920
5

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo

Ciencias Básicas e Ingeniería

Estrategia de inversión y probabilidad de ruina de un fondo de prima de antigüedad

que presenta Mario Guillermo Martínez Fisher
para obtener el título de Maestro en Ciencias
(Matemáticas Aplicadas en Industriales)

Asesor: Dra. Patricia Saavedra Barrera

Sinodales: Dr. Juan Ruiz de Chávez Somoza, Dr. Wojciech Szatzschneider Smigielska

5 de Agosto del 2008

A Dios a mi esposa y a mis padres.

Índice general

Introducción

Cada trabajador formal, por el sólo hecho de serlo, tiene derecho a los beneficios de previsión social que le deparan el Instituto Mexicano del Seguro Social y el Sistema de Ahorro para el Retiro. Sin embargo, por sí solos no son suficientes para resolver sus requerimientos; por tanto, desde 1995 la Secretaría de Hacienda ha estado impulsando la creación de fondos de pensiones y/o prima de antigüedad en las empresas. Para ello ha dispuesto que el dinero que una empresa destina a dicho fondo pueda ser deducible de impuestos.

Los empresarios o los altos directivos de las empresas por su parte buscan continuamente herramientas para incrementar utilidades, y esto se da mediante un incremento en los ingresos o bien una reducción de los costos o gastos. Uno de los principales costos en las grandes empresas es el de la rotación del personal y el pago de impuestos. Pues bien, el constituir un fondo de pensiones y/o prima de antigüedad es una alternativa para trasladar una parte del pago de impuestos en un beneficio directo a los empleados que incentiva la permanencia en la empresa, lo que disminuye la rotación.

Un fondo de prima de antigüedad consiste de un capital que dedica la empresa para hacer frente al pasivo laboral que representa el pago de un monto que se le otorga al trabajador al momento de separarse definitivamente de la empresa. La suma de dinero depende de la antigüedad y del nivel de salario que tuvo el trabajador durante su permanencia en la empresa.

El pago de esta prestación se le llama prima de antigüedad y lo consideramos reclamo. La empresa no sabe de antemano, incluso en el caso de las jubilaciones, a cuántos ni cuándo deberá pagar del fondo.

Con objeto de administrar lo mejor posible el fondo de ahorro, la empresa tiene derecho a invertirlo; sin embargo el fondo no es la fuente de utilidades, y por tanto la empresa tiene como principal objetivo que el fondo alcance con la mayor probabilidad posible a cubrir el monto de los reclamos y no necesariamente maximizar su valor corriendo riesgos innecesarios.

El objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento anual de un fondo de prima de antigüedad, a través de un modelo discreto, cuando una parte del mismo se invierte en un activo libre de riesgo y el resto en un activo con riesgo, por ejemplo en acciones de una empresa que cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores.

Con objeto de analizar si al invertir parte del fondo en un activo con riesgo se incrementa el riesgo de incumplimiento del fondo se estudia también la probabilidad de ruina.

Se contempla el pago de los posibles reclamos del fondo de ahorro durante ese periodo y se supone que sólo se retira dinero del fondo para pagarlos. Los reclamos se modelan usando un Proceso de Poisson compuesto cuyos montos se distribuyen exponencialmente y el comportamiento del activo con riesgo por medio de un proceso binomial. Se supone que el número y monto de los reclamos son independientes y que éstos, a su vez, son independientes de los rendimientos del activo con riesgo.

Los resultados obtenidos muestran que en el caso de una función de utilidad tipo exponencial la estrategia de inversión es constante, cuando la tasa libre de riesgo es cero, y cuando ésta es distinta de cero sólo hay que multiplicarla por un factor de actualización. Por otro lado, la probabilidad de ruina de la inversión muestra que, bajo ciertas hipótesis, se obtiene una cota menor cuando se invierte en un activo con riesgo que cuando no se hace. Por último, se aplican los resultados a un fondo de ahorro de una empresa con el fin de analizar y comparar con datos reales. Este problema ha sido estudiado con un modelo continuo cuando se invierte en un activo con riesgo cuyo precio es un proceso browniano geométrico, ver [3]. Otros autores han estudiado, también en el caso continuo, el comportamiento de un fondo con inversión, pero cuando se busca la estrategia de inversión que minimiza la probabilidad de ruina del fondo, ver [2] y [4] . En la literatura no se encontró reportado el caso discreto que se analiza en esta tesis.

En el primer capítulo de la tesis se define el marco teórico que se considera adecuado para modelar el comportamiento del fondo y así plantear el problema a resolver. En el siguiente capítulo se definen las características del mercado de inversión y se resuelve el problema planteado. En el capítulo tres se lleva a cabo el análisis de probabilidad de ruina, se obtienen cotas teóricas y condiciones suficientes para comparar las estrategias de inversión. Por último, en el capítulo cuatro se aplican los resultados para el caso de una empresa, previa realización de las pruebas de hipótesis correspondientes a los supuestos del modelo, y se estiman los parámetros para hacer una recomendación de inversión.

Capítulo 1

Modelación del Problema

El objetivo de este capítulo es ubicar el problema en un marco teórico, y definirlo matemáticamente de tal forma que en los capítulos siguientes se apliquen las metodologías adecuadas para resolverlo.

1.1. Introducción

Las características principales del fondo son:

a) Las empresas que deciden constituir dicho fondo lo hacen a través de un fiduciario, el cuál lo invierte en el Mercado Financiero.

b) Debido a su objetivo, el fondo está sujeto a reclamos cuyo tiempo y monto son contigentes, estos reclamos son resultado del pago de prima de antigüedad correspondiente al empleado que se va de la empresa.

   La Prima de Antigüedad mínima a la que está obligada a cubrir la empresa de acuerdo al Artículo 162 de la Ley Federal del Trabajo (L.F.T), consiste en el importe de doce días de Salario Computable por cada año de servicio y se paga independientemente de cualquier otra prestación que corresponda a los Participantes o a sus Beneficiarios por cualquiera de las siguientes causas:

   - Fallecimiento.
   - Invalidez (en virtud de lo señalado en el artículo 54 de la mencionada Ley).
   - Separación por causa justificada.
   - Despido justificado o injustificado.
   - Separación voluntaria, siempre y cuando haya prestado el colaborador 15 años de servicio como mínimo.

     Las empresas pueden además optar por dar un beneficio mayor o igual a lo establecido por la ley y aprovechar las ventajas fiscales.

c) Cada año la empresa realiza una aportación (en ocasiones más de una) al fondo de acuerdo a la metodología establecida por el boletín D3 (en Norteamérica es también conocido como el FAS-87) ya que la Ley Federal del Trabajo y la Ley del Impuesto sobre la Renta indican que las aportaciones al fondo de pensiones o de prima de antigüedad son deducibles de impuestos, siempre y cuando se apeguen a la metodología de dicho boletín.

La idea que hay atrás en el cálculo de la aportación consiste en tener en la reserva el valor presente esperado de los reclamos, por tanto las aportaciones están íntimamente relacionadas con el comportamiento de los reclamos, de los instrumentos en el mercado de inversión e incluso con el nivel de utilidades de la compañía ya que en muchas ocasiones se decide el tiempo de la aportación con el fin de pagar menos impuestos al reducir el monto de las utilidades. Modelar la aportación, considerando todos estos factores particularizarían y complicarían el modelo por lo que es razonable ligar la aportación con el valor esperado del monto como ocurre en el modelo clásico de Cramer-Lundberg para modelar los reclamos de una compañía aseguradora.

Normalmente los consultores actuariales realizan la valuación actuarial y el cálculo de la aportación cada año. Uno de los esquemas más comunes es hacer la valuación a tasa real (pesos constantes) y además considerando un nivel de tasas de interés por debajo de la expectativa del mercado de instrumentos gubernamentales lo cuál es conservador debido a que la estimación de la aportación resulta mayor.

Es importante mencionar que el perfil del inversionista es de tipo institucional es decir, tiene como objetivo principal cubrir los pagos de prima de antigüedad y/o pensiones de la empresa, por lo tanto el horizonte de inversión es de largo plazo y el nivel de aversión al riesgo será independiente del valor del fondo; sin embargo, dado que año con año se calculará la aportación, tomando en cuenta la valuación actuarial anual, para fines de este trabajo se considerará como horizonte de tiempo, para nuestro modelo, un año.

Marco teórico y notación

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad. Suponiendo que se tiene un horizonte de tiempo finito $[0, T]$, se propone un modelo discreto.

Sea $N \in \mathbb{N}: \ \Delta t = \frac{T}{N} \quad t_0 = 0; \ t_i = i\Delta t; \ t_N = T$.

Sea $X_k := X(t_k)$ el valor del fondo en el tiempo k.

Sea $A_i := (t_{i-1}, t_i]$.

Consideremos las siguientes variables:

n_i : Número de reclamos en A_i.

$Y_j^{\{i\}}$:Monto del j-ésimo reclamo en A_i.

η_i : Monto total de los reclamos en A_i, i.e.,

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_j^{\{i\}}.$$

1.2. Proceso de Poisson compuesto

Uno de los modelos más utilizados para procesos de reclamos es el Proceso de Poisson compuesto, ya que modela de manera aleatoria tanto el instante en el cual ocurren los reclamos como el monto de los mismos de manera independiente a lo largo del tiempo, por otro lado es fácil verificar si un proceso sigue ese comportamiento y por último existe una gran variedad de resultados teóricos que ayudan en la investigacin.

Existen varias formas equivalentes para definir este proceso, a continuación se muestra la más conveniente para este trabajo.

Sea $t \in [0, T]$ y definamos:

$n(t)$: Número de reclamos acumulados al tiempo t.

Y_j :Monto del j-ésimo reclamo.

T_j : Tiempo en que ocurre el j-ésimo reclamo.

$\eta(t)$: Monto total de los reclamos al tiempo t, i.e., $\eta(t) = \sum_{j=1}^{n(t)} Y_j$.

W_j : $T_{j+1} - T_j$. Tiempo de espera entre el reclamo j y el reclamo $j+1$.

Lo anterior para $j \geq 1$.

Diremos que si $W_1, W_2, ...$ son variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con parámetro $N\lambda$ entonces el proceso $\{n(t); t > 0\}$ es un proceso de Poisson con parámetro $N\lambda$.

Si para $\eta(t)$ las variables $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ son independientes entre si y con respecto a $n(t)$ e idénticamente distribuidas con distribución F_Y y con media $\frac{1}{\theta}$ entonces $\{\eta(t); t > 0\}_{N\lambda,Y}$ sigue un Proceso de Poisson compuesto con parámetro $N\lambda$ y variable de reclamo Y.

Propiedades principales del Proceso de Poisson compuesto

1) Distribución de $\eta(t)$.

   Sea $P_Y^{\{n\}}(y) := \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq y\right]$, entonces

$$\Pr\left[\eta(t) \leq y\right] = \exp\left[-N\lambda t\right] + \sum_{n=1}^{\infty} P_Y^{\{n\}}(y) \left(\frac{\exp\left[-N\lambda t\right](N\lambda t)^n}{n!}\right), \quad y \geqslant 0.$$

En particular si $Y_i \rightsquigarrow \exp(\theta) \Rightarrow P_Y^{\{n\}}(y) = \frac{\int_0^y \theta^n x^{n-1} e^{-\theta x} dx}{(n-1)!}, \quad n \geq 1.$

2) Valor esperado de de $\eta(t)$.

$E[\eta(t)] = \frac{N\lambda t}{\theta}.$

3) Función Generadora de Momentos de $\eta(t)$ (FGM).

Sea $M_Y(u)$ la función generadora de momentos de Y, entonces

$$M_{\eta(t)}(u) = \exp\left[N\lambda t \left(M_Y(u) - 1\right)\right]$$

.

En el caso particular de que $Y \rightsquigarrow \exp(\theta) \Rightarrow$

$$M_{\eta(t)}(u) = \exp\left[N\lambda t\left(\frac{\theta}{\theta - u} - 1\right)\right] = \exp\left[N\lambda t\left(\frac{u}{\theta - u}\right)\right].$$

Por construcción tenemos que $n_i = n(t_i) - n(t_{i-1}), \eta_i = \eta(t_i) - \eta(t_{i-1})$, para $i > 1$,

De lo anterior tenemos que n_i se distribuye como Poisson con parámetro λ y que η_i se distribuye como Poisson Compuesto con parámetro λ y variable de reclamo $Y \rightsquigarrow \exp(\theta)$, por lo tanto:

a) $\Pr[\eta_i \leq y] = \exp[\lambda] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^y \theta^n x^{n-1} e^{-\theta x} dx}{(n-1)!} \left(\frac{\exp[-\lambda](\lambda)^n}{n!}\right), \quad y \geqslant 0.$

b) $E[\eta_i] = \frac{\lambda}{\theta}.$

c) $M_{\eta_i}(\nu) = \exp\left[\lambda\left(\frac{\theta}{\theta - \nu} - 1\right)\right] = \exp\left[\lambda\left(\frac{\nu}{\theta - \nu}\right)\right].$

1.3. Mercado de inversión

Hasta el momento hemos definido todo lo referente a los reclamos es decir el momento y monto de los pagos contingentes que realiza la empresa a sus empleados cuando estos se separan, es lógico pensar que para el mejor aprovechamiento de los recursos el fondo estará invertido de manera eficiente en el mercado. A continuación definiremos las características principales y notación para el mercado de inversión.

