupos topológicos tenemos que si un grupo topológico G es pseudocompacto entonces el grupo G puede ser cubierto por una cantidad finita de traslaciones de una vecindad abierta de la identidad del grupo G, es decir, el grupo G es *precompacto* (ver [4, Theorem 3.7.2]). Supongamos que G es un grupo topológico y denotemos por ϱG a la completación de Raĭkov de G (ver [4, Section 3.6]). Si G es pseudocompacto entonces ϱG es un grupo compacto (ver [4, Corollary 3.7.18]). El siguiente teorema define claramente la estructura de los grupos abelianos y pseudocompactos y la demostración es la misma que la dada en [4, Theorem 9.11.5]

Teorema 1.4.32. *Sea G un grupo topológico abeliano y pseudocompacto. Entonces $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$ o G es un grupo de torsión acotada.*

Demostración. Supongamos primero que G no es un grupo de torsión. Entonces existe un elemento $a \in G$ de orden infinito, es decir, el subgrupo cíclico $H = \langle a \rangle$ de G generado por a es infinito. La completación de Raĭkov $K = \varrho G$ de G es un grupo abeliano y compacto, por [4, Corollary 3.7.18]. Por el teorema 1.3.8, el dual de K separa puntos de K. Por lo tanto, para cada par de elementos distintos $x, y \in H$ podemos elegir un carácter $h_{x,y} \in \widehat{K}$ tal que $h_{x,y}(x - y) \neq 1$, o equivalentemente, $h_{x,y}(x) \neq h_{x,y}(y)$. Denotemos por f a la diagonal de la familia

$$\mathcal{H} = \{h_{x,y} : x, y \in H, x \neq y\}.$$

Es claro que $|\mathcal{H}| = |H| = \omega$, así que $f(K)$ es un subgrupo del grupo $\mathbb{T}^\omega$. Como f es un homomorfismo continuo, el grupo $L = f(K)$ es compacto y metrizable. Por la elección de cada carácter $h_{x,y}$ y por la definición de la familia $\mathcal{H}$ se tiene que $f(x) \neq f(y)$ para cualesquiera elementos distintios $x, y \in H$. Por lo tanto, el subgrupo $f(H) = \langle f(a) \rangle$ es infinito pues $f(a)$ tiene orden infinito en L. Entonces, el grupo L no es de torsión. Por el lema 1.4.31 se sigue que $r_0(L) \geq \mathfrak{c}$. Supongamos que $\{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un conjunto independiente de elementos de orden infinito en L con enumeración fiel.

Como G intersecta a todos los conjuntos G_δ no vacíos en $K = \varrho G$, la imagen de G bajo el homomorfismo f coincide con el grupo L, es decir, $f(G) = f(K) = L$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, tomemos un elemento $a_\alpha \in G$ con $f(a_\alpha) = b_\alpha$. Entonces $\{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un conjunto independiente de elementos de orden infinito en G, así $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$.

Finalmente, supongamos que G es un grupo de torsión. Para cada entero positivo n, sea $G[n] = \{x \in G : nx = e\}$. Entonces $G[n]$ es un subgrupo cerrado de G y $G = \bigcup_{n=1}^\infty G[n]$. Como el grupo G es pseudocompacto, entonces G tiene la propiedad de Baire (ver [4, Lemma 9.11.1]). Entonces $G[k]$ no tiene el interior vacío para algún $k \in \mathbb{N}$. Claramente $G[k]$ es una vecindad abierta de la identidad e de G y como G es precompacto, entonces el grupo G puede ser cubierto por una cantidad finita de traslaciones del subgrupo $G[k]$ (ver [4, Theorem 3.7.2]). Sean $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que $G = \bigcup_{i=1}^m (x_i + G[k])$. Como el grupo es de torsión existe un entero $N > 0$ tal que $Nx_i = e$, para cada $i \leq m$. Entonces $Nkx = e$, para cada $x \in G$. De hecho, si elegimos $i \leq m$ tal que $x \in x_i + G[k]$, entonces $x = x_i + y$ para alguna $y \in G[k]$, de donde

$$Nkx = nkx_i + Nky = e.$$

Por lo tanto, G es de torsión acotada. $\square$

Capítulo 2

Algunas clases especiales de grupos topológicos

En este capítulo introducimos dos importantes nociones de clases de grupos topológicos: los M-grupos y los grupos máximamente fragmentables. A continuación, discutimos brevemente algunas de sus propiedades más relevantes.

2.1. M-grupos

En esta sección se presenta el concepto de M-grupo, la abreviación de grupo de Markov, esta noción surge del estudio de los conjuntos incondicionalmente cerrados, los cuales aparecen por primera vez en [30] y [31]. Todos los resultados presentados en esta sección aparecen en [11].

Definición 2.1.1. *Un subconjunto F de un grupo topológico G es incondicionalmente cerrado en G si F es cerrado en cualquier topología de grupo Hausdorff de G.*

A continuación presentamos un resultado básico sobre el índice de los subgrupos cerrados propios de un grupo conexo.

Proposición 2.1.2. *Sean G un grupo topológico conexo y F un subgrupo propio de G. Si F es cerrado entonces F tiene índice por lo menos $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Supongamos que F es un subgrupo propio cerrado de G. Como G es conexo, entonces G/F es conexo y completamente regular, pues G

es Hausdorff. Además G/F no es trivial pues F es un subgrupo propio de G. Por lo anterior y puesto que cualquier espacio completamente regular de cardinalidad menor a $\mathfrak{c}$ es disconexo (ver [13, Corollary 6.1.4]), se tiene que $\mid G/F \mid \geq \mathfrak{c}$. Así el índice de F es por lo menos $\mathfrak{c}$. $\square$

El siguiente resultado es inmediato de la proposición anterior.

Corolario 2.1.3. *Si G es un grupo que admite una topología de grupo conexa, entonces todos sus subgrupos propios incondicionalmente cerrados tienen índice por lo menos $\mathfrak{c}$.*

En [32], Markov pregunta si el recíproco del corolario 2.1.3 es verdadero, es decir, ¿si todos los subgrupos propios e incondicionalmente cerrados de un grupo G tienen índice por lo menos $\mathfrak{c}$, entonces G admite una topología de grupo conexa? Esta pregunta nos lleva a la siguiente definición de los *grupos de Markov* o simplemente *M-grupos*.

Definición 2.1.4. *Un grupo G es un grupo de Markov, o simplemente, un M-grupo si todos los subgrupos propios e incondicionalmente cerrados de G tienen índice por lo menos $\mathfrak{c}$.*

Usando esta nueva terminología podemos reformular la pregunta de Markov como sigue:

Pregunta 2.1.5. *¿Cualquier M-grupo admite una topología de grupo conexa?*

Puesto que decidir cuando un grupo topológico es un M-grupo es un trabajo complicado, en [11, Proposition 1,4] los autores muestran una caracterización muy simple con la cual es fácil indentificar a los M-grupos en el caso particular de los grupos abelianos.

Proposición 2.1.6. *Sea G un grupo abeliano. Entonces G es un M-grupo si y solo si, para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple $mG = \{0\}$ o $\mid mG \mid \geq \mathfrak{c}$. En particular, un grupo abeliano G de exponente infinito es un M-grupo cuando $\mid mG \mid \geq \mathfrak{c}$ para cada $m \in \mathbb{N}^+$.*

La demostración de este hecho se basa en los resultados [9, Corollary 5.7] y [10, Lemma 3.3], donde se deduce que cualquier subgrupo propio H que es incondicionalmente cerrado en G tiene la forma $H = G[m]$ para algún

$m \in \mathbb{N}^+$, donde $G[m] = \{g \in G : mg = 0\}$. Como $G/G[m] \cong mG$, entonces se cumple que $\mid G/H \mid = \mid G/G[m] \mid = \mid mG \mid$.

Por el teorema de Prüfer [17, Theorem 17.2], un grupo abeliano y no trivial de exponente finito se puede representar como una suma directa de subgrupos cíclicos, es decir:

$$G = \bigoplus_{p\in\pi(G)} \bigoplus_{i=1}^{m_p} \mathbb{Z}(p^i)^{\alpha_{p,i}}, \tag{2.1}$$

donde $\pi(G)$ es un conjunto finito y no vacío de números primos y los cardinales $\alpha_{p,i}$ se conocen como *los invariantes de Ulm-Kaplanski de G*. También se puede ver que algunos de estos cardinales pueden ser igual a cero, pero los cardinales α_{p,m_p} deben ser positivos; estos cardinales se conocen como *los invariantes principales de Ulm-Kaplanski de G*. Por la proposición anterior podemos reformular la propiedad de Markov para grupos abelianos de exponente finito en términos de sus invariantes de Ulm-Kaplanski.

Proposición 2.1.7. *Un grupo abeliano no trivial G de exponente finito es un M-grupo si y solo si todos los invariantes principales de Ulm-Kaplanski de G son por lo menos $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Supongamos que G está escrito como en (2.1). Sea

$$k = \prod_{q\in\pi(G)} q^{m_q}$$

el exponente de G y para $p \in \pi(G)$ definamos

$$k_p = \frac{k}{p} = (p^{m_p-1})(\prod_{q\in\pi(G)\setminus\{p\}} q^{m_q}).$$

Entonces $k_pG \cong \mathbb{Z}(p)^{\alpha_{p,m_p}}$. Por lo tanto

$$1 < |k_pG| = \begin{cases} p^{\alpha_{p,m_p}} & \text{si } \alpha_{p,m_p} \text{ es finito,} \\ \alpha_{p,m_p} & \text{si } \alpha_{p,m_p} \text{ es infinito.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Si G es un M-grupo, entonces $|k_pG| \geq \mathfrak{c}$ por la proposición 2.1.6. Por lo tanto, por (2.2) se tiene que $\alpha_{p,m_p} \geq \mathfrak{c}$.

Ahora supongamos que todos los invariantes principales de Ulm-Kaplanski de G son mayores o iguales a $\mathfrak{c}$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|mG| > 1$. Por lo tanto existe por lo menos un número primo $p \in \pi(G)$ tal que p^{m_p} no divide a m. Sea d el máximo común divisor de m y k. Entonces $mG = dG$. Por lo tanto, de ahora en adelante podemos asumir sin pérdida de generalidad que $m = d$ y en consecuencia m divide a k. Por lo anterior, $m \cdot c = k$ para algún número entero positivo c. Como $k_p = \dfrac{k}{p}$, se tiene que

$$k_p = \frac{m \cdot c}{p}.$$

Puesto que p^{m_p} no divide a m, entonces p no divide a m. Como k_p es un entero positivo, por lo anterior, se tiene que p divide a c y por lo tanto m divide a k_p.

De lo anterior se tiene que k_pG es un subgrupo de mG. Por lo tanto $|mG| \geq |k_pG| = \alpha_{p,m_p} \geq \mathfrak{c}$ por (2.2). Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $|mG| = 1$ o $|mG| \geq \mathfrak{c}$. Entonces, por la proposición 2.1.6 se tiene que G es un M-grupo. $\square$

Ahora presentamos algunos resultados que muestran la relación que existe entre los M-grupos y la propiedad de conexidad en general. Para este fin, a modo de recordatorio, mencionamos los siguientes conceptos. Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico. Una *curva* en X es una función continua $f : [0, 1] \longrightarrow X$. También, se dice que X es *conexo por caminos* si dos elementos cualesquiera pueden conectarse mediante una curva, es decir, si para cada $x, y \in X$ existe una función continua $f : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Un espacio topológico se dice que es *conexo por arcos* o *arcoconexo* si dos elementos cualesquiera pueden conectarse mediante una curva homeomorfa al intervalo $[0, 1]$. Estas dos nociones de espacios topológicos en general son distintas pero coinciden en una clase importante de espacios topológicos, los Hausdorff.

Como es usual, dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$ en un espacio topológico X, decimos que X es *localmente* $\mathcal{P}$ si se cumple que para cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad abierta U de x podemos encontrar una vecindad abierta V de x tal que la cerradura de V esta contenida en U y V tiene la propiedad $\mathcal{P}$. En este sentido podemos definir los espacios *localmente conexos por caminos* usando la propiedad de conexidad por caminos.

El primer resultado es un teorema planteado por Kirku y aparece en la página 71 de [25]. Tal teorema contesta parcialmente la pregunta 2.1.5 planteada por Markov de manera positiva.

Teorema 2.1.8. [**P. I. Kirku**] *Supongamos que G es un grupo abeliano y no trivial. Si G es de exponente finito y si todos los invariantes principales de Ulm-Kaplanski de G son mayores o iguales a $\mathfrak{c}$, entonces G admite una topología conexa por caminos y localmente conexa por caminos.*

Corolario 2.1.9. *Cualquier M-grupo abeliano de exponente finito admite una topología conexa por caminos y localmente conexa por caminos.*

Demostración. Supongamos que G es un M-grupo abeliano de exponente finito. Si G es trivial entonces su topología de grupo es conexa por caminos y localmente conexa por caminos. Si G no es trivial, entonces el resultado se sigue de la proposición 2.1.6 y el teorema 2.1.8. □

La siguiente propiedad se encuentra situada entre las propiedades de conexidad por caminos y conexidad.

Definición 2.1.10. *Un espacio X es densamente conexo por caminos o dp-conexo si X tiene un subespacio denso que es conexo por caminos. Es decir, si existe un subespacio denso A de X tal que para cada $x, y \in A$ existe una curva que une a x con y.*

La demostración de la siguiente proposición es clara después de la definición de espacios *dp*-conexos.

Proposición 2.1.11. *Los siguientes enunciados se cumplen para cualquier espacio topológico X:*

(a) si X es conexo por caminos, entonces X es dp-conexo;

(b) si X es dp-conexo, entonces X es conexo;

(c) si X es localmente conexo por caminos, entonces X es localmente dp-conexo;

(d) si X es localmente dp-conexo, entonces X es localmente conexo.

Existe una caracterización básica pero importante de los espacios *dp*-conexos en la clase de los grupos topológicos.

Proposición 2.1.12. *Un grupo topológico es dp-conexo si y solo si la componente arcoconexa de la identidad e_G de G es densa en G.*

El siguiente teorema ([11, Theorem 1.9]) muestra que la propiedad de ser *dp*-conexo tiene una relación importante con los M-grupos.

Teorema 2.1.13. *Cualquier M-grupo abeliano de exponente infinito admite una topología de grupo dp-conexa y localmente dp-conexa.*

El siguiente corolario nos ofrece una respuesta completa y afirmativa a la pregunta 2.1.5. La demostración se sigue del teorema 2.1.13, la proposición 2.1.11 y el corolario 2.1.3.

Corolario 2.1.14. *Sea G un grupo abeliano. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) G es un M-grupo;

(b) G admite una topología de grupo conexa;

(c) G admite una topología de grupo dp-conexa y localmente dp-conexa.

El último resultado de esta sección ofrece una caracterización para los subgrupos de un grupo topológico dado que tienen la propiedad de ser un M-grupo.

Teorema 2.1.15. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) el grupo G admite una topología de grupo τ tal que H coincide con la componente conexa de (G, τ);

(b) H admite una topología de grupo conexa;

(c) H es un M-grupo.

Demostración. (a) implica (b) es claro. Por el corolario 2.1.14 se tiene que (b) implica (c). Resta probar que (c) implica (a). Supongamos que H es un M-grupo. Por el corolario 2.1.14 se tiene que H admite una topología de grupo conexa τ_H. Definamos una topología τ para el grupo G declarando a (H, τ_H) como un subgrupo abierto de (G, τ). Por lo anterior H es también cerrado y conexo en (G, τ). Por lo tanto H coincide con la componente conexa de (G, τ). □

2.2. Grupos máximamente fragmentables

Esta sección esta dedicada a los grupos máximamente fragmentables y algunos de los resultados más relevantes acerca de esta noción. Cabe mencionar que todas las demostraciones de esta sección serán omitidas ya que no son el principal objetivo de este trabajo, el lector interesado puede consultar [8].

En [8], W. Comfort y D. Dikranjan estudian los subgrupos densos de los grupos compactos desde un punto de vista diferente. En este trabajo los autores definen el *núcleo de densidad*, denotado por $den(G)$, de un grupo topológico G como la intersección de la familia de los subgrupos densos de G.

Definición 2.2.1. *Sea G un grupo topológico. Entonces*

(a) $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G) = \{D : D$ es un subgrupo denso de $G\}$;

(b) el núcleo de densidad de G es el subgrupo $den(G) = \bigcap \mathcal{D}$.

Dos conjuntos A y B se dicen que son *casi disjuntos* si $|A \cap B| < \omega$. El siguiente teorema muestra que cualquier grupo compacto admite un par de subgrupos densos casi disjuntos.

Teorema 2.2.2. [8, Theorem A] *Cualquier grupo compacto y abeliano K admite un par de subgrupos densos casi disjuntos, en particular $|den(K)| < \omega$ para el grupo K.*

En [8] los autores prueban que para cualquier grupo compacto y abeliano se cumple que $den(G)$ es siempre un subgrupo finito de G y que existen dos subgrupos densos D_1 y D_2 tales que $D_1 \cap D_2 = den(G)$. También, en la página 329 de [8] mencionan que si p y q son numeros primos distintos, entonces el grupo compacto y metrizable $K = \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)$ cumple que $\{0\} \times \mathbb{Z}(q) \subseteq den(K)$, por lo tanto $den(K)$ no es trivial. De hecho por [8, Theorem B(b)] se tiene que $den(K) = \{0\} \times \mathbb{Z}(q) \cong \mathbb{Z}(q)$. De [8, Lemma 2.13] se concluye que para cualquier grupo compacto G se tiene que $den(G) \neq \{e\}$ solo si G es un grupo acotado, es decir, si $mG = \{e\}$ para algún número entero $m \geq 1$.

Definición 2.2.3. *Supongamos que G contiene una familia $\{D_i : i \in I\}$ de subgrupos densos y consideremos las condiciones siguientes:*

(a) $D_i \cap D_j = \{e\}$, *siempre que* $i, j \in I$, $i \neq j$*;*

(b) $D_i \cap \langle \bigcup_{i \neq j} D_j \rangle = \{e\}$, *para* $i \in I$.

Si la familia $\{D_i : i \in I\}$ *cumple (a), entonces decimos que* $\{D_i : i \in I\}$ *es una familia independiente dos a dos. Si la familia* $\{D_i : i \in I\}$ *satisface (b), entonces decimos que tal familia es independiente.*

Con la definición de núcleo de densidad en mente los autores de [8] definen la noción de grupo máximamente fragmentable como sigue: sea $\kappa > 0$ un cardinal. Entonces un grupo G es *κ-fragmentable* (en símbolos: $G \in \mathcal{F}(\kappa)$) si G tiene una familia independiente $\{D_i : i \in \kappa\}$ de subgrupos densos. En este sentido, en [8] se define para un grupo G el concepto de *número de fragmentación* como sigue: decimos que G tiene *número de fragmentación* κ (en símbolos: $\mathfrak{f}(G) = \kappa$) si $G \in \mathcal{F}(\kappa)$, pero $G \notin \mathcal{F}(\kappa^+)$. En particular, G *es máximamente fragmentable* si $\mathfrak{f}(G) = |G|$, es decir, si G contiene una familia $\{D_i : i \in \kappa\}$ de subgrupos densos como en (b) y $\kappa = |G|$.

La propiedad de ser máximamente fragmentable en la clase de los grupos compactos implica severas restricciones en la estructura algebraica del grupo como lo muestran los teoremas B, C y D de [8]. Antes de enunciar tales teoremas es conveniente tener en mente algunos conceptos.

Como complemento a la definición 1.1.24, para un grupo abeliano G de torsión acotada se define *el orden esencial de* G como el menor entero $m > 0$ tal que $|mG| < \omega$, en símbolos $eo(G) = m$. El subgrupo *finito de* G denotado por $fin(G)$ es el subgrupo $eo(G) \cdot G$. Se sigue de [8, Lemma 2.13] que para cualquier grupo G no trivial se cumple que $fin(G/fin(G)) = \{e\}$. También para cualquier topología de grupo en G, el subgrupo finito $fin(G)$ esta contenido en cualquier subgrupo denso de G.

Cualquier grupo abeliano de torsión G tiene algebraicamente la forma

$$G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G(p),$$

donde $G(p)$ es un p-grupo, es decir, $G(p)$ es un grupo en el que cada elemento tiene como orden una potencia de p y $\mathbb{P}$ denota a la colección de todos los números primos. El *conjunto representación de* G, denotado por $\pi(G)$, es el conjunto

$$\pi(G) = \{p \in \mathbb{P} : |G(p)| > 1\}.$$

Es claro que G es un grupo de torsión acotada si y solo si $|\pi(G)| < \omega$ y todos los grupos $G(p)$, tales que $p \in \pi(G)$ son de torsión acotada.

Si $G(p)$ es de torsión acotada, entonces algebraicamente tiene la forma

$$G(p) = \bigoplus_{1 \leq k \leq n_p} \bigoplus_{\alpha_{p,k}} (\mathbb{Z}(p^k)),$$

con $n_p < \omega$ para cualquier número primo p. Como vimos en la sección 2.1, los cardinales

$$\{\alpha_{p,k} : 1 \leq k \leq n_p\}$$

se llaman los invariantes cardinales de Ulm-Kaplanski de $G(p)$ y α_{p,n_p} es llamado el invariante principal de Ulm-Kaplanski de $G(p)$. Para el grupo $G = \bigoplus_{p \in \pi(G)} G(p)$ se escribe

$$l^p_{UK}(G) = l_{UK}(G(p)) = \alpha_{p,n_p}.$$

Para un grupo abeliano de torsión acotada se define

$$\text{mín}\, l_{UK}(G) := \text{mín}\{l^p_{UK}(G) : p \in \pi(G)\}.$$

De [8, Lemma 2.13] se tiene que los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $|fin(G)| > 1$;

(b) existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $1 < |mG| < \omega$;

(c) G es de torsión acotada y $\text{mín}\, l_{UK}(G) < \omega$, es decir, $l^p_{UK}(G) < \omega$ para algún $p \in \pi(G)$.

