

“**ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS  
EN EL PÉNDULO-RESORTE**”

Tesis

que para obtener el grado de Maestro en Matemáticas presenta

**MARTHA / ÁLVAREZ RAMÍREZ,**

bajo la dirección del **Dr. Joaquín Delgado F.**

Departamento de Matemáticas.  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería.  
Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa.  
México, D.F.

Julio de 1992

**ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS  
EN EL PÉNDULO-RESORTE**

tesis que presenta

**MARTHA ÁLVAREZ RAMÍREZ**

para la obtención del grado de

**MAESTRO EN MATEMÁTICAS**

Julio de 1992.

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA.  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA.

**Agradecimientos.**

**147896**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca que me otorgó para la realización de estudios de Maestría en la UAM-I.

Al Dr. Joaquín Delgado Fernández por su labor como director de este trabajo.

A todos y cada uno de mis amigos.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Sistema péndulo-resorte.</b>	<b>1</b>
1.1	Ecuaciones de Movimiento. . . . .	1
1.2	Primera Reducción. . . . .	3
1.3	Puntos de Equilibrio. . . . .	6
1.4	Descripción Cualitativa del Movimiento . . . . .	9
1.4.1	Regiones de Hill para $a = 0$ . . . . .	9
1.4.2	Solución exacta para $a = 0$ con $h = 0$ . . . . .	10
1.4.3	Regiones de Hill para $a \neq 0$ . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Integrabilidad.</b>	<b>14</b>
2.1	Casos Integrables. . . . .	14
2.2	Explosión del origen. . . . .	15
2.3	Transversalidad de las órbitas expulsión-colisión. . . . .	16
2.4	Órbitas Periódicas Verticales para $a = 0$ . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Mapeo de Poincaré y Líneas de Simetría.</b>	<b>26</b>
3.1	La Teoría de Involuciones de Birkhoff. . . . .	28
3.2	Órbitas Periódicas Simétricas. . . . .	29
3.3	Líneas de Simetría en el Péndulo-Resorte. . . . .	32
3.4	Cálculo de las Líneas de Simetría. . . . .	34

# Lista de Figuras

1.1	Péndulo resorte. . . . .	2
1.2	Radio de energía potencial elástica constante. . . . .	2
1.3	Sistema de referencia. . . . .	3
1.4	Plano del movimiento. . . . .	4
1.5	Diagrama de Bifurcación. . . . .	7
1.6	Variación de la energía $h$ con respecto a $f$ en el punto $L_2$ . . . . .	10
1.7	Regiones de Hill para distintos valores de $f$ y $h$ . . . . .	11
1.8	Regiones de Hill para $a = 0.5$ . . . . .	12
1.9	Superficies del potencial. . . . .	13
2.1	Flujo en la variedad de colisión $\Lambda$ . . . . .	17
2.2	Ilustración del lema . . . . .	18
2.3	Oscilaciones verticales. . . . .	21
2.4	Órbita vertical con $x \geq -1$ . . . . .	22
2.5	Regiones de estabilidad de la ecuación de Hill. . . . .	23
2.6	Órbitas verticales con $x < -1$ . . . . .	24
3.1	Mapeo de Poincaré . . . . .	27
3.2	Una órbita intersectando la sección de cruce $\Sigma$ . . . . .	27
3.3	Ilustración de la proposición. . . . .	31
3.4	Tipos de cruces de las órbitas con el eje $x$ . . . . .	31
3.5	Interpretación física de $I_0$ . . . . .	33

## Introducción.

Uno de los problemas más importantes en Mecánica Celeste, es el problema general de  $n$ -cuerpos. En la búsqueda de su solución, se han planteado casos particulares; un ejemplo de éste es el problema *restringido de tres cuerpos*.

Lograr describir la dinámica del problema restringido es muy complicado debido a la estructura de sus ecuaciones de movimiento, pues tienen 5 puntos de equilibrio y 2 singularidades. El sistema *péndulo-resorte* ha sido estudiado por algunos autores como un modelo simple que refleja la complejidad del primero [BB]. Las ecuaciones de movimiento del péndulo-resorte son más simples, sólo tiene 2 puntos de equilibrio y una singularidad (punto fijo del resorte).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, estudiaremos el problema péndulo-resorte como un problema académico aplicando técnicas generales de sistemas Hamiltonianos. Bajo esta misma idea algunos autores han obtenido algunos resultados. En [Koi] se hace un estudio local de órbitas periódicas simétricas mediante cálculos numérico-analíticos, logrando encontrar sólo órbitas de *libración* (i.e., que tocan la curva de velocidad cero) y propone la búsqueda de órbitas de *circulación* (i.e., que no tocan la curva de velocidad cero). En [Nu] se toman valores fijos de la gravedad y constante del resorte, y se realiza un estudio del mapeo de Poincaré para algunos valores de energía. Después de calcular los exponentes de Liapunoff se concluye que existe comportamiento caótico para estos valores particulares de los parámetros.

En el presente trabajo se estudian algunos aspectos dinámicos del sistema péndulo-resorte considerando que es un sistema Hamiltoniano. La idea principal se centra en el hecho de que es un sistema no-integrable y tiene simetrías.

En el Capítulo 1 se plantean las ecuaciones de movimiento, y se observa que se tiene un sistema Hamiltoniano conservativo con tres grados de libertad, reversible. Se toman variables adimensionales con lo que las ecuaciones quedan en términos de un parámetro  $f \in [0,1]$ . Un cambio a coordenadas cilíndricas hace ver que la componente vertical del momento angular es una constante de movimiento al igual que la energía ( $h$ ). Este hecho permite la reducción a un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad. Para su estudio, distinguimos dos casos de acuerdo al momento angular:  $a = 0$  y  $a \neq 0$ , y se hace una descripción de las regiones de Hill.

En el Capítulo 2 se demuestra la *no integrabilidad* de las ecuaciones diferenciales para  $a = 0$ , y se hace la explosión de la singularidad de las ecuaciones diferenciales utilizando la transformación de McGehee. Se demuestra después que, para energía positiva existen un número par de órbitas expulsión-colisión, las cuales se aproximan a la singularidad cuando el tiempo crece y decrece. Se da la demostración de la no existencia de primeras integrales *extendibles* independientes de la energía.

A partir de aquí nos concentramos en la búsqueda de soluciones periódicas que cumplen con la simetría  $(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t)$ , i.e., que sean simétricas con respecto al eje  $x$  y que crucen el eje  $y = 0$  al menos dos veces con  $\dot{x} = 0$ . De las regiones de Hill se observa que estas sólo pueden ser calculadas para el caso  $a = 0$ . Mediante las ecuaciones variacionales se hace un estudio de las órbitas verticales vecinas a los puntos de equilibrio  $L_1$  y  $L_2$ .

En el capítulo 3 se da la definición de mapeo de Poincaré y las propiedades esté. Se continua con la definición y propiedades de líneas de simetría. Utilizando la técnica de líneas de simetría, calculamos las órbitas periódicas simétricas del péndulo-resorte.

A fin de evitar los problemas numéricos ocasionados por la singularidad, hemos calculado las líneas de simetría para un valor de energía  $h = -0.4$  con  $f = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3$  y para  $h = -0.2$  con  $f = 0.8, 0.7, 0.6$ ; finalmente damos una descripción sobre la dinámica de las líneas de simetría y la existencia de órbitas con diferentes períodos.

# Capítulo 1

## Sistema péndulo-resorte.

### 1.1 Ecuaciones de Movimiento.

El sistema péndulo-resorte consiste de una partícula puntual de masa  $m$  sujeta a un punto fijo con un resorte lineal de longitud natural  $l_o$  y constante  $k$ , inmerso en un campo gravitacional constante  $g$  como se muestra en la Fig. 1.1.

La variación de la energía cinética que el resorte comunica al cuerpo y la variación correspondiente de energía potencial, sólo dependen de la compresión o dilatación del resorte y está determinada por la distancia radial  $\rho$  del punto fijo del resorte al cuerpo. Esto se deduce del hecho que la fuerza del resorte está dirigida a lo largo de él y sólo los desplazamientos en dicha dirección producirán trabajo y variarán la energía potencial; luego la energía potencial debida al resorte está determinada por la distancia de la masa al punto fijo, y todas las posiciones de una circunferencia de radio dado tienen la misma energía potencial (ver Fig. 1.2), en otras palabras si  $\rho$  es el radio del vector (distancia de la partícula del péndulo al origen o soporte), el estiramiento del resorte es  $\rho - l_o$  y la fuerza  $-k(\rho - l_o)$ .

La energía potencial  $V(\xi, \eta, \zeta)$  está compuesta de la energía *elástica*

$$\frac{k(\rho - l_o)^2}{2}$$

y la energía *gravitacional*  $-mg\xi$ . Donde  $\xi$  es la coordenada vertical orientada en la dirección del campo gravitacional;  $\eta$  y  $\zeta$  son las coordenadas en las direcciones ortogonales a un sistema cartesiano (véase Fig. 1.3) y  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ . La fuerza es dada por

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V(\xi, \eta, \zeta) = \left( -mg + \frac{k(\rho - l_o)\xi}{\rho}, \frac{k(\rho - l_o)\eta}{\rho}, \frac{k(\rho - l_o)\zeta}{\rho} \right).$$

Obsérvese que la fuerza sólo depende de la posición. De la segunda ley de Newton sabemos que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , luego las ecuaciones de movimiento relativas al punto fijo son:

$$m\ddot{\xi} = -k\xi \left( 1 - \frac{l_o}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \right) + mg \quad (1.1)$$

$$m\ddot{\eta} = -k\eta \left( 1 - \frac{l_o}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \right) \quad (1.2)$$

$$m\ddot{\zeta} = -k\zeta \left( 1 - \frac{l_o}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \right) \quad (1.3)$$

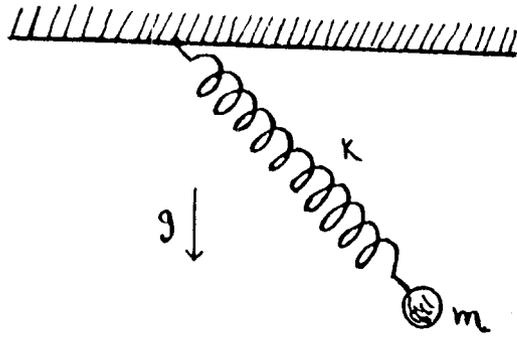


Figura 1.1: Péndulo resorte.

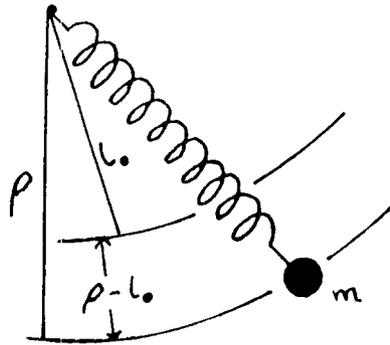


Figura 1.2: Radios de energía potencial elástica constante.

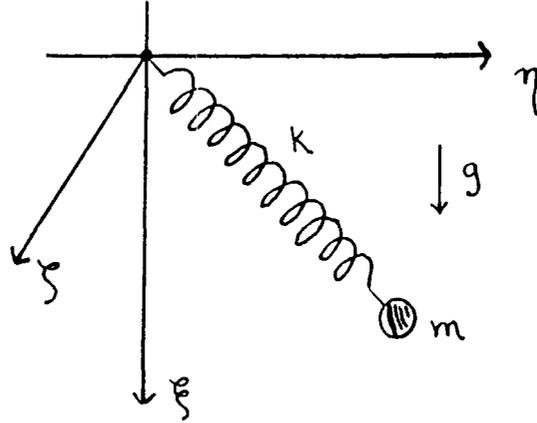


Figura 1.3: Sistema de referencia.

con condiciones iniciales

$$\xi(0) = \xi_o, \eta(0) = \eta_o, \zeta(0) = \zeta_o, \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_o, \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_o, \dot{\zeta}(0) = \dot{\zeta}_o$$

donde  $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$ . De las ecuaciones de movimiento podemos notar que tenemos un sistema con una singularidad en el origen  $\xi = \eta = \zeta = 0$ .

A partir de las ecuaciones (1.1)-(1.3) obtenemos que el sistema tiene dos puntos de equilibrio, cuyas coordenadas son

$$L_1 : \xi_1 = \frac{mg}{k} + l_o > 0, \eta_1 = 0, \zeta_1 = 0$$

$$L_2 : \xi_2 = \frac{mg}{k} - l_o < 0, \eta_2 = 0, \zeta_2 = 0$$

## 1.2 Primera Reducción.

La simetría del problema respecto de la dirección vertical nos permitirá reducir el número de grados de libertad en uno.

Si multiplicamos la ecuación (2) por  $\zeta$  y (3) por  $\eta$  y restamos obtenemos

$$\ddot{\zeta}\eta - \ddot{\eta}\zeta = 0$$

e integrando llegamos a la ecuación

$$\dot{\zeta}\eta - \dot{\eta}\zeta = \text{constante.}$$

La cantidad  $\dot{\zeta}\eta - \dot{\eta}\zeta$  es la componente del momento angular en la dirección  $\xi$ . Entonces el movimiento se realizará en un plano que contiene al eje  $\xi$  (ver Fig.1.4), el cual gira a una velocidad sectorial constante.

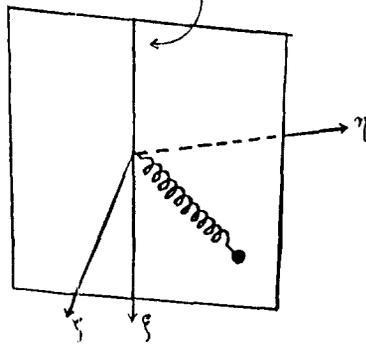


Figura 1.4: Plano del movimiento.

La reducción anterior se visualiza mejor si reescribimos las ecuaciones (1)-(3) en forma *Hamiltoniana* en coordenadas cilíndricas. Antes de ello conviene pasar a variables adimensionales con origen en el punto  $L_1$ , introduciendo

$$x_1 = \frac{\xi}{\xi_1} - 1, \quad y_1 = \frac{\eta}{\xi_1}, \quad z_1 = \frac{\zeta}{\xi_1}$$

junto con una reparametrización del tiempo dada por

$$\tau = t \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Entonces en estas nuevas variables las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\ddot{x}_1 = -(x_1 + 1) \left( 1 - \frac{1 - f}{\sqrt{(x_1 + 1)^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right) + f \quad (1.4)$$

$$\ddot{y}_1 = -y_1 \left( 1 - \frac{1 - f}{\sqrt{(x_1 + 1)^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right) \quad (1.5)$$

$$\ddot{z}_1 = -z_1 \left( 1 - \frac{1 - f}{\sqrt{(x_1 + 1)^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right) \quad (1.6)$$

donde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{d\tau}$  y  $f = \frac{mg}{mg + kl_0}$ . Obsérvese que  $k, l_0 > 0$ , y por lo tanto  $0 \leq f \leq 1$ . Estas

ecuaciones pueden escribirse en forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_{x_1}} & \dot{p}_{x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{y}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_{y_1}} & \dot{p}_{y_1} &= -\frac{\partial H}{\partial y_1} \\ \dot{z}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_{z_1}} & \dot{p}_{z_1} &= -\frac{\partial H}{\partial z_1}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}H(x_1, y_1, z_1, p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}) &= \frac{1}{2}(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \\ &\quad - (1-f)\sqrt{(x_1+1)^2 + y_1^2 + z_1^2} - (f-1)x_1.\end{aligned}$$

Como consecuencia de ello  $H$  es una constante de movimiento. Esta constante es precisamente la *energía* total del sistema péndulo-resorte. En seguida hacemos un cambio a coordenadas cilíndricas dejando invariante la coordenada vertical en la dirección del campo gravitacional

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\ y_1 &= r_1 \cos \phi \\ z_1 &= r_1 \sin \phi.\end{aligned}$$

Para que las ecuaciones anteriores definan un cambio canónico de coordenadas, se debe preservar la 1-forma fundamental

$$p_{x_1} dx_1 + p_{y_1} dy_1 + p_{z_1} dz_1 = p_x dx + p_{r_1} dr_1 + p_\phi d\phi$$

(donde los  $p_i$  son los respectivos momentos canónicos) lo cual nos lleva a que

$$\begin{aligned}p_x &= p_{x_1} \\ p_{r_1} &= p_{y_1} \cos \phi + p_{z_1} \sin \phi \\ p_\phi &= r_1(-p_{y_1} \sin \phi + p_{z_1} \cos \phi).\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}p_{r_1}^2 &= p_{y_1}^2 \cos^2 \phi + 2p_{y_1}p_{z_1} \cos \phi \sin \phi + p_{z_1}^2 \sin^2 \phi \\ \frac{p_\phi^2}{r_1^2} &= p_{y_1}^2 \sin^2 \phi - 2p_{y_1}p_{z_1} \cos \phi \sin \phi + p_{z_1}^2 \cos^2 \phi\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$p_{r_1}^2 + \frac{p_\phi^2}{r_1^2} = p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2$$

donde  $r_1^2 = y_1^2 + z_1^2$ . Bajo estas consideraciones, en coordenadas cilíndricas el Hamiltoniano se transforma en

$$\begin{aligned}H(x, r_1, \phi, p_x, p_{r_1}, p_\phi) &= \frac{1}{2}\left(p_{r_1}^2 + \frac{p_\phi^2}{r_1^2} + p_x^2\right) + \frac{1}{2}((x+1)^2 + r_1^2) \\ &\quad - (1-f)\sqrt{(x+1)^2 + r_1^2} - fx.\end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones de Hamilton se ve que  $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$ , luego  $\dot{p}_\phi = 0$  de donde la componente vertical del momento angular ( $p_\phi = r_1^2 \frac{d\phi}{dt}$ ) es constante, digamos  $p_\phi = a$ ,  $a \in \mathbf{R}$ . De esta manera la reducción del sistema por la componente vertical del momento angular se lleva a cabo fijando el valor de la coordenada de momento  $p_\phi$ .

Teniendo en cuenta estas consideraciones, conviene reescribir el Hamiltoniano como sigue: <sup>1</sup>

$$H(x, r_1, p_x, p_{r_1}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_{r_1}^2) + \frac{a^2}{2r_1^2} + \frac{1}{2}((x+1)^2 + r_1^2) - (1-f)\sqrt{(x+1)^2 + r_1^2} - f(x+1).$$

La variación de  $\phi$  se resuelve por la cuadratura  $p_\phi = a$ , y de las ecuaciones de Hamilton se ve que  $H$  es una integral primera, lo cual significa que  $H$  es constante a lo largo de las soluciones. Por lo tanto nuestro problema se reduce a resolver un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad.

### 1.3 Puntos de Equilibrio.

Nuestro problema se ha reducido a dos grados de libertad,  $r_1$  y  $x$ . Para armonizar la notación haremos  $r_1 = y$ ; por lo tanto el Hamiltoniano queda escrito ahora como

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{a^2}{2y^2} + \frac{1}{2}((x+1)^2 + y^2) - (1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - f(x+1)$$

entonces el potencial efectivo después de efectuada la reducción por la componente vertical del momento angular viene dada por la función

$$V(x, y, a) = \frac{a^2}{2y^2} + \frac{1}{2}((x+1)^2 + y^2) - (1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - f(x+1).$$

Para conocer el comportamiento de las soluciones vecinas a los puntos de equilibrio, estudiaremos la *estabilidad* de estos.

Dado que en nuestro caso se cumple que  $p_x = \dot{x}$  y  $p_y = \dot{y}$ , entonces las ecuaciones de movimiento del péndulo-resorte en dos grados de libertad son:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -(x+1) \left( 1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right) + f \\ \ddot{y} &= \frac{a^2}{y^3} - y \left( 1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Para el estudio de los puntos de *equilibrio* de las ecuaciones (1.7) distinguiremos dos casos:  $a = 0$  y  $a \neq 0$ .

<sup>1</sup>Por conveniencia hemos agregado el término constante  $-f$  en el Hamiltoniano, lo cual no afecta las ecuaciones de movimiento.

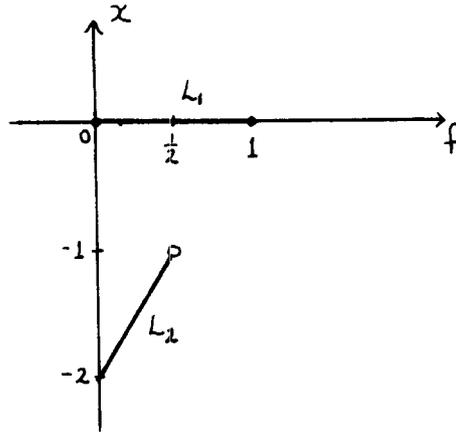


Figura 1.5: Diagrama de Bifurcación.

(i) Si  $a = 0$  las ecuaciones (1.7) toman la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -(x+1) \left( 1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right) + f \\ \ddot{y} &= -y \left( 1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right),\end{aligned}\quad (1.8)$$

y tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales con una singularidad en  $(x, y) = (-1, 0)$ , el cual corresponde al punto donde se apoya el resorte. Los puntos de *equilibrio* del sistema (1.8), los podemos calcular a partir de los puntos donde las derivadas parciales de la energía potencial  $V$  se anulan. Estos son:

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 : (x, y) &= (0, 0) \\ \hat{L}_2 : (x, y) &= (2f - 2, 0) \quad \text{para } f < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y por lo tanto el diagrama de *bifurcación* está dado como se ve en la Fig.1.5. Cabe recordar que  $0 \leq f \leq 1$  y  $(x, y) = (-1, 0)$  corresponde a la singularidad.

Si denotamos por  $(x_o, 0)$  cualesquiera de los puntos de críticos del potencial y calculamos la matriz Hessiana de la función potencial  $V(x, y, 0)$  en tal punto, obtenemos

$$\text{Hessiano } V|_{(x_o, 0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1-f}{|x_o+1|} \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana nos dará información del sistema en los puntos de equilibrio. Los valores propios en  $\hat{L}_1$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = f$ ; luego el punto  $(0, 0)$  es un mínimo local para el potencial  $V$ . Los valores propios de  $\hat{L}_2$  con  $f < \frac{1}{2}$  son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = \frac{f}{2f-1} < 0$ . De tal forma que podemos concluir que  $\hat{L}_1$  es un punto *mínimo* del potencial mientras que  $\hat{L}_2$  es un punto *silla*.

(ii) Para el caso  $a \neq 0$ , en general no es posible dar una fórmula explícita para los puntos críticos, sin embargo de la segunda ecuación de (1.7) tenemos que

$$1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \frac{a^2}{y^4},$$

entonces sustituyendo esta expresión en la primera ecuación de (1.7) llegamos a que los puntos deben estar sobre la curva

$$fy^4 = a^2(x + 1). \quad (1.9)$$

En el caso límite particular  $f = 1$  la función potencial se reduce a

$$V(x, y, a) = \frac{a^2}{y^3} + \frac{1}{2}((x + 1)^2 + y^2) - (x + 1),$$

cuyos puntos críticos se localizan en

$$(x, y) = (0, \pm\sqrt{a}),$$

que están sobre la curva (1.9). La matriz Hessiana en  $(0, \pm\sqrt{a})$

$$M = \text{Hessiano } V|_{(0, \pm\sqrt{a})} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dado que sus respectivos valores propios son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -4$ , el potencial tiene un mínimos locales en los puntos  $(0, \sqrt{a})$  y  $(0, -\sqrt{a})$ .

La estabilidad de un punto crítico de (1.7) o (1.8) está determinada por los valores propios del Hessiano de la función potencial en el punto crítico. Esto es consecuencia de la siguiente proposición [H-S].

**Proposición 1.1** *Sea  $(x_0, y_0)$  un punto crítico del Hessiano de la función potencial  $V(x, y)$  entonces  $(x_0, y_0, 0, 0)$  es un punto crítico del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x \\ \dot{y} &= p_y \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.10)$$

*Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son los valores propios de la matriz Hessiana de  $V$  en  $(x_0, y_0)$  entonces los valores propios del sistema de ecuaciones diferenciales (1.10) en el punto crítico  $(x_0, y_0, 0, 0)$  son  $\pm\sqrt{-\lambda_1}$ ,  $\pm\sqrt{-\lambda_2}$ .*

Denotemos por  $L_1 = (0, 0, 0, 0) = (\hat{L}_1, 0, 0)$  y por  $L_2 = (2f - 2, 0, 0, 0) = (\hat{L}_2, 0, 0)$ . Entonces por el Teorema de Lagrange [H-S], sabemos que si  $a = 0$  entonces  $L_1$  es un punto de equilibrio *estable* para el sistema (1.10). Ahora, por el Teorema de la Variedad Central [G-H], existen variedades invariantes estables e inestables asociadas a  $L_2$  y por lo tanto éste es un punto de equilibrio *inestable* para el sistema (1.10). Aplicando la proposición al caso  $a \neq 0$ , podemos concluir que los puntos de equilibrio correspondientes son *estables*.

## 1.4 Descripción Cualitativa del Movimiento

En esta sección estudiaremos las *regiones de Hill*, es decir, la proyección de los niveles de energía  $H = \text{constante}$  sobre el espacio de configuración  $x$ - $y$ .

Recordemos que el Hamiltoniano ( $H$ ) es constante a lo largo de las soluciones, entonces podemos fijar un valor de la energía, por ejemplo  $H = h$

$$\frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{a^2}{2y^2} + \frac{1}{2} ((x+1)^2 + y^2) - (1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - f(x+1) = h$$

donde  $p_x = \dot{x}$  y  $p_y = \dot{y}$ . Como  $(p_x^2 + p_y^2) \geq 0$  entonces

$$-\frac{a^2}{y^2} - ((x+1)^2 + y^2) + 2(1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2f(x+1) + 2h \geq 0, \quad (1.11)$$

esta última desigualdad determina las regiones accesibles de movimiento llamadas *regiones de Hill*. Cuando  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  la relación anterior se reduce a una igualdad la cual determina una curva en el espacio de configuración llamada *curva de velocidad cero*.

Al igual que en la sección anterior, distinguiremos dos casos para el estudio de las regiones de Hill:  $a = 0$  y  $a \neq 0$ .