1. Se pueden comprar o vender fracciones de activos.
2. No hay pago de dividendos ni costos de transacción.
3. Se presta y se dan réditos a la misma tasa de interés.
4. Se denotará como **M** al mercado financiero y consistirá de 2 instrumentos de inversión: uno libre de riesgo y otro con riesgo.

Instrumento libre de riesgo.- Si un inversionista invierte \$ 1 en un instrumento de deuda con tasa de interés efectiva r por período, o bien su equivalente continuo δ, al cabo de k períodos el valor de su inversión es: $B_k := (1+r)^k = e^{\delta k}$, $r > 0 \quad \delta = \ln(1+r)$.

Instrumento con riesgo.- Se le conoce también como activo con riesgo, y se modela como variable aleatoria.

Sea $S_k :=$ Precio del activo en el tiempo t_k. Se empleará el modelo Binomial para describir el comportamiento del activo con riesgo.

Denotemos el valor actual del activo con S_0, supongamos que los precios subsecuentes cumplen la siguiente relación: $S_{k+1} = S_k \xi_{k+1}$ para $k = 0, 1 \ldots, N - 1$.

En donde $\Pr\{\xi_k = U\} = p$; $\Pr\{\xi_k = D\} = 1 - p$ con ξ_k independientes entre sí y $0 < D < 1 < U$.

Independencia del mercado de inversión

Los movimientos en el mercado de inversión no tienen porqué tener relación con la salida de los trabajadores de alguna empresa en particular salvo en el caso de una crisis, sin embargo uno de los objetivos de este trabajo es modelar el problema en condiciones de estabilidad económica y por lo tanto una hipótesis fundamental en este trabajo será considerar independencia entre los reclamos y los rendimientos del mercado de inversión **M**.

Notación para la información disponible en el tiempo

El nivel de los reclamos y rendimientos va determinando el comportamiento del fondo, la historia del comportamiento y la información disponible en determinado tiempo se modela a través de una filtración. A continuación se define la filtración asociada al comportamiento del fondo:

$$\mathcal{F}_k := \sigma\left\{Y_j^{\{i\}}, n_i, \xi_i; i = 1, 2......, k\right\}.$$

Observación: Si consideramos que la información actual nos la da $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \emptyset\}$ entonces $E[X_k \mid \mathcal{F}_0] = E[X_k]$, ver [9].

Cuando hablamos de que el fondo estará invertido en un mercado de inversión es muy importante determinar cuál es la mejor forma (estrategia) para colocar el dinero en los diferentes instrumentos, a continuación se define lo que se entenderá por estrategias de inversión.

Estrategias de inversión

Una estrategia de inversión $\phi = \{\phi_t;\ t \in [0, T]\}$ es un proceso estocástico que describe la forma en que el capital es invertido en el instrumento con riesgo, para efectos de este trabajo ϕ_t es la cantidad de dinero invertido en el instrumento con riesgo el tiempo t.

Es claro que si se toma en cuenta un modelo a tiempo discreto para los precios entonces tenemos que $\phi = \{\phi_k;\ k = 1, 2, ..., N\}$; en donde ϕ_k es la cantidad de dinero invertido en el instrumento con riesgo en A_k.

Para expresar la dependencia del valor del portafolio con la estrategia podríamos denotar como V_k^{ϕ} al valor del portafolio de inversión en el tiempo k bajo la estrategia ϕ. En ocasiones solo se escribirá V_k dando por supuesto que hay una estrategia "implícita"para dicho portafolio.

Estrategias admisibles.

No tiene sentido pensar que las decisiones de cuándo y dónde invertir se tomarán suponiendo que se conoce el futuro, por el contrario la decisión de invertir se toma con la información disponible hasta el momento, y ésta dependerá de la situación del mercado, por tanto la estrategia es una variable aleatoria determinada por la información disponible.

Diremos que una estrategia ϕ es una estrategia admisible en el mercado $\mathbf{M}$ si y solo si ϕ_k es $\mathcal{F}_{k-1}$ medible y $V_k^{\phi} \geq 0$ para $k = 1, 2...., N$, donde $\mathcal{F}_{k-1}$ es la información hasta el tiempo $k-1$. Denotaremos como $\mathbf{H}^{\{\mathbf{M}\}} := \{\phi \in \mathbb{R}^N \mid \phi \text{ es admisible en el mercado } \mathbf{M}\}$.

Estrategias autofinanciables.

Diremos que una estrategia es autofinanciable, si además de ser admisible, los cambios en el valor del portafolio a lo largo del período de inversión sólo dependen de los rendimientos de los instrumentos.

$$V_k - V_{k-1} = \phi_k \left(\xi_{k-1} - 1\right) + \left(V_{k-1} - \phi_k\right)\left(e^{\delta} - 1\right), \quad \text{para } k = 1, 2.., N.$$

Obsérvese que el monto invertido en el activo con riesgo ϕ_k se determina en $k-1$, el resto $(V_{k-1} - \phi_k)$ se invierte en el activo sin riesgo y el cambio en el valor del portafolio $V_k - V_{k-1}$ solo depende del rendimiento de los instrumentos.

Para efectos de este trabajo, se utilizará la siguiente expresión recursiva para el comportamiento del portafolio:

$$V_k = V_{k-1}e^{\delta} + \phi_k \left(\xi_{k-1} - e^{\delta}\right), \quad \text{para } k = 1, 2.., N.$$

Denotaremos como $\widetilde{\mathbf{H}}^{\{\mathbf{M}\}} := \left\{\phi \in \mathbb{R}^N \mid \phi \text{ es autofinanciable en } \mathbf{M}\right\}$.

Perfil de pago

El perfil de pago al tiempo N de un portafolio de inversión $\{V_k\}_{k=1}^{N}$ se define como $\mathbf{V} := \{V_N(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$.

Funciones de utilidad

En un contexto de incertidumbre generada por los reclamos y el comportamiento del mercado de inversión es necesario contar con una herramienta que permita medir de una manera subjetiva (dependiendo de los intereses y objetivos de la empresa) las decisiones y sus consecuencias. La estrategia que seleccione un inversionista depende de su adversión al riesgo. Las funciones de utilidad buscan reflejar las preferencias del inversionista y su adversión al riesgo y por tanto influyen directamente en el cálculo de las estrategias de inversión.

Una función $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 estrictamente cóncava y estrictamente creciente es una función de utilidad.

Medida de adversión al riesgo absoluta (ARA)

Esta es una forma de clasificar las funciones de utilidad según el nivel de adversión al riesgo que tiene un inversionista en algún subconjunto del dominio y se le conoce como $ARA\,(x)$

$$ARA\,(x) := -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Ejemplos de funciones de utilidad

$U(x) = \frac{1}{\alpha}x^{\alpha}$ para $\alpha \in (0,1)$.
Logarítmica: $U(x) = \ln(x)$.
Hara: $U(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\beta}{1-\gamma}x + \frac{\eta}{\beta}\right)^{-1}$ para $\gamma < 1$, $\gamma \neq 0$, $\beta > 0$, $\frac{\beta}{1-\gamma}x + \eta > 0$.
Exponencial: $U(x) = -e^{-\gamma x}$ para $\gamma > 0$.

Nótese que para una función de utilidad exponencial se tiene que $ARA\,(x) = \gamma$ para toda x, es decir, la adversión al riesgo es la misma en cualquier punto del dominio.

1.4. Planteamiento del problema

Al principio de este capítulo mencionamos que el nivel de adversión al riesgo del inversionista es el mismo independientemente del valor de la reserva, por tanto es razonable considerar una función de utilidad exponencial.

Consideremos lo siguiente:

1. $X_k :=$ El valor del fondo en el tiempo k.
2. $X_0 :=$La reserva o fondo inicial.
3. $\phi_k :=$Cantidad de dinero invertido en el activo con riesgo en el tiempo k.
4. Los reclamos se pagan al final de período.
5. Es posible modificar el portafolio de inversión en cada período.
6. $c :=$ aportación al fondo en el tiempo, dicha aportación se determina en t_0 con base en el valor esperado de los reclamos y se supone que será igual en cada período.
7. $\delta :=$ Tasa continua de rendimiento del activo sin riesgo.
8. $\eta_k := \sum_{i=1}^{n_k} Y_i^{\{k\}}$. Monto de los reclamos en A_k.

9. $\Pr\{\xi_k = U\} = p, \quad \Pr\{\xi_k = D\} = 1 - p.$

10. Las variables $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_N$ son independientes entre sí.

11. $U(x) = -\exp(-\gamma x)$ y $\gamma > 0$. Función de utilidad para el inversionista.

Por lo anterior tenemos que el fondo tiene el siguiente comportamiento:

$$X_k = X_{k-1}e^{\delta} + c + \phi_k\left(\xi_k - e^{\delta}\right) - \eta_k,$$

para $k = 1, \ldots, N$.

A lo largo de este trabajo, se va a suponer que con una parte de la riqueza inicial se integra un portafolio que se va a invertir en el mercado $\mathbf{M}$ durante cada intervalo de tiempo A_k, para $k = 1, 2, ..., N$, siguiendo una estrategia autofinanciable. A lo largo del tiempo no se retira dinero del portafolio para pagar los reclamos, si no puede hacerse frente con las primas se pide prestado a la tasa libre de riesgo y si hay un excedente se invierte en el banco. Al final de cada intervalo A_k se puede saber con precisión el valor del fondo (y por consiguiente podemos saber si la ruina ha ocurrido o no), en el tiempo N se vende el activo con riesgo, se ajustan las cuentas y se paga, si hay dinero para ello, al banco.

Bajo esta premisa, al desarrollar la relación que cumple el fondo tenemos que

$$\begin{aligned} X_N &= X_0e^{N\delta} + \sum_{k=1}^{N}\left(c + \phi_k\left(\xi_k - e^{\delta}\right) - \eta_k\right)e^{(N-k)\delta}, \\ &= X_0e^{N\delta} + \sum_{k=1}^{N}\phi_k\left(\xi_k - e^{\delta}\right)e^{(N-k)\delta} + \sum_{k=1}^{N}\left(c - \eta_k\right)e^{(N-k)\delta}. \end{aligned}$$

Considerando la creación del portafolio de inversión $V_n(\phi)$ al tiempo inicial, se puede expresar el valor del fondo al tiempo n como

$$X_n = V_n(\phi) + \sum_{k=1}^{n}\left(c - \eta_k\right)e^{(n-k)\delta},$$

donde

$$V_n(\phi) = X_0e^{n\delta} + \sum_{k=1}^{n}\phi_k\left(\xi_k - e^{\delta}\right)e^{(n-k)\delta}.$$

Por lo anterior el problema a resolver es: dado un capital inicial X_0, determinar $\phi \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\{M\}}$ tal que

$$\max_{\phi\in\widetilde{\mathbf{H}}^{\{M\}}} E\left[U\left(X_N\right)\right].$$

La función de utilidad tipo exponencial se selecciona porque se busca una estrategia que maximice la probabilidad de sobrevivencia del fondo, ver Browne [2], en lugar de maximizar la riqueza del mismo, caso en el que se usaría una función de utilidad tipo logaritmo.

En el siguiente capítulo abordaremos el problema sin considerar aportaciones ni reclamos como si se tratara de un portafolio de inversión, una vez encontrada la estrategia óptima introduciremos los reclamos como variables aleatorias y en ese contexto resolveremos el problema.

Capítulo 2

Inversión óptima del fondo

En este capítulo se exponen las características principales del mercado en donde se invierte el fondo así como un método de solución para el problema de optimización de portafolios sin considerar reclamos y aportaciones. Después se introduce el proceso de reclamos y aportaciones para así encontrar la estrategia óptima de inversión del fondo definido en la última sección del capítulo anterior. Al final de este capítulo se hará una interpretación de los resultados obtenidos y la forma en la que depende el signo y monto de la estrategia en términos de las condiciones del mercado de inversión.

2.1. Características del mercado.

Para facilitar el proceso de optimización del portafolio de inversión definimos el espacio de probabilidad únicamente con los eventos que afectan al mercado de inversión: Sea $\left\{\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P}\right\}$ el espacio de probabilidad para el mercado de inversión donde:

$$\widehat{\omega_i} := \left\{\omega \in \Omega | S_N(\omega) = S_0 U^i D^{N-i}\right\},$$

es decir durante el periodo de inversión el activo con riesgo incrementó su valor i veces y disminuyó $N-i$ veces. Sea $\widehat{\Omega} := \{\widehat{\omega_0}, \widehat{\omega_1}, ...\widehat{\omega_N}\}$.