Claramente, si $G \in \mathcal{F}(2)$, entonces $den(G) = \{e\}$. El siguiente teorema muestra que el recíproco del enunciado anterior se mantiene para grupos compactos.

Teorema 2.2.4. [8, Theorem B] *Supongamos que K es un grupo abeliano y compacto. Entonces:*

(a) $K \in \mathcal{F}(2)$ si y solo si $den(K) = \{e\}$;

(b) si $|den(G)| > 1$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $1 < |mK| < \omega$ y $den(K) = fin(K)$;

(c) existen $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(K)$ tal que $den(K) = D_1 \cap D_2$.

De hecho el teorema 2.2.4 se obtiene de la unión de los siguientes teoremas ([8, Theorem 6.9, Theorem 6.10] respectivamente):

Teorema 2.2.5. *Si K es un grupo compacto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $K \notin \mathcal{F}(2)$;

(b) *K es un grupo de torsión y* $K \notin \mathcal{F}(2)$;

(c) *K es un grupo de torsión y al menos uno de sus invariantes principales de Ulm-Kaplanski es finito;*

(d) $fin(K) \neq \{e\}$, *o equivalentemente,* $|fin(K)| > 1$.

Teorema 2.2.6. *Sea K un grupo compacto e infinito. Entonces:*

(a) $den(K) \neq \{e\}$ *si y solo si K es un grupo de torsión y* $fin(K) \neq \{e\}$.

(b) $den(K) = fin(K)$, *es más, existen $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(K)$ tal que* $den(K) = D_1 \cap D_2$.

Cabe mencionar que los autores de [8] olvidaron mencionar la condición $|den(G)| > 1$ en el inciso (b) de [8, Theorem B].

Concluimos esta sección mostrando algunos resultados que nos permiten calcular el número de fragmentación $\mathfrak{f}(K)$ para un grupo compacto y abeliano K. El primer teorema considera el caso cuando el grupo compacto K es de torsión y el segundo teorema aborda el caso cuando $r_0(K) > 0$.

Teorema 2.2.7. [8, Theorem C] *Sea K un grupo compacto, abeliano y de torsión tal que $K \in \mathcal{F}(2)$, entonces:*

(a) $\mathfrak{f}(K) = l_{UK}(K)$, *si K es un p-grupo;*

(b) $\mathfrak{f}(K) = \text{mín}\, l_{UK}(K)$ *en el caso general.*

Corolario 2.2.8. *Sea K un grupo compacto, abeliano y de torsión. Entonces:*

(a) $\mathfrak{f}(K) = 1$ *si y solo si* $K \notin \mathcal{F}(2)$;

(b) *si $\mathfrak{f}(K) > 1$, entonces $\mathfrak{f}(K)$ es infinito, más específicamente, se cumple la igualdad* $\mathfrak{f}(K) = \text{mín}\, l_{UK}(K)$.

Teorema 2.2.9. [8, Theorem D] *Si K es un grupo compacto y abeliano tal que $r_0(K) > 0$, entonces $\mathfrak{f}(K) = r_0(K)$.*

Capítulo 3

Grupos topológicos d-independientes

Un grupo topológico G con $|G| \geq \mathfrak{c}$ se llama *d-independiente* si para todo subgrupo S de G con $|S| < 2^\omega$, se puede encontrar un subgrupo denso y numerable H de G tal que $S \cap H = \{e\}$. Por lo tanto, todos los grupos d-independientes son separables y tienen una cardinalidad al menos $2^\omega = \mathfrak{c}$. Nuestro resultado principal es una caracterización puramente algebraica de la d-independencia en la clase de grupos abelianos compactos y metrizables. Demostramos que un grupo abeliano compacto y metrizable G con $|G| \geq \mathfrak{c}$ es d-independiente si y solo si, para todo entero $m \geq 1$, $|mG| = 2^\omega$ o $|mG| = 1$. Esta caracterización implica que un grupo abeliano compacto y metrizable es d-independiente si y solo si es *máximamente fragmentable* [Comfort y Dikranjan, *Topology Proc.***44** (2014), 325–356] si y solo si G es un *M-grupo* como se define en D. Dikranjan y D. Shakhmatov en [*Advances Math.* **286** (2016), 286–307].

Además, presentamos una caracterización de los grupos abelianos separables, metrizables y d-independientes, y mostramos que los productos de grupos topológicos separables a menudo pueden ser d-independientes, incluso si los factores no lo son.

3.1. Algunas propiedades básicas de los grupos d-independientes

Llamamos a un grupo topológico abeliano G *débilmente d-independiente* si para cada subgrupo finito F de G, existe un subgrupo denso y numerable H de G tal que $H \cap F = \{e\}$. Claramente, cada grupo d-independiente es débilmente d-independiente y cada grupo topológico abeliano, separable y libre de torsión también es débilmente d-independiente.

Comenzamos con una relación simple entre grupos abelianos (débilmente) d-independientes y los M-grupos.

Proposición 3.1.1. *Cada grupo topológico abeliano y d-independiente es algebraicamente un M-grupo. Cada grupo abeliano, compacto y débilmente d-independiente también es un M-grupo.*

Demostración. Sea G un grupo topológico abeliano y supongamos que tenemos $1 < |mG| < \mathfrak{c}$, para algún entero $m \geq 1$. Claramente, $S = mG$ es un subgrupo de G. Si H es un subgrupo denso de G, entonces

$$mH \subset H \cap mG = H \cap S.$$

La densidad de H en G implica que mH es denso en mG, por lo que $|mH| > 1$. Por lo tanto, la intersección $H \cap S$ no es trivial. Dado que $|S| < \mathfrak{c}$, concluimos que el grupo G no es d-independiente.

Si además el grupo G es compacto, entonces para cada entero $m \geq 1$, o bien mG es finito o bien satisface $|mG| \geq \mathfrak{c}$. Por lo tanto, suponiendo que $1 < |mG| < \mathfrak{c}$ para algún entero $m \geq 1$ y razonando como en el caso anterior, concluimos que G no es débilmente d-independiente. $\square$

Usaremos la segunda afirmación de la proposición 3.1.1 en la sección 3.3 dedicada a grupos compactos y abelianos. Por la proposición 3.1.1, el corolario 2.1.14 y el teorema 2.1.15 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2. *Sea G un grupo topológico abeliano y H un subgrupo de G. Si H es un grupo d-independiente, entonces:*

(a) H admite una topología de grupo conexa;

(b) el grupo G admite una topología de grupo τ tal que H coincide con la componente conexa de (G, τ).

A continuación demostraremos que los M-grupos abelianos no son necesariamente d-independientes, incluso en el caso especial de grupos abelianos segundo numerables.

Ejemplo 3.1.3. Existe un M-grupo abeliano de torsión, precompacto, σ-compacto, segundo numerable que no es d-independiente.

De hecho, sea $2 < p_1 < p_2 < \cdots$ una sucesión estrictamente creciente de números primos. Para cada entero positivo i, sea $K_i = \mathbb{Z}(p_i)^\omega$ el ω-ésimo producto del grupo cíclico discreto $\mathbb{Z}(p_i)$ con la topología usual de Tychonoff, por lo que es compacto y segundo numerable. Sea también K_0 el grupo quasicíclico de 2^n-ésimas raíces de la unidad considerado como un subgrupo topológico del grupo de círculo $\mathbb{T}$. Entonces K_0 es un grupo abeliano divisible, precompacto, infinito y numerable. Considere el grupo producto $K = \prod_{i\in\omega} K_i$ dotado de la topología de producto de Tychonoff y denote por G a la suma directa de la familia $\{K_i : i \in \omega\}$ considerada como un subgrupo topológico de K. El grupo G se llama habitualmente el *σ-producto* de los grupos K_i con $i \in \omega$. El grupo K es precompacto ya que es el producto de una familia de grupos topológicos precompactos, y así también lo es el subgrupo G de K. Además, como el factor K_0 es numerable (y por lo tanto σ-compacto) y los factores K_i con $i \geq 1$ son compactos, se sigue de [4, Proposition 1.6.41] que el grupo G es σ-compacto.

Es fácil ver que G es un M-grupo. De hecho, tomemos un entero arbitrario $m > 1$. Existe $k \in \omega$ tal que $m < p_k$. Nuestra elección de k implica que $mK_i = K_i$, para cada $i \geq k$. Por lo tanto, el grupo mG contiene la suma directa de los grupos K_i con $i \geq k$ y, por lo tanto, $|mG| = \mathfrak{c}$.

Queda por verificar que G no es d-independiente. Denotemos por S al subgrupo $K_0 \times \{\bar{e}\}$ de G, donde $\bar{e}$ es el elemento identidad del grupo $\prod_{i=1}^\infty K_i$. Entonces, $S \cong K_0$ es un grupo numerable, infinito y divisible. Sea H un subgrupo denso y arbitrario de G. Por la densidad de H, existe un elemento $x = (x_i)_{i\in\omega} \in H$ tal que $x_0 \neq 1$, donde 1 es la identidad de $K_0 \subset \mathbb{T}$. Como G es la suma directa de los grupos K_i, existe $k \in \omega$ tal que $x_i = e_i$, la identidad de K_i, para cada $i > k$. Sea $n = p_1 p_2 \cdots p_k$. Entonces n es impar, $nx_i = e_i$ para cada $i \geq 1$ y $nx_0 \neq 1$. Esto implica que el elemento $nx \in nH \subset H$ está en S y que nx es distinto de la identidad de G. Por lo tanto, la intersección $H \cap S$ no es trivial. Como el subgrupo S de G es numerable, vemos que G no es d-independiente.

Mostraremos en la sección 3.3 que un grupo abeliano y compacto es d-

independiente si y solo si es un M-grupo. Por lo tanto, la combinación precompacto y σ-compacto en el ejemplo 3.1.3 no se puede fortalecer a compacto.

En la siguiente proposición presentamos una relación simple pero esclarecedora entre grupos d-independientes y grupos máximamente fragmentables:

Proposición 3.1.4. *Un grupo topológico, abeliano y segundo numerable G con $|G| = \mathfrak{c}$ es d-independiente si y solo si G es máximamente fragmentable.*

Demostración. Supongamos que G es d-independiente y sea S_0 un subgrupo denso y numerable de G. Si $\alpha < \mathfrak{c}$ es un ordinal con $\alpha > 0$ y $\{S_\nu : \nu < \alpha\}$ es una familia independiente de subgrupos densos y numerables de G, entonces denotamos por H_α al subgrupo de G generado por la unión $\bigcup_{\nu<\alpha} S_\nu$. Es claro que $|H_\alpha| \leq |\alpha| \cdot \omega < \mathfrak{c}$. Como G es d-independiente, existe un subgrupo denso y numerable S_α de G que satisface $S_\alpha \cap H_\alpha = \{e\}$. Entonces, la familia $\{S_\nu : \nu \leq \alpha\}$ es independiente. Esto demuestra la existencia de una familia independiente $\{S_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ de subgrupos densos y numerables de G y por lo tanto, G es máximamente fragmentable. Observemos que no hemos usado la suposición sobre la propiedad de ser segundo numerable del grupo G en esta parte del argumento.

Recíprocamente, supongamos que G es máximamente fragmentable y sea $\{S_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ una familia independiente de subgrupos densos de G. Como G es segundo numerable, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada subgrupo S_ν es numerable. Consideremos un subgrupo arbitrario D de G con $|D| < \mathfrak{c}$ y sea $D_\nu = D \cap S_\nu$ para cada $\nu < \mathfrak{c}$. Entonces $\{D_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ es una familia independiente de subgrupos de D, de donde la desigualdad $|D| < \mathfrak{c}$ implica que $|D_\nu| = 1$ para algún $\nu < \mathfrak{c}$, es decir, $D_\nu = \{e\}$. Luego, $D \cap S_\nu = \{e\}$, lo que implica que G es d-independiente. $\square$

Es natural preguntarse si la coincidencia de las dos clases de grupos abelianos topológicos G con $|G| = \mathfrak{c}$ establecidas en la proposición 3.1.4 se puede extender a otras clases naturales de grupos. En el siguiente ejemplo, mostramos que esto no es posible ni para grupos localmente compactos ni para grupos ω-acotados. Recordamos que un grupo topológico H es ω-acotado si la clausura de cada subconjunto numerable de H es compacta. Todos los grupos ω-acotados son numerablemente compactos y precompactos.

Ejemplo 3.1.5. Existen grupos abelianos máximamente fragmentables G y H con $|G| = |H| = \mathfrak{c}$ tales que G es localmente compacto, H es ω-acotado, pero ni G ni H son d-independientes.

Considere el grupo abeliano $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$, donde $\mathbb{R}_d$ es el grupo aditivo discreto de los reales. Entonces, G es localmente compacto. Para verificar que G es máximamente fragmentable, podemos argumentar de la siguiente manera. Dado un homomorfismo $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_d$, sea

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

la gráfica de f. Claramente, $Gr(f)$ es un subgrupo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$. Por recursión en $\alpha < \mathfrak{c}$, se define una familia $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de homomorfismos de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_d$ tal que $Gr(f_\alpha)$ es denso en $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ y la intersección $Gr(f_\alpha) \cap Gr(f_\beta)$ es trivial siempre que $\alpha \neq \beta$. Tal construcción es posible porque el grupo $\mathbb{R}$ es divisible. La familia $\{Gr(f_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ prueba que G es máximamente fragmentable. Es claro que el grupo G no es separable, por lo que no puede ser d-independiente.

Para definir H, comenzamos con el grupo abeliano compacto $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$. Sea H el Σ-producto $\Sigma\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ considerado como un subgrupo topológico de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$. Este subgrupo consiste en todos los elementos $x \in \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ que difieren de la identidad 1 de $\mathbb{T}$ en a lo sumo una cantidad numerable de coordenadas. Según [4, Corollary 1.6.34], H es un subgrupo denso y ω-acotado de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$. En particular, H es precompacto. Un cálculo sencillo muestra que $|H| = \mathfrak{c}$. Además, H contiene una copia isomorfa del grupo $\mathbb{T}$, por lo que

$$\mathfrak{c} = r_0(\mathbb{T}) \leq r_0(H) \leq |H| = \mathfrak{c}.$$

Por lo tanto, concluimos que $r_0(H) = |H| = \mathfrak{c}$. Como H es denso en $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$, también vemos que $w(H) = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, aplicando [8, Theorem 6.5], deducimos que H es máximamente fragmentable. Finalmente, el grupo H no es separable, ya que es ω-acotado y no compacto. Por lo tanto, H no es d-independiente.

Los grupos G y H en el ejemplo 3.1.5 no son separables. Esto da lugar al siguiente problema.

Problema 3.1.6. *¿Todo grupo abeliano, separable y máximamente fragmentable G que satisface $|G| = \mathfrak{c}$ es d-independiente? ¿Qué pasa si, además, G es precompacto?*

Ahora presentamos un lema sencillo pero útil.

Lema 3.1.7. *Sea G un grupo abeliano. Si S es un subgrupo de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y A es un subconjunto de G con $|A| \geq \mathfrak{c}$ tal que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ para todo $x, y \in A$ distintos, entonces existe $x \in A$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.*

Demostración. Supongamos que para cada $x \in A$ tal que $x \neq e$ se cumple $|\langle x \rangle \cap S| \geq 2$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $nx \in S$ y $nx \neq e$.

Para cada $x \in A \setminus \{e\}$, sean $n_x = \text{mín}\{n \in \mathbb{N}^+ : nx \in S, nx \neq e\}$ y $s_x = n_x x$. Entonces la función $\psi : A \setminus \{e\} \longrightarrow \mathbb{N}^+ \times S$ dada como $\psi(x) = (n_x, s_x)$, no es inyectiva, pues $|\mathbb{N}^+ \times S| < \mathfrak{c}$ y $|A \setminus \{e\}| \geq \mathfrak{c}$. Así, existen $x, y \in A \setminus \{e\}$ con $x \neq y$ tales que $(n_x, s_x) = (n_y, s_y)$, esto es $n_x = n_y$ y $s_x = s_y$, por lo tanto, $n_x x = n_x y$, de donde $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{e\}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $x \neq e$ y $|\langle x \rangle \cap S| = 1$. $\square$

En el siguiente teorema presentamos una caracterización de la propiedad de d-independencia en una clase suficientemente amplia de grupos topológicos que incluye a los grupos abelianos metrizables separables. Recordemos que un espacio topológico X tiene *estrechez numerable* si para todo subconjunto A de X y todo punto $x \in \overline{A}$, existe un subconjunto numerable B de A tal que $x \in \overline{B}$ (ver [13, 1.7.13]).

Teorema 3.1.8. *Para un grupo topológico abeliano y de Hausdorff G, se cumplen las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b) y (b) $\Leftrightarrow$ (c), donde:*

(a) G es d-independiente.

(b) Para cada subgrupo S de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y cada conjunto abierto no vacío U en G, existe $x \in U \setminus \{e\}$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.

(c) Cada conjunto abierto no vacío en G contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Además, si G es separable y tiene estrechez numerable, entonces (a), (b) y (c) son equivalentes.

Demostración. Es claro que si G es como en (a), (b) o (c), entonces $|G| \geq \mathfrak{c}$.

Primero probaremos que (a) implica (b). Si G es d-independiente, S es un subgrupo de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y U es un conjunto abierto no vacío en G, podemos encontrar un subgrupo denso y numerable H de G con $H \cap S = \{e\}$. Observe que G, siendo d-independiente, tiene que ser separable. Por lo tanto, G no es discreto. Como H es denso en G, existe un elemento $x \in H \cap (U \setminus \{e\})$. Luego $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.

Ahora probaremos (b) implica (c). Supongamos que se cumple (b) y sea A un subconjunto independiente maximal de un abierto no vacío U en G. Afirmamos que $|A| \geq \mathfrak{c}$. Supongamos por contradicción que $|A| < \mathfrak{c}$ y sea

$S = \langle A \rangle$. Entonces $|S| \leq |A| \cdot \omega < \mathfrak{c}$. Al aplicar (b) obtenemos un elemento $z \in U \setminus \{e\}$ tal que $\langle z \rangle \cap S = \{e\}$. Por lo tanto, $B = A \cup \{z\}$ es un conjunto independiente de U. Esto contradice la maximalidad de A.

Vemos que (c) implica (b) es inmediata a partir del lema 3.1.7.

Finalmente, probamos (b) implica (a) asumiendo que G es separable y tiene estrechez numerable. Dado que el espacio G es separable y regular, tenemos la desigualdad $w(G) \leq 2^{d(G)} \leq \mathfrak{c}$ por [13, Theorem 1.5.7].

Sea $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una base para G. Haciendo uso de la suposición (b) definimos por recursión un subconjunto $\{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ de G tal que $x_\alpha \in U_\alpha$ y $\langle x_\alpha \rangle \cap S_\alpha = \{e\}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, donde $S_0 = S$ y $S_\alpha = S + \langle \{x_\nu : \nu < \alpha\} \rangle$. Entonces, $|S_\alpha| \leq |S| \cdot |\alpha| \cdot \omega < \mathfrak{c}$.

De nuestra elección de los elementos $x_\alpha \in U_\alpha$ se sigue que el conjunto $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es denso en G, por lo que genera un subgrupo denso H de G. Afirmamos que $H \cap S = \{e\}$.

Supongamos que $x \in H \cap S$ y $x \neq e$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, sea

$$X_\alpha = \{x_\nu : \nu \leq \alpha\}.$$

Existe el mínimo ordinal $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $x \in X_\alpha$. Entonces podemos encontrar ordinales $\alpha_0 < \cdots < \alpha_k \leq \alpha$ y enteros $n_0, \ldots, n_k$ tales que

$$x = n_0 x_{\alpha_0} + \cdots + n_k x_{\alpha_k}.$$

Nuestra elección de α implica que $n_k x_{\alpha_k} \neq e$ y $\alpha_k = \alpha$. Por lo tanto,

$$e \neq n_k x_\alpha = x - n_0 x_{\alpha_0} - \cdots - n_{k-1} x_{\alpha_{k-1}} \in \langle x_\alpha \rangle \cap S_\alpha,$$

lo cual contradice nuestra elección de x_α. De este modo hemos demostrado que $H \cap S = \{e\}$.

El subgrupo denso H de G no es numerable. Sin embargo, H contiene un subgrupo denso numerable. Para ver esto, usamos la separabilidad de G para tomar un subconjunto denso numerable de G, digamos D. Dado que la estrechez de G es numerable y H es denso en G, para cada $x \in D$ existe un subconjunto numerable B_x de H tal que $x \in \overline{B_x}$. Entonces $B = \bigcup_{x \in D} B_x$ es un subconjunto numerable de H tal que $D \subset \overline{B}$. El subgrupo numerable $C = \langle B \rangle$ de H satisface $D \subset \overline{B} \subset \overline{C}$ y, por lo tanto, C es denso en G. También se sigue de $C \subset H$ que $C \cap S = \{e\}$. Por lo tanto, el grupo G es d-independiente. $\square$

Dado que los espacios secuenciales tienen estrechez numerable, el siguiente corolario es inmediato a partir del teorema 3.1.8.

