El suscrito Secretario General de la Universidad Autónoma Metropolitana, certifica que los datos asentados en la fotocopia de este documento referentes a los estudios que ampara, son idénticos en su contenido y términos a los mismos que esta Institución incluyó en el original, de acuerdo a la información existente en los archivos correspondientes.

Se extiende la presente para los efectos legales a que haya lugar en México, Distrito Federal a los veintisiete días del mes de abril de dos mil doce.

~~LIC. IRIS EDITH~~ SANTACRUZ FABILA
SECRETARIO GENERAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIRECCIÓN DE SISTEMAS ESCOLARES
Casa abierta al tiempo

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

IDONEA COMUNICACION DE RESULTADOS

IDONEA COMUNICACION DE RESULTADOS

DE LA ABSTRACCION SIMBOLICA A LA FUNDAMENTACION DE LA MATEMATICA

En México, D.F. se presentaron a las 11:00 horas del día 06 del mes de SEPTIEMBRE del año 2000 en la Unidad IZTAPALAPA de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del Jurado.

DR. MARIO CASANUEVA LOPEZ ;
MTRO. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO Y
MTRA. YOLANDA TORRES FALCON

bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última se reunieron para proceder al examen de grado de

Maestro en: HUMANIDADES (FILOSOFIA)

DE: JOSE ALBERTO BENITEZ OLIVA

quien presentó una comunicación de resultados, cuya denominación aparece al margen y de acuerdo con el artículo 78 fracciones I, II, III y V del Reglamento de Estudios Superiores de esta Universidad, los miembros del Jurado resolvieron:

APROBARLO

Acto continuo, el Presidente del Jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES
Casa abierta al tiempo

JOSE ALBERTO BENITEZ OLIVA
FIRMA DEL INTERESADO

REVISO

LIC. CARMEN LLORENS FABREGAT
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES

VISTO BUENO

DR. JOSE LEMA LABADIE
DIRECTOR DE DIVISION

PRESIDENTE

DR. MARIO CASANUEVA LOPEZ

VOCAL

MTRO. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO

SECRETARIA

MTRA. YOLANDA TORRES FALCON

Comunicación Idónea de Resultados

Maestría en Historia y Filosofía de la Ciencia

De la abstracción simbólica a la fundamentación de la matemática.

Hacia una historia de los sistemas formales axiomatizados.

Por: José Alberto Benítez Oliva

Septiembre 2000

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

A José Nicolás y Marylú.
A Laura y Victoria
A Seidy.

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa

Comunicación idónea de resultados para obtener el grado de Maestría en:
Historia y filosofía de la ciencia

Por: Lic. José Alberto Benítez Oliva

Asesor de tesis: Mtra. Yolanda Torres Falcón

Tema: Historia de los sistemas formales axiomatizados.

Título: *De la abstracción simbólica a la fundamentación de la matemática*

Índice **Página**

Introducción

La presente investigación tiene como objetivo principal el hacer accesibles al público no especializado algunos de los logros más interesantes en la rama de la ciencia de la lógica matemática. En especial, la investigación se aboca al estudio histórico de los sistemas formales axiomatizados y al análisis de los teoremas de incompletud que, en dichos sistemas, probó Kurt Gödel en 1931.

Tomada como investigación histórica, el trabajo abarca un amplio periodo de tiempo que va desde la época clásica griega (300 a.C.) hasta 1950. Sin embargo, los principales objetivos están centrados entre 1900 y 1931, cuando algunos de los más importantes resultados en los sistemas formales axiomatizados tuvieron lugar; por lo que las investigaciones del periodo anterior se deben considerar como antecedente e introducción necesaria a los trabajos del intervalo de tiempo señalado.

En tanto investigación de carácter científico-filosófico, el trabajo lo presento como un programa de divulgación. Considero que una de las tareas fundamentales del historiador y filosofo de la ciencia es la de dar a conocer al público en general los avances y desarrollos de las teorías científicas de un modo accesible y pedagógico. Por tal motivo el trabajo no presupone un lector con conocimiento muy especializado en el área de la lógica matemática, excepto quizá, aquel que se obtiene con un curso elemental de lógica de primer orden. De hecho, otro objetivo central de la presente investigación es poder brindar una opción de lectura para las personas que, tras haber tomado cursos básicos de lógica, estén interesados en conocer más sobre la historia y el desarrollo del área.

Los temas a tratar siguen un estricto orden cronológico y un coherente sentido temático. Los antecedentes históricos comienzan con la primera abstracción simbólica en el estudio de la lógica de que se tiene registro (*Organon* aristotélico), continúan con el sistema axiomático clásico de los *Elementos*, y el estudio de uno de los primeros sistemas formales, construido por Leibniz.

La segunda parte se centra en el estudio del trabajo de 1931 de Kurt Gödel. Sobre la imposibilidad de fundamentación de la matemática a partir de pruebas de consistencia absoluta en sistemas formales axiomatizados. El objetivo es que tras una pequeña introducción histórica, que contextualice el trabajo en cuestión y lo relacione con el capítulo anterior, se dé una exposición de las principales tesis, se ejemplifique el argumento central y se muestran algunas de las implicaciones que se siguen del trabajo analizado.

En lo posible he intentado conseguir los textos originales o, en caso contrario, la traducción completa y mejor sancionada de ellos. He intentado que sea reciente la bibliografía complementaria, pero algunos textos clásicos de la historia de la lógica han sido incluidos como complemento necesario de la información.

En las observaciones finales se da un panorama general de temas que se desarrollan a partir de los resultados de las pruebas de incompletud de Gödel; también se da un esbozo muy general de las perspectivas actuales del uso de sistemas formales axiomatizados, el empleo del pensamiento recursivo en inteligencia artificial y los planteamientos en pro y en contra de considerar la mente humana como una máquina.

Capitulo 1. LA BÚSQUEDA DEL LENGUAJE ADECUADO

"Toda verdad científica, para ser percibida y verificada deber ser expuesta en forma externa e inteligible para cualquiera. Este fin puede ser alcanzado sólo por medio de un lenguaje preciso edificado sobre la base de signos estables".

J. Lukasiewicz

La búsqueda de razonamientos válidos permea a la investigación lógica y matemática. La matemática se ocupa, entre otras cosas, de ciertos objetos y sus relaciones, por ejemplo: los números, los conjuntos, los espacios topológicos o las categorías. La lógica, por su parte, se ocupa principalmente de las relaciones de inferencia entre preposiciones o predicados en un lenguaje dado, del estudio de los límites expresivos de un sistema y sus alcances demostrativos. En ambas disciplinas el uso claro y preciso del lenguaje con el que se trabaja es de suma importancia.

La tarea de aprender el lenguaje y manejo de la lógica simbólica y/o la matemática es comparable al esfuerzo del estudiante de música por aprender a leer las notas musicales en un pentagrama. Como la meta que aquí perseguimos es hacer accesibles algunos de los logros más destacados en el estudio de los sistemas formales axiomatizados, es útil conocer un poco de historia y el origen del lenguaje en el que se trabaja; a tal propósito dedicaremos ese primer capítulo.

1.1. Aristóteles: La abstracción simbólica

Quizá el antecedente más cercano a la construcción de un lenguaje formal, útil para expresar relaciones lógicas en forma de un cálculo matematizado, sea el trabajo de Leibnitz de 1666, *Ars Combinatoria*, del cual hablaremos más adelante. Pero es sin duda Aristóteles (348-322 a.C.)[1] quien por primera vez observo que cuando hacemos ciertos razonamientos correctos acudimos a una seria de 'recetas' que son validas, independientemente del significado o contenido que posean las partes que conformen nuestro razonamiento, con tal de que éste conserve cierta forma o estructura general. Lo anterior es el núcleo de la abstracción que hacemos cuando utilizamos símbolos como sustitutos de contenidos concretos en un lenguaje formal y uno de los principales aportes de la lógica aristotélica. "La introducción de variables en lógica es una del as grandes invenciones de Aristóteles. Es casi increíble que hasta ahora, ningún filosofo o filólogo haya prestado atención a este hecho de máxima importancia".[2]

Afirmar que Aristóteles es el fundador de la lógica no sólo es un lugar común, sino también una afirmación vaga y poco exacta. Es innegable que la reflexión en torno a lo que es un argumento correcto e incluso a las paradojas a las que puede llevarnos dicha reflexión antecedieron al de Estagirita con pensadores como Platón, Zenón de Elea, Sócrates, Hipias, Protágoras o Parménides, por sólo nombrar algunos de su propia tradición. Sin embargo, lo que hoy conocemos como el *Organón* aristotélico es el primer conjunto de textos pertenecientes a la cultura occidental que,

---

[1] GRENET, P.B. *Historia de la filosofía antigua* ed. Herder, Cap. VI, España (1992)
[2] LUKASIEWICZ, J. *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna* Ed. Tecnos, España (1977), p. 18

explicita y sistemáticamente, toman como objeto de estudio las formas abstractas de razonamiento válido más allá de su contenido empírico.

Elaborado en el periodo de juventud (367-348 a.C.)[3] , el *Organón* está compuesto por seis escritos: *Categorías, Peri hermeneía (o de la interpretación), Primeros Analíticos, Segundos Analíticos, Tópicos y Refutaciones Sofisticas.*[4] El nombre de *Organón* no fue dado a la colección por el autor, sino por la tradición que le sucedió siglos después. La primera compilación de los seis libros fue hecha por Andronicus Rohodos en el siglo I d. C.,[5] y es a este conjunto de textos al que le llamarán *Organón* (i.e. instrumento) los lógicos bizantinos.

La importancia e influencia del *Organón* abarca más de diez siglos de vigencia y desarrollo. No es intención de este trabajo exponer la obra y los aportes aristotélicos en lógica, [6] nos abocaremos al esfuerzo intelectual del que da cuenta Aristóteles en varios textos, que va del ejemplo concreto a la abstracción simbólica.

En ningún de los textos aristotélicos se encuentra la palabra 'lógica' empleada en el sentido moderno del término, el cual no puede ser rastreado antes del tiempo de Cicerón.[7] El vocablo aristotélico que más se acerca a nuestro actual sentido es 'analytikos' y se refiere en Aristóteles, primordialmente, al análisis de la inferencia lógica en la figura del silogismo.[8]

Una inferencia lógica correcta es, de manera muy general, un razonamiento donde a partir de enunciados de cierta forma, se concluye

---

[3] GRENET, P. Op. Cit. P. 320.
[4] BARNES *The complete work of Aristotle* Ed. Princeton University Press, Vol. 1, Oxford 1985, bajo la numeración clásica.
[5] BOCHENSJI, I.M. *Anciant formal logic* Ed. North- Holland Publishing, Amsterdam (1968), p.20
[6] Cfr. LUKASIEVICZ, J. Op. cit.
[7] ROSS, D. *Aristotle* Ed. U.P. Inglaterra (1971), p. 21
[8] Idem.

necesariamente otro. Pero, ¿a qué tipo de enunciados nos referimos y qué significa 'necesariamente' en este contexto?

Aristóteles definió a los enunciado como "enunciados del habla, donde algunas de sus partes tienen significado aisladamente, como expresiones, no necesariamente como afirmaciones".[9] Así por ejemplo, la expresión:

'¿Estudia usted lógica?'

es un enunciado que estrictamente no afirma ni niega nada, pero es una expresión de nuestro lenguaje como significado. Una pregunta, una orden o un ruego son enunciados de este tipo. Una clase particular de enunciados son aquellos que hacen afirmaciones (o negaciones) por lo cual pueden ser verdaderos o falsos. El estudio de la lógica clásica[10] trabaja con esta clase particular de enunciados a los cuales Aristóteles denomino *proposiciones*: "una proposición es una forma de enunciado que afirma o niega algo de algo, pudiendo ser esta universal o particular".[11] Aristóteles considero cuatro tipos generales de preposiciones:

1) Universales afirmativas: aquellos que tienen la forma "Todo…"
2) Universales negativas: "Ninguno…"
3) Particular afirmativa: "Algún…"
4) Particular negativa: "Algún… no…"

[9] ARISTOTELES *De Interpreatatione*, i, 4, 26 en ACKRIL, J.L. A new Aristotele Reader, Oxford, 1987.
[10] Y con ello no sólo abarcamos la lógica aristotélica, sino también toda la lógica bivalente (con únicamente dos valores de verdad).
[11] ARISTOTELES *Prior Analytics* C.i, l, 15 en ACKRIL, J, L. Op. Cit.

Los puntos suspensivos deben ser sustituidos por una afirmación que pueda determinarse como verdadera o falsa, como por ejemplo "… hombre es blanco".

Los lógicos medievales, posteriormente, dieron el nombre de A, E, I, O, respectivamente a cada forma. Pero fue el mismo Aristóteles quien primero utilizo simbolos (en este caso letras mayúsculas), en lugar de contenidos concretos como 'ser hombre' o 'ser blanco'. Así pudo hablar de las relaciones entre estos tipos de preposiciones pues, como se apreciará fácilmente, lo importante de una preposición para la lógica no es su contenido, sino su forma. En nuestro ejemplo:

A: Todo hombre es blanco, es de la forma	: Todo A es B
E: Ningún hombre es blanco	: Ningún A es B
I: Algún hombre es blanco	: Algún A es B
O: Algún hombre no es blanco	: Algún A no es B

La forma o estructura más importante de la lógica aristotélica es la del silogismo. Comúnmente se considera al silogismo como una forma de inferencia compuesta por dos preposiciones como premisas y una tercera como conclusión. Ahora podemos definir una inferencia correcta como aquel razonamiento donde es imposible que se tengan premisas verdaderas y conclusión falsa. En esto estriba la necesidad lógica.

Sin embargo, siguiendo a Lukasiewicz, señalemos que el conocido ejemplo de la forma:

a)

(1) Todos los hombres son mortales

(2) Sócrates es hombre.

por consiguiente

(3) Sócrates es mortal.

difiere en dos puntos lógicamente importantes de un verdadero silogismo aristotélico.[12] En primer lugar, Aristóteles no introduce en su sistema ni términos ni premisas singulares, por lo que (2) y (3) no cumplen esta condición. La segunda diferencia es que "ningún silogismo es formulado por Aristóteles primariamente como una inferencia, sino que todos son implicaciones que tienen la conjunción de las premisas como antecedentes y la conclusión como consecuente",[13] Así tendríamos:

b)

(1) Si todos los hombres son mortales

(1) y todos los griegos son hombres,

(2) entonces todos los griegos son mortales.

Este ejemplo moderno de silogismo aristotélico no se encuentra en ningún texto del *Organón*. Con el fin de obtener un silogismo dentro de la esfera de la lógica pura, debemos eliminar lo que pude ser llamado su 'contenido concreto'. Preservando sólo su forma y utilizando variables en sustitución del contenido concreto obtendríamos:

c)

(1) Si A pertenece a B.