### 1.4.1 Regiones de Hill para $a = 0$ .

Si  $a = 0$  entonces (1.11) toma la forma

$$-((x+1)^2 + y^2) + 2(1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2f(x+1) + 2h \geq 0. \quad (1.12)$$

Para facilitar los cálculos encontremos en primer lugar la frontera de la región de Hill, definida por la curva de velocidad cero, i.e., por la igualdad en (1.12) tenemos

$$-((x+1)^2 + y^2) + 2(1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2f(x+1) + 2h = 0. \quad (1.13)$$

Anteriormente hemos visto que  $V$  tiene un mínimo en  $(0,0)$ . Luego la energía mínima se toma en el valor de  $h$  que satisface  $V(0,0,a=0) = h$ , lo cual ocurre en

$$h_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto los valores permisibles de  $h$  son  $h \geq -\frac{1}{2}$ . De igual forma podemos calcular el valor de la energía ( $h$ ) en el punto crítico  $L_2 : (x, y) = (2f - 2, 0)$  con  $0 \leq f < \frac{1}{2}$  y tenemos

$$h = h_f := -\frac{1}{2}(2f - 1)^2.$$

La curva  $h = h_f$ ,  $0 \leq f < \frac{1}{2}$  en el espacio de parámetros  $h$ - $f$  determina los valores para los que las regiones de Hill se “pellizcan” dando origen al punto crítico  $L_2$ . También conviene notar que, de la desigualdad (1.12) se sigue que la singularidad  $x = -1$ ,  $y = 0$  es accesible solo si  $h \geq 0$  (ver Fig. 1.6). La naturaleza de (1.13) nos sugiere un cambio a coordenadas polares. Tomamos

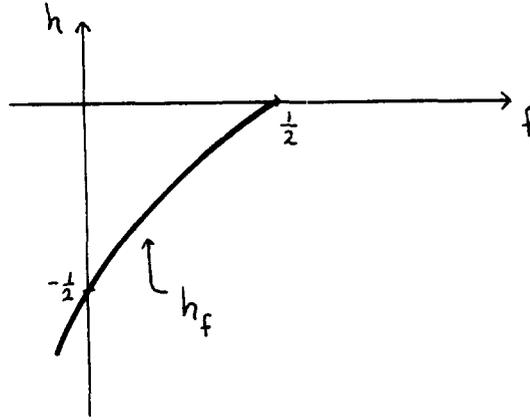


Figura 1.6: Variación de la energía  $h$  con respecto a  $f$  en el punto  $L_2$ .

$$\begin{aligned}x + 1 &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \operatorname{sen} \theta,\end{aligned}$$

con lo cual (1.13) se transforma en

$$-\rho^2 + 2(1-f)\rho + 2f\rho \cos \theta + 2h = 0, \quad (1.14)$$

donde  $f$  y  $h$  son parámetros en  $[0, 1]$  y  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$  respectivamente. Las curvas de velocidad cero se obtuvieron resolviendo numéricamente la ecuación (1.14) para un número apropiado de valores de  $h$  y  $f$ , tomando en cuenta las consideraciones hechas en los párrafos anteriores. Las gráficas se muestran en la Fig. 1.7. La curva con trazado grueso representa  $h_f$ .

#### 1.4.2 Solución exacta para $a = 0$ con $h = 0$

Si en la ecuación (1.14) tomamos  $h = 0$  obtenemos

$$-\rho^2 + 2(1-f)\rho + 2f\rho \cos \theta = 0$$

luego,

$$\rho = 0 \quad \text{ó} \quad \rho = 2(1-f) + 2f \cos \theta.$$

Si  $\rho = 0$  se cumple, entonces la región de Hill es el punto  $(x, y) = (-1, 0)$ ; la ecuación

$$\rho = 2(1-f) + 2f \cos \theta$$

corresponde a curvas clásicas en coordenadas polares cuya nomenclatura se da en la siguiente tabla [Le]. Esto nos permitió verificar los cálculos numéricos hechos anteriormente.

$f = 0$	Circunferencia de radio 2
$0 < f \leq \frac{1}{3}$	Limazón convexo
$\frac{1}{3} < f < \frac{1}{2}$	Limazón con hendidura
$f = \frac{1}{2}$	Cardioide
$\frac{1}{2} < f < 1$	Limazón con lazo
$f = 1$	Circunferencia tangente al polo

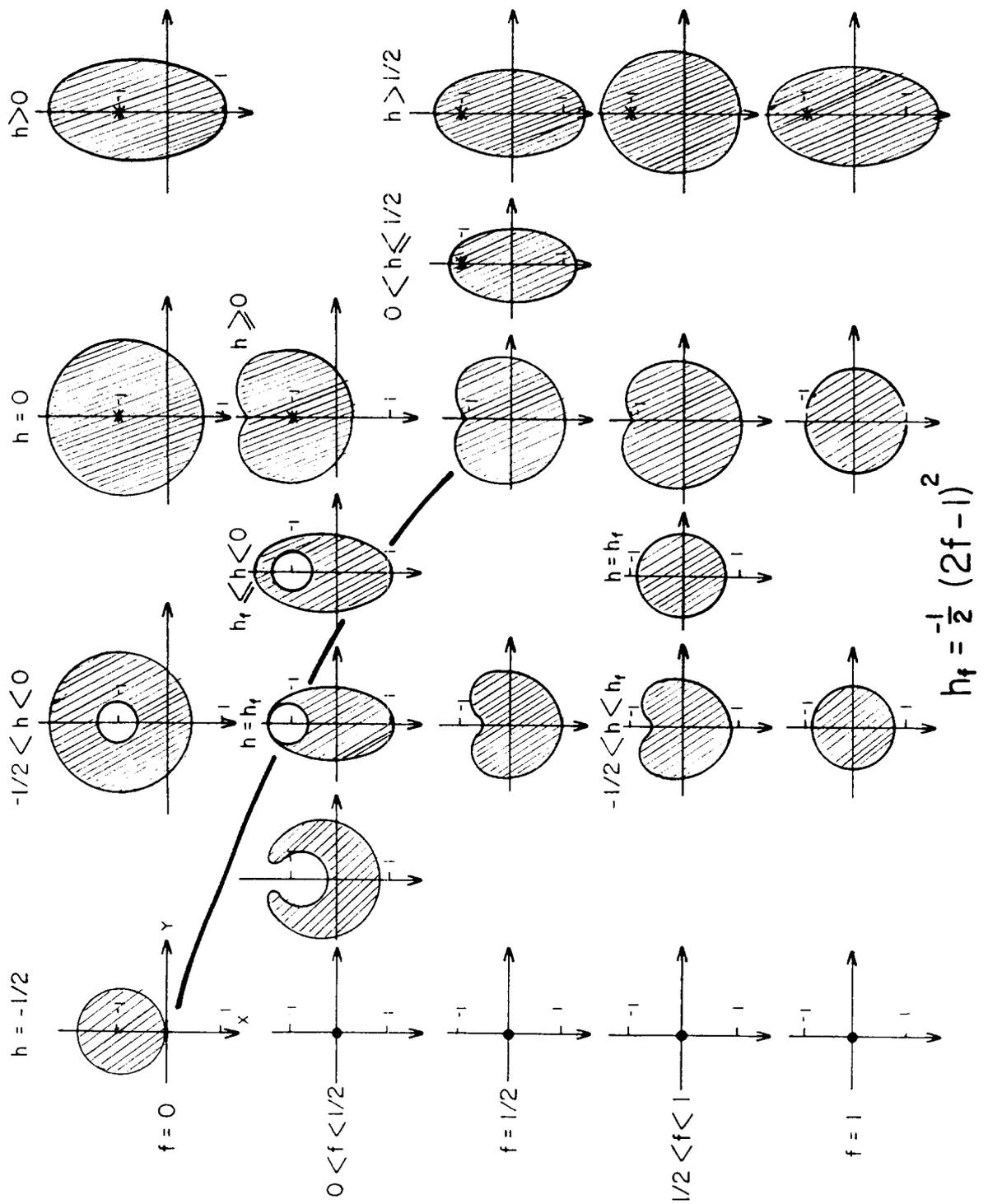


Figura 1.7: Regiones de Hill para distintos valores de  $f$  y  $h$ .

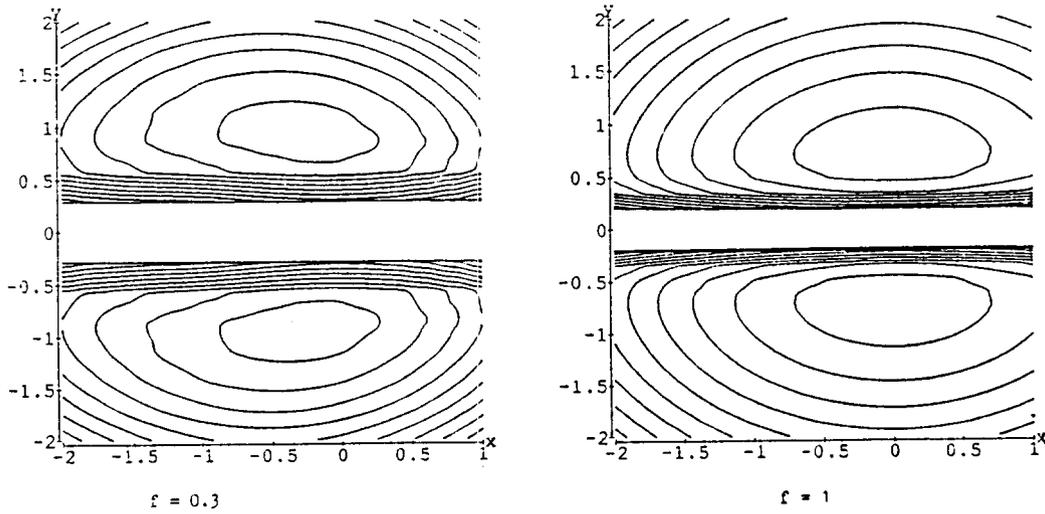


Figura 1.8: Regiones de Hill para  $a = 0.5$

### 1.4.3 Regiones de Hill para $a \neq 0$ .

Para  $a \neq 0$  la región de Hill está definida por la desigualdad (1.11) y su respectiva frontera está determinada por

$$-\frac{a^2}{y^2} - \left( (x+1)^2 + y^2 \right) + 2(1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2f(x+1) + 2h = 0. \quad (1.15)$$

Las curvas de velocidad cero las calculamos como curvas de nivel de las superficies definidas por (1.15). Las gráficas para  $a = 0.5$  con  $f = 0.3, 1$  se muestran en la Fig.1.8 . Éstas se obtuvieron utilizando las rutinas gráficas en *Mathematica*. Las graficas ejemplifican la forma general de las regiones de Hill en este caso, es decir, para todos los valores de  $a \neq 0$  dichas regiones son dos discos desconexos simétricos con respecto al eje  $x$ , los cuales son generados al hacer un corte del toro sólido con eje de simetría  $z$  sobre el plano meridiano  $x$ - $y$

Para finalizar este capítulo mostraremos las superficies del potencial para  $a = 0$  y  $a \neq 0$  (véase Fig. 1.9).

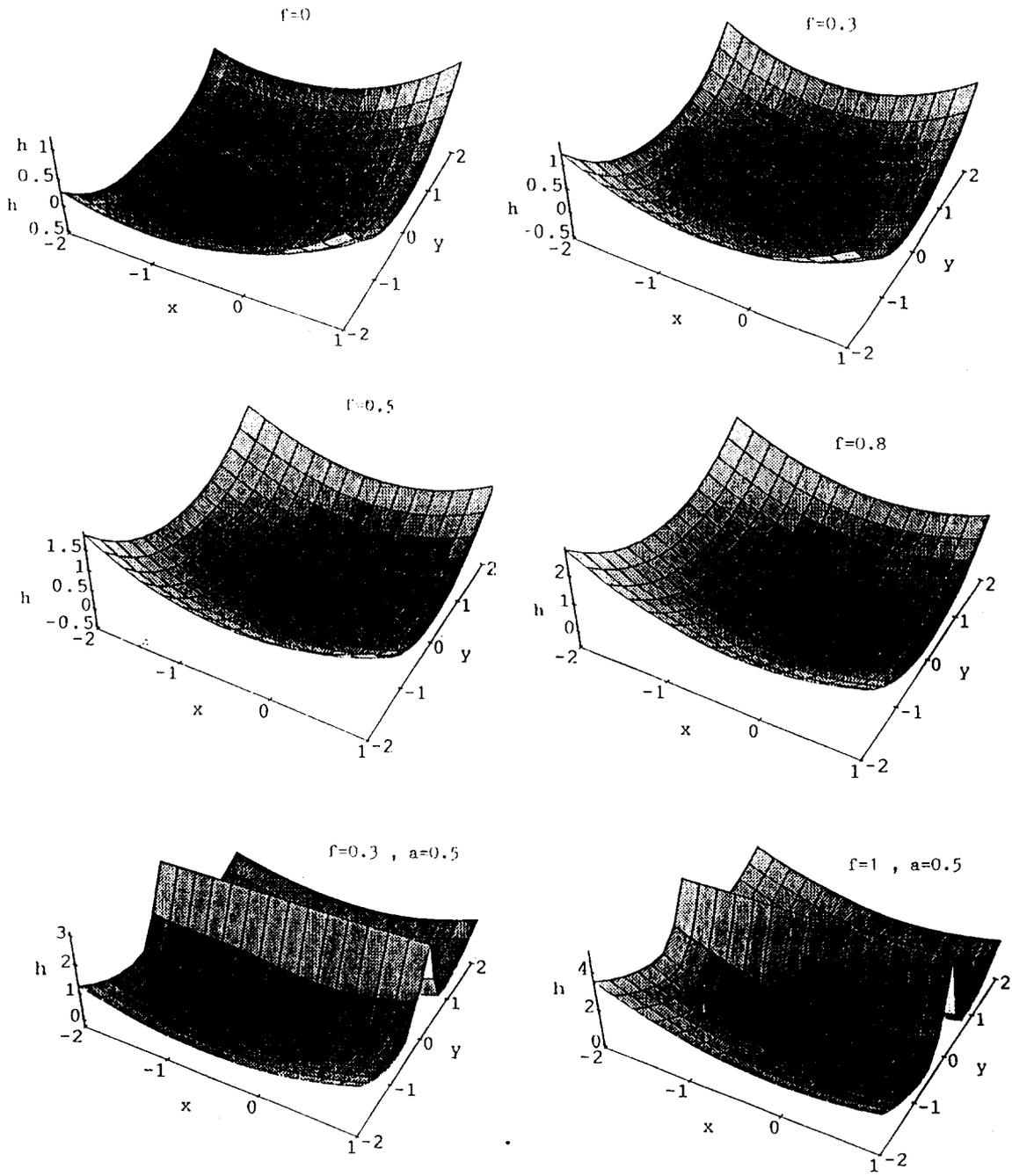


Figura 1.9: Superficies del potencial.

## Capítulo 2

# Integrabilidad.

Existen métodos para calcular soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, los cuales se basan en la aplicación de técnicas de integración. Tales soluciones pueden quedar expresadas en forma explícita como una combinación finita de funciones elementales o funciones algebraicas e integrales de dichas funciones (llamadas cuadraturas). Cuando no es posible resolver por dicho procedimiento se dice que las ecuaciones son de tipo *no integrable*. En esos casos es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una aproximación a la solución. En esta sección demostraremos que las ecuaciones diferenciales del péndulo-resorte en el caso  $a = 0$  son de tipo no integrable para valores de  $f \in (0, 1)$ .

Dado que las ecuaciones (1.8) tienen una singularidad en el punto  $(x, y) = (-1, 0)$  (es decir, no están definidas aquí), estudiaremos el comportamiento de trayectorias vecinas a la singularidad mediante la teoría de *explosión del origen* (véase [Dev]).

### 2.1 Casos Integrables.

El sistema péndulo-resorte tiene dos casos integrables. Si tomamos  $f = 1$ , entonces las ecuaciones de movimiento (1.8) se transforman en

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x, \\ \ddot{y} &= -y,\end{aligned}\tag{2.1}$$

que describen el movimiento de dos *osciladores armónicos* en resonancia 1-1, con hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 + y^2),$$

cuyas curvas solución son conocidas. Un segundo caso integrable ocurre para el valor de  $f = 0$ , en el que las ecuaciones (1.8) toman la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -(x+1) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right), \\ \ddot{y} &= -y \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

éstas describen un problema de *fuerza central*, con Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} ((x+1)^2 + y^2) - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \frac{1}{2}.$$

La simetría rotacional se hace evidente si reescribimos  $H$

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2$$

y tomando coordenadas canónicas inducidas por las coordenadas polares en el plano  $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mapsto (r, \theta, p_r, p_\theta)$  obtenemos

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} (1 - r)^2 \quad (2.3)$$

donde  $r^2 = (x+1)^2 + y^2$ .

Como  $-\frac{\partial H}{\partial \theta} = p_\theta = 0$ , luego  $p_\theta$  es constante,  $p_\theta = c$ , donde  $c \in \mathbf{R}$  y (2.3) se reduce a un Hamiltoniano con un grado de libertad ( como en todo problema de fuerza central ),

$$H(r, p_r) = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{r^2} + (1 - r)^2 \right).$$

Dado que  $H = h$  es una integral primera, las soluciones  $\gamma_h$  que describen el movimiento en  $r$ , quedan definidas por la cuadratura

$$p_r^2 = -\frac{c^2}{r^2} - (1 - r)^2 + 2h$$

donde  $p_r = \frac{dr}{dt}$ . Con una reparametrización del tiempo dada por  $dt = r ds$  se tiene

$$s = \int \frac{dr}{\sqrt{-r^4 + 2r^3 + (2h - 1)r^2 - c^2}} \quad , \quad t = \int r(s) ds$$

y las soluciones  $\gamma_h$  están definidas por *funciones elípticas de Jacobi* [WW].

## 2.2 Explosión del origen.

Como se mostró en el diagrama de las regiones de Hill, la singularidad en  $x = -1$  es accesible solamente si  $h \geq 0$ . Aunque el potencial no es homogéneo, podemos adaptar las coordenadas de McGehee para estudiar la singularidad. Primero introducimos como arriba coordenadas polares alrededor de ésta

$$x + 1 = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Entonces el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} r^2 - (1 - f)r - fr \cos \theta.$$

Sea  $v = p_r$ ,  $u = r^{-1}p_\theta$ , e introduzcamos una nueva escala del tiempo dada por  $dt/dr = r$ . Las ecuaciones de movimiento en coordenadas de McGehee son

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= u^2 - r^2 + r((1-f) + f \cos \theta), \\ \theta' &= u, \\ u' &= -uv - fr \sin \theta, \end{aligned} \tag{2.4}$$

y el nivel de energía  $H = h$  se transforma en el conjunto invariante

$$E_h = \{(r, v, \theta, u) \mid v^2 + u^2 + r^2 - 2(1-f)r - 2fr \cos \theta = 2h, r \geq 0, \theta \in S^1, u, v \in \mathbf{R}\}.$$

La variedad de colisión

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, u) \mid v^2 + u^2 = 2h, \quad r = 0, \quad \theta \in S^1\}$$

se define cuando hacemos aquí  $r = 0$ . Observemos que las coordenadas  $u, v$  están sobre un círculo de radio  $\sqrt{2h}$ , y por lo tanto  $\Lambda$  es un toro en el espacio  $v-u-\theta$  si  $h > 0$ , o un círculo si  $h = 0$ , y está pegado a  $E_h$  como una frontera invariante, porque  $r = 0 \Rightarrow r' = 0$ .

### 2.3 Transversalidad de las órbitas expulsión–colisión.

Ahora estudiaremos el caso de la energía  $h$  positiva a fin de garantizar la existencia de la variedad de colisión. El flujo en  $\Lambda$  está dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v' &= u^2, \\ \theta' &= u, \\ u' &= -uv. \end{aligned}$$

Los puntos críticos son  $r = 0, u = 0, v = \pm\sqrt{2h}$ , y el flujo es *casi-gradiente* con respecto a  $v$ , es decir  $v$  es una función creciente a lo largo de las soluciones, excepto en los puntos de equilibrio. El flujo se muestra en la Figura 2.1. Existen dos círculos de puntos de equilibrio  $C^\pm$  dados por  $r = 0, u = 0, v = \pm\sqrt{2h}$ . Nótese que el flujo *no es* el mismo que en el problema de Kepler [Dev]. De hecho, la rama inestable de un punto de equilibrio en  $\theta = \theta_0$  es también la rama estable del punto de equilibrio en  $\theta = \theta_0 + \pi$ . En su lugar para el problema de Kepler la rama inestable coincide con una estable del punto de equilibrio en el mismo  $\theta_0$ .

Calculando la linealización en  $C^\pm$  tomando  $(v, \theta, u)$  como variables independientes tenemos

$$\begin{pmatrix} \delta v' \\ \delta \theta' \\ \delta u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\pm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{f \sin \theta}{1-f+f \cos \theta} & 0 & -v_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \theta \\ \delta u \end{pmatrix}$$

donde  $v_\pm = \pm\sqrt{2h}$ . Como los valores propios son cero y  $v_\pm$ , el campo vectorial es normalmente hipérbolico en  $C^\pm$ . Luego existen variedades invariantes estable e inestable  $W_f^u(C^+)$  y  $W_f^s(C^-)$ . Denotemos por  $C_f^u(C_f^s)$  la primera intersección de  $W_f^u(W_f^s)$  con el anillo  $\{v = 0\}$  cuando el

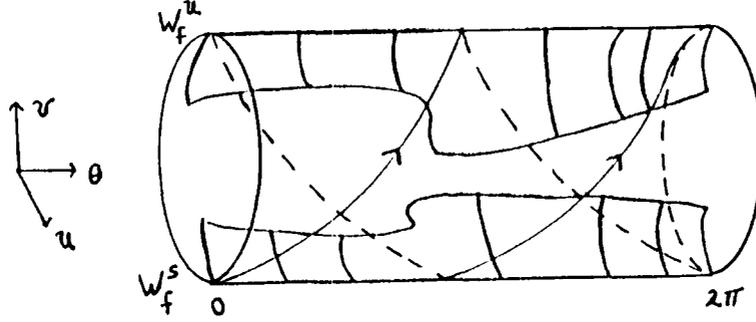


Figura 2.1: Flujo en la variedad de colisión  $\Lambda$ .

tiempo crece (decrece). Para  $f = 0$ ,  $W_0^u = W_0^s$  intersecta al anillo transversalmente en el círculo  $\{v = 0, u = 0\}$ ; luego, para  $f$  pequeña,  $C_f^u$  es difeomorfo a un círculo que puede parametrizarse como

$$C_f^u: \quad v = 0, \quad u = \nu(\bar{\theta}, f), \quad \theta = n(\bar{\theta}, f), \quad \bar{\theta} \in S^1$$

con  $\nu, n$  funciones suaves, periódicas en  $\bar{\theta}$  y tales que para  $f = 0$  se reducen a

$$v = 0, \quad u = 0, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} \in S^1.$$

De la simetría  $(r, v, \theta, u, \tau) \mapsto (r, v, -\theta, -u, \tau)$  de las ecuaciones (2.4), se sigue que siempre que  $(u, \bar{\theta}) \in \text{graf}(\nu)$  entonces  $(-u, -\bar{\theta}) \in \text{graf}(\nu)$ . Esto significa que  $\nu$  es una función impar de  $\bar{\theta}$ . De la reversibilidad,  $(r, v, \theta, u, \tau) \mapsto (r, -v, \theta, -u, -\tau)$  vemos que  $C_f^s$  puede parametrizarse como

$$C_f^s: \quad v = 0, \quad u = -\nu(\bar{\theta}, f), \quad \theta = n(\bar{\theta}, f), \quad \bar{\theta} \in S^1.$$

**Definición 2.1** Llamaremos *órbita de expulsión-colisión* a las órbitas que nacen y mueren sobre la variedad de colisión, i.e. su  $\alpha$  y  $\omega$ -límites están sobre  $\Lambda$ .

**Lema 2.2** Existe un número par de órbitas de expulsión-colisión las cuales cruzan la sección  $v = 0$  sólo una vez, para  $f$  suficientemente pequeña.

*Demostración:* De arriba sabemos que  $C_f^u$  es la gráfica de una función impar, entonces esta debe de intersectar al origen  $u = \theta = 0$ . Dado que  $C_f^s$  es la reflexión de  $C_f^u$  a través del eje  $\theta$ ,  $C_f^u$  intersecta a  $C_f^s$  en el origen. Por la periodicidad de  $\theta$ , la misma intersección ocurre en  $\theta = 2\pi$ , entonces debe existir un número par de intersecciones con el eje  $\theta$ . Esta intersección define las órbitas expulsión-colisión requeridas.  $\square$

De hecho, existen dos movimientos colineales del péndulo-resorte en las direcciones verticales hacia arriba y hacia abajo, las cuales existen para cualesquiera valores de  $h > 0$  y  $f$ . Estas vienen dadas por  $u = 0, \theta = 0, \pi$  y satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= -r^2 + r(1 - 2\epsilon f), \end{aligned}$$

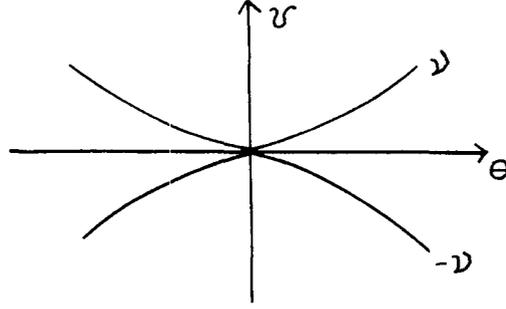


Figure 2.2: Ilustración del lema

donde  $\epsilon = 0$ , ó 1 para  $\theta = 0, \pi$  respectivamente. La solución en cada caso es más fácil de expresar en terminos del tiempo original  $t$ :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2h+1} \cos t + 1, \quad \text{para } \theta = 0, \\ r &= \sqrt{(2f-1)^2 + 2h} \cos t + 2f - 1, \quad \text{para } \theta = \pi. \end{aligned}$$

Nótese que la órbita colineal para  $\theta = 0$  es una órbita periódica si  $h < 0$  o una órbita de expulsión-colisión si  $h \geq 0$ , y en este último caso los tiempos reales de colisión ( recordemos la reparametrización  $\frac{dt}{d\tau} = r$  ) son dados por las raíces de la ecuación  $r(t) = 0$ ; vamos a denotar por  $t^\pm = \cos^{-1}(1/\sqrt{2h+1})$  las raíces de la ecuación en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Similarmente, la órbita colineal con  $\theta = \pi$  es periódica si  $h_f < h < 0$  o de expulsión-colisión para  $h \geq 0$ . Los tiempos de colisión en este caso son  $t^\pm = \cos^{-1}\left(\frac{1-2f}{\sqrt{(2f-1)^2+2h}}\right)$ .