Las variables aleatorias del Mercado de Inversión $\xi_i, S_i; i = 1, 2......, N$, están también definidas en este espacio de probabilidad, aunque la estructura del espacio muestral sea diferente.

Considerando la estructura de $\widehat{\Omega}$ definimos como la filtración $\widehat{\mathcal{F}}$ la siguiente sucesión

$$\widehat{\mathcal{F}_k} := \sigma\left\{\xi_i; i = 1, 2......, k\right\},$$

para $k = 1, \ldots, N$.

Ausencia de oportunidad de arbitraje

Decimos que en un mercado hay oportunidad de arbitraje cuando existe una estrategia ϕ admisible y autofinanciable, tal que $V_0 = 0$, $V_N(\phi)(\omega) \geq 0$ $\forall \omega \in \widehat{\Omega}$ y $E\left[V_N(\phi)\right] > 0$. Es decir, existe una oportunidad de generar dinero gratis y sin riesgo.

Se abreviará el hecho de que en un mercado haya ausencia de oportunidad de arbitraje como AOA y oportunidad de arbitraje como OA.

Medida de probabilidad neutra al riesgo

Una medida de probabilidad Q en $\widehat{\Omega}$ es neutra al riesgo si:

a) La medida Q es equivalente a $\widehat{P}$, lo que denotaremos como $Q \approx \widehat{P}$.

b) $E^Q\left[S_{k+1} \mid \widehat{\mathcal{F}_k}\right] = S_k e^{\delta}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$

Teorema 2.1.1. *En el Mercado* **M** *descrito en el capítulo 1 no hay oportunidad de arbitraje si y sólo sí* $U > e^{\delta} > D > 0$.

Demostración: El primer teorema fundamental de finanzas, para el caso discreto, nos dice que en un mercado hay ausencia de oportunidad de arbitraje si y solo si existe una medida de probabilidad de riesgo neutro Q, ver [8].

Por demostrar: Existe una medida de probabilidad neutra al riesgo Q en M.

Tomando en cuenta el supuesto $0 < D < e^{\delta} < U$, se propone $q = \dfrac{e^{\delta} - D}{U - D}$ como el parámetro para la medida de probabilidad Q entonces

$$Q\{\xi_k = U\} = q; \; Q\{\xi_k = D\} = 1 - q,$$

para $k = 1, \ldots, N$.

Para $k = 0, \ldots, N-1$, se cumple:

$$E^Q\left[S_{k+1} \mid \widehat{\mathcal{F}_k}\right] = S_k E^Q[\xi_k] = S_k[Uq + (1-q)D] = S_k[q(U-D) + D] = S_k e^{\delta}.$$

Por lo tanto la medida Q asociada al parámetro q es una medida de probabilidad neutra al riesgo. □

Observación:

$$Q\left\{S_N = S_k U^k D^{N-k}\right\} = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}.$$

Perfil de pago finito

Sea **V** un portafolio construido a través de una estrategia autofinanciable en el mercado $\mathbf{M} \Longrightarrow \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Completez

Decimos que un mercado es completo cuando para cualquier perfil de pago $\mathbf{V}$ existe una estrategia de inversión $\phi \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\{M\}}$ y un capital inicial V_0 tales que $\forall \widehat{\omega_i} \in \widehat{\Omega}$:

$$V(\widehat{\omega_i}) = V_0 e^{N\delta} + \sum_{k=1}^{N} \phi_k(\widehat{\omega_i}) \left(\xi_k(\widehat{\omega_i}) - e^{\delta}\right) e^{(N-k)\delta}$$

Teorema 2.1.2. *El mercado* $\mathbf{M}$ *es completo.*

Demostración:
El segundo teorema fundamental de finanzas, en el caso discreto, nos dice que en AOA el mercado es completo si y solo si la medida de probabilidad riesgo neutro es única, por tanto basta demostrar que en el mercado M la medida riesgo neutro Q es única.

Supongamos que existe una medida de probabilidad riesgo neutro $\widetilde{Q}$ diferente a la definida en el teorema 2.1.1 entonces al ser una medida de probabilidad neutra al riesgo se cumple que $E^{\widetilde{Q}}\left[S_{k+1} \mid \widehat{\mathcal{F}_k}\right] = S_k e^{\delta}$ para $k = 0, 1, \ldots.., N-1$.

De lo anterior tenemos que el parámetro $\widetilde{q}$ asociado a la medida $\widetilde{Q}$ es $\widetilde{q} = \dfrac{e^{\delta} - D}{U - D}$ $\Longrightarrow \widetilde{Q}\left\{S_N = S_0 U^k D^{N-k}\right\} = \binom{N}{k}\widetilde{q}^k (1-\widetilde{q})^{N-k}$ y como $\widetilde{q} = q \Longrightarrow Q = \widetilde{Q}$!!!.

Lo anterior prueba que la medida de probabilidad neutra al riesgo es única, y por tanto $\mathbf{M}$ es completo.

Valuación de reclamos contingentes

Hasta ahora sólo hemos hablado de construir un perfil de pago a partir de una riqueza inicial y siguiendo una estrategia autofinanciable, sin embargo este proceso puede hacerse al revés, es decir, tomar un perfil de pago arbitrario $\hat{\mathbf{V}}$ en el tiempo N y calcular cuál sería la estrategia de inversión autofinanciable $\hat{\phi}$ y la riqueza inicial $\hat{V}_0$ que replicarán $\hat{\mathbf{V}}$.

Diremos entonces que $\hat{V}_0$ es el precio del reclamo $\hat{\mathbf{V}}$. Una conclusión importante proveniente de los teoremas fundamentales de finanzas es que en un mercado completo con AOA se cumple que $E^{Q}\left[e^{-\delta N}\hat{\mathbf{V}}\right] = \hat{V}_0$.

Condiciones del mercado para optimizar portafolios en el caso binominal

Para garantizar la existencia de una estrategia óptima de inversión es necesario que no sea posible el arbitraje. Supongamos sin pérdida de generalidad que $U > D > e^{\delta} > 0$ y el caso $N = 1$, entonces $\forall \omega \in \widehat{\Omega}$

1. $\phi_1\left(\xi_1 - e^{\delta}\right) > 0$ cuando $\phi_1 > 0$.

2. $\phi_1\left(\xi_1 - e^{\delta}\right) \longrightarrow \infty$ cuando $\phi_1 \longrightarrow \infty$.

De lo anterior tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1} E\left[U\left(V_0 + \phi_1\left(\xi_1 - e^{\delta}\right)\right)\right] > 0.$$

por tanto el problema de maximización no está acotado superiormente.

Con un argumento similar se llega a la misma conclusión cuando $e^{\delta} > U > D > 0$.

De manera intuitiva la interpretación del razonamiento anterior es que si en el mercado es posible el arbtitraje, entonces para cualquier estrategia autofinanciable existe otra con un valor utilitario esperado mayor independientemente de la función de utilidad y la riqueza inicial.

2.2. Método de la martingala

La idea que sigue este método consiste en encontrar dentro de los portafolios generados a partir de estrategias autofinanciables con una misma riqueza inicial, aquél que maximice el valor utilitario esperado del perfil de pago.

Gracias a las condiciones que cumplen U, δ, D el mercado $\mathbf{M}$ es completo y sin oportunidad de arbitraje por tanto existe una única medida de probabilidad riesgo neutro para la cuál todos los portafolios generados con estrategias autofinanciables y admisibles tienen al tiempo inicial el mismo precio.

Partiendo de una riqueza inicial siguiendo una estrategia $\phi \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\{\mathbf{M}\}}$ se cumple que $E^{Q}\left[e^{-\delta N}\mathbf{V}\left(\phi\right)\right] = V_0$.

Para desarrollar un algoritmo eficiente es necesario hacer las siguientes definiciones:

$Z\left\{\widehat{\omega}_i\right\} := \dfrac{Q\left\{\widehat{\omega}_i\right\}}{\widehat{P}\left\{\widehat{\omega}_i\right\}}$.

$V_N(\widehat{\omega}_i) :=$ Valor del perfil de pago del portafolio $\mathbf{V}$ cuando ocurre $\widehat{\omega}_i$.

Observaciones: Para toda variable aleatoria X que sea $\widehat{\mathcal{F}}$ medible se tiene:

- $E^{\widehat{P}}\left[ZX\right] = E^{Q}\left[X\right]$.
- $E\left[X\right] = E^{\widehat{P}}\left[X\right]$.

Problema

Dado $\widehat{\Omega}$ encontrar el portafolio con precio inicial V_0 cuyo perfil de pago $\mathbf{V}^*$ maximice el valor utilitario esperado.

$$\max_{\mathbf{V}\in R^{N+1}} E\left[U\left(\mathbf{V}\right)\right]$$

$$\text{s.a:}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{V}) = E\left[Z\mathbf{V}\right] - V_0 e^{\delta N} = 0.$$

Una vez obtenido el portafolio $\mathbf{V}^*$, solución de este problema, se procede a encontrar una estrategia ϕ que replique su perfil de pago con un algoritmo similar al caso de opciones europeas. Ver [7].

Teorema 2.2.1. *Solución del problema anterior cuando* $\mathbf{u(x)} = -\mathbf{e}^{-\gamma\mathbf{x}}$

Demostración:

Primero desarrollaremos el problema generando expresiones más sencillas.

Al conocer la medida de probabilidad $\widehat{P}$ construimos la medida riesgo neutro Q, y denotaremos como $P_i = \widehat{P}\{\widehat{\omega_i}\}$, $Q_i = Q\{\widehat{\omega_i}\}$, $V^{\{i\}} = V_N(\widehat{\omega_i})$, $Z_i = \frac{Q_i}{P_i}$ para $i = 0, \ldots, N$.

$$\max_{\mathbf{V}\in R^{N+1}} F(\mathbf{V}) = \sum_{i=0}^{N} -e^{-\gamma V^{\{i\}}} P_i,$$

$s.a:$

$$h(\mathbf{V}) = \sum_{i=0}^{N} V^{\{i\}} Z_i P_i - V_0 e^{\delta N} = 0.$$

Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange se tiene que encontrar $\mathbf{V}^*$ que cumpla con lo siguiente:

$$\nabla F(\mathbf{V}^*) = \alpha \nabla h(\mathbf{V}^*),$$
$$h(\mathbf{V}^*) = 0.$$

Lo anterior es equivalente a:

$$e^{-\gamma V^{\{i\}}} P_i \gamma = \alpha Z_i P_i \quad \text{para } i = 0, \ldots, N,$$

$$\sum_{i=0}^{N} V^{\{i\}} Z_i P_i - V_0 e^{\delta N} = 0.$$

De las primeras $N+1$ ecuaciones tenemos que:

$$V^{\{i\}} = \frac{Ln\left(\frac{\alpha}{\gamma} Z_i\right)}{-\gamma} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{Ln\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) + Ln(\mathbf{Z})}{-\gamma}.$$

Sustituyendo en la última ecuación tenemos que

$$\sum_{i=0}^{N} Z_i \frac{Ln\left(\frac{\alpha}{\gamma} Z_i\right)}{-\gamma} P_i - V_0 e^{\delta N} = 0, \implies$$

$$\alpha = \gamma \exp\left\{-\sum_{i=0}^{N} Ln(Z_i) Q_i - \gamma V_0 e^{\delta N}\right\} = \gamma \exp\left\{-E^Q[Ln(\mathbf{Z})] - \gamma V_0 e^{\delta N}\right\}.$$

De esta forma obtenemos una expresión analítica del multiplicador de Lagrange para sustituir en el despeje de las primeras $N+1$ ecuaciones

$$\mathbf{V}^{*}=\frac{Ln\left(\mathbf{Z}\right)}{-\gamma}+\frac{E^{Q}\left[Ln\left(\mathbf{Z}\right)\right]}{\gamma}+V_{0}e^{\delta N}.$$

Para encontrar la estrategia, introduzcamos la siguiente notación: Sea ϕ^{*} la estrategia que replica el portafolio $\mathbf{V}^{*}$. $\phi^{*}:=\{\phi_{k}^{*}\}_{k=1}^{N}$, en donde ϕ_{k}^{*} es la estrategia al tiempo t_{k} con componentes $\phi_{k}^{*}:=\left[\phi_{k}^{0},\phi_{k}^{1},\ldots,\phi_{k}^{k}\right]$.