[12] LUKASIEWICZ, J. Op. Cit.
[13] Idem, p.20

(2) y C pertenece a A,

(3) entonces C pertenece a B.

Éste es uno de lo teoremas lógicos descubiertos por Aristóteles, pero aun difiere del genuino uso que él hizo de los símbolos y sus relaciones, ya que Aristóteles empleo con más frecuencia la expresión ‘es predicado de todo’ en lugar de ‘pertenece a’. Así, en los *Primeros Analíticos*, obra en la que se exponen las principales tesis de la silogística aristotélica, se encuentra la siguiente forma o figura llamada por los medievales ‘*Barbara*’:

d)

(1) Si A es predicado de todo B

(2) y C es predicado de todo A,

(3) entonces C es predicado de todo B.[14]

A la forma lógica del silogismo pertenecen 4 figuras con 16 posibles combinaciones entre las premisas; 24 casos de razonamiento válido, 48 casos de conclusión equivalente y 178 de conclusión no equivalente; 256 casos posibles en total,[15] los cuales mantuvieron ocupados a los lógicos medievales por siglos. Y es que la validez de las 24 ‘recetas’ se impone con tal fuerza al intelecto que, sin importar por qué se sustituya a las variables, la implicación que representa el argumento silogístico sigue siendo *formalmente* verdadera, donde ‘formalmente’ enfatiza la necesidad lógica independiente del contenido empírico.

[14] ARISTOTELES, *Prior Analitics*., i, 4, 26ª-1
[15] BASSOLS B., N. *¿Es posible una lógica objetiva? Diálogo entre autómatas (Rectificaciones históricas)* Ed. Independiente, México (1993), p.56

Por todo lo anterior, el *Organón* es con todo rigor, el primer antecedente de los tratados de lógica formal y el primer texto en utilizar símbolos como variables para representar algunas leyes de la inferencia. Tal abstracción ---la abstracción simbólica--- es una de las características más importantes y elementales que tienen en común la lógica simbólica y la matemática.

1.2 Euclides y el método axiomático

En matemáticas no se acepta la verdad de un enunciado hasta que ese enunciado haya sido probado, esto es, inferido (deducido) de otros enunciados cuya verdad ya se tenga establecida previamente. Un enunciado matemático que puede ser probado es actualmente llamado 'teorema'. Así, un teorema es siempre probado a partir de otros teoremas ya admitidos. Estos teoremas, sin embargo, debieron ser a su vez probados previamente, esto es, deducidos de teoremas anteriores. Para evitar un regreso al infinito o un argumento circular, sería necesario aceptar algunos enunciados básicos como verdaderos sin una prueba o demostración. Estos enunciados, que sirven como puntos de inicio en la construcción de un sistema matemático, o lógico matemático, son actualmente conocidos como axiomas.

Si consideramos a las teorías como conjuntos de enunciados, una teoría **T** es *axiomatizable* si existe un subconjunto **A** de enunciados en **T**, a partir del cual son deducibles todos los demás enunciados verdaderos del sistema. Una parte importante de la lógica matemática comprende el estudio de sistemas axiomáticos, sin contenido empírico.

Los griegos estaban convencidos de que el conocimiento matemático debería estar libre de todo contenido empírico. Ellos aceptaron la consecuencia de esta creencia e intentaron construir una teoría de la geometría en el sentido arriba descrito. Al sistema de proposiciones matemáticas basado en ciertos postulados, axiomas y definiciones le dieron el nombre de *Elementos*, y es uno de los primeros antecedentes de la aplicación del método axiomático empleado en la actual lógica matemática.

De acuerdo con Procolo (410-485 a. C.), un comprendió de Elementos fue reunido por Hipócrates cerca de cien años antes de Euclides.[16] Después de él, muchos griegos escribieron sistemas similares. Sin embargo, el más antiguo texto de *Elementos*, cuyo contenido ha llegado hasta nuestros días, es el llamado por la tradición *Los Elementos de Euclides*. Lo poco que se sabe de la vida de Euclides es gracias al siguiente párrafo del comentador griego Procolo:

"No mucho más joven que Hermotinus de Colofón y Filipo de Medma es Euclides, quien reunió a los *Elementos*, recogiendo muchos de los teoremas de Eudoxo y perfeccionando muchos de Teeteto, incluso, dando contundentes demostraciones de cosas que apenas fueron débilmente probadas por sus antecesores. Este hombre vivió en el tiempo del primer Tolomeo. Arquímides, quien vino inmediatamente después del primero, hace ya mención de Euclides diciendo que Tolomeo en una ocasión le pregunto 'si había en geometría algún camino más corto que aquél expuesto en los Elementos', a lo cual Euclides respondió: 'no hay caminos reales en geometría'. Él es más joven que los discípulos de Platón, pero

[16] MORRIS, K. *Msthematical Thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, (1972)

más viejo que Eratóstenes y Arquimedes de los cuales, se dice, fue contemporáneo.[17]

Por la cita anterior se presupone que vivió alrededor del año 300 a. C. en Alejandría, actualmente Egipto. Ningún descubrimiento importante se le atribuye hasta ahora, pero del comentario de su trabajo de compilación ---que es en realidad lo que nos ha llegado--- se desprende que era un excelente maestro.

No existe ningún manuscrito original en Euclides mismo. El texto conocido como los *Elementos de Euclides* es el producto de numerosas reconstrucciones, comentarios y correcciones a través de la historia. La gran mayoría de las traducciones provienen originalmente de un manuscrito griego de finales del siglo IV d. C., llamado "El manuscrito de Theón de Alejandría", el cual fue encontrado, copiado y analizado por más de catorce siglos, hasta que en 1482 se elabora la primera versión impresa. Desde entonces, los *Elementos* se han convertido en la base de la educación matemática occidental. Más de mil quinientas ediciones en diferentes idiomas son conocidas y es, probablemente después de la *Biblia* y el *Corán*, el libro más conocido en la historia de la humanidad.

1.2.1 La estructura axiomática de los Elementos

Dos son las fuentes intelectuales del sistema axiomático de los *Elementos*: Platón y Aristóteles. De acuerdo con Platón, el conocimiento matemático puede ser adquirido solamente por razonamiento, por ello, ninguna propiedad matemática debería ser mostrada en figuras o formas para dar

[17] Procolo, sobre Euclides I p. 68 citado por THOMAS HATH, S. *A History of Greek Matematicis* Vol. I From Thales to Euclid Dover Publication, N.Y.., 1981, p.354.

prueba de ella. [18] Bajo esta perspectiva, una prueba de propiedad geométrica debería deducirse usando tan sólo la razón.

Por otra parte, de acuerdo con Aristóteles, [19] en la construcción de cualquier ciencia deductiva debemos comenzar con dos clases de enunciados cuya verdad sea aceptada sin prueba:

1) Nociones comunes: verdades generales para toda ciencia deductiva.
2) Nociones especiales: verdades particulares de cada ciencia.

Aristóteles literalmente llamó a las nociones especiales *axiomas*: ‘cosa digna de tomarse en cuenta’; actualmente el término se usa sin hacer diferencia entre nociones comunes o especiales.

Finalmente, Aristóteles propone que en esta clase de sistema o ciencia, todo concepto nuevo debe ser definido claramente y postulada su existencia, así como todo teorema nuevo, probado a partir de 1, 2 o las definiciones. Mostraremos que los *Elementos* trataron de construir un sistema geométrico de acuerdo con estas prescripciones, que son la base de lo que hoy llamamos método axiomático.

Los *Elementos* consisten en trece libros. En los primeros seis se discute la geometría plana; en los siguientes tres libros se desarrolla una teoría de números; en el libro diez se discuten raíces irracionales; finalmente, los libros del XI al XIII tratan sobre geometría de sólidos.[20] Para ejemplificar el método utilizado a lo largo de los trece libros, nos concentraremos en la primer parte del primer libro.

---

[18] Cfr. PLATON, *Teeteto* ed. Gredo, España (1978)
[19] Cfr, ARISTOTELES *An Post.* I,2, 72a-73b
[20] Una buena exposición de los trece libros está en THOMAS HEATH *A History of Greek Mathematics*, Vol. I, Dover Publications, N.Y.., (1981), Cap. XI

El Libro Primero comienza con una lista de 23 definiciones, siendo algunas de ellas:

D. I Punto es aquello que no tiene partes.

D. II Línea es longitud sin latitud.

D. III Extremos de línea son puntos.

D.IV Línea recta es aquella que descansa según igualdad sobre sus puntos.

D. V Superficie es lo que tiene longitud y latitud.

D. VI Extremos de superficie son líneas.

D.VII Superficie plana es aquella que descansa según igualdad sobre sus rectas

D.XV Círculo es figura plana circundada por una sola línea que se llama periferia, respecto de la cual, las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocados en el centro de la figura, son iguales entre sí.

D. XXIII Son rectas paralelas las líneas rectas que, estando en el mismo plano y prolongadas al infinito por ambas partes, en ningún punto coinciden.[21]

Estrictamente hablando, las definiciones dadas arriba no son claras ni precisas, pero pueden ser consideradas como las definiciones intuitivas de conceptos geométricos fundamentales como: punto, línea, recta, superficie, plano, círculo, etc.

La primera definición describe lo que debe ser entendido como un "punto", el cual no debe ser concebido como un "pequeño punto" físico, sino como algo que no tiene dimensiones y por lo cual es tan sólo producto de la razón. Lo mismo se puede decir de la línea, la superficie y el plano.

---

[21] EUCLIDES *Elementos de Geometría* Tom. I-III trad. García Bacca, J.D., UNAM (1992) pp. 1-11

La última definición nos dice la característica fundamental de dos rectas paralelas: no existe un punto de intersección entre ambas.

Dadas las definiciones, los *Elementos* se basan en cinco postulados o nociones especiales y nueve nociones comunes. Los cinco postulados o axiomas son:

> Pe.I Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
> Pe.II Prolongar por continuidad en línea recta un segmento de recta
>
> Pe.III Para cada centro y radio, describir un círculo
>
> Pc.IV Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
>
> Pi.V Que si una recta incidente sobre dos rectas hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito se intersectarán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos.[22]

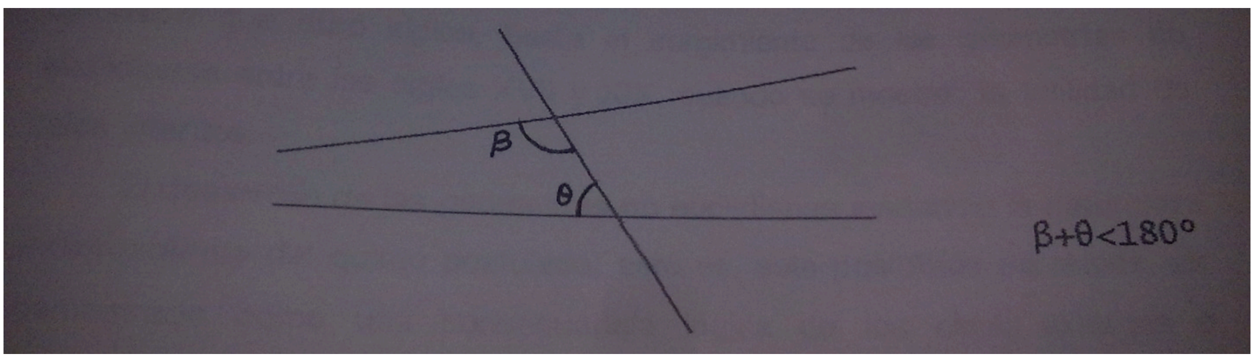
El postulado Pe.I dice que entre dos puntos cualesquiera existe una única línea recta que los une. El postulado Pe.II significa que un segmento de recta puede ser siempre extendido produciéndose un nuevo segmento de recta y así sucesivamente. Quiza pueda resumirse el enunciado diciendo: "la recta es *potencialmente* infinita". El postulado Pe.III afirma que dado cualquier punto y cualquier distancia a partir de él, existe un círculo con ese punto como centro y esa distancia como radio.

El postulado Pc.IV nos pide que asumamos que todos los ángulos rectos son congruentes, lo cual parecería obvio, pero la introducción del postulado dentro del sistema obedece al grado de abstracción al que se pretendió alcanzar en las demostraciones de los *Elementos*, donde se

[22] Idem., p. 11 Los subíndices e,c,i serán explicados más adelante.

procuro no dar por seriado nada que no esté explícitamente en sus definiciones, axiomas o postulados.

El postulado Pi.V difiere sustancialmente de los cuatro anteriores. El quinto postulado pide que, bajo ciertas hipotéticas, dos rectas tengan un punto en común; específicamente, dice que dos rectas prolongadas indefinidamente se tocarán en algún punto, si al trazar una tercera entre ambas, la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor a la suma de dos rectos (180°) y se tocaran del lado en que esto último ocurra.[23]



Este postulado, también conocido como *el postulado de las paralelas*, es equivalente a la siguiente afirmación: 'dada una línea recta y un punto fuera de ella, se puede trazar siempre una línea paralela a la recta dada que pase por el punto, siendo esta nueva recta 'única'. No se hace uso de él en los primeros 28 teoremas del libro I y aún parece evitarse cuidadosamente su uso en el resto de los trece libros. La razón es que este postulado no es tan evidente como los demás. No siquiera lo fue para los

---

[23] Sobre la historia de los intentos realizados por geómetras para demostrar éste postulado ver las dos obras de Bonola *Geometrías no euclideanas* ed. Calpe (1923)

matemáticos griegos, pues se sabe que ya Procolo argumentaba a favor de su eliminación.[24]

Muchos intentos fueron hechos a partir de entonces tratando de probar el "postulado de las paralelas". La principal línea de investigación consistía en intentar probar que el quinto postulado era un teorema, esto es, que era posible derivarlo a partir de los demás postulados y axiomas. Se creía que, si la afirmación hecha por el postulado era negada, de ser consecuencia lógica de los demás postulados, se llegaría a una contradicción. Nunca se llegó a tal resultado. Dicho postulado motivo una discusión que duró siglos, hasta el surgimiento de las geometrías no euclidianas entre los siglos XVII y XIX, cuando se mostró la futilidad de tales intentos.