Corolario 3.1.9. *Sea G un grupo topológico abeliano, secuencial, separable y de Hausdorff. Entonces G es d-independiente si y solo si para todo subgrupo S de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y para todo conjunto abierto no vacío U en G, existe $x \in U \setminus \{e\}$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.*

Corolario 3.1.10. *Sea G un grupo topológico abeliano, Hausdorff y con una red numerable. Entonces G es d-independiente si y solo si para todo subgrupo S de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y para todo conjunto abierto no vacío U en G, existe $x \in U \setminus \{e\}$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.*

Demostración. Todo espacio topológico con una red numerable es separable y tiene estrechez numerable. Por lo tanto, es suficiente aplicar el teorema 3.1.8. □

Corolario 3.1.11. *Un grupo topológico abeliano metrizable y separable G es d-independiente si y solo si para todo subgrupo S de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y cada conjunto abierto no vacío U en G, existe $x \in U \setminus \{e\}$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.*

El siguiente hecho simple es útil al tratar con grupos ω-estrechos.

Lema 3.1.12. *Sea G un grupo topológico ω-estrecho con $|G| > \omega$. Entonces, cada conjunto abierto no vacío U en G satisface $|U| = |G|$.*

Demostración. Sea V una vecindad abierta y no vacía de la identidad e en G. Entonces existe $A \subset G$ tal que $|A| \leq \omega$ y $G = AV$. La familia $\mathcal{V} = \{xV : x \in A\}$ cubre al grupo G y la igualdad $|xV| = |V|$ se cumple para todo $x \in A$. Como $|G| > \omega$, se sigue que $|G| = |V|$.

Finalmente, si U es un conjunto abierto no vacío en G, entonces se puede encontrar un elemento $x \in U$ y una vecindad abierta V de la identidad en G tal que $xV \subseteq U$. Por lo tanto, $|U| = |G|$. □

Lema 3.1.13. *Sea G un grupo abeliano y P un subconjunto de G tal que $|P| \geq \mathfrak{c}$. Si se cumple $\big|(P - P) \cap tor(G)\big| < \mathfrak{c}$, entonces P contiene un subconjunto independiente A de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que consiste en elementos de orden infinito.*

Demostración. Para cada entero $n \geq 1$, sea $P_n = P \cap G[n]$. Observemos que si $x, y \in P_n$, entonces $x - y \in (P - P) \cap G[n]$. Por lo tanto, para cada $n \geq 1$, el conjunto P_n es finito o

$$|P_n| \leq |(P - P) \cap G[n]| \leq |(P - P) \cap tor(G)| < \mathfrak{c}.$$

En cualquier caso, la desigualdad $|P_n| < \mathfrak{c}$ es válida. De

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = P \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$$

y puesto que se cumple $tor(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$ y la cofinalidad del cardinal $\mathfrak{c}$ es no numerable, concluimos que $|P \cap tor(G)| < \mathfrak{c}$. De $|P| \geq \mathfrak{c}$ se deduce que el conjunto $Q = P \setminus tor(G)$ satisface $|Q| = |P| \geq \mathfrak{c}$ y todos los elementos de Q tienen orden infinito.

Sea A un subconjunto independiente maximal (por inclusión) de Q. Supongamos por contradicción que $|A| < \mathfrak{c}$ y denotemos por S al subgrupo de G generado por A. Entonces $|S| < \mathfrak{c}$. Se sigue de la maximalidad de A que $|S \cap \langle x \rangle| \geq 2$, para cada $x \in Q$. Así, para cada $x \in Q$, sea $n_x = \text{mín}\{n \in \mathbb{N}^+ : nx \in S\}$ y denotemos el elemento $n_x x$ por s_x. Nótese que $s_x \neq e$ porque todos los elementos de Q tienen orden infinito. Consideremos la función $f\colon Q \to \mathbb{N}^+$ definida por $f(x) = n_x$. Como el conjunto $\mathbb{N}^+$ es numerable, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $|f^{-1}(n)| \geq \mathfrak{c}$. Sea $R = f^{-1}(n)$ y consideremos la función $\varphi\colon R \to S$, donde $\varphi(x) = nx$ para cada $x \in R$. Sea $\kappa = |(P - P) \cap G[n]|$. Dado que $\kappa < \mathfrak{c} \leq |R|$ y $|S| < \mathfrak{c}$, podemos encontrar $s \in S$ tal que $|\varphi^{-1}(s)| > \kappa$. Sea $R^* = \varphi^{-1}(s)$ y tomemos un elemento arbitrario $x_0 \in R^*$. Entonces $\varphi(x) = \varphi(x_0) = s$, de donde se sigue que $n(x - x_0) = e$ para cada $x \in R^*$. Lo último implica que $R^* - x_0 \subset G[n] \cap (P - P)$. Por lo tanto, la intersección $G[n] \cap (P - P)$ tiene cardinalidad mayor que κ, lo cual contradice la definición de κ.

Concluimos que $|A| \geq \mathfrak{c}$, lo que completa la prueba. $\square$

Los siguientes corolarios son inmediatos de los lemas 3.1.12 y 3.1.13.

Corolario 3.1.14. *Sea G un grupo abeliano casi libre de torsión y P un subconjunto de G con $|P| \geq \mathfrak{c}$. Entonces P contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ compuesto por elementos de orden infinito.*

Corolario 3.1.15. *Sea G un grupo topológico abeliano, casi libre de torsión, ω-estrecho con $|G| \geq \mathfrak{c}$. Entonces todo conjunto abierto no vacío en G contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ compuesto por elementos de orden infinito.*

En el siguiente lema presentamos una amplia clase de grupos topológicos abelianos que satisfacen (b) y (c) del teorema 3.1.8.

Lema 3.1.16. *Sea G un grupo topológico abeliano y ω-estrecho tal que satisface $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$. Entonces para todo subgrupo S de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y todo conjunto abierto no vacío U en G, existe un elemento $y \in U$ de orden infinito tal que $\langle y \rangle \cap S = \{e\}$. Por lo tanto, todo conjunto abierto no vacío en G contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que consiste de elementos de orden infinito.*

Demostración. Considere un subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y sea U un conjunto abierto no vacío en G. Se sigue del hecho de que $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$ que G contiene un conjunto independiente D de elementos de orden infinito tal que $|D| = \mathfrak{c}$. Dado que G es ω-estrecho, existe un subgrupo numerable C de G tal que $U + C = G$. Sea $T = S + C$. Claramente, el subgrupo T de G satisface $|T| \leq |S| \cdot \omega < \mathfrak{c}$. Ya que los conjuntos abiertos $U + x$ con $x \in C$ cubren al grupo G y $|D| = \mathfrak{c}$, existe $x_0 \in C$ tal que $|D \cap (U + x_0)| = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, podemos encontrar un subconjunto D^* de D con $|D^*| = \mathfrak{c}$ tal que $D^* \subset U + x_0$. Dado que el conjunto D^* es independiente, el lema 3.1.7 implica que $\langle x_1 \rangle \cap T = \{e\}$ para algún $x_1 \in D^*$ distinto de x_0. Entonces el elemento $y = x_1 - x_0$ está en U.

Suponga que $ny = nx_1 - nx_0 \in S$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como $x_0 \in C \subset T$, tenemos que $nx_1 \in S + nx_0 \subset T + T = T$. De ahí, nuestra elección de $x_1 \in D^* \subset D$ implica que $n = 0$. Dado que $e \in S$, concluimos que y tiene orden infinito y $\langle y \rangle \cap S = \{e\}$. Esto prueba la primera afirmación del lema.

La segunda afirmación del lema se sigue de la equivalencia de los incisos (b) y (c) en el teorema 3.1.8. $\square$

Observación 3.1.17. La condición $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$ en el lema 3.1.16 es equivalente a $|G/tor(G)| \geq \mathfrak{c}$. En efecto, sea $D \subset G$ un conjunto independiente con elementos de orden infinito y $|D| = \mathfrak{c}$ y sea $\pi\colon G \to G/tor(G)$ el homomorfismo canónico. Entonces la restricción de π a D es inyectiva y $\pi(D)$ es un subconjunto independiente de $G/tor(G)$ con $|\pi(D)| = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $|G/tor(G)| \geq |\pi(D)| \geq \mathfrak{c}$. Recíprocamente, si $|G/tor(G)| \geq \mathfrak{c}$, tomamos un subconjunto independiente maximal E de $G/tor(G)$. Dado que el grupo $G/tor(G)$ es libre de torsión, la cardinalidad de E es al menos $\mathfrak{c}$. Tomemos un subconjunto D de G tal que $\pi(D) = E$ y π es inyectiva en D. Entonces D es un subconjunto independiente de G y, por lo tanto, $r_0(G) \geq |D| = |E| \geq \mathfrak{c}$. De hecho, nuestro argumento muestra que

$$r_0(G) = r_0(G/tor(G)) = |G/tor(G)|,$$

siempre que $r_0(G/tor(G))$ sea infinito.

Corolario 3.1.18. *Sea G un grupo topológico abeliano y ω-estrecho tal que $|G| \geq \mathfrak{c}$ y $|tor(G)| < \mathfrak{c}$. Entonces, para cualquier subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y cualquier conjunto abierto no vacío U en G, existe un elemento $x \in U$ de orden infinito tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$.*

Demostración. De $|G| \geq \mathfrak{c}$ y $|tor(G)| < \mathfrak{c}$ se sigue que $|G/tor(G)| \geq \mathfrak{c}$. Según la observación 3.1.17, la última desigualdad es equivalente a $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$. Por lo tanto, la conclusión requerida se sigue del lema 3.1.16. □

Ahora estudiemos la d-independencia en grupos abelianos de torsión. El siguiente simple resultado algebraico es bien conocido en la teoría de grupos.

Lema 3.1.19. *Sea G un grupo abeliano de exponente un número primo p. Entonces, cualquier conjunto $P \subset G$ con $|P| \geq \mathfrak{c}$ contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea P un subconjunto de G con $|P| \geq \mathfrak{c}$. Denotemos por A un subconjunto independiente maximal de P y supongamos, para llegar a una contradicción, que $|A| < \mathfrak{c}$. Entonces el subgrupo $H = \langle A \rangle$ de G satisface $|H| < \mathfrak{c}$ y $|\langle x \rangle \cap H| \geq 2$, para cada $x \in P$ con $x \neq e$. Por lo tanto, existe un entero n con $1 \leq n < p$ tal que $nx \in H$. Como p es primo, el elemento nx genera el grupo cíclico $\langle x \rangle$, por lo que se sigue que $\langle x \rangle = \langle nx \rangle \subset H$. En particular, $x \in H$ para cada $x \in P$. Por lo tanto, $P \subset H$, lo cual es imposible ya que $|H| < \mathfrak{c} \leq |P|$. Esta contradicción completa la prueba. □

El siguiente resultado es un análogo del lema 3.1.16 para grupos topológicos abelianos de período un número primo. Es inmediato a partir de los lemas 3.1.12 y 3.1.19.

Lema 3.1.20. *Sea G un grupo topológico abeliano, ω-estrecho de período un número primo p tal que $|G| \geq \mathfrak{c}$. Entonces, todo conjunto abierto no vacío en G contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Nuestro objetivo es extender el lema 3.1.20 a grupos de torsión acotada. Para tal propósito enunciamos el siguiente lema:

Lema 3.1.21. *Sea G un grupo topológico abeliano, ω-estrecho tal que $|G| \geq \mathfrak{c}$. Supongamos que G es un grupo de torsión acotada de período p^k, donde p es un número primo y $k \geq 1$ es un entero. Si $|p^{k-1}G| \geq \mathfrak{c}$, entonces todo conjunto abierto no vacío U en G contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Si, además, G es separable y tiene estrechez numerable, entonces es d-independiente.*

Demostración. Si $k = 1$, la conclusión requerida sobre los subconjuntos abiertos de G sigue de lema 3.1.20. Supongamos que $k > 1$. Por nuestras suposiciones, la cardinalidad del subgrupo $H = p^{k-1}G$ de G es al menos $\mathfrak{c}$. Claramente, el período del grupo H es p. Denotemos por φ el homomorfismo de G en G definido por $\varphi(x) = p^{k-1}x$, para cada $x \in G$. Note que $H = \varphi(G)$.

Sea U un subconjunto abierto y no vacío de G. Entonces, existe un conjunto numerable $C \subset G$ tal que $G = U + C$. Tenemos que

$$H = \varphi(U + C) = \varphi(U) + \varphi(C).$$

Dado que el conjunto $\varphi(C)$ es numerable y $|H| \geq \mathfrak{c}$, se sigue que $|\varphi(U)| \geq \mathfrak{c}$. Por lema 3.1.19, el conjunto $\varphi(U)$ contiene un subconjunto independiente A de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Elijamos un subconjunto B de U tal que $\varphi(B) = A$ y la restricción de φ a B sea inyectiva. Entonces $|B| = \mathfrak{c}$ y resta mostrar que B es un subconjunto independiente de G.

Supongamos que $k_1b_1 + \cdots + k_nb_n = e$, donde $k_1, \ldots, k_n$ son enteros no nulos, $b_1, \ldots, b_n$ son elementos distintos entre sí de B y e es la identidad de G. Sea $m \geq 0$ el mayor entero tal que p^m divide a k_i para cada $i \leq n$. Entonces, $k_i = p^m l_i$, donde $1 \leq i \leq n$, y tenemos la igualdad

$$e = p^m l_1 b_1 + \cdots + p^m l_n b_n. \tag{3.1}$$

Si $m \geq k$, entonces $k_i b_i = p^m l_i b_i = e$ para cada $i \leq n$ ya que p^k es el período de G. De lo contrario, multiplicamos (3.1) por p^{k-m-1} y obtenemos

$$\begin{aligned} e &= p^{k-1} l_1 b_1 + \cdots + p^{k-1} l_n b_n \\ &= l_1 a_1 + \cdots + l_n a_n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $a_i = p^{k-1} b_i \in A$, para cada $i \leq n$. Dado que la restricción de φ a B es inyectiva, los elementos $a_1, \ldots, a_n$ del conjunto independiente A son distintos entre sí. Por lo tanto, la igualdad (3.2) implica que $l_i a_i = e$, para cada $i \leq n$. Cada elemento a_i tiene orden p, por lo que el coeficiente l_i es un múltiplo de p, es decir, $l_i = pr_i$, para algún entero $r_i \neq 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$k_i = p^m l_i = p^m p r_i = p^{m+1} r_i$$

para cada $i \leq n$. Esto contradice nuestra elección de m y demuestra que el conjunto B es independiente.

Finalmente, suponga que el grupo G es separable y tiene estrechez numerable. Entonces $|G| \geq \mathfrak{c}$. Sean S un subgrupo de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y U un conjunto abierto no vacío en G. Acabamos de demostrar que U contiene un subconjunto independiente A de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Entonces, por el lema 3.1.7, existe $x \in A$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e\}$. Aplicando el teorema 3.1.8 concluimos que G es d-independiente. $\square$

Lema 3.1.22. *Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo uno a uno y continuo entre grupos topológicos. Si $H = f(G)$ y el grupo G es d-independiente, entonces H también lo es.*

Demostración. Consideremos un subgrupo arbitrario S de H con $|S| < \mathfrak{c}$. Entonces, el subgrupo $T = f^{-1}(S)$ de G también satisface $|T| < \mathfrak{c}$, por lo que existe un subgrupo denso y numerable C de G que satisface $C \cap T = \{e_G\}$. Por lo tanto, $D = f(C)$ es un subgrupo denso y numerable de H que satisface $D \cap S = \{e_H\}$. Entonces, H es d-independiente. $\square$

El siguiente hecho algebraico será utilizado en la prueba de algunos teoremas posteriores, por ejemplo el teorema 3.1.25.

Lema 3.1.23. *Sea G un grupo abeliano de torsión acotada y supongamos que*

$$G = \bigoplus_{1 \le k \le n} G_{p_k}$$

es la descomposición de G en la suma directa de sus componentes primarias. Entonces, G es un M-grupo si y solo si lo es cada sumando G_{p_k}, para cada $1 \le k \le n$.

Demostración. Dado que el período de G es finito, entonces tiene la forma

$$N = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},$$

para algunos enteros positivos $k_1, \ldots, k_n$. Entonces, para cada $i \le n$, $p_i^{k_i}$ es el período del sumando G_{p_i}.

Supongamos que G es un M-grupo. Es claro que para cada entero $m \ge 1$, o bien $|mG| = 1$ o bien mG es un M-grupo. Para cada $i \le n$, sea

$$m_i = N/p_i^{k_i}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} m_i G &= \bigoplus_{1 \le k \le n} m_i G_{p_k} \\ &= m_i G_{p_i}, \end{aligned}$$

ya que $m_i G_{p_k} = \{e_G\}$ si $i \neq k$. Dado que m_i y $p_i^{k_i}$ son números coprimos, tenemos la igualdad $m_i G_{p_i} = G_{p_i}$. Por lo tanto, G_{p_i} es un M-grupo.

Recíprocamente, supongamos que cada componente primaria G_{p_k} de G es un M-grupo. Si $m \geq 1$ es un entero, la igualdad

$$mG = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} mG_{p_k}$$

implica que mG es un M-grupo. □

Uno puede preguntarse si el lema 3.1.23 puede ampliarse a extensiones de grupos abelianos, es decir, si la propiedad de ser un M-grupo es una propiedad de tres espacios. El siguiente ejemplo responde negativamente a esta pregunta, incluso en la clase de grupos topológicos compactos.

Ejemplo 3.1.24. Existe un grupo abeliano compacto y de torsión acotada G que contiene un subgrupo cerrado H tal que tanto H como G/H son M-grupos, pero G no lo es.

En efecto, sea p un número primo, $K = \mathbb{Z}(p)^\omega$ el producto de ω copias del grupo discreto $\mathbb{Z}(p)$ y $G = K \times K \times \mathbb{Z}(p^2)$. Entonces G es un grupo separable, metrizable y compacto. Consideremos el subgrupo cerrado $H = \{e_K\} \times K \times p\mathbb{Z}(p^2)$ de G. Es claro que $H \cong \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p) \cong \mathbb{Z}(p)^\omega$, por lo que H es un M-grupo. Además, el grupo cociente G/H es topológicamente isomorfo a $K \times \big(\mathbb{Z}(p^2)/p\mathbb{Z}(p^2)\big) \cong \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p) \cong \mathbb{Z}(p)^\omega$, por lo que G/H es un M-grupo. Sin embargo, $pG \cong p\mathbb{Z}(p^2) \cong \mathbb{Z}(p)$ es un grupo finito no trivial, por lo que G no es un M-grupo.

En la demostración del siguiente teorema usamos la proposición 3.2.1 ubicada en la sección 3.2. No es necesario decir que esto no produce un círculo vicioso.

Teorema 3.1.25. *Sea G un grupo topológico abeliano separable de estrechez numerable y $|G| > 1$. Si G es de torsión acotada, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) G es d-independiente;

(b) G es un M-grupo no trivial;

(c) cada componente primaria no trivial G_p de G es d-independiente.

Demostración. La primera implicación se sigue de la proposición 3.1.1.

Probemos que (b) implica (c). Si G es un M-grupo, entonces el lema 3.1.23 implica que cada componente primaria G_p de G también es un M-grupo. Aplicando el lema 3.1.21, vemos que las componentes primarias no triviales de G son d-independientes.

Finalmente veamos que (c) implica (a). Supongamos que cada componente primaria no trivial $G_i = G_{p_i}$ de G es d-independiente, donde $1 \leq i \leq n$. Denotemos por G^* el producto directo $\prod_{i=1}^n G_i$, donde cada factor G_i hereda la topología del grupo G. Por la proposición 3.2.1, el grupo producto G^* es d-independiente. Sea j el homomorfismo natural de G^* sobre G, definido como

$$j(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n,$$

donde la suma a la derecha se toma en el grupo G. Es claro que j es una biyección, mientras que la continuidad de la adición en G implica que j es continua. Por lo tanto, G es d-independiente, según el lema 3.1.22. $\square$

Los grupos abelianos de torsión que son separables, metrizables y M-grupos no necesariamente son d-independientes (ver ejemplo 3.1.3). El siguiente teorema muestra que esto no sucede para p-grupos de torsión. Como es usual, demostramos un resultado más general para la clase de grupos separables de estrechez numerable, que incluye claramente a todos los grupos separables y metrizables.

Teorema 3.1.26. *Sean p un número primo y G un p-grupo abeliano de torsión y separable. Si G tiene estrechez numerable, entonces G es un grupo d-independiente si y solo si G es un M-grupo no trivial.*

Demostración. Si G es d-independiente, entonces es un M-grupo no trivial, por la proposición 3.1.1.