Como ya hemos mencionado, en un mercado sin oportunidad de arbitraje y completo se cumple que:

$$\mathbf{V}_{N-k}=E^{Q}\left[e^{-\delta k}\mathbf{V}_{N}\mid\widehat{\mathcal{F}_{N-k}}\right],k=1,\ldots,N.$$

De lo anterior se puede obtener la siguiente expresión recursiva para $\mathbf{V}_{N-k}$, para $k=1,2,...N$, con componentes

$$V_{N-k}^{j}=\frac{qV_{N-k+1}^{j}+\left(1-q\right)V_{N-k+1}^{j+1}}{e^{\delta}},\quad j=0,1,\ldots,N-k.$$

Denótese por

$$\mathbf{S}_{N}=\left(S_{N}^{0}\left(\omega_{0}\right),S_{N}^{1}\left(\widehat{\omega}_{1}\right),\ldots,S_{N}^{N}\left(\widehat{\omega}_{N}\right)\right),$$

las componentes de $\mathbf{S}_{N-k}$, para $k=1,2,...,N$, están dadas por

$$S_{N-k}^{j}=\frac{qS_{N-k+1}^{j}+\left(1-q\right)S_{N-k+1}^{j+1}}{e^{\delta}},\quad j=0,\ldots,N-k,$$

mientras que por la definición de Z_{j} se tiene que

$$Ln\left(Z_{j}\right)=Ln\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{N-j}\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{j}\right),\quad j=0,\ldots,N.$$

Caso N:

$$\phi_{N}^{j}=\frac{V_{N}^{j}-V_{N}^{j+1}}{(U-D)}=\frac{Ln\left(\frac{(1-q)}{(1-p)}\frac{p}{q}\right)}{\gamma\left(U-D\right)}.$$

Caso N-1:

$$\begin{aligned}\phi_{N-1}^{j} &= \frac{V_{N-1}^{j}-V_{N-1}^{j+1}}{(U-D)}=\frac{q\left\{(N-j)Ln\left(\frac{q}{p}\right)+jLn\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right\}}{-\gamma e^{\delta}(U-D)}\\ &+\frac{(1-q)\left\{(N-j-1)Ln\left(\frac{q}{p}\right)+(j+1)Ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right\}}{-\gamma e^{\delta}(U-D)}\\ &-\frac{q\left\{(N-j-1)Ln\left(\frac{q}{p}\right)+(j+1)Ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right\}}{-\gamma e^{\delta}(U-D)}\\ &-\frac{(1-q)\left\{(N-j-2)Ln\left(\frac{q}{p}\right)+(j+2)Ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right\}}{-\gamma e^{\delta}(U-D)}.\end{aligned}$$

Después de simplificar la expresión anterior tenemos que

$$\frac{V_{N-1}^{j}-V_{N-1}^{j+1}}{(U-D)}=\frac{Ln\left(\frac{(1-q)}{(1-p)}\frac{p}{q}\right)}{\gamma e^{\delta}\left(U-D\right)}.$$

De lo anterior se propone la siguiente expresión para la estrategia:

$$\phi_k=\frac{Ln\left(\frac{(1-q)}{(1-p)}\frac{p}{q}\right)}{\gamma e^{\delta(N-k)}\left(U-D\right)}\quad \text{para } k=1,\ldots,N-1.$$

y a continuación se demuestra por inducción con una notación simplificada.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_N$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, en donde

$$\begin{aligned}
\widehat{P}\left\{z_i=\frac{q}{p}\right\} &= p=1-\widehat{P}\left\{z_i=\frac{1-q}{1-p}\right\},\\
Q\left\{z_i=\frac{q}{p}\right\} &= q=1-Q\left\{z_i=\frac{1-q}{1-p}\right\}.
\end{aligned}$$

Sean $\mathbf{Z}_0:=1, \mathbf{Z}_k:=\mathbf{Z}_{k-1}z_k$, para $k=1,\ldots N$ y $\hat{\mathbf{Z}}_k := \mathbf{Ln}\left(\mathbf{Z}_k\right).$

Observemos que $\hat{\mathbf{Z}}_k=\sum_{i=1}^{k}Ln\left(z_i\right)$ y los valores que puede tomar son:

$$\hat{\mathbf{Z}}_k^j:=(k-j)\,Ln\left(\frac{q}{p}\right)+jLn\left(\frac{1-q}{1-p}\right),\quad \text{para j} = 0,\ldots,\text{k}$$

y $\hat{\mathbf{Z}}_N=Ln\left(\mathbf{Z}\right).$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
E^Q\left[\hat{\mathbf{Z}}_N\mid\widehat{\mathcal{F}_k}\right] &= E^Q\left[\sum_{i=1}^{N}Ln\left(z_i\right)\mid\widehat{\mathcal{F}_k}\right],\\
&= \sum_{i=1}^{k}Ln\left(z_i\right)+\sum_{i=k+1}^{N}E^Q\left[Ln\left(z_i\right)\mid\widehat{\mathcal{F}_k}\right],\\
&= \hat{\mathbf{Z}}_k+\left(N-k-1\right)E^Q\left[Ln\left(z_i\right)\right],
\end{aligned}$$

en particular $E^Q\left[\hat{\mathbf{Z}}_N\mid\widehat{\mathcal{F}_0}\right]=\left(N-1\right)E^Q\left[Ln\left(z_i\right)\right]$, lo que implica que

$$\mathbf{V}^{*}=\frac{\hat{\mathbf{Z}}_N}{-\gamma}+\frac{\left(N-1\right)E^Q\left[Ln\left(z_i\right)\right]}{\gamma}+V_0e^{\delta N}.$$

Aplicando el resultado anterior tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_k^* &= \frac{E^Q\left[\mathbf{V}^* \mid \widehat{\mathcal{F}_k}\right]}{e^{\delta(N-k)}} = \frac{E^Q\left[\hat{\mathbf{Z}}_N\right]}{\gamma e^{\delta(N-k)}} - \frac{E^Q\left[\hat{\mathbf{Z}}_N \mid \widehat{\mathcal{F}_k}\right]}{\gamma e^{\delta(N-k)}} + V_0 e^{\delta k}, \\
&= \frac{E^Q\left[\hat{\mathbf{Z}}_N\right] - E^Q\left[\hat{\mathbf{Z}}_N \mid \widehat{\mathcal{F}_k}\right]}{\gamma e^{\delta(N-k)}} + V_0 e^{\delta k}, \\
&= \frac{\hat{\mathbf{Z}}_k - kE^Q\left[Ln\left(z_i\right)\right]}{-\gamma e^{\delta(N-k)}} + V_0 e^{\delta k}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto los componentes de $\mathbf{V}_k^*$ son:

$$
V_k^j = \frac{\hat{\mathbf{Z}}_k^j + (k)\, E^Q\left[Ln\left(z_i\right)\right]}{-\gamma e^{\delta(N-k)}} \qquad j = 0, 1..., k.
$$

Aplicando álgebra tenemos:

$$
V_k^j - V_k^{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{Z}}_k^j - \hat{\mathbf{Z}}_k^{j+1}}{-\gamma e^{\delta(N-k)}} = \frac{Ln\left(\frac{(1-q)}{(1-p)}\frac{p}{q}\right)}{\gamma e^{\delta(N-k)}}.
$$

Como

$$
\phi_k^j = \frac{V_k^j - V_k^{j+1}}{U-D} \Longrightarrow \phi_k^j = \frac{Ln\left(\frac{(1-q)}{(1-p)}\frac{p}{q}\right)}{\gamma e^{\delta(N-k)}\left(U-D\right)} \qquad \text{para } j = 0, \ldots, k.
$$

□

Si definimos

$$
\zeta = \frac{(1-q)\,p}{(1-p)\,q} \Rightarrow \phi_k = \frac{Ln\left(\zeta\right)}{\gamma e^{\delta(N-k)}\left(U-D\right)}.
$$

Observación: Es importante hacer notar que p, q son parámetros de una distribución binomial, por lo tanto $p, q \in (0,1)$ y, en consecuencia, $\zeta > 0$. El resultado anterior puede obtenerse por medio de programación dinámica sin introducir la probabilidad neutra al riesgo, ver [7].

2.3. Estrategia óptima para el caso binomial con reclamos.

Teorema 2.3.1. *Sea* $\phi^* \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\{\mathbf{M}\}}$ *la estrategia que maximiza* $E\left[U\left(V_N(\phi)\right)\right] \Longrightarrow$ ϕ^* *también maximiza* $E\left[U\left(X_N(\phi)\right)\right]$.

Este teorema nos indica que la estrategia óptima para el problema planteado en la sección 1.4 es independiente a los reclamos.

Demostración:

Recordemos el valor del fondo en el tiempo, dada una riqueza inicial X_0 el valor del fondo al tiempo t_k está dado por:

$$X_N = V_N(\phi) + \sum_{k=1}^{N} (c - \eta_k)\, e^{(N-k)\delta},$$

donde:

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n_k} Y_k^{\{i\}};\, n_k \rightsquigarrow \text{Poisson } (\lambda), Y_i^{\{k\}} \rightsquigarrow exp(\theta).$$

Entonces:

$$E\left[U\left(X_N\right)\right] = E\left[-\exp\left(-\gamma\left(V_N(\phi) + \sum_{k=1}^{N}(c-\eta_k)\, e^{(N-k)\delta}\right)\right)\right].$$

Dado que ξ_k y η_k son independientes y $\mathcal{F}_k$ medibles para $k = 1, \ldots, N$, entonces

$$E\left[-\exp\left(-\gamma\left(V_N(\phi) + \sum_{k=1}^{N}(c-\eta_k)\, e^{(N-k)\delta}\right)\right)\right] =$$

$$-E\left[\exp\left(-\gamma V_N(\phi)\right)\right] E\left[\exp\left(\gamma\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{(N-k)\delta}\right)\right)\right] \exp\left(-\gamma\left(\sum_{k=1}^{N} c e^{(N-k)\delta}\right)\right).$$

Lo que implica que $\max\limits_{\phi\in\tilde{\mathbf{H}}^{\{\mathbf{M}\}}} E\left[U\left(X_N\right)\right] =$

$$\exp\left(-\gamma\left(\sum_{k=1}^{N} c e^{(N-k)\delta}\right)\right) E\left[\exp\left(\gamma\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{(N-k)\delta}\right)\right)\right] * \max_{\phi\in\tilde{\mathbf{H}}^{\{\mathbf{M}\}}} E\left[-\exp\left(-\gamma V_N(\phi),\right)\right]$$

$V_N(\phi)$ es el proceso de inversión sin reclamos analizado ampliamente en la sección 2.2, por lo tanto, el máximo de la función objetivo se obtiene con la misma estrategia ϕ^* que en el problema sin reclamos. □

Observaciones:

1. El hecho de que se considere una función de utilidad exponencial es un punto clave en la demostración, ya que permite separar el valor esperado del portafolio de inversión del valor esperado de las aportaciones y los reclamos, a través de la hipótesis de independencia, y es también la razón por la cual la estrategia es independiente del valor del fondo a lo largo del tiempo.

2. El fondo pudo haberse optimizado usando estrategias de inversión que permitan el consumo. En la literatura de optimización de portafolios es posible determinar una estrategia óptima siempre que el consumo sea menor o igual que el valor del fondo en cada periodo, ver [7]. Sin embargo, ese no es nuestro caso porque los reclamos pueden ser mayores al valor del fondo, lo que daría lugar a la ruina.

2.4. Interpretación de resultados

Después de haber obtenido la estrategia ϕ^* tal que $\phi_k^* = \dfrac{\ln(\zeta)}{\gamma(U-D)} e^{\delta(k-N)}$, para $k = 1, 2, ..., N$, es necesario saber qué características tiene; por un lado, se puede observar que es independiente del valor del portafolio, por otro el signo es siempre el mismo y su valor se incrementa de acuerdo al activo sin riesgo. La primer interrogante que nos planteamos es ¿de qué depende el signo de la estrategia? Podríamos decir que el signo depende directamente del valor de

$$\zeta = \frac{(1-q)p}{(1-p)q}.$$

Dado que el modelo binomial converge al modelo lognormal cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, para estimar el parámetro p del modelo binomial tomaremos una aproximación adecuada de los parámetros del modelo lognormal $(\dot{\mu}, \dot{\sigma})$

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \dot{\mu}dt + \dot{\sigma}dW_t, \\ dW_t &\rightsquigarrow N(0, dt). \end{aligned}$$

Recordando que para efectos de este trabajo

$$dt := \frac{T}{N} \Rightarrow \mu := \frac{\dot{\mu}}{N}, \ \sigma := \frac{\dot{\sigma}}{N},$$

y que ξ_k es el rendimiento en el k-ésimo periodo se obtiene lo siguiente:

$$E[\xi_k] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}};\ E[\xi_k] = pU + (1-p)D \Rightarrow p := \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} - D}{U-D};\ 1-p := \frac{U - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{U-D}.$$

Por otro lado, recordando que

$$q = \frac{e^{\delta} - D}{U-D}; 1-q = \frac{U-e^{\delta}}{U-D},$$

podemos sustituir y encontrar que

$$\zeta = \frac{\left(U - e^{\delta}\right)\left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} - D\right)}{\left(U - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)\left(e^{\delta} - D\right)}.$$

Teorema 2.4.1. *Para toda* k *se cumple que:*

a) Si $\mu + \frac{\sigma^2}{2} = \delta \Longleftrightarrow \phi_k^* = 0,$

b) Si $\mu + \frac{\sigma^2}{2} > \delta \Longleftrightarrow \phi_k^* > 0,$

c) Si $\mu + \frac{\sigma^2}{2} < \delta \Longleftrightarrow \phi_k^* < 0$.

