

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**COTAS SUPERIORES PARA LA ESTABILIDAD
DE LA PROBABILIDAD DE RUINA EN EL
MODELO CLÁSICO DE RIESGO**

Tesis que presenta:

Patricia Vázquez Ortega

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: **Dr. Evgueni Gordienko**

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Evgueni Gordienko

Secretario: Dr. Gabriel Núñez Antonio

Vocal: Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

México, D. F., a 26 de junio del 2015.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**COTAS SUPERIORES PARA LA ESTABILIDAD
DE LA PROBABILIDAD DE RUINA EN EL
MODELO CLÁSICO DE RIESGO**

Tesis que presenta:

Patricia Vázquez Ortega

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: **Dr. Evgueni Gordienko**

Jurado calificador:

Presidente: **Dr. Evgueni Gordienko**

Secretario: **Dr. Gabriel Núñez Antonio**

Vocal: **Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska**

México, D. F., a 26 de junio del 2015.



Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
1. Introducción, motivación y planteamiento del problema	1
2. Resultados conocidos sobre el problema planteado	7
3. Algunas métricas y sus propiedades	11
3.1. Métricas uniforme y de Kantorovich	11
3.2. Algunas métricas ponderadas y sus propiedades	12
4. Resultados obtenidos	19
4.1. Algunas notaciones y suposiciones	19
4.2. Caso de la métrica uniforme	20
4.3. Caso de la métrica uniforme ponderada	21
5. Ecuación integral para ψ y operadores correspondientes	23
5.1. Una ecuación para ψ y un operador relacionado	23
5.2. Propiedades de contracción de los operadores T y \tilde{T}	29
6. Desigualdad de la estabilidad de la probabilidad de ruina en términos de la métrica uniforme	31
7. Desigualdad de la estabilidad de la probabilidad de ruina en términos de la métrica uniforme ponderada	33
7.1. Motivación	33
7.2. Condiciones de existencia del coeficiente de ajuste	34
7.3. Desigualdad de Lundberg	37

7.4.	Propiedades de contracción de los operadores T y \tilde{T} con respecto a la métrica ponderada ρ_β .	39
7.5.	Una cota superior para $\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi})$	42
8.	Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo de riesgo a tiempo discreto	47
8.1.	Notaciones	47
8.2.	Una ecuación para la probabilidad de ruina ψ	49
8.3.	Propiedades contractivas del operador S con respecto a la métrica uniforme	50
8.4.	Una cota superior para $\rho(\psi, \tilde{\psi})$ en el modelo de riesgo a tiempo discreto	52
9.	Ejemplos y contraejemplos	55
9.1.	Un contraejemplo	55
9.2.	Ejemplo de aplicación de la desigualdad (6.1) cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución exponencial	58
9.3.	Ejemplo de aplicación de la desigualdad (6.1) cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución Gama	60
9.4.	Ejemplo de aplicación de la desigualdad (7.10)	61
	Conclusiones	65
	Bibliografía	67

Agradecimientos

Deseo hacer patente mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por su apoyo a través de la beca No. 283189 para estudios de posgrado en matemáticas.

Agradezco al Dr. Evgueni Gordienko, por su amable dedicación, interés y paciencia para guiarme en la realización del presente trabajo.

Deseo también extender mi agradecimiento a la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska y al Dr. Gabriel Núñez Antonio, por haber fungido como sinodales de esta tesis; agradezco sus aportaciones ya que éstas contribuyeron a la mejora de este trabajo.

Al Dr. Juan Ruiz de Chavez, por el apoyo brindado en diversas ocasiones durante mis estudios de maestría.

A mi madre y a mis hermanos. A Gil. A Leasly. Por su motivación y fiel apoyo en los momentos más difíciles.

Finalmente, agradezco la hospitalidad brindada en el Departamento de Matemáticas de la UAM-I para llevar a cabo mis estudios de maestría.

Resumen

En el presente trabajo se considera el problema de estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo (modelo Crámer-Ludberg) en la situación cuando la distribución F de los montos de las reclamaciones es desconocida y se cambia por una aproximación \tilde{F} . Dicha aproximación puede ser obtenida por ejemplo, mediante estimaciones estadísticas.

Dado un capital inicial $u \geq 0$, se consideran las probabilidades de ruina $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$ en un modelo que será llamado modelo real y su respectivo modelo aproximado, que se obtiene al cambiar F por \tilde{F} .

Aplicando técnicas de operadores contractivos y métodos de la teoría de métricas probabilísticas se obtienen cotas superiores para la estabilidad de la probabilidad de ruina del tipo:

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq MK(F, \tilde{F}),$$

donde M es una constante calcula en términos de los parámetros de los modelos.

Vale la pena mencionar que existen pocos resultados de este tipo en la literatura y que las cotas superiores para la estabilidad de la probabilidad de ruina obtenidas en este trabajo son resultados nuevos. También se ofrecen algunos ejemplos de aplicación de los resultados obtenidos que ilustran la exactitud de las estimaciones obtenidas.

Capítulo 1

Introducción, motivación y planteamiento del problema

En el presente trabajo se investiga la estabilidad (o robustez en otra terminología) de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo (o también llamado el modelo de Cramer-Ludberg):

$$X_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \quad \left(\sum_{j=1}^0 Y_j := 0 \right), \quad (1.1)$$

donde:

(definiremos como cero a la suma expresada entre paréntesis cuando no ocurra ningún evento Y_j .)

- u es una constante no negativa que representa el capital inicial de la compañía aseguradora.
- c es la prima acumulada (de todos los clientes) por unidad de tiempo; $c > 0$.
- N_t es el número de reclamaciones que llegan a la compañía en el intervalo $[0, t]$. Se supone que $N(t)$ es un *Proceso de Poisson* con parámetro $\lambda > 0$.
- Las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots son los tamaños sucesivos de las reclamaciones que por suposición, son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas no negativas, cuya función de distribución común estará denotada por $F(y)$, $y \geq 0$.