Recíprocamente, supongamos que G es un M-grupo no trivial de estrechez numerable. Entonces, $|G| \geq \mathfrak{c}$. Si G es un grupo de torsión acotada, la conclusión requerida se sigue del teorema 3.1.25. Supongamos que G no es de torsión acotada. Para todo entero $k \geq 1$, sea

$$G_k = G[p^k] = \{x \in G : p^k x = e\}.$$

Es claro que $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ y $G = \bigcup_{k \geq 1} G_k$. Para cualquier entero $k \geq 1$, consideremos el homomorfismo $\varphi_k \colon G \to G$ definido por $\varphi_k(x) = p^k x$, donde

$x \in G$. El núcleo de φ_k es el subgrupo G_k de G, así que los grupos G/G_k y $B_k := p^k G = \varphi_k(G)$ son algebraicamente isomorfos. Como G es un M-grupo que no es torsión acotada, se tiene que $|B_k| \geq \mathfrak{c}$. Por lo tanto, el subgrupo $B_k[p]$ de B_k tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$, por [4, Lemma 9.9.15]. Dado que p es un número primo, la igualdad $nG = p^m G$ se cumple para cada entero $n \geq 1$, donde $m \geq 0$ es el entero más grande tal que p^m divide a n. Luego, la igualdad $B_k[p] = p^k G_{k+1}$ implica que G_{k+1} es un M-grupo. Claramente, esta conclusión es válida para cada $k \geq 1$.

El resto de nuestro argumento es directo. Sea S un subgrupo de G que cumple $|S| < \mathfrak{c}$. Definimos $H_0 = \{e\}$. Dado que G_1 es un M-grupo, aplicamos el lema 3.1.21 para encontrar un subgrupo denso y numerable H_1 de G_1 tal que $H_1 \cap S = \{e\}$. Definimos $S_1 = S + H_1$. Entonces, $|S_1| < \mathfrak{c}$. Supongamos que para algún $n \geq 1$, hemos definido subgrupos numerables $H_1, \ldots, H_n$ de G que cumplen las siguientes condiciones para cada k con $1 \leq k \leq n$:

(i) H_k es un subgrupo denso de G_k.

(ii) $H_k \cap (S + H_1 + \cdots + H_{k-1}) = \{e\}$.

Definimos $S_n = S + H_1 + \cdots + H_n$. Entonces, $|S_n| < \mathfrak{c}$. Dado que G_{n+1} es un M-grupo, existe un subgrupo denso y numerable H_{n+1} de G_{n+1} tal que $H_{n+1} \cap S_n = \{e\}$. Claramente, el subgrupo H_{n+1} cumple (i) y (ii) en el paso $n + 1$.

Se deduce de (i) que $H = \bigcup_{n \geq 1} \big(H_1 + \cdots + H_n\big)$ es un subgrupo denso y numerable de G. Aplicando (ii), uno puede verificar fácilmente por inducción que la igualdad $(H_1 + \cdots + H_n) \cap S = \{e\}$ se cumple para cada $n \geq 1$. Por lo tanto, $H \cap S = \{e\}$. Así, el grupo G es d-independiente. $\square$

Claramente, todo grupo topológico d-independiente es separable. La implicación contraria es falsa, el grupo separable y metrizable G_1 en el ejemplo 3.2.10 es un contraejemplo. Por lo tanto, para garantizar que un grupo topológico sea d-independiente, debemos imponer en G una condición más fuerte que la separabilidad.

Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos no vacíos de un espacio X se dice que es una *π-red* para X si todo conjunto abierto no vacío de X contiene un elemento de $\mathcal{N}$. Observemos que un espacio con una π-red numerable es separable. Además, si D es un subconjunto denso de X, entonces $\mathcal{N} = \{\{x\} : x \in D\}$ es una π-red para X. Al imponer una condición adicional sobre los elementos de una π-red numerable para un grupo topológico dado G, demostramos en el siguiente teorema que el grupo G es d-independiente.

Teorema 3.1.27. *Sea G un grupo topológico abeliano con una π-red numerable $\mathcal{N}$. Si cada elemento $N \in \mathcal{N}$ contiene un subconjunto independiente de tamaño $\mathfrak{c}$, entonces G es d-independiente.*

Demostración. Sea $\mathcal{N} = \{N_i : i \in \omega\}$ una π-red numerable para G. Consideremos un subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$. Por las suposiciones del teorema, N_0 contiene un subconjunto independiente B_0 de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Entonces $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{e\}$, para todo $x, y \in B_0$ distintos. Por el lema 3.1.7, existe $x_0 \in B_0$ tal que $|\langle x_0\rangle \cap S| = 1$. El subgrupo $S_1 = \langle x_0\rangle + S$ satisface $|S_1| < \mathfrak{c}$. Por lo tanto, existe $x_1 \in N_1 \setminus \{e\}$ tal que $|\langle x_1\rangle \cap S_1| = 1$. Por inducción, definimos $S_{i+1} = \langle x_i\rangle + S_i$ para todo $i \in \omega$, donde $x_i \in N_i$. Ya que $|S_{i+1}| < \mathfrak{c}$, aplicamos el lema 3.1.7 una vez más para elegir $x_{i+1} \in N_{i+1} \setminus \{e\}$ tal que $|\langle x_{i+1}\rangle \cap S_{i+1}| = 1$. Sea $D = \{x_i : i \in \omega\}$. Entonces $H = \langle D\rangle$ es un subgrupo denso y numerable de G y afirmamos que $S \cap H = \{e\}$.

Supongamos que $S \cap H \neq \{e\}$. Entonces podemos encontrar $s \in S \setminus \{e\}$ y distintos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_l}$ en D tales que $s = k_1 x_{n_1} + k_2 x_{n_2} + \cdots + k_l x_{n_l}$, donde $k_1, k_2, \ldots, k_l$ son enteros, $n_1 < n_2 < \cdots < n_l$ y $k_i x_{n_i} \neq e$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Por lo tanto, $s \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n_l}\rangle$ y tenemos la igualdad

$$k_1 x_{n_1} + k_2 x_{n_2} + \cdots + k_{l-1} x_{n_{l-1}} - s = t_l x_{n_l},$$

donde $t_l = -k_l$. De manera equivalente, $t_l x_{n_l} \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n_{l-1}}\rangle + S = S_{n_l}$, lo cual contradice el hecho de que $|\langle x_{n_l}\rangle \cap S_{n_l}| = 1$. Esto implica nuestra afirmación y completa la demostración. $\square$

Se presenta un caso especial del teorema 3.1.27 en la proposición 3.1.29 que se muestra a continuación. Primero necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.1.28. *Sea G un grupo topológico con una red numerable. Si $|G| = \kappa$ y $cf(\kappa) > \omega$, entonces G tiene una red numerable $\mathcal{N}$ tal que $|N| = \kappa$, para cada $N \in \mathcal{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una red numerable para G y $\mathcal{C}^* = \{C \in \mathcal{C} : |C| = \kappa\}$. Dado que la familia $\mathcal{C}_* = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^*$ es numerable y $cf(\kappa) > \omega$, vemos que $|\bigcup \mathcal{C}_*| < \kappa$. En particular, la familia $\mathcal{C}^*$ no es vacía. Para cada $C \in \mathcal{C}^*$, elija un punto $x_C \in C$ y sea $\mathcal{D} = \{C x_C^{-1} : C \in \mathcal{C}^*\}$. Afirmamos que la familia

$$\mathcal{N} = \{CD : C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}$$

es la requerida. En efecto, como la cardinalidad de los elementos de $\mathcal{D}$ es κ, todos los elementos de $\mathcal{N}$ también tienen cardinalidad κ. Resta verificar que $\mathcal{N}$ es una red para G. Tomemos un elemento arbitrario $x \in G$ y una vecindad abierta U de x en G. Existe una vecindad simétrica y abierta V de la identidad e en G tal que $xV^3 \subset U$. Si $y \in G \setminus \bigcup \mathcal{C}_*$, existe $C \in \mathcal{C}^*$ tal que $y \in C \subset Vy$. Luego, $D = Cx_C^{-1} \subset CC^{-1} \subset Vyy^{-1}V^{-1} = V^2$. Claramente, $D \in \mathcal{D}$. También tome un elemento $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset xV$. Entonces $CD \in \mathcal{N}$ y $x = xe \in CD \subset xVV^2 = xV^3 \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una red para G. □

El lema anterior se complementa en el último capítulo de este trabajo, donde se aborda el siguiente problema: ¿Cualquier grupo topológico (abeliano) numerable y no discreto admite una red numerable con elementos infinitos? De hecho, usando la proposición 4.3.3 y el teorema 4.3.4 demostraremos que ningún espacio topológico maximal permite una red numerable con elementos infinitos. De esta manera, respondemos a esta pregunta de manera negativa.

Proposición 3.1.29. *Sea G un grupo topológico abeliano casi libre de torsión con una red numerable. Si $|G| = \mathfrak{c}$, entonces G es d-independiente.*

Demostración. Dado que la cofinalidad del cardinal $\mathfrak{c}$ no es numerable, el lema 3.1.28 implica que el grupo G tiene una red numerable $\mathcal{N}$ tal que $|N| = \mathfrak{c}$ para cada $N \in \mathcal{N}$. Claramente, cada red es una π-red, por lo que la conclusión requerida sigue del corolario 3.1.14 y el teorema 3.1.27. □

El siguiente teorema resume varios hechos establecidos anteriormente.

Teorema 3.1.30. *Sea G un grupo topológico abeliano separable y de estrechez numerable. Suponga que G satisface una de las siguientes condiciones:*

(a) $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$;

(b) G es un M-grupo de torsión acotada no trivial.

Entonces, G es d-independiente.

Demostración. En el caso a), la conclusión se sigue del lema 3.1.16 y del teorema 3.1.8. En el caso b), basta aplicar el teorema 3.1.25. □

El ejemplo 3.1.3 muestra que (b) del teorema anterior no se puede extender a M-grupos abelianos de torsión.

Es claro que todo grupo casi libre de torsión G satisface $|tor(G)| \leq \omega$. Por lo tanto, el siguiente hecho se deduce de (a) del teorema 3.1.30.

Corolario 3.1.31. *Un grupo abeliano casi libre de torsión, separable, metrizables G con $|G| = \mathfrak{c}$ es d-independiente.*

El corolario 3.1.31 implica, en particular, que el grupo del círculo $\mathbb{T}$, la recta real $\mathbb{R}$ y el grupo aditivo $\mathbb{C}$ de los números complejos son grupos d-independientes. Ya que los tres grupos son conexos, la misma conclusión se sigue del corolario 3.1.35 a continuación.

Otra propiedad básica de los grupos topológicos d-independientes se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.32. *Sea G un grupo topológico. Si K es un subgrupo denso de G y K es d-independiente, entonces G también lo es.*

Demostración. Tome cualquier subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$. Entonces $S_K = S \cap K$ es un subgrupo de K que satisface $|S_K| < \mathfrak{c}$. Por hipótesis, existe un subgrupo denso y numerable H de K tal que la intersección $S_K \cap H$ solo contiene la identidad e de G. Dado que K es denso en G y H es denso en K, se sigue que H es denso en G. Claramente, $S \cap H = \{e\}$. □

Veremos en el ejemplo 3.2.10 que un grupo abeliano compacto que es d-independiente puede contener un subgrupo denso de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que no es d-independiente.

Recordemos que la *componente conexa* de un grupo topológico G es el subconjunto conexo más grande de G que contiene la identidad de G. La componente conexa de todo grupo topológico es un subgrupo cerrado [4, Proposition 1.4.26]. También recordamos que un *carácter continuo* en un grupo topológico G es un homomorfismo continuo de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$.

Lema 3.1.33. *Sea G un grupo LCA con la componente conexa no trivial. Entonces para todo subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y todo conjunto abierto no vacío U en G, existe un elemento $x \in U$ de orden infinito tal que $|\langle x\rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Sea C la componente conexa de G. Por hipótesis, $|C| > 1$. Tome un elemento $b \in C$ distinto de la identidad e de G. Sea f un carácter continuo de G tal que $f(b) \neq 1$ (ver [35, Theorem 21]). Claramente, $f(C)$ es un subgrupo conexo de $\mathbb{T}$ y $|f(C)| > 1$. Por lo tanto, $f(C) = \mathbb{T}$ y $f(G) = \mathbb{T}$. Como $f(tor(G)) \subset tor(\mathbb{T})$, tenemos la inclusión $tor(G) \subset f^{-1}(tor(\mathbb{T})) := N$. Se sigue de $G/N \cong \mathbb{T}/tor(\mathbb{T})$ que $|G/tor(G)| \geq |G/N| = |\mathbb{T}/tor(\mathbb{T})| = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$ y la conclusión requerida se sigue del lema 3.1.16. □

Aplicando el lema 3.1.33 y el corolario 3.1.11, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.34. *Sea G un grupo LCA segundo numerable con la componente conexa no trivial. Entonces, G es d-independiente.*

De la proposición 3.1.1 tenemos que el grupo G en el corolario anterior es un M-grupo. En la sección 3.4 extendemos la conclusión del corolario 3.1.34 a todos los M-grupos localmente compactos y segundo numerables.

De manera similar a los teoremas 3.1.8 y 3.1.30, se puede debilitar la propiedad 'segundo numerable' en el corolario 3.1.34 a 'separable y de estrechez numerable'. Sin embargo, este debilitamiento no produce ninguna generalización del corolario, ya que los grupos abelianos y localmente compactos de estrechez numerable son metrizables. De hecho, todo grupo abeliano y localmente compacto G contiene una vecindad compacta y diádica de la identidad, digamos K (ver [7]). Por el teorema de Arhangel'skii, todo espacio diádico y compacto de estrechez numerable es metrizable (ver [2] o [13, 3.12.12(h)]). Por lo tanto, K es metrizable y la identidad de G tiene una base numerable de vecindades locales. Por lo tanto, G es metrizable.

El siguiente hecho se sigue inmediatamente del Corolario 3.1.34.

Corolario 3.1.35. *Todo grupo conexo, segundo numerable y LCA tal que $|G| > 1$ es d-independiente.*

Problema 3.1.36. *¿Se puede eliminar 'abeliano'en el corolario 3.1.35? ¿Qué pasa si G es compacto?*

Todo grupo topológico d-independiente G es separable y, por lo tanto, satisface $w(G) \leq \mathfrak{c}$. Esto explica la aparición de la última restricción en G en el siguiente problema.

Problema 3.1.37. *Sea G un grupo compacto, conexo y no trivial tal que $w(G) \leq \mathfrak{c}$. ¿Debe ser G d-independiente?*

Resulta que la respuesta al problema 3.1.37 es afirmativa en el caso especial de los grupos abelianos.

Lema 3.1.38. *Sea G un grupo abeliano compacto y conexo que satisface $|G| > 1$ y $w(G) \leq \mathfrak{c}$. Entonces, el grupo G contiene un conjunto independiente $\{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tal que el grupo cíclico $\langle b_\alpha \rangle$ es denso en G, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.*

Demostración. Denotemos por $\widehat{G}$ al grupo dual de G, es decir, el grupo de caracteres continuos de G con la topología discreta. Como G es conexo y no trivial, el grupo $\widehat{G}$ es infinito y libre de torsión [20, Theorem 24.23]. Por [39, 4.1.6], $\widehat{G}$ es un subgrupo de un grupo abeliano divisible D. Sea K la intersección de todos los subgrupos divisibles de D que contienen a $\widehat{G}$. Entonces, $\widehat{G}$ es un subgrupo *esencial* de K, es decir, $\widehat{G}$ se intersecta de manera no trivial con cada subgrupo no trivial de K. Claramente, $|\widehat{G}| = |K|$. También se sigue de [20, Theorem 24.15] que $\omega \leq |\widehat{G}| = w(G) \leq \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $\omega \leq |K| \leq \mathfrak{c}$.

De acuerdo con [39, 4.1.5], K es una suma directa de copias isomorfas de los racionales $\mathbb{Q}$ y grupos cuasicíclicos. Dado que el subgrupo libre de torsión $\widehat{G}$ de K es esencial en K, el grupo K también es libre de torsión. Por lo tanto, concluimos que K es una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$, digamos, $K \cong \mathbb{Q}^{(\kappa)}$, donde $1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$. Además, consideremos el grupo $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ y observemos que

$$\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \cong \mathbb{Q}^{(\kappa\times\mathfrak{c})} \cong K^{(\mathfrak{c})} = \bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} K_\alpha,$$

donde cada K_α es una copia isomorfa de K. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, sea π_α un encaje isomorfo de $\widehat{G}$ en K_α. Dado que el grupo $\mathbb{T}$ es un grupo abeliano divisible y $r_0(\mathbb{T}) = \mathfrak{c}$, se puede ver fácilmente que $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ es algebraicamente isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{T}$. Por lo tanto, podemos identificar a $\bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} K_\alpha$ con un subgrupo de $\mathbb{T}$ y considerar cada π_α como un carácter de $\widehat{G}$. Por el teorema de dualidad de Pontryagin, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, existe $b_\alpha \in G$ tal que $x(b_\alpha) = \pi_\alpha(x)$ para todo $x \in \widehat{G}$. Afirmamos que el conjunto $B = \{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subset G$ es el que se requiere.

Primero, el conjunto B es independiente. De hecho, considere una combinación lineal

$$b = n_1 b_{\alpha_1} + \cdots + n_k b_{\alpha_k},$$

donde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \mathfrak{c}$. Si $x \in \widehat{G}$ y $x \neq e_{\widehat{G}}$, entonces $x(b) = \pi_{\alpha_1}(x)^{n_1} \cdots \pi_{\alpha_k}(x)^{n_k} \neq 1$, ya que los elementos $\pi_{\alpha_1}(x), \ldots, \pi_{\alpha_k}(x)$ del grupo $\bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} K_\alpha$ tienen orden infinito y son independientes.

Resta verificar que cada grupo cíclico $\langle b_\alpha \rangle$ es denso en G. Si no lo es, existe un carácter no trivial $x \in \widehat{G}$ tal que $x(b_\alpha) = 1$ (ver [4, Theorem 9.4.11]). Esto último es claramente imposible ya que π_α es inyectiva y, por lo tanto, $x(b_\alpha) = \pi_\alpha(x) \neq 1$. □

Teorema 3.1.39. *Todo grupo abeliano, compacto, conexo y no trivial G con $w(G) \leq \mathfrak{c}$ es d-independiente.*

Demostración. La conclusión requerida se sigue de los lemas 3.1.38 y 3.1.7. □

Finalizamos esta sección con el siguiente problema:

Problema 3.1.40. *¿Es todo grupo topológico abeliano, conexo, separable y metrizable G con $|G| > 1$ d-independiente?*

3.2. Productos y d-independencia

En esta sección vamos a estudiar la d-independencia en el caso particular de los productos de grupos. Veamos que bajo una restricción natural en el número de factores, la propiedad de ser d-independiente se vuelve una propiedad productiva.

Proposición 3.2.1. *Sea $\{G_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una familia de grupos topológicos d-independientes, donde $1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$. Entonces, el grupo*

$$G = \prod_{\alpha \in \kappa} G_\alpha$$

es d-independiente.

Demostración. Tomemos un subgrupo arbitrario S de G con $|S| < \mathfrak{c}$ y consideremos las proyecciones $\pi_\alpha \colon G \to G_\alpha$ para cada $\alpha \in \kappa$. Si $S_\alpha = \pi_\alpha(S)$, entonces $|S_\alpha| \leq |S| < \mathfrak{c}$. Debido a nuestra suposición, los grupos G_α son d-independientes, por lo que para cada $\alpha \in \kappa$, existe un subgrupo denso y numerable H_α de G_α tal que $S_\alpha \cap H_\alpha = \{e_{G_\alpha}\}$. Sea $H = \prod_{\alpha \in \kappa} H_\alpha$. Entonces, H es un subgrupo denso de G y $H \cap S = \{e_G\}$. En efecto, si $x \in H \cap S$, entonces $\pi_\alpha(x) \in \pi_\alpha(H) \cap \pi_\alpha(S) = H_\alpha \cap S_\alpha = \{e_{G_\alpha}\}$ para cada $\alpha \in \kappa$, lo que implica que $x = e_G$.

Es evidente que cada grupo H_α es separable. De $\kappa \leq \mathfrak{c}$ se sigue que H es separable. Por lo tanto, existe un subconjunto denso y numerable D de H. Entonces, $\langle D \rangle$ es un subgrupo denso y numerable de H. Claramente, H es denso en G, por lo que $\langle D \rangle$ es un subgrupo denso y numerable de G. Finalmente, la igualdad $S \cap H = \{e_G\}$ implica que $S \cap \langle D \rangle = \{e_G\}$. Por lo tanto, G es d-independiente. □

Veremos en varios resultados que siguen (ver por ejemplo la proposición 3.2.2, el teorema 3.2.3 y el ejemplo 3.3.4) que el producto de una familia de grupos topológicos abelianos puede ser d-independiente, incluso si algunos (o incluso todos) los factores no son d-independientes.

En el teorema 3.2.3 complementamos la proposición 3.2.1. Esto requiere el siguiente hecho acerca de los productos de grupos topológicos abelianos.