**Proposición 2.3** *La intersección  $C_f^u \cap C_f^s$  en  $\theta = 0$  es transversal para  $f$  suficientemente pequeño.*

*Demostración:* Consideremos la variable de momento angular (la cual es constante de movimiento sólo para  $f = 0$ )

$$M = ru,$$

y sea  $\gamma = (r, v, \theta, u)$  una solución con condiciones iniciales

$$v = 0, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad u = \nu(\bar{\theta}, f),$$

en  $\tau = 0$ . De la relación de energía, podemos expresar los valores iniciales de  $r$  y  $M$  como

$$r = \rho(\bar{\theta}, f), \quad M = \mu(\bar{\theta}, f),$$

luego  $\gamma$  es una órbita de expulsión, y las variaciones de  $M$  a lo largo de  $C_f^u$  y  $C_f^s$  respectivamente están dadas por (ver [C-L])

$$\begin{aligned} \text{en } C_f^u: \quad M &= \mu(\bar{\theta}, f), \\ \text{en } C_f^s: \quad M &= -\mu(\bar{\theta}, f). \end{aligned}$$

Luego debemos mostrar que

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta}(\bar{\theta} = 0, f) \neq 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial M}{\partial \theta}(\bar{\theta}, f, \tau) \Big|_{\bar{\theta}=0, \tau=0} \neq 0,$$

para  $f$  pequeña. Consideremos cualquier solución  $\gamma$  en  $W_f^u$ , entonces se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial \theta}(\bar{\theta}, f, 0) = \frac{\partial M}{\partial \theta}(\bar{\theta}, f, -\infty) + \int_{-\infty}^0 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial M}{\partial \theta}(\bar{\theta}, f, \tau) \right) d\tau,$$

pero

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\partial M}{\partial \theta}(\bar{\theta}, f, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} u + r \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).$$

Ahora vamos a considerar las variaciones a lo largo de la variedad inestable, siguiendo las mismas ideas de Sanders ( ver [San] ) se tiene que los limites

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad y \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

existen y son acotados. Ahora por el hecho de que  $r, u \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ , tenemos que

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\partial M}{\partial \theta} = 0.$$

Luego tomando  $\bar{\theta} = 0$ , basta demostrar que

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial M'}{\partial \theta}(\bar{\theta} = 0, f, \tau) d\tau \neq 0 \tag{2.5}$$

a lo largo de la órbita de expulsión-colisión  $\gamma$ , donde  $' = d/d\tau$ . Ahora, de la ecuación diferencial obtenemos,  $M' = -fr^2 \text{sen } \theta$ . A fin de facilitar los cálculos en (2.5) regresamos al tiempo original  $t$ ,  $dt/t\tau = r$ , entonces  $t \rightarrow \tau$  mapea  $(t^-, 0]$  monotonamente sobre  $(-\infty, 0]$ . Debido al hecho de que el flujo (2.4) es analítico, la integral (2.5) se transforma en

$$\begin{aligned} -f \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \text{sen } \theta) (\bar{\theta} = 0, f, \tau) d\tau &= -f \int_{t^-}^0 \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \text{sen } \theta) (\bar{\theta} = 0, f, t) \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &= -f \int_{t^-}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \text{sen } \theta) (\bar{\theta} = 0, f, t) dt \end{aligned}$$

donde  $t^- = \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2h+1}} \right)$ .

Se puede obtener una simplificación para  $\bar{\theta} = 0$ , ya que la solución es entonces de expulsión-colisión y cumple  $\theta \equiv \bar{\theta} = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \text{sen } \theta) &= \left( 2 \frac{\partial r}{\partial \theta} \text{sen } \theta + r \frac{\text{sen } \theta}{\partial \theta} \right) \Big|_{\bar{\theta}=0, f, t} \\ &= r \frac{\partial \text{sen } \theta}{\partial \theta} \Big|_{\bar{\theta}=0, f, t} \\ &= r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \Big|_{\bar{\theta}=0, f, t} \\ &= r(\bar{\theta} = 0, f, t) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} (\bar{\theta} = 0, f, t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Expandamos la solución en  $W_f^u$  en serie de potencias en  $f$

$$\begin{aligned} r &= r_0 + fr_1 + \dots \\ \theta &= \theta_0 + f\theta_1 + \dots \\ v &= v_0 + fv_1 + \dots \\ u &= u_0 + fu_1 + \dots \end{aligned}$$

donde los coeficientes son funciones de  $\bar{\theta}$  y  $t$ , en particular a orden cero en  $f$ ,  $\theta_0 = \bar{\theta}$  de acuerdo a (2.3), entonces  $\partial\theta/\partial\bar{\theta} = 1 + \mathcal{O}(f)$ . Sustituyendo en (2.6) la desigualdad (2.5) por demostrar se reduce a

$$\begin{aligned} 0 &\neq -f \int_{t^-}^0 r(\bar{\theta} = 0, f, t) + \mathcal{O}(f) \\ &= -f \int_{t^-}^0 \sqrt{2h+1} \cos t + 1 \\ &= -f(\sqrt{2h+1} \text{sen}(\cos^{-1}(1/\sqrt{2h+1})) + \cos^{-1}(1/\sqrt{2h+1})) \end{aligned}$$

lo cual es verdadero.

Para  $\bar{\theta} = \pi$  podemos usar un argumento similar, pero debemos considerar que la órbita expulsión–colisión así como el limite inferior de integración  $t^-$  dependen de  $f$ . Sin embargo en la expansión para  $f$  pequeña las cantidades que se obtienen son las mismas que antes ya que

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(2f-1)^2 + 2h} \cos t + 1 - 2f = \sqrt{2h+1} \cos t + 1 + \mathcal{O}(f) \\ t^- &= \cos^{-1}\left(\frac{1-2f}{\sqrt{(2f-1)^2 + 2h}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2h+1}\right) + \mathcal{O}(f) \end{aligned}$$

luego los mismos cálculos muestran la transversalidad de la órbita expulsión–colisión para  $\bar{\theta} = \pi$ .  $\square$

La transversalidad de las variedades invariantes  $W_f^u$  y  $W_f^s$  excluye la posibilidad de encontrar cierta clase de integrales primeras independientes de la energía. La definición rigurosa de esta clase de integrales para nuestro problema es la siguiente.

**Definición 2.4** Una función suave  $F(r, \theta, v, u)$  definida para  $r \in (-b, \infty)$ , con  $b$  una constante positiva,  $\theta, v, u \in \mathbf{R}$ , y  $2\pi$ -periódica en la variable  $\theta$ , es llamada una integral primera extendible para el sistema péndulo–resorte (2.4) si

- i)  $F$  es constante a lo largo de las soluciones de (2.4)
- ii)  $F$  es constante sobre  $\Lambda$ .

Si además

- iii) El conjunto de niveles  $F = c$  son variedades transversales a  $E_h \setminus \Lambda$ , entonces se dice que  $F$  es una integral primera extendible independiente de la energía.

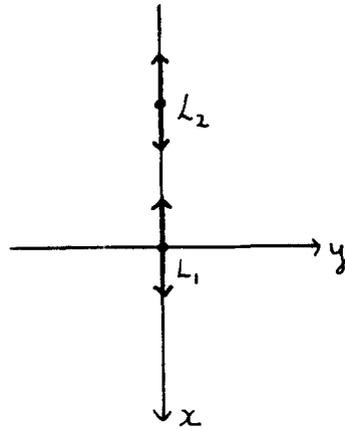


Figura 2.3: Oscilaciones verticales.

**Corolario 2.5** *El sistema péndulo-resorte no tiene integrales primeras extendibles independientes de la energía.*

*Demostración :* Si existiera una integral primera adicional a  $F$  entonces los conjuntos  $F^{-1}(c) \cap (E_h \setminus \Lambda)$  serían variedades de dimensión 2. Por otro lado  $F = \text{constante}$  sobre la variedad de colisión y por continuidad, las subvariedades  $W_f^u \cap W_f^s$  deben estar contenidas en el mismo conjunto de nivel  $F = \text{constante}$ . Pero como la intersección es transversal en  $E_h \setminus \Lambda$ , por lo tanto debemos tener que la dimensión de  $F = \text{constante}$  en  $E_h \setminus \Lambda$  debe ser 3, lo cual es una contradicción.

□

## 2.4 Órbitas Periódicas Verticales para $a = 0$ .

El sistema péndulo-resorte tiene dos familias de oscilaciones verticales en una vecindad de los puntos de equilibrio  $L_1$  y  $L_2$ ; cuya proyección en el espacio de configuración se muestra en la Fig. 2.3. Junto con esas órbitas verticales, existen un gran número de familias de órbitas periódicas [B-B]. Para estas órbitas, se cumple que la coordenada  $y = 0$  y por lo tanto  $\ddot{y} = 0$ , de acuerdo a las ecuaciones de movimiento (1.8). Entonces la ecuación que describe los movimientos verticales es

$$\ddot{x} = -(x + 1) + \text{sgn}(x + 1)(1 - f) + f \quad (2.7)$$

de tal forma que podemos distinguir dos casos

- (i)  $x + 1 \geq 0$ ,
- (ii)  $x + 1 < 0$ .

Caso (i)  $x + 1 \geq 0$ . Aquí la ecuación (2.7) toma la forma

$$\ddot{x} = -x$$

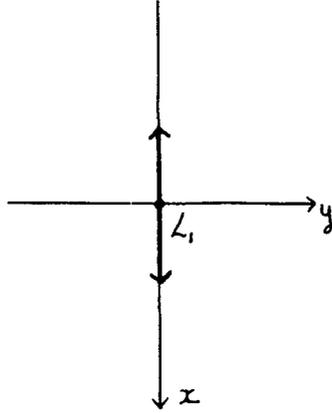


Figura 2.4: Órbita vertical con  $x \geq -1$ .

la cual es la ecuación de un *oscilador armónico*, cuya solución es una función periódica de período  $2\pi$ ,

$$x = -A \cos(t + \varphi) \quad \text{donde } A \in \mathbf{R}.$$

Podemos fijar las condiciones iniciales de modo que  $A = -\sqrt{1+2h}$ , y escribir

$$x = \sqrt{1+2h} \cos t \quad \text{para } h \geq -\frac{1}{2},$$

de tal forma que la solución coincide con la obtenida en la sección 2.3 para valores de  $u = 0$ ,  $\theta = 0$  y  $\epsilon = 0$ .

Para determinar la estabilidad de estas órbitas, calculamos las ecuaciones variacionales

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \\ \dot{\delta v_x} \\ \dot{\delta v_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -V_{xx} & -V_{xy} & 0 & 0 \\ -V_{xy} & -V_{yy} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix}$$

a lo largo de la solución  $(x, y, 0, 0) = (\sqrt{1+2h} \cos t, 0, 0, 0)$ ,

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \\ \dot{\delta v_x} \\ \dot{\delta v_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \frac{1-f}{1+\sqrt{1+2h} \cos t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{\delta x} &= -\delta x, \\ \ddot{\delta y} &= -\left( \frac{\sqrt{1+2h} \cos t + f}{\sqrt{1+2h} \cos t + 1} \right) \delta y. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aquí se pone de manifiesto que en la aproximación lineal se tienen ecuaciones desacopladas, la primera es un *oscilador armónico* y la segunda es una ecuación de Hill. Esta última es la

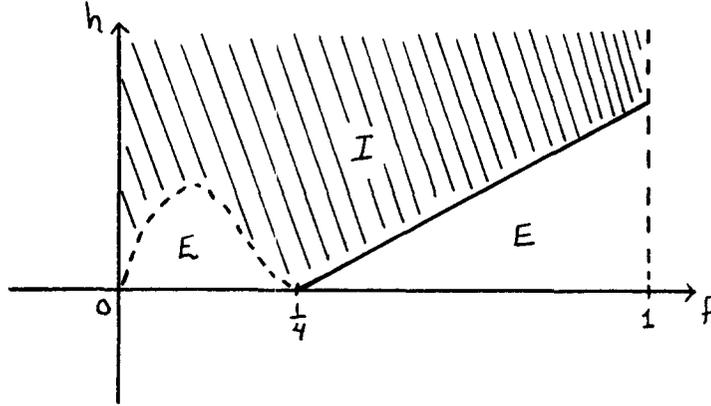


Figura 2.5: Regiones de estabilidad de la ecuación de Hill.

ecuación de variación *normal* y es la que determina los exponentes característicos. Estudiaremos con más detalle tal ecuación, tomando  $h \gtrsim -\frac{1}{2}$ , de modo que podemos desarrollar el coeficiente de la ecuación variacional de  $y$  en serie de potencias a orden uno, y obtenemos

$$\delta\ddot{y} \approx \left[ -f + (f-1)\sqrt{1+2h\cos t} \right] \delta y.$$

De tal forma que podemos aproximar dicha ecuación por

$$\delta\ddot{y} + \left[ f + (1-f)\sqrt{1+2h\cos t} \right] \delta y = 0, \quad (2.9)$$

la cual es una *ecuación de Mathieu*. Esta ecuación ha sido deducida en [Nu] considerando que el modo dominante de movimiento es dado inicialmente por las oscilaciones del resorte (*i.e.*  $y \ll x$ ), y en [Min] se deduce una ecuación equivalente suponiendo condiciones iniciales tales que el ángulo  $\varphi$  formado por el resorte y la vertical es muy pequeño (*i.e.*  $\varphi \ll 1$ ). Para consultar las propiedades de la ecuación de Mathieu véase [B-O]. Dado que  $f \geq 0$ , el origen es *estable*, excepto para  $f = 0, \frac{1}{4}$  donde ocurre *resonancia paramétrica*. Por lo tanto bajo estas condiciones las órbitas verticales vecinas al punto de equilibrio  $L_1$  son *estables* para casi todo valor de  $f$ , teniéndose *inestabilidad* en  $f = \frac{1}{4}$ . Para  $f = 1$  el problema integrable representa dos osciladores armónicos desacoplados con la misma frecuencia y por lo tanto son *globalmente estables*  $(-\infty, 0]$ .

El cálculo de los multiplicadores característicos correspondientes a la ecuación (2.8), al variar  $f$  y  $h$  nos da las regiones de estabilidad. Hemos calculado estos numéricamente y su gráfica se muestra en la Fig. 2.5. Nótese que para  $f = 0$  se tiene *inestabilidad*. Ahora, consideremos el caso (ii)  $x + 1 < 0$ . Tales órbitas son vecinas al punto  $L_2$  (Fig. 2.6). Dado que tal punto existe sólo para  $0 \leq f < \frac{1}{2}$ , nos restringiremos a estos valores de  $f$ . Para este caso la ecuación (2.7) toma la forma

$$\ddot{x} = -x + 2(f-1)$$

la cual tiene como solución a la función periódica

$$x = -A \cos(t + \psi) + 2(f-1) \quad \text{donde } \psi \in \mathbf{R}.$$

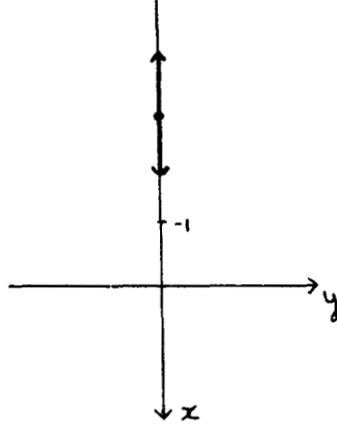


Figura 2.6: Órbitas verticales con  $x < -1$ .

Fijando las condiciones iniciales apropiadamente se tiene

$$x = \sqrt{(1-2f)^2 + 2h \cos t} + 2(f-1).$$

Nótese que esta solución coincide con la obtenida en la sección 2.3 para valores de  $u = 0$ ,  $\theta = \pi$  y  $\epsilon = 1$ .

Al evaluar las ecuaciones variacionales a lo largo de la solución

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \left( \sqrt{(1-2f)^2 + 2h \cos t} + 2(f-1), 0, 0, 0 \right),$$

y se llega a

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{v}_x \\ \delta \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \frac{1-f}{\sqrt{(1-2f)^2 + 2h \cos t + 2f - 1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x} &= -\delta x \\ \delta \ddot{y} &= - \left( \frac{\sqrt{(1-2f)^2 + 2h \cos t} + f}{\sqrt{(1-2f)^2 + 2h \cos t + 2f - 1}} \right) \delta y. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Al igual que en el caso anterior la ecuación variacional normal en  $y$  es una ecuación de Hill, y es la que determina la estabilidad lineal del movimiento. Para estudiar esta ecuación de Hill, observemos que  $\sqrt{(1-2f)^2 + 2h} = \sqrt{2(h-h_f)}$ , luego si consideramos  $h \gtrsim h_f$  se tiene que  $\sqrt{(1-2f)^2 + 2h} \ll 1$ . Tomando en cuenta la observación, desarrollemos el coeficiente  $\delta y$  en series de potencias alrededor de  $h_f$  a orden uno, obteniéndose la aproximación

$$\delta \ddot{y} + \left( \frac{f}{2f-1} + \frac{f-1}{(2f-1)^2} \sqrt{(1-2f)^2 + 2h \cos t} \right) \delta y = 0,$$

que resulta ser una *ecuación de Mathieu*.

Hemos supuesto que  $0 \leq f < \frac{1}{2}$ , entonces  $(2f - 1) < 0$  y por lo tanto  $\frac{f}{2f - 1} < 0$ , de modo que de acuerdo a las regiones de estabilidad de la ecuación de Mathieu [B-O], en la región correspondiente las soluciones son *inestables*. De aquí concluimos que las órbitas verticales vecinas al punto de equilibrio  $L_2$  son *inestables*.

## Capítulo 3

# Mapeo de Poincaré y Líneas de Simetría.

Tomando al péndulo-resorte como un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad, en este capítulo se aplica la técnica de líneas de simetría al caso  $a = 0$  para calcular órbitas periódicas que satisfacen la simetría  $(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t)$ .

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.1}$$

donde  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  es de clase  $C^r$  en algún conjunto abierto  $U \subset \mathbf{R}^n$ .

Sea  $\phi(t, \cdot)$  el flujo generado por (1.8); supongamos que (1.8) tiene una solución periódica con período  $\omega$  la cual denotamos por  $\phi(t, x_o)$ , donde  $x_o \in \mathbf{R}^n$  es cualquier punto a través del cual pasa esta solución periódica (i.e.  $\phi(t + \omega, x_o) = \phi(t, x_o)$ ).

Sea  $\Sigma$  una superficie  $n - 1$  dimensional transversal al campo vectorial en  $x_o$ , aquí *transversal* significa que  $f(x) \cdot n(x_o) \neq 0$ , donde " $\cdot$ " denota el producto escalar y  $n(x_o)$  es la *normal* a  $\Sigma$  en  $x_o$ .

Nos referiremos a  $\Sigma$  como la *sección de cruce* o *transversal* del campo vectorial (1.8). Si  $f(x)$  es  $C^r$  entonces  $\phi(t, x)$  es  $C^r$  (Teorema 1.1.2 [W]); luego podemos encontrar un conjunto abierto  $V \subset \Sigma$  tal que las trayectorias que salen de  $V$  retornan a  $\Sigma$  en un tiempo  $t_o$  cercano a  $\omega$ . El mapeo que asocia a los puntos de  $V$  con el primer retorno a  $\Sigma$  es llamado *Mapeo de Poincaré* y lo denotaremos por  $T$ . En forma más precisa,

$$\begin{aligned} T : V \subset \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ x &\rightarrow \phi(\tau(x), x), \end{aligned}$$

donde  $\tau(x)$  es el tiempo del primer retorno del punto  $x$  a  $\Sigma$ .

Por construcción tenemos  $\tau(x_o) = \omega$  y  $T(x_o) = x_o$ . Así a un punto fijo de  $T$  le corresponde una órbita periódica de (1.8) y a un punto  $k$  periódico (i.e., un punto  $x \in V$  tal que  $T^k(x) = x$  con la condición de que  $T^i(x) \in V, i = 1, \dots, k$ ) le corresponde una órbita periódica de (1.8) la cual atraviesa a  $\Sigma$   $k$  veces antes de cerrarse (ver Fig. 3.1).

Si  $\Sigma$  se elige apropiadamente, la órbita bajo observación la atraviesa repetidamente (ver Fig. 3.2).

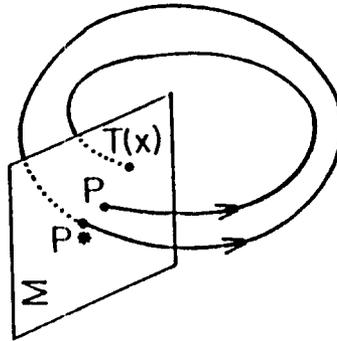


Figura 3.1: Mapeo de Poincaré .

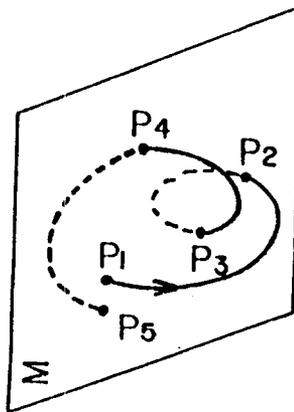


Figura 3.2: Una órbita intersectando la sección de cruce  $\Sigma$ .

### 3.1 La Teoría de Involuciones de Birkhoff.

La teoría general introducida por Birkhoff, y después desarrollada por De Vogeleare [Bir], [DeV], [JLP]; parte de la hipótesis de que un mapeo invertible se pueda factorizar como la composición de dos involuciones:

$$T = I_1 \circ I_0,$$

donde  $I_1^2 = I_0^2 = 1$ . Si existe tal factorización podemos definir un conjunto discreto de transformaciones para cualquier  $j \in \mathbf{Z}$ ,

$$I_j = T^j \circ I_0 \quad \text{donde } T^j = \overbrace{T \circ \dots \circ T}^{j \text{ veces}},$$

Para cualesquiera  $i, j \in \mathbf{Z}$  el conjunto  $\{I_j, T^i\}$  bajo la siguiente ley de composición forma un grupo infinito discreto [JLP]

$$\begin{aligned} T^i \circ I_j &= I_{i+j}, \\ I_j \circ I_i &= T^{j-i}, \\ I_j \circ T^i &= I_{j-i}. \end{aligned}$$

**Definición 3.1** Una Línea de Simetría  $\Gamma_n$ , para cualquier  $n \in \mathbf{Z}$  esta formada por el conjunto de puntos fijos de  $I_n$ , i.e.

$$\Gamma_n = \{p \mid I_n(p) = p\}.$$

En [DeV] y [JLP] se demuestran las siguientes propiedades sobre líneas de simetría para cualesquiera  $n, m \in \mathbf{Z}$ :

$$\begin{aligned} T^n \Gamma_m &= \Gamma_{2n+m}, \\ I_n \Gamma_m &= \Gamma_{2n-m}, \end{aligned}$$

y en particular

$$\begin{aligned} T^n \Gamma_0 &= \Gamma_{2n}, \\ T^n \Gamma_1 &= \Gamma_{2n+1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

También podemos calcular líneas negativas apartir de la propiedad

$$\Gamma_{-n} = I_0 \Gamma_n.$$

Si  $x \in \Gamma_n \cap \Gamma_m \implies T^{|n-m|}x = x$ . Entonces, de las iteradas de  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  podemos calcular todas las líneas de simetría y de las intersecciones de éstas obtener puntos periódicos con período mínimo  $|n - m|$ .

## 3.2 Órbitas Periódicas Simétricas.

Para conocer las órbitas del péndulo-resorte en el plano  $x$ - $y$  necesitamos encontrar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales de la forma

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

donde

$$V(x, y) = \frac{a^2}{2y^2} + \frac{1}{2} \left( (x+1)^2 + y^2 \right) - (1-f) \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - f(x+1)$$

con la propiedad de que

(i)  $V(x, y)$  es analítica excepto en  $(x, y) = (-1, 0)$  (ii)  $V(x, y) = V(x, -y)$ .

La hipótesis (ii) nos dice que hay simetría con respecto a  $y = 0$  (eje  $x$ ); y por otro lado se tiene que el Lagrangiano es cuadrático en las velocidades. De estas dos observaciones podemos concluir que el problema péndulo-resorte tiene las siguientes simetrías :

$$\begin{aligned} (a) \quad (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) &\rightarrow (x, y, -\dot{x}, -\dot{y}, -t) \\ (b) \quad (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) &\rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t) \end{aligned}$$

La simetría (a) es de tipo *físico* debido a que el problema es reversible, mientras que (b) es de tipo *geométrico*.

Nuestro objetivo es calcular *órbitas periódicas* del problema péndulo-resorte que cumplan con ser simétricas con respecto al eje  $x$  ( $y = 0$ ), o en forma equivalente que satisfagan la simetría (b).

Una solución *periódica*  $\phi(t)$  es una solución que satisface  $\phi(t) = \phi(t+\omega)$  para alguna constante positiva  $\omega$ . A la  $\omega$  mínima positiva se le llama el *período* de  $\phi(t)$ . Una *órbita periódica* de una ecuación diferencial ordinaria es la imagen de una solución periódica. En el caso que se cumpla la simetría  $V(x, y) = V(x, -y)$  se tiene la siguiente propiedad:

**Proposición 3.2** Sea  $\gamma(t) = (x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$  una solución del sistema (1.8) tal que  $y(0) = y(\frac{\omega}{2}) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}(\frac{\omega}{2}) = 0$ , entonces  $\gamma(t)$  es una solución periódica de período  $\omega$ .

*Demostración:* Sea

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\omega}{2} \\ (x(\omega-t), -y(\omega-t), -\dot{x}(\omega-t), \dot{y}(\omega-t)) & \text{si } \frac{\omega}{2} < t \leq \omega, \end{cases}$$

$\bar{\gamma}(t)$  es solución (se verifica directamente) y

$$\bar{\gamma}(\omega) = (x(0), -y(0), -\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (x(0), 0, 0, \dot{y}(0)) = \bar{\gamma}(0),$$

entonces  $\bar{\gamma}$  es periódica y como  $\bar{\gamma} = \gamma$  en  $0 \leq t \leq \frac{\omega}{2}$  entonces  $\bar{\gamma} \equiv \gamma$ , luego  $\gamma$  es periódica.  $\square$

**Definición 3.3** Una solución que satisfaga las hipótesis de la proposición anterior se llamará una solución periódica simétrica.

Ahora daremos una caracterización de las soluciones periódicas simétricas. Para tal efecto consideramos la transformación  $S$  del espacio fase en si mismo, dada por

$$S(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}).$$

**Proposición 3.4** Una órbita periódica,  $\gamma$  es simétrica si y sólo si  $S(\gamma)=\gamma$ .

*Demostración:* Si  $\gamma(t)$  es una solución periódica simétrica de período  $\omega$  entonces  $S(\gamma(t)) = \gamma(\omega - t)$ , i.e.,  $S(\gamma) = \gamma$ .