El desarrollo de las geometrías no euclidianas evidenció la naturaleza *independiente* del quinto postulado; esto es, este postulado no puede ser demostrado como una consecuencia lógica de los otros axiomas o teoremas en el sistema[25] euclidiano, e incluso puede ser sustituido por otro que lo niegue sin que por ello se introduzcan contradicciones al sistema geométrico; aunque como consecuencia ya no sea un 'espacio euclideano' del que se esté dando cuenta. Por ejemplo, en la geometría propuesta por el matemático Berhard Riemann (1867), el postulado de las paralelas es sustituido por la afirmación de que por un punto dado exterior a una línea recta, no puede trazarse ninguna línea paralela a ella. Un modelo[26] de la geometría riemanniana puede ser representado mediante un modelo

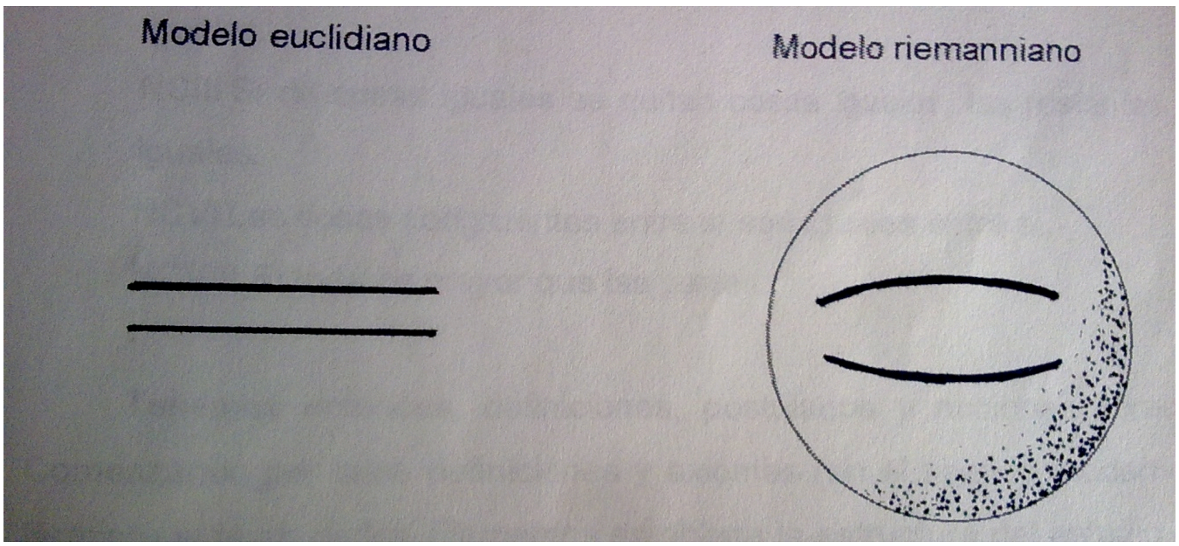
---

[24] Cfr. *The Axiomatic Method* por WILDER, R.L. en NEWMAN, J.R. (comp) *The world of Mathematics* Vol. 3 Ed. Simon and Schuster, N.Y. 1956, p. 1647-1668

[25] Caso similar (pero no idéntico) a los enunciados indemostrables en sistemas axiomáticos recursivos, de los que daremos cuenta más adelante, pero de los que indudablemente el problema del "postulado de las paralelas" es un antecedente.

[26] Un modelo es, de modo intuitivo, una interpretación de un sistema de tal modo que cada axioma y teorema se convierta en una afirmación verdadera respecto del modelo.

euclidiano, donde el plano riemaniano se representa en la superficie de una esfera euclidiana. Los puntos en el plano representan puntos en una esfera, las líneas rectas círculos máximos y una porción del plano riemanniano como una porción de la esfera limitada por segmentos de arcos de círculos máximos. Dos segmentos de línea recta, en el plano riemanniano, son dos segmentos de círculos máximos en la esfera euclidiana y si se prolongan indefinidamente, se corta efectivamente, contradiciendo así el quinto postulado de los *Elementos* (Fig. 2).



Por este tipo de sustitución se obtienen los sistemas geométricos no euclidianos creados por Bolyai, Lobchevski, Gauss y Riemann, entre otros. De lo anterior, podemos clasificar a los postulados de *Elementos* en: Pe: postulados de existencia, en donde la existencia de ciertos conceptos fundamentales es asumida, tales como punto, línea, etc,; Pc: postulados de cualidad, en los cuales es aceptado que las figuras geométricas tienen ciertas propiedades específicas, como por ejemplo la igualdad; y Pi: postulado de independencia, el cual no es deducible de los anteriores axiomas y es posible de ser sustituido por otro que lo niegue sin que de ello se siga una contradicción en el sistema.

Finalmente las IX Nociones Comunes, o postulados generales pueden ser resumidas en cinco:

NCI Cosas iguales a una y la misma son iguales entre si

NCII Si cosas iguales se añaden a cosas iguales, las totales son iguales

NCIII Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, las restantes son iguales.

NCVI Las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí.

NCVIII El todo es mayor que las partes.[27]

Tenemos entonces, definiciones, postulados y nociones comunes. Comenzando por tales definiciones y axiomas (en el sentido moderno del término) el texto de los *Elementos* establece la estructura del estudio de la geometría, avanzando con el método ahora llamado axiomático, donde:

1) Cada nuevo enunciado debe ser probado a partir de otro(s) ya probado(s) o de los axiomas
2) Cada noción nueva debe ser definida, más aún, su existencia debe ser probada por el conjunto de definiciones y axiomas.

[27] EUCLIDES, Op.cit. p. 11-13

El libro I contiene 48 proposiciones. En ellas se trata con triángulos, paralelas y áreas. El libro concluye con el teorema de Pitágoras. Ahora analizaremos la primera proposición:

Proposición 1: “Dada una recta delimitada, construir sobre ella un triángulo equilátero”

El enunciado debe ser leído: *dado un segmento de recta cual quiera siempre es posible construir sobre él un triángulo equilátero.*

1.1 Sea AB la recta delimitada. (Hip.)

1.2 Hay que construir sobre la recta AB
un triangulo equilátero. (Por Dem.)

Demostración:

1.3 Con centro en A y con el radio AB
descríbase el círculo C. (Pe.III)

1.4 Y de nuevo con centro en B y con radio BA
descríbase el círculo D. (Pe.III)

1.5 Sea G uno de los puntos donde se cortan
uno a otro los círculos C y D, trácense hasta
los puntos A, B las rectas GA y GB.

1.6 Y como el punto A es centro del círculo GB,
la recta AG es igual a la AB (D.XV)

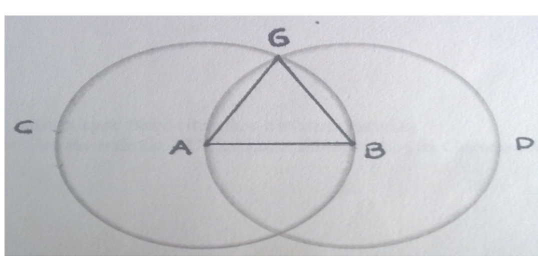
1.7 Y de igual forma, puesto que B es centro
del círculo GA, la recta BG es igual a la BA (D.XV)

1.8 Por tanto cada una de las rectas
GA, AB, BG son iguales (NC.I entre 1.6 y 1.7)

1.9 Según esto, entonces, el triángulo ABG es equilátero y está además
construido sobre la recta delimitada dada AB. Que es lo que se
quería probar en 1.2.

Los números y letras entre paréntesis justifican lógicamente cada uno de los pasos del razonamiento, donde (Hip.) significa hipótesis; (Por Dem.) por demostrar; (Pe) postulado de existencia; (D…) definición; finalmente (NC) noción común. Fueron agregados aquí para facilitar la comprensión de la demostración.

El texto original al parecer tampoco contenía gráficos, pero éstos se le agregaron con fines pedagógicos en las distintas traducciones, copias y ediciones. En este caso la gráfica sería (Fig. 3):



Analicemos detenidamente la prueba arriba mostrada. Los pasos 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 claramente se siguen de los axiomas y definiciones del sistema. Sin embargo 1.5 no es lógicamente conclusivo. Solamente por referencia a la figura, y bajo la suposición de continuidad[28] de los trazos, uno puede asegurar que el enunciado es verdadero, es decir, que existe un punto de intersección G, ya que ni de los axiomas ni de las definiciones se sigue que exista un punto de intersección entre dos círculos.

El caso anterior muestra que en los *Elementos* existen fallas en la identificación de presupuestos que se emplean en la demostración, lo cual no demerita en nada la importancia que tal obra ha tenido en la cultura occidental, pues mucho de lo que se ha desarrollado en el siglo XX no es más que una recuperación y desarrollo de temas que ya existían en la propuesta matemática esbozada en los *Elementos.*

La primera construcción puramente deductiva de un sistema axiomático en geometría no fue lograda sino hasta dos mil años después de Euclides. El creador de ese sistema fue el matemático alemán David Hilbert (1862-1944) quien desde 1890 fue gradualmente corrigiendo su sistema y cuya primer edición, en 1899, tomó como título *Grundlangen der Geometrie*,[29] en él mostro el papel preponderante que los sistemas formales axiomatizados podían tener en la fundamentación matemática de las teorías. Pero la idea de un sistema ordenado de verdades, deducibles a partir de ciertas premisas básicas, tiene en los *Elementos* la fuente original de inspiración.

[28] Que no existen espacios en los trazos que delimitan las circunferencias
[29] HILBERT, D. *Fundamentos de Geometría* en EUCLIDES *Elementos de Geometría* Tom. I-III trad. García Bacca, J.D., UNAM (1992)

1.3 Leibniz, el lenguaje como un cálculo matemático.

Los trabajos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716),[30] en torno a la construcción de un lenguaje universal ideal capaz de ser comprendido sin ambigüedad y de poderse manejar como un cálculo matemático, son uno de los antecedente más directos de la moderna lógica simbólica y un paso importante en el estudio de los sistemas lógico formales.

De modo general, formalizar un lenguaje o decir que un sistema de signos es completamente formal, significa que existe un procedimiento de manipulación de sus componentes, de tal forma que esta manipulación pueda ser llevada a cabo "mecánicamente". Con ello queremos decir: puede ser dada explícitamente, paso a paso. No todos los sistemas axiomáticos son sistemas formales, ni todos los sistemas formales son sistemas axiomatizados. Como hemos dicho, un sistema **T** es axiomatizable si y sólo si, existe un subconjunto de enunciados **A** en **T** tales que a partir de **A** son deducibles, bajo explicitas reglas de derivación, todos los demás teoremas de **T**. En particular, un sistema formal-axiomatizado es aquel en el que no sólo cada signo y fórmula bien formada, sino también cada derivación (prueba) de una nueva fórmula (teorema), puede ser mecánicamente revisado. Otra forma de decirlo es que exista un procedimiento "computable"[31] para saber si un símbolo dado es un signo básico del lenguaje, una fórmula, un axioma o un teorema.

---

[30] LOEMKER, L.E. *Introducction: Leibniz as philosopher*, en LEIBNIZ, G.W. *Philosophical Papers and Letters* Selección, traducción y edición de LOEMKER, L.E., 2ª edición, Reidel Publishing, U.S.A., 1976.
[31] Es decir que exista un procedimiento tan claro y explicito que pueda ser reelaborado como un programa y llevado a cabo por una maquina

El *Organón* Aristotélico no es ni un sistema axiomático ni un sistema formal. Los *Elementos* son cercanos a una axiomatización, sin embargo no especifican las reglas que se pueden seguir para pasar de una proposición a otra.

El primer intento de construcción de un sistema formal para la lógica, que intento dar cuenta del sistema axiomático de los *Elementos*, fue hecho por Leibniz en 1666. Fue el primero de varios intentos fallidos, pero que representan el inicio del programa de la lógica-formal.[32] En la base de la reflexión filosófica de Leibniz está siempre presente la posibilidad de resolver toda disputa intelectual calculando, a condición únicamente de encontrar primero el lenguaje formal adecuado.

Leibniz publicó en vida dos libros extenso sobre filosofía: *Nouveaux essais sur léntendement humain* y *Théodicée*. Otros importantes escritos filosóficos son: *Système nouveau de la nature, Monadologie* y *Discurs de Métaphysique*, estos dos últimos publicados póstumamente. En ellos se expone un sistema filosófico racionalista que concibe al universo como un todo armonico e inteligible, poblado por unidades simples llamadas *mónadas*, que se encuentran en perfecta sincronía por una voluntad divina. Dicha doctrina metafísica tuvo, como veremos, una estrecha relación con el desarrollo de sus ideas en torno al estudio de la lógica.

Admirador desde temprana edad de la lógica aristotélica, Leibniz concibió a los catorce años la idea de que todos los enunciados verdaderos podrían ser dispuestos en un ordenado encadenamiento silogístico, de tal modo que constituyeran un sistema deductivo, como el elaborado por Euclides para la geometría.[33] Ya estando en la universidad de Leipzig,

---

[32] Lógica simbólica, o lógica matemática
[33] Idem, Vol.2 p.23-26

estudio a profundidad a Suárez, Campanella, Comenius, Llull, Bacon, Gassend, Descartes, Hobbes, Kepler y Galileo. Fue discípulo por esa época del matemático Erhard Weigel y de Thomasius.

En 1666, a los 19 años de edad, escribe *Ars Combinatoria* como tesis doctoral en Leipzig, texto que representa su primer intento serio de construcción de un lenguaje 'matematizado'. Entre 1666 y 1690 Leibniz escribió más de veinte textos en torno a la construcción de un lenguaje lógico matematizado sin alcanzar nunca resultados definitivos, por lo que a la hora de su muerte era más reconocido como genio por haber inventado, al mismo tiempo que Newton y de manera totalmente independiente, el cálculo infinitesimal.

Pasaron cerca de doscientos años para que la importancia de los trabajos de Leibniz, en torno a la lógica, fuera reconocida. Una razón fue casi todos sus escritos originales están en latín, otro motivo es que en vida público muy pocas cosas y no hubo un catálogo confiable de su obra lógica, sino hasta los años de 1863 a 1875, cuando fue editada en 14 volúmenes por C.I. Gerhard.[34] La compilación, sin embargo, fue incompleta.

En 1895 Eduard Bodemann publicó una serie de fragmentos inéditos[35] en torno a varios temas, y lo mismo hizo Louis Couturart en 1903.[36] Una compilación completa de la obra lógica de Leibniz aún no existe, pero a finales del siglo XIX, los esfuerzo por estudiar sus trabajos

---

[34] GERHARD, C.I. *Leibniz, Mathematischen Schriften*, 7 vols., Berlín, 1863, y *Philosophischen Schriften*, 7 vols., Berlin, 1875.
[35] BODEMAAN, E. Die Leibniz-Hannschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover, 1895; reimpresión Hildesheim, 1966.
[36] COUTURAT, L. *Oposcules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la bibliothèque royale de hanovre*. Paris, 1903; reimpresión Hildesheim, 1961.

en lógica se han vigorizado.[37] Desde entonces, la importancia y trascendencia de sus escritos está en revisión, siendo las interpretaciones más prolíficas las del propio Couturart, Bertand Russell,[38] Nicholas Resher,[39] Parkinson y más recientemente el libro de Hidé Ishiguro.[40] La influencia d la obra de lógica de Leibniz incluye, entre otros, a Frege, Peano, Carnap, Husserl, Russell, Wittgenstein y Gödel, siendo sin duda una de las principales influencias filosóficas del siglo XX.