Proposición 3.2.2. *Sea H_0 un grupo topológico abeliano con una π-red numerable $\mathcal{N}$ tal que $|N| \geq \mathfrak{c}$, para cada $N \in \mathcal{N}$. Si $|tor(H_0)| < \mathfrak{c}$, entonces el grupo $H_0 \times H_1$ es d-independiente, para cada grupo topológico abeliano y separable H_1.*

Demostración. Sea e_i la identidad de H_i, donde $i \in \{0, 1\}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que los elementos de $\mathcal{N}$ no contienen a e_0, en caso contrario, reemplazamos a $\mathcal{N}$ con $\mathcal{N}^* = \{N \setminus \{e_0\} : N \in \mathcal{N}\}$. Denotemos por D a un subconjunto denso y numerable de H_1. Entonces, la familia

$$\mathcal{P} = \big\{N \times \{d\} : N \in \mathcal{N},\ d \in D\big\}$$

es una π-red numerable para el grupo $H_0 \times H_1$ y cada elemento de $\mathcal{P}$ tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$. Si $P = N \times \{d\} \in \mathcal{P}$, entonces

$$P - P = (N - N) \times \{e_1\}.$$

Por lo que la intersección

$$\begin{aligned} (P - P) \cap tor(H_0 \times H_1) &= \big((N - N) \times \{e_1\}\big) \cap \big(tor(H_0) \times tor(H_1)\big) \\ &\subset tor(H_0) \times \{e_1\} \end{aligned}$$

tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Por lo tanto, el lema 3.1.13 implica que cada elemento $P \in \mathcal{P}$ contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Al aplicar el teorema 3.1.27, concluimos que el grupo $H_0 \times H_1$ es d-independiente. □

La proposición 3.2.2 se puede extender a productos de infinitos factores como sigue:

Teorema 3.2.3. *Sea κ un cardinal con $1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y $\{G_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una familia de grupos topológicos abelianos, separables y no triviales. Si el grupo G_0 es casi libre de torsión, tiene una red numerable y satisface $|G_0| = \mathfrak{c}$, entonces el grupo producto $G = \prod_{\alpha \in \kappa} G_\alpha$ es d-independiente.*

Demostración. Sea $H_0 = G_0$ y $H_1 = \prod\{G_\alpha : 1 \leq \alpha < \kappa\}$. Se sigue de $\kappa \leq \mathfrak{c}$ que el grupo H_1 es separable. Nuestras suposiciones sobre H_0 junto con el lema 3.1.28 implican que este grupo tiene una red numerable $\mathcal{N}$ tal que cada elemento de $\mathcal{N}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Dado que H_0 es un grupo casi libre de torsión, aplicamos el corolario 3.1.14 para deducir que cada elemento $N \in \mathcal{N}$ contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por lo tanto, la conclusión requerida se sigue de la proposición 3.2.2. □

Lema 3.2.4. *Sea G un grupo abeliano, $g \in G$ y $X = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ un subconjunto independiente de G. Supongamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(a) cada x_α tiene orden infinito;

(b) los elementos g y x_α tienen el mismo orden finito N, para cada $\alpha \in A$.

Entonces, existe un subconjunto finito F de A tal que el conjunto $\{g + x_\alpha : \alpha \in A \setminus F\}$ es independiente.

Expliquemos por qué necesitamos las condiciones (a) o (b) en g y X en el lema 3.2.4. Consideremos el grupo $G = \mathbb{Z}(4) \times H$, donde $\mathbb{Z}(4) = \{0, 1, 2, 3\}$ y H es un grupo booleano infinito, es decir, todos los elementos de H tienen orden 2. Entonces H contiene un subconjunto infinito independiente Y. Tomamos $g = (1, e_H)$ y $X = \{0\} \times Y$. Es evidente que X es un subconjunto infinito independiente de G que consta de elementos de orden 2 y el orden de g es 4. Resulta que cada subconjunto independiente maximal de $g + X$ tiene solo un elemento. En efecto, consideremos dos elementos $g+x$ y $g+y$ de $g+X$, donde x e y son elementos distintos de X. Entonces $2(g+x) - 2(g+y) = e_G$, mientras que $2(g + x) = 2(g + y) = 2g = (2, e_H) \neq e_G$. Por lo tanto, el conjunto $g + x, g + y$ no es independiente.

Corolario 3.2.5. *El producto $G \times H$ de un grupo topológico abeliano separable arbitrario G y un grupo abeliano segundo numerable H con $r_0(H) = \mathfrak{c}$ es d-independiente.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso y numerable de G y $\mathcal{B}$ una base numerable de H. Según el lema 3.1.16, todo elemento $U \in \mathcal{B}$ contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que consiste en elementos de orden infinito. Por el lema 3.2.4, cada elemento de la familia numerable

$$\mathcal{N} = \big\{\{d\} \times U : d \in D,\ U \in \mathcal{B}\big\}$$

contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Es claro que $\mathcal{N}$ es una π-red para $G \times H$. Por lo tanto, se sigue la conclusión requerida del teorema 3.1.27. □

Corolario 3.2.6. *Sea G un grupo topológico abeliano, separable y de estrechez numerable y H un grupo abeliano segundo numerable. Si $r_0(G) \geq \mathfrak{c}$, entonces el grupo $G \times H$ es d-independiente.*

Demostración. Se sigue de las suposiciones del corolario que el espacio $G \times H$ es separable y tiene estrechez numerable [3]. Por lo tanto, por el teorema 3.1.8, es suficiente verificar que para un subgrupo S de $G \times H$ con $|S| < \mathfrak{c}$ y un conjunto abierto no vacío O en $G \times H$, existe un elemento $z \in O$ distinto de la identidad e de $G \times H$ tal que $S \cap \langle z \rangle = \{e\}$. Claramente, se puede asumir que $O = U \times V$, donde U y V son conjuntos abiertos no vacíos en G y H, respectivamente. Sea $p\colon G \times H \to G$ la proyección. Como $|p(S)| \leq |S| < \mathfrak{c}$ y G es d-independiente, el lema 3.1.16 implica que existe un elemento $x \in U$ de orden infinito tal que $p(S) \cap \langle x \rangle = \{e_G\}$. Tome un elemento arbitrario $y \in V$ y sea $z = (x, y)$. Entonces $z \in U \times V$ y es fácil ver que $S \cap \langle z \rangle = \{e\}$. De hecho, si $nz \in S$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, entonces $nx = p(nz) \in p(S)$, por lo que nuestra elección de x implica que $nx = e_G$. Por lo tanto, $n = 0$ porque x tiene orden infinito. Concluimos que el grupo $G \times H$ es d-independiente. □

Teorema 3.2.7. *Si G es un grupo topológico abeliano no trivial con una red numerable, entonces G^κ es d-independiente para cada cardinal κ tal que $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$.*

Demostración. Todo espacio de Hausdorff con una red numerable tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ (combinando el Teorema 1.5.1 y el Lema 3.1.18 de [13]). Por lo tanto,

$$\mathfrak{c} = 2^\omega \leq |G|^\omega = |G^\omega| \leq \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}.$$

Además, $G^\kappa \cong (G^\omega)^\kappa$ para cada $\kappa \geq \omega$. Por lo tanto, según la proposición 3.2.1, es suficiente mostrar que el grupo G^ω es d-independiente. Dado que los grupos G y G^ω tienen una red numerable, son separables y tienen estrechez numerable. Consideremos dos casos.

Caso 1. El grupo G no es de torsión acotada. Si G no es de torsión, entonces contiene una copia isomorfa del grupo cíclico $\mathbb{Z}$, por lo que G^ω contiene una copia del grupo $\mathbb{Z}^\omega$. Por lo tanto, $r_0(G^\omega) \geq r_0(\mathbb{Z}^\omega) = \mathfrak{c}$. Si G es un grupo de torsión, entonces para cada entero $n \geq 1$, G contiene un subgrupo algebraicamente isomorfo a $\mathbb{Z}(k_n)$ para algún $k_n > n$. Por lo tanto, G^ω contiene un subgrupo isomorfo a $H = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(k_n)$. Sea H con la topología del producto de Tychonoff, donde se asume que cada factor $\mathbb{Z}(k_n)$ es discreto. Entonces, H es un grupo compacto que no es de torsión, por lo que nuevamente tenemos que $r_0(G^\omega) \geq r_0(H) \geq \mathfrak{c}$, por [4, Lemma 9.11.4]. Hemos demostrado que independientemente de si el grupo G es de torsión o no, la desigualdad $r_0(G^\omega) \geq \mathfrak{c}$ es válida. Aplicando (a) del teorema 3.1.30, concluimos que el grupo G^ω es d-independiente.

Caso 2. El grupo G es de torsión acotada. Para cada entero $m \geq 1$, tenemos que $mG^\omega = (mG)^\omega$. Dado que $|G| > 1$, la última igualdad implica que G^ω es un M-grupo. Entonces aplicamos (b) del teorema 3.1.30 para deducir que G^ω es d-independiente. □

Proposición 3.2.8. *Sean G_1 y G_2 grupos topológicos tales que $tor(G_1)$ es abierto en G_1 y $\overline{tor(G_2)} \neq G_2$. Entonces, para todo subgrupo denso H de $G = G_1 \times G_2$, el subgrupo $H \cap (\{e_{G_1}\} \times G_2)$ de G no es trivial. En particular, el grupo G no puede ser d-independiente si $|G_2| < \mathfrak{c}$.*

Demostración. Denotemos por e_1 y e_2 a los elementos identidad de los grupos G_1 y G_2, respectivamente. Supongamos que H es un subgrupo denso de G. Dado que $\overline{tor(G_2)} \neq G_2$, existe un conjunto abierto no vacío V en G_2 tal que $V \cap tor(G_2) = \emptyset$. Entonces, todo elemento de V tiene orden infinito. Sea U un conjunto abierto no vacío en G_1 tal que $U \subseteq tor(G_1)$. Entonces, $U \times V$ es un conjunto abierto no vacío en G. Tomemos elementos $g_1 \in U$ y $g_2 \in V$ tales que $(g_1, g_2) \in H$. Dado que $U \subseteq tor(G_1)$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $g_1^n = e_1$. Así, $(g_1^n, g_2^n) = (e_1, g_2^n) \in H$ y $(e_1, g_2^n) \neq e_G$. Por lo tanto, $|H \cap \big(\{e_1\} \times G_2\big)| > 1$. □

Corolario 3.2.9. *Sean G_1 y G_2 grupos topológicos tales que G_1 es un grupo de torsión y G_2 es un grupo no trivial y libre de torsión. Entonces, para todo subgrupo denso H de $G = G_1 \times G_2$, el subgrupo $H \cap \big(e_{G_1} \times G_2\big)$ de G no es trivial.*

Ejemplo 3.2.10. Demostremos que los roles de los grupos G y K en la proposición 3.1.32 no pueden intercambiarse. En otras palabras, un subgrupo denso de un grupo topológico abeliano d-independiente puede no ser d-independiente. Denotemos por C al grupo $\mathbb{Z}(2)^\omega$. Por el teorema 3.1.30 y la proposición 3.2.1, el grupo compacto $G = C \times \mathbb{T}$ es d-independiente. Tomemos $x \in \mathbb{T}$ tal que el grupo cíclico $D = \langle x \rangle$ sea denso en $\mathbb{T}$. Entonces, el producto $K = C \times D$ es denso en G y satisface $|K| = \mathfrak{c}$. Consideremos el subgrupo numerable $S = \{e_C\} \times D$ de K. El corolario 3.2.9 implica que todo subgrupo denso de K tiene una intersección no trivial con S. Por tanto, K no es d-independiente.

Los teoremas 3.1.25 y 3.1.26 muestran que la d-independencia impone restricciones no triviales sobre la estructura algebraica de los grupos abelianos y separables. El siguiente resultado confirma esta observación una vez más y muestra que el grupo discreto $\mathbb{Z}$ juega un papel crucial como factor.

Proposición 3.2.11. *Lo siguiente enunciados son equivalentes para un grupo topológico abeliano, separable y de estrechez numerable H:*

(a) el producto $H \times \mathbb{Z}$ de H con el grupo discreto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es d-independiente;

(b) el producto $H \times P$ es d-independiente, para cada grupo abeliano y segundo numerable P;

(c) el grupo H satisface $r_0(H) = \mathfrak{c}$.

Demostración. (a) implica (c). Supongamos que $r_0(H) < \mathfrak{c}$ y tomemos un subconjunto independiente maximal D de H que consiste en elementos de orden infinito. Entonces $|D| = r_0(H) < \mathfrak{c}$. Por lo tanto, el subgrupo S de H generado por D satisface $|S| < \mathfrak{c}$. Luego, el subgrupo

$$S^* = \big(S \times \{0\}\big) + \big(\{e_H\} \times \mathbb{Z}\big)$$

de $G = H \times \mathbb{Z}$ satisface $|S^*| < \mathfrak{c}$. Afirmamos que cada subgrupo denso K de G tiene una intersección no trivial con S^*.

De hecho, dado un subgrupo denso K de G, consideramos el conjunto abierto $U = H \times \{1\}$ en G. Debido a la densidad de K, la intersección $V = U \cap K$ no es vacía. Así que podemos elegir un elemento $x \in V$, donde $x = (y, 1)$ para algún $y \in H$. Si $ny = e_H$, para algún entero $n \geq 1$, entonces

$$nx = (ny, n) = (e_H, n) \in \{e_H\} \times \mathbb{Z} \subset S^*.$$

Es claro que $nx \neq e_G$. Se sigue de $x \in K$ que $nx \in K$, y concluimos que la intersección $S^* \cap K$ no es trivial. Si y tiene orden infinito, entonces nuestra elección del conjunto D implica que $ky \in \langle D \rangle = S$ para algún entero $k \geq 1$, de manera que

$$kx = (ky, k) = (ky, 0) + (e_H, k) \in \big(S \times \{0\}\big) + \big(\{e_H\} \times \mathbb{Z}\big) = S^*.$$

Otra vez, $kx \neq e_G$, por lo que la intersección $S^* \cap K$ no es trivial. Esto implica nuestra afirmación y muestra que el grupo $G = H \times \mathbb{Z}$ no es d-independiente.

Tenemos que (c) implica (b) se demuestra en el corolario 3.2.6.

Finalmente vemos que (b) implica (a) es evidente.

Hemos demostrado así que (a), (b) y (c) de la proposición son equivalentes. $\square$

Ejemplo 3.2.12. De la proposición 3.2.11 se sigue que los grupos $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ son d-independientes. El grupo abeliano y localmente compacto $G = \mathbb{Z}(n)^\omega \times \mathbb{Z}$ no es d-independiente para cada entero $n \geq 2$, ya que $nG \cong n\mathbb{Z}$ es un grupo infinito y numerable, por lo que G ni siquiera es un M-grupo. De hecho, se puede tomar un grupo topológico abeliano de torsión acotada arbitrario en lugar de $\mathbb{Z}(n)^\omega$.

Finalizamos esta sección mencionando algunos problemas que surgen de manera natural a partir de la proposición 3.2.11.

Problema 3.2.13. *Sea p un número primo. Caracterice los grupos abelianos de torsión y segundo numerables H tales que $H \times \mathbb{Z}(p)$ o $H \times \mathbb{Z}(p)^\omega$ es d-independiente.*

Nótese que H es topológicamente isomorfo a un subgrupo abierto de $H \times \mathbb{Z}(p)$, por lo que si $H \times \mathbb{Z}(p)$ es d-independiente, también lo es H. Reemplazar el factor $\mathbb{Z}(p)$ con $\mathbb{Z}(p)^\omega$ cambia la situación. Por ejemplo, se tiene que el grupo $\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p)^\omega \cong \mathbb{Z}(p)^\omega$ es d-independiente, mientras que el grupo $\mathbb{Z}(p^2) \times \mathbb{Z}(p)^\omega$ no lo es. Claramente, ninguno de los grupos finitos $\mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(p^2)$ es d-independiente.

Problema 3.2.14. *Sea p un número primo. Caracterice los grupos abelianos de torsión y segundo numerables H tales que $H \times \mathbb{Z}(p^\infty)$ es d-independiente, donde $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es el p-grupo cuasicíclico con la topología discreta o la topología inducida por el grupo $\mathbb{T}$.*

3.3. d-independencia en la clase de los grupos compactos y metrizables

En esta sección caracterizamos a los grupos abelianos, compactos y metrizables que son d-independientes. Resulta que el requisito de conexidad en el grupo G en el corolario 3.1.35 se puede debilitar considerablemente.

Recordemos que un grupo topológico abeliano G se llama débilmente d-independiente (ver sección 3.1) si para cada subgrupo finito F de G, existe un subgrupo denso y numerable H de G tal que $H \cap F = \{e\}$. El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de este trabajo.

Teorema 3.3.1. *Sea G un grupo abeliano, compacto, metrizable e infinito. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) G es máximamente fragmentable;

(b) G es d-independiente;

(c) G es débilmente d-independiente;

(d) G es un M-grupo, es decir, para cada entero $m \geq 1$, se cumple que $|mG| = \mathfrak{c}$ o $|mG| = 1$;

(e) o bien el grupo G contiene elementos de orden infinito o bien G es un grupo de torsión acotada, con la descomposición $G = \bigoplus_{i=1}^{k} G_{p_i}$ en la suma directa de sus componentes primarias, donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos distintos dos a dos y para todo $i \leq k$ y $n \in \mathbb{N}^+$, se tiene que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$.

Demostración. Cada grupo topológico compacto es finito o tiene cardinalidad mayor o igual a $\mathfrak{c}$. Dado que G es compacto y metrizable, es segundo numerable y satisface la igualdad $|G| = \mathfrak{c}$.

a) $\Leftrightarrow$ b). Se sigue de la proposición 3.1.4.

b) $\Rightarrow$ c). Evidente.

c) $\Rightarrow$ d). Esta implicación se prueba en la proposición 3.1.1.

d) $\Rightarrow$ e). Uno puede combinar varios resultados de [8, Sections 5, 6] para deducir la implicación. Para facilitar el trabajo del lector, presentamos aquí un argumento directo y corto. Supongamos que G es un M-grupo. Si $|mG| = \mathfrak{c}$ para todo $m \in \mathbb{N}^+$, entonces G no es un grupo de torsión acotada. Dado que G es compacto, se sigue que G no es un grupo de torsión por la proposición 1.4.28 y, por lo tanto, contiene elementos de orden infinito. Ahora supongamos que $|mG| = 1$ para algún entero $m > 1$. Entonces, G es un grupo de torsión acotada. Según el lema 3.1.23, cada componente primaria G_{p_i} de G es un M-grupo. Por lo tanto, para todo número entero $n \geq 1$, se tiene que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$.

e) $\Rightarrow$ b). Primero asumimos que G no es un grupo de torsión. Entonces $r_0(G) = \mathfrak{c}$, por [4, Lemma 9.11.4]. Sea S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y U un subconjunto no vacío y abierto de G. Por el lema 3.1.16, existe un conjunto independiente $A \subset U$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ cuyos elementos tienen orden infinito. Como $|S| < \mathfrak{c}$, el lema 3.1.7 implica que existe $x \in A$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e_G\}$. Por lo tanto, G es d-independiente, por el corolario 3.1.11. [Alternativamente, como $\mathfrak{c} = r_0(G) > w(G) = \omega$, podemos aplicar [8, Theorem 6.5] para concluir que G es máximamente fragmentable y, por la proposición 3.1.4, d-independiente.]

Ahora supongamos que G es un grupo de torsión. Como G es compacto y abeliano, entonces G es un grupo de torsión acotada por la proposición 1.4.28. Consideremos una componente primaria G_{p_i} de G, con $1 \leq i \leq k$. Es fácil ver que para todo entero $m \geq 1$,

$$mG_{p_i} = p_i^n G_{p_i}$$

para algún entero $n \geq 0$ (de hecho, n es el mayor entero tal que p_i^n divide a m). Como $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$, concluimos que G_{p_i} es un M-grupo. Por el lema 3.1.23, G también es un M-grupo. Por lo tanto, el teorema 3.1.25 implica que G es d-independiente. $\square$

Bajo las suposiciones del teorema 3.3.1, si G es un grupo de torsión y G_{p_i} es la componente p_i-primaria de G, entonces G_{p_i} es topológicamente isomorfo al producto finito

$$\mathbb{Z}(p_i^{n_{i,1}})^{\kappa_{i,1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}(p_i^{n_{i,m}})^{\kappa_{i,m}}, \tag{3.3}$$

donde $\kappa_{i,1}, \ldots, \kappa_{i,m}$ son números cardinales que satisfacen $\kappa_{i,j} \leq \omega$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $n_{i,1} < \cdots < n_{i,m}$ son enteros positivos (ver [4, Theorem 9.6.29]). Haciendo uso del teorema 3.3.1, obtenemos información adicional sobre los grupos de torsión compactos y d-independientes.

Corolario 3.3.2. *Sea G un grupo abeliano de torsión, compacto y metrizable tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Si $G = \bigoplus_{i=1}^k G_{p_i}$ es la descomposición de G en la suma directa de sus componentes primarias, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) G es d-independiente;

(b) G_{p_i} es d-independiente, para cada $i \leq k$;

(c) *el cardinal* $\kappa_{i,m}$ *en la descomposición* (3.3) *de* G_{p_i} *es igual a* ω*, para cada* $i \le k$*.*

Demostración. La implicación a) $\Rightarrow$ b) se sigue de la equivalencia de (a) y (c) en el teorema 3.1.25.

b) $\Rightarrow$ c). Supongamos que el grupo G_{p_i}, con descomposición (3.3), es d-independiente para cada $i \le k$. Entonces G_{p_i} es un M-grupo y un cálculo simple muestra que

$$p_i^{n_{i,m}-1} G_{p_i} \cong \mathbb{Z}(p_i)^{\kappa_{i,m}}$$

es un grupo compacto no trivial. Por lo tanto, $|\mathbb{Z}(p_i)^{\kappa_{i,m}}| = \mathfrak{c}$. Así,

$$\omega \le \kappa_{i,m} \le w(G_{p_i}) \le w(G) \le \omega.$$

c) $\Rightarrow$ a). Supongamos que $\kappa_{i,m} = \omega$, para todo $i \le k$. Si $n < n_{i,m}$, entonces el grupo $p^n G_{p_i}$ es compacto y contiene a $\mathbb{Z}(p_i^{n_{i,m}-n})^\omega$ como subgrupo. Por lo tanto, $|p^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$. Si $n \ge n_{i,m}$, entonces $p^n G_{p_i} = \{e_G\}$, y así $|p^n G_{p_i}| = 1$. Por el teorema 3.3.1, G_{p_i} es d-independiente, para cada $i \le k$. Finalmente, el grupo G es topológicamente isomorfo al producto $\prod_{i=1}^k G_{p_i}$ por [38, Theorem 134]. Por la proposición 3.2.1, G es d-independiente. □

Ahora presentamos algunas aplicaciones del corolario 3.3.2. La primera de ellas es un caso especial del teorema 3.2.7.