Supongamos que  $\gamma$  es una órbita periódica tal que  $S(\gamma) = \gamma$ . Para cada  $t$  existe  $f(t)$  tal que

$$(x(t), -y(t), -\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (x(f(t)), y(f(t)), \dot{x}(f(t)), \dot{y}(f(t))),$$

donde  $f$  es una función continua  $f: [0, \omega] \pmod{\omega} \rightarrow [0, \omega] \pmod{\omega}$ ,  $\omega$  es el período de la órbita. En particular  $-\dot{x}(t) = \dot{x}(f(t))$ , luego  $-\ddot{x}(t) = \ddot{x}(f(t))\dot{f}(t)$ . Pero

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(f(t)), -y(f(t)))$$

Como  $V(x, -y) = V(x, y)$ , entonces

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x(f(t)), -y(f(t))) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(f(t)), y(f(t))) = \ddot{x}(f(t))$$

Por lo tanto  $\ddot{x}(t) = \ddot{x}(f(t))$  y  $\dot{f}(t) = -1$ , de donde  $f(t) = -t + \text{constante}$ . Esto significa que  $f(t)$  tiene exactamente dos puntos fijos,  $t_0$  y  $t_1$  tal que

$$\begin{aligned} y(t_0) &= -y(t_0), & \dot{x}(t_0) &= -\dot{x}(t_0) \\ y(t_1) &= -y(t_1), & \dot{x}(t_1) &= -\dot{x}(t_1) \end{aligned}$$

por lo tanto  $y(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$  y  $y(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$ , como  $t_1 - t_0 = \frac{\omega}{2} \pmod{\omega}$  se sigue que  $\gamma$  es una solución periódica simétrica. (ver Fig.3.3). □

*Observación.* La condición  $S(\gamma)=\gamma$  significa que la órbita, i.e., el lugar geométrico definido por la solución  $\gamma$  es invariante bajo  $S$ .

De la proposición anterior concluimos que toda solución periódica simétrica cruza  $y = 0$  (eje  $x$ ), y al menos uno de estos cruces debe ser con  $\dot{x} = 0$ ; entonces los cruces con el eje  $x$ , salvo orientación son del tipo que se muestran en la Fig. 3.4.

Apartir de estas observaciones podemos hacer una caracterización (geométrica) de las órbitas periódicas simétricas. Una solución periódica es simétrica si y sólo si su proyección en el espacio de configuración es una curva suave cerrada que cruza al eje  $x$  en ángulo recto al menos dos veces.

Después de este análisis sabemos que con la simetría (b) únicamente podemos localizar las soluciones que cruzan  $y = 0$ . Cuando estudiamos las regiones de Hill se vió que para  $a \neq 0$  obtenemos regiones de Hill disconexas, las cuales no intersectan al eje  $x$ . Luego, las órbitas correspondientes no cruzan  $y = 0$  y por lo tanto no las podemos localizar bajo esta simetría. Sin embargo, para  $a = 0$  las regiones son conexas y simétricas con respecto al eje  $x$ . De las observaciones hechas, podemos decir, que bajo la simetría (b) únicamente podemos localizar y estudiar órbitas periódicas y simétricas en el sistema péndulo-resorte para  $a = 0$ .

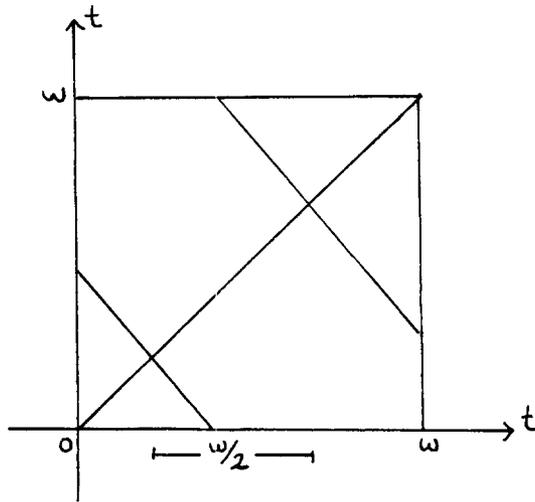


Figura 3.3: Ilustración de la proposición.

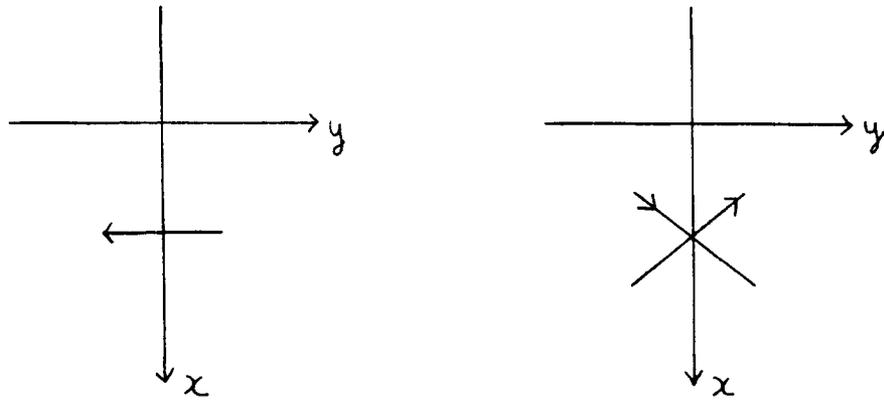


Figura 3.4: Tipos de cruces de las órbitas con el eje  $x$ .

### 3.3 Líneas de Simetría en el Péndulo-Resorte.

Con anterioridad mencionamos que únicamente estudiaremos el caso  $a = 0$ , y por lo tanto el Hamiltoniano es

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} ((x+1)^2 + y^2) - (1-f)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - f(x+1)$$

Como tenemos un sistema hamiltoniano conservativo, podemos fijar un nivel de energía, digamos  $h$ , y tomamos la variedad  $\Pi$  del espacio fase definida por:

$$\Pi = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid y = 0, H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h\}$$

de modo que  $\dim \Pi = 2$ . Del teorema de la función implícita se tiene que  $\Pi$  puede ser parametrizada localmente por  $x, \dot{x}$  si  $\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \neq 0$ , lo cual en nuestro caso es equivalente a  $\dot{y} \neq 0$ . Entonces, tomamos

$$\Sigma = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid y = 0, H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h, \dot{y} \neq 0\}.$$

Podemos escribir  $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$  donde

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid y = 0, H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h, \dot{y} > 0\} \\ \Sigma^- &= \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid y = 0, H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h, \dot{y} < 0\}. \end{aligned}$$

Entonces la órbita a seguir atravesará repetidamente  $\Sigma$ , cruzando en nuestro caso particular de  $\Sigma^+$  a  $\Sigma^-$  y de aquí a  $\Sigma^+$ , etc.

Para verificar que se cumple la condición de transversalidad hagamos las siguientes observaciones:

- (1)  $\Sigma$  queda determinada por el plano  $y = 0$  y por lo tanto  $v = (0, 1, 0, 0)$  es el vector normal a  $\Sigma$
- (2) El campo vectorial originado por las ecuaciones (1.8), queda determinado por  $(\dot{x}, \dot{y}, v_x, v_y)$ , de donde se tiene

$$\langle (0, 1, 0, 0), (\dot{x}, \dot{y}, v_x, v_y) \rangle = \dot{y},$$

de modo que la condición de transversalidad se cumple si  $\dot{y} \neq 0$ , la cual hemos supuesto para definir  $\Sigma$ . Por lo tanto  $\Sigma$  está bien definida como sección de Poincaré

Definamos ahora la transformación de Poincaré ( $T$ ) del plano  $x-\dot{x}$  en él mismo, a partir del sistema de ecuaciones diferenciales (1.8) como el *operador evolución del tiempo*

$$\begin{aligned} T : \Sigma(x, \dot{x}) &\rightarrow \Sigma(x, \dot{x}) \\ (x, \dot{x}) &\rightarrow \text{seguir la trayectoria hasta que} \\ &\text{cruce } y = 0, \text{ tomando condiciones} \\ &\text{iniciales } x, \dot{x} \text{ y } \dot{y} > 0. \end{aligned}$$

Entonces una solución del sistema (1.8) es determinada por los valores de  $x$  y  $\dot{x}$  en el tiempo de cruce por  $y = 0$ , y  $\dot{y}$  se obtiene de la relación de energía con los respectivos valores de  $x$  y  $\dot{x}$ .

Definimos la involución  $I_0$  de  $\Sigma$  como la *reflexión* con respecto a  $\dot{x}$ , i.e.,

$$I_0(x, \dot{x}) = (x, -\dot{x}).$$

La interpretación física de  $I_0$  se ilustra en la Fig. 3.5.

Consideremos una órbita asociada a un punto  $(x_0, \dot{x}_0) \in \Sigma$  si ésta cruza  $y = 0$  entonces a este le corresponde un punto  $(x_1, \dot{x}_1) \in \Sigma$ . Así la reversibilidad del sistema la expresamos matemáticamente en términos de  $T$  de la siguiente manera:

$$T(x_0, \dot{x}_0) = (x_1, \dot{x}_1) \quad \text{si y sólo si} \quad T(x_1, -\dot{x}_1) = (x_0, -\dot{x}_0).$$

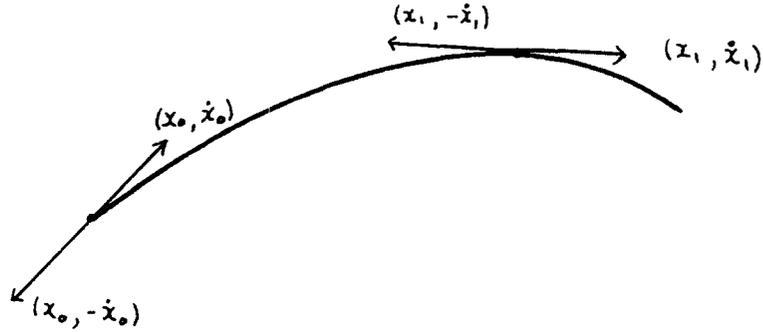


Figura 3.5: Interpretación física de  $I_0$ .

**Proposición 3.5** Sea  $T$  el mapeo de Poincaré asociado a  $\Sigma$ , e  $I_0$  la involución  $(x, \dot{x}) \rightarrow (x, -\dot{x})$ , entonces  $I_1 = T \circ I_0$  es una involución.

*Demostración* Sea  $(x_0, \dot{x}_0)$  un punto en  $\Sigma$ , entonces

$$\begin{aligned} TI_0T(x_0, \dot{x}_0) &= TI_0(x_1, \dot{x}_1), \\ &= T(x_1, -\dot{x}_1), \\ &= I_0(x_0, \dot{x}_0). \end{aligned}$$

Como  $(x_0, \dot{x}_0)$  es un punto arbitrario en  $\Sigma$ , entonces se cumple que

$$TI_0T = I_0,$$

de modo que

$$TI_0TI_0 = I_0^2 = 1;$$

por lo tanto

$$I_1^2 = I_1I_1 = (TI_0)(TI_0) = 1,$$

lo cual demuestra que  $I_1$  es una involución. □

Ya que  $T$  se puede factorizar como el producto de dos involuciones podemos aplicar la teoría de Birkhoff para calcular las órbitas periódicas simétricas del péndulo-resorte con  $a = 0$ .

Como  $I_0(x, \dot{x}) = (x, -\dot{x})$ , entonces  $\Gamma_0$  es el conjunto de puntos invariantes bajo  $I_0$ , es decir, el conjunto de puntos con  $\dot{x} = 0$ . Estos puntos corresponden en el espacio de configuración, a órbitas que cruzan  $y = 0$  perpendicularmente en al menos un punto. Luego en  $\Sigma$  se tiene que  $\Gamma_0$  es el eje  $x$ .

Ahora, consideremos en el espacio fase una órbita con condiciones iniciales  $(x, y = 0, \dot{x}, \dot{y})$  al tiempo  $t = 0$ ; supongamos que al evolucionar el flujo asociado a (1.8) en el tiempo, esta condición inicial va al punto  $(x, y = 0, -\dot{x}, -\dot{y})$  en un tiempo  $t = \tau$ . Por la reversibilidad del sistema al tiempo  $t = \tau/2$  la curva debió tocar la curva de velocidad cero, y regresará

por la misma trayectoria con velocidad opuesta. Podemos observar que  $(x, \dot{x}) \in \Gamma_{-1}$  pues  $I_{-1}(x, \dot{x}) = I_0 T(x, \dot{x}) = I_0(x, -\dot{x}) = (x, \dot{x})$ , de donde se tiene que  $T(x, \dot{x}) \in \Gamma_1$ . Apartir de aquí deducimos un método para calcular  $\Gamma_1$ , que consiste en tomar condiciones iniciales sobre la curva de velocidad cero y seguir la solución hasta su cruce con el plano  $y = 0$ .

### 3.4 Cálculo de las Líneas de Simetría.

En esta sección se describirá el procedimiento numérico utilizado para el cálculo de las líneas de simetría y los resultados obtenidos.

Con el objeto de evitar los problemas numéricos ocasionados por la singularidad, hemos considerado un valor de energía  $h = -0.4$  y  $f = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ . En estos casos hacemos un estudio detallado de las órbitas periódicas y remarcamos algunas propiedades que los períodos de éstas guardan entre sí.

Presentamos también los cálculos correspondientes para energía  $h = -0.2$  con  $f = 0.8, 0.7, 0.6$  aunque en estos casos no hacemos un estudio detallado debido a que la dinámica es similar a los casos anteriores.

Todos los cálculos fueron llevados a cabo en la computadoras *Titan II* de la UAM-Iztapalapa y en una *Workstation SPARC SCL* del Departamento de Matemáticas. El tiempo promedio para calcular 16 líneas de simetría para cada caso fué de aproximadamente 2 horas. Todos los programas fueron codificados en Lenguaje *C* y se utilizó un integrador *Runge-Kutta* de orden 4, con tamaño de paso de  $10^{-3}$ , junto con un algoritmo de bisección para el cálculo del mapeo de Poincaré.

Para el cálculo de las líneas de simetría pares se tomaron entre 700 y 1000 condiciones iniciales sobre  $\Gamma_0$  y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales hasta el cruce con la sección de Poincaré, se obtuvieron  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{16}$ .

Para el cálculo de las líneas de simetría impares, se tomaron condiciones iniciales sobre la curva de velocidad cero, resolviendo las ecuaciones diferenciales hasta el primer cruce con la sección de Poincaré. De esta manera se obtuvo  $\Gamma_1$  y por iteración las consecutivas  $\Gamma_3, \dots, \Gamma_{15}$ .

Las líneas de simetría negativas se obtuvieron por reflexión con respecto al eje horizontal.

Cabe mencionar que la frontera del dominio de la transformación de Poincaré corresponde a una órbita que es siempre tangente a la superficie de sección. Esta órbita es precisamente la órbita vertical trivial, que llamaremos del tipo *A*.

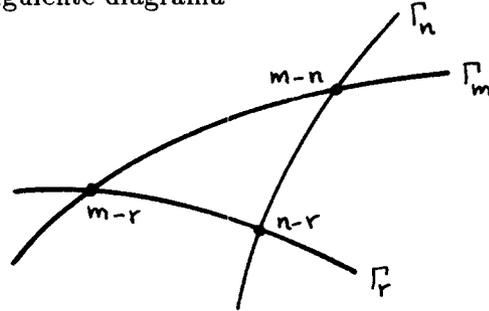
En todos los casos se puede ver que existe una órbita de período 2 alrededor de la cual giran las líneas de simetría y nos referiremos a ella como la órbita trivial del tipo *B*. Estas dos órbitas periódicas juegan un papel determinante en la dinámica de las líneas de simetría.

Enseguida mencionaremos algunas propiedades que guardan las regiones triangulares y ciertas regiones cuadrangulares formadas por las líneas de simetría. En [PJJ] se menciona la relación que guardan las intersecciones de líneas de simetría formando un triángulo, con la *sucesión de Farey* y el número de rotación de las órbitas periódicas correspondientes, en el caso del Mapeo Estándar.

**Propiedad 1**

Sea una región triangular formada por la intersección de líneas de simetría; entonces se cumple que el número asociado a los vértices cumplen que la suma de dos de ellos da el tercero.

*Demostración* Sean  $n, m, r \in \mathbf{Z}$  tales que  $r < n < m$  y consideremos las líneas de simetría  $\Gamma_n, \Gamma_m$  y  $\Gamma_r$  de acuerdo al siguiente diagrama



Luego se tiene

$$(m - n) + (n - r) = m - n + n - r$$

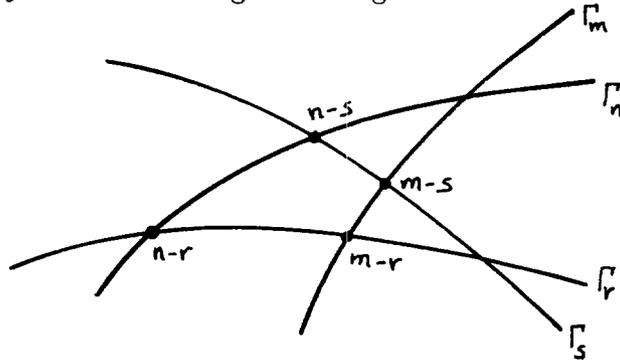
$$(m - n) + (n - r) = m - r$$

y dado que  $(m - r)$  es el período del tercer vértice la propiedad se sigue. □

**Propiedad 2**

Sea una región cuadrangular formada por la intersección de dos regiones triangulares de líneas de simetría, entonces la suma de los vértices opuestos es igual a la suma de los otros dos vértices.

*Demostración* Sean  $n, m, r, s \in \mathbf{Z}$  tales que  $s < r < n < m$  y consideremos las líneas de simetría  $\Gamma_n, \Gamma_m, \Gamma_r$  y  $\Gamma_s$  de acuerdo al siguiente diagrama



Consideremos una de las diagonales del cuadrángulo, por ejemplo la de períodos  $(n - s)$  y  $(m - r)$  y al sumar se obtiene

$$(n - s) + (m - r) = n - s + m - r$$

$$(n - s) + (m - r) = (n - r) + (m - s)$$

y la resultante es la suma de los períodos de la diagonal con períodos  $(n - r)$  y  $(m - s)$ . □

A continuación describiremos cada uno de los casos mencionados al principio. Los números marcados en los cruces de 2 líneas de simetría  $\Gamma_n \cap \Gamma_m$  es el período mínimo de la órbita periódica. Mencionaremos los cruces de las líneas de simetría de acuerdo al orden en que aparecen del interior hacia el exterior. Los números que etiquetan las líneas representan el índice de las  $\Gamma$ 's.

- $f = 1, h = -0.4$

Este caso integrable corresponde a dos osciladores armónicos desacoplados con la misma frecuencia (véase Secc. 2.1) y por lo tanto el mapeo de Poincaré se reduce a la identidad. Como consecuencia, todos los puntos en la sección corresponden a órbitas de período 1. Para valores de  $f \lesssim 1$  todas las órbitas tendrán períodos muy altos.

- $f = 0.9, h = -0.4$

Analizando los cruces de la parte exterior hacia el interior, vemos que han aparecido órbitas periódicas de períodos 17, 19 y 21. En realidad aparecen órbitas de períodos más altos que aparecerían en intersecciones de líneas de índice más alto. Nótese que en las regiones triangulares la suma de los números asociados a dos vértices da el tercero, y en las regiones cuadrangulares formadas por la intersección de dos regiones triangulares la suma de los números asociados a vértices opuestos son iguales. Cuando  $f$  decrece las líneas de simetría rotan a una razón mayor a la vez que se doblan en los extremos; con tal efecto las órbitas periódicas tienden a desaparecer en la órbita de períodos menores en los extremos.

- $f = 0.8, h = -0.4$

Para estos valores de los parámetros las líneas de simetría se han doblado y se pueden apreciar intersecciones de a lo más cuatro líneas, las cuales dan origen a órbitas de período mínimo 9. Se generan órbitas de períodos 20, 29, 9 (18, 27), 25, 16, 23, 30.

- $f = 0.7, h = -0.4$

Aquí podemos notar que la rotación y curvatura de las líneas de simetría aumentó, y se tiene un mayor número de intersecciones de las líneas, de tal forma que se localizan órbitas de períodos 19, 31, 12 (24), 29, 17, 22, 27, 5 (10, 15), 28, 23, 18. Obsérvese que reaparecieron las órbitas de período 19 y 17 que aparecían en el caso  $f = 0.9$ , y se conservan los de período 29 y 25 de  $f = 0.8$ . La órbita de período 20 se transforma en la órbita trivial (período 2). El mayor número de líneas que ocurren a un punto fijo son seis, de tal forma que dichos puntos corresponden a las órbitas periódicas de período 5.

- $f = 0.6, h = -0.4$

Debido a la mayor rotación y curvatura de las líneas de simetría la cantidad de puntos de intersección se ha incrementado y aparecen nuevos períodos. Dado que en la parte exterior resulta difícil distinguir los puntos de intersección, hacemos notar las más visibles: 18, 13 (26), 21, 29, 8 (16, 24, 32), 27, 19, 11, 25, 17, 14, 20, 3(6, 18, 24). La órbita de período 12 muere en la órbita trivial. Nótese que el mayor número de líneas que ocurren a un punto fijo son 10 y corresponde a la órbita de período 3(6, 18, 24); las órbitas de períodos 19, 29, 17 y 27 se conservan.

- $f = 0.5, h = -0.4$

Para el estudio de este caso notamos un gran número de intersecciones y por lo tanto sólo mencionamos las órbitas que se distinguen con más facilidad. Éstas son las órbitas de período 17, 20, 23, 26, 29, 32, 3(6,9,12,15), 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13, 27 y 10. La órbita de período 3(6,9,12,15) al igual que en el caso  $f = 0.6$  se distingue debido a que el punto fijo asociado ocurren el máximo número (11) de líneas de simetría. La órbita de período 18 muere en la órbita trivial. Con respecto a los casos anteriores se conservan la órbitas de período 17, 20, 26, 29, 32, 3 (6, 9, 12, 15), 25, 27, 19 y 13.

- $f = 0.4, h = -0.4$

Al examinar este caso podemos apreciar la aparición de una nueva órbita de período 2 y las líneas de simetría giran con respecto a ella al igual que lo hacen en relación a la órbita trivial que existe desde el caso  $f = 0.9$ . Por otro lado, la órbita de período 17 que apareció desde  $f = 0.9$  muere en la órbita trivial. A diferencia de los casos anteriores la inclinación de las líneas de simetría producen intersecciones cuyos puntos de intersección son órbitas con períodos bajos, estos son 19, 16, 13, 10, 12, 8, 9, 7, 5, 11, 4 (8, 16) y 14. La órbita de período 12 que había surgido en  $f = 0.7$ , y desaparecido para  $f = 0.6$ , vuelve a aparecer. El máximo número de líneas de simetría que se intersectan entre sí son 5, produciendo puntos en la órbita de período 4(8,16). Con respecto a los caso anteriores sólo permanecen las órbitas de períodos 13, 16 y 19.

- $f = 0.3, h = -0.4$

En este casos sólo estudiaremos 10 líneas de simetría debido a que con un mayor número de iteraciones resulta muy complicado estudiar sus intersecciones. Cabe mencionar que en la gráfica se tienen tramos rectos sobre algunas líneas de simetría debido a errores numéricos al tocar estas la órbita vertical mencionada con anterioridad. Nótese que la dinámica de las líneas de simetría tienen igual comportamiento con respecto a las dos órbitas triviales. Observemos que se tienen órbitas con períodos 13, 9, 6 (12), 11, 2(4,6,8), 5, 10, 7 y 14. Con respecto a casos anteriores podemos mencionar que se conservan órbitas con períodos 13, 10, 12, 9, 7 y 11 y la de período 16 muere en la órbita trivial. El comportamiento de las líneas de simetría con respecto a las dos órbitas triviales sugiere que tienden a tener su propia dinámica hasta lograr dos componentes en el dominio de Poincaré, cuando  $f \rightarrow 0$ .

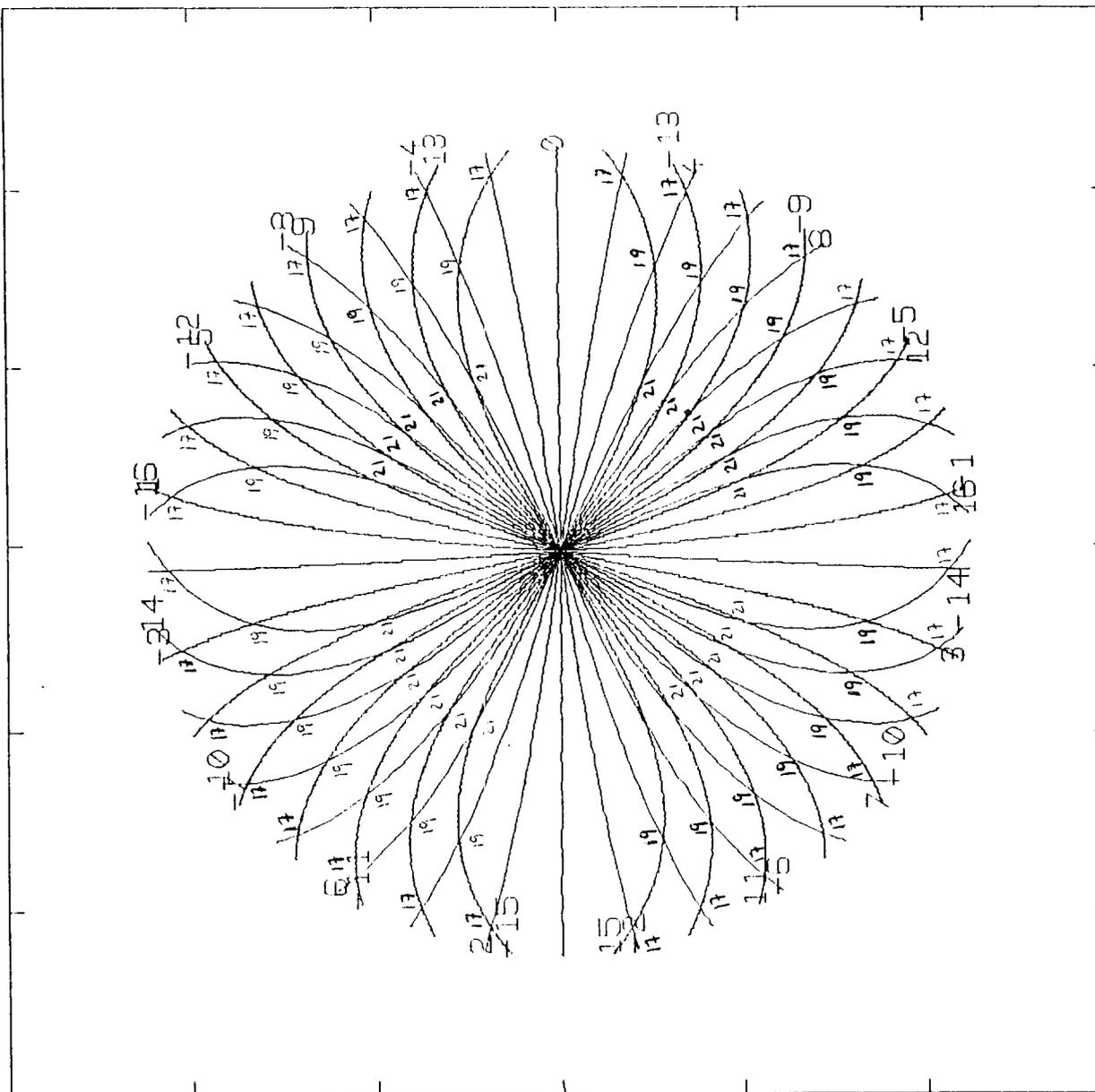
## Conclusiones.