1.3.1 Ars Combinatoria

Las principales influencias y antecedentes del programa leibniziano de construcción de un lenguaje universal, son los trabajos de Ramón Llull,[41] Athanasius Kircher[42] y los lenguajes simbólicos de George Dalgarno[43] y John Wilkins.[44] Como ellos, Leibniz estaba convencido de que para pensar era necesario algún tipo de lenguaje representable. De hecho, la mayoría de nuestros pensamientos son representables en palabras pero, incluso cuando éstas no son empleadas, son sustituidas por algún otro tipo de signo, símbolo o diagrama.

Es una carta a Tchirnhaus Leibniz escribió: “Nadie debería temer que la contemplación (estudio) de los signos nos alejara de las cosas mismas; por el contrario, ellos nos llevan al interior de éstas. Frecuentemente

---

[37] Una selección de 16 textos lógicos cronológicamente ordenados se encuentra en LEIBNIZ, G.W. *Logical Papers: A selecction*. Editado y traducido por PARKINSON, G.H.R., Oxford, 1966

[38] RUSSELL, B. *A Critical Expotition of the Philosophy of Leibniz*, Londres, 1900.

[39] RESHER, N. *The Philosophy of Leibniz*. Englewood Cliff, N.J. 1967.

[40] ISHIGURO, H., *Leibniz´s philosophy of logic and language*, 2ª ed. Cambridge University Press, N.Y. 1990.

[41] LLULL, R. *Ars Magna et ultima*, (1617)

[42] KIRCHER, A. *Poligrraphia nova et universalis, ex combinatoria arte detecta,* (1663)

[43] DALGARNO, G. *Ars signorum, vulgo carácter universalis et lingua philosophica*, (1661)

[44] WILKINS, J. *Mercury, or the secret and swift Messenger: shewing how a Man may whit Privacy and Spead communicate his Thoughts to a Friend at Distance*, (1641)

tenemos confusiones conceptuales, porque hoy día nuestros signos que los representan están mal dispuestos, pero entonces, con la ayuda de signos adecuados, fácilmente podríamos obtener los más distintos conceptos compuestos y tener a la mano un *procedimiento mecánico de reflexión*, de tal modo que con facilidad podríamos esclarecer cualquier idea en la cual intervengan conceptos".[45] Como podemos apreciar, Leibniz notó la estrecha relación que existe entre el lenguaje, los signos y la demostración.

El principio fundamental que guiará los intentos leibnizianos de formalización es que los signos y reglas de formación que empleamos en un lenguaje deben reflejar, de alguna manera, la estructura del mundo.

Estrechamente relacionado con el tema y en tanto científico y estudioso de la lógica, Leibniz sostenía que todos los juicios que expresan conocimiento (sean éstos singulares o universales, necesarios o contingentes, hipotéticos o categóricos) tienen la forma gramatical Sujeto-Predicado, donde *predicatum inest subiecto*[46] y que por consiguiente, son todos reducibles a conceptos.[47] Entre éstos habría ciertos conceptos más simples o elementales a partir de los cuales se construirían los restantes. Leibniz tenía la idea de que se podía construir algo así como 'el alfabeto' de los conceptos y proposiciones podrían ser combinaciones demostrables, bajo simples reglas de formación.[48] No se necesitaría, entonces, tener diferentes signos para expresar cada pensamiento distinto, bastaría con ver cuál es la combinación más

---

[45] Citado por ISHIGURO, H. op. cit., p.44 He traducido en cursivas: "mechanical thread of meditation" y he colocado entre paréntesis la palabra "estudio" por analogía a "contemplación" en un sentido filosófico.
[46] El predicado está contenido en el sujeto.
[47] Las dificultades de esta postura se verán más adelante.
[48] LEIBNIZ, G.W. *Ars combinatoria* en PARKINSON Op. cit., p.11.

apropiada para expresarlo a partir de los signos-concepto más simples. Una ventaja aún mayor es que se tendría entonces un procedimiento ---casi mecánico--- para revisar la validez de un argumento correcto, el esclarecimiento de un concepto o la interpretación exacta de una ley.

La cuestión a la que se enfrentó el autor de *Ars Combinatoria* era la de cómo construir un lenguaje formal de signos, cuya sintaxis fuese tan clara que cada fórmula bien formada en ese lenguaje expresase un pensamiento posible y cada fórmula demostrada, un pensamiento verdadero. Con tales objetivos, no sólo era necesario mostrar que toda proposición verdadera se deducía de otra u otras ya probadas, sino mostrar cuáles eran los componentes o conceptos más elementales de ese sistema. Como se formaban nuevos conceptos y cómo toda relación lógica podría ser reducida a la forma gramatical sujeto-predicado.

En *Ars Combinatoria* Leibniz comienza por definir la composición (complexión)[49] en general, como la combinación de partes que forman un todo, la cual es siempre posible descomponer en sus constituyentes más elementales.[50] Continúa dando una serie de definiciones sobre conceptos como 'variación', 'variabilidad', 'situación', y 'exponente de complexión', donde explicita las formas posibles de combinación entre las partes de un todo, dando prioridad al papel que juega la complexión en la composición de conceptos. Inmediatamente, explica la forma de obtener los *exponentes de complexión*,[51] los cuales, son números enteros positivos que indican la cantidad de términos primitivos empleados en una posible combinación o *complexión.*

[49] 'Complexions' en la traducción de Parkinson (puede ser traducido como constitución o composición)
[50] Idem, p.12
[51] Idem

Por ejemplo, sea *L* el lenguaje formado por el conjunto {A,B,C} como términos primitivos, y sea dada la relación de *complexión* [A,B] entonces su *exponente de complexión* será 2; sea dada la *complexión* [B,C,A] entonces su exponente será 3, y así sucesivamente.[52]

A continuación afirma que "todas las cosas que existen o pueden ser pensadas están constituidas por partes […] por lo que, con la ayuda de la *complexión* no sólo la especie de las cosas, sino también sus atributos, son descubiertos. Así, casi la totalidad de la lógica puede ser reducida al estudio de los conceptos primitivos y sus complexiones. En pocas palabras: ambas, la teoría de la división y la teoría de las preposiciones, están basadas en la *complexión*.[53] Y más adelante: "toda preposición verdadera está compuesta de sujeto y predicado; todas las proposiciones por ellos son combinaciones con 2 como *exponente de complexión*. Es, entonces, asunto de la lógica (en tanto concierne a las preposiciones) resolver el problema de: I. Dado un sujeto, encontrar sus predicados 2. Dado un predicado, encontrar su sujeto. En cada caso esto cubre tanto las proposiciones afirmativas como a las negativas […]".[54]

Finalmente da una lista de lo que podríamos definir como un *procedimiento de decisión* en un lenguaje *L* con términos primitivos y relaciones de complexión. Leibniz especifica:

1) Dado un término cualquiera, descomponerlo en sus partes constitutivas. Las partes a su vez deben ser definidas, analizadas y descompuestas también, hasta llegar a sus conceptos más

---

[52] Hemos utilizado los símbolos {,} para representar conjuntos y los símbolos [,] para representar relaciones.
[53] Idem, p.3
[54] Idem

simples. Continuar hasta encontrar aquellos conceptos que no puedan ser descompuestos en otros más elementales.

2) Poner estos primeros términos en una clase y asignarles un cierto signo, preferentemente un número.

3) Considerar en esa clase no sólo cosas, sino también modos o relaciones.

4) Ya que todos los términos derivados son posibles combinaciones de los primeros términos, habrá tantas posibles clases como exponentes de complexión permitan los términos. Los términos derivados que estén formados por igual número de primeros términos deberán estar en la misma clase y ser numerados.

5) Términos derivados de una complexión con exponente 2, sólo pueden ser descritos escribiendo los dos números correspondiente a los primeros términos que los conforman.

6) Términos derivados con mayor exponente de complexión que 2 ---y que por lo tanto están en una clase superior--- pueden ser escritos:

a) escribiendo el listado de todos los *primeros términos* que los conforman;
b) escribiendo *primeros términos* y quebrados; donde los quebrados simplifican las relaciones de complexión ya

contempladas en clases anteriores, de tal forma que el denominador indique la clase y el numerador, el número de la complexión empleada en esa clase.

7) Una vez obtenida la lista completa de todos los primeros términos, todos los sujetos y predicados pueden ser obtenidos.[55]

Veamos un ejemplo: sea L ={A, B, C,} un lenguaje con tres *primeros términos*. Asignémosles (por regla 2) los números enteros 1, 2, 3 respectivamente. Llamemos a esta clase I.

Términos con complexión 2, podrían ser las relaciones numeradas: 1. [A,B], 2. [A,C],…que (por regla 4) estarían en la clase II y sólo se podrían expresar (por la regla 5) como: II.1.[1.2] y II.2.[1.3],…respectivamente. Un término de complexión 3 podría ser 1.[A,C,B], el cual estaría (por regla 4) en una clase III y se podría expresar de dos formas (regla 6); como III.1.[1,3,2] o como III.1.2/2.2.

Cabe señalar que la idea de enumerar las posibles expresiones con sentido de un lenguaje, como posible solución para la clara manipulación de sus partes es, sin duda alguna, revolucionaria, y tendrá su realización más elaborada 255 años más tarde, en los trabajos de Kurt Gödel sobre los límites de la lógica de primer orden. Gödel asignó, como veremos, de manera unívoca dentro de ese sistema[56] a cada signo, a cada formula y a cada prueba de una fórmula, un numero.

[55] Idem, Op. cit., p. 4-5
[56] Más los axiones de Peano. Cfr. Cap III

Por otra parte, las reglas dadas arriba contienen, de manera germinal, la idea de explicitar un procedimiento de definición que opere sobre las expresiones de un lenguaje formal, de tal modo que fórmulas complejas se definan en términos de fórmulas más simples.

Continuamos ahora, transcribiendo una pequeña parte de *Ars Combinatoria* donde Leibniz trata de mostrar las ventajas y posibilidades de su sistema en el estudio de los conceptos geométricos, donde *L* será ahora el lenguaje formado por una lista finita y numerada de *primeros términos* (o conceptos básicos); los números teros y quebrados positivos para definir las complexiones del mismo modo arriba descrito, los números romanos para numerar las clases; los paréntesis para definir la relación de pluralidad numérica;[57] las comillas para mostrar los conceptos compuestos; y el punto, como signo de separación (distinción) entre fórmulas.[58]

Sea entonces, la **Clase I** en donde los *primeros términos* son:

1.Punto.
2.Espacio.
3.Entre o en medio.
4.Adyacente o contiguo.
5.Disjunto o separado.
6.Extremidad o periferia.
7.Contenido (*insitum*)
8.Incluido (*inclusum*)
9.Parte.
10.Todo.
11.Mismo (a).
12.Diferente.
13.Uno.
14.Número
15.Varios
16.Distancia
17.Posible
18.Cada.
19.Dado.
20. Llegar a ser.
21.Dirección
22.Dimensión
23.Largo
24.Extensión
25.Profundo
36.Común.
27.Progresión o continuidad,

[57] La relación de pluralidad numérica es designada con el número quince entre paréntesis "(15)" si la relación es indefinida (mucho, poco, algunos, etc.) o por el número entero positivo si es determinada (2), (3), (4)…"
[58] LEIBNIZ, W. *Ars combinatoria* Op. cit. Leibniz incluye también algunos artículos griegos, que aquí no emplearemos.

(A continuación damos la fórmula dada por Leibniz para las clases superiores a **I** y en cursivas una posible interpretación)

La **Clase II**

1.- ‘Cantidad’ es 14 de 9 (15).

‘cantidad’ *es el número de varias partes.*

2. ‘Contorno’ es 6. 10.

‘contorno’ *es la periferia del todo*.

La **Clase III**

1. ‘Intervalo’ es 2.3.10.

‘Intervalo’ *es el espacio entre el todo*.

2. ‘igual’ es 11. ½.

‘Igual’ *es misma cantidad*.

3. A es ‘continuo’ de B si 9, de A es 4, y 7, en B.

A es ‘continuo’ de B *si parte de A es adyacente y contenido en B.*

La **Clase IV**

1. A es ‘más grande’ si tiene 9.2/3. De B.

A es más grande que B si tiene una parte igual a B.

2. B es ‘menor’ si es 2/3. de 9. de A.

B es menor que A si es igual a una parte de A.

3. Una ‘línea’ es 1/3. de 1(2).

Una ‘línea’ es el intervalo entre dos puntos.

4. ‘Paralela’ es 2/3. en 16.

‘Paralela’ es *a igual distancia.*

5. Una ‘figura’ es 24.8. en 18.21.
Una ‘figura’ *es algo con extensión en todas direcciones*.

La **Clase V**…[59]

Leibniz pensaba que la totalidad del pensamiento humano podía ser estudiada de esta manera, bastaba encontrar la lista finita de términos primitivos y clases, enumerarla y combinar. La lista podría ser traducida a todas las lenguas existentes y el lenguaje universal buscado seria el estudio de la composición (complexión) de conceptos.

El primer señalamiento que cabe hacer al sistema propuesto por Leibniz es que, a pesar de su aparente formalización, no se encuentra ningún principio claro de formación. En las reglas uno a siete, nada nos dice qué es una formula bien formada, ni cuál es la correcta interpretación de una nueva fórmula creada. Las interpretaciones dadas en cursivas son “posibles lecturas” de las combinaciones dadas por Leibniz, pero existe la posibilidad de otras interpretaciones sin que exista un recurso de decisión definitivo. La ambigüedad persiste.

El segundo problema es la falta de explicitación de reglas de derivación de nuevas formulas, que a pesar de sobreentenderse que son las reglas de la lógica aristotélica las que presuponía Leibniz, en un sistema formal completo no deben ser omitidas o dadas como preestablecidas.

En tercer lugar, el empleo de expresiones auxiliares como los verbos ser, tener, o algunos artículos y preposiciones, así como artículos griegos

[59] Idem, pp. 7-10. El texto incluye veinticuatro clases más.

declinados que emplea en subsiguientes definiciones, es señal de las limitaciones expresivas del sistema.