Además se supone que $N(t)$ es independiente de las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots (ver por ejemplo Asmussen y Albrecher, (2010), Kass, *et al.* (2001), Rincón (2012) y Rolski, *et al.* (1999)).

La probabilidad de ruina $\psi(u)$ con capital inicial $u \geq 0$ para el modelo (1.1) se define como

$$\psi(u) = P(\tau < \infty | X_0 = u), \quad (1.2)$$

donde $\tau := \inf\{t \geq 0 | X_t < 0\}$.

Hipótesis 1. Supongamos que existe el momento finito $\mu := EY_1$.

Es bien sabido (vea por ejemplo Rincón (2012) y Rolski, *et al.* (1999)) que bajo las condiciones

$$F(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\lambda\mu/c < 1 \quad (1.4)$$

(donde la segunda desigualdad es conocida como la condición de ganancia neta) la función $\psi(u)$, para $u \geq 0$ es la única solución de la siguiente ecuación integral:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^u \psi(u-y) \bar{F}(y) dy \right), \quad (1.5)$$

en donde $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$.

(La demostración de esta ecuación está dada por ejemplo en Rolski, *et al.* (1999) y se presenta en el Capítulo 5 de este trabajo.)

La ecuación (1.5) puede ser resuelta (desde el punto de vista analítico) solamente en casos particulares (por ejemplo, cuando la distribución de los tamaños de las reclamaciones es exponencial o es una mezcla de exponenciales (ver Asmussen y Albrecher, (2010), Gerber, (1979), Rincón (2012), Rolski, *et al.* (1999)).

Por otro lado la estimación de la probabilidad de ruina $\psi(u)$ es importante para muchas situaciones prácticas (por ejemplo, en casos de reaseguro). Por esta razón desde el siglo pasado (a partir de los orígenes del modelo (1.1) en el año 1903) han sido desarrollados una gran cantidad de métodos de cálculos aproximados (analíticos) de las probabilidades de ruina (ver por

ejemplo Asmussen y Albrecher, (2010), Rincón (2012), Rolski, *et al.* (1999)).

A pesar de que el modelo es bastante viejo, hasta el momento siguen apareciendo trabajos de investigación sobre la aproximación de la probabilidad de ruina en el modelo (1.1) y sus extensiones.

En los modelos de aproximación conocidos (por ejemplo, la aproximación De Vylder o la aproximación de Beekman-Bowers) se aproxima ψ usando métodos de momentos, pero no se conoce la exactitud de la aproximación. En este trabajo demostramos cotas superiores para investigar la exactitud de dicha aproximación.

En el proceso de tratar de estimar la probabilidad de ruina ψ en el modelo (1.1) (que a partir de ahora vamos a llamar “modelo real”), el investigador tiene que trabajar con un modelo aproximado que resulta al cambiar la función de distribución desconocida F por su aproximación \tilde{F} dada (obtenida mediante estimaciones estadísticas o simplificaciones teóricas).

La versión aproximada del modelo está dada por la ecuación siguiente:

$$\tilde{X}_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} \tilde{Y}_j, \quad \left(\sum_{j=1}^0 \tilde{Y}_j := 0 \right), \quad (1.6)$$

donde u, c y N_t son como en (1.1) y $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución \tilde{F} . También se supone que la $\tilde{\mu} := E\tilde{Y}_1$ es finita.

Nótese que la única diferencia entre los modelos (1.1) y (1.6) es que las funciones de distribución F y \tilde{F} de las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots y $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ respectivamente, son diferentes.

Supongamos que el investigador puede de alguna manera calcular (o estimar) la probabilidad de ruina en el modelo aproximado (1.6):

$$\tilde{\psi}(u) = P(\tilde{\tau} < \infty | \tilde{X}_0 = u), \quad (1.7)$$

donde $\tilde{\tau} := \inf\{t \geq 0 | \tilde{X}_t < 0\}$.

Un camino podría ser por ejemplo usar la versión correspondiente a la ecuación integral (1.5) o bien, usando algún método de aproximación.

Entonces, una pregunta natural es, ¿cuándo es posible usar $\tilde{\psi}$ como una aproximación razonable para la probabilidad de ruina de interés ψ ?

En términos más precisos, surge el problema de estimación de la estabilidad (o robustez) de la probabilidad de ruina.

Si sabemos que nuestra aproximación \tilde{F} de F es “bastante buena”, es decir, si para una métrica K apropiada (en el espacio de distribuciones, ver el Capítulo 3 en este texto), la distancia $K(F, \tilde{F})$ es “pequeña”, ¿podemos entonces afirmar que $\tilde{\psi}$ es (en cierto sentido) bastante cercana a ψ ?

El planteamiento de este problema es más útil en términos cualitativos. Sea $\rho(\psi, \tilde{\psi})$ alguna métrica dada entre las funciones $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$ de capital inicial $u \geq 0$ (para ver la definición de tales métricas, consultar el Capítulo 3).

Entonces el problema de estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina se plantea de la siguiente manera.

Bajo ciertas condiciones se desean obtener desigualdades del siguiente tipo:

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq MK(F, \tilde{F}), \quad (1.8)$$

donde M es una constante calculada explícitamente en términos de algunos parámetros de los modelos (1.1) y (1.6).

Desigualdades como (1.8) proporcionan una cota superior para $\rho(\psi, \tilde{\psi})$, es decir, si sabemos que $K(F, \tilde{F}) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, entonces se obtiene que $\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq M\varepsilon$.

Por ejemplo, cuando $\tilde{F} = \tilde{F}_n$ es una estimación estadística de la función de distribución desconocida F (obtenida a partir de n observaciones de variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_n independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución F), a pesar de que F es desconocida se conocen en muchos casos, cotas para la esperanza del tipo

$$EK(F, \tilde{F}_n) \leq \phi(n) \downarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, para una cierta función ϕ .