- Se da la demostración de la *no integrabilidad* de las ecuaciones del sistema péndulo-resorte para valores de  $f$  suficientemente pequeños, cuando la componente vertical del momento angular es cero.
- Se presenta una descripción detallada de las regiones de Hill.
- Se demuestra la *no* existencia de primeras integrales extendibles independientes de la energía.
- Se estudia la estabilidad de las órbitas verticales vecinas a los puntos de equilibrio  $L_1$  y  $L_2$ . Para valores de energía  $h \gtrsim -\frac{1}{2}$ , las ecuaciones de variación normal se aproximan por una ecuación de Mathieu.
- Se muestra, numéricamente, la persistencia de la órbita de período 13 para todos los valores del parámetro  $f$  a partir del cual aparece.
- Se muestra evidencia numérica de que las órbitas de períodos bajos distintos de 2, 3 y 5 sólo se pueden localizar para valores de  $f$  pequeños.

# Bibliografía

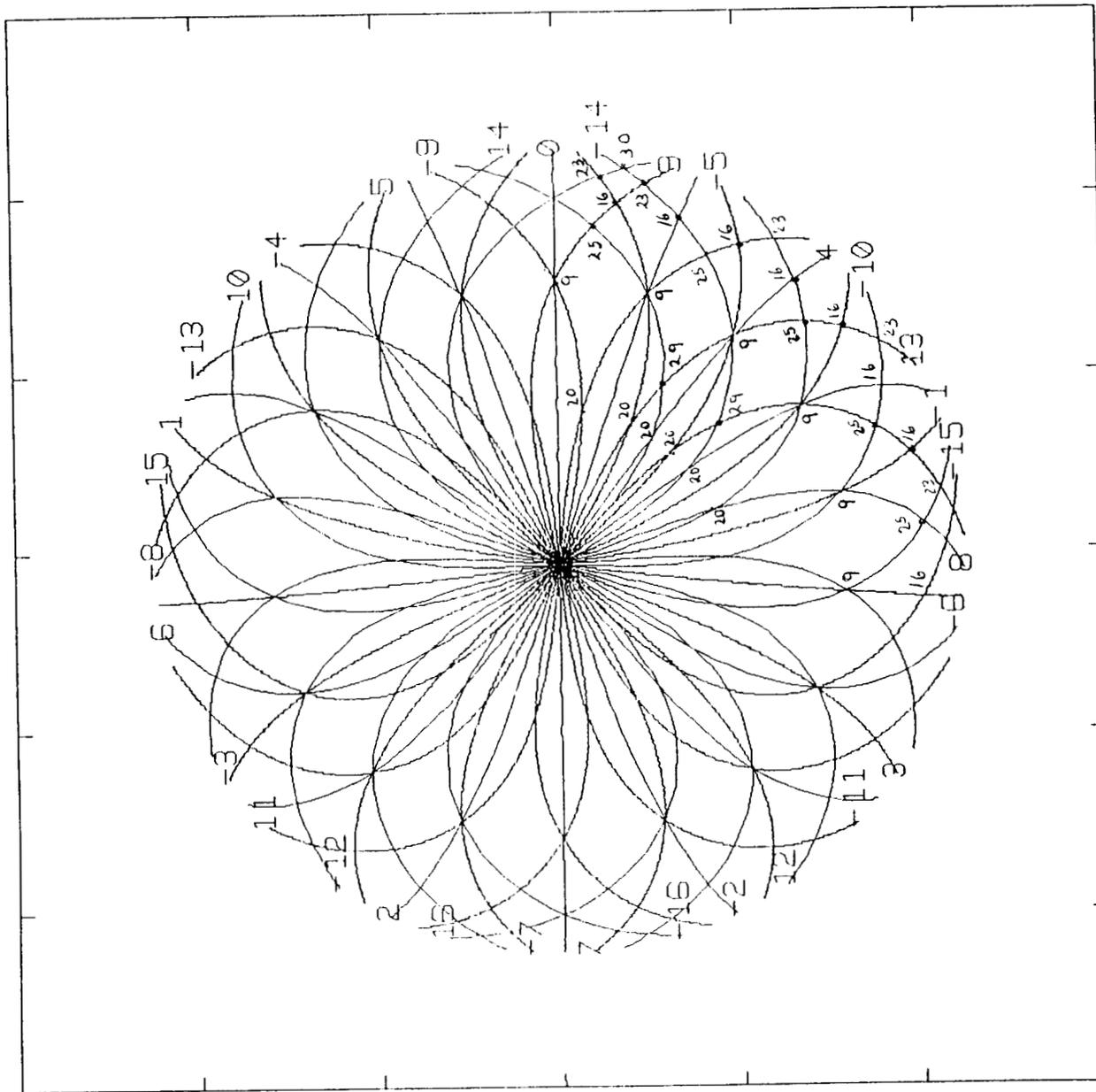
- [1] [AD] Alvarez, M. y Delgado, J. *The spring-pendulum systems*. Memorias del Simposio Internacional de Sistemas Hamiltonianos y Mecánica Celeste, Guanajuato, Gto. 1991.
- [2] [A] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] [Am] Abraham, R., Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings Reading, 1978.
- [4] [C-L] Casasayas J., Llibre J. *Qualitative analysis of the anisotropic Kepler problem*. Memoirs of the Am. Math. Soc., **314**, 1984.
- [5] [B-O] Carl M. Bender and Steven A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, USA.(1978) pp. 560-566.
- [6] [Bir] G.D. Birkhoff. *Collected mathematical papers*. Princeton Univ. Press, Princeton. (1958) pp. 53-84.
- [7] [B-B] R. Broucke, P.A. Baxa. *Periodic solutions of a springer-pendulum system*. Celestial Mechanics **8** (1973) pp. 261-267.
- [8] [Dev] Devaney R.L.,. *Singularities in classical mechanical systems*. En A. Katok (ed.), Ergodic theory and dynamical systems I, Proceedings special year, Maryland 1979-80. Birkhauser, Basel, 1981.
- [9] [DeV] R. DeVogeleare. *On the structure of symmetry periodic solutions of conservative systems, with applications*, en: *Contribution to the theory of nonlinear oscillations*. Vol IV, S. Lefshetz ed., Princeton Univ. Press, Princeton. (1958) pp. 53-84.
- [10] [G] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*. Ed. Aguilar, México. 2a. edición , 1977.
- [11] [G-H] Guckenheimer, J., P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 3a. edición, 1981.
- [12] [H] Jack K. Hale. *Ordinary differential equations*. Jhon Wiley & Sons,Inc., USA. (1969) pp. 121-131.
- [13] [H-S] Hirsch, M.W., and Smale, S. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, New York, 1974.

- [14] [JLP] Lidia Jiménez-Lara and Eduardo Piña. *Periodic orbits of an electric charge in a magnetic dipole field*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **49** (1990) pp. 327-345.
- [15] [Koi] Jair Koiller. *Studies on the Spring-Pendulum*. Tesis Doctoral, University of California, Berkeley, USA. 1975.
- [16] [Le] Louis Leithold. *El Cálculo con geometría analítica*. Ed. Harla, 5a. edición, México. (1987) pp. 878-881.
- [17] [LL] Lacomba, E.A., Llibre, J. *Transversal ejection-collision orbits for the restricted three body problem and Hill's problem with applications*. *J. Diff. Eq.* **47** no.1 (1988) pp. 69-85 .
- [18] [Min] Minorsky, N. *Non-Linear Oscillations*. D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J., (1962) pp. 506-509.
- [19] [Nu] Nuñez-Yépez H.N. *Regularidad y caos en sistemas dinámicos*. Tesis de Maetría (Física) UNAM. 1990.
- [20] [San] Sanders, J.A. *Melnikov's method and averaging*. *Cel. Mech.* **28** (1982), 171-181.
- [21] [PJL] Piña, E. y Jiménez-Lara, L. *On the Symmetry Lines of the Standard Mapping*. *Physica* **26D**, (1987) pp. 369-378.
- [22] [W] S. Wiggins. *Global bifurcations and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [23] [WW] E.T. Whittaker, G.N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Univ. Press, New York, 1943.