Un cuarto problema del sistema leibnizeano, y el cual permaneció constante a lo largo de todos sus siguientes intentos de crear una lógica simbólica matematizada, es el señalado por Bertrand Russell en su libro *The Philosophy of Leibniz* (1900).[60] Consiste en el intento de reducción de todo enunciado verdadero a la forma sujeto-predicado, donde el predicado está contenido en el sujeto. Russell señala acertadamente que, al hacer esta reducción, todo enunciado verdadero se transforma en analítico (universal y necesario) y por tanto, la distinción entre contingente y necesario, historia y ciencia, empiria y lógica, se borra. Que la afirmación "la casa de la esquina es verde", sea o no un enunciado verdadero, dependería que en el concepto casa estuvieran inherentemente las propiedades de ser la que está en la esquina y ser verde. Esto es evidentemente falso a menos, claro, que todo objeto en el mundo fuera una *mónada* única y aislada que contuviera necesariamente a todas sus propiedades, incluso las contingentes. Pero entonces la ciencia empírica no tendría más que hacer, pues al reducir los enunciados hipotéticos a enunciados analíticos, los científicos de las ciencias naturales sólo necesitarían estudiar las relaciones lógicas entre los conceptos para confirmar o refutar sus ideas, lo cual dista mucho de ser el caso.

Russell señala, también, que las limitaciones de tal sistema se extienden al ámbito de las relaciones puramente lógicas, donde es imposible representar toda relación como una relación sujeto-predicado. Por ejemplo, los enunciados "ahí hay tres hombres" o "*a e*stá entre *b* y *c"*

---

[60] RUSSELL, B. Op. cit.

son contraejemplos[61] que muestran la imposibilidad de reducir tales relaciones a propiedades de un individuo.[62]

Existen otros problemas prácticos y formales, en la propuesta de *Ars Combinatoria* que no analizaremos.[63] De hecho, Leibniz no explicó cómo derivar, a partir de su ejemplo, los teoremas de *Los Elementos* y el hecho de que nunca volviera a utilizarlo parece señal de que él mismo se dio cuenta de las limitaciones de su sistema. Sin embargo, sus compromisos metafísicos continuaron a lo largo de sus demás intentos, y las consecuencias de reducir todo enunciado verdadero al esquema sujeto-predicado, persistieron.

Para haber podido cumplir, al menos parcialmente, el programa de Leibniz se necesitaría: 1) contar con símbolos unívocos para todas y cada una de las nociones que hayan de tomarse como elementales o inanalizables; 2) tener una forma adecuada de representación de nociones lógicas tales como negación, conjunción, disyunción, relación condicional, universalidad y existencia; 3) contar con una forma adecuada de representación de nociones como proposición y predicación; 4) dar reglas claras de formación de fórmulas y derivación de teoremas en el sistema.

La importancia de los trabajos de Leibniz estriba en haber puesto en claro los problemas a resolver. Gottle Frege, Bertand Russell y David Hilbert son algunos continuadores, quizá los más destacados, del programa lógico-formal de Leibniz, que se abocaron a la solución de estos problemas.

---

[61] Idem, 12-14

[62] Para una defensa del sistema de Leibniz, Cfr. Ishiguro, I. Op. cit.

[63] Crf. KNEALE, W. Y M. *El desarrollo de la lógica* Tecnos, España 1961. Quienes señalan las implicaciones del alcance existencial de los enunciados universales, reducidos a la forma sujeto-predicado.

CAPITULO 2 LOS TEOREMAS DE INCOMPLETUD DE K. GÖDEL

"Llamar a algo, con razón, la proposición 'X es indemostrable' depende de cómo demostremos esa proposición. Sólo la demostración muestra qué es lo que cuenta como criterio de indemostrabilidad. La demostración es una parte del sistema de operaciones, del juego, en el que la proposición es usada, y nos muestra su sentido"

Wittgenstein

2.1 INTRODUCCIÓN[64]

En 1899 David Hilbert presentó a la comunidad matemática de la época, una satisfactoria axiomatización de la geometría euclidiana.[65] Al año siguiente, propuso un conjunto finito de axiomas para el sistema de los números reales e indico que el problema de saber si el conjunto de axiomas de la geometría era consistente ---esto es, que de él no sea posible inferir una fórmula bien formada y su negación--- quedaba reducido al problema de probar la consistencia de los axiomas del sistema de los números reales, los cuales eran la base matemática del primer sistema.

En ese mismo año (1900) en el Congreso Internacional de Matemáticas realizado en París, expuso su programa de investigación basado en la búsqueda de la fundamentación de la matemática, a partir de *pruebas de consistencia* en sistemas matemáticos como el de los números reales, que no apelaran a otro sistema más básico en su demostración, y

[64] En el presente trabajo presupondremos familiaridad con el manejo de los conectivos lógicos ~, →, v, Ax, Ex así como la regla de 'separación' o *Modus Ponens*. Todos ellos se encuentran explicados en cualquier manual de lógica matemática elemental. Crf. QUINE, W.V.O. *Los métodos de la Lógica* Planeta-Agostini, España, 1993, donde además, también se da una pequeña exposición del teorema de Gödel.

[65] HILBERT, D. *Grundlagen der Gepmtrie*, Leipzig, 1889. Trad. *Fundamentos de Geometría* en EUCLIDES *Elementos de Geometría* Tom. I-III trad. García Bacca, J.D., UNAM (1992)

que esta demostración o prueba de consistencia cubriera ciertas características formales. Entre los problemas clásicos de las matemáticas a resolver, una vez obtenida una prueba de este tipo, destacaban, *la hipótesis del continuo y el problema de la elección*,[66] entre otros. A la enumeración de los problemas a resolver, dentro del ámbito de la fundamentación de la matemática con pruebas formales de este tipo, se le conoció desde entonces como *la lista de Hilbert*[67] y, a la actividad matemática de reflexión en torno a estos temas, como matemática.[68]

Por otra parte, hacia principios del siglo XX, los señalamientos de Bertrand Russell (1872-1970)[69] relativos a las paradojas existentes en la teoría de conjuntos, eran un problema abierto que contribuyó significativamente a que las pruebas de consistencia de los sistemas matemáticos cobrara aun más importancia. La teoría de conjuntos creada por Georg Cantor (1845-1918) ---que a finales del siglo XIX era considerada como la base de la matemática--- había recibido un fuerte golpe al no poder explicar satisfactoriamente el origen y las consecuencias de las paradojas que en la teoría se encontraron.

Las paradojas de Russell siguen más o menos el siguiente esquema. Sin profundizar mucho en el tema, un conjunto *M cualquiera* es una colección de objetos *m cualesquiera*. Los objetos *m* que están en esa colección son *elementos* del conjunto *M*, y se dice que *pertenecen* al conjunto *M*. Es fácil notar que mucho conjuntos no se pertenecen a sí mismos, ejemplos de lo anterior son el conjunto de todos los libros (el cual

---

[66] Para una expresión de ambos problemas Cfr. DELONG, H. *A Profile of MAthematical Logic* Addison- Wesley, Canada (1971)
[67] Van HEIJENOORT, H. (edit) *From Frege to Godel: A source Book in Mathematical Logic*, Cambridge (1967) p.366 HILBERT (1900a)
[68] El término "matemático" fue acuñado por el mismo Hilbert al hacer referencia a la actividad matemática que proponía su programa de fundamentación de la matemática. Cfr. Hilbert (1904, 1925, 1927)
[69] Cfr. RUSSELL, B. *The principles of Mathematics*

no es un libro él mismo), el conjunto de todas las cosas que no son ellas mismas conjuntos, etc. Llamemos a estos casos, conjuntos *normales*. Conjuntos *no-normales* serían aquellos que se pertenecen a sí mismos, por ejemplo: el conjunto de todos los conjuntos. Todos los conjuntos son normales o no-normales. Ahora tomemos al conjunto de todos los conjuntos *normales*. ¿Qué tipo de conjunto es éste? Si es normal, por definición no es elemento de sí mismo, por lo tanto no es elemento del conjunto de los normales, es decir, es no-normal. Por otro lado, si es no-normal quiere decir que es elemento de sí mismo y por tanto es normal. En breve, en ambos casos llegamos a una contradicción. Tenemos entonces que este conjunto no puede ser ni normal ni no normal, pero esto es claramente imposible.

Hacia 1904 Hilbert escribe el primer intento de fundamentación de la matemática, por medio de una prueba de consistencia del sistema de la aritmética de los números naturales.[70] Es un intento fallido, pero esboza con más precisión el método sugerido para la demostración, al cual llama *axiomático*.[71] En él, la idea general es mostrar que es posible construir un sistema en donde cada fórmula bien formada sea demostrable en un número finito de pasos y que tal sistema puede ser extendido para abarcar la aritmética de los números naturales. Tal programa de investigación será la base de sus posteriores intentos de construcción de dicho sistema (1917, 1922, 1925, 1927).[72] En todos ellos, el intento de escapar de

---

[70] HILBERT, D. Grundlagen die logik und arithmetic, 1904 trad. Van Heijenoort, H. 'On the foundation of logic and arithmetic' en Op. Cit. pp. 129-138
[71] Idem, p.131
[72] Los trabajos mencionados merecerían un estudio particular que hemos dejado para el doctorado

posibles paradojas en la teoría de números,[73] por vía de la inferencia lógica dentro del esquema del método axiomático, es explorado con vehemencia:

“Debemos investigar cuidadosamente aquellos modos de formar conceptos y aquellos modos de inferencia que sean fructíferos; debemos cuidarlos, protegerlos y hacerlos útiles, ahí donde haya una pequeña promesa de éxito. Así, nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

Es necesario hacer inferencia dondequiera que sea posible hacerlas, dentro de la teoría elemental de números, para que nadie nos cuestione y para que las contradicciones o paradojas sólo emerjan a través de un descuido al argumentar.”[74]

El 3 de septiembre de 1928, David Hilbert leyó en Boloña la ponencia *Problemas en la Fundamentación de las Matemáticas* recibiendo una aprobación general por la audiencia especializada.[75] Hilbert inicio su conferencia pasando revista a los avances obtenidos en el área de las metamatemáticas en los diez años anteriores; luego pasó a explicar el resultado de sus trabajos, los cuales habían desembocado en la búsqueda de solución de una serie de problemas, de los cuales tres estaban directamente relacionados con la posibilidad de fundamentar las matemáticas a partir de algún sistema axiomático de determinadas características. Tales problemas se pueden resumir en: 1) la necesidad de una prueba de *completud* del sistema axiomático de la lógica de primer

[73] Con teoría de números nos referimos en este caso a la aritmética elemental: suma, orden, multiplicación y exponenciación.
[74] HILBERT, D. “Über das Unendliche” (1925)trad Van Heijenoort, H. Op. Cit. p. 376.
[75] WANG, H. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Alianza, Madrid, 1991, p.99

orden,[76] en el sentido de que *todos los enunciados semánticamente verdaderos dentro de tal sistema, sean posibles de ser derivados como teoremas sintácticamente*;[77] 2) de una prueba de consistencia del mismo sistema, es decir, una prueba de la imposibilidad de derivar una fórmula y su negación, a partir de los axiomas del sistema de la lógica de primer orden y; 3) finalmente, obtener una prueba de consistencia absoluta del sistema, ampliado de tal forma, que sea capaz de abarcar el análisis y la teoría de números.[78]

Entre 1929 y 1931 Gödel resolvió los tres problemas de la lista, aunque el tercero lo hizo de una manera inesperada por los matemáticos. Tras sus trabajos, los cuales mostraron los límites de las pruebas de consistencia en sistemas formales axiomatizados con determinadas características, una de las herramientas más útiles y confiables de los lógico-matemáticos ha tenido que ser analizada bajo otras perspectivas, donde se desidealiza a los sistemas axiomáticos como perfectos y se admiten verdades indemostrables dentro de ellos, sin que esto haya significado su abandono.

2.2 LA CONSISTENCIA LÓGICA

El reiterado intento de los matemáticos de probar la consistencia de sus sistemas se debe, en pocas palabras, a que quieren que éstos se encuentran garantizados como la contradicción, "(…) la razón por la que

[76] Es decir, el sistema del cálculo de enunciados, más predicados que se aplican a individuos, más los cuantificadores: Ax, ∃x, universal y existencial respectivamente.
[77] Este enunciado merecería una explicación más amplia a cerca del concepto de verdad formal, pero intuitivamente dice que si puedo establecer la verdad de un enunciado de primer orden, entonces puedo demostrarlo a partir de las reglas de inferencia y manipulación de signos, de la lógica de primer orden.
[78] Idem, p. 100 (Cfr. Hilbert, 1928)

conceden tanta importancia a evitar la contradicción no es sólo que una contradicción es necesariamente falsa, sino que cualquier proposición puede derivarse de ella".[79] Con lo cual, dicen los matemáticos, se amenaza la utilidad misma del sistema como un todo.

Un sistema es lógicamente consistente cuando de sus postulados básicos (axiomas) y sus reglas de derivación, es imposible deducir fórmulas, teoremas o conclusiones mutuamente contradictorias. Esto quiere decir que un conjunto de premisas básicas **A** escritas en un lenguaje formal dado, es consistente si y sólo si para toda formula r, si **A I—r** entonces **A I≠ ~**r.

Pero, ¿por qué se busca esto de un sistema formal? La consistencia es importante porque es un teorema de la lógica clásica que $(r \wedge \sim r) \rightarrow s$, donde s es cualquier fórmula. Por tanto, en un sistema inconsistente todo es demostrable y esto quiere decir que el objetivo del sistema, que es demostrar *ciertas* verdades de alguna estructura o teoría no sería cumplido.

Esto tiene por consecuencia que, en un sistema formal consistente ---no vacio--- tanto hay fórmulas que se pueden probar (a las cuales se les llama generalmente teoremas), como debe haber fórmulas que el sistema no puede probar (en especial la negación de sus teoremas). Lo mejor, entonces, es contar con pruebas de consistencia que den confiabilidad a los sistemas que usamos.

---

[79] AYER, A.J., *Wittgenstein*, ed. Crítica, Barcelona 1986, p.87

2.3 ¿SON CONSISTENTES LAS MATEMÁTICAS?

El siglo XIX fue testigo del más impresionante desarrollo de las matemáticas.[80] Muchos de los problemas que por siglos habían atormentado a los matemáticos, fueron resueltos con claridad y contundencia. Por ejemplo, los números negativos, complejos e irracionales fueron definidos con rigurosa precisión; se construyó un sistema axiomático completo para la geometría y se fundó una nueva rama de las matemáticas: la teoría de los números transfinitos.

La creciente abstracción de las matemáticas planteó a principios de siglo la cuestión de si un determinado conjunto de postulados, erigidos como base de un sistema axiomático, fuese capaz de abarcar la deducción de *todos* las verdades de la teoría más simple en matemáticas: la aritmética de los números enteros positivos. Y además, ser internamente consistentes de tal modo que no puedan deducirse teoremas contradictorios a partir de sus postulados. Der ser así, se decía, se fundamentaría el campo más básico de la matemática como un sistema completo y consistente. Con esto, las ramas de la matemática, cuya consistencia dependía de la consistencia de la aritmética, quedarían fundamentadas. Esto fue, en resumen, el programa de Hilbert que analizaremos más adelante.

Hasta el siglo XIX nadie hubiera pensado en la necesidad de una prueba de este tipo: ni la aritmética ni la geometría euclidiana, habían tenido la necesidad de probar su consistencia. Se creía que tales sistemas eran *verdades* acerca del mundo, al cual se considera *per se* consistente.

[80] Cfr. WILDER, R.L. *Introduction to the Fundations of Mathematics*, N.Y, 1952.

Sin embargo, tras los trabajos de gente como Gauss, Bolyai o Riemann surgieron sistemas geométricos no euclidianos cuya consistencia dependía de la no existencia de contradicciones en la geometría euclidiana.

Como mostramos en el capitulo anterior,[81] es posible dar un modelo o interpretación de la geometría riemanniana que haga verdaderos sus axiomas, en simples términos de una esfera euclidiana. Sin embargo, esta dependencia del modelo riemanniano a un esfera en el espacio euclideo hace que su consistencia sea *relativa* a la consistencia del sistema de la geometría euclidiana. Del mismo modo, a principios de siglo surgieron modelos algebraicos y aritméticos para la geometría euclideana, donde la consistencia del sistema geométrico quedaba en dependencia a la consistencia de los sistemas de donde era tomado el modelo. Por lo que las pruebas de consistencia cobraron importancia dentro de los sistemas tradicionalmente incuestionables.

2.4 EL PROGRAMA DE HILBERT

Como hemos visto, en el año 1900 David Hilbert desvió su interés de la geometría para involucrarse en los problemas de la fundamentación de la matemática. En 1904 en Heidelberg dio una conferencia sobre la fundamentación de las matemáticas. En ella hizo notar por primera vez que, mientras que uno puede probar la consistencia de la geometría mediante una interpretación aritmética, por lo que a la consistencia de la aritmética se refiere (entendiendo por tal el análisis y teoría de números), *el recurso a otra disciplina fundamental no parece razonable*,[82] Propuso,

---

[81] Supra p.

[82] Cfr. HILBERT, D. *Foundation of Logic and arithmetic* (1904), p.130

entonces, como proyecto de investigación, la construcción de un sistema que pudiera probar la consistencia de los sistemas matemáticos sin necesidad de apelar a la consistencia de otro sistema. Este tipo de pruebas se considerarían *absolutas*.

Para tales efectos, Hilbert proponía: a) la completa formalización de un sistema deductivo. Esto es, la construcción de un lenguaje formal tan riguroso que, independientemente del significado de las experiencias de sus partes, sus reglas de formación fueran tan claras y explícitas que se pueda comportar como un cálculo aritmético, donde: b) los axiomas y los teoremas formalizados del sistema sean 'hileras' (o sucesiones de longitud finita) de signos y, c) que la derivación de *todos* las verdades sea posible a partir de ciertos axiomas básicos, limitándose a la transformación (siguiendo las reglas de formación e inferencia) de un conjunto de estas 'hileras' a otro dentro del mismo sistema. A tales sistemas se les denomino: sistemas formales axiomatizados.[83]

Ya en los siglos XVII, XVIII y XIX, habían existido intentos serios por construir este tipo de lenguajes. Los trabajos de Leibniz, Boole y Gottlob Frege son, en este sentido, la fuente original de inspiración[84], sin embargo, no fue sino hasta 1917, pocos años después de la publicación de *Principia Matemática*[85] (**PM**), que Hilbert volvió a ocuparse del problema de pruebas absolutas de consistencia en sistemas matemáticos, por considerar a *Principia* como *"la coronación de todo el trabajo de axiomatización formal"*.[86] Quedaban sólo entonces por realizar las pruebas de su

---

[83] Compare con las definiciones dadas en el capitulo anterior.
[84] Cfr. LEIBNIZ, W.G. *Ars combinatorial* (1666) BOOLE, G. *The Mathematical Analisis of Logic* (1847) *FREGE, G. Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought* (1879)
[85] RUSSELL, B., A.N. WHITEHEAD *Principia Mathematica*, 1ª edición, Cambridge, 1910.
[86] WANG, H. Op. cit., p.98 las cursivas son citas textuales de Hilbert, por el autor.

completud y consistencia así como su extensión a algún sistema simple de la matemática.

En 1929 un joven austriaco de 23 años escribía su tesis doctoral, *Über die Vollständigkeit des Logikkalkülus*,[87] en ella Kurt Gödel (1906-1978) daba una prueba absoluta, en el sentido de Hilbert, de la completud y consistencia del sistema de reglas del cálculo de enunciados dado en ***PM***. Un año más tarde (1930), extendía sus resultados probando la completud de los axiomas del cálculo de predicados[88] (o lógica de primer orden). Con ello, daba una respuesta positiva al segundo de los problemas planteado por Hilbert.[89] Como es de imaginarse, el joven matemático rápidamente llamó la atención de sus contemporáneos[90] y sus trabajos fueron esperados con avidez y expectación.

El 23 de octubre de 1930, Hans Hahn presentó ante la *Vienna Academy of Sciences* un adelanto del próximo trabajo Gödel titulado: *Some metamathematical results on completeness and consistency*.[91] En él, Gödel señalaba que si los axiomas de Peano se le agregaran los axiomas de la lógica de primer orden expuesto en ***PM*** (con los números naturales como individuos) se obtendría un sistema formal axiomatizado ***S***, con las siguientes propiedades:

1) El sistema no es completo, esto es, existe una proposición *A* tal que ni *A* ni ~*A* son demostrables.

[87] Cfr. GÖDEL, K. On the completeness of calculus logic en FEFERMAN, S. (edit.) *Kurt Gödel Collected Works* Vol. II. Oxford 1986, pp. 44-101.
[88] Cfr. GÖDEL, K. The completeness of axioma of functional calculus of logic en idem pp. 103-125
[89] Cfr. La lista de 3 problemas relacionados con la fundamentación de la aritmética simple, dados más arriba.
[90] Ambas pruebas merecerían una exposición detallada que rebasa con mucho los límites de extensión del presente trabajo, por lo que sólo nos limitaremos a la exposición de los teoremas de incompletud.
[91] Cfr. GÖDEL, K, *Some metamathematical results on completeness and consistency* en HEIJENOORT, J. Op. cit., pp. 86-87

2) No es posible una prueba de la consistencia de ***S***, en ***S***.

3) No importa cuántos axiomas se agreguen al sistema **S**, si el sistema es consistente, siempre tendrá formulas indecible, por lo cual siempre será incompleto.

4) Los metateoremas 1, 2 y 3 son extensivos a todo sistema consistente con las mismas características.

"Las pruebas de estos teoremas aparecerán en *Monatshefte für Mathematik und Phisik*",[92] concluía crípticamente el escrito. El texto completo fue entregado el 17 de noviembre de 1930 y publicado en 1931 en el numero 38 de *Monatshefte*… El trabajo, de escasas 25 páginas, daba una respuesta *negativa* al Programa de fundamentación de la matemática de Hilbert. Gödel tardó tan sólo dos años y medio para dar solución a un programa de investigación que había durado casi tres décadas en madurar.

2.5 Los teoremas de incompletud de 1931

En 1930 Kurt Gödel escribió *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwndter Systeme Traslated I*.[93] Este famoso trabajo se centró en el problema de la fundamentación misma de las matemáticas y demostró que tal pretensión es insostenible bajo pruebas de

[92] GÖDEL, K, *Some metamathematical results…* p.87
[93] GÖDEL, K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systemas **I*** (1931) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwndter Systeme.
Translated I, by B. MELTZER, Lbrary of Congress Cataloging in Publication Data. De aquí en adelante G1931, I.

consistencia absoluta en sistema axiomáticos con conjuntos recursivos[94] de axiomas.[95]

Las pruebas de Gödel son muy complejas, antes de llegar a los resultados principales es necesario comprender y dominar perfectamente 45 definiciones preliminares, junto con varios e importantes teoremas previos.[96] Para el presente trabajo lo que interesa es entender el núcleo de la argumentación y comprender las consecuencias de su teorema, sin embargo, seguiremos en líneas generales su construcción.

La prueba del teorema de incompletud se puede dividir en cuatro importantes partes. En la primera, el autor da un ejemplo de lo que será el objetivo principal del trabajo, donde intentará construir una fórmula que al interpretarla diga de sí misma: "esta fórmula no es demostrable". Es común ver comentarios sobre los teoremas de Gödel que sólo toman en cuenta esta primera parte, a pesar de que en ella no hay demostración alguna.

En la segunda y más larga, Gödel demuestra de modo concluyente, que dicha fórmula es posible de ser construida, dentro del cálculo de ***PM*** más los axiomas de la aritmética simple. Mostró que la afirmación "esta fórmula es indemostrable" (a la cual llamaremos **G**) es posible definirla dentro del mismo sistema compuesto (al cual llamo ***P***) como una formula bien formada, empleando sólo el lenguaje de la aritmética e interpretarla metamatemáticamente como verdadera. A partir de ello, Gödel probó que tal fórmula es formalmente indecible, por lo que si el sistema es consistente es forzosamente incompleto, esto es, contiene verdades que no puede probar.

---

[94] Este concepto es demasiado técnico para este texto. Se puso en aras de corrección.
[95] Cabe señalar que existe la posibilidad de fundamentar la aritmética desde ortos sistemas más fuertes.
[96] Idem,. Parágrafos 182-187.

En la tercera parte demostró que aun cuando se admitiesen nuevos axiomas, de tal forma que **G** pudiera ser formalmente deducida en **P**, podrían construirse otra fórmula aritmética **G’** verdadera pero formalmente indecible en **P** y que esto es una propiedad de todos los sistemas con sus mismas características. En otras palabras, todo sistema formal axiomatizado, recursivo, consistente y capaz de contener a la aritmética simple, es incompleto. Finalmente, en la última parte mostro que debido a la existencia de formulas indecidibles en un sistema de tales características, una prueba absoluta de la consistencia de dichos sistemas no es posible.

La segunda parte guarda una cierta similitud a la paradoja del Epiménides o del mentiroso sin caer en ella. La famosa paradoja reza así: “todos los cretense siempre mienten”. Epiménides, que es cretense, afirma ‘soy un mentirosa’, ¿cómo debemos tomar dicha afirmación? Es fácil ver que en ambos casos se arriba a una contradicción. Gödel no cayó en contradicción alguna. También es cercana a la construcción de la paradoja del matemático francés David Richard (1905), solo que la asignación de valores aritméticos a las proposiciones meta-matemáticas es del todo correcta en el sistema de Gödel.[97] Además, guarda todo el sentido original del trabajo de Leibniz (1666), de enumerar las formulas válidas del sistema en el que se trabaja. La tercera y cuarta parte son consecuencias fácilmente deducibles de la primera, pero que tardaron 30 años en ser articuladas.

[97] Para una exposición de la paradoja de Richard ver NAGEL, E y NEWMAN, J., op. cit., pp. 78-81

2.5.1 Primera Parte

Para entender cómo Gödel logró representar los enunciados metamatemáticos (enunciados que hablan acerca de afirmaciones matemáticas) en términos aritméticos, un ejemplo por analogía podría ser útil antes de empezar una explicación más técnica. En algunos bancos se tiene el sistema de dar a los clientes al momento de entrar unas fichas numeradas (llamaremos número banco ó **#B** a tal numeración), cuyo orden determina la sucesión en la que habrán de ser atendidos. Observando los números y sus relaciones aritméticas simples (suma, multiplicación, orden) se puede saber cuántas personas han sido atendidas, cuantas están esperando turno, quien precede a quién y por cuantos clientes, etc.

Si por ejemplo, la señora Pérez tiene el numero 33 y doña Pachita el número 55, en vez de explicar a doña Pachita que tiene que aguardar su turno después que la señora Pérez, basta con indicarle que 33 es menor que 55. Así, la afirmación *aritmética simple* o *básica* $33<55$ puede ser interpretada *metamatemáticamente* como la afirmación de que: “cierta persona asignada con cierto número (en este caso 33) para ser atendida en una banco, va antes que otra asignada con un número mayor (en este caso 55).” De esta forma, afirmaciones acerca de números pueden ser leídas como afirmaciones acerca de personas. De un modo análogo, Gödel creó un sistema donde afirmaciones acerca de números pueden ser leídas como afirmaciones acerca de la teoría de números (aritmética).

2.5.2 Segunda Parte

En la teoría ***P***, que incluye a ***PM*** y los axiomas de Peano, Gödel construyó un sistema de numeración de todas las fórmulas y pruebas de ***P*** con numero enteros positivos, donde a cada 'signo primitivo' o básico del cálculo de predicados, lo mismo que a los símbolos básicos de la teoría de números, se le asocia un número, llamado ahora número Gödel (**#G** en adelante). La forma de hacerlo y el número que se le asigne a cada signo es irrelevante, con tal de que sea exhaustiva y única. Una forma de llevar a cabo la numeración es la siguiente:

Tomemos en el lenguaje formal ***L*** de ***P*** las siguientes constante y símbolos como **#G**-numerados: "0"…1, "="…2, "*f*"…3, "v"…4, "~"…5, "→"…7, "A"…9, "("…11, ")"…13. Aquí el símbolo "*f*" representa la función sucesor.[98]

Numeremos a los símbolos de las variables numéricas en ***L***,	$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$
con la serie ascendente de números enteros positivos:	14,17, 20…
del mismo modo, a las variables sentenciales:	$p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$
con la serie ascendente de enteros:	15, 18, 21…
finalmente, numerar los símbolos para predicados:	$P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$
también con la serie infinita de enteros:	16, 19, 22…

Supongamos que en ***L*** no hay más símbolos básicos. Es fácil ver que nuestra lista numerada es exhaustiva, univoca e infinita. En seguido, Gödel definió un procedimiento de numeración para que cada formula dentro del sistema ***PM*** así compuesto, tuviera un único número Gödel. Utilizó para ello

[98] Gödel utilizo en su estudio solamente siete signos constantes. El presente texto utilizo nueve para evitar ciertas complejidades técnicas en la exposición.

el teorema fundamental de la aritmética que dice: 'todo número entero positivo se puede expresar de manera única como el producto de una serie univoca de números primos'. La manera de numerar las fórmulas es tomar la serie ordenada y ascendente de los números primos, comenzando en el 2; tantos números primos como signos ocurran en una formula bien formada de ***P*** que desee numerar; multiplicarlos en ese orden, elevándolos antes, a cada uno de ellos, por el **#G** de cada signo de la fórmula en cuestión.

De esta forma, por ejemplo:

La aserción matemática: $2 \neq 3$

es equivalente en ***PM*** a: '~ (2=3)'

que es equivalente en el sistema ***S*** a: '~ (*ff*0=*fff*0)'

que a su vez se descompone en:

$$2^5 x 3^{11} x 5^3 x 7^3 x 11^1 x 13^2 x 17^3 x 19^3 x 23 x^3 x 29^1 x 31^{13}$$

Posteriormente Gödel demostró que el sistema, así transformado, puede contener tanto las características del cálculo de enunciados de ***PM***, como reflejar las propiedades de la aritmética simple de los números enteros. Lo hizo asignando un único número Gödel a los axiomas de *Principia*,[99] a los axiomas de *Peano* y, por recursión, a cada prueba del sistema así conformado.[100] Para nuestros fines, conviene exponer cómo se numeraría una prueba en ***P***.

Una prueba de una formula **φ** cualquiera en ***P*** es una lista finita de fórmulas φ_1, φ_2, φ_3… que terminan en **φ**, cada una de las cuales, o bien es

[99] Por ejemplo el primer axioma de *Principia*: $(p_1 \vee p_1) \rightarrow p_1$ tendría en nuestra numeración el **#G**:

[100] De hecho Gödel fue definiendo poco a poco números Gödel para expresiones como 'igualdad', 'ser divisible por', 'ser número primo', etc.

un axioma, o bien puede ser derivada de las fórmulas anteriores con ayuda de las reglas de transformación.

Supongamos que tenemos la demostración:[101]

Demostración **#G** de la formula

$P_1x_1 \rightarrow P_2x_2$………………$2^{16}x3^{14}x5^{7}x7^{19}x11^{17}$ = $\mathbf{d}_1$

$\underline{P_1x_1}$______....................$2^{16}x3^{14}$ = $\mathbf{d}_2$

P_2x_2………………$2^{19}x3^{17}$ = **d**

Esta demostración es una prueba en ***P*** por regla de *Modus Ponens*, o regla de separación de la lógica de primer orden, la cual permite deducir el consecuente de un condicional cuando se tienen el antecedente y el condicional. Desde afuera de la teoría podemos, dada la numeración de Gödel, afirmar que la lista de fórmulas con **#G** $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, respectivamente, constituye una demostración en ***P*** de la fórmula cuyo **#G** es **d**.

Ahora, para asignarle a tal prueba un número Gödel, volvamos al procedimiento recursivo de asignación, empleando de nuevo el teorema fundamental de la aritmética. Tomemos la lista ordenada y ascendente de números primos, tantos como fórmulas haya en nuestra prueba; elevémoslos cada uno al número Gödel de cada fórmula; y finalmente multipliquémoslos. En nuestro caso: $2^{d1}x3^{d2}$. Este será el número Gödel de la demostración, llamémosle **m**.[102] Gödel demuestra que hay una relación aritmética entre **m** y **d**, que puede ser expresada en el lenguaje de la teoría

[101] Hemos omitido los cuantificadores y paréntesis para simplificar la numeración.
[102] Es importante hacer nota que **m** no es una formula, sino un numero entero positivo y que este proceso se puede hacer para cualquier lista finita, sea o no una demostración en ***P***.

P.[103] Esta es la parte crucial de su demostración, denotemos a la fórmula que expresa esta relación con:[104] Dem (**m**,**d**). Formula que puede ser leída como: 'la sucesión de fórmulas con número de Gödel **m** es una demostración de la formula con número de Gödel **d**'. Especialmente lo que Gödel probó, a grandes rasgos, es lo siguiente: si **m** y **d** son dos numerales cualesquiera, entonces ***P*** **I—**Dem (**m**,**d**) si y sólo si **m** es el **#G** de una demostración en ***P*** de la fórmula con **#G d**. (")

Por el teorema fundamental de la aritmética, se puede ver que es posible decidir si un número entero positivo es un **#G** y si lo es, saber si es el número de una constante, de una fórmula o de una prueba en ***P***. Basta descomponerlo en sus factores primos.

Una notación más en ***P*** es necesaria para exponer el argumento central de Gödel. Como ejemplo, comencemos con la fórmula:

$$\text{'}\sim Ax_1 \sim (x_1 = f x_2)\text{'}$$

cuyo **#G** es $2^5 x 3^9 x 5^{14} x 7^5 x 11^{11} x 13^{14} x 17^2 x 19^3 x 23^{17} x 291^3$.

Sea **a** este número de Gödel. En la fórmula cuyo **#G** es **a**, substitúyase la variable libre[105] con **#G** 17 (o sea 'x_2') por el termino **a**.

---

[103] La relación es sumamente compleja pero al ser número enteros positivos, es posible encontrar entre ellos una relación en simples términos de sustitución, suma, multiplicación y exponenciación tal como seria la operación aritmética: (2·3)-(2·2)=2
[104] Gödel empleo la expresión metamatemática 'Bew' tomada de la palabra alemana 'Beweis' que significa prueba. Nosotros hemos empleado el término 'Dem' en alusión a 'demostración'. Nótese también que, abusando de la notación, hemos utilizado a '**m**' y '**d**' como nombres para sí mismos, es decir, como numerales. Esta es una práctica común.
* La afirmación anterior, demostrada por Gödel, será empleada más adelante.
[105] Esto es, no acotada, por un cuantificador. Por ejemplo: AxPxy que se lee: 'para toda 'x', se cumple el predicado P que lo relaciona con 'y'. Aquí la variable 'x' esta acotada por el rango de aplicación (extensión) del cuantificador universal, mientras 'y' ocurre libre.

El resultado es la formula '~A(x_1) ~ (x_1=*f***a**)' que dice literalmente que existe algún número x_1 tal que x_1 es el sucesor de **a**. Esta ultima formula también tiene un **#G** que puede calcularse haciendo la larguísima descomposición en factores primos. Pero en lugar de hacer el cálculo, podemos identificar el número mediante una inequívoca caracterización metamatemática: *es el* **#G** *de la fórmula que se obtiene a partir de la fórmula con* **#G a***, al sustituir la variable libre con* **#G** *17 por* **a**'. Gödel demostró que se puede definir en ***P*** un término que represente esta caracterización, al que llamaremos en nuestro caso:

'Subst (**a**, $^{17}{}_{a}$)'

Esta caracterización determina unívocamente un número definido, que es una cierta función aritmética de los números **a** y 17, la cual puede ser expresada dentro del mismo sistema formalizado.[106] En el caso de que, por ejemplo, no existieran variables libres en una fórmula a substituir, digamos con **#G c**, el termino que expresa 'Subst' (**c**, $^{17}{}_{c}$)' es igual a **c** mismo, ya que lo único que pasa es que no se modifica la formula cuyo **#G** es **c**. Gödel hizo notar que el signo 'Subst' ya corresponde al lenguaje metamatemático que tiene como objeto a ***P***.[107] Es decir, esta expresión es un número que refleja una propiedad metamatemática (la obtención de un número por sustitución) entre los elementos matemáticos (números Gödel) de ***P***.

[106] No es posible aquí explicar exactamente y con todo detalle la función que relaciona **a** con 17 sin introducir un aparato matemático adicional mucho más complejo; esté se halla explícito en el trabajo original de Gödel de 1931.
[107] G1931, I. Nota a pie de página 20

Con esto, por un lado estableció un método para 'aritmetizar' completamente el cálculo formal de *Principia*, reduciéndolo a relaciones aritméticas entre números enteros. Y en segundo lugar, demostró que muchas proposiciones metamatemáticas, *expresiones que se refieren a las relaciones y propiedades contenidas en el cálculo aritmético*, en especial 'Dem' y 'Subst', pueden ser adecuadamente "reflejadas" dentro del mismo cálculo.

A continuación Gödel mostró cómo construir una fórmula especial en ***P***, a la cual llamaremos **G**, que representa la preposición metamatemática: 'La fórmula **G** misma, no es demostrable en ***P***'; su construcción sigue más o menos los siguientes pasos:

1) Consideremos la fórmula bien formada (fbf), 'Dem (x_1,x_3)' que se lee desde la metateoría como: 'la sucesión de fórmulas con **#G** x_1 es prueba o demostración de la fórmula con **#G** x_3. Continuemos la construcción de las siguientes fórmulas bien formadas (Fbf) en ***P***.

Fbf	**Interpretación metamatemática**
2) ~Dem (x_1, x_3)	La sucesión de fórmulas con número de Gödel x_1, **no** es demostración de la fórmula con número de Gödel x_3
3) Ax_1~Dem (x_1, x_3)	Ninguna sucesión de fórmulas es demostración de la fórmula con **#G** x_3.

Nótese que si ***P*** es consistente y 'x_3' fuera el **#G** de la negación de uno de sus teoremas se tendría que ***P* I---** Ax_1~Dem (x_1, x_3).

4) Ax1~Dem (x_1, Subst (x_2, $^{17}{}_{x2}$))

Ninguna sucesión de formulas es demostración de la formula que resulta de sustituir, en la formula con **#G** x_2, la variable libre con el **#G** 17 por el numera x_2. En otras palabras, la fórmula con **#G** Subst (x_2, $^{17}{}_{x2}$) no es demostrable.

La fórmula Ax_1 ~Dem (x_1, Subst (x_2, $^{17}{}_{x2}$)) tiene un **#G** que puede ser efectivamente calculado. Supongamos que tal número es **n**.

Consideremos ahora a la Fórmula:

Interpretación metamatemática

5) Ax_1 ~Dem (x_1, Subst (**n**, $^{17}{}_{n}$))

La formula con **#G** 'Subst (**n**$_1$, $^{17}{}_{n}$)' no es demostrable; esto significa que la fórmula que resulta de sustituir la variable con **#G** 17 por el numeral **n** en la fórmula con **#G** **n**, no es demostrable.

Obsérvese que la fórmula con **#G** 'Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)' es precisamente la fórmula 5).[108] Por lo tanto esta fórmula afirma que ella misma no es demostrable en ***P***.

Veamos qué consecuencias tiene para el sistema ***P*** la existencia de una fórmula **G** de este tipo.

Supongamos que ***A*** es el conjunto de axiomas de ***P*** tal que ***A* I--- a_x** para cualquier fórmula **a_x** demostrable en ***P***.

Supongamos que **G** fuese demostrable en ***P***, es decir, un teorema en ***P***. Si ***A* I--- G**, entonces existe una lista finita de fórmulas que son una prueba de **G** en ***P***. Sea **c** el **#G** de esa prueba. Entonces por lo afirmado en ("), se tendría que ***A* I---** Dem (**c**, Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)). En consecuencia se tendría: ***A* I---** $\exists x_1$ Dem (x_1, Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)), que es lógicamente equivalente a: ~Ax_1 ~Dem (x_1, Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)), es decir, **~G** y como hemos dicho, al deducirse una fórmula y su negación, se haría inconsistente ***P***.

Por otra parte, si **~G** fuese demostrable en ***P***, entonces ***A* I---** ~Ax_1 ~Dem (x_1, Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)) es decir ***A* I---**$\exists x_1$ Dem (x_1, Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)), por tanto, ***A* I---**Dem (**m**, Subst (**n**, ^{17} $_{n}$)) para alguna **m**. Pero por (*), la fórmula con **#G** Subst (**n**, ^{17} $_{n}$) entonces tendría una demostración en ***P*** y por tanto ***A* I---G**. Por lo que ***P*** sería inconsistente. Acabamos de ver que, si ***P*** es consistente, no pueden demostrarse en ***P*** ni **G** ni **~G**, es decir, **G** es formalmente indecidible.

Supongamos, entonces, lo contrario, que **G** no fuese demostrable en ***P***. Si ***A*I≠G**, entonces, no existe una prueba de **G** en ***P***, por tanto **G** es

---

[108] Cfr. Supra p. 57-58

*Supra, p.57

verdadera, pues lo que afirma es el caso: ‘no hay prueba de ella misma en ***P***’, y es formalmente indemostrable.

Es importante hacer notar que hemos establecido la verdad de **G** no deduciéndola formalmente de los axiomas de ***P***, sino por un argumento metamatemático. Con lo que tenemos, que si el sistema axiomático ***P*** es consistente, además de contener fórmulas indecidibles, contiene verdades que no se pueden demostrarse a partir de sus axiomas, por lo que ***P*** es un sistema *incompleto*.[109]

2.5.3 Tercera Parte

Supongamos que ***P’*** es el sistema axiomático que resulta de agregar a ***A*** los axiomas necesarios para hacer demostrable a **G**. Sigue siendo posible en el lenguaje de ***P’***, por recursión, la construcción de la fórmula: Ax_1 ~Dem(x_1, x_2) y de aquí es fácil ver que es posible volver a construir una fórmula indecidible **G’** siguiendo los mismo pasos recursivos que nos llevaron a construir el caso especial. Este resultado se mantiene con independencia de las veces que se amplié el conjunto de axiomas de ***P’***.

De esta forma, Gödel mostró que todos los sistemas axiomáticos con un conjunto recursivo de axiomas, y que sean capaces de contener a la aritmética elemental, son necesariamente *incompletos*. Y esto es así porque siempre se podrá construir recursivamente en ellos una fórmula **G’** indecidible y verdadera; por lo que no es posible dar un sistema axiomático de este tipo donde sea posible derivar todas las verdades del sistema más elemental de la matemática, la aritmética.

[109] Un sistema ***T*** es completo si, dada cualquier fórmula bien formada φ de su lenguaje, ***T*** I--- φ ó ***T*** I---ʌ φ

2.5.4 Cuarta Parte

Finalmente, bajo el sistema ***P***, hemos llegado a la observación metamatemática: 'Si la aritmética es consistente, es incompleta.' Pues ***P*** incluye los axiomas de la aritmética. Este enunciado metamatemático es posible de ser representado por una fórmula demostrable en ***P***. Su construcción puede explicarse en tres pasos.

1) El antecedente de la afirmación anterior es: 'la aritmética es consistente', la cual es equivalente a la proposición, 'existe por lo menos una fórmula de la aritmética que no es demostrable'. Esta última afirmación la podemos representar en ***P*** como:

$\exists x_1\, Ax_2 \sim(\mathrm{Dem}\,(x_2, x_1))$ equivalente a: $\sim Ax_1\, Ax_2 \sim (\mathrm{Dem}\,(x_2, x_1))$

Le llamaremos **Cons**, en aras de simplificar.[110]

2) El consecuente de la metaproposición es: '(la aritmética) es incompleta', que es equivalente a la fórmula **G**.[111]

3) La proposición completa formalizada sería:

$(\sim Ax_1\, Ax_2 \sim (\mathrm{Dem}\,(x_2\, x_1))) \rightarrow (Ax_1 \sim \mathrm{Dem}\,(x_1\ \mathrm{Subst}\,(\mathbf{n}, {}^{17}{}_{n})))$

o más sencillamente **Cons→G**. Con unos cuantos pasos más vamos a demostrar que **Cons** no es demostrable.

[110] La fórmula dice: 'Existe por lo menos una fórmula de la aritmética con **#G** en ***P***, para la cual ninguna sucesión de fórmulas con un número Gödel en ***P*** constituye su prueba'.
[111] G1931, I teorema IX, parágrafo 197-198

Supongamos que **Cons→G** es un teorema de la aritmética.[112]

1° De ser demostrable la consistencia de la aritmética tendríamos que el antecedente del teorema '**Cons→G**' sería una fórmula demostrable, sin embargo si **Cons** fuese demostrable, aplicando la regla de inferencia por separación o *Modus Ponens*, sería demostrable **G**.

2° Salvo que el cálculo de la aritmética sea inconsistente, **G** es formalmente indecible.

3° Por consiguiente, si la aritmética es consistente, la fórmula **Cons** no puede ser demostrable, es decir, la consistencia de la aritmética, en sistemas axiomáticos con un conjunto recursivo de axiomas, es indemostrable.

El texto de 1931 se refiere sólo al sistema ***P***. "Nos hemos restringido en el presente trabajo al sistema ***P*** y sólo hemos indicado su aplicación a otros sistemas. Los resultados serán asentados y probados en toda su generalización en una secuela pronta a aparecer. En ese trabajo, la prueba del teorema IX que aquí solo hemos esbozado, será dada detalladamente."[113]

Lo anterior parece explicar el ***I*** en el título original. La intención del autor era publicar una secuela del texto en el siguiente volumen de

---

[112] Idem. De hecho lo es, pero hemos prescindido aquí de la prueba.
[113] La traducción es mía, del texto en alemán que aparece en FEFERMAN, S. *Kurt Gödel Collected Works* Vol. II. Oxford 1986, p. 194.

Monatshefte y extender la prueba a cualquier sistema matemático con un conjunto recursivo de axiomas. *Esta prueba nunca la escribió Gödel.*

Una prueba de la incompletud del sistema aritmético de los números naturales y la imposibilidad de probar su consistencia bajo el sistema ***P*** extendido, le fue cuestionada por el matemático John von Newman el mismo año, 1931;[114] Gödel respondió que tal prueba sería posible si se lograra obtener dentro del sistema *números-teoréticos recursivos* (que era como él nombró a los números Gödel) para las funciones aritméticas de la adición y la multiplicación. ¡Le estaba dando la clave! Una demostración análoga del teorema IX[115] para el sistema Z de los números enteros fue dada en detalle por el propio Hilbert y su colega Bernays en 1939. El programa de Hilbert parecía concluido.[116]

"En contra de previas suposiciones, el vasto continente de la verdad aritmética no puede ser reducido a un orden sistemático sentado de una vez y para siempre, a un conjunto de axiomas del que pueda derivarse formalmente toda preposición aritmética verdadera".[117]

---

[114] Cfr. Introductory note to 1930b, 1931 en FEFERMAN, S. Op. cit. p. 137

[115] En el texto original el teorema IX es donde se demuestra la existencia de fórmulas indecidibles en el sistema ***P***, Cfr. GÖDEL, K.G1931-I., Sección 4, Teorema IX parágrafo 196-197

[116] Los programas de investigación de pruebas de consistencia sobrevivieron al Teorema de Gödel. El mismo Kurt buscó afanosamente su reactivación sobre nuevas bases. Pero el programa original de Hilbert (1928), fue concluido negativamente.

[117] NAGEL, E., NEWMAN, R. Op. cit. p. 114.

Observaciones finales

La idea de un orden preestablecido e inteligible en el universo, al cual el hombre accede gracias a la razón, está estrechamente ligado al pensamiento matemático. En la base de la reflexión matemática tradicional estaba siempre presente la posibilidad de resolver todo problema matematizable calculando, a condición únicamente de encontrar, primero, el lenguaje formal adecuado.

En la creación de modelos matemáticos que han intentado explicar la diversidad de lo que existe, los sistemas formales axiomatizados han jugado un importante papel en la historia de la ciencia. De Euclides a Leibniz, de Newton a Gödel, la idea de encontrar una lista finita de axiomas, que fueran útiles para explicar la mayoría de los fenómenos parecía un objetivo no sólo deseable, sino posible.

Los teoremas de incompletud de Gödel abrieron nuevos campos de investigación con nuevas preguntas y planteamientos. Tras los trabajos de Skolem y Gödel sobre recursión, se consolidó un área específica de la matemática dedicada al pensamiento recursivo.[118] La búsqueda de una salida a la conclusión gödeliana sobre la imposibilidad de dar una prueba de la consistencia de la aritmética básica en sistemas axiomáticos, cuyo conjunto de axiomas sean recursivos, ha llevado a los matemáticos a cuestionarse el papel de las variables libres en las fórmulas indecidibles de Gödel.[119]

[118] Cfr. HINMAN, G. P. *Recursion.Theoretic-Hierachies. Perspectives in Mathematical Logic.* Ed. Springe-Verlag, Berlin-N.Y. (1978)

[119] FEFERMAN *Fundamenta Mathematicae* LXIX (1969)

Por otra parte, algunas investigaciones en Inteligencia Artificial (I.A.), se plantearon la pregunta de determinar qué implicaciones tienen las pruebas de incompletud.[120] ¿Podría una máquina realizar las pruebas de Gödel? Si no fuera ese el caso, ¿sería ese un argumento para demostrar que una máquina nunca podrá razonar como un ser humano?[121]

Las pruebas de incompletud son también, filosóficamente, relevantes para la discusión con el escéptico, quien duda de la posibilidad de un conocimiento indubitable. Parecería, entonces, que los teoremas gödelianos le dieran la razón a su postura, pero las pruebas mismas, de ser aceptadas, serían un ejemplo de demostración. ¿En qué *nivel cognoscitivo* es establecida la prueba?, ¿cuál es el concepto de "verdad" que se maneja en la prueba?

Finalmente, los sistemas formales axiomatizados no sólo no han desaparecido, sino que siguen proporcionando lenguajes útiles para el hombre. Un caso de ello es el lenguaje de programación Prolog, el cual es empleado en inteligencia artificial como un código que emplea la lógica de primer orden, la aritmética y la recursividad en sus comandos.[122]

Como se puede apreciar, el tema está lejos de agotarse y han quedado huecos y muchos conceptos pendientes, como por ejemplo el de *verdad formal*, que esperamos poder desarrollar en una próxima investigación.

---

[120] TURING, A. Computing Machinery and Intelligence (1950) en Alan Ross (comp.) *"Minds and Machines"*, Pretice-Hall, N.J. (1958)
[121] Cfr. ROSS ANDERSON, A. (comp) *Minds and Michines* ed. Prentice-Hall, N.J. (1958)
[122] CLOCKSIN, W., y Mellish, C.*Programming in Prolog* Springer-Verlag, (1994)

Bibliografía:

Capítulo 1

ACKRIL, J.L. (comp) A new Aristotle Reader, Oxford, 1987.

BARNES *The complete works of Aristotle* Ed. Princeton University Press, Vol. 1, Oxford (1985), bajo la numeración clásica.

BASSOLS B., N. *¿Es posible una lógica objetiva? Diálogo entre autómatas* (*Rectificaciones históricas)* Ed. Independiente, México (1993)

BOCHENSJKI, I.M. *Anciant formal logic* Ed. North-Holland Publishing, Amsterdam (1968)

BODEMAAN, E. die Leibniz.Hannschriften der Königlichen Öffentlichen Bilbiothek zu Hannover, 1985; reimpresion Hildesheim (1966).

COUTURAT, L. *Opusucles et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la biliothequé royale de hanovre*. Paris, (1903); reimpresión Hildesheim, (1961).

EUCLIDES *Elementos de Geometría* Tom. I-III trad. García Bacca, J.D., UNAM (1992)

FREGE, G. *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought* (1879) en HEIJENOORT, J. Frege and Gödel. Two. Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Harvard University Press, (1980)*

----*Estudios Semánticos* Trad. Ulises Moulines, ed. Folio, España (1999)

GRENET, P.B. *Historia de la filosofía antigua* ed. Herder, Cap. VI, España (1992)

HATH, T.S. *A history of Greek Matematics* Vol. 1 From Thales to Euclid Dover Publication, N.Y., (1981)

HILBERT, D. *Fundamentos de Geometría* en EULIDES *Elementos de Geometría* Tom. I-III trad. García Bacca, J.D., UNAM (1992)

ISHIGURO, H., *Leibniz´s philosophy of logic and language*, 2ª ed. Cambridge University Press, N.Y. (1990)

KIRCHER, A. *Poligraphia nova et universalis, ex combinatoria arte detecta*, (1963)

KNEALE, W., y M., *El desarrollo de la Lógica* Ed. Técnos, España (1966)

LEIBNIZ, G. W. *Logical Papers: A selección.* Editado y traducido por PARKINSON, G.H.R., Oxford, (1966)

LOEMKER, L.E. *Introduction: Leibniz as philosopher*, en LEIBNIZ, G. W. *Philosophical Papers and Letters Selection*, Traducdión y edicion de LOEMKER, L.E., 2ª edicion, Reidel Publishing, U.S.A., (1976)

LUKASIEWICZ, J. *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna* Ed. Tecnos, España (1977)

MORRIS, K. *Mathematical Thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, (1972) NEWMAN, J.R. (comp) *The world of Mathematics* Vol. 3 Ed. Simon and Schuster, N.Y. (1956)

PLATON, *Teeteto* ed. Gredos, España (1977)

RESHER, N. *The Philosophy of Leibniz*. Englewood Cliff, N.J. (1967)

ROSS, D. *Aristotle*, Ed. U.P., Inglaterra (1971)

RUSSELL, B. *A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Londres, (1900)

Capítulo 2

AYER, A.J., *Wittgenstein*, ed. Crítica, Barcelona (1986)

BENACERRAF, P., y PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics. Selected reading*. Cambridge University Press, (1983)

BOOLOS, G.S. y JEFFREY, R.C. *Computability and Logic* Cambridge University Press, Chapter 16, Great Britain, 1980

CLOCKSIN, W., y MELLISH, C. *Programming in Prolog* Springer-Verlag, N.Y (1994)

DELONG, H. *A profile of mathematical logic* Addison-Wesley, Canadá (1971)

ENDERTON, H.B. *Una introducción matemática a la lógica*, trad. Pablo Rosenblueth, UAM (1987)

FEFERMAN, S. *Kurt Gödel. Collected Works* Edición Bilingüe, Vol. I publications 1929-1936 Oxford University Press, EEUU, (1986).

----*Fundamenta Mathematicae* LXIX (1960)

GÖDEL, K. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwndter Systeme I* Translated by B. MELTZER, Library of Congress Cataloguing in Publication Data (1999)

---- 'On the completeness of calculus logic' (1930) en FEFERMAN, S. Kurt Gödel Collected Works Vol. II. Oxford (1986)

---- 'The completeness of axiom of functional calculus logic, Idem (1930)'

HATCHER, W.S. *The logical Foundation of Mathematics* Pergamon Press, Québec (1989)

HILBERT, D. Grundlagen der Geomtrie, Leipzig, 1889. trad. *Fundamentos De Geometría* en EUCLIDES *Elementos de Geometría* Tom I-III trad. García Bacca, J.D., UNAM (1992)

---- Grundlagen die logik und arithmetic, (1904) trad. 'On the foundation of logic and arithmetic' en Van HEIJENOORT, J. en *"From Frege to Gödel: A source Book in Mathematical Logic"* Harvard University Press, (1967)

----The foundation of mathematics, (1927) Idem

----On the infinite, Idem. (1925)

MOSTOWSKI, A. *Thirty years of foundational studies* Oxford B.B., (1966) NAGEL, E., y NEWMAN, J. *Gödel´s Proof.* in WILDER, R.L. *Introduction to the Foundations of Mathematics,* NY, (1952)

PARKINS, W. (et.al.) *The philosophical Computer. Explorary Enssays in Philosophical Modeling*, MIT PRESS, E.U. (1998)

QUINE, W.V.O. *Los métodos de la Lógica* Planeta-Agostini, España (1993)

ROSS ANDERSON, A. *Minds and Machines* ed. Prentice-Hall, N.J. (1956)

RUSSELL, B., A. N. WHIETEHEAD *Principia Mathematica*, 6ª edición, Cambridge, (1925)

SKOLEM, T. *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekirrierende Denkweise onhe Anwendung scheinbarer Veränderliche mit unendlichem Ausdehnungsbereich* en KRISTIANAm Skifter no. 6, Viena (1923)

TARSKI, A. The concept of truth in formalized languages (1950) trad. J.H. Woodger en *Logic, semantics, mathematics, Papers from 1923 to 1938* Oxford (1956)

TURING, A. Computing Machinery and Intelligence (1950) en Alan Ross (comp.) *Minds and Machines,* Pretice-Hall, N.J. (1958)

Van HEIJENOORT, J. en “From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic” Harvard University Press, (1967)

WANG, H. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Alianza, Madrid, (1991)

---- *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, London (1974)

---- *Popular Lectures on Mathematical Logic* Dover Publications, N.Y. (1981)

WILDER, R.L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*, NY, (1952)

WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre la fundamentación de las matemáticas*. Alianza-Universidad, España (1981)

---- *Zetel* UNAM-IFF, México (1985)
Philosophical Investigations Oxford-Brasil Blackwell, (1963)

Capítulo 3

BODEN, M. (comp) *Filosofía de la Inteligencia Artificial* FCE, México (1994)

CLOCKSIN, W., y MELLISH, C. *Programming in Prolog* Springer-Verlag, (1994)

HINMAN, P.G. *Recursion-Theoretic-Hierachies. Perspectives in Mathematical Logic* ed. Springer-Verlag-, Berlín-N.Y. (1978)

PARKINS, W. (et.al.) *The philosophical Computer*. *Explorary Enssays in Philosophical Modeling*, MIT PRESS, E.U. (1998)

ROSS ANDERON, A. *Minds and Machines* ed. Prentice-Hall, N.J. (1958)

TURING, A. Computing Machinery and Intelligence (1950) en Alan Ross (comp.) *Minds and Machines*, Pretice-Hall, N.J. (1958)