Demostración:

Se demostrará el inciso b y el argumento para a y c es similar.

$$\mu + \frac{\sigma^2}{2} > \delta \Longleftrightarrow e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} > e^{\delta} \Longleftrightarrow e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}(U-D) > e^{\delta}(U-D) \Longleftrightarrow$$

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}U + e^{\delta}D > e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}D + e^{\delta}U \Longleftrightarrow$$

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}U + e^{\delta}D - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}e^{\delta} - UD > e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}D + e^{\delta}U - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}e^{\delta} - UD \Longleftrightarrow$$

$$\left(U - e^{\delta}\right)\left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} - D\right) > \left(U - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)\left(e^{\delta} - D\right) \Longleftrightarrow$$

$$\zeta > 1 \Longleftrightarrow \ln(\zeta) > 0 \Longleftrightarrow \phi_k^* > 0.$$

□

El teorema anterior nos dice que el inversionista buscará invertir en el activo con mayor rendimiento esperado. El monto de la inversión en el activo con riesgo dependerá de su monto de adversión al riesgo absoluta que en este caso es la constante γ.

Una dificultad real a la que nos enfrentamos cuando modelamos el problema vía una función de utilidad exponencial, es que la estrategia obtenida nos puede indicar que lo óptimo es invertir y pedir prestado. Como hemos mencionado anteriormente en la práctica las ventas en corto son posibles hasta cierto punto, pero no están del todo reguladas. Para el caso de los fondos de pensiones y/o prima de antigüedad no es factible pedir prestadas unidades de inversión del activo riesgoso, pero si del activo sin riesgo ya que casi siempre es posible solicitar un crédito.

Por lo anterior, bastaría que $X_0 \geq \phi_k^*$ y que el activo con riesgo tuviera un rendimiento esperado mayor al del activo sin riesgo para garantizar que el portafolio de inversión tenga un valor positivo al tiempo N. Lo que no es posible garantizar es que el valor del fondo X_k sea positivo para toda k porque eso depende de los parámetros. Para estudiar con más detalle este aspecto analizaremos la probabilidad de ruina del fondo.

Capítulo 3

Análisis de la probabilidad de ruina

En este capítulo haremos el análisis de la estrategia óptima en las condiciones del fondo de pensiones así como la estimación de la probabilidad de ruina, teniendo como principal objetivo mostrar que, bajo ciertas condiciones, invertir una parte del fondo en activos con riesgo reduce considerablemente la cota para la probabilidad de ruina.

3.1. Planteamiento y antecedentes

Se recuerda que las hipótesis del modelo son:

1. X_k := El valor el fondo en el tiempo k.

2. X_0 :=La reserva o fondo inicial.

3. ϕ_k :=Cantidad de dinero invertido en el activo con riesgo en el tiempo k.

4. Los reclamos se pagan al final de cada período.

5. Es posible modificar el portafolio de inversión en cada período.

6. $c :=$ aportación al fondo en el tiempo.

7. $\delta :=$ Tasa continua de rendimiento del activo sin riesgo.

8. $p = P\{\xi_k = U\} = 1 - P\{\xi_k = D\}$.

9. $\zeta = \frac{(1-q)p}{(1-p)q} = \frac{p(U-e^\delta)}{(1-p)(e^\delta - D)}$; $\zeta > 0$.

10. $U(x) = -\exp(-\gamma x)$ y $\gamma > 0$.

11. $\eta_k = \sum_{i=1}^{n_k} Y_i$; donde $Y_i \rightsquigarrow \exp(\theta)$, $n_k \rightsquigarrow$ Poisson$(\lambda \Delta t)$.

12. Las variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_N$ son independientes entre sí.

Se denotará por $M_\eta(t) := E\left[e^{t\eta}\right].$

Para facilitar la notación definimos para $k = 1, \ldots, N$:

$$\varepsilon_k := \left(\xi_k - e^{\delta}\right).$$

$$\phi_k^{*,\gamma} := \frac{\ln(\zeta)}{\gamma e^{\delta(N-k)}(U-D)}.$$

En general el proceso del valor del fondo tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned}
X_0 &: \text{reserva inicial (conocida)}, \quad \mathrm{X}_0 \geq \phi_{\mathrm{k}}^{*,\gamma} \\
X_1 &= X_0 e^{\delta} + \phi_1^{*,\gamma}\varepsilon_1 + c - \eta_1, \\
X_2 &= X_1 e^{\delta} + \phi_2^{*,\gamma}\varepsilon_2 + c - \eta_2 = X_0 e^{2\delta} + \left(\phi_1^{*,\gamma}\varepsilon_1 + c - \eta_1\right) e^{\delta} + \phi_2^{*,\gamma}\varepsilon_2 + c - \eta_2, \\
&\vdots \\
X_n &= X_0 e^{\delta n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\phi_k^{*,\gamma}\varepsilon_k + c - \eta_k\right) e^{\delta(n-k)}, \\
&= X_0 e^{\delta n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(\zeta)\,\varepsilon_k}{e^{\delta(N-k)}\gamma\,(U-D)} + c - \eta_k\right) e^{\delta(n-k)}, \\
&= X_0 e^{\delta n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(\zeta)\,\varepsilon_k}{e^{\delta(N-n)}\gamma\,(U-D)} + (c - \eta_k)\, e^{\delta(n-k)}\right).
\end{aligned}$$

Probabilidad de ruina

Definamos a $\tau := \inf\{k \in \mathtt{N} \mid X_k < 0\}$, le llamaremos probabilidad de ruina a

$$\psi(X_0; N) := P(\tau \leq N),$$

es decir la probabilidad de que el fondo tenga en algún tiempo t_k un valor negativo, independientemente de su magnitud; nos interesa el primero de los tiempos de reinversión en que se presenta este evento, ya que después de la ruina no nos importa lo que pase. Puesto que en cada tiempo de reinversión podemos saber si la ruina ocurrió con sólo observar el valor del fondo entonces el evento $\{\omega \in \Omega \mid \tau = k\}$ es $\mathcal{F}_k$ medible y por tanto τ es un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{N}$. Por otro lado, se puede observar que la ruina ocurre en diferentes circunstancias y con diferente probabilidad dependiendo de la riqueza inicial, de los parámetros del proceso de reclamos y de la forma en que se invierta la reserva, por tanto podríamos expresar la probabilidad y el tiempo de ruina en términos de la riqueza inicial y de la estrategia de inversión. Para enfatizar este aspecto denotemos al tiempo de paro de la siguiente forma

$$\tau\left(\phi^{*,\gamma}\right) := \inf\left\{k \in \mathtt{N} \mid X_k\left(\phi^{*,\gamma}\right) < 0\right\}.$$

3.2. Modelo clásico.

En el modelo clásico no se considera que el fondo esté invertido y tiene la siguiente forma:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (c - \eta_k) = X_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k, \quad \text{donde} \quad w_k = c - \eta_k.$$

Para efectos de este trabajo el modelo clásico es equivalente al caso: $(\delta = 0,\ \phi^{*,\gamma} = 0)$.

Hipótesis de carga.

Los casos que estudiaremos en este capítulo difieren en la forma en que se invierte la reserva a lo largo del tiempo, en todos ellos supondremos una aportación constante, la cual está determinada por los parámetros del proceso de reclamos.

Supondremos que las aportaciones al fondo son mayores que el valor esperado del monto de los reclamos, lo cual se conoce como hipótesis de carga. Es decir, existe $\vartheta > 0$ tal que $c = (1+\vartheta)\, E[\eta] = (1+\vartheta)\,\dfrac{\lambda}{\theta}$.

Teorema 3.2.1. *Si* $\hat{\nu} = \dfrac{\vartheta\theta}{1+\vartheta} \Rightarrow$ *el proceso* $e^{-\hat{\nu}X_n}$ *es una martingala.*

Se puede encontrar en [1] la demostración para el caso continuo, cuando los reclamos tengan función generadora de momentos. Se presenta aquí en detalle porque un razonamiento similiar se hará cuando se considere inversión.

Demostración:

Sean $m, n \in \mathbb{Z}; 0 \leq\ m < n \Rightarrow$

$$E\left[e^{-\hat{\nu}X_n} \mid \mathcal{F}_m\right] \;=\; e^{-\hat{\nu}X_m} E\left[\exp\left(-\hat{\nu} \sum_{k=m+1}^{n} (1+\vartheta)\frac{\lambda}{\theta} - \eta_k\right) \mid \mathcal{F}_m\right]$$

Por construcción los reclamos $\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \ldots, \eta_n$ son independientes a $\mathcal{F}_m$, independientes entre si y que se distribuyen como Poisson Compuesto, por lo tanto:

$$e^{-\hat{\nu}X_m} E\left[\exp\left(-\hat{\nu} \sum_{k=m+1}^{n} (1+\vartheta)\frac{\lambda}{\theta} - \eta_k\right) \mid \mathcal{F}_m\right] \;=\; e^{-\hat{\nu}X_m}\left[\exp\left(-\hat{\nu}\,(1+\vartheta)\frac{\lambda}{\theta} + \lambda\left(\frac{\hat{\nu}}{\theta-\hat{\nu}}\right)\right)\right]^{n-m}.$$

Al substituir el valor de $\hat{\nu} = \dfrac{\vartheta\theta}{1+\vartheta}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\hat{\nu}(1+\vartheta)\frac{\lambda}{\theta} + \lambda\left(\frac{\hat{\nu}}{\theta-\hat{\nu}}\right)\right) \\
= & \exp\left(-\frac{\vartheta\theta}{1+\vartheta}(1+\vartheta)\frac{\lambda}{\theta} + \lambda\left(\frac{\frac{\vartheta\theta}{1+\vartheta}}{\theta - \frac{\vartheta\theta}{1+\vartheta}}\right)\right) = 1, \\
& \Rightarrow E\left[e^{-\hat{\nu}X_n} \mid \mathcal{F}_m\right] = e^{-\nu X_m}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el proceso $e^{-\hat{\nu}X_n}$ es una martingala. □

El cociente $\hat{\nu} = \dfrac{\vartheta\theta}{1+\vartheta}$ es también conocido como el parámetro de Lundberg del proceso X_n en el caso clásico.

A partir del parámetro de Lundberg es posible hacer una estimación de la probabilidad de ruina con el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
e^{-\hat{\nu}X_0} &= E\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_{m\wedge\tau}\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_\tau\right) \mid \tau < m\right] P\{\tau < m\} \\
&\quad + E\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_m\right) \mid \tau \geq m\right] P\{\tau \geq m\}.
\end{aligned}$$

En el evento $\{\omega \in \Omega \mid \tau \geq m\}$ tenemos que $\exp(-\hat{\nu}X_m) \leq 1$, por tanto utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada, ver [9], tenemos que:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} E\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_m\right) \mid \tau \geq m\right] = E\left[\lim_{m\longrightarrow\infty} \exp\left(-\hat{\nu}X_m\right) \mid \tau \geq m\right] = 0$$

.

Por lo tanto cuando $m \longrightarrow \infty \Longrightarrow e^{-\hat{\nu}X_0} = E\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_\tau\right) \mid \tau < \infty\right] P\{\tau < \infty\}$.

Esto a su vez implica que

$$P\{\tau < \infty\} = \frac{e^{-\hat{\nu}X_0}}{E\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_\tau\right) \mid \tau < \infty\right]}.$$

Por construcción

$$X_\tau < 0 \ \text{ cuando } \ \{\tau < \infty\} \Rightarrow \exp\left(-\hat{\nu}X_\tau\right) \geq 1$$

ya que el exponente es negativo, entonces

$$\left[\exp\left(-\hat{\nu}X_\tau\right) \mid \tau < \infty\right] \geq 1 \Rightarrow P\{\tau < \infty\} \leq e^{-\hat{\nu}X_0}.$$

Como

$$\{\tau \leq N\} \subseteq \{\tau < \infty\} \Rightarrow P\{\tau < N\} \leq P\{\tau < \infty\} \leq e^{-\hat{\nu}X_0}$$

y por lo tanto $P\{\tau \leq N\} \leq e^{-\hat{\nu}X_0}$.

3.3. Modelo con inversión

Un primer acercamiento al caso real, sería considerar que es posible invertir una parte del fondo en el instrumento con riesgo, pero para abordar el tema de una manera más simple supondremos por el momento que la tasa libre de riesgo en el mercado es cero.

Caso 1: $\delta = 0$. En este caso el valor del fondo en el tiempo es:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(\zeta)\, \varepsilon_k}{\gamma (U - D)} + c - \eta_k \right).$$

Denótese por w_k a

$$w_k = c + \frac{\ln(\zeta)\, \varepsilon_k}{\gamma (U - D)} - \eta_k \Rightarrow X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Observemos que $w_1, w_2 \ldots w_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de ésta forma pudimos expresar el valor de la reserva como una caminata aleatoria.