Corolario 3.3.3. *El grupo* F^ω *es* d*-independiente, para cada grupo abeliano, compacto y metrizable* F *con* $|F| > 1$*.*

Demostración. Sea $G = F^\omega$ y $m \ge 1$ un entero. Entonces $mG \cong (mF)^\omega$, por lo que o bien $|mG| = 1$ o $|mG| = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, G es un M-grupo y el teorema 3.3.1 implica que G es d-independiente. □

Ejemplo 3.3.4. Existen grupos abelianos, compactos y metrizables G y H tales que ninguno de ellos es d-independiente, pero el producto $G \times H$ sí lo es.

De hecho, tomemos números primos distintos p y q y sean $G = \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)$ y $H = \mathbb{Z}(q)^\omega \times \mathbb{Z}(p)$. Entonces, $pG \cong \mathbb{Z}(q)$ y $qH \cong \mathbb{Z}(p)$, de manera que los grupos G y H no son d-independientes. Además,

$$\begin{aligned} G \times H &= \big(\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)\big) \times \big(\mathbb{Z}(q)^\omega \times \mathbb{Z}(p)\big) \\ &\cong \big(\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p)\big) \times \big(\mathbb{Z}(q)^\omega \times \mathbb{Z}(q)\big) \\ &\cong \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)^\omega. \end{aligned}$$

Finalmente, el grupo $\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)^\omega \cong \mathbb{Z}(pq)^\omega$ es d-independiente de acuerdo con el corolario 3.3.3. Vemos, por tanto, que los factores de un producto d-independiente pueden no ser d-independientes (esta conclusión vale la pena compararla con la proposición 3.2.1). Además, como cada uno de los factores G y H es una imagen del producto $G \times H$ bajo la proyección natural, concluimos que una imagen continua y abierta de un grupo abeliano compacto d-independiente puede no ser d-independiente, incluso si la imagen tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

3.4. d-independencia en el caso de los grupos abelianos y localmente compactos

Nuestro objetivo aquí es extender la equivalencia de los enunciados (a), (b) y (d) del teorema 3.3.1 a grupos abelianos que son localmente compactos. Esto requiere un resultado auxiliar que se muestra a continuación.

Lema 3.4.1. *Sea K un subgrupo compacto y abierto de un grupo abeliano y ω-estrecho G. Si el grupo G es un M-grupo y K es un grupo de torsión, entonces G es un grupo de torsión acotada.*

Demostración. Todo grupo abeliano compacto y de torsión tiene un exponente finito [4, Theorem 9.11.5]. Sea m el exponente de K. Considere el homomorfismo $\varphi\colon G \to G$ definido por $\varphi(x) = mx$, para cada $x \in G$. Entonces, el núcleo de φ contiene a K. Como G es ω-estrecho, existe un subgrupo numerable C de G tal que $G = K + C$. Por lo tanto, la imagen

$$mG = \varphi(G) = \varphi(K + C) = \varphi(K) + \varphi(C) = \varphi(C)$$

es numerable. Dado que G es un M-grupo, obtenemos la igualdad $|mG| = 1$, por lo que m es el exponente de G. □

Teorema 3.4.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grupo LCA segundo numerable y no trivial G:*

(a) G es d-independiente;

(b) G es un grupo máximamente fragmentable de cardinalidad $\mathfrak{c}$;

(c) G es un M-grupo.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b). Esta equivalencia se demuestra en la proposición 3.1.4.

(a) $\Rightarrow$ (c). Sigue de la proposición 3.1.1.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que G es un M-grupo. Observemos que si un M-grupo no es trivial, entonces tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$. Si la componente conexa de G no es trivial, entonces el corolario 3.1.34 implica que G es un grupo d-independiente. Supongamos, por lo tanto, que G es totalmente disconexo. Como G es localmente compacto, se sigue de nuestra suposición que G es de dimensión cero [4, Proposition 3.1.7]. Por lo tanto, G contiene una vecindad compacta y abierta de la identidad, digamos V. Aplicando [4, Proposition 3.1.8] encontramos un subgrupo abierto K de G con $K \subset V$. Claramente, K es compacto y tiene índice numerable en G porque K es abierto en G y G es segundo numerable.

Consideremos los siguientes dos casos.

Caso 1. K es un grupo de torsión. Entonces, por el lema 3.4.1, G es un grupo de torsión acotada. Por lo tanto, G es d-independiente, según (b) del teorema 3.1.30.

Caso 2. K no es un grupo de torsión. Entonces $r_0(K) \geq \mathfrak{c}$, según [4, Lemma 9.11.4]. Dado que $r_0(G) \geq r_0(K)$, podemos aplicar (a) del teorema 3.1.30 para concluir que G es d-independiente.

Hemos demostrado que, en cualquier caso, el grupo G es d-independiente. Esto muestra que (a), (b) y (c) del teorema son equivalentes. □

Finalizamos esta sección con el siguiente problema:

Problema 3.4.3. *¿Es válido el teorema 3.4.2 para todos los grupos LCA σ-compactos de peso menor o igual que $\mathfrak{c}$?*

Capítulo 4

Algunas propiedades sobre redes numerables en el grupo topológico maximal de Malykhin

En este capítulo presentamos una solución al siguiente problema: ¿Cualquier grupo topológico (abeliano) numerable y no discreto admite una red numerable con elementos infinitos? De hecho, demostraremos que ningún espacio topológico maximal permite una red numerable con elementos infinitos. De esta manera, respondemos al problema inicial de manera negativa. También, este capítulo se centra en el grupo maximal de Malykhin, construido en 1975, este grupo es un ejemplo de un grupo topológico booleano, infinito y numerable que admite una topología de grupo Hausdorff, maximal, lineal y no discreta. La existencia de este grupo es consistente con ZFC. En la segunda parte de este capítulo se presentan algunas propiedades inusuales de redes numerables en este grupo maximal G. En particular, se demuestra que para cada red numerable $\mathcal{N}$ de G, la familia de elementos finitos de $\mathcal{N}$ es también una red para el grupo G.

4.1. Espacios extremadamente disconexos

En esta sección se introducen los conceptos de espacios extremadamente disconexos y espacios maximales. El objetivo principal de esta sección es proporcionar los elementos necesarios para la construcción del grupo maximal de Malykhin (ver [4, Theorem 4.5.22]). Tal construcción se dará más adelante. Vamos a poner especial atención cuando el espacio extremadamente disconexo o maximal tenga la estructura de un grupo topológico. También el lector interesado en una discusión más completa sobre estas propiedades topológicas, en el caso de los grupos topológicos y estructuras relacionadas, puede consultar [1], [15], [16], [28], [29] y las secciones 2.2, 4.5 y 6.2 de [4]. Como cualquier espacio maximal es extremadamente disconexo, comenzamos esta sección hablando sobre los espacios extremadamente disconexos y algunos resultados principales sobre dichos espacios. Es necesario aclarar que en esta sección, como en todo este texto, todos los espacios son al menos Hausdorff.

Definición 4.1.1. *Un espacio topológico es extremadamente disconexo si la cerradura de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto.*

Podemos ver que cualquier subespacio abierto o cualquier subespacio denso de un espacio extremadamente disconexo es también extremadamente disconexo. Uno de los hechos más importantes sobre los espacios extremadamente disconexos es que todo espacio compacto, Hausdorff y extremadamente disconexo no contiene sucesiones convergentes no triviales, es decir, no finalmente constantes.

De la definición de espacio extremadamente disconexo se puede ver que cualquier espacio discreto es extremadamente disconexo pero el recíproco no es verdad. Sin embargo, cualquier espacio extremadamente disconexo y metrizable es discreto. La siguiente definición es una versión puntual de la propiedad de ser extremadamente disconexo en un espacio topológico.

Definición 4.1.2. *Un elemento a de un espacio topológico X es un ed-punto de X o un punto de extrema disconexidad si no hay abiertos disjuntos U y V tales que $a \in \overline{U} \cap \overline{V}$.*

De la definición 4.1.2 se tiene que un espacio topológico X es extremadamente disconexo si y solo si cada elemento $x \in X$ es un *ed*-punto. Usando la propiedad de homogeneidad de un grupo topológico se puede demostrar el próximo resultado, de hecho, en [1, Corollary 2.4] se demuestra un resultado más general.

Proposición 4.1.3. *Si un grupo topológico G contiene un subconjunto denso y extremadamente disconexo, entonces G es extremadamente disconexo.*

Supongamos que h es un homeomorfismo de un espacio topológico X en sí mismo. Si V es un subconjunto de X, entonces decimos que V es *h-simple* si $V \cap h(V) = \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un familia de subconjuntos abiertos de X que son h-simples y que tal familia está ordenada por la inclusión. Entonces, por el lema de Zorn existe un subconjunto abierto y maximal W de X que es h-simple. El siguiente resultado aparece en [1, Lemma 3.1].

Lema 4.1.4. *Supongamos que h es un homeomorfismo de un espacio topológico X en sí mismo y que $a \in X$ es un punto fijo de X bajo h, es decir, $h(a) = a$. Entonces solo una de las siguientes condiciones se satisface:*

(a) existe un conjunto abierto U de X tal que U es un conjunto h-simple y además $a \in \overline{U} \cap \overline{h(U)}$;

(b) existe una vecindad abierta $O(a)$ de a tal que $h(x) = x$ para cualquier elemento $x \in O(a)$.

Demostración. Como h es un homeomorfismo de X en sí mismo y $h(a) = a$, entonces la condición (a) es equivalente a la siguiente condición:

(c) existe un conjunto abierto U de X tal que U es h-simple y además $a \in \overline{U}$.

De hecho, si $a \in \overline{U}$, entonces como h es continua y $h(a) = a$, se tiene que

$$a = h(a) \in h(\overline{U}) \subseteq \overline{h(U)}.$$

Así $a \in \overline{U}$ y $a \in \overline{h(U)}$.

Sea W un conjunto abierto maximal que es h-simple en X. Entonces tenemos dos posibilidades para $a \in X$, $a \in \overline{W}$ o $a \notin \overline{W}$.

Si $a \in \overline{W}$, entonces se ha demostrado (c), o equivalentemente, (a). Ahora supongamos que $a \notin \overline{W}$, así debemos ver que se cumple (b). Como $a \notin \overline{W}$, entonces, aplicando lo dicho previamente al homeomorfismo h^{-1} y al abierto $h(W)$, tenemos que $a \notin \overline{h(W)}$. Por lo tanto, podemos tomar una vecindad abierta $O(a)$ de a tal que

$$O(a) \cap W = \emptyset \text{ y } O(a) \cap h(W) = \emptyset.$$

Como h es continua y $h(a) = a$, entonces existe una vecindad abierta $O_1(a) \subset O(a)$, tal que $h(O_1(a)) \subset O(a)$. Si $h(x) = x$ para cada $x \in O_1(a)$, entonces se cumple (b) y hemos terminado. Por lo tanto, solo resta ver qué pasa cuando existe $b \in O_1(a)$ tal que $h(b) \neq b$. Entonces $b \in O(a)$ y $h(b) \in$

$O(a)$. Como $h(b) \neq b$ y como h es continua, entonces existe una vecindad abierta W_1 de b tal que $W_1 \subset O(a)$, $h(W_1) \subset O(a)$ y $W_1 \cap h(W_1) = \emptyset$.

Sea $V = W \cup W_1$. Entonces V es un conjunto abierto de X. Tenemos que W_1 es h-simple y también se puede ver que $W_1 \cap W = \emptyset$, $W_1 \cap h(W) = \emptyset$ y $W \cap h^{-1}(W) = \emptyset$. Por lo tanto se sigue que V es h-simple. Como $W \subset V$ y claramente $W \neq V$, pues $W_1 \subset O(a)$ y $O(a) \cap W = \emptyset$, entonces W no es un conjunto abierto maximal h-simple de X, lo cual es una contradicción. $\square$

El siguiente resultado aparece en [15].

Corolario 4.1.5. *Si h es un homeomorfismo de un espacio extremadamente disconexo en sí mismo y x es un elemento de X tal que $h(x) = x$, entonces existe una vecindad abierta U de x en X tal que $h(y) = y$ para cada $y \in U$.*

Demostración. Como el espacio X es extremadamente disconexo, entonces claramente no se cumple (a) del lema 4.1.4. Por lo tanto, existe una vecindad abierta U de x en X tal que $h(y) = y$ para cada $y \in U$. $\square$

La demostración del siguiente resultado es una consecuencia del corolario anterior.

Teorema 4.1.6. [4, Theorem 4.5.1] *Sea X un espacio extremadamente disconexo y h un homeomorfismo de X en sí mismo. Entonces el conjunto*

$$M = \{x \in X : h(x) = x\}$$

de todos los puntos fijos de h es un conjunto abierto y cerrado de X.

El siguiente resultado es análogo a los resultados anteriores.

Corolario 4.1.7. *Supongamos que h es un homeomorfismo de un espacio X en sí mismo y que $x \in X$ es un punto fijo de h. Si x es un ed-punto, entonces existe una vecindad abierta U de x en X tal que $h(y) = y$ para cada $y \in U$.*

Corolario 4.1.8. *Supongamos que f y f' son homeomorfismos de un espacio X en sí mismo. Si $x \in X$ es un ed-punto y además $f(x) = f'(x)$, entonces existe una vecindad abierta U de x en X tal que $f(y) = f'(y)$ para cada $y \in U$.*

Demostración. Definamos $h = (f')^{-1}f$. Entonces h es un homeomorfismo de X en sí mismo y $h(x) = x$. Por el corolario 4.1.7 existe una vecindad abierta U de x en X tal que $h(y) = y$ para cada $y \in U$. Entonces $f(y) = f'(y)$ para cada $y \in U$. $\square$

Ahora usaremos el corolario 4.1.5 para mostrar una caracterización de los grupos discretos con relación a los espacios extremadamente disconexos.

Teorema 4.1.9. *El grupo G es discreto si y solo si el espacio $G \times G$ es extremadamente disconexo.*

Demostración. Una implicación es clara. Así, supongamos que el producto $G \times G$ es extremadamente disconexo. Entonces, tenemos que demostrar que el elemento identidad e de G es un punto aislado de G. Supongamos lo contrario. Definamos $A = \{(x, x) : x \in G\}$ y $B = \{(x, e) : x \in G\}$, entonces A es igual a la diagonal Δ_G de $G \times G$. Sea $h((x, y)) = (x, x^{-1}y)$ para cada $(x, y) \in G \times G$. Entonces h es un homeomorfismo de $G \times G$ en sí mismo y además $h((e, e)) = (e, e)$. También es claro que $h(A) = B$ y que $A \cap B = \{(e, e)\}$. Por lo tanto $h(z) \neq z$ para cada $z \in A \setminus \{(e, e)\}$. Como e no es aislado en G, entonces (e, e) no es aislado en A ya que G y A son homeomorfos. Por lo tanto, para cualquier vecindad abierta $O((e, e))$ de (e, e) en $G \times G$ existe un elemento z distinto de (e, e) en $O((e, e))$ tal que $h(z) \neq z$. Como el espacio $G \times G$ es extremadamente disconexo, por el corolario 4.1.5 se tiene una contradicción. Entonces e es un punto aislado de G y por lo tanto G es discreto. $\square$

Ahora vamos a ver una consecuencia importante del teorema 4.1.6. Recordemos que un grupo G es booleano si todo elemento del grupo G es de orden 2. Una propiedad importante y fácil de demostrar es que cualquier grupo booleano es abeliano. En general, los grupos extremadamente disconexos no necesitan ser booleanos, pero el siguiente resultado muestra que cualquier grupo extremadamente disconexo debe contener un subgrupo booleano no trivial.

Teorema 4.1.10. [**V. I. Malykhin**] *Sea G un grupo topológico extremadamente disconexo. Entonces existe un subgrupo abeliano, abierto y cerrado H de G tal que $a^2 = e$, para cada $a \in H$.*

Demostración. La función $h : G \longrightarrow G$ definida como $h(a) = a^{-1}$, para cada $a \in G$, es un homeomorfismo de G en sí mismo. Por el teorema 4.1.6, sea $U = \{a \in G : a^2 = e\}$ una vecindad abierta del elemento identidad e. Como G es un grupo topológico, entonces existe una vecindad abierta V de e tal que $V^2 \subset U$. Si a y b son elementos de V, entonces $abab = e$, pues $ab \in U$. Así, de $a^2 = e$ y $b^2 = e$ se tiene que $ab = ba$, es decir, cualesquiera dos elementos de V conmutan. Si $H = \langle V \rangle$, es decir, H es el subgrupo generado por V, entonces H es abeliano. Como V es abierto, entonces H es un subgrupo abierto también. Por lo anterior H es un subgrupo cerrado de G. Como todos los elementos de V son de orden 2, entonces todos los elementos de H son también de orden 2. $\square$

En la sección 4.5 de [4] se pueden encontrar algunos otros resultados interesantes sobre la estructura topológica y algebraica de un espacio extremadamente disconexo G, aún cuando G no sea un grupo topológico. Por ejemplo [4, Theorems 4.5.3, 4.5.6, 4.5.9], por mencionar algunos de ellos.

La segunda parte de esta sección esta destinada a presentar una breve introducción de los espacios maximales. Sea X un espacio Hausdorff sin puntos aislados y sea $\mathcal{T}$ la topología de X. El espacio X es *maximal* si cualquier topología $\mathcal{T}'$ de X estrictamente más fina que $\mathcal{T}$ tiene puntos aislados. De hecho si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff sin puntos aislados, podemos aplicar el lema de Zorn a la familia de todas las topologías en X que son más finas que $\mathcal{T}$ y no tienen puntos aislados para encontrar tal topología maximal. Así cualquier espacio Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ sin puntos aislados admite una topología más fina $\mathcal{T}^*$ tal que el espacio $(X, \mathcal{T}^*)$ es maximal.

A continuación presentamos uno de los resultados más importantes de los espacios maximales. En particular, se demuestra que cualquier espacio maximal es extremadamente disconexo. También, se ve que cualquier subespacio abierto de un espacio maximal es maximal y en el caso de los subespacios densos de un espacio maximal se demuestra que estos son abiertos.

Teorema 4.1.11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio maximal, entonces:*

(a) si U es abierto en X y $x \in \overline{U}$, entonces $U \cup \{x\}$ es abierto en X, en particular, X es extremadamente disconexo;

(b) cualquier subespacio abierto de X es maximal;

(c) cualquier subespacio denso de X es abierto;

(d) cualquier subconjunto denso en ninguna parte de X es cerrado y discreto en X.

Demostración. Para demostrar (a) supongamos que U es un abierto no vacío de X y que $x \in \overline{U}$. Sea $V = U \cup \{x\}$ y consideremos la topología $\mathcal{T}'$ de X con subbase $\mathcal{T} \cup \{V\}$, donde $\mathcal{T}$ es la topología original de X. Entonces $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ y no tiene puntos aislados. Como el espacio $(X, \mathcal{T})$ es maximal, entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ y por lo tanto $V \in \mathcal{T}$. Lo anterior implica que $U \cup \{x\}$ es un conjunto abierto en X para cada $x \in \overline{U}$ y por lo tanto $\overline{U}$ es abierto en el espacio X. Así cualquier espacio maximal es extremadamente disconexo.

Ahora probaremos (b). Supongamos que U es un abierto no vacío de X. Como X no tiene puntos aislados, entonces U no tiene puntos aislados. Sea $\mathcal{T}_U$ la topología que U hereda como subespacio de X. Supongamos que $\mathcal{T}'_U$ es una topología en U sin puntos aislados y más fina que $\mathcal{T}_U$. Denotemos por $\mathcal{T}'$ a la familia de todos los conjuntos de la forma $V \cup W$, donde, $V \in \mathcal{T}$ y $W \in \mathcal{T}'_U$. Entonces $\mathcal{T}'$ es una topología más fina que $\mathcal{T}$ y el espacio $(X, \mathcal{T}')$ no tiene puntos aislados. Como $(X, \mathcal{T})$ es maximal, entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ y así $\mathcal{T}_U = \mathcal{T}'_U$. Por lo tanto, el espacio U es maximal.

Para probar (c), supongamos que S es un subconjunto denso de X. Consideremos la topología $\mathcal{T}'$ de X que se genera por la familia $\mathcal{T} \cup \{S\}$. Entonces $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ y el espacio $(X, \mathcal{T}')$ no tiene puntos aislado. Nuevamente se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ y entonces S es abierto en X.

Finalmente probaremos (d). Supongamos que A es denso en ninguna parte en X. Entonces $F = \overline{A}$ es también un conjunto denso en ninguna parte. El complemento $O = X \setminus F$ es abierto y denso de X. Tomemos $x \in F$ y $V_x = O \cup \{x\}$. Como $x \in \overline{O}$, entonces por (a) se tiene que V_x es abierto en X para cada $x \in F$. Como $V_x \cap F = \{x\}$, entonces cualquier punto de F es aislado en F. Por lo tanto F es un subconjunto cerrado y discreto en X. Finalmente, como $F = \overline{A}$, entonces $A = F$. Así, cualquier subconjunto denso en ninguna parte de X es cerrado y discreto en X. $\square$

Los siguientes resultados son consecuencias del teorema 4.1.11.