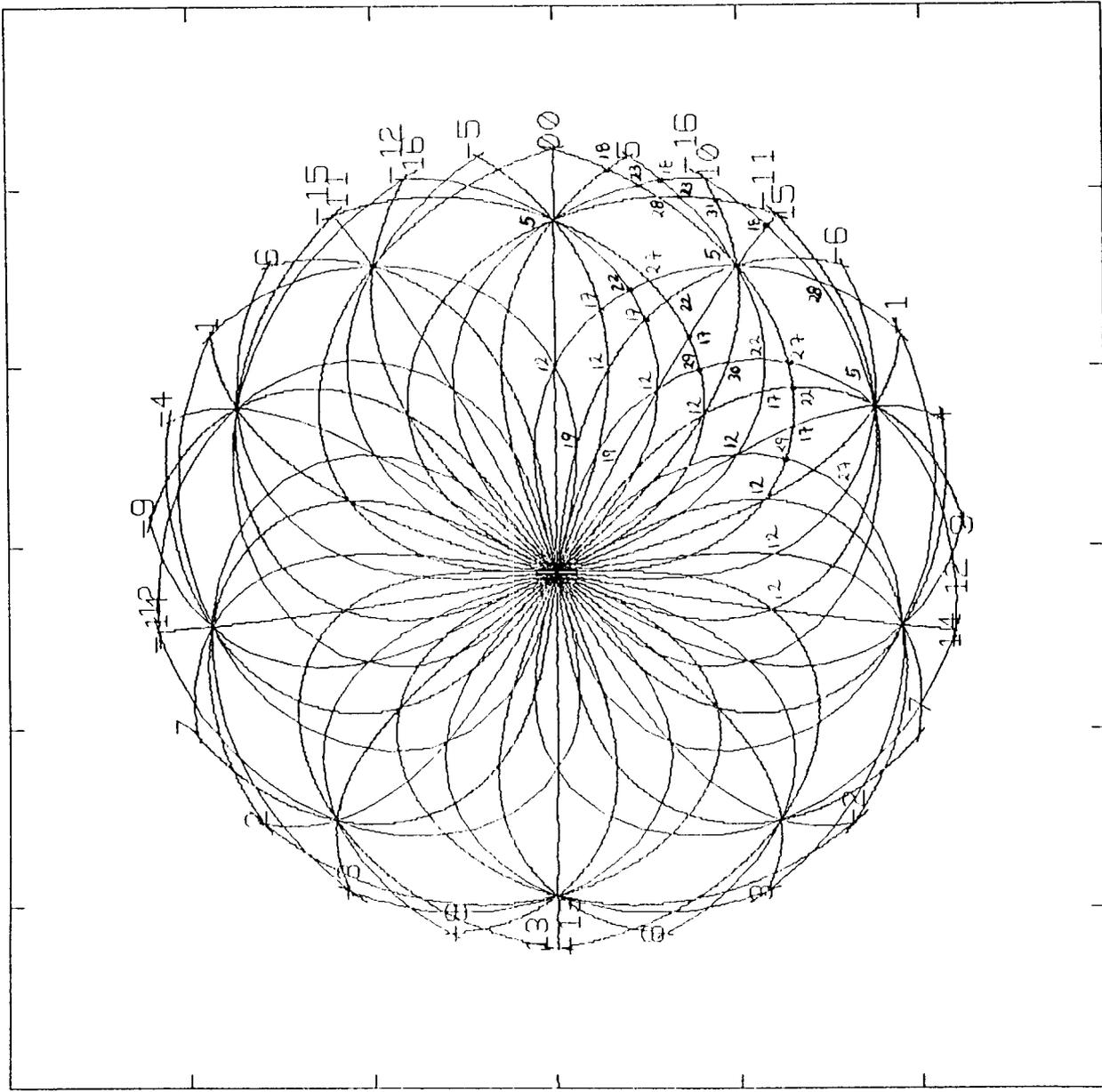


$t=0.9$   $h=0.4$   $-0.5$   $-x$   $0.6$   $-0.6$   $-x$   $0.6$

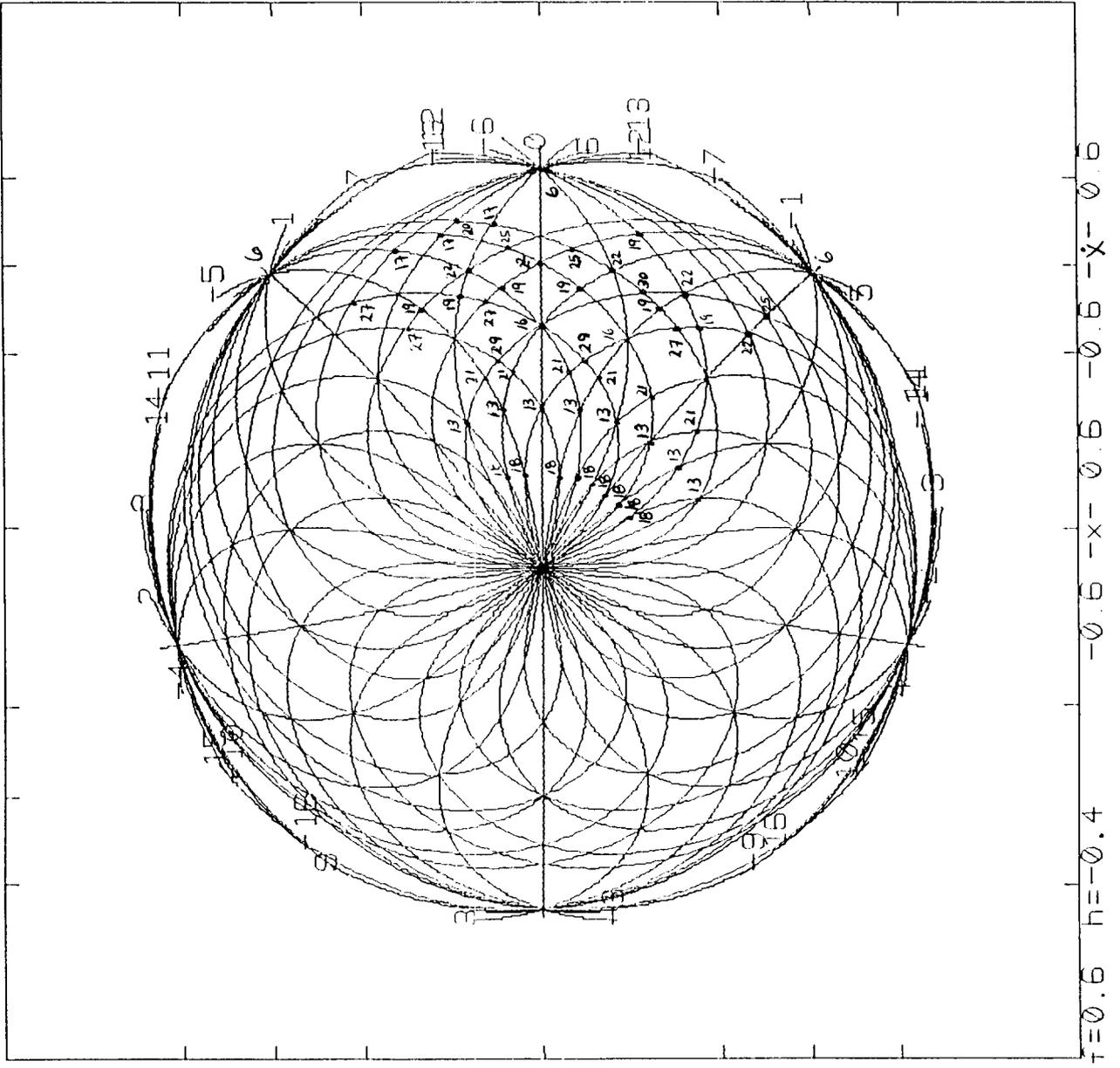
147896

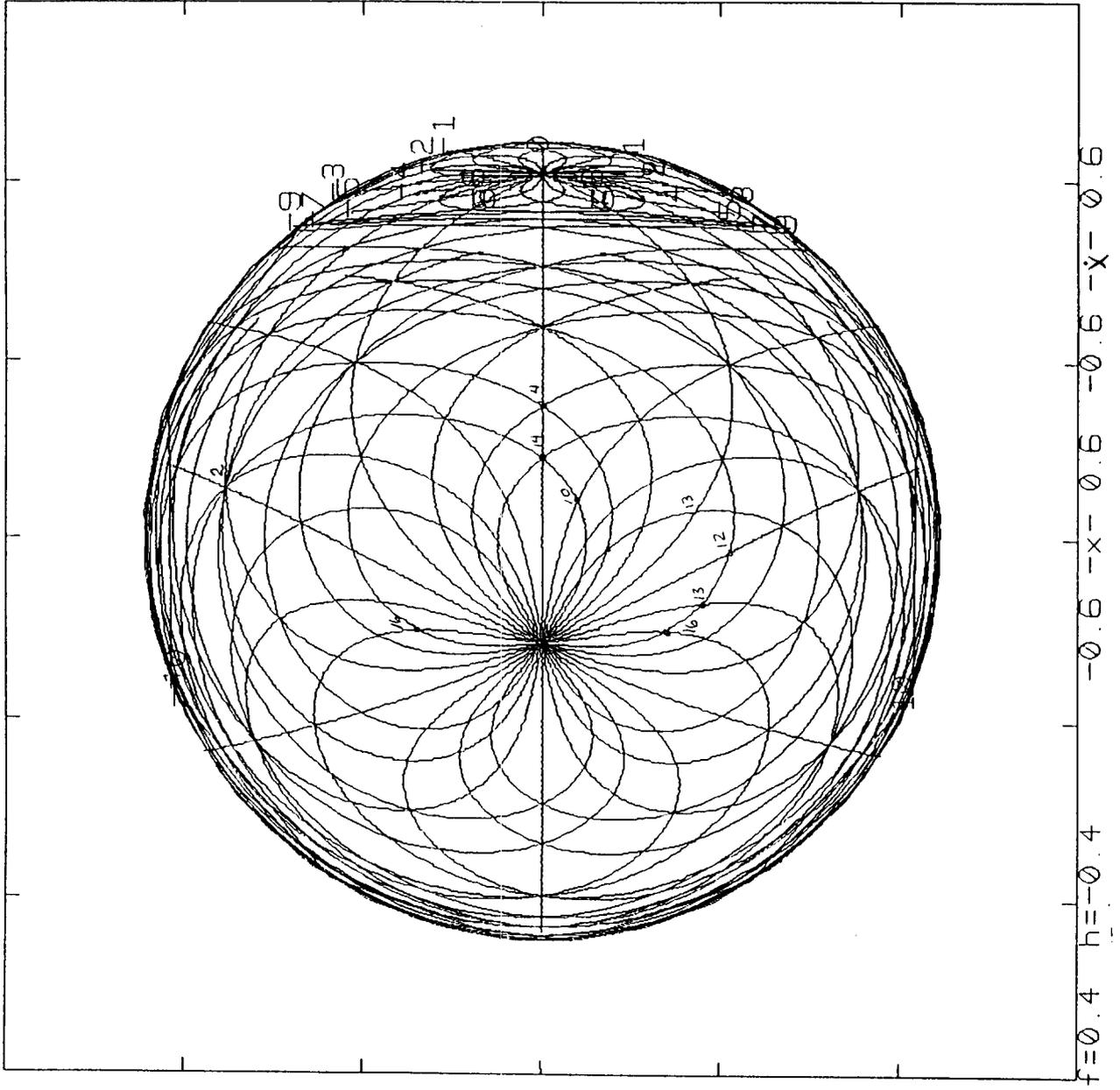


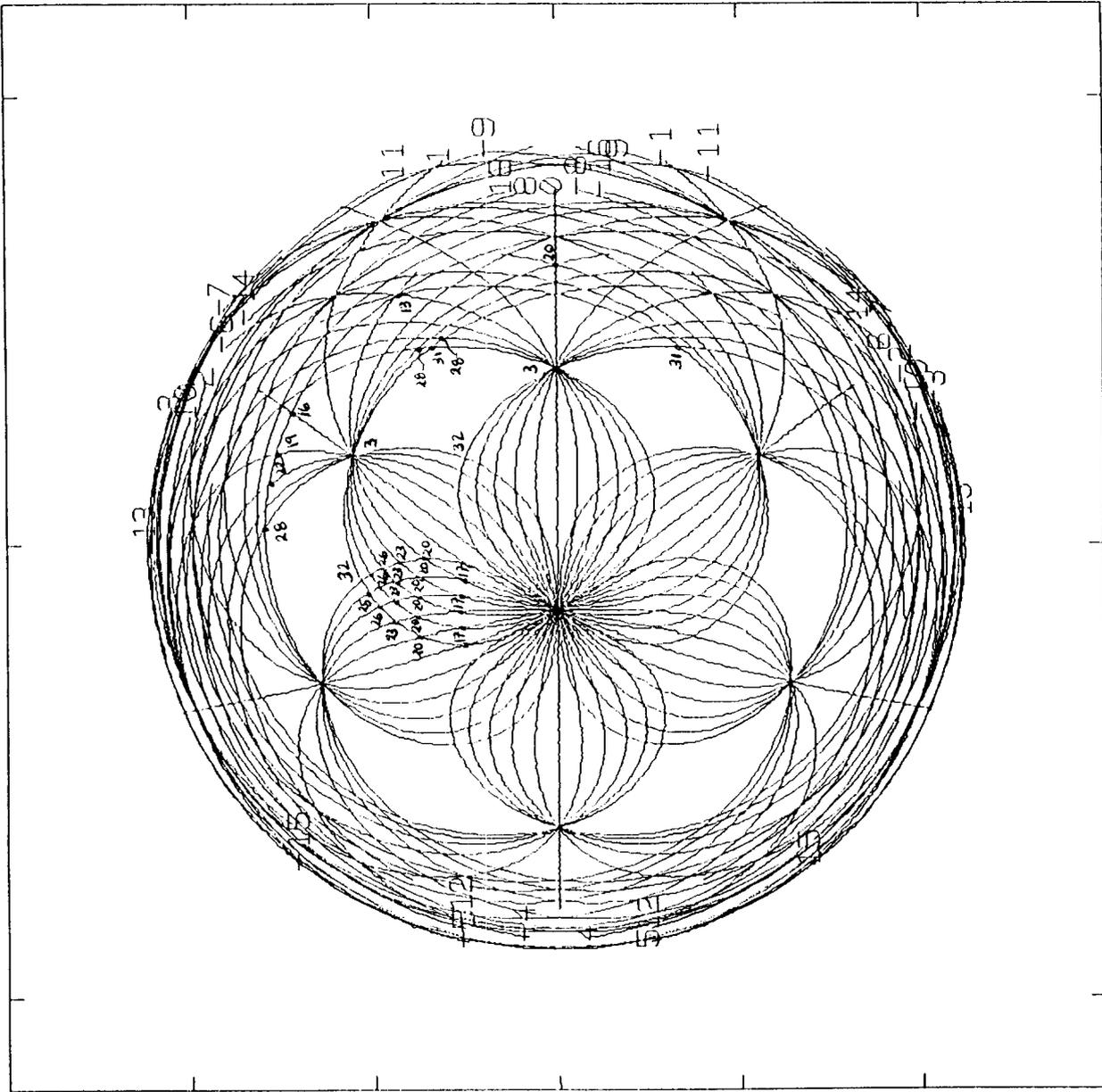
f=0.8 n=0.4 -0.6 -x- 0.6 -0.6 -x- 0.6

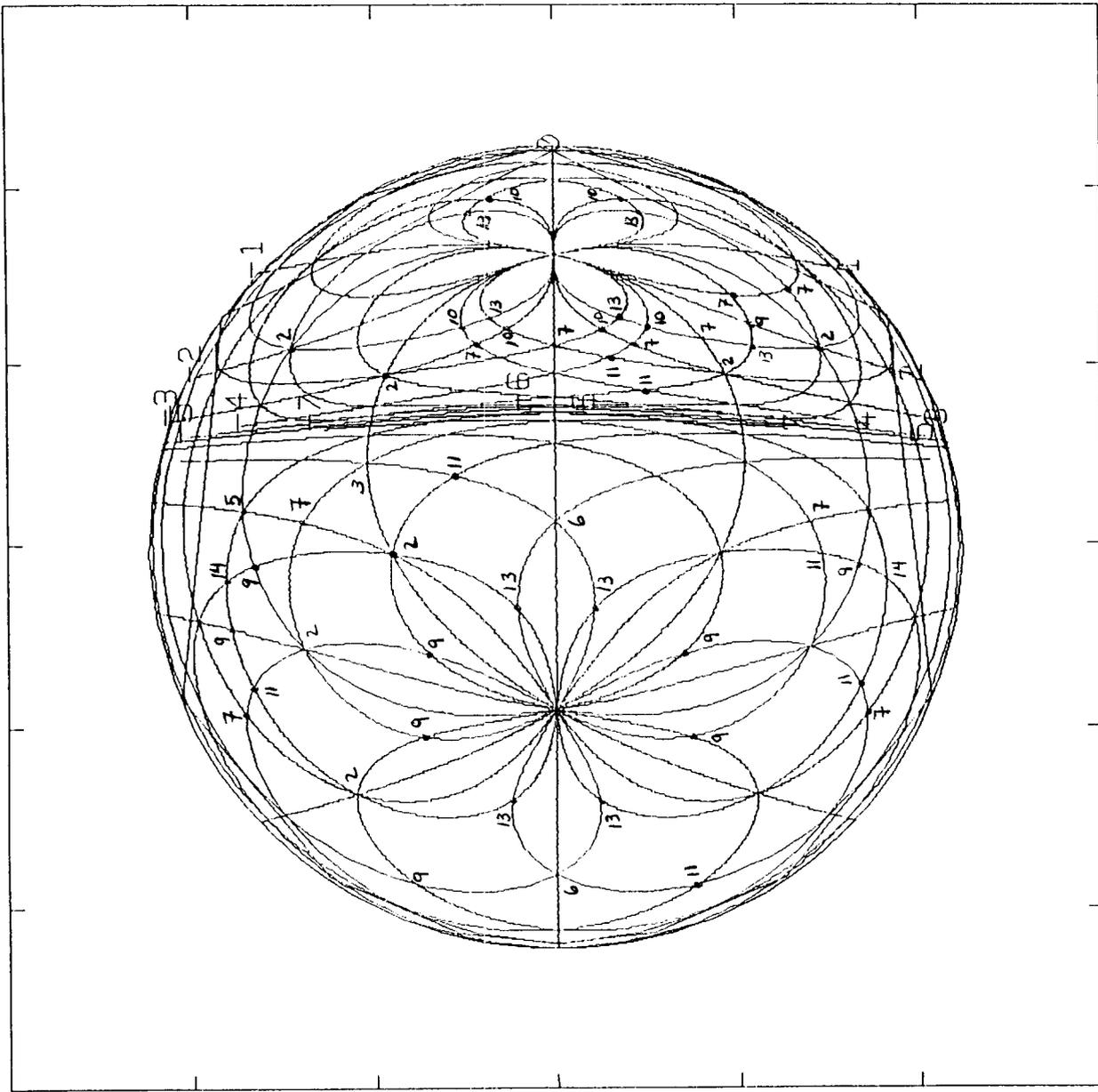


$t=0.7$   $h=-0.4$   $x=0.6$   $-x-0.6$   $-x-0.6$



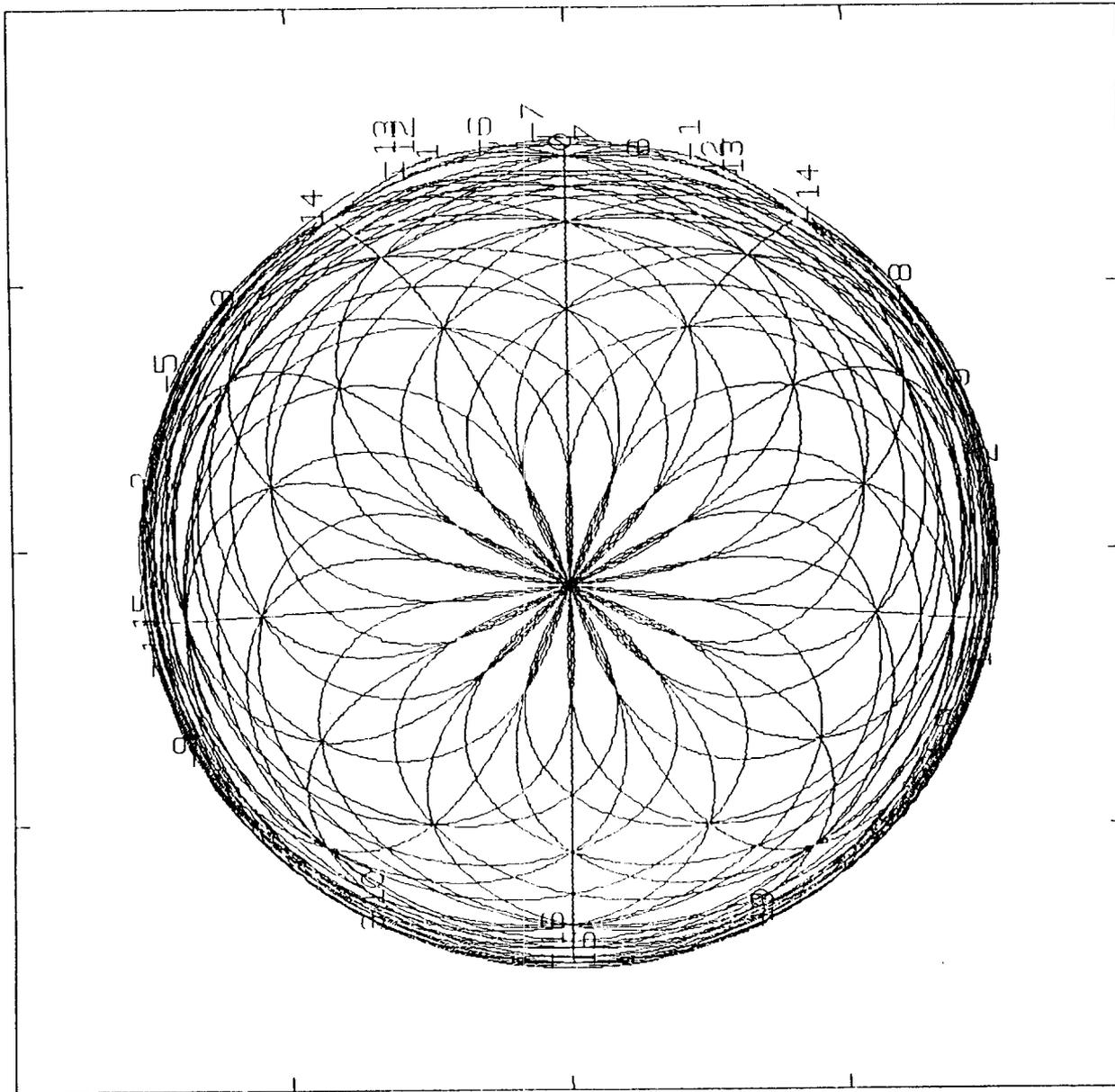




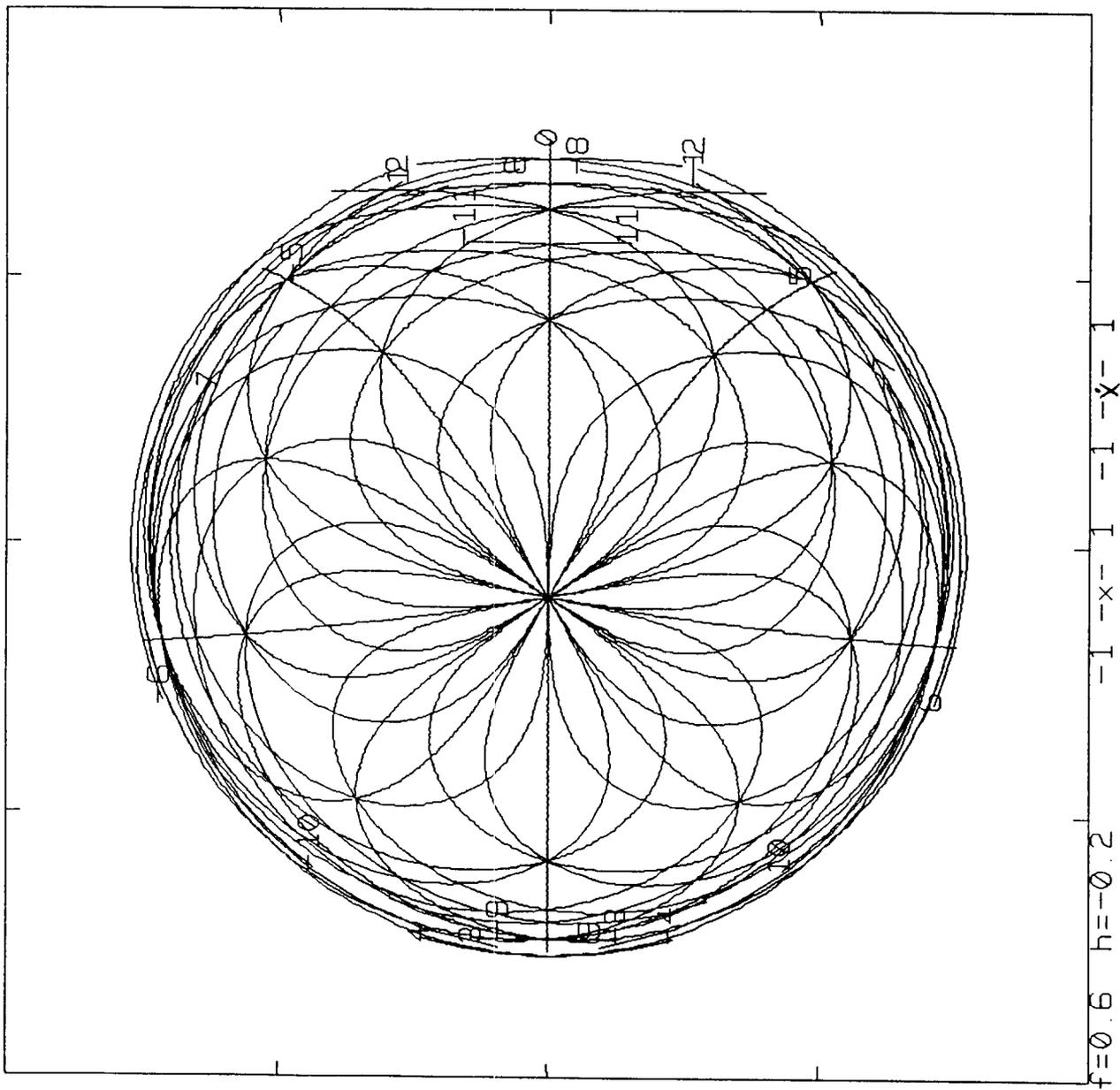


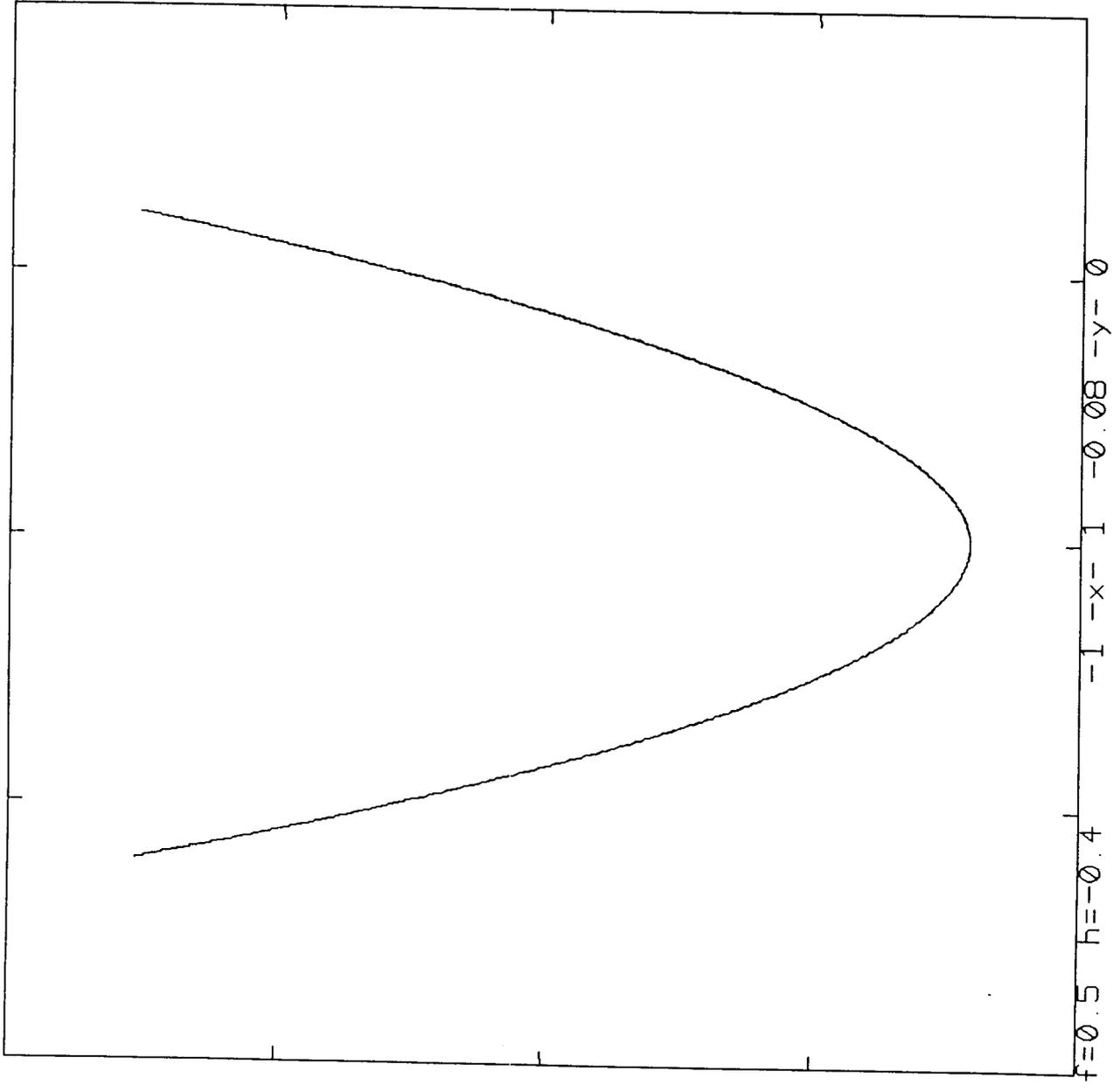
$f=0.3$   $h=-0.4$   $-0.6-x-0.6$   $-x-0.6$