Un caso particular es cuando $\tilde{F}_n = \hat{F}_n$ es la función de distribución empírica obtenida a partir de las observaciones Y_1, Y_2, \dots, Y_n . En este caso, se conocen cotas superiores para $EK(F, \hat{F}_n)$, por ejemplo cuando K es la métrica de

Kantorovich que usaremos en el Capítulo 3 (ver por ejemplo Rachev, (1991)).

Otra situación típica e importante es cuando la función de distribución F es conocida, pero la ecuación (1.5) resulta demasiado difícil de resolver. En este caso, F podría ser aproximada por la función de distribución \tilde{F} para la cual la probabilidad de ruina $\tilde{\psi}$ se calcula más fácil. Por ejemplo, \tilde{F} podría ser una mezcla de funciones de distribuciones Gamma.

Existen resultados precisos para calcular $\tilde{\psi}$ cuando la función de distribución \tilde{F} es (vea por ejemplo Asmussen y Albrecher (2010) y Yuanjiang, *et al.* (2003)).

En los casos mencionados, las desigualdades como (1.8) podrían ofrecer la precisión de la aproximación de la probabilidad de ruina desconocida ψ a partir de $\tilde{\psi}$.

El objetivo de este trabajo es la demostración de nuevas y simples desigualdades de estabilidad como (1.8) en los casos cuando ρ es la métrica uniforme o uniforme ponderada (vea Capítulo 3), y K es la métrica de Kantorovich o Kantorovich ponderada. El lector puede encontrar las definiciones y propiedades de estas métricas por ejemplo en Rachev, (1991). en este trabajo, también se dan las definiciones necesarias en las secciones 3.1 y 3.2.

Hasta donde sabemos, en la literatura no se encuentran las desigualdades obtenidas en el presente trabajo. Bajo algunas condiciones amplias y naturales resultan desigualdades sencillas y (como se muestra en el Capítulo 9) son bastante precisas. El método de operadores contractivos desarrollado en este trabajo para el estudio de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo es muy natural y simple y, hasta donde sabemos, no se encuentra en la literatura.

Para demostrar las desigualdades de estabilidad, usamos propiedades conocidas (que se verán más adelante) de algunas métricas probabilísticas y un método de operadores contractivos. Estos operadores están relacionados con la ecuación integral (1.5) para la probabilidad de ruina ψ .

Se ofrece también un contraejemplo que justifica el uso de la métrica de Kantorovich en (1.8) y algunos ejemplos numéricos con distribuciones particulares F y \tilde{F} que ilustran nuestros resultados.

Capítulo 2

Resultados conocidos sobre el problema planteado

Hasta donde se sabe, hay pocos trabajos en donde se obtienen desigualdades de estabilidad de la probabilidad de ruina. En los siguientes artículos: Enikeeva, *et al.* (2001), Enikeeva, *et al.* (2001), Bernouaret y Aissani, (2010) y Rusaityte, (2001), está desarrollado un método bastante general que permite estimar la estabilidad de la probabilidad de ruina, no solamente en modelos clásicos como (1.1), sino mucho más generales (por ejemplo el modelo de riesgo Sparre Andersen, el cual es una generalización del modelo clásico (1.1) (vea Asmussen y Albrecher, (2010), Cai y Dickson, (2003)). Este método está basado en la teoría de estimación de la estabilidad de probabilidades invariantes de procesos de Markov generales a tiempo discreto (vea Kastashov, (1986), Meyn y Tweedie, (1993)), Rusaityte, (2001).

Un resultado típico en esta dirección es el siguiente (ver Enikeeva, *et al.* (2001)). Bajo ciertas condiciones de ergodicidad, está demostrado para el modelo Sparre Andersen que si

$$\varsigma(a, \tilde{a}) \leq (1 - \varrho)^2, \quad (2.1)$$

entonces

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\varsigma(a, \tilde{a})}{(1 - \varrho)[(1 - \varrho)^2 - \varsigma(a, \tilde{a})]}, \quad (2.2)$$

donde $\nu(\psi, \tilde{\psi}) := \int_0^\infty e^{\varepsilon u} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| du$ (para algún $\varepsilon > 0$ fijo); ϱ es un

parámetro responsable de la ergodicidad del proceso; $\varsigma(a, \tilde{a})$ es cierta distancia entre conjuntos de características de los modelos, incluso las funciones de distribución del tamaño de las reclamaciones y la función de distribución de los intervalos de llegadas de reclamaciones. Las distancias entre funciones de distribuciones se miden en términos de métricas de Kantorovich y Kantorovich ponderada. En este caso, el conjunto de las características a y \tilde{a} describen al “modelo real” y al “modelo aproximado”, respectivamente.

En Enikeeva, *et al.* (2001), para obtener la desigualdad (2.2) está desarrollado un método técnicamente complicado. La esencia de este método es expresar (por un camino no trivial) las probabilidades de ruina ψ y $\tilde{\psi}$ en términos de probabilidades estacionarias π y $\tilde{\pi}$ de ciertos procesos de Markov a tiempo discreto en un espacio \mathcal{X} , con probabilidades de transición p y \tilde{p} respectivamente.

Se supone que existe una función $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y una medida probabilística G en \mathcal{X} tales que la norma (operadora) del kernel $P(x|B) - h(x)G(B) < \varrho < 1$ (a este término a veces se le llama “coeficiente de ergodicidad”).

Luego se usa un resultado de Kartashov (1986) que afirma que si

$$\Delta_p := \sup_{x \in \mathcal{X}} \|P(x|\cdot) - \tilde{P}(x|\cdot)\|_w \leq (1 - \varrho)^2,$$

entonces

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_w \leq C\Delta_p, \tag{2.3}$$

donde $\|\cdot\|_w$ es la norma de variación total ponderada. Luego, $\|\cdot\|_w$ se expresa en términos de los parámetros de los modelos de riesgo (real y aproximado) y finalmente, (2.3) permite obtener (2.2).