Denotaremos a la función generadora de momentos de las variables w_k como

$$M_w(\nu) := E\left[e^{\nu\left(\frac{\ln(\zeta)\, \varepsilon}{\gamma (U - D)} + c - \eta \right)} \right].$$

No es difícil ver que la función generadora de momentos de las variables w_k existe pués ε_k y η_k son independientes y sus funciones generadoras existen. Y además por el mismo argumento, es posible expresarla de la siguiente forma:

$$M_w(\nu) = M_\varepsilon \left(\frac{\nu \ln(\zeta)}{\gamma (U - D)} \right) M_\eta(-\nu) \exp(\nu c).$$

Para la obtención del parámetro de Lundberg $\ddot{\nu}$ tendríamos que encontrar $\ddot{\nu} > 0$ tal que para toda n, $E\left[e^{-\ddot{\nu} X_n}\right] = e^{-\ddot{\nu} X_0}$.

Lo anterior es equivalente a obtener $\ddot{\nu} > 0$ tal que $M_w(-\ddot{\nu}) = 1$ ya que

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\ddot{\nu} X_n}\right] &= E\left[\exp(-\ddot{\nu} X_n)\right], \\ &= e^{-\ddot{\nu} X_0} E\left[\exp\left(-\ddot{\nu} \sum_{k=1}^{n} w_k\right)\right], \\ &= e^{-\ddot{\nu} X_0} \left[M_w(-\ddot{\nu})\right]^n = e^{-\ddot{\nu} X_0}. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.1. *Sea w una variable aleatoria con la misma distribución que w_k, si $E[w] > 0$, entonces existe $\ddot{\nu} > 0$ tal que $M_w(-\ddot{\nu}) = 1$.*

Este teorema nos da las condiciones para la existencia del parámetro de Lundberg cuando la distribución de los reclamos es exponencial, el rendimiento esperado del activo con riesgo es positivo y la tasa libre de riesgo es igual a 0.

Nótese que la hipótesis $E[w] > 0$ es consecuencia directa de la hipótesis de carga y de que la estrategia es positiva.

Demostración

Sea $\phi^* := \dfrac{\ln(\zeta)}{\gamma(U-D)}$

$$M_w(-\nu) = E[\exp(-\nu w)] = E[\exp(-\nu(\phi^*\varepsilon + c - \eta))].$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$M_w(-\nu) = E[\exp(-\nu\phi^*\varepsilon)]\, E[\exp(\nu\eta)] \exp(-\nu c).$$

Por hipótesis sabemos que $E[\phi^*\varepsilon + c - \eta] > 0$; si se define $\alpha(\nu) := M_w(-\nu)$, tenemos que

$$\alpha(\nu) = E[\exp(-\nu\phi^*\varepsilon)]\, E[\exp(\nu\eta)] \exp(-\nu c) = M_\varepsilon(-\nu\phi^*) \exp\left[\lambda\left(\frac{\nu}{\theta-\nu}\right)\right] \exp(-\nu c),$$

por lo que $\alpha(\nu) > 0$ para toda ν. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= 1; \\
\alpha'(\nu) &= -M_w'(-\nu); \\
\alpha'(0) &= -M_w'(0) = -E[w] = -E\left[\frac{\ln(\zeta)\varepsilon}{\gamma(U-D)} + c - \eta\right] < 0.
\end{aligned}$$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $0 < \nu < \epsilon \Rightarrow \alpha(\nu) < 1$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\underset{\nu\longrightarrow\theta}{Lim}\, \alpha(\nu) &= \underset{\nu\longrightarrow\theta}{Lim}\, M_\varepsilon(-\nu\phi^*) M_\eta(\nu) \exp(-\nu c), \\
&= \underset{\nu\longrightarrow\theta}{Lim}\, M_\varepsilon(-\nu\phi^*) \exp\left[\lambda\left(\frac{\nu}{\theta-\nu}\right)\right] \exp(-\nu c) = \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe $\ddot{\nu} \in (0,\theta)$ tal que $\alpha(\ddot{\nu}) = 1$. □

En adelante denotaremos a $\ddot{\nu}$ como el parámetro de Lundberg para el caso con inversión pero con tasa libre de riesgo 0.

Después de haber demostrado que existe $\ddot{\nu} > 0$ tal que $M_w(-\ddot{\nu}) = 1$ cuando $E[w] > 0$, procederemos con el mismo razonamiento que en el caso clásico:

$$\begin{aligned}
e^{-\ddot{\nu}X_0} &= E[\exp(-\ddot{\nu}X_{n\wedge\tau})] \\
&= E[\exp(-\ddot{\nu}X_\tau) \mid \tau < m]\, P\{\tau < m\} \\
&\quad + E[\exp(-\ddot{\nu}X_m) \mid \tau \geq m]\, P\{\tau \geq m\}
\end{aligned}$$

De igual forma que en el caso clásico cuando $m \to \infty$

$$e^{-\nu X_0} = E\left[\exp\left(-\ddot{\nu} X_\tau\right) \mid \tau < \infty\right] P\left\{\tau < \infty\right\},$$

entonces

$$P\left\{\tau < \infty\right\} = \frac{e^{-\ddot{\nu} X_0}}{E\left[\exp\left(-\ddot{\nu} X_\tau\right) \mid \tau < \infty\right]}.$$

Por construcción $X_\tau < 0$, cuando $\{\tau < \infty\}$

$$\Rightarrow E\left[\exp\left(-\ddot{\nu} X_\tau\right) \mid \tau < \infty\right] \geq 1.$$

Por lo tanto $P\left\{\tau < \infty\right\} \leq e^{-\ddot{\nu} X_0}$ y con el mismo razonamiento que en el caso clásico podemos afirmar que

$$P\left\{\tau \leq N\right\} \leq e^{-\ddot{\nu} X_0}.$$

No es posible encontrar una expresión analítica para el parámetro de Lundberg; sin embargo, gracias al teorema de existencia, se puede aplicar un método numérico para estimar la solución de la ecuación

$$\left[p\ \exp\left(-\ddot{\nu}\phi^*\left(U-1\right)\right) + \left(1-p\right)\exp\left(-\ddot{\nu}\phi^*\left(D-1\right)\right)\right]\exp\left[\lambda\left(\frac{\ddot{\nu}}{\theta-\ddot{\nu}}\right)\right]\exp\left(-\ddot{\nu}c\right) = 1.$$

Caso 2: $\delta > 0$.

En este caso se considera un activo con riesgo y otro sin riesgo de acuerdo a la sección 3.1, por tanto el proceso puede expresarse de la siguiente forma:

$$X_n = X_0 e^{\delta n} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln\left(\zeta\right)\varepsilon_k}{e^{\delta(N-n)}\gamma\left(U-D\right)} + \left(c-\eta_k\right)e^{\delta(n-k)}\right).$$

Para hacer el análisis en el caso general conviene trabajar con el proceso descontado, lo cuál es equivalente ya que

$$\left\{\omega \in \Omega \mid X_n < 0\right\} = \left\{\omega \in \Omega \mid X_n e^{-\delta n} < 0\right\}.$$

En este caso el proceso tiene la siguiente forma:

$$\tilde{X}_n := X_n e^{-\delta n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln(\zeta)\varepsilon_k}{e^{\delta N}\gamma(U-D)} + (c-\eta_k)e^{-k\delta}\right).$$

Si definimos $\tilde{w}_k := \dfrac{\ln(\zeta)\varepsilon_k}{e^{\delta N}\gamma(U-D)} + (c-\eta_k)e^{-k\delta} \Rightarrow \tilde{X}_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}\tilde{w}_k$.

Podemos observar que en este caso no estamos hablando de una caminata aleatoria, ya que las variables $\tilde{w}_k$ sí son independientes, pero no tienen la misma distribución, aún así buscaremos encontrar el parámetro de Lundberg con algunas adaptaciones. Por otro lado, no es difícil ver que para $k > 1$, $E\left[\tilde{w}_1\right] > E\left[\tilde{w}_k\right]$, cuando $\delta > 0$. Este hecho nos será muy útil para encontrar un parámetro de Lundberg vía una desigualdad.

Lemma 3.3.2.

$$M_{\tilde{w}_1}(-\nu) > M_{\tilde{w}_k}(-\nu) \text{ cuando } 0 < \theta < \nu.$$

Demostración:

Puesto que $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\eta_k \geqslant 0$ entonces

$$E\left[\exp\left(\nu e^{-\delta}(\eta_1 - c)\right)\right] > E\left[\exp\left(\nu e^{-\delta k}(\eta_k - c)\right)\right]$$

lo que implica que

$$E\left[\exp\left(\frac{-\nu \ln(\zeta)\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma(U-D)}\right)\right] E\left[\exp\left(\nu e^{-\delta}(\eta_1 - c)\right)\right]$$

$$> E\left[\exp\left(\frac{-\nu \ln(\zeta)\varepsilon_k}{e^{\delta N}\gamma(U-D)}\right)\right] E\left[\exp\left(\nu e^{-\delta k}(\eta_k - c)\right)\right].$$

Lo que a su vez implica

$$E\left[\exp\left(-\nu\left[\frac{\ln(\zeta)\varepsilon_1}{e^{\delta N}}\gamma(U-D) + (c-\eta_1)e^{-\delta}\right]\right)\right]$$

$$> E\left[\exp\left(-\nu\left[\frac{\ln(\zeta)\varepsilon_k}{e^{\delta N}}\gamma(U-D) + (c-\eta_k)e^{-\delta k}\right]\right)\right]$$

$$\Rightarrow M_{\tilde{w}_1}(-\nu) > M_{\tilde{w}_k}(-\nu).$$

□

Teorema 3.3.3. *Si* $\tilde{X}_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}\tilde{w}_k \Rightarrow$ *existe* $\mathring{\nu} > 0$ *tal que* $E\left[\exp\left(-\mathring{\nu}\tilde{X}_n\right)\right] \leq e^{-\mathring{\nu}X_0}$.

Este teorema nos da las condiciones para la existencia del parámetro de Lundberg cuando la distribución de los reclamos es exponencial, el rendimiento esperado del activo con riesgo es positivo y la tasa libre de riesgo es positiva.

Demostración

Del lema anterior tenemos que

$$E\left[\exp\left(-\nu\tilde{X}_n\right)\right] = e^{-\nu X_0}\prod_{k=1}^{n} M_{\tilde{w}_k}(-\nu) \leq E\left[e^{-\nu X_0}\right]\left[M_{\tilde{w}_1}(-\nu)\right]^n.$$

A diferencia de los casos anteriores lo que tenemos es una desigualdad y tomaremos sólo la primera variable (la más grande en valor esperado).

Ahora bien con la misma argumentación del teorema 3.3.1 sabemos que existe $\mathring{\nu} > 0$ tal que $M_{\tilde{w}_1}(-\mathring{\nu}) = 1$, entonces $E\left[\exp\left(-\mathring{\nu}\tilde{X}_n\right)\right] \leq e^{-\mathring{\nu}X_0}$.

□

Con el mismo razonamiento que en el caso clásico tenemos que $P\{\tau \leq N\} \leq e^{-\mathring{\nu}X_0}$.

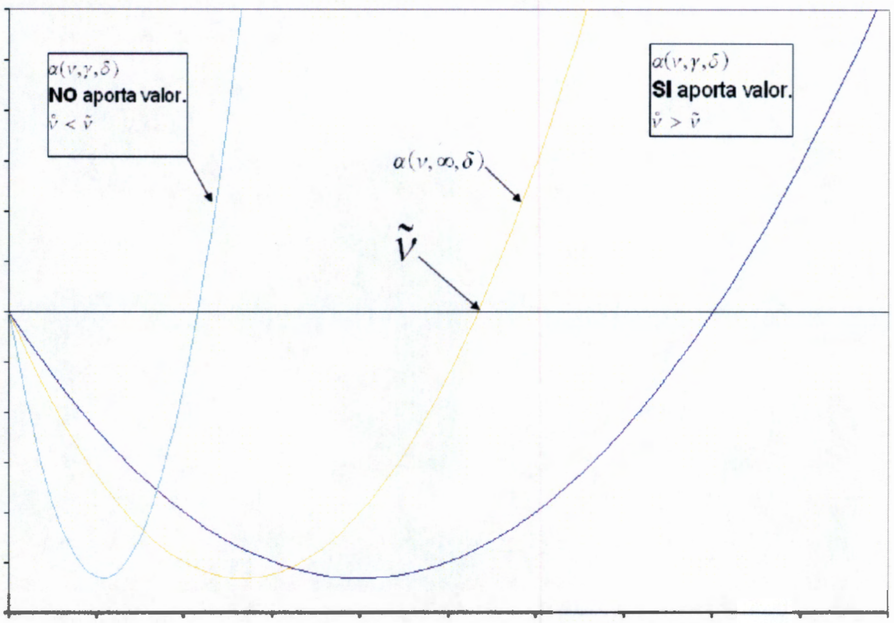

Figura 3.1: Gráfica que compara distintas soluciones de la ecuación de Lundberg.