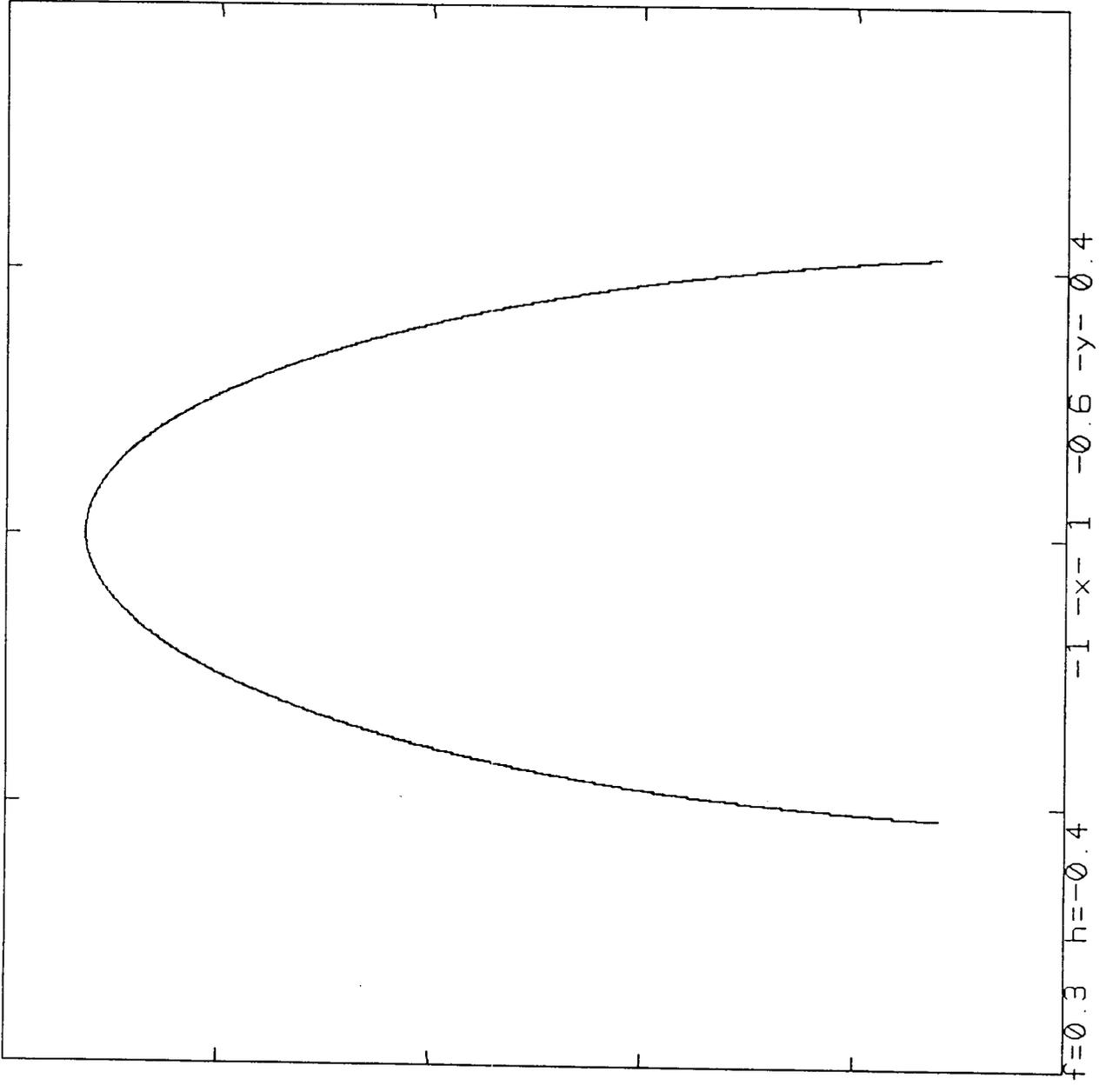


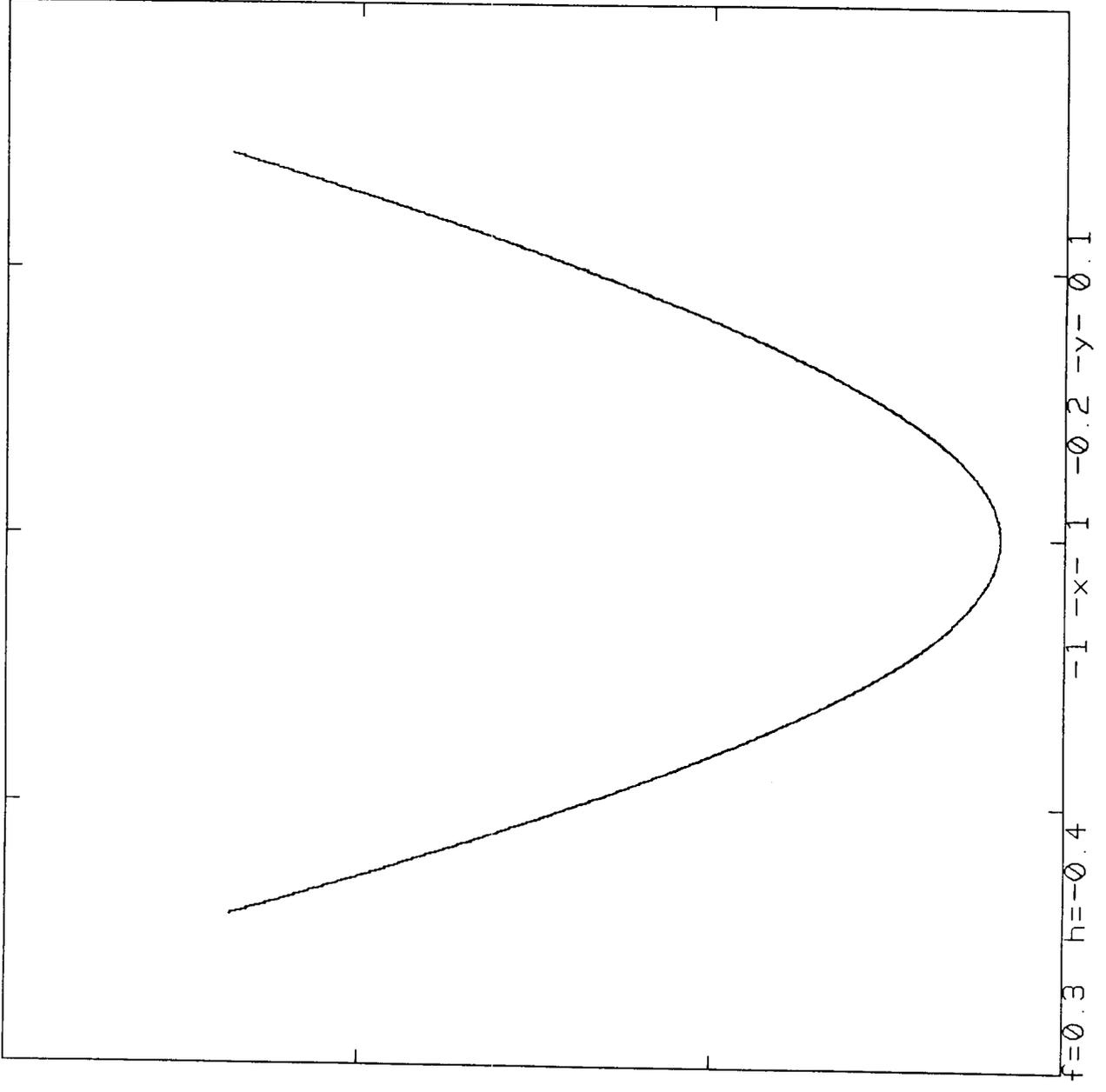


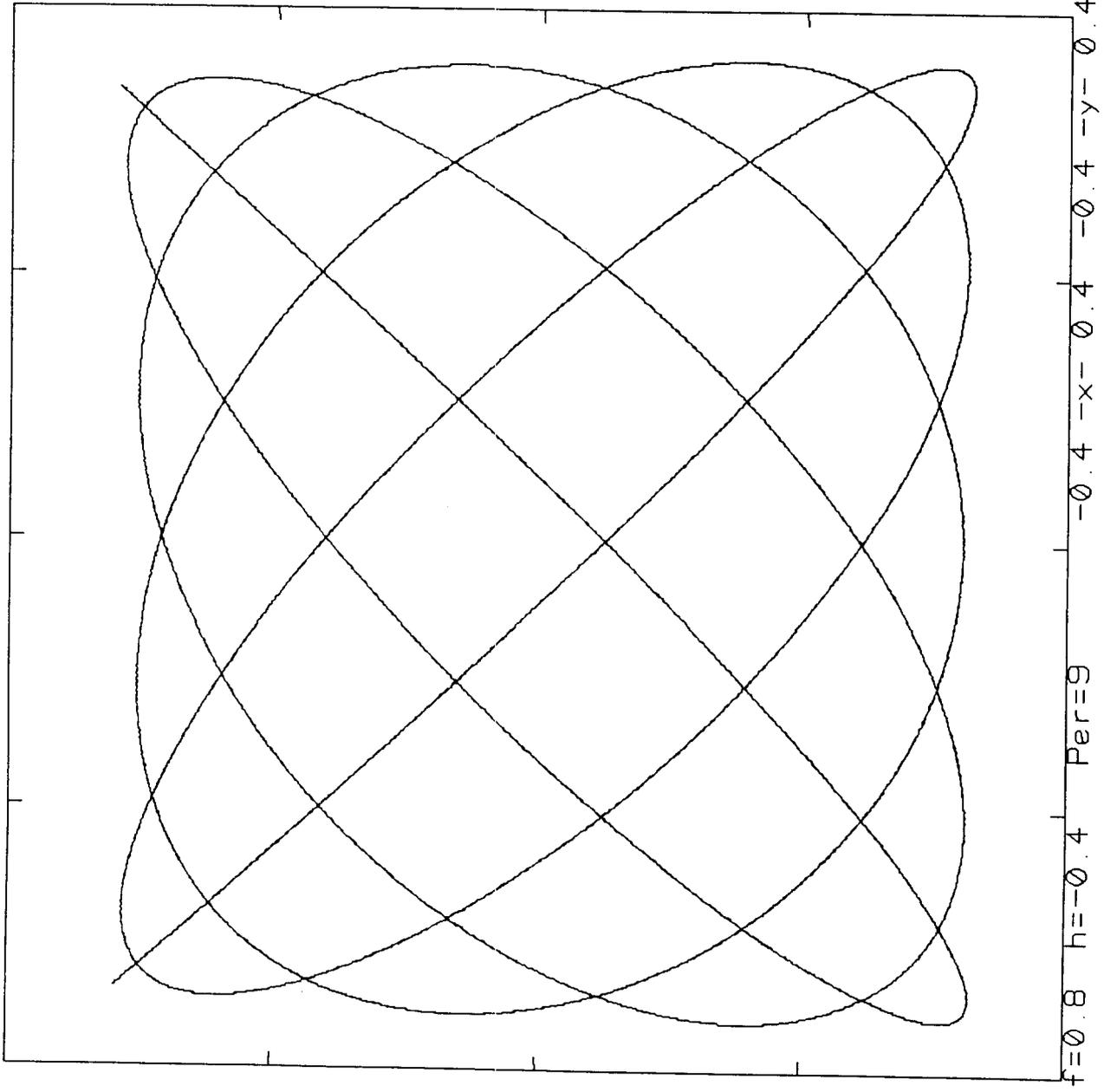
$f=0.7$   $h=-0.2$   $-1-x-1-1-x-1$

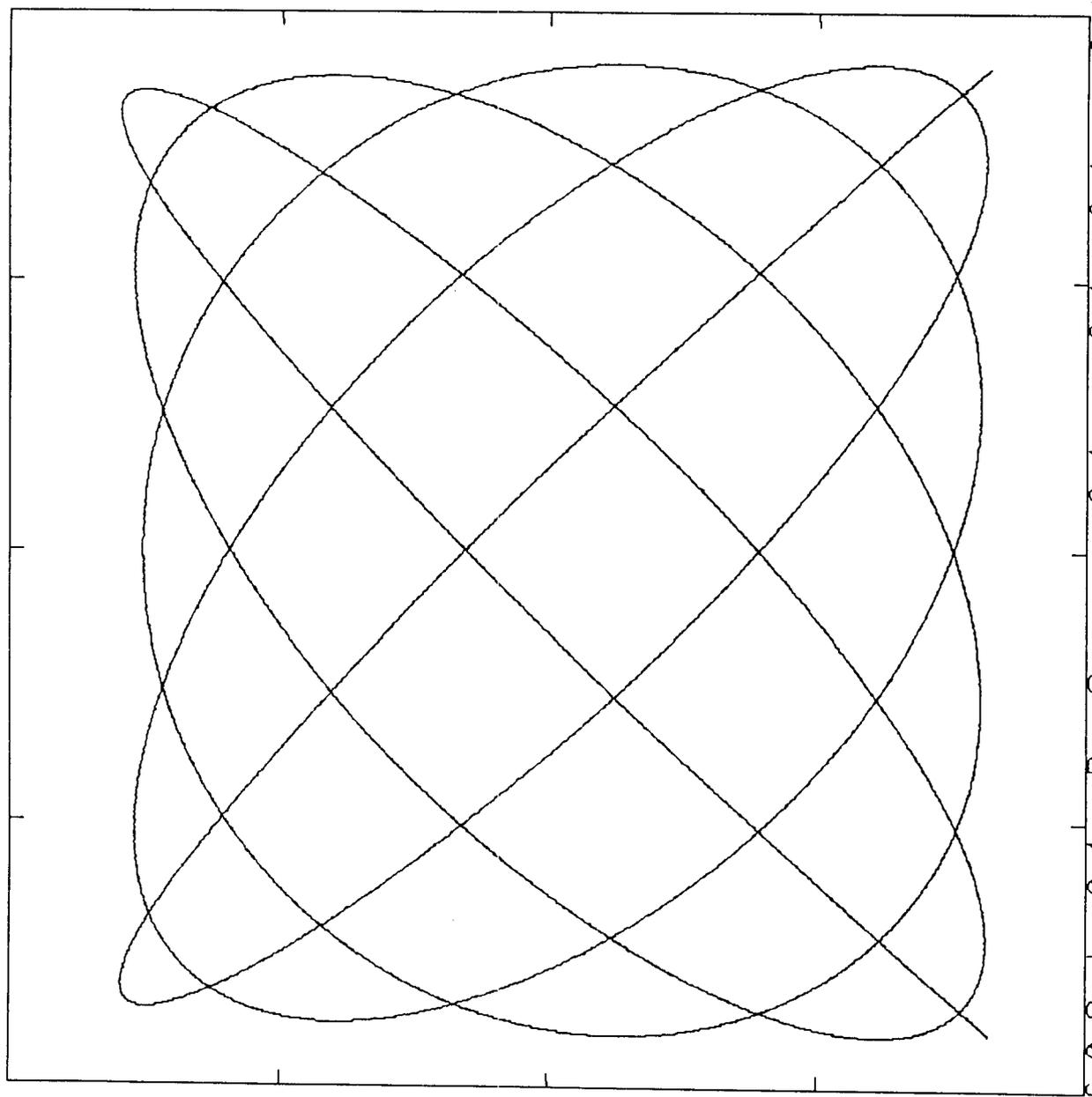




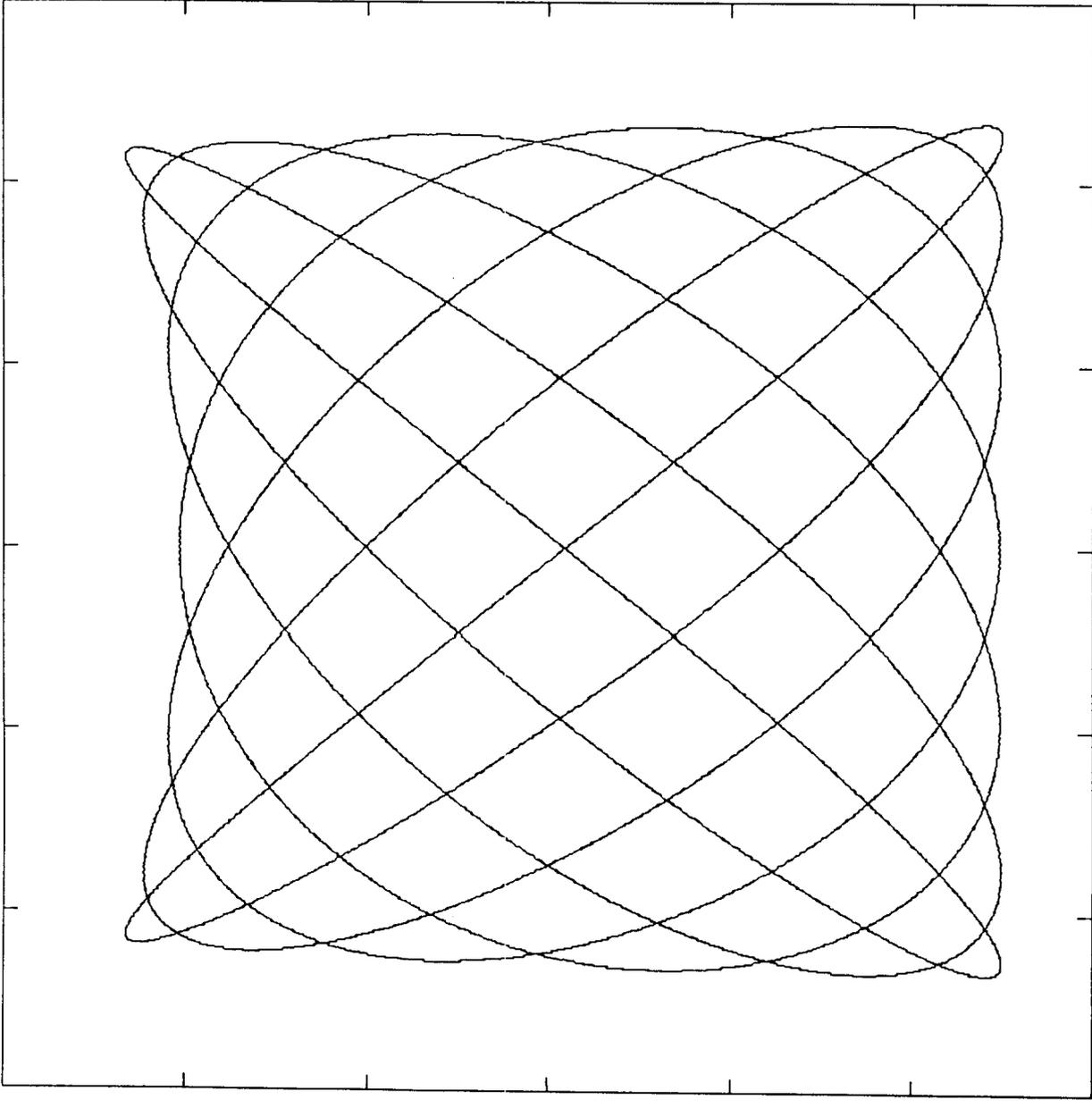


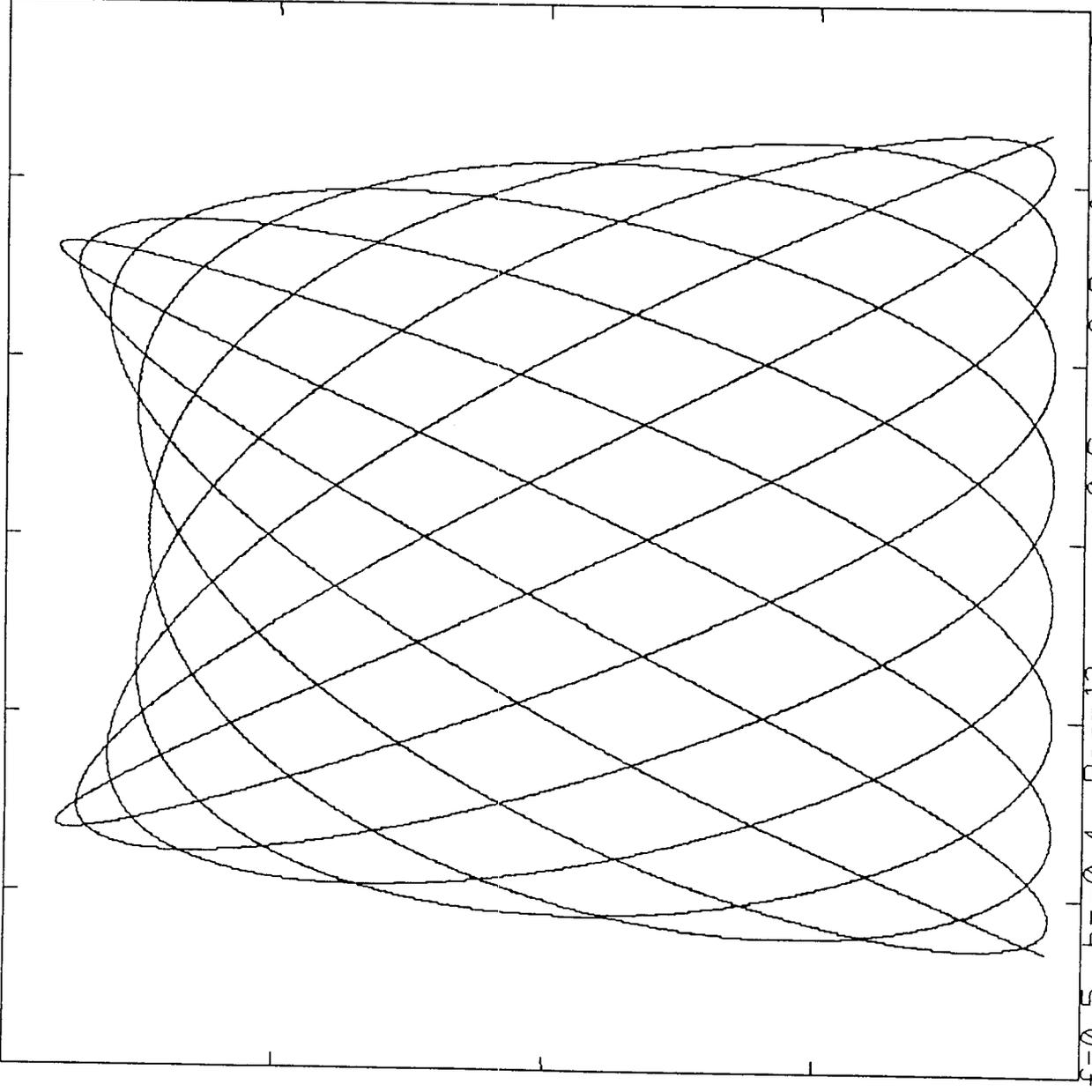




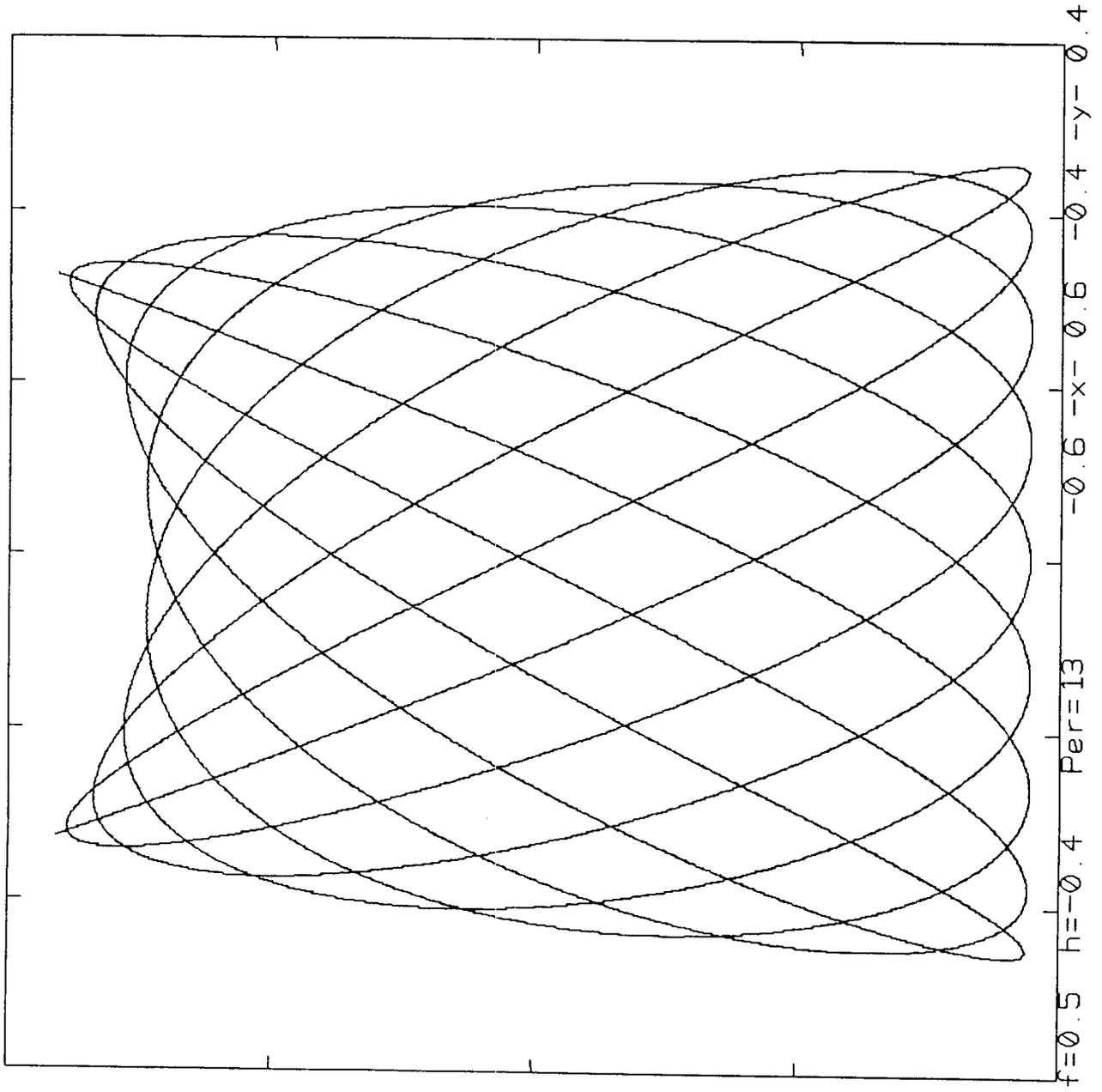


$f=0.8$   $h=-0.4$   $Per=9$   $-0.4$   $-x$   $-0.4$   $-y$   $-0.4$

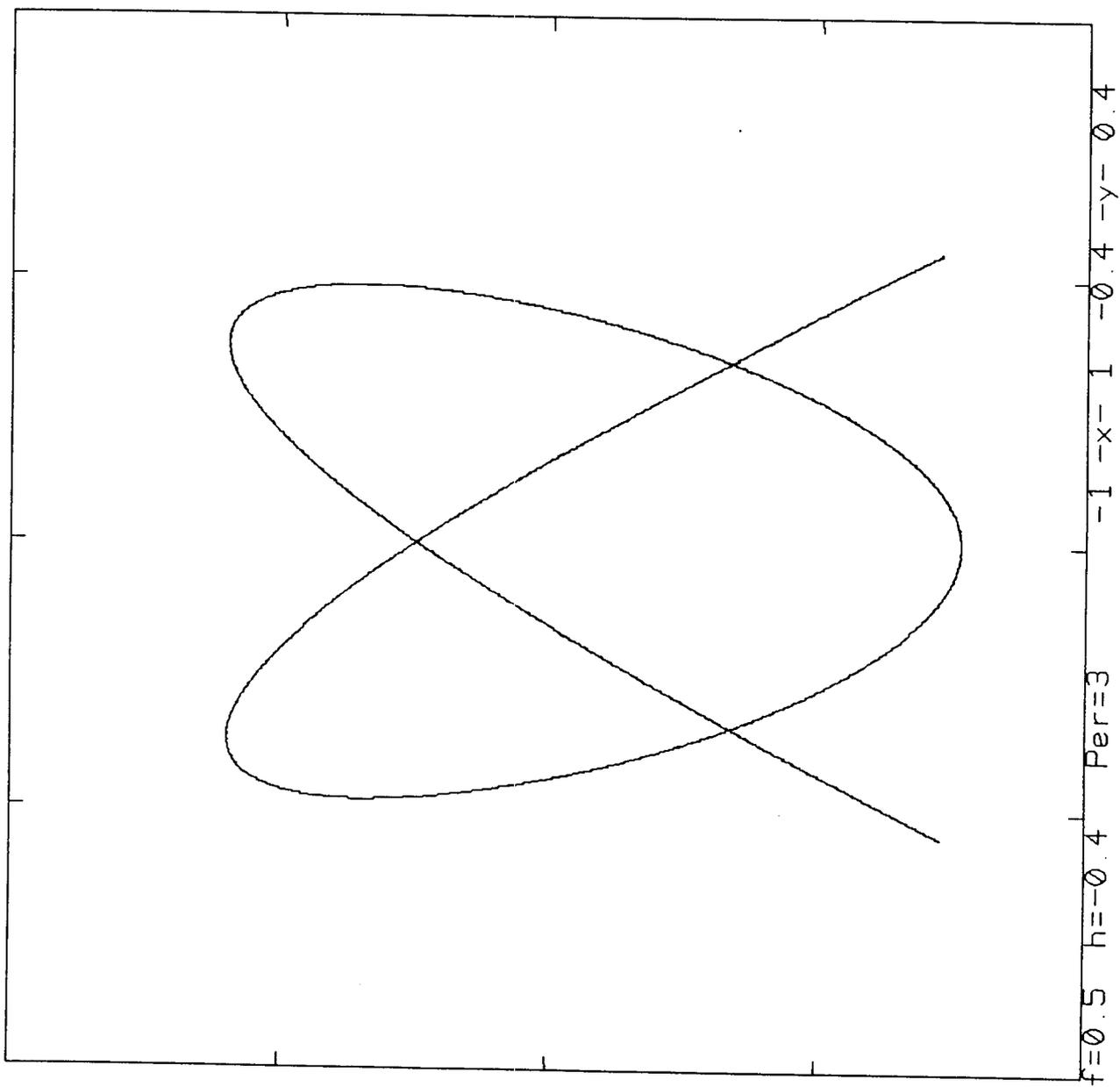


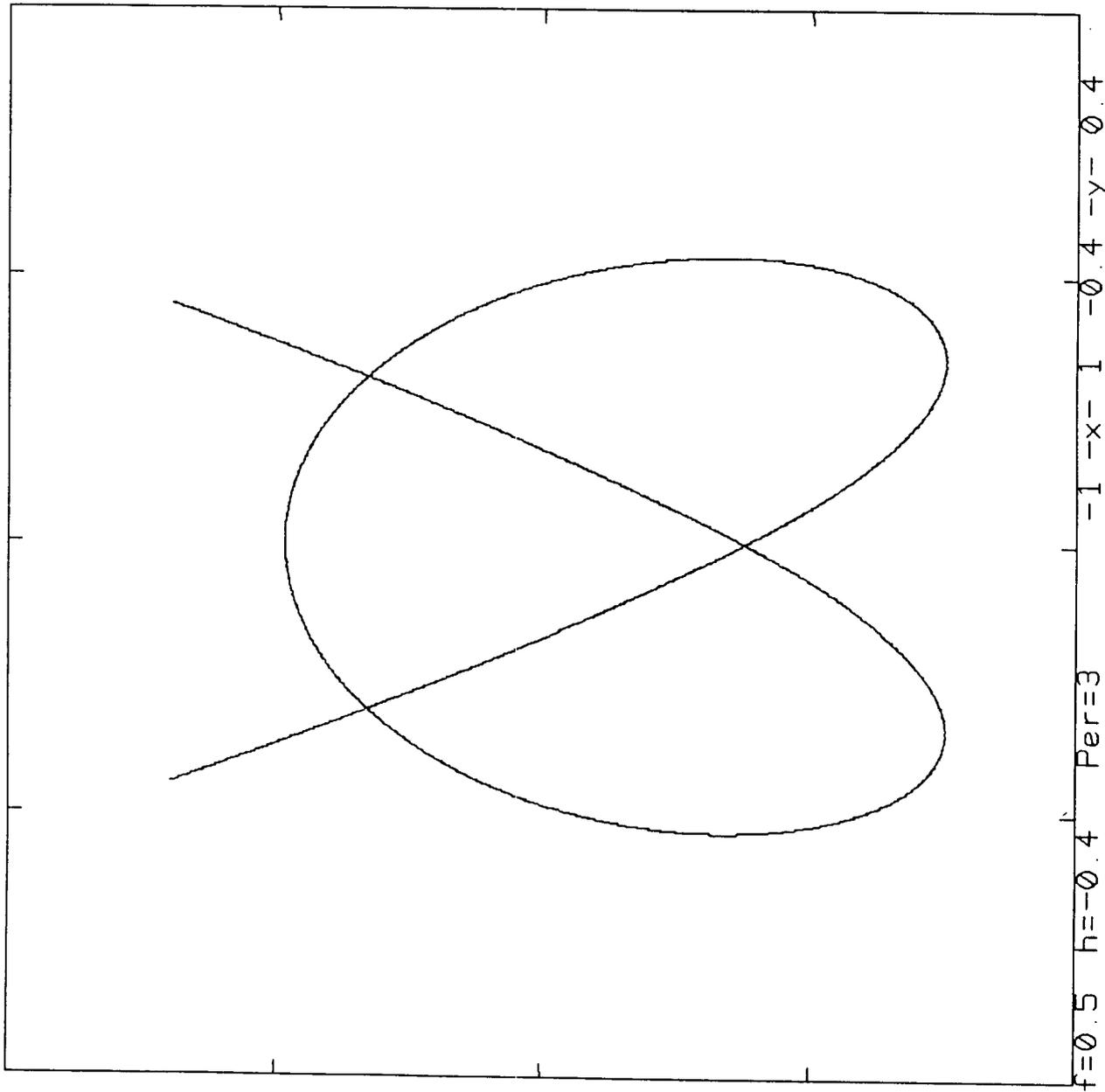


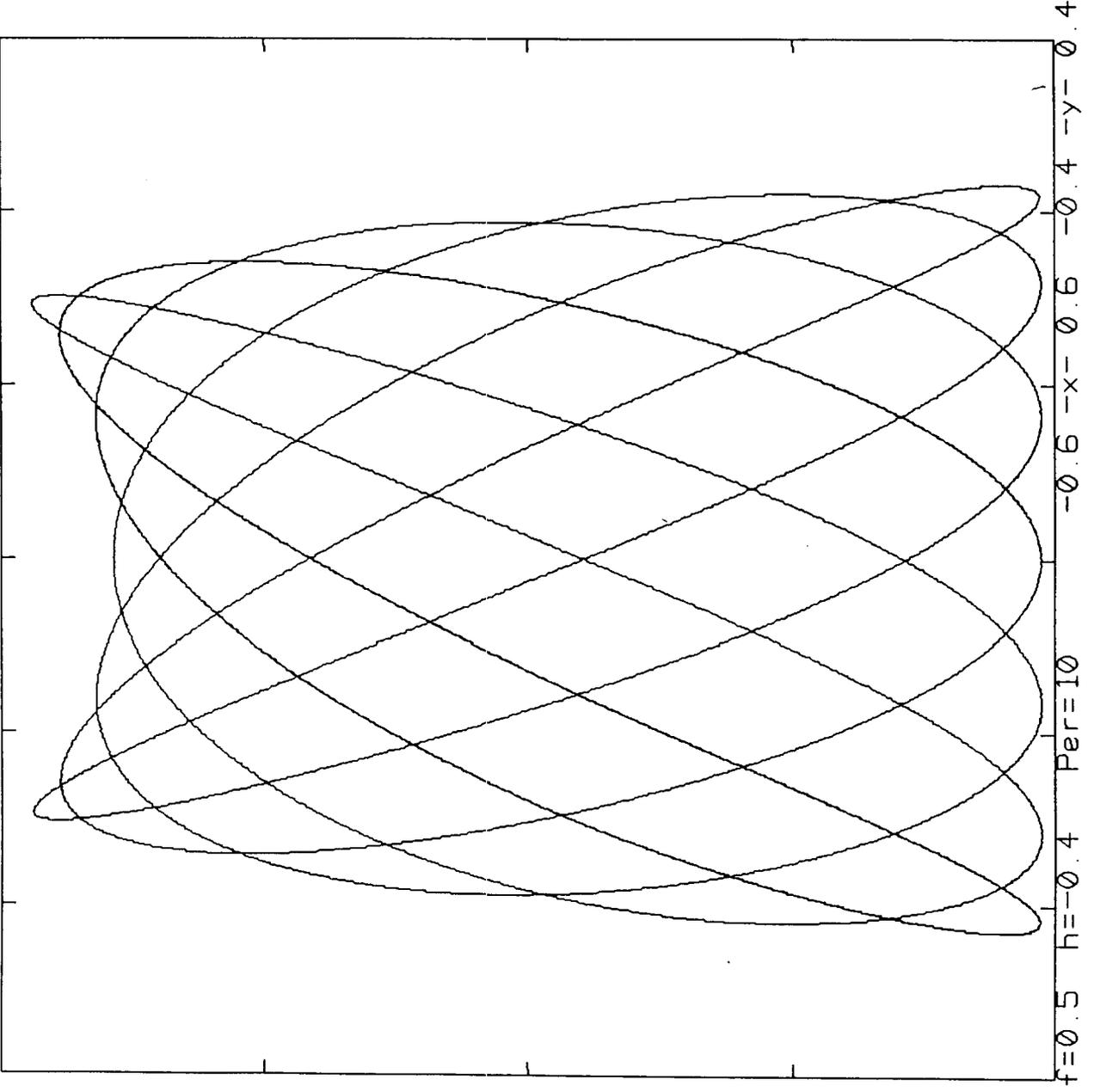
$f=0.5$   $h=-0.4$   $\text{Per}=13$   $-0.6$   $-x-$   $0.6$   $-0.4$   $-y-$   $0.4$