Los resultados de nuestro trabajo (obtenidos para el modelo clásico de riesgo) poseen las siguientes ventajas (comparando con (2.2)):

1. Las herramientas teóricas usadas son mucho más sencillas.
2. A diferencia de (2.2), el carácter de nuestras desigualdades no es local. En (2.2) la desigualdad se cumple localmente, solo para modelos que son “suficientemente cercanos” (condición (2.1)).
3. En la parte derecha de nuestras desigualdades ($MK(F, \tilde{F})$) hay linealidad con respecto a las métricas de Kantorovich y de Kantorovich ponderada.

Algunas desigualdades del tipo (1.8) están demostradas en Gordienko (2004). En particular (usando un método completamente diferente al presentado en este trabajo) se ofrece la siguiente estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina para el modelo clásico de riesgo:

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq A \max \left\{ \bar{\mu}(Y, \tilde{Y}), \frac{1}{6} K_3(Y, \tilde{Y}) \right\}, \quad (2.4)$$

donde $Y = Y_1$ y $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1$ y ρ es la métrica uniforme (ver el Capítulo 3), A es una constante determinada en términos de algunos parámetros de los modelos y

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(Y, \tilde{Y}) &= \sup_{t>0} \left| \int_0^t [F_Y(t) - F_{\tilde{Y}}(t)] dt \right| \\ K_3(Y, \tilde{Y}) &= 3 \int_0^\infty t^2 |F_Y(t) - F_{\tilde{Y}}(t)| dt. \end{aligned}$$

Las últimas métricas, $\bar{\mu}$ y K_3 están relacionadas con convergencia débil (más convergencia de algunos momentos). En particular la desigualdad (2.4) opta por estimar la estabilidad en el caso de aproximar por distribuciones empíricas. Sin embargo en Gordienko, (2004), la desigualdad (2.4) está demostrada bajo la condición de igualdad de los dos primeros momentos de Y y \tilde{Y} . Para aplicaciones prácticas tales condiciones (como regla) son demasiado restrictivas.

La motivación de esta tesis es tomar en cuenta las ventajas de la estructura especial del modelo clásico de riesgo (propiedades de contractividad de operadores correspondientes) para obtener desigualdades de estabilidad de carácter global usando métricas “débiles” del tipo de Kantorovich (o Kantorovich ponderada). La convergencia en métrica de Kantorovich corresponde a convergencia débil más convergencia de los primeros momentos absolutos (ver Rachev, (1991)).

Hay otro conjunto de resultados relacionados con nuestro trabajo que pueden encontrarse en Asmussen y Albrecher (2010), Chan y Yang (2005), Loisel y Privault (2009) y en LeQuoc y Vázquez-Abad (2000).

A rasgos generales, en estos trabajos se consideran clases particulares de funciones de distribución F , por ejemplo, el caso cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución exponencial o Gama. Para estos y algunos

casos más, se estiman las derivadas (o gradientes) de la probabilidad de ruina con respecto a algunos parámetros involucrados en la definición de F y el modelo (1.1). Las derivadas $\partial\psi/\partial c$ y $\partial\psi/\partial\lambda$ son ejemplos de algunas derivadas que se estiman en Asmussen y Albrecher (2010) para casos particulares. Estas derivadas permiten evaluar los efectos de un cambio “pequeño” en la entrada de primas o bien, un cambio en el parámetro del proceso de Poisson. Estas derivadas permiten estimar la estabilidad de ψ con respecto a dichos parámetros para modelos particulares, no se incluye el caso de perturbaciones generales de la función de distribución F .

Capítulo 3

Algunas métricas y sus propiedades

3.1. Métricas uniforme y de Kantorovich

El propósito de este Capítulo es presentar las métricas probabilísticas que están involucradas en nuestras desigualdades de estabilidad que se introdujeron en secciones anteriores.

Definición 3.1. *Definimos el espacio de funciones \mathfrak{X} como:*

$$\mathfrak{X} := \{x \equiv x(u), u \geq 0 : x(u) \in [0, 1]\}. \quad (3.1)$$

Definición 3.2 (Métrica uniforme). *La métrica ρ en \mathfrak{X} es llamada la métrica uniforme y se define como:*

$$\rho(x, y) = \sup_{u \geq 0} |x(u) - y(u)|, \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (3.2)$$

También vamos a considerar un espacio de funciones de distribución en donde estará definida la métrica de Kantorovich que a continuación se define.

Notación 1. *Sea \mathfrak{F} el conjunto de funciones de distribución de todas las variables aleatorias no negativas.*

Definición 3.3 (Métrica de Kantorovich). *Para cada $F, \tilde{F} \in \mathfrak{F}$, la distancia de Kantorovich $K(F, \tilde{F})$ se define como*

$$K(F, \tilde{F}) := \int_0^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt. \quad (3.3)$$

Esta función K define una métrica en el espacio de funciones de distribución con soporte en $[0, \infty]$.

Para situaciones prácticas, no tiene mucho sentido considerar el caso cuando esta métrica toma valores infinitos.

Proposición 3.4. *Sean F y \tilde{F} las funciones de distribución del tamaño de las reclamaciones Y en el modelo real y \tilde{Y} en el modelo aproximado respectivamente. Supongamos que $EY < \infty$ y que $E\tilde{Y} < \infty$. Entonces $K(F, \tilde{F})$ es finita.*

Demostración. Según (3.3) tenemos que

$$\begin{aligned} K(F, \tilde{F}) &= \int_0^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \\ &= \int_0^\infty \left| [1 - F(t)] - [1 - \tilde{F}(t)] \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty [1 - F(t)] dt + \int_0^\infty [1 - \tilde{F}(t)] dt \\ &= EY + E\tilde{Y} < \infty. \end{aligned}$$

□

Presentamos el siguiente resultado sin demostración (ver Rachev (1991)).