3.4. Comparación de estrategias

Después de analizar los tres casos quedaría pendiente evaluar si la estrategia encontrada en 2.3 realmente aporta valor en la administración del fondo. Para hacer esta comparación, consideraremos un mismo nivel de aportación y analizaremos el parámetro de Lundberg con dos estrategias: la primera será invertir todo en el activo sin riesgo y la segunda será invertir de acuerdo a la estrategia propuesta en 2.3. Cuando el parámetro de Lundberg de la estrategia recomendada en 2.3 sea mayor, entonces la cota para la probabilidad de ruina será menor y por tanto podemos decir que la estrategia aporta valor en la administración del fondo.

Definamos en general, la ecuación de Lundberg como: $\alpha(\nu,\gamma,\delta) = 1$, donde

$$\begin{aligned} \alpha(\nu,\gamma,\delta) &:= E\left[\exp\left(\frac{-\nu\ln(\zeta)\,\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma(U-D)}\right)\right] E\left[\exp\left(\nu e^{-\delta}(\eta_1 - c)\right)\right], \\ &= \left[p\exp\left(-\nu\phi_0^*\left(U-e^{\delta}\right)\right) + (1-p)\exp\left(-\nu\phi_0^*\left(D-e^{\delta}\right)\right)\right] \\ &\quad \exp\left[\lambda\left(\frac{\nu e^{-\delta}}{\theta - \nu e^{-\delta}}\right) - \nu e^{-\delta}c\right]. \end{aligned}$$

Denotaremos como $\hat{\nu}$ el parámetro de Lundberg asociado a la ecuación: $\alpha(\nu,\gamma,\delta) = 1$.

Observaciones:

1. Se introduce ϕ_0^* de manera artificial pero consistente con el valor de ϕ_k^*.

2.
$$\lim_{\gamma \to \infty} \alpha(\nu, \gamma, \delta) = \exp\left[\lambda\left(\frac{\nu e^{-\delta}}{\theta - \nu e^{-\delta}}\right) - \nu e^{-\delta} c\right].$$

Cuando $\alpha(\nu, \infty, \delta) = 1$ representa el caso de adversión al riesgo absoluta infinita, o bien cuando no se desea invertir en riesgo.

3. Podemos ver que la obtención del parámetro de Lundberg del caso clásico es equivalente a resolver $\alpha(\nu, \infty, 0) = 1$.

4. Una propiedad importante que cumple $\alpha(\nu, \gamma, \delta)$ es la siguiente:
$$\alpha(\nu, \gamma, \delta) = \alpha(\nu, \infty, \delta)\, E\left[\exp\left(\frac{-\nu \ln(\zeta)\, \varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma (U - D)}\right)\right].$$

5. Mediante un procedimiento similar al caso clásico se puede demostrar que la solución de $\alpha(\nu, \infty, \delta) = 1$ es $\tilde{\nu} := \vartheta\theta \dfrac{e^{\delta}}{1 + \vartheta}$.

6. Resolver $E\left[\exp\left(\dfrac{-\nu \ln(\zeta)\, \varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma (U - D)}\right)\right] E\left[\exp\left(\nu e^{-\delta}(\eta_1 - c)\right)\right] = 1$ es equivalente a resolver $\alpha(\nu, \gamma, \delta) = 1$.

Debido a que la cota superior de la probabilidad de ruina es $P\{\tau \le N\} \le E\left[e^{-\tilde{\nu} X_0}\right]$ tenemos que cuando el parámetro de Lundberg crece entonces la cota disminuye. Si demostramos que el parámetro de Lundberg es mayor cuando se considera inversión en riesgo que cuando no, entonces podemos decir que la estrategia aportó valor y por tanto conviene invertir una parte de este tipo de fondos en activos con riesgo.

Para probar este resultado usaremos la expresión (3) para la ecuación de Lundberg cuando se considera inversión; recordemos que $\alpha(\mathring{\nu}, \gamma, \delta) = 1$ y que $\lim\limits_{\nu \longrightarrow \theta} \alpha(\nu, \gamma, \delta) = \infty$, por lo tanto bastaría demostrar que
$$\alpha(\tilde{\nu}, \gamma, \delta) = E\left[\exp\left(\frac{-\tilde{\nu} \ln(\zeta)\, \varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma (U - D)}\right)\right] < 1,$$
para concluir que $\mathring{\nu} > \tilde{\nu}$.

Teorema 3.4.1. *Si* $\zeta > 1$ *y* $\gamma > \dfrac{\tilde{\nu}}{e^{\delta N}} \Rightarrow E\left[\exp\left(\dfrac{-\tilde{\nu} \ln(\zeta)\, \varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma (U - D)}\right)\right] < 1.$

Demostración:

Si $\gamma > \dfrac{\tilde{\nu}}{e^{\delta N}} \Rightarrow 1 - \dfrac{\tilde{\nu}}{e^{\delta N}\gamma} > 0.$

Como $\zeta > 1 \Rightarrow (\zeta)^{1 - \frac{\tilde{\nu}}{e^{\delta N}\gamma}} > 1 \Rightarrow \zeta\,(\zeta)^{-\frac{\tilde{\nu}}{e^{\delta N}\gamma}} > 1.$

Si escribimos la expresión anterior como

$$\zeta \left(\exp\left(\ln\left(\zeta\right)\right)\right)^{\frac{-\tilde{\nu}}{e^{\delta N}\gamma}} > 1 \Rightarrow \zeta \exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}\right) > 1.$$

Al utilizar que $\zeta = \frac{(1-q)p}{(1-p)q}$ se obtiene que

$$\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}\left(1-q\right) - \frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}(-q)\right)\frac{\left(1-q\right)p}{q\left(1-p\right)} > 1.$$

Con un poco de álgebra se obtiene

$$\frac{\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}\left(1-q\right)\right)\left(\frac{\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma^2}\left(1-q\right)\right)p}{\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}(-q)\right)\left(\frac{\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma^2}(q)\right)\left(1-p\right)} > 1.$$

Despejando el denominador y pasándolo al lado izquierdo se obtiene

$$\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}\left(1-q\right)\right)\left(\frac{\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma^2}\left(1-q\right)\right)p +$$
$$\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma}(-q)\right)\left(\frac{\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)}{e^{\delta N}\gamma^2}(-q)\right)\left(1-p\right) > 0.$$

Este resultado nos permite asegurar que

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}E\left[\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma\left(U-D\right)}\right)\right] = E\left[\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma\left(U-D\right)}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma^2\left(U-D\right)}\right)\right] > 0.$$

Puesto que $\lim\limits_{\gamma\to\infty} E\left[\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma\left(U-D\right)}\right)\right] = 1$, entonces

$$E\left[\exp\left(\frac{-\tilde{\nu}\ln\left(\zeta\right)\varepsilon_1}{e^{\delta N}\gamma\left(U-D\right)}\right)\right] < 1.$$

□

Un punto importante en todo el desarrollo de este trabajo es que la medida de adversión absoluta al riesgo γ se determina al final, con objeto de reducir la probabilidad de ruina y evitar en lo posible las ventas en corto.

Las condiciones del mercado y la probabilidad de ruina del modelo clásico determinan el nivel de ad versión al riesgo que debería tener un inversionista de tipo institucional, cuando quiere reducir la probabilidad de ruina del fondo de pensiones. El haber demostrado que considerar activos con riesgo, puede reducir la probabilidad de ruina, muestra la utilidad e importancia de las estrategias de cobertura en la administración financiera de una compañía. Hoy en día los fiduciarios invierten los fondos de pensiones de las empresas en activos con y sin riesgo, pero sin tomar en cuenta la distribución del proceso de reclamos, lo cual puede representar un incremento innecesario en el nivel de riesgo cuando se trata de fondos recién constituidos o no suficientemente bien fondeados.

Capítulo 4

Un caso práctico

Se escogió la empresa "B", la información disponible fué de Enero a Noviembre del 2005 y por tanto todas las estimaciones y cálculos se hicieron para ese periodo.

4.1. Situación general de la empresa, beneficios en el momento de la separación.

La empresa otorga un beneficio mayor que el mínimo establecido por la ley.

El valor de la reserva para afrontar los pagos por concepto de prima de antigüedad (fondo inicial) es de $972,354,985.

Teniendo un mínimo de 15 años de servicio, el beneficio otorgado para todos los casos, a excepción de despido justificado (en este caso solo se paga lo que marque la ley y los recursos no salen del fondo), es el siguiente:

- a: Antigüedad del trabajador.
- S: Sueldo Mensual del trabajador.
- $Y(a, S)$: Prima de antigüedad.

a	$Y(a,S)$
$15-26$	$\left(\frac{a^2}{2}+90\right)\frac{S}{30}$
$27-33$	$(a(a-13)+90)\frac{S}{30}$
$34-\infty$	$(20a+90)\frac{S}{30}$

Cuando ocurre fallecimiento o invalidez antes de que el empleado cumpla 15 años de antigüedad, se paga una pensión mensual y este evento está considerado en el fondo de Pensiones y Jubilación, por lo cual no se considera reclamo en nuestro modelo.

En cualesquiera de los casos el Salario Computable para efecto del pago de la Prima de Antigüedad tendrá como límite inferior el salario mínimo general de la zona donde preste

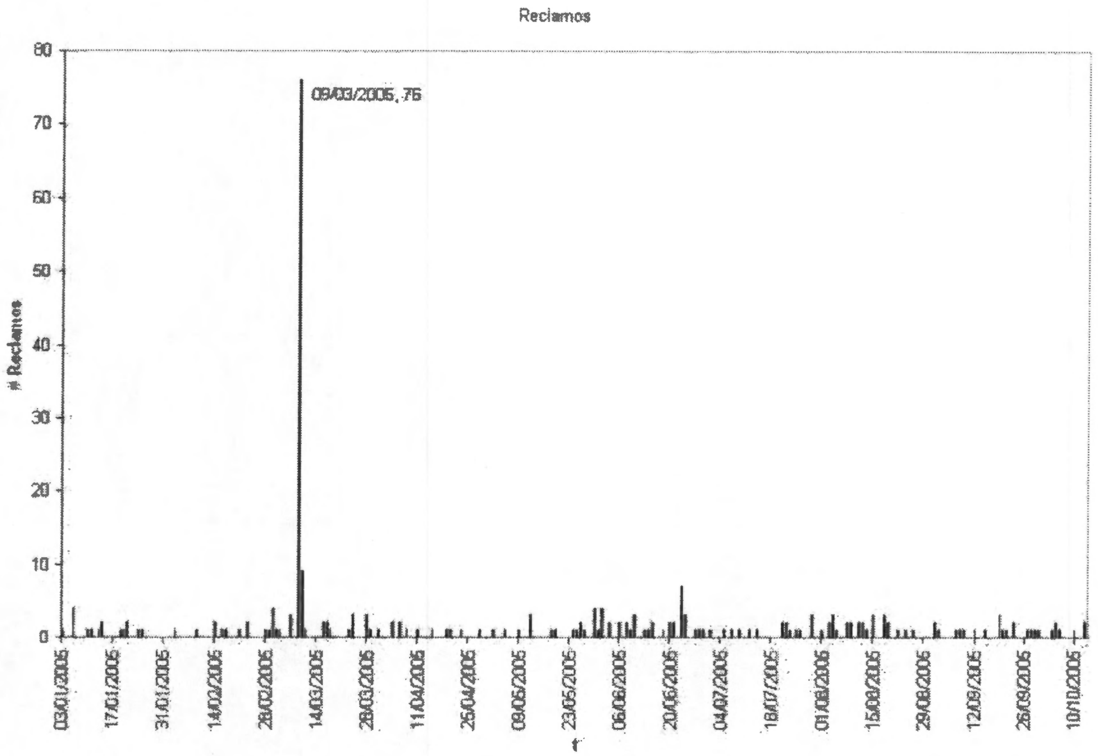

Figura 4.1: Intensidad de reclamos.

sus servicios el Participante y como límite superior el doble de dicho salario mínimo, conforme a la fracción II del Artículo 162 de la L.F.T. que se remite a los Artículos 485 y 486 de la misma Ley.

4.2. Pruebas de hipótesis para la aplicación del modelo.

Pruebas de hipótesis para reclamos

Se obtuvo información tanto de la situación actual del fondo como un registro del monto y fecha de los pagos por concepto de prima de antigüedad realizados de enero a octubre del 2005.

Una hipótesis importante en el modelo es que los pagos por concepto de prima de antigüedad siguen un Proceso de Poisson compuesto y para poder aplicar los resultados es necesario no rechazar esta hipótesis tomando como muestra los datos observados de la empresa.

En la Figura 4.1 se muestra el número de reclamos diarios en el período de estudio. Podemos observar que el día 9 de marzo se dió una gran cantidad de reclamos, situación que según los directores de la empresa es poco usual aunque no descartan que se pueda volver a presentar; no obstante decidimos censurar esta observación para efectos de las pruebas de hipótesis.