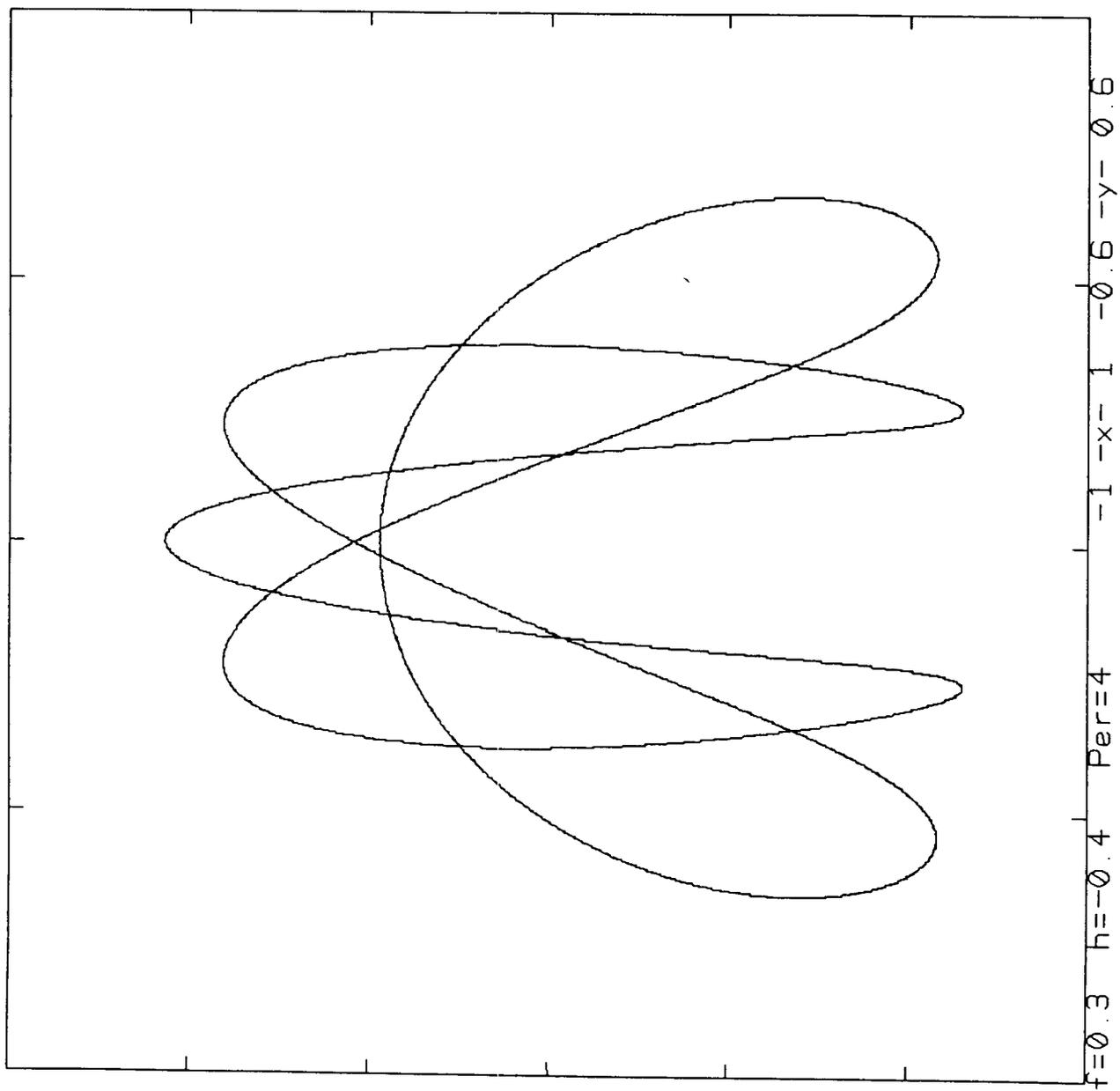
0



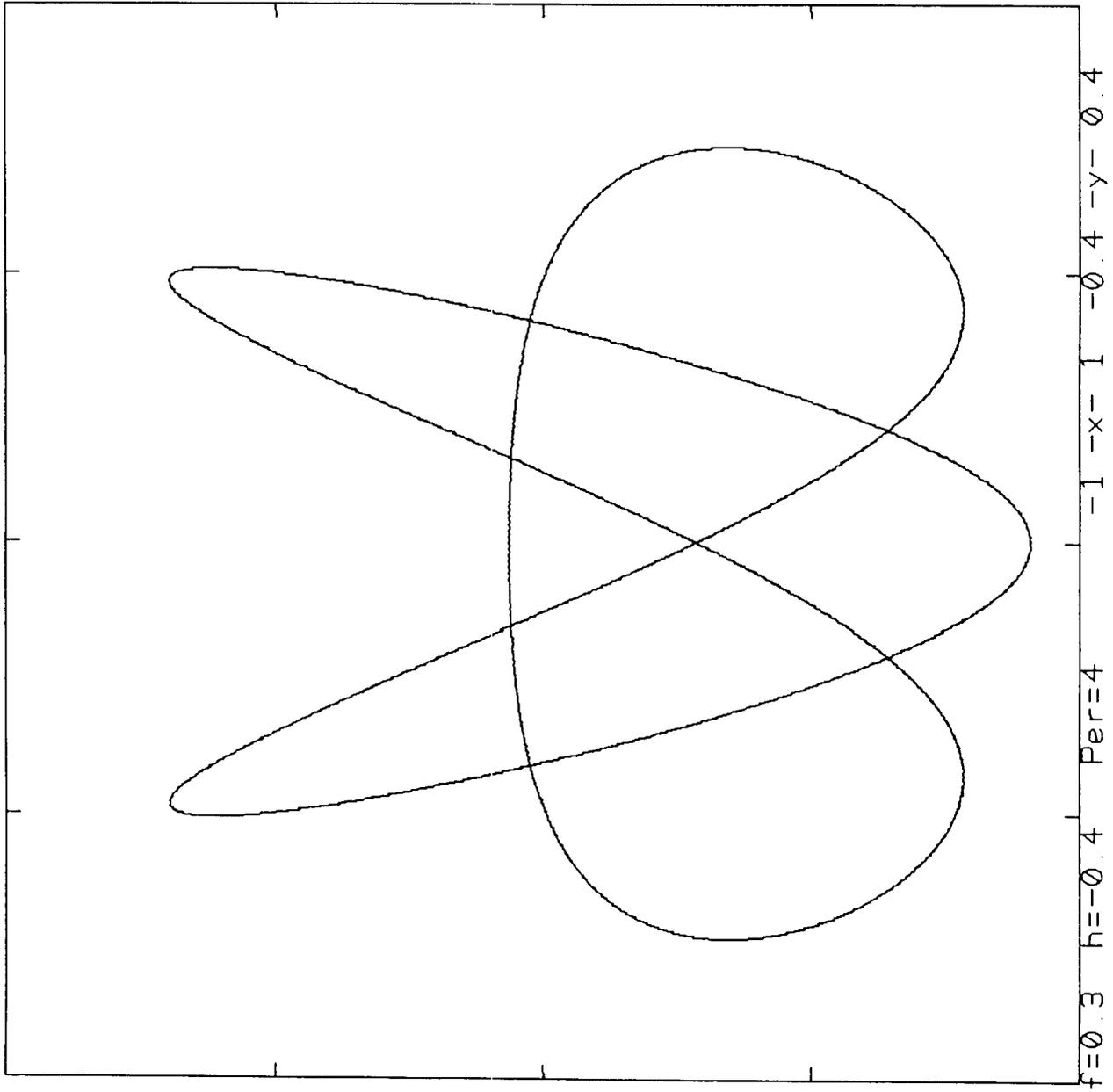


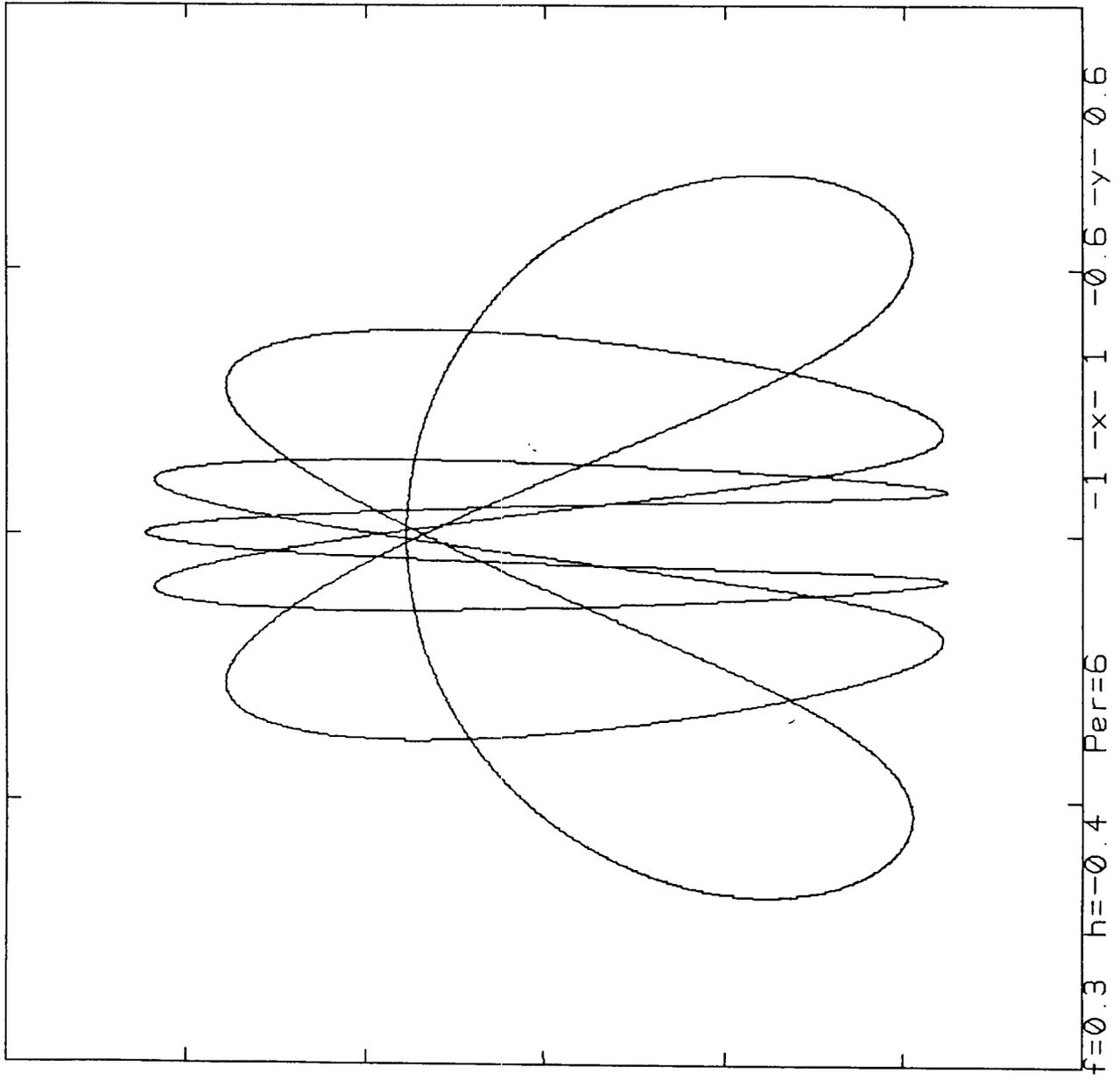


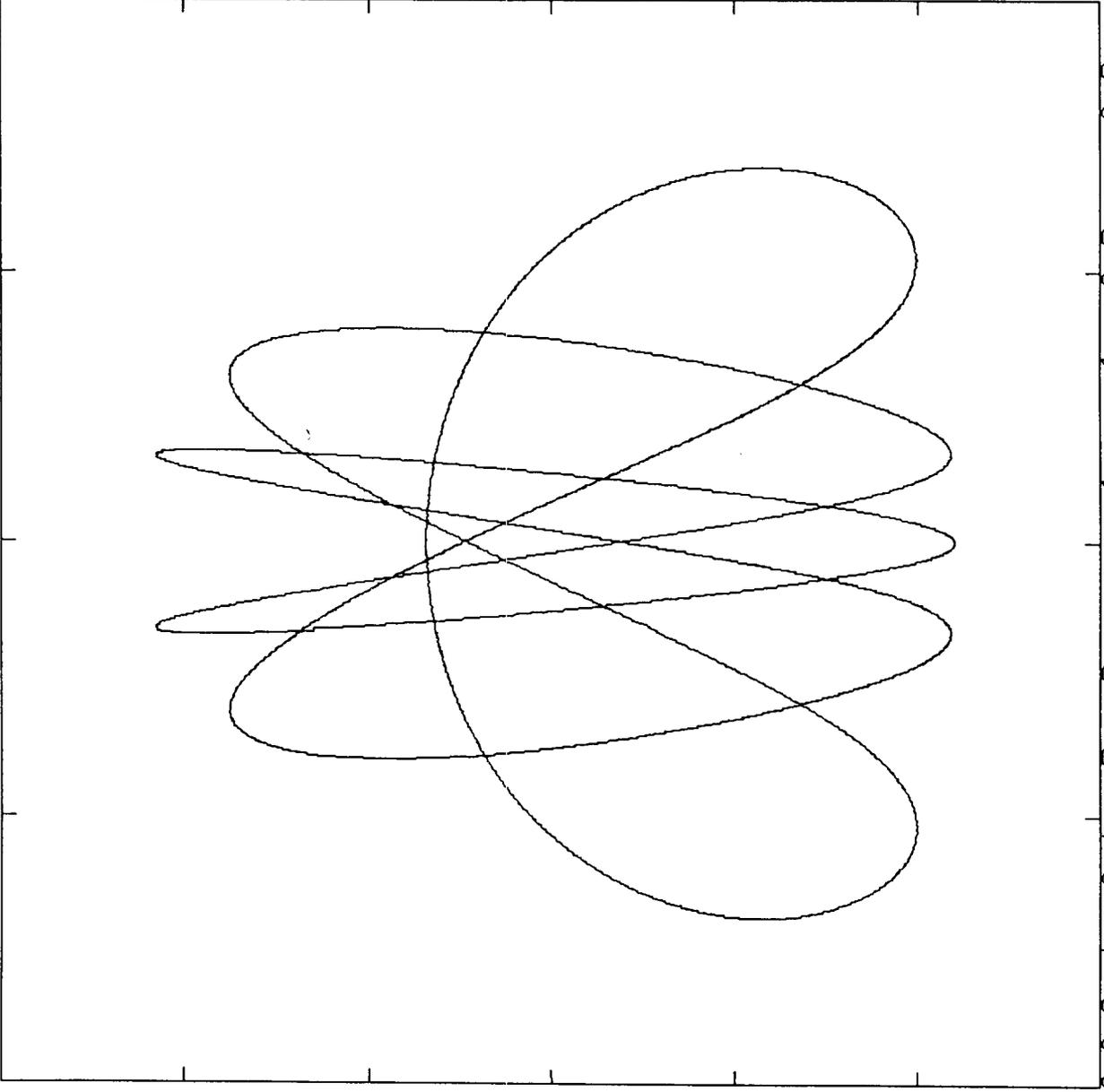
6

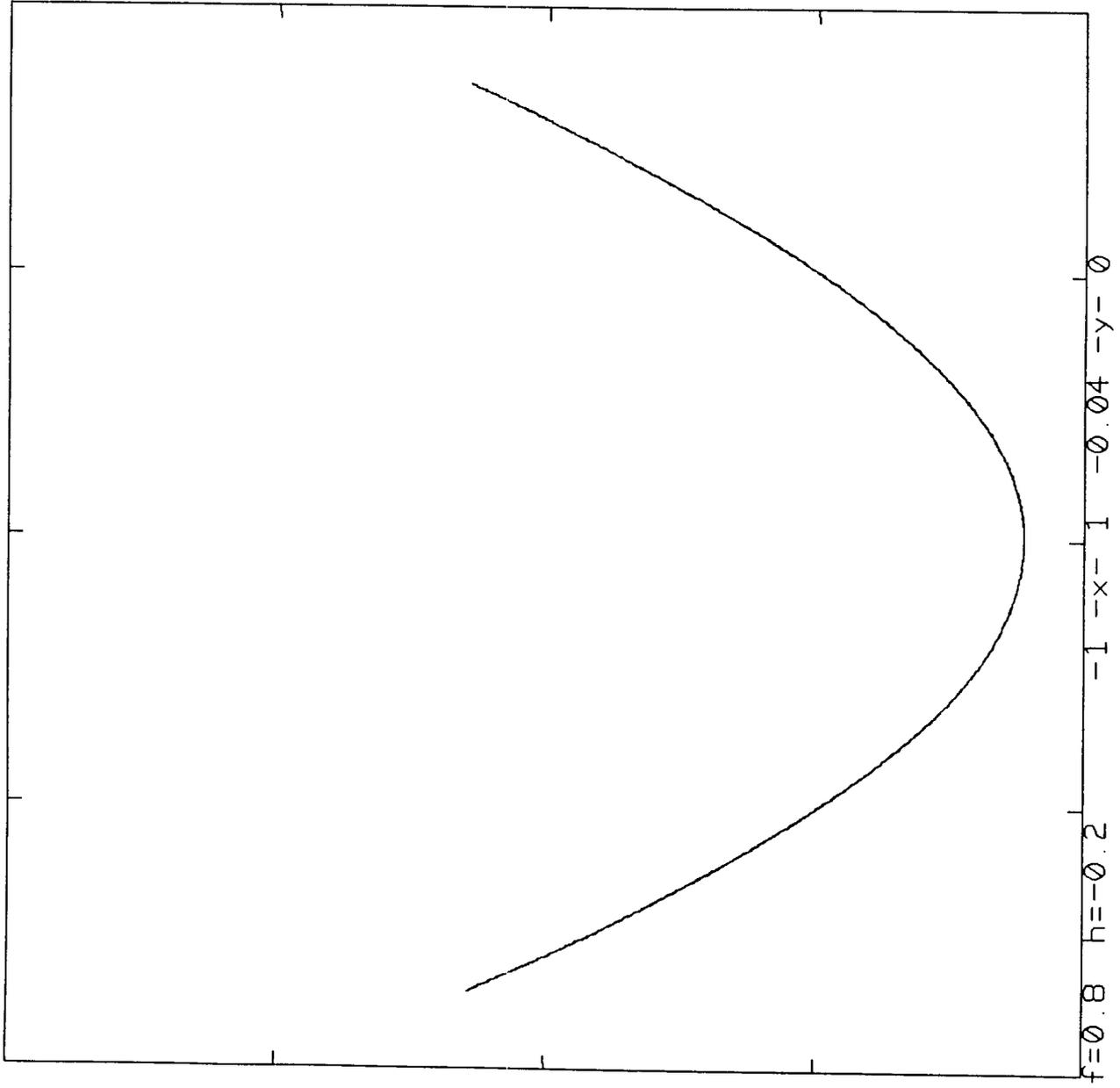


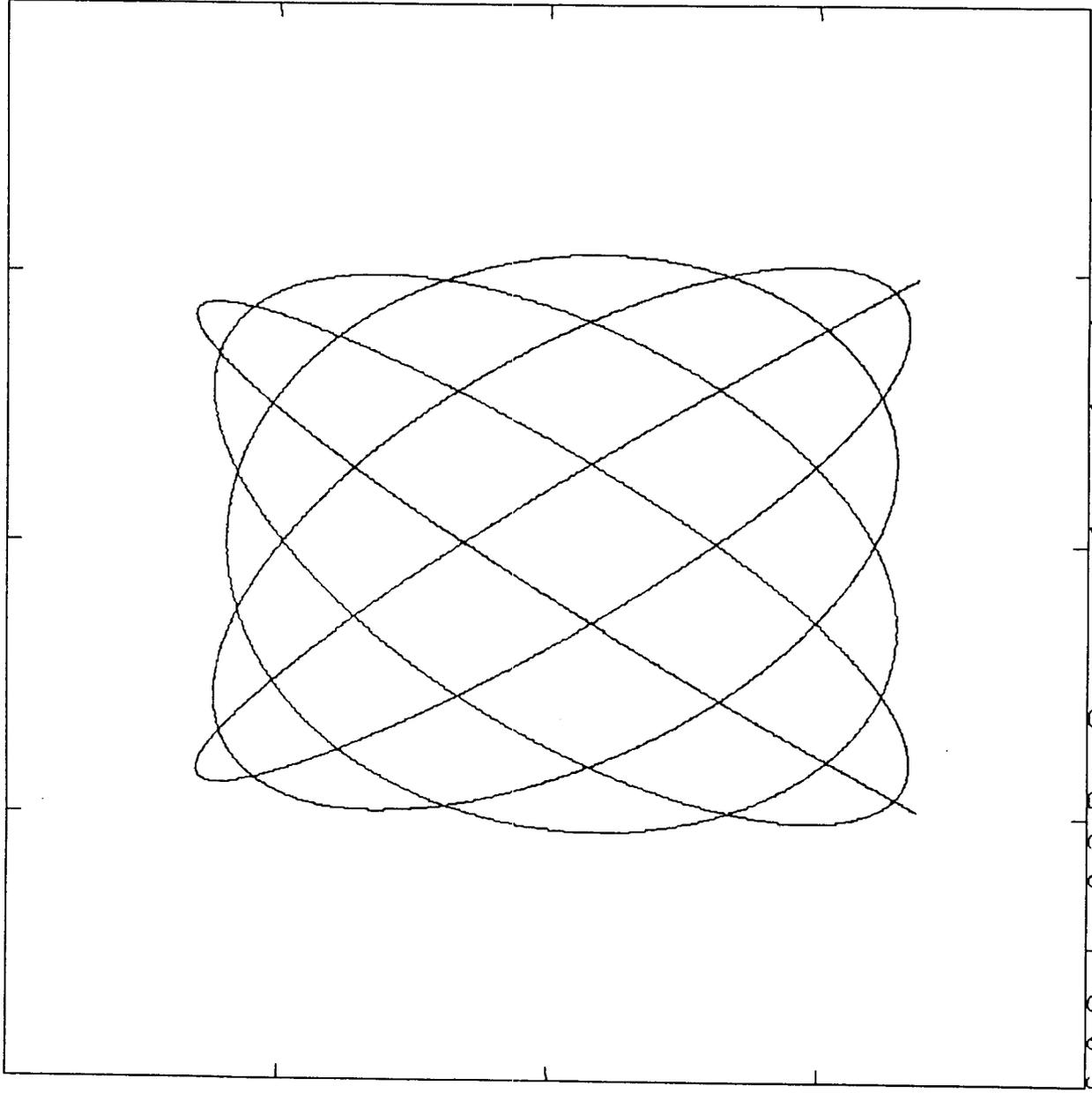
3



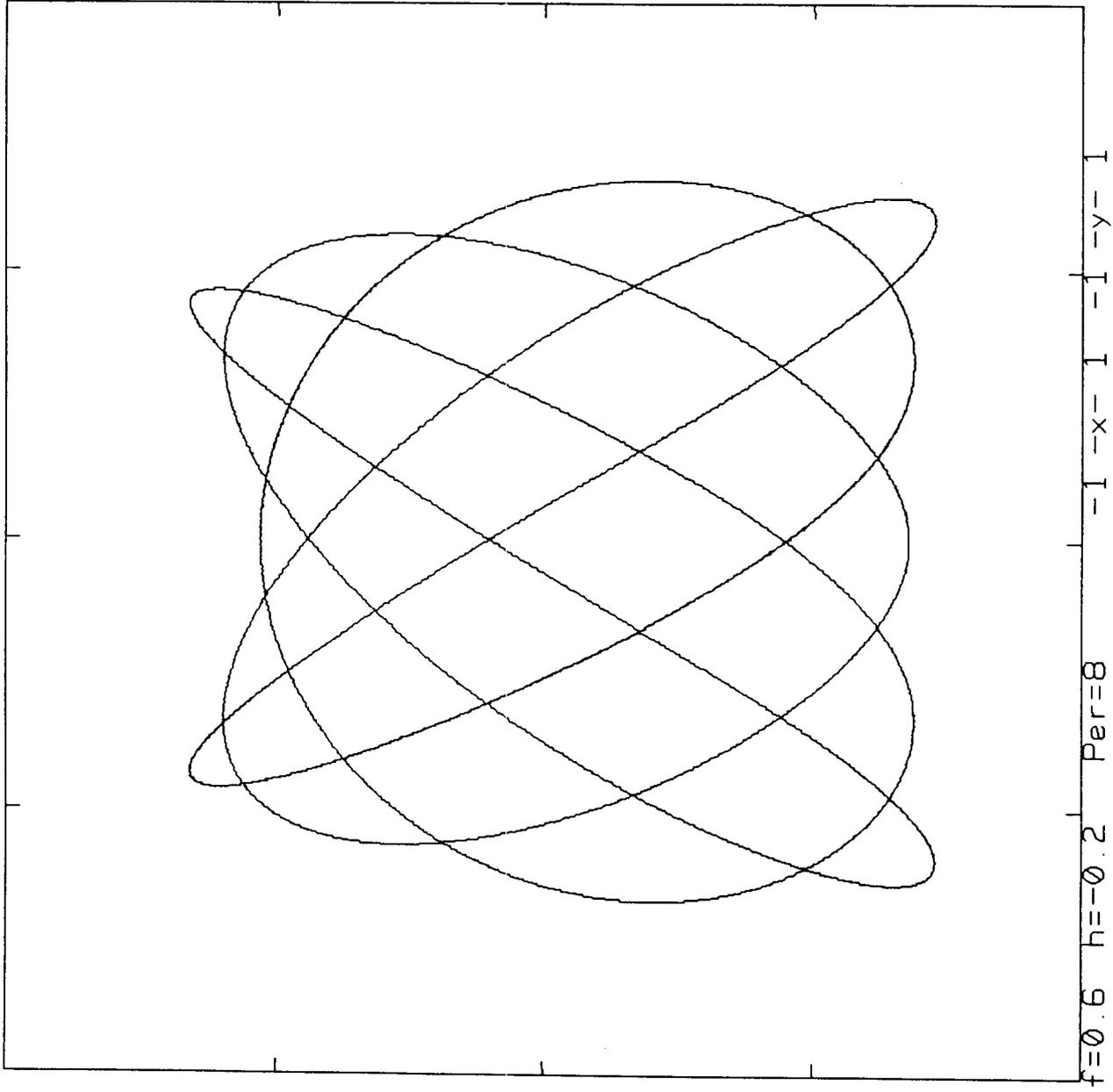


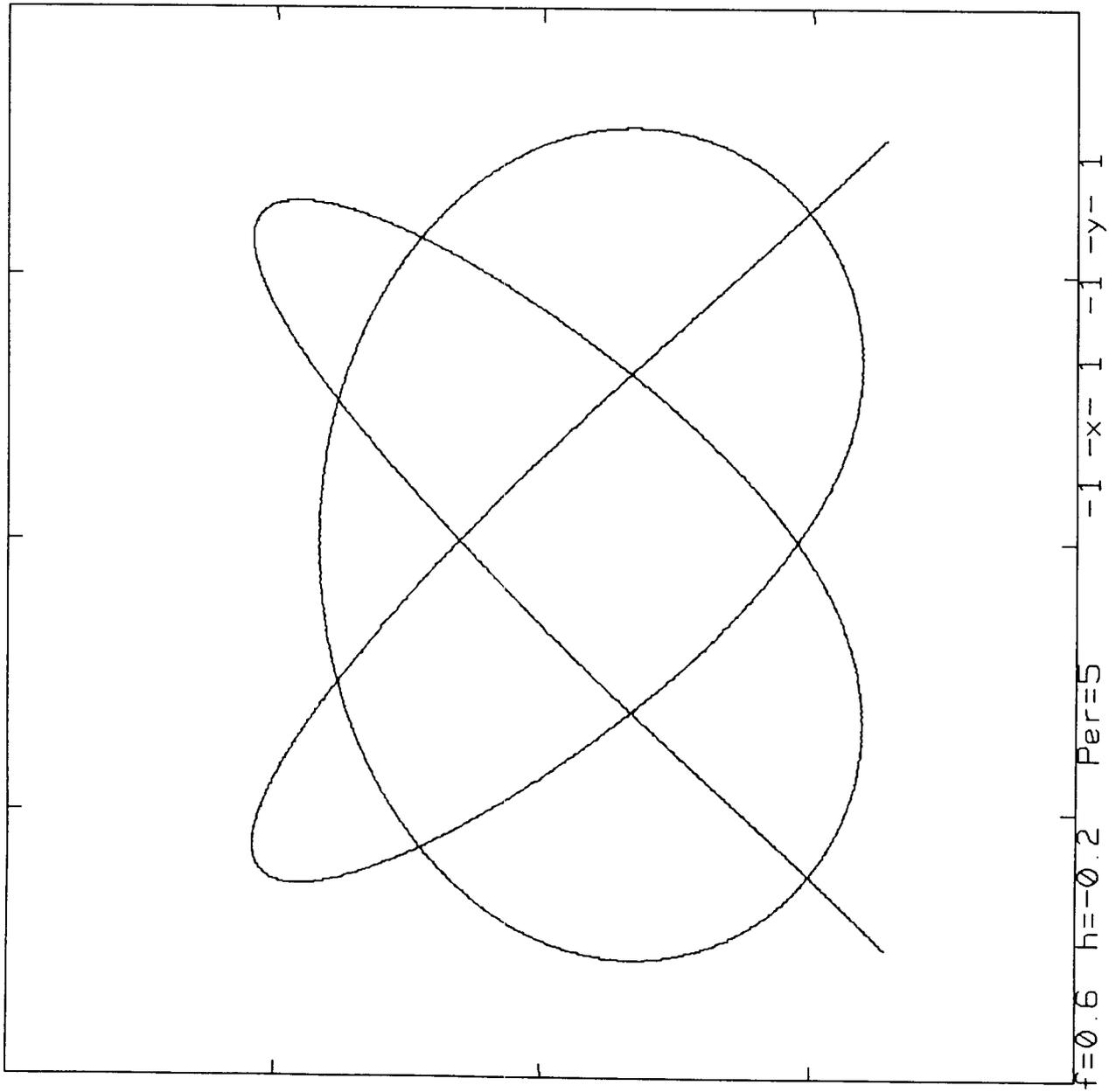






$f=0.8$   $h=-0.2$   $\text{Per}=9$   $-1$   $-x$   $-1$   $-1$   $-y$   $-1$





\$