Proposición 3.5. *Sea K la métrica de Kantorovich definida en (3.3). Entonces $K(F, F_n) \rightarrow 0$ si y solo si $F_n \Rightarrow F$ (converge débilmente) y $E|Y_n| \rightarrow E|Y|$, donde F_n y F son las funciones de distribución de las variables aleatorias Y_n y Y respectivamente.*

3.2. Algunas métricas ponderadas y sus propiedades

En esta sección se introducen las métricas uniformes ponderadas que utilizaremos en este trabajo para la obtención de cotas superiores para la estabilidad de la probabilidad de ruina como (1.8).

Definición 3.6 (Métrica uniforme ponderada). *Sea $\beta > 0$ un número dado. La métrica ρ_β en \mathfrak{X} es llamada la métrica uniforme ponderada y está definida como:*

$$\rho_\beta(x, y) := \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |x(u) - y(u)|, \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (3.4)$$

Proposición 3.7. ρ_β es métrica en \mathfrak{X} (con valores en $[0, \infty]$).

Demostración. Sean x, y y $z \in \mathfrak{X}$. De acuerdo a (3.4) tenemos que

- $\rho_\beta(x, y) = \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |x(u) - y(u)| = \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |y(u) - x(u)| = \rho_\beta(y, x)$.
- Es evidente que $\rho \geq 0$ y por otro lado $\rho_\beta(x, y) = \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |x(u) - y(u)| = 0$ si y solo si $x = y$.
- Para probar la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned}
 \rho_\beta(x, y) &= \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |x(u) - y(u)| \\
 &= \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |[x(u) - z(u)] + [z(u) - y(u)]| \\
 &\leq \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} [|x(u) - z(u)| + |z(u) - y(u)|] \\
 &\leq \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |x(u) - z(u)| + \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |z(u) - y(u)| \quad (3.5) \\
 &= \rho_\beta(x, z) + \rho_\beta(z, y).
 \end{aligned}$$

En (3.5) se usa el hecho de que $\sup_u (a_u + b_u) \leq \sup_u a_u + \sup_u b_u$.
Por lo tanto ρ_β es una métrica en \mathfrak{X} . \square

También resulta de mucha utilidad considerar la métrica de Kantorovich ponderada.

Definición 3.8 (Métrica de Kantorovich ponderada). Sea $b > 0$ un número dado. La métrica de Kantorovich ponderada K_b (con valores en $[0, \infty]$) en el espacio de funciones de distribución \mathfrak{F} está definida como

$$K_b(F, \tilde{F}) := \int_0^\infty e^{bt} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt. \quad (3.6)$$

Proposición 3.9. K_b es una métrica.

Demostración. Sean $F, \tilde{F}, G \in \mathfrak{F}$, entonces

- $K_b \geq 0$ por definición. Luego $K_b(F, \tilde{F}) = \int_0^\infty e^{bt} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt = 0$ si y solo si $F(x) = \tilde{F}(x)$ casi seguramente, con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}_+ .

- $K_b(F, \tilde{F}) = \int_0^\infty e^{bt} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt = \int_0^\infty e^{bt} |\tilde{F}(t) - F(t)| dt = K_b(\tilde{F}, F)$.
- La desigualdad del triángulo se cumple, pues

$$\begin{aligned} K_b(F, \tilde{F}) &= \int_0^\infty e^{bt} |F(t) - G(t) + G(t) - \tilde{F}(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{bt} |F(t) - G(t)| dt + \int_0^\infty e^{bt} |G(t) - \tilde{F}(t)| dt \\ &= K_b(F, G) + K_b(G, \tilde{F}). \end{aligned}$$

Por lo tanto K_b es una métrica. □

La desigualdad (4.7) en el corolario 4.6, contiene la distancia $K_{\tilde{R}}(F, \tilde{F})$ en su parte derecha. Para obtener en (4.7) una cota no trivial, hay que justificar la finitez de la distancia de Kantorovich ponderada antes mencionada. Para este propósito sirve la siguiente proposición.

Proposición 3.10. Sean $F, \tilde{F} \in \mathfrak{F}$. Supongamos que $Ee^{bY} < \infty$ y $Ee^{b\tilde{Y}} < \infty$, entonces $K_b(F, \tilde{F})$ es finita.

Demostración.

$$\begin{aligned} K_b(F, \tilde{F}) &= \int_0^\infty e^{bt} |(1 - F(t)) - (1 - \tilde{F}(t))| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{bt} (1 - F(t)) dt + \int_0^\infty e^{bt} (1 - \tilde{F}(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para el primer sumando en la parte derecha usamos el método de integración por partes, así obtenemos que:

$$\frac{1}{b} \int_0^\infty (1 - F(t)) d(e^{bt}) = \frac{1}{b} e^{bt} (1 - F(t)) \Big|_0^\infty + \frac{1}{b} \int_0^\infty e^{bt} dF(t), \quad (3.8)$$

Ahora estudiamos el primer sumando del lado derecho de (3.8). Observamos que

$$Ee^{bY} = E(e^{bY} I_{\{Y > y\}}) + E(e^{bY} I_{\{Y \leq y\}})$$

Luego, por teorema de la convergencia monótona $E(e^{bY} I_{\{Y \leq y\}}) \rightarrow Ee^{bY}$ cuando $y \rightarrow \infty$, ya que $I_{\{Y \leq y\}} \rightarrow 1$ cuando $y \rightarrow \infty$.