Lema 4.1.12. *Sea X un espacio maximal. Si A es un subconjunto de X, entonces A tiene la forma $U \cup D$, donde U es abierto en X y D es un subconjunto cerrado y discreto de X.*

Demostración. Sea A un subconjunto de X. Supongamos que F es la cerradura de A y que O es el interior de F en X. Entonces $F \setminus O$ es un conjunto denso en ninguna parte de X. Por (d) del teorema 4.1.11 se tiene que $D = A \setminus O \subset F \setminus O$ es un conjunto cerrado y discreto de X. Como $A \cap O$ es denso en O, entonces $U = A \cap O$ es abierto en X por (b) y (c) del teorema 4.1.11. Finalmente, por la construcción de los conjuntos U y D se tiene que $A = U \cup D$. $\square$

Corolario 4.1.13. *Sea X un espacio maximal. Si $x \in X$ y $x \in \overline{A}$ para algún subconjunto $A \subset X \setminus \{x\}$, entonces $A \cup \{x\}$ es una vecindad de x en X.*

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{A}$. Por el lema 4.1.12 se tiene que A es la unión de un conjunto abierto U de X y un conjunto cerrado y discreto D de X. Como $x \in \overline{A} \setminus A$, entonces $x \in \overline{U}$. Aplicando (a) del teorema 4.1.11 se tiene que $V = U \cup \{x\}$ es un conjunto abierto de X. Por lo tanto, $A \cup \{x\}$ contiene la vecindad abierta V de x en X. Así, $A \cup \{x\}$ es una vecindad de x en X. □

Concluimos esta sección con una caracterización útil sobre los espacios maximales.

Teorema 4.1.14. *Sea X un espacio de Hausdorff sin puntos aislados. Entonces X es maximal si y solo si para cada $x \in X$ y cualesquiera subconjuntos ajenos A y B de $X \setminus \{x\}$, el elemento x pertenece como máximo a uno de los conjuntos $\overline{A}$ o $\overline{B}$.*

Demostración. Supongamos que X es maximal. Tomemos $x \in X$ y dos subconjuntos disjuntos A y B de $X \setminus \{x\}$. Si $x \in \overline{A}$, entonces por el corolario 4.1.13 se tiene que $A \cup \{x\}$ es una vecindad de x en X. Así, existe una vecindad abierta V de x en X tal que $x \in V \subset A \cup \{x\}$. Como A y B son subconjuntos ajenos de $X \setminus \{x\}$, entonces $B \subset X \setminus V$. Por lo tanto, $\overline{B} \subset X \setminus V$. De este modo se tiene que $x \notin \overline{B}$.

Ahora supongamos que para cada $x \in X$ y cualesquiera subconjuntos ajenos A y B de $X \setminus \{x\}$, el elemento x pertenece como máximo a uno de los conjuntos $\overline{A}$ o $\overline{B}$.

Para esta implicación vamos a proceder por contradicción. Supongamos que el espacio Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ no tiene puntos aislados y no es maximal. Tomemos una topología $\mathcal{T}'$ en X estrictamente más fina que $\mathcal{T}$ y que no tiene puntos aislados. Por lo tanto, existe un conjunto no vacío $V \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}$. Claramente, el subespacio V de $(X, \mathcal{T}')$ no tiene puntos aislados, pues V es abierto en $(X, \mathcal{T}')$ y $(X, \mathcal{T}')$ no tiene puntos aislados.

Sea $B = X \setminus V$. Como $V \notin \mathcal{T}$ entonces B no es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. Así existe un elemento $x \in X$ tal que $x \in V \cap \overline{B}$, donde, $\overline{B}$ es la cerradura de B en el espacio $(X, \mathcal{T})$. Como V no tiene puntos aislados, entonces x es un punto de acumulación del conjunto $A = V \setminus \{x\}$ en los dos espacios $(X, \mathcal{T})$ y $(X, \mathcal{T}')$. Entonces, A y B son conjuntos ajenos de $X \setminus \{x\}$ y sus cerraduras en el espacio $(X, \mathcal{T})$ contienen al elemento x. Esta contradicción muestra que el espacio es maximal. □

4.2. El grupo maximal de Malykhin

La primera parte de este capítulo esta centrada en la construcción del grupo maximal de Malykhin (ver [4, Theorem 4.5.22]). La mayoría de los resultados son tomados de [4, Section 4.5], además agregamos algunos resultados interesantes que se obtienen de la construcción de tal grupo, estas propiedades aparecen de manera implícita durante la construcción. Cabe decir que estos resultados serán de utilidad más adelante.

Ahora presentamos algunos lemas que serán de ayuda para la construcción de grupo maximal de Malykhin.

Lema 4.2.1. *Supongamos que K es un grupo booleano infinito, con elemento identidad e_K y además K es la unión de una cantidad finita de subconjuntos $P_1, \ldots, P_m$ de K. Entonces existe un número entero k tal que $1 \leq k \leq m$ y $P_k \cup \{e\}$ contiene un subgrupo infinito de K.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los subconjuntos P_i son disjuntos. Aplicando [4, Theorem 2.2.26], existen un número entero k que satisface $1 \leq k \leq m$ y un subconjunto $D = \{x_n : n \in \omega\}$ de K (D con enumeración fiel) tales que todas las sumas finitas $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$, con $i_1 < \cdots < i_n$, estan en $P_k \cup \{e_K\}$. Como el grupo K es booleano, entonces es abeliano, así el subconjunto infinito de G generado por todas estas sumas coincide con el subgrupo generado por D. $\square$

Definición 4.2.2. *Decimos que un grupo topológico $(G, \mathcal{T})$ es lineal si tiene una base local en el elemento identidad e que consiste de subgrupos abiertos.*

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que cualquier grupo lineal es 0-dimensional (un espacio topológico X tiene *dimensión 0* o es *0-dimensional* si X tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados en X).

Lema 4.2.3. *Sea K un grupo booleano, infinito y numerable. Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología de grupo para K tal que $\mathcal{T}$ es no discreta, segundo numerable y lineal. Si $K \setminus \{e_k\} = P_1 \cup P_2$ y $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, entonces existe una topología de grupo $\mathcal{T}'$ para K tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}'$ es no discreta, segundo numerable y lineal, y además, a lo más uno de los conjuntos $cl_{\mathcal{T}'}P_1$ o $cl_{\mathcal{T}'}P_2$ contiene al elemento identidad e_k de K, donde $cl_{\mathcal{T}'}P_i$ es la cerradura de P_i en el grupo $(K, \mathcal{T}')$ y $i \in \{1, 2\}$.*

Demostración. Como $\mathcal{T}$ es una topología segundo numerable y lineal, entonces existe una base local que es numerable y decreciente, digamos $\{U_n : n \in \omega\}$, del elemento identidad e_k del grupo K que consiste de subgrupos abiertos de K. Vamos a elegir una sucesión $X = \{x_n : n \in \omega\}$, donde para cada $n \in \omega$ se tiene que $x_n \neq e_K$ y además si $i \neq j$ entonces $x_i \neq x_j$, tal que para cada $n \in \omega$ se cumplen las siguientes condiciones:

(I) $x_n \in U_n$;

(II) $x_{n+1} \notin \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.

Donde $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ es el subgrupo generado por $x_0, \ldots, x_n$. Como el grupo K es booleano, cualquier subgrupo finitamente generado es finito, es decir, el subgrupo $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ es finito. Por otro lado, como $\mathcal{T}$ no es discreta se tiene que U_{n+1} es infinito, así podemos elegir $x_{n+1} \in U_{n+1} \setminus \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Así, la sucesión X está bien definida. Claramente, la sucesión X converge a e_K en $(K, \mathcal{T})$.

Por (II) y puesto que el grupo K es booleano, se tiene que si $n_1 < \cdots < n_t$, entonces $x_{n_1} + \cdots + x_{n_t} \neq e_K$. De hecho, si $x_{n_1} + \cdots + x_{n_t} = e_K$, entonces $x_{n_1} + \cdots + x_{n_{t-1}} = x_{n_t}$ y entonces $x_{n_t} \in \langle x_0, \ldots, x_{n_{t-1}} \rangle$, lo cual es una contradicción.

Sea H el subgrupo de K generado por X. Entonces los conjuntos disjuntos P_1 y P_2 cubren a $H \setminus \{e_K\}$. Aplicando el lema 4.2.1 podemos encontrar un subgrupo infinito S de H contenido en a lo más uno de los conjuntos $P_1 \cup \{e_K\}$ o $P_2 \cup \{e_K\}$. Supongamos que $S \subset P_1 \cup \{e_K\}$.

Definamos $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{S\}$, donde $\mathcal{B}$ es la base de la topología para el grupo $(K, \mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{B}'$ es una base para una topología de grupo lineal $\mathcal{T}'$ de K más fina que $\mathcal{T}$. Como S es un subgrupo abierto en $(K, \mathcal{T}')$ y $S \cap P_2 = \emptyset$, entonces $e_K \notin cl_{\mathcal{T}'} P_2$, donde $cl_{\mathcal{T}'} P_2$ es la cerradura de P_2 en el grupo $(K, \mathcal{T}')$.

Finalmente, solo resta ver que $(K, \mathcal{T}')$ no es discreto. Lo anterior es equivalente a demostrar que $S \cap U_m$ es infinito para cada $m \in \omega$. Supongamos por el contrario que $S \cap U_m$ es finito para algún $m \in \omega$. Sea H_m el subgrupo de H generado por el subconjunto $\{x_n : m < n \in \omega\}$. Se tiene por (I) que $H_m \subset U_m$ y por lo tanto la intersección $S \cap H_m$ es finita también. Denote por π al homomorfismo natural de H sobre el grupo H/H_m. Como H es generado por X, entonces H/H_m es generado por $\pi(x_1), \cdots, \pi(x_m)$. Por lo tanto el grupo H/H_m es finito, pues también es booleano. La restricción $\varphi = \pi \restriction S$ es un homomorfismo de S sobre un subgrupo del grupo finito H/H_m. El kernel de φ es el grupo finito $S \cap H_m$. Por lo tanto, S es finito, lo cual es una contradicción. Entonces $(K, \mathcal{T}')$ no es discreto. $\square$

Antes de comenzar con la construcción del grupo maximal, introducimos algunos conceptos importantes. Sea γ una familia de subconjuntos infinitos de ω y supongamos que la intersección de cualquier subfamilia finita de γ es infinita. Entonces decimos que γ tiene la *propiedad de la intersección fuerte*. Un conjunto A es una *pseudo-intersección* de γ si el complemento $A \setminus B$ es finito, para cada $B \in \gamma$. Entonces A es una pseudo-intersección de γ si el conjunto A esta casi totalmente contenido en cualquier elemento B de γ.

Proposición 4.2.4. *Cualquier familia numerable γ de ω con la propiedad de la intersección fuerte tiene una pseudo-intersección infinita.*

Demostración. Supongamos que $\gamma = \{B_n : n \in \omega\}$. Para B_0 tomemos cualquier elemento $a_0 \in B_0$ y definamos $A_0 = \{a_0\}$. Ahora, sea $a_1 \in B_0 \cap B_1$, tal que $a_1 \neq a_0$, esto es posible pues γ tiene la propiedad de la interseccion fuerte, es decir, $B_0 \cap B_1$ es un conjunto infinito. Sea $A_1 = \{a_0, a_1\}$, entonces $|A_1 \setminus B_1| \leq 1$.

Supongamos que hemos definido el conjunto $A_{n-1} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ tal que $|A_{n-1} \setminus B_{n-1}| \leq n - 1$, donde $a_i \neq a_j$, para cada $i \neq j$ y $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Entonces para $n \in \omega$ tomemos $a_n \in \bigcap_{i \leq n} B_i$ y $a_n \notin A_{n-1}$. Lo anterior es posible pues γ tiene la propiedad de la intersección fuerte, es decir, $\bigcap_{i \leq n} B_i$ es un conjunto infinito. Sea $A_n = A_{n-1} \cup \{a_n\}$. Entonces $|A_n \setminus B_n| \leq n$.

Continuando con este proceso podemos construir un conjunto

$$A = \bigcup_{n \in \omega} A_n,$$

tal que

$$|A \setminus B_n| \leq n,$$

para cada $n \in \omega$. Así, A es una pseudo-intersección de la familia γ. $\square$

Denote por $\mathfrak{p}$ a la mínima cardinalidad de las familias γ de subconjuntos de ω, tal que γ tiene la propiedad de la intersección fuerte y no tiene una pseudo-intersección infinita. Entonces, por la proposición 4.2.4 se tiene que $\aleph_1 \leq \mathfrak{p}$, y claramente $\mathfrak{p} \leq 2^\omega = \mathfrak{c}$. La hipótesis del continuo establece que $\aleph_1 = 2^\omega$, entonces lo anterior implicaría que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

De ahora en adelante vamos a suponer la igualdad $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. De hecho, esta igualdad es equivalente a una versión más débil del axioma de Martin (ver [14]), y por lo tanto, es compatible con la negación de la hipótesis del continuo. Así, la combinacíon $\aleph_1 < \mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ es consistente con ZFC.

De ahora en adelante vamos a fijar un grupo booleano G tal que $|G| = \omega$. Para esto, denotemos por $\mathbb{Z}(2)$ el grupo discreto de dos elementos $\{0, 1\}$. Sea $\sigma\mathbb{Z}(2)^\omega$ el subgrupo del grupo compacto $\mathbb{Z}(2)^\omega$, que consiste de todos los elementos $x = (x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{Z}(2)^\omega$ tales que $x_n \neq 0$ para a lo más una cantidad finita de coordenadas $n \in \omega$. Entonces $\sigma\mathbb{Z}(2)^\omega$ es un subgrupo denso y numerable de $\mathbb{Z}(2)^\omega$. Así, podemos tomar a G como el grupo $\sigma\mathbb{Z}(2)^\omega$.

Ahora podemos demostrar que el enunciado 'existe un grupo topológico no discreto y maximal' es consistente con ZFC.

Teorema 4.2.5. [**V. I. Malykhin**] *Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, el grupo booleano, infinito y numerable G admite una topología de grupo $\mathcal{T}_{\mathscr{M}}$ no discreta, Hausdorff, maximal y lineal.*

Demostración. Usando $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, vamos a construir por recursión una topología de grupo maximal y lineal para G.

Si $\mathcal{T}_0$ es la topología de G que hereda como subgrupo del grupo compacto $\mathbb{Z}(2)^\omega$, entonces $\mathcal{T}_0$ es una topología de grupo no discreta, Hausdorff, lineal y segundo numerable de G.

Sea $\mathcal{P} = \{(P_{\alpha,1}, P_{\alpha,2}) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración de todos los pares $P = (P_1, P_2)$ tales que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $P_1 \cup P_2 = G \setminus \{e\}$, y $(P_{0,1}, P_{0,2}) = (G \setminus \{e\}, \emptyset)$, donde e es la identidad de G. Tal enumeración existe pues el grupo G es numerable.

Nuestro objetivo es construir una familia $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de topologías de grupo no discretas, segundo numerables y lineales de G. Claramente, $\mathcal{T}_0$ es la topología de G que heredada como subgrupo del grupo compacto $\mathbb{Z}(2)^\omega$. Tal familia $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de topologías debe cumplir las siguientes condiciones para cada $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$:

(I) $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_\beta$ si $\alpha < \beta$;

(II) el elemento identidad e de G pertenece a la cerradura en $(G, \mathcal{T}_\alpha)$ de a lo más uno de los conjuntos $P_{\alpha,1}, P_{\alpha,2}$.

Sea $\alpha < \mathfrak{c}$ y supongamos que se ha construido una sucesión $\{\mathcal{T}_\nu : \nu < \alpha\}$ de topologías de grupo no discretas, segundo numerables y lineales de G que cumplen (I) y (II). Se tiene por (I) que la topología de grupo γ_α de G con base $\bigcup_{\nu<\alpha} \mathcal{T}_\nu$ es lineal y no discreta. Como para cada $\nu < \alpha$, la topología $\mathcal{T}_\nu$ tiene una base numerable en e, (G, γ_α) tiene una base en e de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Denote por $\mathcal{B}_\alpha$ a la base local de la identidad del grupo (G, γ_α) que consiste de subgrupos abiertos y $|\mathcal{B}_\alpha| < \mathfrak{c}$.

Como el grupo G es numerable, entonces existe una biyección f de $G \setminus \{e\}$ a ω. Para cada $U \in \mathcal{B}_\alpha$, sea $U^* = U \setminus \{e\}$ y consideremos la familia $\mathcal{F} = \{f(U^*) : U \in \mathcal{B}_\alpha\}$ de subconjuntos infinitos de ω. Como el subgrupo (G, γ_α) es no discreto, la familia $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección fuerte. Entonces, aplicando $|\mathcal{F}| < \mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, tenemos que $\mathcal{F}$ tiene una pseudo-intersección infinita A. Sea $X = \{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración del conjunto infinito $f^{-1}(A)$. Claramente el conjunto $X \setminus U$ es finito para cada $U \in \mathcal{B}_\alpha$. Por lo tanto, si $U \in \mathcal{B}_\alpha$ entonces existe $m \in \omega$ tal que $\{x_k : m \leq k \in \omega\} \subset U$. Como U es un subgrupo de G, el subgrupo H_m de G generado por el conjunto $X_m = \{x_k : m \leq k \in \omega\}$ está contenido en el subgrupo abierto U. Si γ'_α es la topología de G cuya base $\mathcal{B}'$ consiste de los conjuntos $g + H_n$, donde $g \in G$ y $n \in \omega$, entonces $\mathcal{B}'$ es numerable y γ'_α es una topología de grupo no discreta, segundo numerable y lineal de G; además, γ'_α es más fina que γ_α.

Entonces, de la definición de γ'_α se tiene que $W = \langle X \rangle$ es un subgrupo abierto de (G, γ'_α). Tomemos un elemento arbitrario U de $\mathcal{B}_\alpha$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que el subgrupo $H_n = \langle X_n \rangle$ de G está contenido en U. Por lo tanto, $W \setminus U \subseteq W \setminus H_n$. Como $X \setminus X_n$ es finito y el grupo G es booleano, se tiene que $W \setminus H_n$ es finito, para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $|W \setminus U| < \omega$.

Aplicando el lema 4.2.3, podemos encontrar una topología de grupo $\mathcal{T}_\alpha$ en G, tal que $\mathcal{T}_\alpha$ es no discreta, segundo numerable y lineal. Además, $\gamma'_\alpha \subset \mathcal{T}_\alpha$ y el elemento identidad e de G pertenece a la cerradura de a lo más uno de los conjuntos $P_{\alpha,1}, P_{\alpha,2}$. De esta manera se concluye la construcción de la familia $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Finalmente, si $\mathcal{T}_{\mathscr{M}}$ es la topología de G con base $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{T}_\alpha$, entonces aplicando la condición (II) de la construcción y el teorema 4.1.14 podemos concluir que $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ es un grupo topológico Hausdorff no discreto, maximal y lineal. $\square$

Vamos a concluir esta sección presentando un par de propiedades que aparecen implícitas en la construcción del grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ en el teorema 4.2.5.

Lema 4.2.6. *Sea U un abierto en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Entonces existe un ordinal $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $U \in \mathcal{T}_\alpha$.*

Demostración. Si $U = \emptyset$ no hay nada que probar. Así, supongamos que $U \neq$

$\emptyset$. Entonces $|U| = \omega$. Como $\gamma = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{T}_\alpha$ es una base para $\mathcal{T}_{\mathscr{M}}$, el abierto U puede ser cubierto por una cantidad numerable de conjuntos abiertos básicos de γ. Se sigue de $cf(\mathfrak{c}) > \omega$ y (II) del teorema 4.2.5 que existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $U \in \mathcal{T}_\alpha$. $\square$

Lema 4.2.7. *Sea x un elemento del grupo G y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de vecindades abiertas de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Entonces existe una vecindad abierta W de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ tal que $|W \setminus U_n| < \omega$, para cada $n \in \omega$.*

Demostración. Por la homogeneidad del grupo G, es suficiente con probar el lema para el caso especial $x = e$, donde e es el elemento identidad del grupo G.

Sea $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de vecindades abiertas de e en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Como el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ es lineal, podemos suponer que cada U_n es un subgrupo abierto del grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Por el lema 4.2.6, para cada $n \in \omega$, existe $\alpha_n < \mathfrak{c}$ tal que $U_n \in \mathcal{T}_{\alpha_n}$. Tomemos un ordinal $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\alpha_n < \alpha$, para cada $n \in \omega$.

En el paso α de la construcción del grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$, hemos definido un subconjunto infinito X de G tal que el conjunto $W = \langle X \rangle$ está en $\mathcal{T}_\alpha$ y $W \setminus U$ es finito, para cada $U \in \bigcup_{\nu<\alpha} \mathcal{T}_\nu$ con $e \in U$. Por lo tanto, W es una vecindad abierta de e en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ y $|W \setminus U_n| < \omega$, para cada $n \in \omega$. $\square$

4.3. Redes numerables en el grupo maximal de Malykhin

Uno de los principales objetivos de esta sección es dar una solución al siguiente problema:

Problema 4.3.1. *¿Es verdad que cualquier grupo topológico (abeliano) numerable y no discreto tiene una red numerable con elementos infinitos?*

Este problema surge de manera natural como complemento a [34, Lemma 2.27], en donde se establece que si un grupo topológico abeliano G tiene una red numerable, el grupo G tiene cardinalidad κ y $cf(\kappa) > \omega$, entonces G tiene una red numerable $\mathcal{N}$ tal que $|N| = \kappa$, para cada $N \in \mathcal{N}$.