Prueba para determinar si el número de reclamos es un proceso de Poisson homogéneo.

La prueba que se aplicó aparece en el libro de Simulación de Ross, ver [6]. La hipótesis nula H_0 es: "N_k son variables aleatorias Poisson independientes con la misma media."

Primero necesitamos no rechazar que se trata de un proceso de Poisson.

Se consideran m intervalos de tiempo de igual longitud, en caso de 1 semana (6 días hábiles) lo que da $m = 47$.

Sea N_k : Número de reclamos en el k-ésimo intervalo y sea

$$\overline{N} = \frac{\sum_{k=1}^{m} N_k}{m}; \, S^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \left(N_k - \overline{N}\right)^2}{m-1},$$

el estadístico de la prueba sería: $\mathbf{L} = \dfrac{\overline{N}}{S^2}$.

Bajo la hipótesis Nula H_0, $\mathbf{L}$ tendría que ser aproximadamente 1, ya que un proceso de Poisson tiene media y varianza iguales.

Para encontrar el valor p de la prueba es necesario realizar una simulación de variables aleatorias n_i con distribución *Poisson* con parámetro $\lambda = \overline{n}$. Esto implica

$$\text{“valor } p\text{”} = 2 * \text{mín}\left\{P_\lambda\left(\mathbf{L} \leq l\right), P_\lambda\left(\mathbf{L} \geq l\right)\right\}$$

en donde P_λ es la distribución empírica que se obtiene en la simulación.

El estadístico $\mathbf{L}$ obtenido fué de aproximadamente 1.2, con un valor p de 0.38, por tanto **NO** se rechaza la hipótesis nula de que se trata de un proceso de Poisson.

Para verificar si el patrón real de llegadas es homogéneo para los 47 intervalos de tiempo, supongamos que los tiempos de reclamos del intervalo k, para $k = 1, 2, \ldots, m$, son $T_{k,1}, T_{k,2}, \ldots, T_{k,N_k}$.

Según H_0 los m conjuntos de datos $\{T_{k,1}, T_{k,2}, \ldots, T_{k,N_k}\}_{k=1}^{m}$ son variables aleatorias independientes con la misma distribución, entonces

$$\chi^2 = \frac{12}{M(M+1)} \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(\rho_k - N_k \frac{M+1}{2}\right)^2}{N_k},$$

tiene distribución ji-cuadrada con $m - 1$ grados de libertad, donde

$$M = \sum_{k=1}^{m} N_k; \; \rho_k = \sum_{i=1}^{N_k} T_{k,i}.$$

El estadístico χ^2 obtenido fué de 45.32 con un valor p de 0.35, por tanto **NO** se rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de variables aleatorias con la misma distribución. Por tanto se concluye que es adecuado modelar el proceso de reclamos como un Poisson Compuesto.

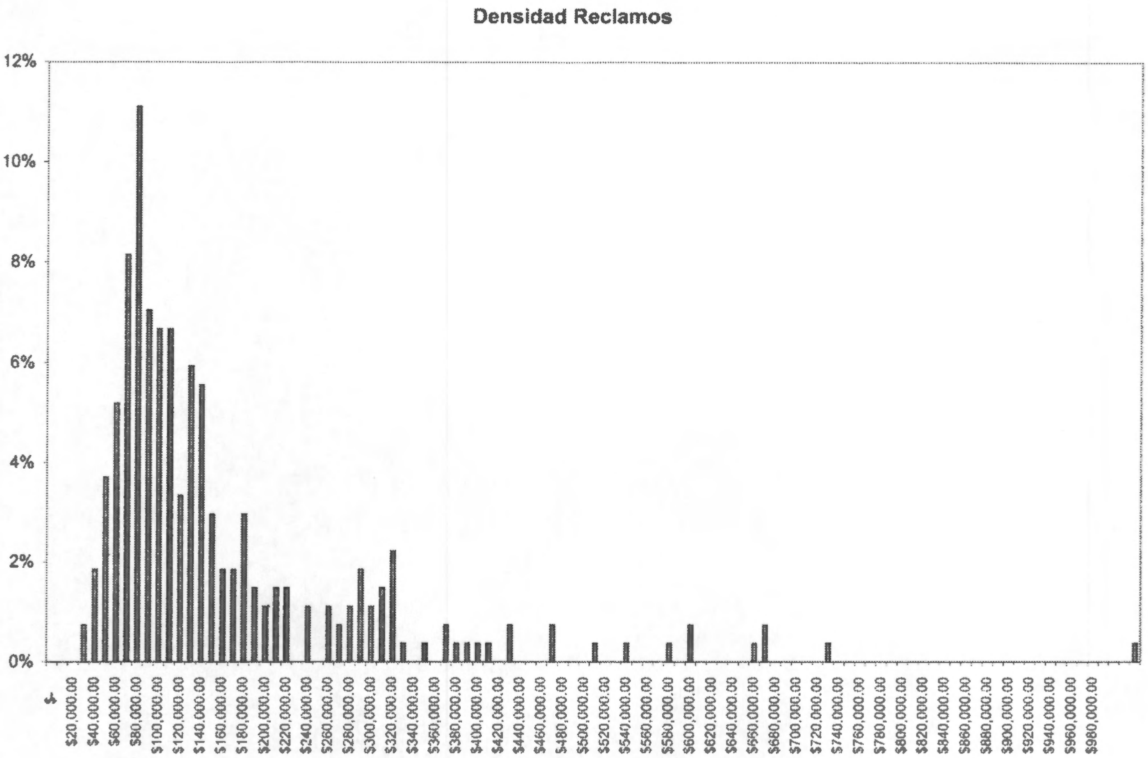

Figura 4.2: Densidad de reclamos.

Pruebas de hipótesis sobre la distribución de los reclamos

Se muestra en la Figura 4.3 el histograma de frecuencias de los reclamos observados en el período de estudio. Se realizó una prueba de Bondad de Ajuste para contrastar la hipótesis nula Ho de que el monto de los reclamos tiene distribución exponencial con media $\frac{1}{\theta}$ =\$165,718. La significancia para el estadístico de la prueba fué de 0.13, por tanto es adecuado considerar el monto de los reclamos con distribución exponencial con media \$165,718.

Prueba de hipótesis para el instrumento con riesgo

Una hipótesis importante en nuestro modelo es que el activo con riesgo sigue un movimiento browniano geométrico, es decir, tiene rendimientos lognormales e independientes. Se consideró como instrumento de inversión de Riesgo el IPC, (o algún fondo de inversión indexado al IPC), se tomaron los valores históricos a lo largo del 2005 y se obtuvo el estadístico de Kolmogorov-Smirnov D = 0.0389 con un valor p = 0.8372.

Por lo cuál no se rechaza la hipótesis nula de que los precios tengan un comportamiento log-normal.

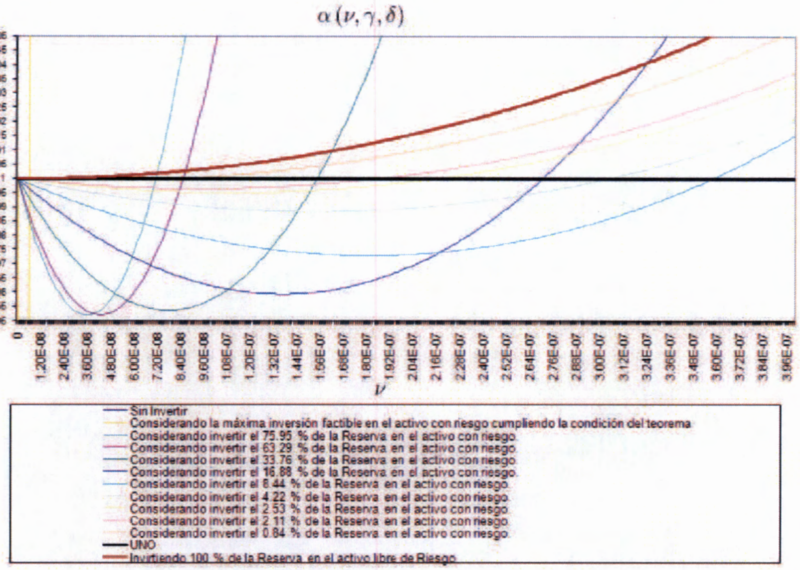

Figura 4.3: Ecuaciones de Cramer - Lundberg.

4.3. Estimación de parámetros

Con base en a la información diaria de los reclamos y del instrumento con riesgo, considerando T un año, y 24 períodos quincenales ($N = 24$) se estimaron los siguientes parámetros:

Parámetro	*Valor*
μ	0.012308956
σ	0.033071494
U	1.033624435
D	0.967469389
p	0.687315987
q	0.536420198
ζ	1.90
δ	0.00295193
$1/(\theta)$	$165,718.82$
λ	13.33
$E[\eta_i]$	$2,209,584.28$

Se consideró además una sobre prima diaria de $\vartheta = 0.0005$ por lo cuál tenemos que la aportación diaria al fondo c es de \$ 2,210,689.07.

Podemos observar que $\zeta = 1.9 > 1$ y que $\frac{\vartheta\theta\frac{e^{\delta}}{1+\vartheta}}{e^{\delta N}} \approx 1.03 \times 10^{-9}$, por tanto basta que $\gamma > 1.03 \times 10^{-9}$ para satisfacer las condiciones mencionadas en la sección 3.2.

En la Figura 4.3 presentamos diferentes gráficas para ecuaciones de Cramer-Lundberg $\alpha(\nu, \gamma, \delta)$ para distintos niveles de adversión al riesgo, es decir para diferentes estrategias de inversión.

La cota para la probabilidad de ruina cuando se invierte todo en el activo con riesgo es 0.053. Destaca de manera particular que para $\gamma = 1.12 \times 10^{-7}$, lo que implica un valor para ϕ_0 de $29,685,390.70$ equivalente al 8.44 % de la reserva, se tiene una cota para la probabilidad de ruina del orden de 10^{-152} que comparado con 0.053 representa una gran ventaja.

Capítulo 5

Conclusiones

- Un inversionista con una función de utilidad exponencial invertirá una cantidad positiva en el activo con riesgo, siempre que éste tenga un rendimiento esperado mayor al del activo sin riesgo.
- Gracias a las propiedades que tiene la función de utilidad exponencial y a la propiedad de incrementos independientes del proceso de reclamos, se pudo demostrar que la estrategia de inversión óptima es la misma, con y sin reclamos, cuando la estrategia es autofinanciable.
- Cuando la aportación es mayor que el valor esperado de los reclamos es posible demostrar la existencia del parámetro de Lundberg para el fondo, cuando se sigue la estrategia obtenida en el capítulo 2 y siempre que el rendimiento esperado del activo con riesgo sea mayor que el rendimiento del activo sin riesgo.
- Se demostró que es posible ajustar el nivel de aversión absoluta al riesgo de la función de utilidad exponencial para reducir la cota de la probabilidad de ruina del fondo; es decir bajo las condiciones antes mencionadas sobre el comportamiento del mercado de inversión y del proceso de reclamos, existe al menos una estrategia que contempla inversión en el activo con riesgo que disminuye la cota para la probabilidad de ruina.
- Al aplicar las pruebas de hipótesis a los datos observados del proceso de reclamos de una empresa en particular, se concluyó que es razonable modelarlo mediante un Proceso de Poisson Compuesto con variable de reclamo exponencial. De igual forma no se rechazó la hipótesis nula de que un fondo de inversión indexado al IPC tuviera un comportamiento lognormal. Ésto nos permitió estimar los parámetros correspondientes del modelo y proponer a la empresa una estrategia de inversión que reduce significativamente la probabilidad de ruina de su fondo de prima de antigüedad.

Bibliografía

[1] Asmussen S. *Ruin Probabilities.* World Scientific. 2000.

[2] S. Browne. *Optimal investments for a firm with a random risk process exponential utility and minimizing probability of ruin.* Mathematics of Operations Research. Vol 20. no. 4. 1995.

[3] B. Fernández, D. Hernández, A. Meda y P. Saavedra. *An Optimal Investment Strategy with Maximal Ruin Aversion and its Ruin Probability.* Aceptado para publicación por Mathematical Methods of Operations Research. Springer Verlag. 2007.

[4] J. Gaier, P. Grandits y W. Schachermayer *Asymptotic Ruin Probabilities and Optimal Ivestment.* The Annals of Applied Probability. Vol 13, no. 3. 2003.

[5] DeGroot M. *Probabilidad y Estadística.* Addison-Wesley. 1988.

[6] Ross S. *Simulación.* Prentice Hall. 1999.

[7] Pliska S. *Introduction to Mathematical Finance.* Blackwell Publishers. 2000.

[8] Shreve S. *Stochastic Calculus for Finance Vol. I.* Springer Finance. 2003.

[9] Williams D. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press. 1991.