Por otra parte,

$$E(e^{bY} I_{\{Y>y\}}) \geq E(e^{by} I_{\{Y>y\}}) = e^{by} E(I_{\{Y>y\}}) = e^{by} P(Y > y) = e^{by}(1 - F(y)).$$

Por lo tanto tenemos que

$$e^{by}(1 - F(y)) \longrightarrow 0 \text{ cuando } y \longrightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Entonces por (3.9) tenemos en (3.8) que

$$\int_0^\infty e^{bt}(1 - F(t))dt = \frac{1}{b} \left(\int_0^\infty e^{bt} dF(t) - 1 \right) = \frac{1}{b}(Ee^{bY} - 1) < \infty,$$

por hipótesis.

Análogamente se obtiene que

$$\int_0^\infty e^{bt}(1 - \tilde{F}(t))dt = \frac{1}{b} \left(\int_0^\infty e^{bt} d\tilde{F}(t) - 1 \right) = \frac{1}{b}(Ee^{b\tilde{Y}} - 1) < \infty.$$

Con estas dos últimas desigualdades logramos finalmente mostrar que el lado derecho de (3.7) es también finito, como se quería. \square

A continuación formulamos la siguiente proposición relacionada con la métrica de Kantorovich ponderada.

Proposición 3.11. *Sea K_b la métrica de Kantorovich ponderada definida en (3.6). Supongamos que $Ee^{bY} < \infty$ y que $Ee^{bY_n} < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces $K_b(F_n, F) \longrightarrow 0$ si y sólo si $F_n \Longrightarrow F$ y $Ee^{bY_n} \longrightarrow Ee^{bY}$, donde F_n y F son las funciones de distribución de las variables aleatorias Y_n y Y respectivamente.*

Para demostrar la proposición anterior, vamos a formular y demostrar primero el siguiente lema.

Lema 3.12. *Sea $Y \geq 0$ y $F_Y(0) = 0$. Si $Ee^{bY} < \infty$, entonces*

$$Ee^{bY} = 1 + b \int_0^\infty e^{by}[1 - F_Y(y)]dy. \quad (3.10)$$

Demostración. Primero observemos que,

$$\begin{aligned} b \int_0^{\infty} e^{by}[1 - F_Y(y)]dy &= b \int_0^{\infty} e^{by}P(Y > y)dy \\ &= b \int_0^{\infty} e^{by} \int_{\Omega} I_{\{Y(\omega) > y\}}(\omega)dP(\omega)dy, \end{aligned}$$

y por el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} &= b \int_{\Omega} dP(\omega) \int_0^{\infty} e^{by} I_{\{Y(\omega) > y\}} dy = \int_{\Omega} dP(\omega) \int_0^{Y(\omega)} e^{by} d(by) \\ &= \int_{\Omega} dP(\omega)[e^{bY(\omega)} - 1] = Ee^{bY} - 1. \end{aligned}$$

□

Demostración. (De la Proposición 3.11.)

(i) Supongamos que $Y_n \Rightarrow Y$ y que $Ee^{bY_n} \rightarrow Ee^{bY}$. Luego, para cada $c > 0$,

$$\begin{aligned} K_b(Y_n, Y) &= \int_0^{\infty} e^{by}|F_{Y_n}(y) - F(y)|dy \\ &\leq \int_0^c e^{by}|F_{Y_n}(y) - F(y)|dy + \int_c^{\infty} e^{by}[1 - F_{Y_n}(y)] + \\ &\quad \int_c^{\infty} e^{by}[1 - F(y)]dy \\ &=: I_{1,n} + I_{2,n} + I. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Usando (3.10) elegimos c tal que $I < \varepsilon$. Puesto que $F_{Y_n} \rightarrow F_Y$ casi donde quiera (o bien, fuera de un conjunto numerable), por el teorema de la convergencia dominada podemos elegir N tal que $I_{1,n} < \varepsilon$ para $n \geq N$.

Luego, usando el Lema anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} Ee^{bY_n} - Ee^{bY} &= b \int_0^c e^{by}[F_Y(y) - F_{Y_n}(y)]dy + \\ &\quad b \left[\int_c^{\infty} e^{by}[1 - F_{Y_n}(y)]dy - \int_c^{\infty} e^{by}[1 - F_Y(y)]dy \right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La parte izquierda de (3.12) es menor que ε para $n \geq N_1 \geq N$. Entonces para tales n tenemos que,

$$\int_c^\infty e^{by}[1 - F_{Y_n}(y)]dy - \int_c^\infty e^{by}[1 - F_Y(y)]dy \leq 2\varepsilon$$

Finalmente, $I_{1,n} + I_{2,n} + I < 3\varepsilon$, para $n \geq N_1$. Ésta última desigualdad prueba que $K_b(F_n, F) \rightarrow 0$.

(ii) Ahora supongamos que $K_b(F_n, F) \rightarrow 0$. Es evidente que $K_b \geq K$. Por el Lema 8.4.35 (página 152) en Rachev y Rüschendorf (1998), obtenemos que $Y_n \Rightarrow Y$ (además, $E|Y_n| \rightarrow E|Y|$).

Luego, por (3.10) tenemos que

$$\begin{aligned} |Ee^{bY_n} - Ee^{bY}| &= \left| \int_0^\infty e^{by}[1 - F_{Y_n}(y)]dy - \int_0^\infty e^{by}[1 - F_Y(y)]dy \right| \\ &\leq \int_0^\infty e^{by}|F_{Y_n}(y) - F_Y(y)|dy = K_b(F_n, F) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $Ee^{bY_n} \rightarrow Ee^{bY}$. □

Capítulo 4

Resultados obtenidos

4.1. Algunas notaciones y suposiciones

A continuación se introducen las siguientes notaciones se usarán más adelante.

Notación 2. Denotaremos a F como la función de distribución de cualquier variable aleatoria Y_1, Y_2, \dots y

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y). \quad (4.1)$$

También denotaremos una variable aleatoria genérica Y_1, Y_2, \dots por Y .

Notación 3.

$$\bar{\tilde{F}}(y) = 1 - \tilde{F}(y), \quad (4.2)$$

donde \tilde{F} denota la función de distribución de las variables aleatorias $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ para las cuales usaremos la notación genérica \tilde{Y} .