Usaremos el teorema 4.2.5 y la propiedad de no resolubilidad de los espacios topológicos maximales para demostrar que bajo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, el grupo topológico no discreto $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ no admite una red numerable con elementos infinitos.

Para este grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$, se demuestra más adelante que si $\mathcal{N}$ es una red numerable de $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ y $\mathcal{N}_f$ es la subfamilia de $\mathcal{N}$ que consiste de conjuntos finitos, entonces $\mathcal{N}_f$ es también una red para $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Este resultado nos plantea el siguiente problema:

Problema 4.3.2. *Sea $\mathcal{N}$ una red numerable para el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Para cada $n \geq 1$, sea $\mathcal{N}_n$ la subfamilia de $\mathcal{N}$ que consiste de los conjuntos $N \in \mathcal{N}$ con $|N| \leq n$. ¿Es $\mathcal{N}_n$ una red de $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$, para alguna $n \geq 1$?*

En la última parte de esta sección se presentan algunos ejemplos que resuelven el problema 4.3.2 de manera negativa.

Recordemos que un espacio X es *resoluble* si X contiene dos subconjuntos densos y ajenos. De lo contrario, diremos que el espacio X es *irresoluble*. El peso, el carácter y el π-carácter de un espacio X se denotan por $\omega(X)$, $\chi(X)$ y $\pi\chi(X)$, respectivamente. También, $\chi(x, X)$ y $\pi\chi(x, X)$ son el carácter y el π-carácter de X en el punto $x \in X$.

Comenzamos mostrando que ningún espacio maximal puede ser resoluble.

Proposición 4.3.3. *Si X es un espacio topológico maximal, entonces X es irresoluble.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos densos de X. Entonces A y B son abiertos, por el teorema 4.1.11. Entonces $A \cap B \neq \emptyset$. Así, se tiene que el espacio X es irresoluble. □

El siguiente teorema presenta una propiedad interesante de los espacios irresolubles.

Teorema 4.3.4. *Si X es un espacio irresoluble, entonces X no admite una red numerable con elementos infinitos.*

Demostración. Supongamos que X tiene una red numerable

$$\mathcal{N} = \{N_k : n \in \omega\},$$

tal que $|N_k| \geq \omega$, para cada $k \in \omega$. Tomemos dos elementos distintos, digamos a_0 y b_0 en N_0 y definamos $A_0 = \{a_0\}$ y $B_0 = \{b_0\}$. Claramente, A_0 y B_0 son ajenos.

Supongamos que para algún entero $m \geq 0$, se han definido dos conjuntos finitos y ajenos $A_m = \{a_0, \ldots, a_m\}$ y $B_m = \{b_0, \ldots, b_m\}$ de X tal que satisfacen $A_m \cap N_k \neq \emptyset$ y $B_m \cap N_k \neq \emptyset$, para cada $k \leq m$. Entonces el conjunto $N_{m+1} \setminus (A_m \cup B_m)$ es infinito, así que podemos elegir dos elementos distintos a_{m+1} y b_{m+1} en $N_{m+1} \setminus (A_m \cup B_m)$. Sean $A_{m+1} = A_m \cup \{a_{m+1}\}$ y $B_{m+1} = B_m \cup \{b_{m+1}\}$. Claramente, A_{m+1} y B_{m+1} conjuntos finitos y ajenos.

Continuando con este proceso obtenemos los conjuntos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Por construcción, $A \cap B = \emptyset$. Finalmente, si U es un abierto no vacío de X, entonces existe $N_k \in \mathcal{N}$ tal que $N_k \subset U$. Así, $a_k \in A \cap U$ y $b_k \in B \cap U$. Entonces, los conjuntos A y B son densos y ajenos en X. Por lo tanto X es resoluble, lo cual es una contradicción. Lo anterior implica que el espacio X no tiene una red numerable con elementos infinitos. $\square$

El siguiente resultado se sigue directamente del teorema 4.3.4 y la proposición 4.3.3. Así, se responde de manera negativa al problema 4.3.1.

Teorema 4.3.5. *El grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ no admite una red numerable con elementos infinitos.*

Ahora, formulamos el siguiente resultado que complementa la conclusión del teorema 4.3.4 para el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$.

Teorema 4.3.6. *Sea $\mathcal{N}$ una red numerable para $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Supongamos que $\mathcal{N}_f = \{N \in \mathcal{N} : |N| < \omega\}$. Entonces $\mathcal{N}_f$ es una red para el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$.*

Demostración. Por el teorema 4.3.5, la familia $\mathcal{N}_f$ no es vacía. Vamos a suponer, por contradicción, que la familia $\mathcal{N}_f$ no es una red para el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Por lo tanto, existe un elemento $x \in G$ y una vecindad abierta U de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ tal que $N \setminus U \neq \emptyset$, para cada $N \in \mathcal{N}_f$ con $x \in N$. Sea

$$\mathcal{N}_x = \{N \in \mathcal{N} : x \in N \subset U\}.$$

Entonces cualquier $N \in \mathcal{N}_x$ es infinito. Como el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ es maximal, por el lema 4.1.12 cada $N \in \mathcal{N}_x$ tiene la forma $O_N \cup D_N$, donde O_N es un subconjunto abierto de $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ y D_N es cerrado y discreto en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$.

Como G no es primero numerable y $\chi(x, G) = \pi\chi(x, G)$ (ver [4, Proposition 5.2.6]), $\pi\chi(x, G)$ es no numerable. Por lo tanto, se tiene de $|\mathcal{N}_x| \leq \omega$ que existe una vecindad abierta V de x tal que $N \setminus V \neq \emptyset$, para cada $N \in \mathcal{N}_x$ con $O_N \neq \emptyset$.

Ahora, denotemos por $\mathcal{N}_x^*$ a la familia de todos los elementos $N \in \mathcal{N}_x$ tal que N es cerrado y discreto en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Sea $\{N_m : m \in \omega\}$ una enumeración de $\mathcal{N}_x^*$. Como N_0 es un conjunto discreto cerrado e infinito, existe una vecindad abierta V_0 de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ tal que $V_0 \subset V$ y $V_0 \cap N_0 = \{x\}$.

Supongamos que para algún $k \geq 0$, se han definido vecindades abiertas $V_0, \ldots, V_k$ de x tales que $V_k \cap N_k = \{x\}$ y $V_0 \supseteq \cdots \supseteq V_k$. Como N_{k+1} es cerrado y discreto, existe una vecindad abierta V_{k+1} de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ contenida en V_k, tal que $V_{k+1} \cap N_{k+1} = \{x\}$. Continuando con este proceso podemos construir una sucesión decreciente $\{V_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$.

Por el lema 4.2.7, existe una vecindad abierta W de x en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ tal que $|W \setminus V_m| < \omega$, para cada $m \in \omega$. Dado un elemento $N \in \mathcal{N}_x^*$, existe $k \in \omega$ tal que $|V_k \cap N| = 1$. Se sigue de $|N| = \omega$ y $|W \setminus V_k| < \omega$ que $N \setminus W$ es infinito y, por lo tanto, $N \setminus W \neq \emptyset$. Así que hemos probado que $N \not\subset W$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$. Esto contradice nuestra suposición de que $\mathcal{N}$ es una red para G. $\square$

Note que el grupo $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ no tiene puntos aislados. Así los siguientes resultados nos muestran una solución negativa al problema 4.3.2.

Ejemplo 4.3.7. Sea X un espacio regular infinito y numerable que contiene una cantidad infinita de puntos no aislados. Denotamos por F al conjunto de todos los puntos no aislados en X. Entonces F es cerrado en X. Como X es regular, existe un conjunto discreto e infinito $A = \{x_n : n \in \omega\}$ contenido en F.

Vamos a construir una red para X utilizando las siguientes familias de subconjuntos finitos de X:

- $\mathcal{N}_0 = \big\{\{x\} : x \in X \setminus A\big\}$;
- $\mathcal{N}_1 = \big\{\{x_1, y\} : y \in X \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}\big\}$;
- $\mathcal{N}_2 = \big\{\{x_2, y_1, y_2\} : y_1, y_2 \in X \setminus \{x_2, x_3, \ldots\}\big\}$.

En general, para cada $n \geq 1$, sea

- $\mathcal{N}_n = \big\{\{x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\} : y_1, y_2, \ldots, y_n \in X \setminus \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}\big\}$.

Afirmamos que

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{N}_n$$

es una red para X. Tomamos $x \in X$ y sea U una vecindad abierta de x. Si $x \notin A$, entonces $\{x\} \in \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ y claramente $\{x\} \subset U$. Si $x \in A$, entonces $x = x_n$ para algún $n \in \omega$. Entonces existe una vecindad abierta O de x en X tal que $O \subseteq U$ y $O \cap A = \{x_n\}$. Por lo tanto, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son elementos

distintos dos a dos de $O \setminus A$, entonces el conjunto $N = \{x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ esta contenido en O y $N \in \mathcal{N}_n$, por la definición de $\mathcal{N}_n$. Como $O \subseteq U$, esto prueba nuestra afirmación.
Sea $n \geq 0$ un entero arbitrario. Para demostrar que $\mathcal{N}^{(n)} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{N}_i$ no es una red para X, tomemos el elemento $x_{n+1} \in A$ y observemos que ningún elemento $N \in \mathcal{N}^{(n)}$ contiene a x_{n+1}. Esto implica que $\mathcal{N}^{(n)}$ no puede ser una red para X. En particular, para ningún $n \in \omega$, la familia $\{N \in \mathcal{N} : |N| \leq n\}$ puede ser una red para X.

En un espacio topológico X, un elemento $x \in X$ se llama *P-punto* si cualquier intersección numerable de vecindades abiertas de x es nuevamente una vecindad (no necesariamente abierta) de x. También decimos que X es un *P-espacio* si todo elemento $x \in X$ es un P-punto. Claramente, X es un P-espacio si y solo si cada conjunto G_δ en X es abierto.

En el siguiente ejemplo, el espacio X no es necesariamente numerable. Suponiendo que X no es un P-espacio, construimos una red $\mathcal{N}$ de conjuntos finitos para X tal que para cada entero $n \geq 1$, la subfamilia

$$\mathcal{N}_n = \{N \in \mathcal{N} : |N| \leq n\}$$

de $\mathcal{N}$ no es una red para X.

Ejemplo 4.3.8. Sea X un espacio de Hausdorff e infinito. Supongamos que el elemento $y^* \in X$ no es un P-punto en el espacio X. Por lo tanto, existe una sucesión decreciente $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas de y^* en X tal que $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ no es una vecindad de y^*. Consideremos las siguientes familias de conjuntos:

- $\mathcal{N}_0 = \{\{x\} : x \neq y^*\}$;
- $\mathcal{N}_1 = \{\{y^*, x\} : x \notin U_1\}$;
- $\mathcal{N}_2 = \{\{y^*, x_1, x_2\} : \text{o bien } x_1 \notin U_2 \text{ o } x_2 \notin U_2\}$.

En general, sea $\mathcal{N}_n$ la familia de conjuntos de la forma $\{y^*, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ tal que $x_j \notin U_n$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$$

y V una vecindad abierta de y^* en X. Entonces existe $n \in \omega$ tal que

$$V \setminus U_n \neq \emptyset.$$

Tomemos $x_n \in V \setminus U_n$ y elementos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \subset V$. Por lo tanto $\{y^*, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \in \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}$ y $\{y^*, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \subset V$. Si $x \in X$ y $x \neq y^*$, entonces $\{x\} \in \mathcal{N}_0$ y, claramente, $x \in \{x\} \subset W$, para toda vecindad abierta W de x. Por lo tanto, $\mathcal{N} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$ es una red para el espacio X.

Para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{M}_n = \bigcup_{i\leq n} \mathcal{N}_i$. Entonces, $\mathcal{M}_n$ no es una red para el espacio X porque para cada $A \in \mathcal{M}_n$ con $y^* \in A$ la inclusión $A \subset U_n$ no se cumple.

Dado que un espacio numerable T_1 y no discreto no puede ser un P-espacio, el ejemplo 4.3.8 implica el siguiente resultado que mejora el ejemplo 4.3.7:

Corolario 4.3.9. *Todo espacio Hausdorff, numerable, infinito y no discreto X admite una red numerable $\mathcal{N}$ de conjuntos finitos tal que para todo entero $n \geq 1$, la subfamilia $\mathcal{N}_n = \{N \in \mathcal{N} : |N| \leq n\}$ no es una red para X.*

Concluimos esta sección con un problema abierto en el que debilitamos la condición en los teoremas 4.3.5 y 4.3.6 de que la red $\mathcal{N}$ sea numerable.

Problema 4.3.10. *¿Son válidas las conclusiones de los teoremas 4.3.5 y 4.3.6 para redes con cardinalidades menores que $\mathfrak{p}$?*

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo presenta un amplio estudio sobre los grupos topológicos d-independientes, con especial énfasis en los grupos abelianos, compactos y metrizables. Se ha tomado como punto de partida el artículo de referencia [27], en el cual los autores A. Leiderman y M. Tkachenko demuestran que los grupos $\mathbb{Z}(2)^\kappa$ y $\mathbb{R}^\kappa$ son d-independientes, para un cardinal κ tal que $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$. Este artículo ha despertado nuestro gran interés en el estudio de la d-independencia en grupos topológicos abelianos.

En este trabajo, se ha establecido una estrecha relación entre los grupos d-independientes, los grupos máximamente fragmentables y los M-grupos. Además, se han analizado propiedades tanto algebraicas como topológicas que permiten determinar si un grupo es d-independiente. En particular, se ha profundizado en el estudio de la propiedad de d-independencia en grupos topológicos que surgen como producto de otros grupos.

El trabajo culmina en el teorema 3.3.1, en el cual se establece cuándo un grupo compacto, metrizable y abeliano es d-independiente. Este teorema resume completamente las propiedades topológicas y algebraicas que un grupo necesita para ser d-independiente en esta importante clase de grupos. Además, se ha generalizado el teorema 3.3.1 para grupos no triviales LCA segundo numerables en el teorema 3.4.2.

De este modo, este trabajo ha contribuido significativamente al estudio de los grupos topológicos d-independientes y ha establecido resultados importantes en este ámbito.

Por otra parte, durante el desarrollo de [34], se han identificado algunos problemas que resultan sumamente interesantes y que podrían contribuir significativamente al estudio de la propiedad de d-independencia. En particular, destacan los problemas 3.1.40 y 3.4.3, los cuales plantean interrogantes relevantes sobre la d-independencia en grupos topológicos. La resolución de estos problemas podría ampliar aún más nuestro conocimiento sobre esta propiedad y su relación con otras propiedades topológicas y algebraicas en diferentes clases de grupos.

Por otra parte, el trabajo de [34] fue una gran motivación para el desarrollo del estudio de [33], donde se aborda el problema 4.3.1. Para resolver este problema, se utilizó el grupo maximal de Malykhin $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$ y se demostró, en el teorema 4.3.5, que dicho grupo no admite una red numerable con elementos infinitos. Además, se debe mencionar el lema 4.2.7, que muestra una propiedad sumamente interesante de los elementos y sus vecindades abiertas en $(G, \mathcal{T}_{\mathscr{M}})$. Esta propiedad se desprende implícitamente de la construcción del grupo y se utiliza principalmente en la demostración del teorema 4.3.6.

Asimismo, se presenta el problema 4.3.10, el cual versa sobre las conclusiones de los teoremas 4.3.5 y 4.3.6 para redes de menor cardinalidad que $\mathfrak{p}$. Sin embargo, este problema aún se encuentra abierto.

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii, *A study of extremally disconnected topological spaces*, Bull. Math. Sci. 1 (2011) 3-12.

[2] A. V. Arhangel'skii, *An approximation of the theory of dyadic bicompacta*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 176 (1969) 767-770. Russian; English translat.: Soviet Math. Dokl. 10 (1969) 151-154

[3] A. V. Arhangel'skii, *The frequency spectrum of a topological space and the product operation,* Trans. Moscow Math. Soc. 40 (1981), 163-200. Russian original in: Trudy Moskov. Mat. Obshch. 40 (1979), 171-206.

[4] A. V. Arhangel'skii, M. G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press and World Scientific, Paris-Amsterdan 2008.

[5] D. Armacost, *The Structure of Locally Compact Abelian Groups,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 68, Marcel Dekker Inc. New York, 1981.

[6] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Comput. Math. 3 (1936) 427-430.

[7] J. Cleary, S. A. Morris, *Locally dyadic topological groups*, Bull. Austral. Math. Soc. 40 (1989) 417-419.

[8] W. W. Comfort, D. Dikranjan, *The density nucleus of a topological group*, Topol. Proc. 44 (2014) 325-356.

[9] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, *Reflection principle characterizing groups in which unconditionally closed sets are algebraic*, J. Group Theory 11 (2008) 421-442.

[10] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, *The Markov-Zariski topology of an Abelian group*, J. Algebra 324 (2010) 1125-1158.

[11] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, *A complete solution of Markov's problem on connected group topologies*, Adv. Math. 286 (2016) 286-307.

[12] E. K. van Douwen, *The Integers and Topology*, In: Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan, Eds., Elsevier Science Publ. B. V. (1984) 111-167.

[13] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.

[14] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's Axiom*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[15] Z. Frolík, *Homogeneity problems for extremally disconnected spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 8 (1967) 757-763.

[16] Z. Frolík, *Fixed points of maps of extremally disconnected spaces and complete Boolean Algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys. 16 (1968) 269-275.

[17] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. I, Academic Press, New York, 1970.

[18] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. II, Academic Press, New York, 1973.

[19] I. I. Guran, *On topological groups close to being Lindelöf*, Soviet Math. Dokl. 23 (1981) 173-175.

[20] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1963.

[21] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The Structure of Compact Groups: A Primer for Students - A Handbook for Experts*, Walter de Gruyter Publ., Berlin, 1988.

[22] T. Jech. *Set Theory, Second edition,* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[23] S. Kakutani, *Über die Metrization der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936) 82-84.

[24] E. van Kampen, *Locally bicompact abelian groups and their character groups*, Ann. Math. 36 (1935) 448-463.

[25] P. I. Kirku, *A criterion for the connected topologizability of periodic Abelian groups of finite period*, Mat. Issled: Algebr. Strukt. Vzaimosv. 118 (1990) 66-73 (in Russian).

[26] K. Kunen, *Set Theory,* North Holland, Amsterdam, 1980.

[27] A. G. Leiderman, M. G. Tkachenko, *Products of topological groups in which all closed subgroups are separable,* Topology and its Applications 241 (2018) 89-101.

[28] V. I. Malykhin, *Extremally disconnected and similar groups*, Soviet Math. Dokl. 16 (1975) 21-25. Russian original in: Dokl. Akad. Nauk SSSR 220, 27-30.

[29] V. I. Malykhin, *On extremally disconnected topological groups*, Uspekhi Mat. Nauk 34 (1979) 59-66 (in Russian).

[30] A. A. Markov, *On unconditionally closed sets*, Comptes Rendus Dokl. AN SSSR (N. S.) 44 (1944) 180-181 (in Russian).

[31] A. A. Markov, *On unconditionally closed sets*, Mat. Sb. 18 (1946) 3-28 (in Russian); English translation in: A.A. Markov, Three papers on topological groups: I. On the existence of periodic connected topological groups, II. On free topological groups, III. On unconditionally closed sets, Amer. Math. Soc. Transl. 1950(30) (1950), 120 pp.; Yet another English translation in: Topology and Topological Algebra, in: American Math. Society Translations Series 1, vol.8, 1962, 273-304.

[32] A. A. Markov, *On free topological groups*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English translation in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1, vol.8, 1962, 195-272.

[33] E. Márquez, *Countable networks on Malykhin's maximal topological group*, Appl. Gen. Topol., vol. 24, no. 2 (2023) 239-246.

[34] E. Márquez, M. Tkachenko, *D-independent topological groups*, Topol. Appl. 300 (2021), 107761.

[35] S. A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 29, Cambridge Univ. Press, London, 1977.

[36] F. Peter, H. Weyl, *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuerlichen Gruppe*, Math. Ann. 97 (1927) 737-755.

[37] L. S. Pontryagin, *The theory of topological commutative groups*, Ann. Math. 35 (1934) 361-388.

[38] L. S. Pontryagin, *Continuous Groups, Third edition*, Nauka, Moscow, 1973.

[39] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[40] J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups,* Springer-Verlag, New York, 1995.

[41] Z. Xiao, I. Sánchez, M. G. Tkachenko, *Topological groups whose closed subgroups are separable, and the product operation,* Topology and its Applications 259 (2019) 365-377.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00093
Matrícula: 2163802955

Grupos topológicos d-independientes y algunas propiedades sobre redes numerables en el grupo maximal de Malykhin.

EDGAR MARQUEZ RODRIGUEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 30 del mes de octubre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. SALVADOR GARCIA FERREIRA
DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: EDGAR MARQUEZ RODRIGUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH

VOCAL

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

DR. SALVADOR GARCIA FERREIRA

SECRETARIO

DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH