

SOBRE CONJUNTOS ALCANZABLES
EN EL PLANO

TESIS QUE PRESENTA EL
✓MAT. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
✓MAESTRO EN MATEMATICAS

OCTUBRE DE 1989 ✓

DIRECTOR DE TESIS: DR. RODOLFO SUAREZ

✓DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Conf. J. B. 22.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Rodolfo Suárez, director de esta tesis, por toda su ayuda.

Al Dr. Luis Verde, jefe del Depto. de Matemáticas, por todo el apoyo brindado.

Al M. en C. Joaquín Delgado, por las gráficas.

A la Arq. Teresa Alarcón, por los dibujos.

A Martha Patricia Sánchez, por su excelente trabajo de mecanografiado.

Y por último, y de manera muy especial, al Dr. Pedro Armendariz, por ...

111836

A mis padres

INDICE

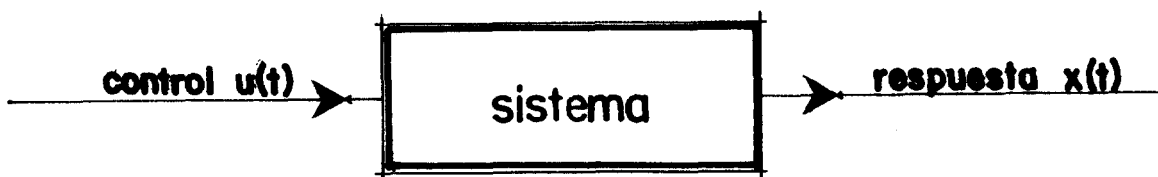
Introducción.....	1
Capítulo I: Resultados Locales	
§ 1. Un control.....	16
§ 2. Dos controles.....	32
§ 3. Ejemplos.....	37
Capítulo II: Resultados Globales	
§ 1. Sistemas Lineales.....	44
§ 2. Sistemas Bilineales.....	51
§ 2.1. Homogéneos.....	58
§ 2.2. No-Homogéneos.....	63
§ 3. Dependencia de la Cota del Control.....	67
Apéndice.....	69
Conclusiones.....	76
Referencias.....	77

INTRODUCCION

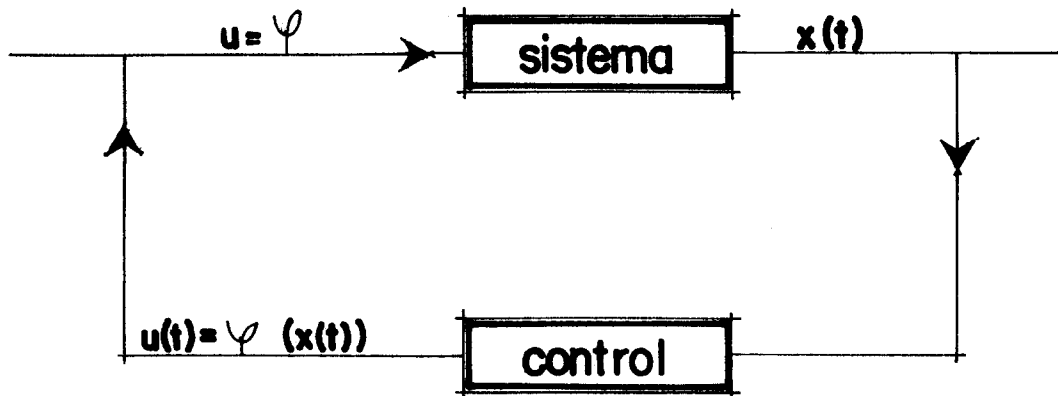
En teoría de control, se está interesado en gobernar los estados de un sistema, usando funciones externas, controles, con el fin de llevarlos al cabo de un tiempo, a cierto estado prefijado llamado objetivo. Puede ser que el sistema por sí solo llegue al objetivo, entonces se introducen controles con el fin de que lo alcance en forma "mejor", por ejemplo, en el menor tiempo posible. Tales controles son llamados óptimos.

Existen dos tipos de controles: de lazo abierto y de lazo cerrado.

En el control de lazo abierto se aplica al sistema una cierta señal fija $u(t)$ para obtener una respuesta en función de un estado inicial dado. Esquemáticamente



En el control de lazo cerrado (retroalimentación) el control $u(t)$ depende de la respuesta $x(t)$, y varía en función de ésta con el fin de alcanzar el objetivo. Esquemáticamente



El diseño de controles retroalimentados se conoce con el nombre de síntesis.

En la práctica, los controles representan magnitudes acotadas: potencia, concentración, masa, etc. Luego, supondremos que nuestro control es acotado.

Un tipo de controles que resultan óptimos en muchos casos y que se usan frecuentemente en la práctica son los controles bang-bang.

Decimos que la función $u: [0, T] \rightarrow \langle U, -U \rangle$ es un control de tipo bang-bang con k conmutaciones, si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = T$ tal que $u(t)$ es constante en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y toma valores diferentes en intervalos contiguos. A las trayectorias correspondientes les llamamos trayectorias bang-bang con k conmutaciones.

En seguida damos un ejemplo en donde se introduce un control bang-bang.

EJEMPLO 1. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}\tag{1}$$

El origen es un centro. Deseamos introducir un control de manera que cualquier punto del plano fase sea llevado al origen en tiempo finito.

Considere el sistema de control

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + u, \quad |u| = 1\end{aligned}\tag{2}$$

Si $u=1$ se traslada el origen al punto $(1,0)$ y si $u=-1$ al $(-1,0)$.

Consideremos la curva $\mathcal{C}$, gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ [1-(x+1)^2]^{1/2} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -[1-(x-1)^2]^{1/2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Si (x_0, y_0) está por encima de $\mathcal{C}$ hacemos $u = -1$ y si está por debajo hacemos $u=1$. Al llegar la solución a $\mathcal{C}$ se cambia de control. La curva $\mathcal{C}$ se conoce como curva de cambio.

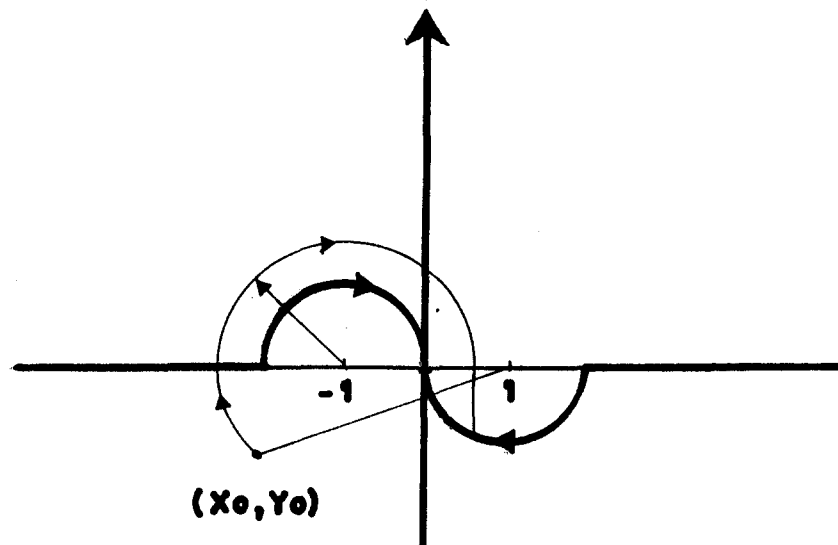


Figura 1

El conjunto de puntos del espacio fase que pueden ser llevados al objetivo es llamado conjunto controlable. En el ejemplo 1 el conjunto controlable es $\mathbb{R}^2$.

Se dice que un sistema es globalmente controlable si para cualesquiera dos puntos del espacio fase, es posible describir una trayectoria que los una. El sistema del ejemplo 1 es globalmente controlable. Un sistema es localmente controlable desde x_0 si el conjunto controlable contiene una vecindad de x_0 .

El siguiente ejemplo nos muestra que si el conjunto controlable de un sistema es $\mathbb{R}^2$ eso no implica que el sistema sea globalmente controlable.

EJEMPLO 2. Considere el sistema de control

$$\dot{x} = -x + u$$

$$\dot{y} = -2y + u \quad |u| \leq 1$$

cuyo objetivo es el origen.

Con $u = 0$ el sistema es globalmente asintóticamente estable, entonces cualquier punto puede ser llevado al origen, luego el conjunto controlable es $\mathbb{R}^2$; sin embargo, existen puntos que no pueden ser unidos por trayectoria alguna, por ejemplo $x_1 = (2,2)$ y $x_2 = (-2,-2)$. Para cada u , las curvas integrales por x_1 y x_2 convergen a un punto sobre el segmento de recta que une los puntos $(1,1/2)$ y $(-1,-1/2)$.

Dado x_0 en el plano fase, el conjunto de puntos que pueden ser alcanzados desde x_0 es llamado conjunto alcanzable desde x_0 .

Para sistemas autónomos, el problema de encontrar el conjunto controlable es equivalente al de encontrar el conjunto alcanzable. Esto se sigue de lo siguiente: considere el sistema de control autónomo

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq U \quad (*)$$

cuyo objetivo es el origen. Si $x(t)$ es una solución de (*) tal que $x(0) = x_0$ y $x(t_1) = 0$, entonces $y(t) = x(t_1 - t)$ es solución de la ecuación

$$\dot{y} = -f(y, \tilde{u}) \quad (**)$$

con $y(0) = 0$ y $y(t_1) = x_0$, $\tilde{u}(t) = u(t_1 - t)$.

Luego, las trayectorias de (*) y (**) son idénticas, sólo que están recorridas en direcciones opuestas.

Tenemos entonces que x_0 puede ser llevado al origen bajo (*) si y sólo si x_0 puede ser alcanzado desde el origen bajo (**).

Dado el sistema de control autónomo

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq U$$

decimos que el punto x_0 es un punto de equilibrio si existe $\bar{u} \in [-U, U]$ tal que $f(x_0, \bar{u}) = 0$.

En la práctica es conveniente controlar alrededor de puntos de equilibrio. Si logramos llevar una trayectoria a un punto de equilibrio estable, entonces permaneceremos ahí con el control $\bar{u}$. Además, el conjunto de puntos de equilibrio es importante para determinar las regiones de alcanzabilidad. Por ello, dado un sistema de control, determinaremos su conjunto de puntos de equilibrio. En lo sucesivo, supondremos que nuestro objetivo es un punto de equilibrio. O en términos de alcanzabilidad, supondremos que el punto del cual partimos es un punto de equilibrio.

RESULTADOS Y DEFINICIONES

Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual y la norma euclídeana. Sea $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ con $k_i \in \mathbb{R}^+$ para $i = 1, 2, \dots, m$.

Sea

$$\Omega(k) = \Omega = \{c \in \mathbb{R}^m \mid |c_i| \leq k_i, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

Para $t_1 \geq 0$, definimos los conjuntos

$$U_m[0, t_1] = \{u: [0, t_1] \rightarrow \Omega, \text{ con } u \text{ acotada y medible}\}$$

$$U_m = \bigcup \{U_m[0, t_1] \mid t_1 \geq 0\} \quad \text{y} \quad U \subseteq U_m \text{ arbitrario}$$

U_m representa el conjunto de controles admisibles. Podemos considerar una clase especial de controles en U_m : los controles bang-bang, denotados por U_{bb} y definidos como

$$U_{bb} = \bigcup_{t_1 > 0} \{u \in U_m[0, t_1] \mid |u_i(t)| = 1 \text{ para } t \in [0, t_1], i=1, \dots, m\}$$

Supondremos que la dinámica del sistema de control está determinada por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

El sistema (1) tiene solución si para cada $u \in U$ y cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe al menos una función absolutamente continua

$$x(t) = x(t; t_0, x_0, u(t))$$

tal que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{y para casi toda } t \quad x(t_0) = x_0$$

Para asegurar la existencia y unicidad de las soluciones se puede suponer que $f(t, x, u)$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial u_k}$ son continuas sobre $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$.

El problema de control es determinar aquellos x_0 y $u(\cdot) \in U$ tales que la solución asociada $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ satisfaga que $x(t_1) \in \mathcal{G}$, para algún $t_1 > 0$. Aquí $\mathcal{G}$ representa al conjunto objetivo. En este trabajo supondremos que el objetivo es un punto, digamos x^* .

Definimos entonces al conjunto controlable como

$$C = \bigcup_{t_1 > t_0} C(t_1)$$

donde $C(t_1) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } u(t) \in U \text{ tal que } x(t_1; t_0, x_0, u(t)) = x^*\}$ es el conjunto de estados que pueden ser llevados al objetivo x^* en un tiempo t_1 .

Inversamente, el conjunto alcanzable desde x_0 se define como

$$R(x_0) = \bigcup_{t_1 > t_0} R(x_0, t_1)$$

donde $R(x_0, t_1) = \{x(t_1; t_0, x_0, u) \mid u \in U\}$ representa el conjunto de estados que pueden ser alcanzados exactamente en un tiempo t_1 .

Denotaremos por

$$R(x_0, \leq T) = \bigcup_{t_0 < t \leq T} R(x_0, t)$$

al conjunto de estados que pueden ser alcanzados desde x_0 dentro de un tiempo menor o igual a T .

Diremos que un sistema es localmente controlable desde x_0 si $R(x_0)$ contiene una vecindad de x_0 . Será localmente controlable para t pequeño desde x_0 , si $R(x_0, \leq T)$ contiene una vecindad de x_0 para cada $T > 0$.

Llamaremos cono alcanzable al conjunto

$$RC(x_0) = \{(t, R(x_0, t)) \mid t \geq t_0\}$$

Sean $u \in U$ y $t_0 < s < t_1$. Supongamos que la restricción de $u(t)$ a $[t_0, s]$ pertenece a U . Luego, si $x(t_1) \in R(x_0, t_1)$ se sigue que $x(s) \in R(x_0, s)$ para cada s , con $t_0 < s < t_1$. Esto nos muestra que los conjuntos alcanzables $R(x_0, t)$ son como rebanadas del cono alcanzable, como lo muestra la figura 2.

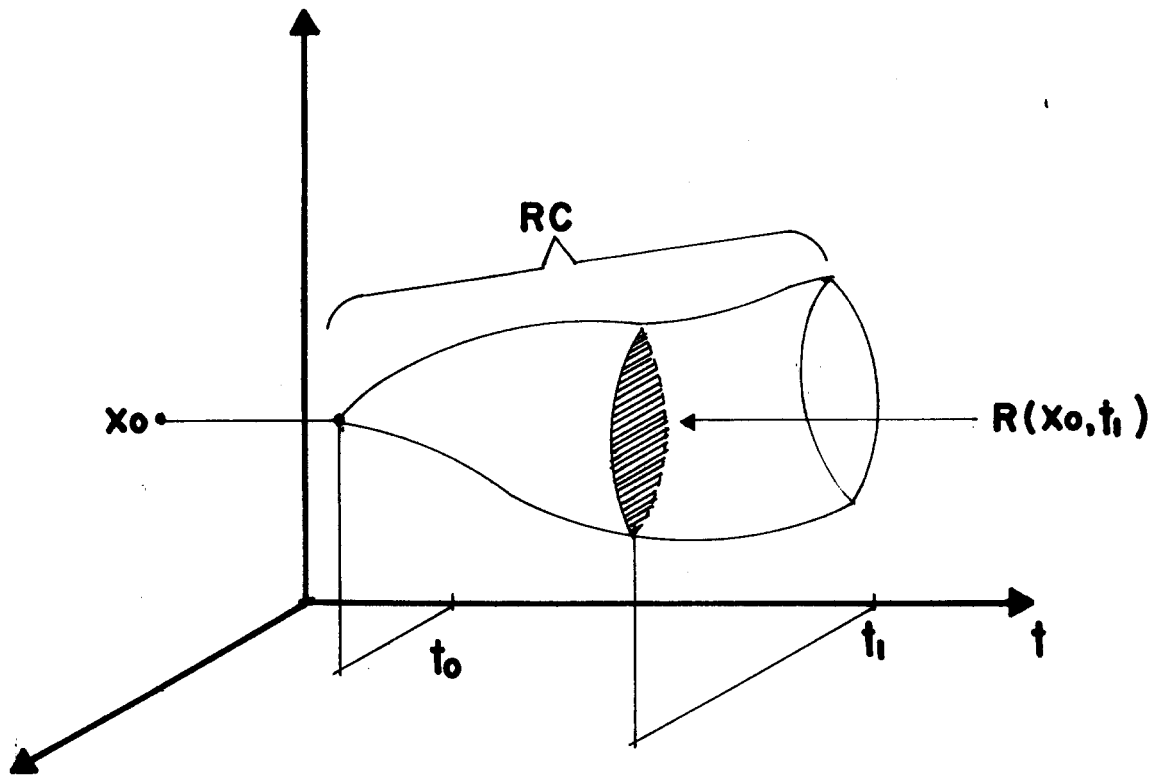


Figura 2

Dos de los principales problemas en Teoría de Control son:

- i) describir el conjunto controlable C
- ii) describir como cambia C si variamos el conjunto de controles.

Dos propiedades son deseables en C : que $C = \mathbb{R}^n$ o que contenga al cero en su interior.

Imaginemos un proceso real, el cual ha alcanzado su objetivo. Puede ocurrir que existan perturbaciones que alejen al proceso del objetivo. Luego, es importante que puedan ser llevados al objetivo los estados cercanos a él; de aquí que sea deseable que C contenga una vecindad del objetivo.

Uno de los problemas abiertos más interesantes matemáticamente (ver Arnold [4]), además de su relevancia lógica en las aplicaciones, es el problema de caracterizar los conjuntos controlables (alcanzables) de sistemas de control. A continuación enlistaremos una serie de resultados conocidos que nos muestran cómo se ha avanzado en la solución de dicho problema.

Considere el sistema autónomo de control

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \quad (1)$$

cuyo objetivo es el origen. Supóngase que $f(0,0) = 0$ y que $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Llamaremos matriz de controlabilidad del sistema (1), a la matriz $n \times mn$ definida por

$$M_f = [B_f, A_f B_f, A_f^2 B_f, \dots, A_f^{n-1} B_f]$$

donde $A_f = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $B_f = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$. Denotemos por $\text{rg}(A)$ al rango de A .

TEOREMA 1: Para el sistema (1) descrito arriba, se tiene lo siguiente

- i) C es arco conexo
- ii) C es abierto si y sólo si $0 \in \text{Int}(C)$ (interior de C)
- iii) Si $\text{rg}(M_f) = n$ entonces $0 \in \text{Int}(C)$
- iv) Sea $\dot{x} = f(x, 0)$ globalmente asintóticamente estable. Luego, si $\text{rg}(M_f) = n$ entonces $C = \mathbb{R}^n$.
- v) $C(t)$ es compacto y cambia continuamente con el tiempo

Consideremos ahora el caso lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \quad (2)$$

con objetivo el origen. Como se puede esperar, en este caso podemos ser más específicos en las propiedades de los conjuntos alcanzables. La matriz de controlabilidad del sistema (2) es la matriz

$$M = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

TEOREMA 2: Para el sistema (2) descrito arriba tenemos lo siguiente

- i) Si U es simétrico entonces C es simétrico y convexo
- ii) $\text{rg}(MD) = n$ si y sólo si $0 \in \text{Int}(C)$
- iii) si $\text{rg}(MD) < n$ entonces existe un hiperplano fijo el cual contiene $C(t_1)$, para $t_1 > 0$.
- iv) $C = \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\text{rg}(MD) = n$ y $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ para todo valor propio λ de A
- v) Si $U = \mathbb{R}^m$, $C = \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\text{rg}(MD) = n$.

Los siguientes resultados nos muestran que el conjunto controlable no cambia si consideramos sólo controles bang-bang.

Sea $C_{BB} = \bigcup_{t \geq 0} C_{BB}(t)$ el conjunto controlable con controles bang-bang.

TEOREMA 3: Si t es suficientemente pequeño, para el sistema no lineal (1) descrito arriba tenemos que

$$C(t_1) = C_{BB}(t_1)$$

TEOREMA 4: Para el sistema lineal (2) descrito arriba tenemos que

$$C = C_{BB}$$

El siguiente resultado nos asegura controlabilidad local para t pequeña, de un sistema no lineal.

Considere el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad \text{donde } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } |u| \leq U \quad (3)$$

donde f y g son campos vectoriales suaves (de clase C^∞) sobre $\mathbb{R}^n$.

Sean

$$\text{adf}(g(x)) = Df(x)g(x) - Dg(x)f(x) \text{ y } \text{ad}^k f(g(x)) = \text{ad}^{k-1} f(\text{adf}(g(x)))$$

Llamaremos corchetes de f a los campos $\text{ad}^k f$. Denotaremos por $L^k(f,g)(x)$ al espacio lineal generado por los corchetes de f y g los cuales poseen a lo más k g 's, para $k = 1, 2, \dots$

TEOREMA 5: Sean f y g campos vectoriales suaves sobre $\mathbb{R}^n$ con $f(x_0) = 0$. Supóngase que existe k tal que $L^k(f,g)(x_0) = \mathbb{R}^n$ y que $L^k(f,g)(x_0) = L^{k+1}(f,g)(x_0)$ para cada k impar, entonces, el sistema (3) es localmente controlable para t pequeña desde x_0 .

Para una prueba de los Teoremas 1,2 y 4 véase Macki-Strauss [8], para el Teorema 3 véase Wazewski [12] y para el Teorema 5 véase [14].

Estos resultados son igualmente válidos si cambiamos C por $R(x_0)$, el conjunto alcanzable desde x_0 , ya que los sistemas son autónomos.

Arnold [4] hace un estudio de las singularidades que ocurren en la frontera del conjunto alcanzable de sistemas de control en el plano, y menciona también lo poco que este problema ha sido estudiado.

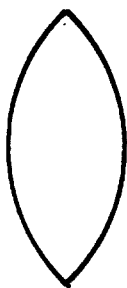
En este trabajo nuestro objetivo es: para el sistema autónomo de control

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq U \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

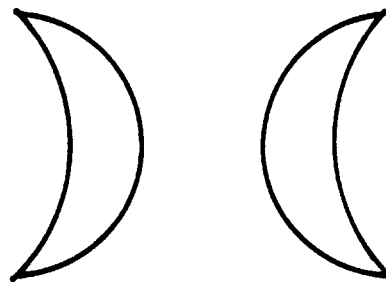
deseamos caracterizar el conjunto alcanzable desde x_0 , donde x_0 es un punto de equilibrio del sistema.

Quisiéramos poder determinar cuando el conjunto alcanzable es convexo, por ejemplo. En general nos interesará la convexidad estricta en el siguiente sentido: dados dos puntos en el conjunto, el segmento de recta que los une no intersecta a la frontera. Esta es una propiedad que se mantiene localmente.

Llamaremos lente biconvexa a un conjunto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ tal que su frontera consista de dos curvas simples $\gamma, \delta : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^2 con $\gamma(0) = \delta(0) \neq \gamma(1) = \delta(1)$ y tales que sus derivadas no se anulen y sus curvaturas sean de signos opuestos. Si las curvaturas son del mismo signo, obsérvese que la línea que une los puntos $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ no está en M . Es decir, M deja de ser convexo. En este caso diremos que la lente es concava-convexa. Ver Figura 3.



bi-convexa



concava-convexa

Figura 3

EJEMPLO 3. Para el sistema de control del ejemplo 2, calculamos su conjunto alcanzable desde $x_0 = 0$. Para ello, consideramos las trayectorias en sentido contrario del sistema original haciendo $t = -t$ obteniendo el nuevo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - u \\ \dot{y} &= 2y - u \quad |u| \leq 1\end{aligned}$$

Como el sistema original es autónomo se sigue que el conjunto alcanzable desde el origen es $\mathbb{R}^2$. No es difícil ver que el conjunto alcanzable desde el origen dentro de un tiempo T , siempre tiene la

forma de lente biconvexa (en la demostración al Teorema 2.12 se muestra como hacerlo). Ver figura 4.

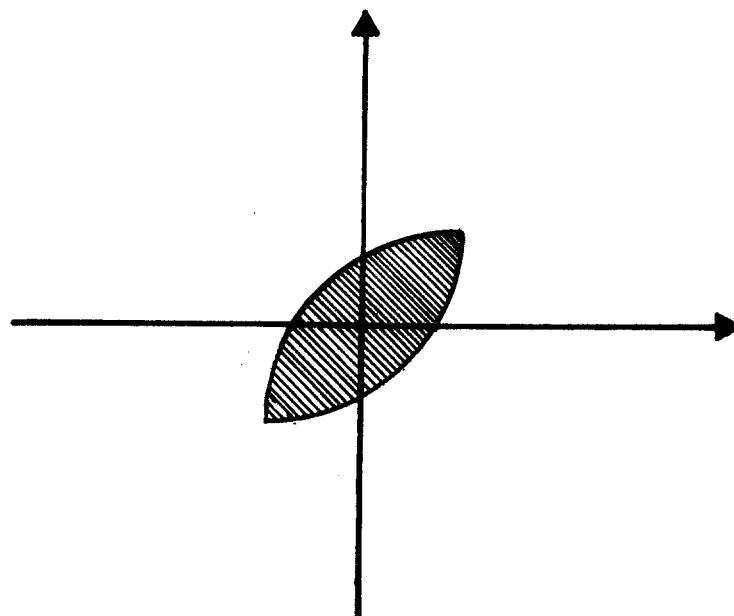


Figura 4

CAPITULO I

RESULTADOS LOCALES

En este capítulo daremos una caracterización local de los conjuntos alcanzables con uno y dos controles. El resultado principal para un control nos da condiciones para que el conjunto alcanzable tenga forma de lente biconvexa o lente cóncava-convexa. Para dos controles se prueba que, bajo ciertas hipótesis, el conjunto alcanzable es estrictamente convexo.

1) UN CONTROL

Empezamos la sección dando una descripción local del conjunto de puntos críticos. Luego, retomamos los resultados probados por Lobry [7], Espinoza et. al. [6] y Suárez-Alvarez [11]. Lobry prueba la existencia de una vecindad contenida en el conjunto alcanzable sin dar la forma de éste. Espinoza et. al. dan condiciones para que el conjunto alcanzable posea forma de lente biconvexa. Suárez-Alvarez dan condiciones para obtener además conjuntos alcanzables con forma de lente cóncava-convexa.

Mostraremos un resultado que engloba todas estas ideas y cuya prueba posee una mezcla de las herramientas usadas por aquellos, de tal suerte que se logra una simplificación.

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + u g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq U \quad (1)$$

$$x(0) = x_0$$

donde $f, g \in C^2$, con $f(x_0) = 0$ y $g(x_0) \neq 0$. La hipótesis $f(x_0) = 0$ nos asegurará que al llegar al objetivo x_0 podamos permanecer ahí con $u = 0$, si x_0 es estable.

CONJUNTO DE PUNTOS CRITICOS.

Deseamos encontrar los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$f(x) + u g(x) = 0 \quad \text{con} \quad |u| \leq U$$

Sea $H(x, u) = f(x) + u g(x)$. Sabemos que $H(x_0, 0) = 0$, luego, del teorema de la función implícita, si

$$\det \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} (x_0, 0) \right\} = \det \{ Df(x_0) \} \neq 0,$$

existe $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ con V vecindad de $u = 0$ tal que $h(0) = x_0$ y $F(h(u), u) = 0$.

Luego, sólo podemos asegurar la existencia de una curva de puntos críticos que pasa por x_0 si $\det \{ Df(x_0) \} \neq 0$.

CONJUNTOS ALCANZABLES.

Ya se ha mencionado la importancia que tienen los conjuntos alcanzables en teoría de control. Probaremos para t pequeña, que bajo ciertas hipótesis, el conjunto alcanzable tiene forma de lente biconvexa o cóncava-convexa.

Consideremos de nuevo el sistema (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + u g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq U \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1}$$

Agreguemos al vector de estados x el tiempo: $\bar{x} = (x_1, x_2, t) = (x, t)$, luego si $\bar{f} = (f, 1)$ y $\bar{g} = (g, 0)$, tenemos entonces el sistema aumentado

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}) + u \bar{g}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3, \quad |u| \leq U \\ \bar{x}(0) &= (x_0, 0)\end{aligned}\tag{2}$$

Sean $F(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})$ y $G(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) - \bar{g}(\bar{x})$. Denotemos por $F_t(\bar{x})$ al flujo local generado por F y por $G_t(\bar{x})$ al flujo local generado por G .

Definimos entonces las curvas integrales

$$\Gamma^+ = \{x(t) = F_t(\bar{x}_0) \mid t \geq 0\}, \quad \Gamma^- = \{y(t) = G_t(\bar{x}_0) \mid t \geq 0\}$$

A partir de éstas construimos dos conjuntos: uno formado por los arcos $F_t(\bar{x})$, $t \geq 0$ con $\bar{x} \in \Gamma^-$ y el otro formado por los arcos $G_t(\bar{x})$, $t \geq 0$ con $\bar{x} \in \Gamma^+$. Sean tales conjuntos

$$S_1 = \{x(t, \tau) = G_{t-\tau}(F_\tau(\bar{x}_0)) \mid t \geq 0 \text{ y } 0 \leq \tau \leq t\}$$

$$S_2 = \{y(t, \tau) = F_{t-\tau}(G_\tau(\bar{x}_0)) \mid t \geq 0 \text{ y } 0 \leq \tau \leq t\}$$

Ver Figura 1.

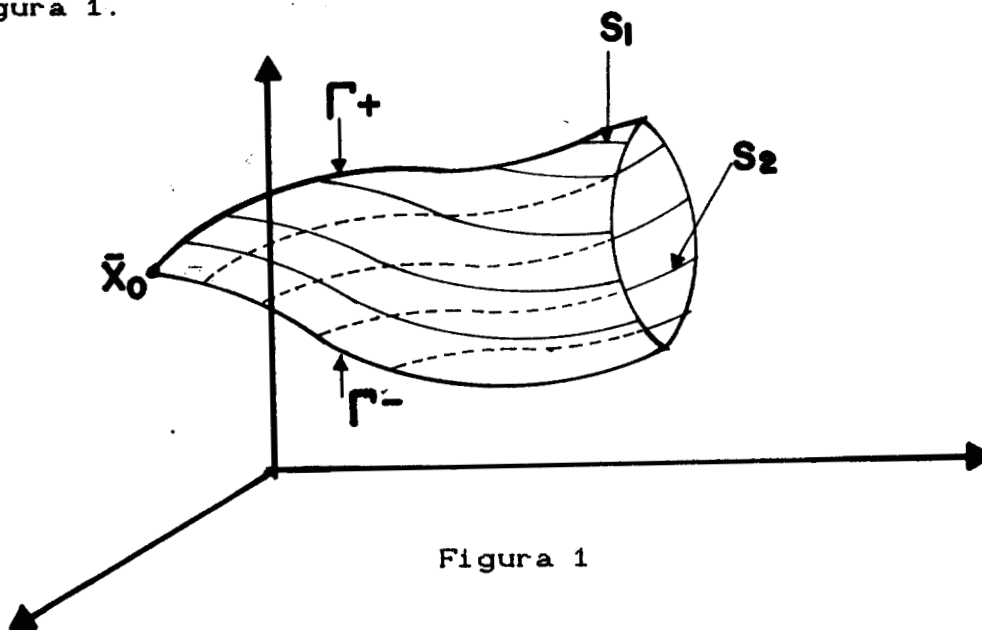


Figura 1

En los siguientes párrafos probaremos que S_1 y S_2 son superficies con frontera, las cuales para t suficientemente pequeña, no se intersectan. Se afirma entonces, que la región encerrada por ellas es el conjunto alcanzable desde $\bar{x}_0$ hasta el tiempo t , del sistema (2), el cual coincide con el cono alcanzable desde x_0 del sistema (1).

Las siguientes proposiciones son tomadas de [3] y [10].

DEFINICION 1.1. Denotaremos por $\Gamma^2(\Omega)$ al espacio vectorial de los campos vectoriales C^2 sobre Ω . Luego, para $X, Y \in \Gamma^2(\Omega)$, definimos los corchetes de Lie de X y Y como el campo

$$[X, Y](p) = DX(p) Y(p) - DY(p) X(p)$$

DEFINICION 1.2. Sea $X \in \Gamma^2(\Omega)$, $\varphi \in \text{Dif}^2(\Omega)$. Definimos la acción φ_* : $\Gamma^2(\Omega) \rightarrow \Gamma^2(\Omega)$ de φ sobre $\Gamma^2(\Omega)$ como

$$(\varphi_* X)(p) = (D_{\varphi^{-1}(p)} \varphi) (X(\varphi^{-1}(p)))$$

PROPOSICION 1.3. Sean $X, Y \in \Gamma^2(\Omega)$ y sean φ_t el flujo local asociado a X y ψ_t el asociado a Y . Luego

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t} \left[\psi_{-t} (\varphi_t (\psi_t (x_0))) \right] - x_0}{t^2}$$

PROPOSICION 1.4. Sean $X, Y \in \Gamma^2(\Omega)$ y φ_t el flujo asociado a X

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[Y(p) - ((\varphi_t)_* Y)(p)]}{t}$$

LEMA 1.5. Si $\bar{f}(\bar{x}_0)$, $\bar{g}(\bar{x}_0)$ y $[\bar{f}, \bar{g}](\bar{x}_0)$ son linealmente independientes, entonces S_1 y S_2 son superficies con frontera.

Prueba: La hipótesis equivale a que $F(\bar{x}_0)$, $G(\bar{x}_0)$ y $[F, G](\bar{x}_0)$ sean linealmente independientes. Sean $\varphi(t, x) = F_t(x)$ y $\psi(t, x) = G_t(x)$. Para $D = \{(t, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq t, t \geq 0\}$, sea $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^9$ definida por $\Phi(t, \tau) = \psi(t - \tau, \varphi(\tau, \bar{x}_0))$. Es claro que $\Phi(D) = S_1$. Además Φ es 1-1, porque si suponemos que existen $(t_1, \tau_1) \neq (t_2, \tau_2) \in D$ tales que $\Phi(t_1, \tau_1) = \Phi(t_2, \tau_2)$ i.e. $\psi(t_1 - \tau_1, \varphi(\tau_1, \bar{x}_0)) = \psi(t_2 - \tau_2, \varphi(\tau_2, \bar{x}_0)) = p$.

Por construcción de S_1 , el tiempo en llegar a p deberá ser el mismo por cualquier trayectoria, luego entonces $t_1 = t_2 = t$. Por lo tanto

$$\psi(t-\tau_1, \varphi(\tau_1, \bar{x}_0)) = \psi(t-\tau_2, \varphi(\tau_2, \bar{x}_0))$$

Por la unicidad de las soluciones, se tiene que

$$\psi(s-\tau_1, \varphi(\tau_1, \bar{x}_0)) = \psi(s-\tau_2, \varphi(\tau_2, \bar{x}_0)), \text{ para } s \in [a, t] \text{ con } a = \min\{t-\tau_1, t-\tau_2\} = \max\{\tau_1, \tau_2\}.$$

Si $a = \tau_1$, hagamos $s = \tau_1$; luego

$$\psi(0, \varphi(\tau_1, \bar{x}_0)) = \varphi(\tau_2, \bar{x}_0) = \psi(\tau_1-\tau_2, \varphi(\tau_2, \bar{x}_0)) = q$$

Por un lado, el campo en q es $F(q)$ y por otro es $G(q)$, lo cual no es posible, pues por la continuidad de los campos F y G , $F(q)$ y $G(q)$ son linealmente independientes.

Si $a = \tau_2$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D_1 \psi(t-\tau, \varphi(\tau, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t-\tau) = G(\Phi(t, \tau))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= D_1 \psi(t-\tau, \varphi(\tau, \bar{x}_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t-\tau) + D_2 \psi(t-\tau, \varphi(\tau, \bar{x}_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\tau, \bar{x}_0) \\ &= -G(\Phi(t, \tau)) + D_2 \psi(t-\tau, \varphi(\tau, \bar{x}_0)) F(\varphi(\tau, \bar{x}_0)) \end{aligned}$$

Sean $\varphi(\tau, x_0) = q$, $\psi(t-\tau, \varphi(\tau, \bar{x}_0)) = \psi(t-\tau, q) = p$.

De la proposición 1.4, se sigue que para $\varepsilon > 0$ existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$\|F(p) - (\psi_* F)(p) - \bar{t}[G, F](p)\| < \varepsilon \quad (*)$$

Supongamos que $D_2 \psi(\bar{t}, q) F(q) = \lambda(\bar{t}) G(p)$, con $\bar{t} = t - \tau$ pero $D_2 \psi(\bar{t}, q) F(q) = ((\psi_t)_* F)(p)$. Luego, sustituyendo en (*) obtenemos $\|F(p) - \lambda(\bar{t}) G(p) - \bar{t}[G, F](p)\| < \varepsilon$, lo cual no es posible (por la independencia lineal de F, G y $[G, F]$). Luego Φ tiene rango dos y su imagen es una superficie cuya frontera son las curvas

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= \psi(t, \bar{x}_0) = G_t(\bar{x}_0) = \Gamma^- \\ \text{y} \quad \Phi(t, t) &= \psi(0, \varphi(t, \bar{x}_0)) = F_t(\bar{x}_0) = \Gamma^+. \end{aligned}$$

Algo similar se hace para S_2 . Obsérvese que S_1 y S_2 tiene frontera común. ■

LEMA 1.6. Sean $\bar{f}(\bar{x}_0)$, $\bar{g}(\bar{x}_0)$ y $[\bar{f}, \bar{g}](\bar{x}_0)$ linealmente independientes. Luego, para t suficientemente pequeña, las superficies S_1 y S_2 no se intersectan fuera de la frontera.

Prueba (por contradicción)

Si existe un número finito de puntos de intersección, hacemos t menor ó igual al mínimo. Supongamos que existe una sucesión de tiempos $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ en los que ocurren las intersecciones, con $t_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, existen tiempos τ_n y ν_n , con $0 < \tau_n < t_n$ y $0 < \nu_n < t_n$, tales que

$$G_{t_n - \tau_n} \left[F_{\tau_n}(\bar{x}_0) \right] = F_{t_n - \nu_n} \left[G_{\nu_n}(\bar{x}_0) \right]$$

lo cual equivale a

$$G_{-\nu_n} \left[F_{-(t_n - \nu_n)} \left[G_{t_n - \tau_n} \left[F_{\tau_n}(\bar{x}_0) \right] \right] \right] = \bar{x}_0$$

De la proposición 1.3 se sigue que

$$[F, G](\bar{x}_0) = \lim_{t_n, \tau_n, \nu_n \rightarrow 0} \frac{G_{-\nu_n} \left(F_{-(t_n - \nu_n)} \left(G_{t_n - \tau_n} \left(F_{\tau_n}(\bar{x}_0) \right) \right) \right) - \bar{x}_0}{t_n^2 + \tau_n^2 + \nu_n^2}$$

esto implica que $[F, G](\bar{x}_0) = 0$, lo cual contradice que $[F, G](x_0) = 2U[\bar{g}, \bar{f}](x_0) \neq 0$ ■

Puede probarse que existe una región comprendida entre S_1 y S_2 cuya frontera es $S_1 \cup S_2$. Para ello, se considera la bola B de radio ϵ y se prueba que $B - S_1 \cup S_2$ no es arco conexo. Denotemos por R dicha región.

Ważewski [12] ha probado que para t pequeña, el conjunto alcanzable coincide con el conjunto alcanzable por trayectorias bang-bang. Luego, basta considerar sólo trayectorias bang-bang.

LEMA 1.7. Si una trayectoria bang-bang desde $\bar{x}_0$ tiene más de un cambio, entonces está en el interior de R .

Prueba: Basta probarlo para trayectorias con dos cambios. Sea $\bar{y}_0 = F_{t_0}(\bar{x}_0)$. Al igual que en el Lema 1.5, construimos las superficies

$$\bar{S}_2 = \{x(t, \tau, t_0) = F_{t-\tau}(G_\tau(\bar{y}_0)) \mid t_0 \leq \tau \leq t\}$$

$$\bar{S}_1 = \{y(t, \tau, t_0) = G_{t-\tau}(F_\tau(\bar{y}_0)) \mid t_0 \leq \tau \leq t\}$$

Diagrama de um sistema dinâmico em um espaço tridimensional. O sistema é representado por uma curva fechada que se divide em duas regiões, S_1 e S_2 , por uma superfície curva. O ponto de equilíbrio é rotulado como $\bar{y}_0$. As direções de fluxo são indicadas por setas: $\bar{S}_1$ aponta para cima e $\bar{S}_2$ aponta para a direita. O ponto de partida é rotulado como $\bar{x}_0$.

Supongamos que $\bar{S}_2$ y S_2 se intersectan al tiempo t_1 en el punto p. Luego, existen τ_1, τ_2 con $t_0 < \tau_1 < t_1$ y $\tau_2 < t_1$ tales que $F_{t_1-\tau_1}(G_{\tau_1}(\bar{y}_0)) = F_{t_1-\tau_2}(G_{\tau_2}(\bar{x}_0))$. Por la unicidad de las soluciones, tenemos que

donde $a = \min \{t_1 - \tau_1, t_1 - \tau_2\} = \max \{\tau_1, \tau_2\}$.

Si $a = \tau_1$, entonces, sustituimos $s = \tau_1$ en (*) y obtenemos

$$G_{\tau_1}(\bar{y}_0) = F_{\tau_1 - \tau_2}(G_{\tau_2}(\bar{x}_0))$$

lo cual no es posible pues $G_{\tau_1}(\bar{y}_0) \in S_1$ y $F_{\tau_1 - \tau_2}(G_{\tau_2}(\bar{x}_0)) \in S_2$.

Si $a = \tau_2$, hacemos $s = \tau_2$, en (*) y obtenemos

$$F_{\tau_2 - \tau_1}(G_{\tau_1}(\bar{y}_0)) = G_{\tau_2}(\bar{x}_0) = p$$

Sea $q = G_{\tau_1}(\bar{y}_0) \in S_1$, luego la trayectoria $F_1(q)$ lleva el punto $q \in S_1$ al punto $p \in S_2$. El vector tangente en q a la trayectoria es $F(q)$. De la demostración del Lema 1.5, tenemos que el vector normal a q es

$$\begin{aligned} N_q &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(\tau_1, t_0) \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}(\tau_1, t_0) \\ &= G(q) \times \left[-G(q) + D_2 \psi(\tau_1 - t_0, \bar{y}_0) F(\bar{y}_0) \right] \end{aligned}$$

Pero $D_2 \psi(\tau_1 - t_0, \bar{y}_0) F(\bar{y}_0) = (\psi_* F)(q) = \alpha G(q) + \beta F(q) + \gamma [F, G](q)$ por lo tanto

$$N_q = G(q) \times [\beta F(q) + \gamma [F, G](q)]$$

$N_q \cdot F(q) = 0$ si sólo si $\gamma G(q) \times [F, G](q) \cdot F(q) = 0$ lo cual no es posible dado que $G, F, [F, G]$ son linealmente independientes. Luego, la trayectoria $F_1(q)$ no permanece sobre la frontera de R ■

LEMA 1.8: Si p está en el interior de R , entonces existe una trayectoria bang-bang que une x_0 con p .

Prueba: Consideremos la trayectoria $F_1(p)$. Si seguimos esta trayectoria para t negativos, ésta habrá de intersectar la frontera de R . Si lo hace en $S_2 \cup \Gamma^+ \cup \{\bar{x}_0\}$, se contradice la unicidad de las soluciones. Si lo hace en Γ^- , implicaría que $p \in \partial R$, luego entonces, $F_1(p)$ intersecta, para t negativo a S_1 ; digamos en q al tiempo $\bar{t} < 0$. Luego, $F_{-\bar{t}}(q) = p$. Pero $q = G_{\tau_2}(F_{\tau_1}(\bar{x}_0))$ para algunos $\tau_1, \tau_2 > 0$, luego entonces, p es alcanzable por trayectorias bang-bang. ■

Tenemos probado entonces el siguiente teorema:

TEOREMA 1.9: Para t suficientemente pequeña, R coincide con el conjunto alcanzable desde $\bar{x}_0$ hasta el tiempo t , del sistema (2).

Estamos interesados en el conjunto alcanzable $R(x_0, t)$ para el sistema (1). Consideremos la proyección $\Pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Pi(x_1, x_2, t) = (x_1, x_2)$. Tenemos entonces el siguiente corolario.

COROLARIO: $R(x_0, t_1) = \Pi(R \cap \{t = t_1\})$.

Ver figura 3.

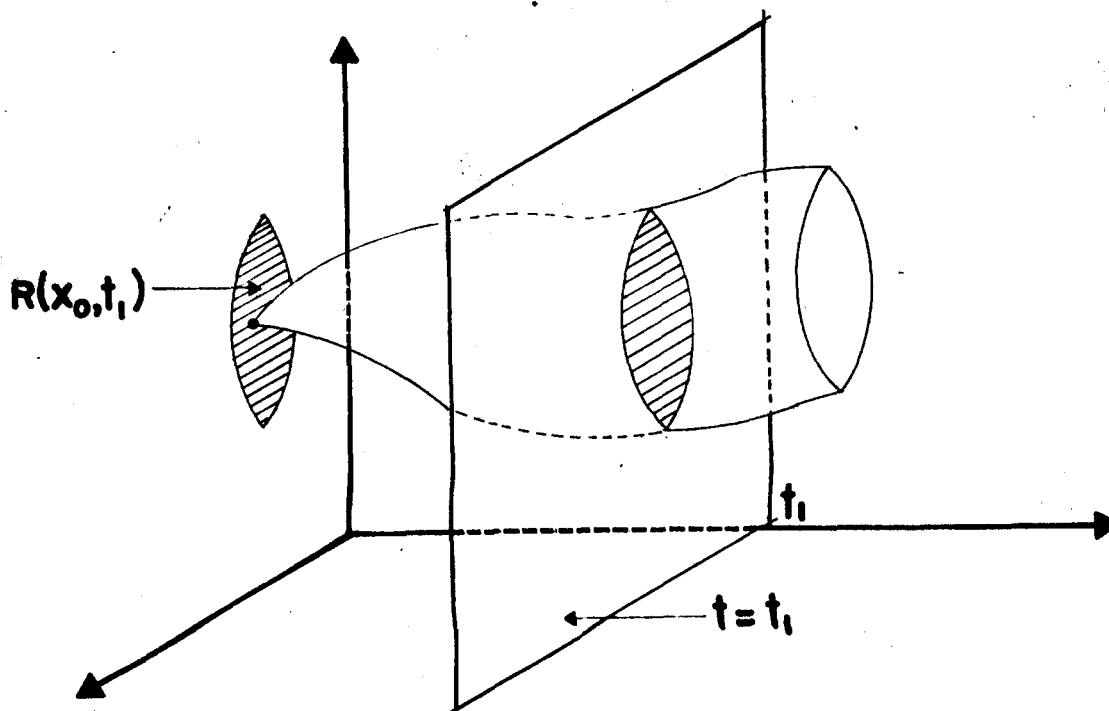


Figura 3

Probaremos ahora que, bajo ciertas hipótesis, el conjunto alcanzable $R(x_0, t_1)$ tiene la forma de lente biconvexa o cóncavo-convexa.

Por construcción de S_1 y S_2 , $x(t_1, \tau)$ y $y(t_1, \tau)$ representan las curvas frontera del conjunto $R(x_0, t_1)$. Sean

$$\gamma(\tau) = x(t_1, \tau) \quad y \quad \delta(\tau) = y(t_1, t_1 - \tau)$$

Observése que $\gamma(0) = \delta(0) \neq \gamma(t) = \delta(t)$.

LEMA 1.10: Supóngase que se cumple la siguiente desigualdad en x_0 .

$$2U|\det\{g(x_0), Dg(x_0) \cdot g(x_0)\}| < |\det\{g(x_0), [g, f](x_0)\}|$$

luego, para t suficientemente pequeña, las curvas $\gamma(\tau)$ y $\delta(\tau)$, con $0 \leq \tau \leq t$, tienen curvaturas de signos opuestos.

Prueba: Si $c(t)$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ y $K(c(t))$ es su curvatura, entonces $\text{sgn}(K(c(t))) = \text{sgn}(\det\{c'(t), c''(t)\})$, donde $\text{sgn}(x)$ es la función signo de x . De la prueba al Lema 1.5 tenemos que

$$\gamma'(\tau) = \frac{\partial x}{\partial \tau}(t, \tau) = -G(x(t, \tau)) + DG_{t-\tau}(F_\tau(\bar{x}_0)) F(F_\tau(\bar{x}_0))$$

De la Definición 1.2 y la Proposición 1.4 se sigue que

$$\begin{aligned} DG_{t-\tau}(F_\tau(\bar{x}_0)) F(F_\tau(\bar{x}_0)) &= ((G_{t-\tau})_* F)(x(t, \tau)) \\ &\approx F(x(t, \tau)) - (t-\tau)[G, F](x(t, \tau)) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}(t, \tau) = -G(x(t, \tau)) + F(x(t, \tau)) - (t-\tau)[G, F](x(t, \tau)) + \dots$$

De esto último se sigue entonces que

$$\gamma''(\tau) = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}(t, \tau) = D(F-G)(x(t, \tau)) \frac{\partial x}{\partial \tau}(t, \tau) + [G, F](x(t, \tau)) + \dots$$

las cuales en términos de $\bar{f}$ y $\bar{g}$ se expresan como

$$\gamma'(\tau) = 2U\bar{g}(x(t, \tau)) - 2U(t-\tau)[\bar{f}, \bar{g}](x(t, \tau)) + \dots$$

$$\gamma''(\tau) = 4U^2 D\bar{g}(x(t, \tau))\bar{g}(x(t, \tau)) + 2U[\bar{f}, \bar{g}](x(t, \tau)) + \dots$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} \det\{\gamma'(\tau), \gamma''(\tau)\} &\approx \\ &\approx \det\{2U\bar{g}(x(t, \tau)), 4U^2 D\bar{g}(x(t, \tau))\bar{g}(x(t, \tau)) + 2U[\bar{f}, \bar{g}](x(t, \tau))\} \\ &= 4U^2 \det\{\bar{g}(x(t, \tau)), 2UD\bar{g}(x(t, \tau))\bar{g}(x(t, \tau))\} + \\ &\quad 4U^2 \det\{\bar{g}(x(t, \tau)), [\bar{f}, \bar{g}](x(t, \tau))\} \end{aligned}$$

Análogamente para δ , obtenemos

$$\delta'(\tau) = 2U\bar{g}(y(t, t-\tau)) + 2U\tau [\bar{g}, \bar{f}](y(t, t-\tau)) + \dots$$

$$\delta''(\tau) = 4U^2 D\bar{g}(y(t, t-\tau))\bar{g}(y(t, t-\tau)) - 2U[\bar{f}, \bar{g}](y(t, t-\tau)) + \dots$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} \det\{\delta'(\tau), \delta''(\tau)\} &\approx \\ &\approx \det\{2U\bar{g}(y(t, t-\tau)), 4U^2 D\bar{g}(y(t, t-\tau))\bar{g}(y(t, t-\tau)) - 2U[\bar{f}, \bar{g}](y(t, t-\tau))\} \\ &= 4U^2 \det\{\bar{g}(y(t, t-\tau)), 2UD\bar{g}(y(t, t-\tau))\bar{g}(y(t, t-\tau))\} \\ &\quad - 4U^2 \det\{\bar{g}(y(t, t-\tau)), [\bar{f}, \bar{g}](y(t, t-\tau))\} \end{aligned}$$

Un rápido cálculo nos prueba que la hipótesis es equivalente a

$$2U|\det\{\bar{g}(\bar{x}_0), D\bar{g}(\bar{x}_0) \cdot \bar{g}(\bar{x}_0)\}| < |\det\{\bar{g}(\bar{x}_0), [\bar{g}, \bar{f}](\bar{x}_0)\}|$$

Luego, para t suficientemente pequeña se sigue lo deseado. ■

LEMA 1.11: Supóngase que se cumple la siguiente desigualdad en x_0

$$2U|\det\{g(x_0), Dg(x_0) \cdot g(x_0)\}| > |\det\{g(x_0), [g, f](x_0)\}|$$

luego, para t suficientemente pequeña, las curvas $\gamma(\tau)$ y $\delta(\tau)$, con $0 \leq \tau \leq t$, tienen curvaturas del mismo signo.

Prueba: Análoga a la del lema anterior.

TEOREMA 1.12: Supóngase que $\det\{g(x_0), [g, f](x_0)\} \neq 0$. Luego, para t suficientemente pequeña

i) si $2U|\det\{g(x_0), Dg(x_0) \cdot g(x_0)\}| < |\det\{g(x_0), [g, f](x_0)\}|$

entonces $R(x_0, t)$ tiene forma de lente convexa.

ii) si $2U|\det\{g(x_0), Dg(x_0) \cdot g(x_0)\}| > |\det\{g(x_0), [g, f](x_0)\}|$

entonces $R(x_0, t)$ tiene forma de lente concava-convexa.

Prueba: Basta probar que $\gamma'(0) \cdot \gamma'(\tau) > 0$ y $\delta'(0) \cdot \delta'(\tau) > 0$ para $\tau \in (0, t]$.

Pero

$$\gamma'(0) \cdot \gamma'(\tau) \approx 4U^2 \bar{g}(x(t, 0)) \cdot \bar{g}(x(t, \tau))$$

y
$$\delta'(0) \cdot \delta'(\tau) = 4U^2 \bar{g}(y(t, t)) \cdot \bar{g}(y(t, t-\tau))$$

luego, si t es pequeño, ambos son positivos. ■

Veamos con más detalle la forma del conjunto alcanzable cuando se cumplen las hipótesis del Teorema 1.12.

Sean $A = 2U \det\{g(x_0), Dg(x_0)g(x)\}$ y $B = \det\{g(x_0), [f, g](x_0)\}$

Supongamos que $f(x_0)$ y $g(x_0)$ son linealmente independientes.

Podemos suponer que $\det\{f(x_0), g(x_0)\} > 0$. Ver figura 4.

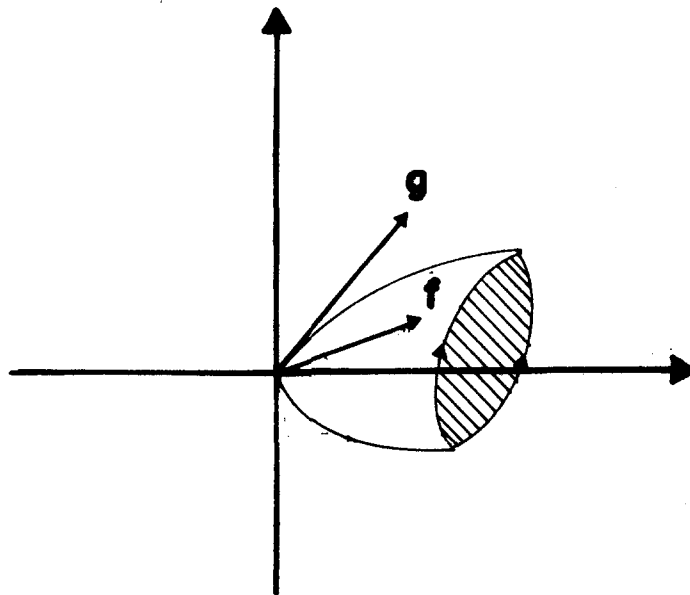


Figura 4

De la prueba al Lema 1.10 se observa que el signo de la curvatura de γ está determinado, para t pequeño, por $A+B$, y para δ por $A-B$.

Supongamos que $|A| < B$. Si $B > 0$ tenemos que $-B < A < B$, por lo tanto $A+B > 0$ y $A-B < 0$, luego entonces γ tiene curvatura positiva y δ negativa. Si $B < 0$ ocurre lo contrario.

Supongamos que $|A| > B$. Si $B > 0$ tenemos que $A > B$ ó $A < -B$. Si $A > B$, entonces $A+B > 2B > 0$ y $A-B > 0$ por lo tanto, γ y δ tienen curvaturas positivas. Si $A < -B$ entonces $A+B < 0$ y $A-B < -2B < 0$, por lo tanto ambas tienen curvaturas negativas. Si $B < 0$ ocurre algo similar. Resumimos todo lo anterior en las figuras 5 y 6.

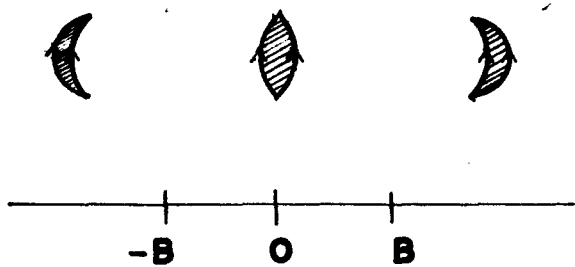


Figura 5

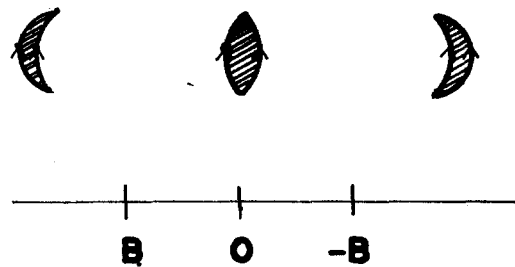


Figura 6

Si $\det(f(x_0), g(x_0)) < 0$ se obtiene algo similar. Ver figuras 7 y 8.

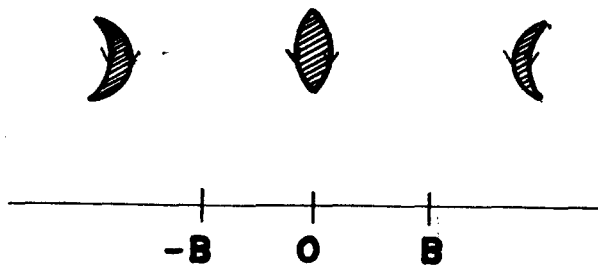


Figura 7

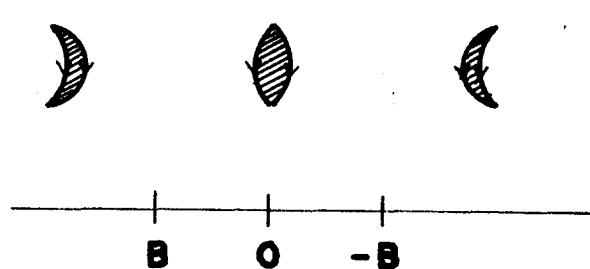


Figura 8

2) DOS CONTROLES

En esta sección probaremos que el conjunto alcanzable con dos controles es estrictamente convexo, para t pequeño. Para ello retomaremos las ideas mostradas en la sección anterior y iremos deduciendo las hipótesis necesarias para obtener la convexidad estricta. No se analiza el conjunto de puntos críticos ya que con dos controles es posible obtener franjas de puntos críticos en el plano.

Considere el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x), \quad |u_i| \leq U, \quad i = 1, 2.$$

Supóngase que $f, g_1, g_2 \in C^2(\Omega)$ con Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Supóngase además que $f(x_0) = 0$ y que $g_1(x_0)$ y $g_2(x_0)$ son linealmente independientes.

Supongamos que $\det(g_1(x_0), g_2(x_0)) > 0$. Si no fuese así, renombramos g_1 y g_2 . Esta suposición nos permite determinar los signos de las curvaturas de las curvas frontera del conjunto alcanzable.

Consideraremos los 4 controles bang-bang: (U, U) , $(U, -U)$, $(-U, U)$ y $(-U, -U)$. Cada uno de ellos nos generará una curva integral por x_0 . Con ellas construiremos 4 conjuntos alcanzables: los generados por los controles $(U, \pm U)$, $(\pm U, U)$, $(-U, \pm U)$ y $(\pm U, -U)$. Por ejemplo, los controles $(U, \pm U)$ nos proporcionan el sistema de control.

$$1) \quad \dot{x} = (f(x) + Ug_1(x)) + u_2 g_2(x), \quad |u_2| \leq U$$

No es necesario que el conjunto alcanzable de 1) tenga forma de lente biconvexa, bastaría con que las curvaturas de sus curvas frontera sean positivas. Obsérvese que

$$\det\{f(x_0) + Ug_1(x_0), g_2(x_0)\} = U \det\{g_1(x_0), g_2(x_0)\} > 0.$$

Ver figura 1.

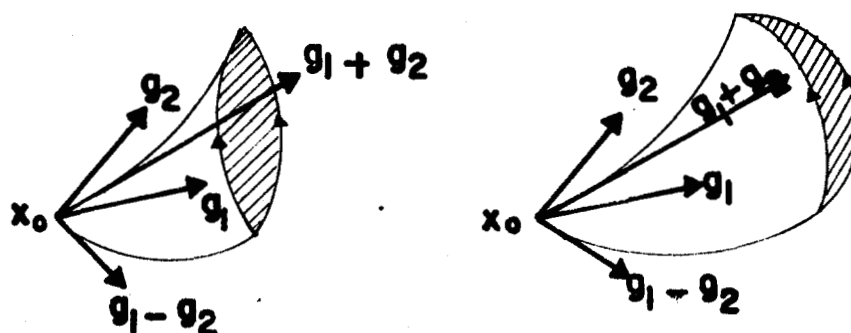


Figura 1

Luego, si hacemos $A_1 = 2U \det\{g_2(x_0), Dg_2(x_0) \cdot g_2(x_0)\}$ y $B_1 = \det\{g_2(x_0), [g_2(x_0), f(x_0) + Ug_1(x_0)]\}$, necesitamos que $A_1 + B_1 > 0$ y $A_1 - B_1 > 0$ o que $|A_1| < |B_1|$. Si $B_1 > 0$, tenemos entonces que $A_1 > B_1$ ó $-B_1 < A_1 < B_1$ luego, basta suponer que $A_1 > -B_1$. Si $B_1 < 0$, se sigue que $A_1 > B_1$ (ver figuras 7 y 8 de § 1).

Luego, para obtener cualquiera de las situaciones mostradas en la figura 1, necesitamos suponer que $A_1 + |B_1| > 0$.

Para los controles $(\pm U, U)$ ocurre algo un poco diferente. El sistema asociado es

$$2) \quad \dot{x} = (f(x) + Ug_2(x)) + u_1 g_1(x), \quad |u_1| \leq U$$

En este caso $\det\{f(x_0) + Ug_2(x_0), g_1(x_0)\} = U \det\{g_2(x_0), g_1(x_0)\} < 0$.

La figura 2 nos muestra las situaciones que deseamos que ocurran. De las figuras 9 y 10 del capítulo anterior, se sigue que, si hacemos

$$A_2 = 2U \det\{g_1(x_0), Dg_1(x_0) \cdot g_1(x_0)\} \quad y$$

$$B_2 = \det\{g_1(x_0), [g_1(x_0), f(x_0) + Ug_2(x_0)]\},$$

con $A_2 - |B_2| < 0$ obtenemos lo deseado.

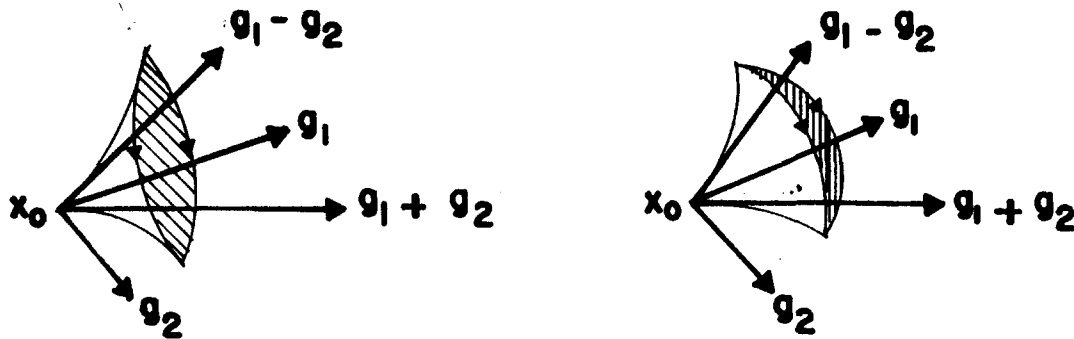


Figura 2

Para los controles $(-U, \pm U)$, el sistema asociado es

$$3) \quad \dot{x} = (f(x) - Ug_1(x)) + u_2 g_2(x), \quad |u_2| \leq U$$

y las hipótesis es $A_1 - |B_1| < 0$, con

$$B_1 = \det\{g_2(x_0), [g_2(x_0), f(x_0) - Ug_1(x_0)]\}$$

Para los controles $(\pm U, -U)$, el sistema asociado es

$$4) \quad \dot{x} = (f(x) - Ug_2(x)) + u_1 g_1(x), \quad |u_1| \leq U$$

y la hipótesis es $A_2 + |B_4| > 0$, con

$$B_4 = \det\{g_1(x_0), [g_1(x_0), f(x_0) - U g_2(x_0)]\}$$

En la figura 3 se muestra un posible caso

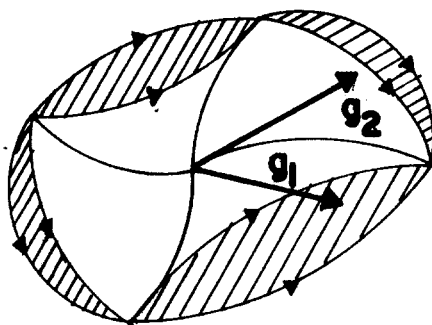


Figura 3

TEOREMA 2.1: Sea el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x), \quad |u_i| \leq U, \quad i=1,2.$$

con $f(x_0) = 0$ y $\det\{g_1(x_0), g_2(x_0)\} \neq 0$. Supóngase que se cumplen las desigualdades

$$2|\det\{g_i(x_0), Dg_i(x_0) \cdot g_i(x_0)\}| < |\det\{g_i(x_0), [g_i(x_0), g_{i+1}(x_0)]\}| \quad i=1,2,$$

$$g_3 = g_1.$$

Luego, para t suficientemente pequeño, $R(x_0 \leq t)$ es estrictamente convexo.

Prueba: Supongamos que $\det\{g_1(x_0), g_2(x_0)\} > 0$. Basta probar que los conjuntos alcanzables de los sistemas 1)-4) se "unen bien".

Consideremos algunas de estas uniones, por ejemplo, la de los sistemas 1) y 2). Ver figura 4.

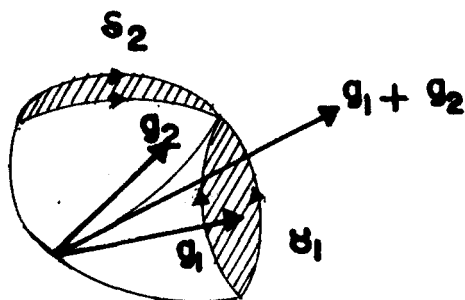


Figura 4

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\det\{g_2(x_0), [g_2, g_1](x_0)\} > 0$ y $\det\{g_1(x_0), [g_2, g_1](x_0)\} > 0$, luego, si γ_1 y δ_1 son las curvas frontera del conjunto alcanzable del sistema 1), entonces γ_1 será su cara externa. Para el sistema 2), si γ_1 y δ_2 son las curvas frontera, δ_2 será la cara externa. De la prueba al Lema 1.10 se sigue que

$$\dot{\gamma}_1(t) = 2Ug_2(x_1) \quad \text{y} \quad \dot{\delta}_2(t) = 2Ug_1(x_1) - 2Ut[f + Ug_2, g_1](x_1) + \dots$$

Sea $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, para asegurar convexidad, debemos tener

$(J \dot{\delta}_2(t)) \cdot (\dot{\gamma}_1(t)) > 0$, pero, para t suficientemente pequeña tenemos que

$$\begin{aligned} (J \dot{\delta}_2(t)) \cdot (\dot{\gamma}_1(t)) &\approx 4U^2 [(Jg_1(x_1)) \cdot g_2(x_1) - t(J[f + Ug_2, g_1](x_1)) \cdot (g_2(x_1))] \\ &\approx 4U^2 \det\{g_1(x_1), g_2(x_1)\} > 0 \end{aligned}$$

3) EJEMPLOS

Mediante algunos ejemplos mostraremos las técnicas empleadas en las pruebas de los resultados de este capítulo. En el primer ejemplo dejaremos libre la cota del control y veremos como para distintos valores de la cota se obtienen distintas formas en el conjunto alcanzable. (Ver Capítulo II §3). En el segundo ejemplo no se cumplen las hipótesis del Teorema 1.12, sin embargo, si se cumplen las del Teorema 5 en la Introducción. El último ejemplo es un modelo de fermentación.

Ejemplo 1.1: Considere el sistema de control

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -y^3 \\ -1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} y^3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |u| \leq U$$

donde $f(x,y) = (-y^3, -1)^T$ y $g(x,y) = (y^3, -1)^T$. Haciendo algunos cálculos encontramos que

$$[f, g]x(0) = (0, 6)^T, \quad Dg(x(0)) \cdot g(x(0)) = (0, -3),$$

luego

$$\det\{g, Dg \cdot g\}(x(0)) = -3 \quad \text{y} \quad \det\{g, [f, g]\}(x(0)) = 6,$$

por lo tanto $A = U$ y $B = 1$. Ahora bien, la solución general de nuestro sistema de control es

$$x(t) = x_0 - (u-1) \{ [y_0 - (u+1)(t-t_0)]^4 - y_0^4 \} / 4(u+1)$$

$$y(t) = y_0 - (u+1)(t-t_0)$$

Si $U = 0.5$ se cumple la hipótesis i) del Teorema 1.12 y el conjunto alcanzable al tiempo t , con t pequeño, tendrá la forma de lente convexa. Para $t_0 = 0$ y $u = 0.5$ la trayectoria es

$$x(t) = [(1-3t)^4 - 1]/12 \quad \text{y} \quad y(t) = 1 - 3t$$

cuya curva integral es $x = (y^4 - 1)/12$.

Análogamente, para $t_0 = 0$ y $u = -0.5$ tenemos la trayectoria

$$x(t) = 3[(1 - t/2)^4 - 1]/4 \quad \text{y} \quad y(t) = 1 - t/2$$

cuya curva integral es $x = 3(y^4 - 1)/4$. Ver figura 1.

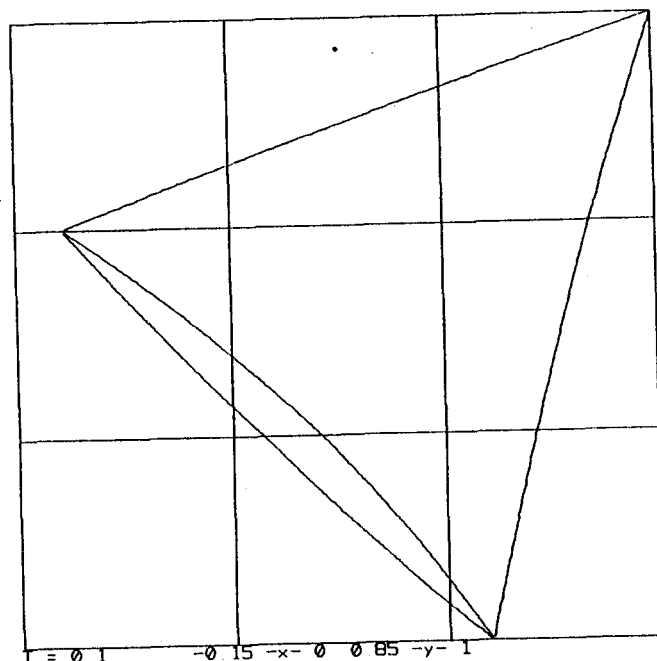


Figura 1

Si $U = 2$ se cumple la hipótesis ii) del Teorema 1.12. y tendremos entonces un lente cóncavo-convexo. Luego, procediendo de manera similar al caso anterior, obtenemos las curvas integrales

$$x = (1 - y^4)/12 \quad \text{y} \quad x = 3(1 - y^4)/4$$

Ver figura 2.

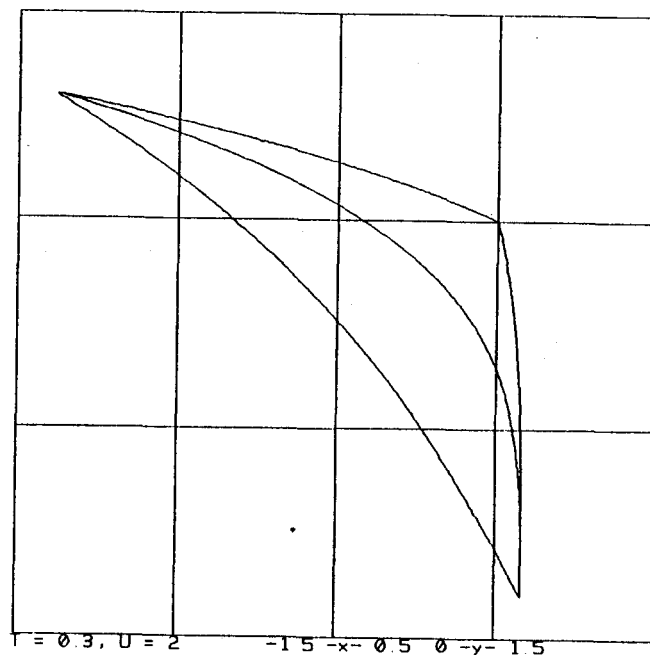


Figura 2

Ejemplo 1.2: Considere el sistema de control

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x \\ -y-x^2 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |u| \leq 1$$

donde $f(x,y) = (-x, -y-x^2)^T$ y $g(x,y) = (1,0)^T$. Haciendo algunos cálculos obtenemos

$$\det\{g, [f, g]\} = 0$$

Luego, este es un ejemplo donde no se cumplen las hipótesis del Teorema 1.12. sin embargo, si se cumplen las del Teorema 5 en la Introducción, luego, el conjunto alcanzable posee una vecindad del cero en su interior. Ver Figura 3.

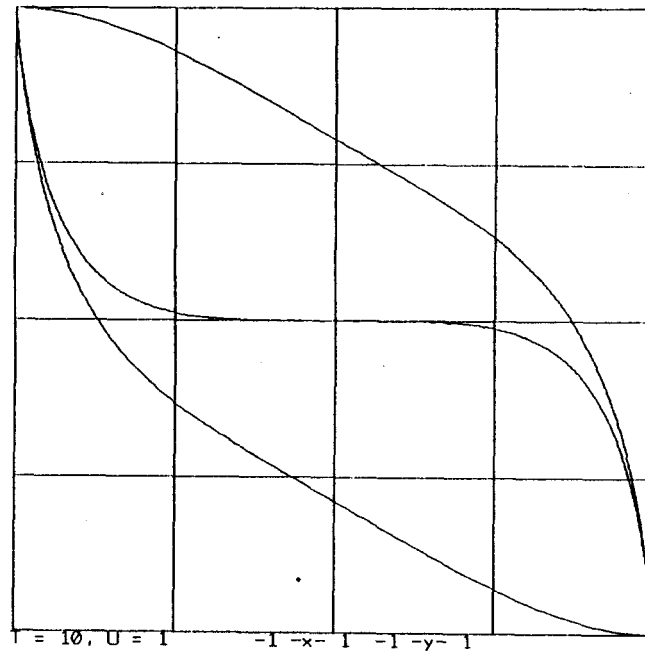


Figura 3

EJEMPLO 1.3: El siguiente es un modelo de un proceso de fermentación. (Ver [2]).

$$\dot{x} = (\mu - D)x$$

$$\dot{s} = D(S_a - s) - \mu x/R$$

$$\mu = \mu_m s / (K + s)$$

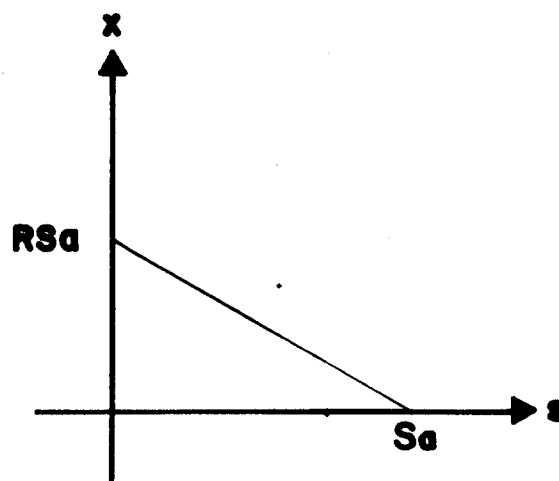
donde x y s son las variables de estado, S_a y D son variables de entrada y μ_m, R y K son parámetros del proceso. x y s representan las concentraciones de la biomasa y del sustrato en el fermentador, respectivamente; D es un flujo normalizado, llamado razón de dilución (flujo de alimentación/volumen del medio), S_a es la concentración del sustrato de alimentación, μ_m es la razón máxima

de crecimiento, R es el rendimiento por sustrato y K es la constante de afinidad del sustrato.

Físicamente se tienen las siguientes restricciones

$$s > 0, \quad 0 < x < RSa, \quad 0 < D < \mu m, \quad Sa > 0$$

De las ecuaciones es fácil ver que el conjunto de puntos críticos es la recta $x = R(Sa - s)$



Analizaremos dos casos: i) Sa constante y D variable de control y ii) D constante y Sa variable de control.

i) Sea D la variable de control.

Sea $u = 2D/\mu m - 1$. Luego, nuestro sistema original se puede escribir en la forma

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad \text{con } |u| \leq 1$$

donde $x = (x, s)$, $f(x) = (\mu msx/(K+s) - \mu mx/2, \mu m(Sa-s)/2 - \mu msx/R(K+s))^T$ y $g(x) = (-x/2, (Sa-s)/2)^T$. No es difícil ver que para cualquier punto crítico se tiene que

$$\det\{g, [f, g]\} = 0$$

111536

por lo tanto, no se cumplen las hipótesis del Teorema 1.12, aún más, tampoco se cumplen las hipótesis del Teorema 5 en la Introducción, luego el sistema no es localmente controlable cuando nuestro control es la razón de dilución D . Ver Figura 4.

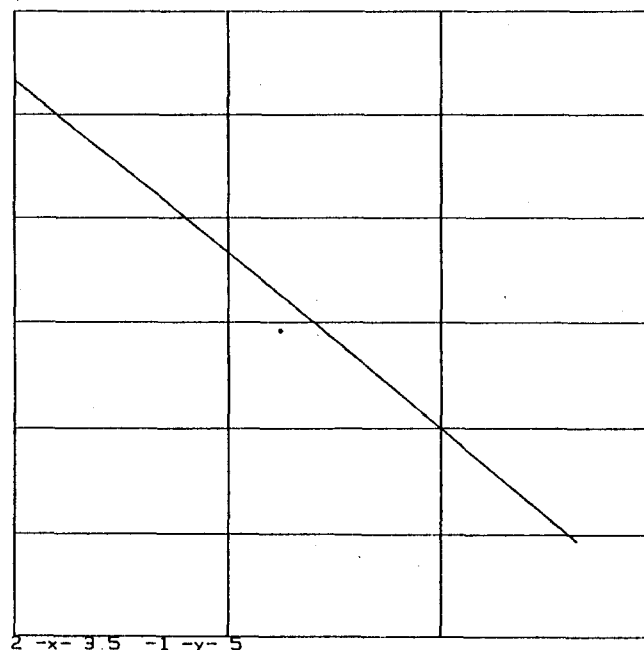


Figura 4

ii) Sea S_0 la variable de control.

Sea $u = 2S_0/M - 1$, donde M es el sustrato máximo de alimentación. El sistema original puede escribirse en la forma

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad \text{con } |u| \leq 1$$

donde $x = (x, s)$, $f(x) = (\mu msx/(K+s) - Dx, -\mu msx/R(K+s) - Ds + DM/2)^T$ y $g(x) = (0, DM/2)$. Un cálculo nos muestra que en cualquier punto crítico se tiene

$$\det\{g, [f, g]\} = -(DM/2)^2 \mu_m K x / (K+s)^2 \neq 0$$

además, es claro que $\det\{g, Dg(g)\} = 0$, por lo tanto, el conjunto alcanzable tiene forma de lente biconvexa para t pequeña, cuando nuestro control es S_a . Ver Figura 5.

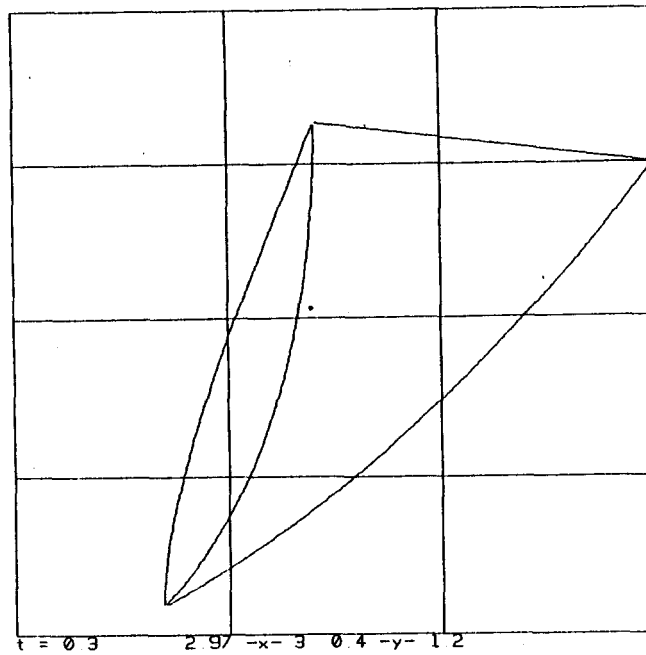


Figura 5

CAPITULO II

RESULTADOS GLOBALES

En este capítulo daremos una caracterización global de los conjuntos alcanzables para sistemas lineales y bilineales. Se hace también un estudio del conjunto de puntos críticos en ambos casos. Además se muestra, mediante ejemplos, los cambios que pueden ocurrir en los conjuntos alcanzables cuando variamos la cota del control.

1) SISTEMAS LINEALES

Iniciamos la sección dando una caracterización del conjunto de puntos críticos. Después probamos que si los valores propios de la matriz asociada a los estados, son reales, entonces el conjunto alcanzable desde un punto crítico tiene la forma de lente biconvexa. En caso contrario, se prueba que el conjunto alcanzable tiene la forma de lente biconvexa hasta un cierto tiempo.

Considere el sistema lineal autónomo

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq U. \quad (1)$$

$$x(0) = x_0$$

TEOREMA 2.1.1: Si A es no singular el conjunto de puntos críticos del sistema (1) es un segmento de recta. En caso contrario, se tiene una franja del plano ó una recta.

Prueba: Consideremos la ecuación

$$Ax + bu = 0 \quad (2)$$

Si A es no singular, la ecuación (2) implica que $x(u) = -A^{-1}b u$ lo cual representa un segmento con extremos en $UA^{-1}b$ y $-UA^{-1}b$.

Si A es singular, consideremos la transformación $T(x) = Ax$.

Si $u=0$, la solución de (2) es $\ker(T)$. Supongamos entonces que $u \neq 0$.

Si $b \notin \text{Im}(T)$ entonces no existe solución. Si $b \in \text{Im}(T)$ esto implica que para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe $\lambda \neq 0$ tal que $Ax = \lambda b$, en particular, si $x=b$, entonces $Ab = \lambda b$ y por lo tanto b es vector propio de A . Luego, si b es vector propio de A , para cada $\bar{u} \in [-U, U]$, existe una recta de puntos, paralela a $\ker(T)$, que satisface la ecuación (2). Luego entonces, al variar $u \in [-U, U]$, se obtiene una franja de puntos críticos. ■

Del Teorema 2-iii) tenemos que si b y Ab son linealmente dependientes, entonces el sistema (1) no es localmente controlable. El conjunto alcanzable es un segmento centrado en el origen. Analizaremos entonces el caso en que b y Ab sean linealmente independientes, por ser de mayor interés.

LEMA 2.1.2: Considere el sistema de control (1).

Supóngase que b y Ab son linealmente independientes. Luego, si γ y δ son las curvas frontera del conjunto alcanzable $R(0, t)$ con un cambio, éstas tienen curvaturas de signos opuestos para cada $t > 0$.

Prueba: Consideraremos sólo controles bang-bang (por el Teorema 4)

La solución de la ecuación (1) es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} bu(s) ds$$

la cual para $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ y $u = \text{cte.}$, se reduce a

$$x(t) = u \int_0^t e^{A(t-s)} b ds$$

Sean $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ las soluciones de la ecuación (1) con $x_0 = 0$, con $u = U$ y $u = -U$ respectivamente, luego

$$\alpha(t) = U \int_0^t e^{A(t-s)} b ds \quad \text{y} \quad \beta(t) = -U \int_0^t e^{A(t-s)} b ds$$

Obsérvese que $\alpha(t) = -\beta(t)$.

Sea $x(t, \tau)$ la solución de (1) que inicia en $\alpha(\tau)$ con $u = -U$, luego

$$x(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \alpha(\tau) - U \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} b ds$$

Análogamente, sea $y(t, \tau)$ la solución de (1) que inicia en $\beta(\tau)$ con $u = U$, luego

$$y(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \beta(\tau) + U \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} b ds$$

Obsérvese que $x(t, \tau) = -y(t, \tau)$.

Para t fijo, se prueba, utilizando métodos similares a los de la demostración del Lema 1.5, que $x(t, \tau)$ y $y(t, \tau)$ representan las fronteras del conjunto alcanzable, desde $x_0 = 0$, con un cambio para el sistema (1).

Sean $\gamma(\tau) = x(t, \tau)$ y $\delta(\tau) = y(t, t-\tau)$ dichas curvas.

Obsérvese que

$$\gamma(0) = \delta(0) = \beta(t) \quad \text{y} \quad \gamma(t) = \delta(t) = \alpha(t)$$

Ver figura 1

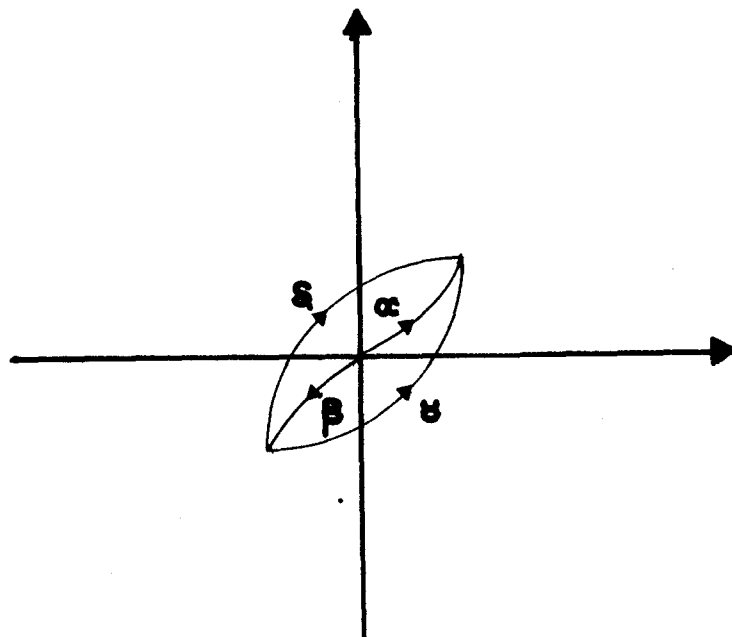


Figura 1

Sea $K(\gamma)$ la curvatura de γ , entonces

$$\text{sgn}(K(\gamma)) = \text{sgn}(\det\{\gamma'; \gamma''\})$$

Derivando obtenemos

$$\gamma'(\tau) = 2Ue^{A(t-\tau)}b \quad \text{y} \quad \gamma''(\tau) = -2Ue^{A(t-\tau)}Ab$$

luego

$$\begin{aligned} \det\{\gamma'; \gamma''\} &= \det\{2Ue^{A(t-\tau)}b; -2Ue^{A(t-\tau)}Ab\} \\ &= -4U^2 \det\{e^{A(t-\tau)}b; e^{A(t-\tau)}Ab\} \\ &= -4U^2 \det\{e^{A(t-\tau)}\} \det\{b; Ab\} \end{aligned}$$

Análogamente, derivando obtenemos

$$\delta'(\tau) = 2Ue^{A\tau}b \quad \text{y} \quad \delta''(\tau) = 2Ue^{A\tau}Ab$$

luego
$$\det\{\delta'; \delta''\} = 4U^2 \det\{e^{A\tau}\} \det\{b; Ab\}$$

Como $\det\{e^A\} > 0$ para toda A, tenemos que las curvaturas de γ y δ siempre difieren en el signo. ■

TEOREMA 2.1.3: Considere el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^2 \text{ y } |u| \leq U, \quad \text{con } x(0) = 0$$

Si

i) b y Ab son linealmente independientes y

ii) A posee valores propios reales

entonces $R(0, t)$ tiene forma de lente biconvexa para cada $t > 0$

Pruebas: Basta probar que $\gamma'(0) \cdot \gamma'(\tau) > 0$ y $\delta'(0) \cdot \delta'(\tau) > 0$ para $0 < \tau < t$. De la prueba al lema anterior tenemos que

$$\gamma'(\tau) = 2Ue^{A(t-\tau)}b \quad \text{y} \quad \delta'(\tau) = 2Ue^{A\tau}b$$

Luego $\delta'(0) \cdot \delta'(\tau) = 4U^2(e^{A\tau}b) \cdot b$. Sea $f(\tau) = (e^{A\tau}b) \cdot b$.

Supongamos que existe $\tau \in (0, t]$ tal que $f(\tau) = 0$, i.e. $e^{A\tau}b$ y b son ortogonales, pero esto implica que $e^{A\tau} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, lo cual no es posible por ii). Por lo tanto, $f(\tau) \neq 0$ para $\tau \in (0, t]$.

Pero $f(0) = \|b\|^2 > 0$, luego entonces $f(\tau) > 0$ para $\tau \in (0, t]$.

De manera análoga se prueba que $\gamma'(0) \cdot \gamma'(\tau) > 0$ para $\tau \in (0, t]$. ■

Cuando A posee valores propios complejos no es posible asegurar que el conjunto alcanzable tenga forma de lente biconvexa. Ocurre que los puntos críticos son focos o centros, luego, las trayectorias se "enroscan", lo cual ocasiona que se pierda la forma de lente biconvexa. Sin embargo es posible determinar en que momento pierde esa forma.

TEOREMA 2.1.4: Considere el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + bu, \text{ para } x \in \mathbb{R}^2 \text{ y } |u| \leq U, \text{ con } x(0) = 0.$$

Si

- i) b y Ab son linealmente independientes, y
- ii) A posee valores propios complejos.

Entonces, si β es el módulo de la parte imaginaria de los valores propios de A , $R(0,t)$ tiene forma de lente biconvexa para $0 < t < \pi/\beta$.

Prueba: De la prueba del Lema 2.1.2 tenemos que

$$\gamma'(\tau) = 2Ue^{A(t-\tau)}b \quad \text{y} \quad \delta'(\tau) = 2Ue^{A\tau}b$$

Probaremos primero que $t = \pi/\beta$ es el menor tiempo positivo tal que $\gamma'(0)$ y $\delta'(0)$ son colineales, luego, para $t > \pi/\beta$ se pierde la convexidad. Luego probaremos que γ y δ son inyectivas para $0 \leq t \leq \pi/\beta$.

Si $\gamma'(0)$ y $\delta'(0)$ son colineales, eso implica existe λ tal que $\gamma'(0) = \lambda\delta'(0)$, lo cual equivale a

$$e^{At}b = \lambda b \quad (*)$$

Sea $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ la forma canónica de Jordan de A, luego existe P no singular tal que

$$A = PJP^{-1} \quad y \quad e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} \quad \text{con} \quad e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

La ecuación (*) en términos de J se reduce a

$$e^{tJ}\bar{b} = \lambda\bar{b}, \quad \text{con} \quad \bar{b} = P^{-1}b \quad (**)$$

e^{tJ} representa la rotación por un ángulo βt , luego, de (**) se sigue que

$$\beta t = n\pi$$

por lo tanto, $t = \pi/\beta$ es el primer tiempo positivo en el cual $\gamma'(0)$ y $\delta'(0)$ son colineales.

Probaremos ahora la inyectividad de δ . Para γ es similar.

Supongamos que existen $\tau_1, \tau_2 \in (0, \pi/\beta)$ tales que $\delta(\tau_1) = \delta(\tau_2)$.

Como δ no cambia de concavidad, tenemos que existe $\bar{t} \in (\tau_1, \tau_2)$ tal que $\delta'(\tau_1)$ y $\delta'(\bar{t})$ son colineales. Por lo tanto existe λ tal que $\delta'(\bar{t}) = \lambda\delta'(\tau_1)$, lo que equivale a

$$e^{A\bar{t}}b = \lambda e^{A\tau_1}b, \quad \text{i.e.} \quad e^{A(\bar{t}-\tau_1)}b = \lambda b$$

lo cual no es posible, pues $\bar{t} - \tau_1 < \pi/\beta$. ■

2) SISTEMAS BILINEALES

Al igual que en la sección anterior, se da una caracterización global del conjunto de puntos críticos. En seguida se divide la sección en dos partes: sistemas homogéneos y no homogéneos. En la primera parte se prueba que, bajo ciertas hipótesis, el conjunto alcanzable siempre posee la forma de lente biconvexa. Para sistemas no homogéneos no fue posible dar un resultado similar al caso homogéneo. Sin embargo, se prueba que bajo ciertas condiciones, el conjunto alcanzable desde el origen es $\mathbb{R}^2$.

Considere el sistema bilineal autónomo

$$\dot{x} = Ax + uBx + Cu, \text{ para } x \in \mathbb{R}^2 \text{ y } |u| \leq U \quad (1)$$

CONJUNTO DE PUNTOS CRITICOS .

Considérese la ecuación

$$(A + uB)x + Cu = 0 \quad \text{con } u \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Si $A + uB$ es no-singular para $u \in \mathbb{R}$, entonces, el conjunto de puntos críticos queda determinado por la expresión

$$x_c(u) = -(A + uB)^{-1}Cu \quad (3)$$

Veamos cuando $(A + uB)$ es singular.

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{luego}$$

$$|A + uB| = \begin{vmatrix} a_1 + ub_1 & a_2 + ub_2 \\ a_3 + ub_3 & a_4 + ub_4 \end{vmatrix} = |B| u^2 + (A, B)u + |A| \quad (4)$$

$$\text{donde } (A, B) = |A + B| - (|A| + |B|)$$

Luego existen, a lo más, dos valores de u para los cuales $A + uB$ es singular. Sean u_0 y u_1 dichos valores. Si C no pertenece a las imágenes de $A + u_0 B$ y $A + u_1 B$ y A es no singular, entonces (3) nos define una función de $\mathbb{R} - \{u_0, u_1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde u_0 y u_1 son los ceros de (4). Veamos como describir la imagen de esta función.

De las expresiones para A y B , tenemos que

$$(A + uB)^{-1} = \frac{1}{|A+uB|} \begin{pmatrix} a_4 + ub_4 & -(a_2 + ub_2) \\ -(a_3 + ub_3) & a_1 + ub_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } x_{\bullet}(u) = \frac{-u}{|A+uB|} \begin{pmatrix} a_4 + ub_4 & -(a_2 + ub_2) \\ -(a_3 + ub_3) & a_1 + ub_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-u}{|A+uB|} \begin{pmatrix} u(b_4 c_1 - b_2 c_2) + (a_4 c_1 - a_2 c_2) \\ u(b_1 c_2 - b_3 c_1) + (a_1 a_2 - a_3 c_1) \end{pmatrix}$$

esto último puede escribirse en la forma

$$x_{\bullet}(u) = \begin{pmatrix} \frac{u(\alpha_1 u + \beta_1)}{au^2 + bu + c} \\ \frac{u(\alpha_2 u + \beta_2)}{au^2 + bu + c} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= b_2 c_2 - b_4 c_1 & \alpha_2 &= b_3 c_1 - b_1 c_2 \\ \beta_1 &= a_2 c_2 - a_4 c_1 & \beta_2 &= a_3 c_1 - a_1 c_2 \\ a &= |B|, & b &= (A, B), & c &= |A|. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$x = \frac{u(\alpha_1 u + \beta_1)}{au^2 + bu + c}, \quad y = \frac{u(\alpha_2 u + \beta_2)}{au^2 + bu + c} \quad (5)$$

donde $x_{\bullet}(u) = (x, y)^T$.

Despejando u en ambas expresiones, tenemos

$$u = \frac{-(bx - \beta_1) \pm \sqrt{d_1}}{2(ax - \alpha_1)} \quad \text{donde} \quad d_1 = (bx - \beta_1)^2 - 4(ax - \alpha_1)cx$$

$$y \quad u = \frac{-(by - \beta_2) \pm \sqrt{d_2}}{2(ay - \alpha_2)} \quad \text{donde} \quad d_2 = (by - \beta_2)^2 - 4(ay - \alpha_2)cy,$$

respectivamente.

Igualando es posible plantear 4 ecuaciones en x e y , pero todas nos llevarían a la misma expresión. Consideremos alguna de ellas

$$\frac{-(bx - \beta_1) \pm \sqrt{d_1}}{2(ax - \alpha_1)} = \frac{-(by - \beta_2) \pm \sqrt{d_2}}{2(ay - \alpha_2)}$$

Después de ciertos pasos algebraicos, es posible escribir esta ecuación en la forma

$$A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y = 0 \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= d\beta_2^2 - \bar{a}^2 & d &= b^2 - 4ac \\ B_1 &= 2\bar{a}\bar{b} - 2d\beta_1\beta_2 & \bar{a} &= b\beta_2 - 2c\alpha_2 \\ C_1 &= \beta_1^2 d - \bar{b}^2 & \bar{b} &= b\beta_1 - 2c\alpha_1 \\ D_1 &= 2\bar{a}\beta_1\beta_2 - 2\bar{b}\beta_2^2 \\ E_1 &= 2\bar{b}\beta_1\beta_2 - 2\bar{a}\beta_1^2 \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{D} = B_1^2 - 4A_1C_1$ el discriminante de nuestra cónica

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 4(\bar{a}\bar{b} - d\beta_1\beta_2)^2 - 4(d\beta_2^2 - \bar{a}^2)(d\beta_1^2 - \bar{b}^2) \\ &= 4\left[\bar{a}^2\bar{b}^2 + d^2\beta_1^2\beta_2^2 - 2\bar{a}\bar{b}d\beta_1\beta_2\right] - \left[d^2\beta_1^2\beta_2^2 - \bar{b}^2d\beta_2^2 - \bar{a}^2d\beta_1^2 + \bar{a}^2\bar{b}^2\right] \\ &= 4\left[-2\bar{a}\bar{b}d\beta_1\beta_2 + \bar{b}^2d\beta_2^2 + \bar{a}^2d\beta_1^2\right] \\ \mathcal{D} &= 4d\left[\left(\bar{a}\beta_1 - \bar{b}\beta_2\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } \bar{a}\beta_1 - \bar{b}\beta_2 &= (b\beta_2 - 2c\alpha_2)\beta_1 - (b\beta_1 - 2c\alpha_1)\beta_2 \\ &= 2c(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \end{aligned}$$

luego,

$$\mathcal{D} = 4d\left[2c(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\right]^2 = 16d c^2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$$

Hemos supuesto que $c = |A| \neq 0$. Si $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, entonces $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, si $\beta_1\beta_2 \neq 0$ y sustituyendo en (5) obtenemos

$$x = \frac{\beta_1 u \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1} u + 1 \right]}{au^2 + bu + c} \quad y \quad y = \frac{\beta_2 u \left[\frac{\alpha_2}{\beta_2} u + 1 \right]}{au^2 + bu + c}$$

por lo tanto

$$\frac{x}{y} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

lo que representa una recta por el origen.

Si $\beta_1\beta_2 = 0$, tenemos varios casos:

i) $\beta_1 = 0$

Luego, $\alpha_1\beta_2 = 0$ implica $\alpha_1 = 0$ ó $\beta_2 = 0$, si $\alpha_1 = 0$, de (5) concluimos que $x = 0$ si $\beta_2 = 0$, la cónica (6) se reduce a

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 = 0$$

la cual es una parábola degenerada ($\mathcal{D} = 0$), o sea, una recta.

ii) $\beta_2 = 0$

Luego $\alpha_2\beta_1 = 0$ implica $\alpha_2 = 0$ ó $\beta_1 = 0$. Si $\alpha_2 = 0$, de (5) se sigue que $y = 0$ si $\beta_1 = 0$, se tiene el mismo caso que i).

Resumiendo, si $\mathcal{D} = 0$, con $d \neq 0$, tenemos rectas como conjuntos de puntos críticos.

Si $d > 0$, entonces $\mathcal{D} > 0$ y la cónica (6) representa una hipérbola.

Si $d = 0$, entonces $\mathcal{D} = 0$ y la cónica (6) representa una parábola.

Si $d < 0$, entonces $\mathcal{D} < 0$ y la cónica (6) representa una elipse.

Tenemos probado entonces el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2.1: Sean u_0 y u_1 las raíces de la ecuación $\det\{A+uB\}=0$. Si A es no singular y C no está en las imágenes de $A+u_0B$ y $A+u_1B$, entonces la ecuación (2) representa una cónica.

Cuando el control u es acotado, que es nuestro caso, se obtiene como conjunto de puntos críticos una parte de la cónica.

EJEMPLO 2.1: Considere el sistema de control

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1-u & 0 \\ 0 & 1+u \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \text{con } |u| \leq 2$$

Siguiendo la notación anterior al Teorema 2.2.1, tenemos que $d = 4$, por lo tanto el conjunto de puntos críticos de nuestro sistema es una hipérbola. Como el control es acotado, no se obtiene toda la hipérbola. Ver Figura 1.

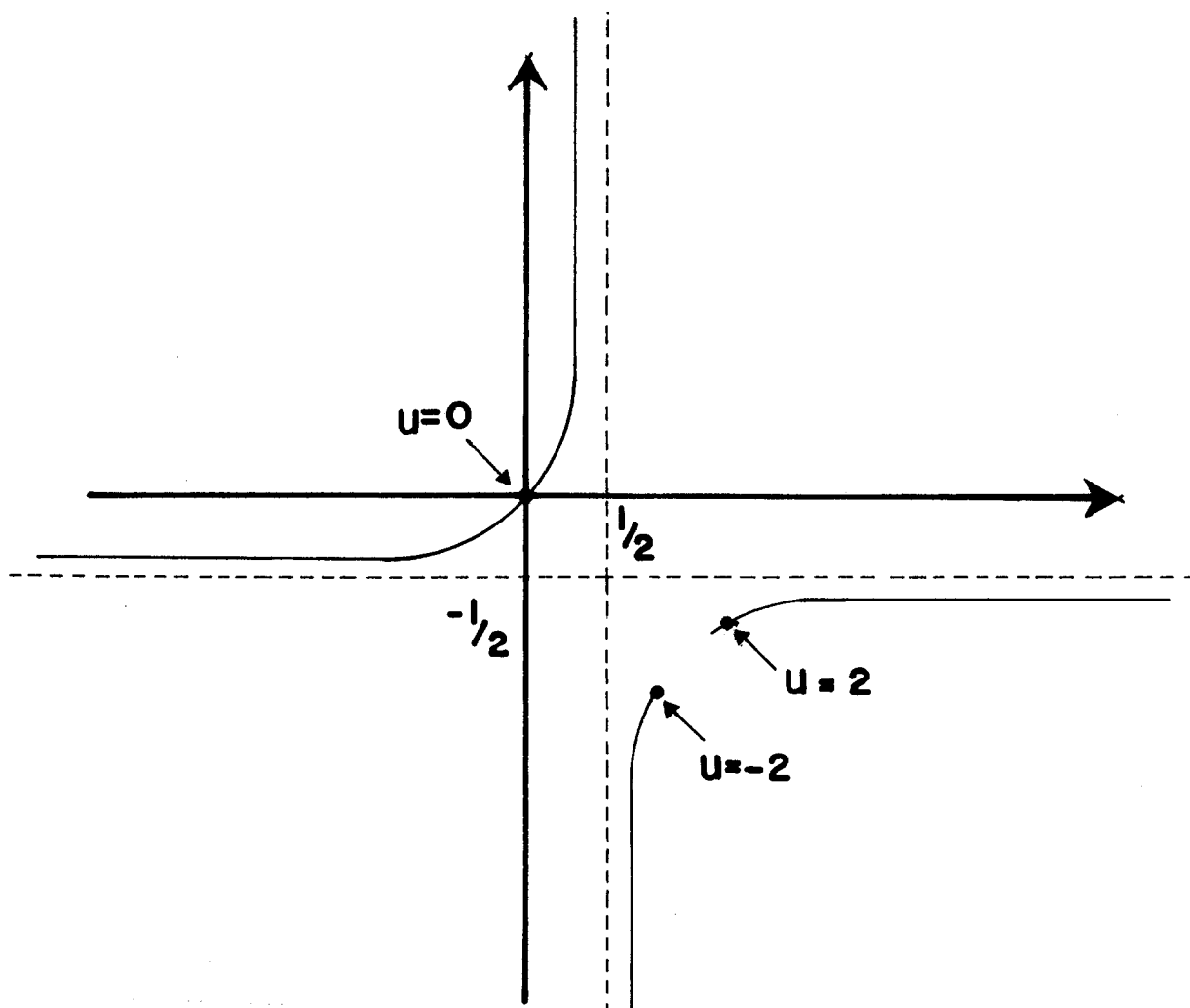


Figura 1

2.1) SISTEMAS HOMOGENEOS

En los siguientes párrafos probaremos el siguiente resultado global: bajo ciertas suposiciones en las matrices A y B y la condición inicial x_0 , se prueba que el conjunto alcanzable al tiempo t desde x_0 , siempre tiene la forma de lente, para todo $t > 0$

Supondremos que la matriz B es singular (pero no nula), luego, es posible factorizar B como bc^T , donde b y c son vectores y c^T denota la transposición del vector c .

Llamaremos sistema bilineal homogéneo a un sistema de control de la forma

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad \text{con } |u| \leq U$$

LEMA 2.2.1.1: Supóngase que A es una matriz real con entradas no negativas fuera de la diagonal, entonces la matriz e^{tA} tiene entradas no negativas para toda $t > 0$.

Para una prueba, véase [5].

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz real y $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$ el

discriminante de su polinomio característico. Luego, si A es no negativa fuera de la diagonal posee valores propios reales, entonces, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que A es triangular superior.

Denotaremos el primer cuadrante por $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$.

LEMA 2.2.1.2: Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + uBx, \text{ con } |u| \leq U, \text{ y}$$

supongamos que

i) $A + UB$ y $A - UB$ son no negativas fuera de la diagonal principal,

ii) $B = bc^T$ es singular y $\det\{b, Ab\} \neq 0$, y

iii) $x_0, c \in \mathbb{R}_+^2$,

entonces, si γ y δ representan las curvas frontera del conjunto alcanzable desde x_0 al tiempo t , éstas tienen curvaturas de signos opuestos.

Prueba: Siguiendo las ideas de la prueba al Lema 2.1.2, para u constante y $x(t_0) = x$ obtenemos que la solución al sistema de control es

$$x(t) = e^{(A+uB)(t-t_0)} x$$

Hagamos $M = A + UB$ y $N = A - UB$. Luego, tenemos las soluciones bang-bang sin cambio para $t_0 = 0$

$$\alpha(t) = e^{Mt} x_0 \quad \text{y} \quad \beta(t) = e^{Nt} x_0.$$

Entonces, las curvas frontera de $R(x_0, t)$ son

$$\gamma(\tau) = e^{N(l-\tau)} \alpha(\tau) = e^{N(l-\tau)} e^{M\tau} x_0$$

$$\text{y} \quad \delta(\tau) = e^{M\tau} \beta(t-\tau) = e^{M\tau} e^{N(l-\tau)} x_0$$

Derivando obtenemos

$$\gamma'(\tau) = 2Ue^{N(t-\tau)}B e^{MT}x_0 \quad y \quad \gamma''(\tau) = 2Ue^{N(t-\tau)}(2UB^2+BA-AB)e^{MT}x_0$$

de aquí se sigue

$$\det\{\gamma'(\tau), \gamma''(\tau)\} = 4U^2 \det\{e^{N(t-\tau)}\} \det\{Be^{MT}x_0, (2UB^2+BA-AB)e^{MT}x_0\}$$

Obsérvese que $\det\{e^{N(t-\tau)}\} > 0$, luego, en la expresión anterior, el segundo determinante es el que determina el signo de la curvatura de γ .

$$\begin{aligned} \det\{Be^{MT}x_0, (2UB^2+BA-AB)e^{MT}x_0\} &= \det\{Be^{MT}x_0, B(2UB+A)e^{MT}x_0 - ABe^{MT}x_0\} \\ &= \det\{Be^{MT}x_0, B(2UB+A)e^{MT}x_0\} - \det\{Be^{MT}x_0, ABe^{MT}x_0\} \\ &= \det\{B\} \det\{e^{MT}x_0, (2UB+A)e^{MT}x_0\} - \det\{Be^{MT}x_0, ABe^{MT}x_0\} \\ &= - \det\{Be^{MT}x_0, ABe^{MT}x_0\} \end{aligned}$$

Hagamos $f(\tau) = - \det\{Be^{MT}x_0, ABe^{MT}x_0\}$, entonces

$\text{sgn}(K(\gamma)) = \text{sgn}(f(\tau))$. Similarmente para δ , si

$g(\tau) = \det\{Be^{N(t-\tau)}x_0, ABe^{N(t-\tau)}x_0\}$, entonces

$\text{sgn}(K(\delta)) = \text{sgn}(g(\tau))$.

Probaremos que $f(\tau)g(\tau) < 0$ para toda τ con $0 \leq \tau \leq t$.

De i) y iii) se sigue que $e^{MT}x_0 \in \mathbb{R}_+^2$ (pues $\det\{e^{MT}\} > 0$), luego

$Be^{MT}x_0 = bc^T(e^{MT}x_0) = (c^Te^{MT}x_0)b$, con $c^Te^{MT}x_0 > 0$ para $0 \leq \tau \leq t$, y

$ABe^{MT}x_0 = (c^Te^{MT}x_0)Ab$, por lo tanto

$$f(\tau) = - \det\{(c^Te^{MT}x_0)b, (c^Te^{MT}x_0)Ab\} = - (c^Te^{MT}x_0)^2 \det\{b, Ab\}$$

Similarmente para $g(\tau)$, de i) y iii) tenemos que $e^{N(l-\tau)}x_0 \in \mathbb{R}_+^2$, luego $Be^{N(l-\tau)}x_0 = bc^T(e^{N(l-\tau)}x_0) = (c^Te^{N(l-\tau)}x_0)b$, con $c^Te^{N(l-\tau)}x_0 > 0$ para $0 \leq \tau \leq t$, y $ABe^{N(l-\tau)}x_0 = (c^Te^{N(l-\tau)}x_0)Ab$, por lo tanto

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \det\{(c^Te^{N(l-\tau)}x_0)b, (c^Te^{N(l-\tau)}x_0)Ab\} \\ &= (c^Te^{N(l-\tau)}x_0)^2 \det\{b, Ab\}, \end{aligned}$$

luego, de ii) se sigue lo deseado. ■

TEOREMA 2.2.1.3: Considere el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + uBx, \text{ para } |u| \leq U \text{ y } x(0) = x_0.$$

Supongamos que

- i) $A + UB$ y $A - UB$ son no negativas fuera de la diagonal,
- ii) $B = bc^T$ es singular y $\det\{b, Ab\} \neq 0$, y
- iii) $x_0, c \in \mathbb{R}_+^2$,

entonces el conjunto alcanzable con un cambio desde x_0 al tiempo t , tiene la forma de lente biconvexa.

Prueba: De i) tenemos que $A = \frac{(A + UB) + (A - UB)}{2}$ es no negativa fuera de la diagonal, luego, podemos suponer que A es triangular superior.

Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (c_1, c_2) = \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 \end{pmatrix}$, luego

$$A + UB = \begin{bmatrix} a_1 + Ub_1 c_1 & a_2 + Ub_1 c_2 \\ Ub_2 c_1 & a_4 + Ub_2 c_2 \end{bmatrix} \quad y \quad A - UB = \begin{bmatrix} a_1 - Ub_1 c_1 & a_2 - Ub_1 c_2 \\ -Ub_2 c_1 & a_4 - Ub_2 c_2 \end{bmatrix}$$

entonces, de i) tenemos que $Ub_2 c_1 \geq 0$ y $-Ub_2 c_1 \geq 0$, pero $c_1 > 0$, entonces $b_2 = 0$. Debemos probar que $\gamma'(0) \cdot \gamma'(\tau) > 0$ y $\delta'(0) \delta'(\tau) > 0$ para $0 < \tau \leq t$. De la prueba al Lema 2.2.1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma'(0) \cdot \gamma'(\tau) &= 4U^2 (e^{Nt} B x_0) \cdot (e^{N(t-\tau)} B e^{M\tau} x_0) \\ &= 4U^2 (e^{Nt} b c^T x_0) (e^{N(t-\tau)} b c^T e^{M\tau} x_0) \\ &= 4U^2 (c^T x_0) (c^T e^{M\tau} x_0) (e^{Nt} b) \cdot (e^{N(t-\tau)} b) \end{aligned}$$

donde $(c^T x_0)(c^T e^{M\tau} x_0) > 0$ por i) y iii)

Sea $e^{N(t-\tau)} = \begin{bmatrix} n_1(\tau) & n_2(\tau) \\ n_3(\tau) & n_4(\tau) \end{bmatrix}$ con $n_i(\tau) \geq 0$ e $i = 1, \dots, 4$, para

$0 \leq \tau \leq t$ luego entonces

$$\begin{aligned} (e^{Nt} b) \cdot (e^{N(t-\tau)} b) &= \begin{bmatrix} n_1(0) & b_1 \\ n_3(0) & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1(\tau) & b_1 \\ n_3(\tau) & b_1 \end{bmatrix} = \\ &= b_1^2 (n_1(\tau)n_1(0) + n_3(\tau)n_3(0)) > 0 \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $\delta'(0)\delta'(\tau) > 0$ ■

2.2) SISTEMAS NO-HOMOGENEOS

En esta sección probaremos un resultado de alcanzabilidad global. No se analiza la convexidad del conjunto alcanzable.

LEMA 2.2.2.1: Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + uBx + bu, \text{ para } |u| \leq U$$

Si con $u = 0$ el origen es un centro y $\text{tr}(B) \neq 0$, entonces, existen $u_1, u_2 \in [-U, U]$ con $u_1 \cdot u_2 < 0$, tales que los sistemas $\dot{x} = (A + u_1 B)x$ y $\dot{y} = (A + u_2 B)y$ tienen al origen como foco estable e inestable respectivamente.

Prueba: Sean $T, D: [-U, U] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas definidas por $T(u) = \text{tr}(A + uB)$ y $D(u) = [T(u)]^2 - 4 \det(A + uB)$. Por hipótesis $T(0) = 0$, $T'(0) \neq 0$ y $D(0) = -4 \det(A) < 0$, luego existen $u_1, u_2 \in [-U, U]$, con $u_1 \cdot u_2 < 0$, tales que $D(u_1) < 0$ y $T(u_1) < 0$, y $D(u_2) < 0$ y $T(u_2) > 0$. De esto se sigue lo deseado. ■

LEMA 2.2.2.2: Si se tienen las mismas hipótesis del Lema 2.2.2.1, entonces cualquier punto del plano es alcanzable desde el origen.

Prueba: Sean $\alpha(t)$ la solución del sistema $\dot{x} = (A + u_1 B)x + bu_1$, con $\alpha(0) = 0$, y $\alpha(t) \rightarrow x_1$, cuando $t \rightarrow +\infty$, y $\beta(t)$ la solución del sistema $\dot{y} = (A + u_2 B)y + bu_2$, con $\beta(0) = 0$ y $\beta(t) \rightarrow x_2$, cuando $t \rightarrow -\infty$, donde u_1 y u_2 son los mismo del Lema 2.2.1. Sea

$H: [-U, U] \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua definida por $H(u) = \det\{b, (A + uB)b\}$. Si $H(0) = \det\{b, Ab\} = 0$ entonces b es vector propio de A , pero A tiene valores propios complejos (por hipótesis), por lo tanto $H(0) \neq 0$. Luego existen $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in [-U, U]$ con $\bar{u}_1 \bar{u}_2 < 0$ tales que $H(u_1)H(u_2) < 0$. Podemos suponer que $\bar{u}_1 = u_1$ y $\bar{u}_2 = u_2$. Obsérvese que $\alpha'(0) = u_1 b$ y $\alpha''(0) = u_1(A + u_1 B)b$, luego entonces $\det\{\alpha'(0), \alpha''(0)\} = u_1^2 \det\{b, (A + u_1 B)b\} = u_1^2 H(u_1)$. Análogamente, $\det\{\beta'(0), \beta''(0)\} = u_2^2 H(u_2)$; concluimos entonces que $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ tienen curvatura del mismo signo para toda $t \in \mathbb{R}$.

Como $\alpha'(0) = u_1 b$ y $\beta'(0) = u_2 b$, con $u_1 u_2 < 0$ y α y β posee curvaturas del mismo signo, tenemos que la recta $L = \{\alpha b \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ separa los puntos críticos x_1 y x_2 . Sea $t_2 > 0$ el primer tiempo tal que $\beta(t_2) = P_2 \in L$. Sea $\gamma(t)$ la solución del sistema $\dot{x} = (A + u_1 B)x + bu_1$, con $\gamma(0) = P_2$ y $\gamma(t) \rightarrow x_1$, cuando $t \rightarrow +\infty$.

Sea $\mathcal{C} = \{\alpha(t) \mid t \geq 0\} \cup \{\beta(t) \mid 0 \leq t \leq t_2\} \cup \{\gamma(t) \mid t \geq 0\}$. $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, luego, divide el plano en dos regiones, el interior y el exterior de $\mathcal{C}$. Obsérvese que x_2 está en el interior de $\mathcal{C}$ y x_1 está sobre $\mathcal{C}$. Ver figura 1.

Si x está en el exterior de $\mathcal{C}$, consideremos la trayectoria $\beta(t)$ tal que $\beta(0) = x_2$ y $\beta(T) = x$ para algún $T > 0$ finito. Esta trayectoria intersecta a $\mathcal{C}$ en un punto P , donde P está en el arco $\alpha(t)$ ó en el arco $\gamma(t)$. Si P está en $\alpha(t)$ consideramos la trayectoria bang-bang que inicia en $\alpha(t)$ y en el punto P cambia a $\beta(t)$. Si P está en $\gamma(t)$, la trayectoria que consideramos consiste en el arco $\beta(t)$

hasta el punto P_2 , luego se toma el arco $\gamma(t)$ y en P se cambia de nuevo a $\beta(t)$.

Si x está en el interior de $\mathcal{E}$, consideramos la trayectoria $\alpha(t)$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(t) \rightarrow x_1$, cuando $t \rightarrow +\infty$. Esta trayectoria para t negativos intersecta a la curva $\mathcal{E}$ en el arco $\beta(t)$; luego, la trayectoria bang-bang consiste del arco $\beta(t)$ y en la intersección se cambia a $\alpha(t)$. Luego, en cualquier caso, x es alcanzable desde el origen con los controles $u = u_1$ ó $u = u_2$. ■

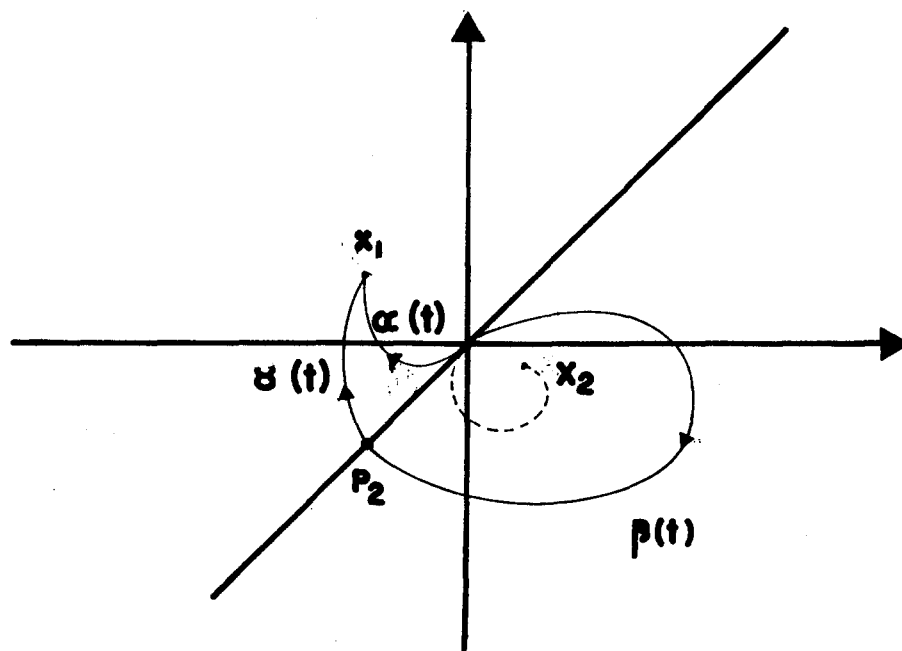


Figura 1

Tenemos probado entonces, el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2.2.3: Considérese el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + uBx + bu, \quad |u| \leq U.$$

Si con $u = 0$ el origen es un centro, y $\text{tr}(B) \neq 0$, entonces el conjunto alcanzable desde el origen es $\mathbb{R}^2$.

2.3· DEPENDENCIA DE LA COTA DEL CONTROL

Se ha mencionado en la Introducción que uno de los problemas más interesantes en Teoría de Control es determinar cómo varía el conjunto controlable (alcanzable) cuando varía el conjunto de controles.

Consideremos $U_\alpha \subset U_m$ tal que

$$U_\alpha = \{u \in U_m \mid |u_i| \leq \alpha, i = 1, 2, \dots, m\}$$

Veremos para el caso $m = 1$, como la variación de la cota α del control, produce cambios importantes en el conjunto alcanzable, tanto localmente como globalmente.

En el Teorema 1.12-i) se ha probado, para el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad \text{con } |u| \leq U$$

que si

$$2U |\det\{g(x_0), Dg(x_0)g(x_0)\}| < |\det\{g(x_0), [f, g](x_0)\}|$$

entonces, para t pequeño, el conjunto alcanzable $R(x_0, t)$ tiene forma de lente biconvexa. Luego, si variamos la cota del control, existe U^* tal que si $U < U^*$ la forma de $R(x_0, t)$ no cambia, mientras que si $U > U^*$ entonces la forma de $R(x_0, t)$ es de lente cóncava-convexa. (Véase el Ejemplo 1.1 del Capítulo I §3)

El siguiente es un ejemplo de un sistema de control bilineal, tal que para $U = 1/\sqrt{5}$ el conjunto alcanzable es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^2$, mientras que para $U = 1$, el conjunto alcanzable es todo $\mathbb{R}^2$.

Sea tal sistema de control

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } |u| \leq U \text{ y } x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $U = 1/5$. El sistema posee un punto silla y un nodo inestable para $u = -1/5$ y $u = 1/5$, respectivamente. No es difícil probar que no podemos alcanzar todo punto del plano desde el origen.

Sea $U = 1$. Tenemos entonces un punto silla y un foco inestable para $u = -1$ y $u = 1$, respectivamente. En este caso si es posible alcanzar cualquier punto del plano desde el origen.

Sea $R_\alpha(x_0)$ el conjunto alcanzable desde x_0 con α la cota del control. Alekseev [1] ha probado que la función $\alpha \rightarrow R_\alpha(0)$ es continua cuando el sistema de control es lineal. Si el sistema es no lineal, prueba que la función anterior tiene un número numerable de discontinuidades.

APENDICE

1) PRINCIPIO DEL MAXIMO DE PONTRYAGIN.

Supóngase que se tiene el sistema de control

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0$$

al cual le agregamos cierta función de costo $g[x(t), t_0, x_0, u^*]$, de tal forma que si con u^* se alcanza el objetivo para $t=t_1$, entonces el costo del control está dado por

$$c(u^*) = \int_{t_0}^{t_1} g \, dt$$

Diremos que el control u^* es óptimo si para cualquier otro control u que alcanza el objetivo en un tiempo t se cumple

$$c(u^*) \leq c(u)$$

Si $g \equiv 1$, el costo del control es

$$c(u) = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

En este caso el control óptimo es el que tarda menos en llegar al objetivo. Son llamados controles de tiempo óptimo.

Volviendo a la función costo, hagamos

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t g \, d\tau \quad \text{donde} \quad \dot{x}_0(t) = g(t)$$

y sean

$$\bar{x} = (x_0, x) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \bar{f}(t, \bar{x}, u) = (g(t), f(t, x, u))$$

tenemos entonces el sistema aumentado de (1)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, x, u), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (2)$$

$$\bar{x}(t_0) = (0, x_0)$$

El problema de optimizar la función costo en el sistema (1) se transforma en el siguiente problema: encontrar $u(t) \in \Omega$ tal que la solución correspondiente de (2) llegue, para cierto tiempo $t_1 > t_0$ a un punto $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ donde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenezca al objetivo y x_0 sea mínima. Ver fig. 1

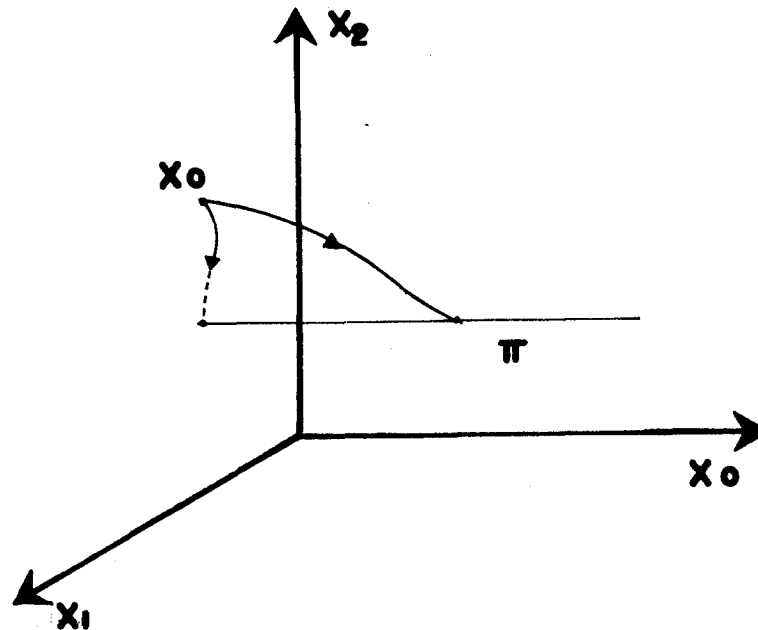


Figura 1

Luego entonces, hemos introducido el costo como una coordenada más del estado del Sistema. En lo sucesivo supondremos que nuestro sistema de control contiene ya el costo en la forma descrita arriba.

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (3)$$

$$\bar{x}(t_0) = x_0$$

con $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continuas en $\mathbb{R}^{n+1} \times \Omega$.

Sea $\chi = (\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ tal que

$$\dot{\chi} = - (Df(x, u))^T \chi \quad (4)$$

Esta es una ecuación lineal homogénea, luego, para cada condición inicial posee solución única. Las soluciones de (4), al igual que las de (3), son continuas, excepto en un conjunto de medida cero, y con derivadas continuas. Para cada $u(t)$ y su respectiva solución de (3), $x(t, t_0, x_0, u)$, tenemos una solución $\chi(t)$ de (4).

Hagamos ahora

$$H(\chi, x, u) = \chi \cdot f(x, u) = \sum_{i=0}^n f_i(x, u) \chi_i$$

De esto es inmediato que los sistemas (3) y (4) pueden escribirse como el siguiente sistema hamiltoniano

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \chi} \quad (5)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (6)$$

Luego, para cualquier $u(t) \in \Omega$, $t_0 \leq t \leq t_1$, y cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$, podemos encontrar la solución $x(t, t_0, x_0, u)$ de (5). Después, encontramos la solución $\chi(t)$ de (6) correspondiente a $u(t)$ y $x(t; t_0, x_0, u)$.

Para χ y x fijos, la función H se convierte en una función del parámetro $u \in \Omega$.

Sea

$$M(\chi, x) = \sup_{u \in \Omega} H(\chi, x, u)$$

Si la función continua H alcanza su supremo en Ω , entonces $M(\chi, x)$ es el máximo de los valores de H para χ y x fijos. Tenemos entonces, el siguiente teorema, llamado el principio del máximo

TEOREMA: Sea $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, con $u^* \in \Omega$, tal que su correspondiente solución $x^*(t, t_0, x_0, u^*)$ alcanza, en un tiempo t_1 , la recta Π (ver fig. 1). Para que $u^*(t)$ y $x^*(t, t_0, x_0, u^*)$ sean óptimas es necesario que exista una función vectorial continua, no idénticamente cero, $\chi(t)$, correspondiente a $u^*(t)$ y $x^*(t, t_0, x_0, u^*)$ tal que

1) Para cada t , con $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$H(\chi, x^*, u^*) = M(\chi, x^*)$$

11) $\chi_0 \leq 0$ & $H(\chi, x^*, u^*) = 0$ en $[t_0, t_1]$

Una prueba de este teorema se encuentra en Pontryaguin et. al. [9].

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + u g(x), \text{ con } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } |u| \leq 1 \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{7}$$

donde la primera coordenada del vector x es el tiempo.

Siguiendo el principio del máximo, la ecuación (4) se transforma en

$$\dot{\chi} = - (Df + ug)^T \chi \tag{8}$$

y el Hamiltoniano es

$$H(\chi, x, u) = \chi \cdot (f + ug) \tag{9}$$

Luego, el principio del máximo, traducido al problema de alcanzabilidad (ver [13]) del sistema (7), se reduce a lo siguiente:

Sea $u^*(t)$, $t \in [0, t_1]$, con $|u^*| \leq 1$, y $x^*(t, 0, x_0, u^*)$ la trayectoria correspondiente, con $x(0) = x_0$. Si $x(t_1) \in \partial R(x_0)$, entonces $x(t) \in \partial R(x_0)$ para toda $t \in [0, t_1]$ y además existe una función vectorial continua, no idénticamente cero, $\chi: [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{\chi} = - (Df + ug)^T \cdot \chi$ donde

$$1) \quad H(\chi, x^*, u^*) = \min_{|u| \leq 1} \chi(f(x^*) + ug(x^*)) \text{ lo cual equivale a}$$

$$(\chi g(x^*)) u^* = \min_{|u| \leq 1} (\chi g(x^*)) u \quad \text{y}$$

$$ii) \quad H(\chi, x^*, u^*) = \chi(f(x^*) + u^*g(x^*)) = 0, \quad \chi_0 \geq 0$$

Sea $\varphi(t) = \chi(t) g(x^*(t))$. La condición i) nos determina el control $u^*(t)$ cuando $\varphi(t) \neq 0$: $u^* = 1$ ($u^* = -1$) si $\varphi < 0$ ($\varphi > 0$).

Si $\varphi(t) = 0$ en algún $t \in [0, t_1]$, la condición i) no nos proporciona información acerca del control óptimo.

Si los ceros de φ ocurren aislados, entonces el control óptimo tomará los valores $u^* = 1$ ó $u^* = -1$ en los intervalos donde $\varphi < 0$ ó $\varphi > 0$ respectivamente. Tales controles son llamados bang-bang y las trayectorias correspondientes igualmente.

Una condición suficiente para que los ceros de φ sean aislados es que $g(x^*(t))$ y $[f, g](x^*(t))$ sean linealmente independientes en $[0, t_1]$.

Sea t_0 tal que $\varphi(t_0) = 0$ entonces $\chi(t_0) \cdot g(x^*(t_0)) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt}(t) &= \dot{\chi}(t) g(x^*(t)) + \chi(t) Dg(x^*(t)) \dot{x}^*(t) \\ &= -\chi(t) \cdot D(f + u^*g)(x^*(t))g(x^*(t)) + \chi(t) \cdot Dg(x^*(t))(f + u^*g)(x^*(t)) \\ &= -\chi(t) \cdot [f, g](x^*(t)) \end{aligned}$$

111536

Luego $\dot{\varphi}(t_0) = -\chi(t_0) \cdot [f, g](x^*(t_0))$

Si $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ entonces $\chi(t_0) = 0$, pues $[f, g](x^*(t)) \neq 0$, pero $\chi(t)$ es la solución a una EDO homogéneo lineal, por lo tanto $\chi \equiv 0$ lo cual no es posible, pues χ no es nula. Luego entonces $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$.

CONCLUSIONES

Se ha dado una descripción local de la forma del conjunto alcanzable desde un punto de equilibrio para un sistema autónomo no lineal de control. Para dos controles se ha probado convexidad local.

Para sistemas lineales, el problema de describir la forma del conjunto alcanzable es hecha en su totalidad.

Para sistemas bilineales el problema queda inconcluso. Se da un resultado global para sistemas homogéneos. Para sistemas no homogéneos se da un resultado de alcanzabilidad global sin describir la forma del conjunto alcanzable.

REFERENCIAS

- [1] Alekseev, N. K., Rettiev, N. S.: *Dependence of a Controllability set on a parameter*. *Differentsial'nye Uravneniya*. Vol. 14, No. 9 Sept. 1978.
- [2] Alvarez, J.: *Identificación de procesos de fermentación y optimización estática en cultivo continuo*. CINVESTAV-Ing. Eléctrica. Tesis de Doctorado. 1978.
- [3] Armendariz, P.: *Teoría de Lie*. Por aparecer.
- [4] Arnold V. I.: *Catastrophe Theory*. Segunda Edición. Springer-Verlag. 1986.
- [5] Brockett, R. W.: *On the reachable set for bilinear systems*. Universidad de Harvard.
- [6] Espinosa E., Pliš A., Suárez, R.: *About a Nonlinear System in $R \times R^2$ with one dimensional control*. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. Vol. 24 No. 2, 1979.
- [7] Lobry C.: *Controlabilite des systemes non lineaires*. SIAM J. Control. Vol. 8 No. 4, Nov. 1970.
- [8] Macki J., Strauss A.: *Introduction to Optimal Control Theory*. Springer-Verlag. 1982.
- [9] Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko. : *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience. 1965.
- [10] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. I, Segunda edición. Publish or Perish, Inc. 1979

- [11] Suárez, R., Alvarez, J.: *Control de sistemas bidimensionales con una entrada*. Segundo Congreso Latinoamericano de Control Automático. Buenos Aires. 1986.
- [12] Ważewski, T.: *On an Optimal Control Problem*. Proc. of the Conf. Diff. Eq. and their Appl. Praga. Sept. 1962.
- [13] ... *The higher order maximum principle and its application to singular extremals*. SIAM J. Control Optimal 15. 1977.
- [14] ... *Differential Geometric Control Theory*. Brockett, Millman, Sussmann, editores. Birkhäuser