En el resto del trabajo usaremos la siguiente hipótesis natural:

Hipótesis 2. $F(0) = 0$, $\tilde{F}(0) = 0$.

La hipótesis anterior nos dice que con probabilidad cero se reciben reclamaciones de monto cero.

La siguiente es una condición muy importante para el modelo clásico de riesgo. Pues esta condiciona al modelo a que la entrada de primas c , por unidad de tiempo sea mayor que los gastos promedio $\lambda\mu$ por reclamaciones.

Hipótesis 3 (Condición de ganancia neta). Supongamos que se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\frac{\lambda\mu}{c} < 1, \quad \frac{\lambda\tilde{\mu}}{c} < 1. \quad (4.3)$$

Estas son llamadas la condición de ganancia neta para el modelo real y aproximado, respectivamente.

Nota 4.1. Un caso poco práctico es cuando $\frac{\lambda\mu}{c} \geq 1$. En este caso, para cada capital inicial $u \geq 0$ se tiene que $\psi(u) = 1$ (ver por ejemplo Asmussen y Albrecher, (2010), Rincón (2012), Rolski, *et al.* (1999)).

4.2. Caso de la métrica uniforme

A continuación presentamos la desigualdad que obtuvimos para la estabilidad de la probabilidad de ruina en el caso de la métrica uniforme entre las probabilidades de ruina en los modelos real y aproximado.

Teorema 4.2. Sean $\psi, \tilde{\psi} \in \mathfrak{X}$ las probabilidades de ruina en los modelos (1.1) y (1.6), respectivamente. Entonces, bajo las hipótesis 1, 2 y 3 tenemos que

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c - \mu\lambda} K(F, \tilde{F}), \quad (4.4)$$

donde ρ es la métrica uniforme definida en (3.2) y K es la métrica de Kantorovich definida en (3.3).

Nota 4.3. (1) Más adelante daremos un contraejemplo del cual se sigue que en (4.4) K no puede ser reemplazada por alguna métrica que metrize la convergencia débil (por ejemplo, la métrica de Levi, ver Rachev, (1991)).

(2) La finitez de $K(F, \tilde{F})$ se sigue de la hipótesis 1 (este hecho fue mostrado en la Proposición 3.4).

Nota 4.4. Es importante hacer énfasis que en la desigualdad (4.4) la constante $B := \frac{\lambda}{c - \lambda\mu}$ depende solamente de los parámetros del modelo real (1.1).

4.3. Caso de la métrica uniforme ponderada

Para estimar la aproximación de $\tilde{\psi}$ a ψ con respecto a la distancia ponderada (3.4) (que resulta útil para distribuciones con “cola ligera”) vamos a usar la siguiente suposición (vea las secciones 7.2 y 7.4).

Hipótesis 4. Supongamos que existen dos números reales $r^*, \tilde{r}^* \in (0, \infty]$ tales que

(i) Para cada $r < r^*$, $Ee^{rY} < \infty$ y $Ee^{rY} \rightarrow \infty$ cuando $r \uparrow r^*$.

(ii) Para cada $r < \tilde{r}^*$, $Ee^{r\tilde{Y}} < \infty$ y $Ee^{r\tilde{Y}} \rightarrow \infty$ cuando $r \uparrow \tilde{r}^*$.

La hipótesis anterior será de especial importancia, ya que nos permitirá obtener las desigualdades (7.10) y (4.7) de abajo.

Presentaremos (de manera informal) cierta terminología que, por supuesto, se da con todo detalle en el Capítulo 7.

Se sabe que bajo la Hipótesis 4 (vea Rincón (2012), Rolski, *et al.* (1999) existen números reales $R \in (0, r^*)$ y $\tilde{R} \in (0, \tilde{r}^*)$, llamados coeficientes de ajuste (para los modelos real y aproximado respectivamente). Las definiciones y propiedades de los coeficientes de ajuste las presentaremos en la sección 7.2.

Sean $R_* := \min(R, \tilde{R})$ y $\delta \in (0, R_*)$ un número arbitrario pero fijo. En los siguientes resultados (obtenidos en esta tesis) vamos a utilizar la métrica ρ_β con $\beta := R_* - \delta$ (vea la sección 7.4) y la métrica de Kantorovich ponderada $K_{\tilde{R}}$.

Definamos la siguiente constante:

$$\overline{M}_\delta := \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{(R_* - \delta)t} \overline{F}(t) dt. \quad (4.5)$$

En la sección 7.4 demostraremos de hecho que bajo la hipótesis 4 se tiene que $\overline{M}_\delta < 1$.

El siguiente teorema representa uno de los resultados de nuestro trabajo.

Teorema 4.5. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 2, 3 y 4. Entonces para cada $\delta \in (0, R_*)$ fijo*

$$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right], \quad (4.6)$$

donde la constante $\overline{M}_\delta < 1$ está definida en (4.5) y \tilde{R} es el coeficiente de ajuste del modelo aproximado (1.6).

Del Teorema 4.5 se obtiene el siguiente corolario, que para fines prácticos resulta de más utilidad.

Corolario 4.6. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 2, 3 y 4. Entonces para cada $\delta \in (0, R_*)$ fijo se cumple que*

$$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{2\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} K_{\tilde{R}}(F, \tilde{F}), \quad (4.7)$$

donde $K_{\tilde{R}}$ es la métrica definida en (3.6).

Capítulo 5

Ecuación integral para ψ y operadores correspondientes

En este capítulo presentamos una ecuación integral para la probabilidad de ruina muy conocida en teoría del riesgo. También se introduce un operador que posee propiedades de contracción; dichas propiedades son fundamentales para la obtención de las cotas superiores para la estabilidad de la probabilidad de ruina obtenidas en este trabajo.

5.1. Una ecuación para ψ y un operador relacionado

Ahora se presentan dos teoremas conocidos suponiendo que se cumplen las hipótesis 1, 2 y 3 de las secciones previas.

Notación 4. *La probabilidad de no ruina (o la probabilidad de supervivencia):*

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(u) &:= 1 - \psi(u), \quad u \geq 0, \\ \tilde{\psi}(u) &:= 1 - \tilde{\psi}(u), \quad u \geq 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

A continuación se presenta un resultado para la probabilidad de ruina, cuya demostración fue tomada de Maldonado Santiago, A. D. (2011).

Teorema 5.1. *La probabilidad de no ruina $\bar{\psi}$ definida en (5.1) es continua en \mathbb{R}_+ ; su derivada existe casi donde sea y se cumple que*

$$\bar{\psi}^{(1)}(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF(y) \right). \quad (5.2)$$

Demostración. Procedemos condicionando el análisis sobre el monto de la primera reclamación Y_1 y el momento T_1 en el que la reclamación ocurre. Además, usaremos el hecho de que T_1 se distribuye exponencialmente (con parámetro λ). Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) &= P(\text{"No ruina en } (0, \infty)\text{"} | X_0 = u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{"No ruina en } (0, \infty)\text{"} | Y_1 = y, T_1 = t, X_0 = u) dF(y) f_{T_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{"No ruina en } (0, \infty)\text{"} | Y_1 = y, T_1 = t, X_0 = u) dF(y) \lambda e^{-\lambda t} dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cuando $X_t \geq 0$, la ruina no ocurre, o bien, cuando $u + ct \geq Y_1$. Esto significa que para valores de $y \in [u + ct, \infty)$ la probabilidad de que la ruina no ocurra es cero. Por lo tanto

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P(X_t \geq 0 \text{ para todo } t \geq Y_1 | Y_1 = y, T_1 = t, X_0 = u) dF(y) dt.$$

Ahora usamos el hecho de que X_t es un proceso estocástico que tiene incrementos independientes y estacionarios (ver por ejemplo, Rincón (2012)). Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P(X_t \geq 0, t \geq 0 | X_0 = u + ct - y) dF(y) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \bar{\psi}(u + ct - y) dF(y) dt. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x = u + ct$ obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(x-u)/c} \int_0^x \bar{\psi} \left[u + c \left(\frac{x-u}{c} \right) - y \right] dF(y) \frac{dx}{c} \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty e^{-\lambda x/c} \int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF(y) dx.\end{aligned}$$

Ahora vamos a considerar la función

$$\begin{aligned}g(u) &:= \int_u^\infty e^{-\lambda x/c} \int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF(y) dx \\ &= - \int_{-\infty}^u e^{-\lambda x/c} \int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF(y) dx.\end{aligned}$$

Notar que la integral $\int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF(y) \leq \int_0^\infty dF(y) = 1$. De hecho, $e^{-\lambda x/c} \int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF(y) \in \mathcal{L}_1([0, \infty))$. Entonces, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue,

$$g'(u) = -e^{-\lambda u/c} \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF(y),$$

existe casi donde quiera (excepto quizá en los puntos donde F no es continua).

Observamos que $\bar{\psi}(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} g(u)$. Entonces

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(1)}(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[e^{\lambda u/c} g'(u) + \frac{\lambda}{c} g(u) e^{\lambda u/c} \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[-e^{\lambda u/c} e^{-\lambda u/c} \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF(y) + \bar{\psi}(u) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF(y) \right).\end{aligned}$$

□

Teorema 5.2. *Bajo las hipótesis 1, 2 y 3, la probabilidad de ruina satisface:*

(1)

$$\psi(0) = \lambda\mu/c. \quad (5.4)$$

(2) Para $u > 0$, la función $\psi(u)$ satisface la siguiente ecuación integral:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \int_0^u \psi(u-y) \bar{F}(y) dy \right). \quad (5.5)$$

Nota 5.3. Bajo las hipótesis 1, 2 y 3, las mismas ecuaciones como en (5.4) y (5.5) se cumplen para la probabilidad de ruina $\tilde{\psi}(u)$ definida en (1.7) (cambiando F por \tilde{F}).

Demostración. Integrando (5.2) sobre el intervalo $(0, u]$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^u \bar{\psi}^{(1)}(v) dv &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \int_0^v \bar{\psi}(v-y) dF(y) dv \right) \\ \bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \int_0^v \bar{\psi}(v-y) dF(y) dv \right). \end{aligned}$$

En la última igualdad, la región de integración de la integral doble es $\{(v, y) | 0 \leq v \leq u, 0 \leq y \leq v\}$. Esto es equivalente a integrar en la región $\{(v, y) | y \leq v \leq u, 0 \leq y \leq u\}$. Por lo tanto, cambiando los límites de integración correspondientes tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_y^u \int_0^u \bar{\psi}(v-y) dF(y) dv \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \int_y^u \bar{\psi}(v-y) dv dF(y) \right). \end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $w = v - y$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \int_0^{u-y} \bar{\psi}(w) dw dF(y) \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^{u-y} \int_0^u \bar{\psi}(w) dF(y) dw \right). \end{aligned}$$

En la integral doble, cambiamos nuevamente el orden de integración. La región de integración pasa de $\{(w, y) | 0 \leq w \leq u-y, 0 \leq y \leq u\}$ a la región

$\{(w, y) | 0 \leq w \leq u, 0 \leq y \leq u - w\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \int_0^{u-w} dF(y) \bar{\psi}(w) dw \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \left[F(y) \Big|_0^{u-w} \right] \bar{\psi}(w) dw \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \bar{\psi}(w) F(u-w) dw \right).\end{aligned}$$

En la evaluación de F , usamos la hipótesis de que $F(0) = 0$. Abusando de la notación, hacemos $w = v$ en la última igualdad. Luego,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(v) dv - \int_0^u \bar{\psi}(v) F(u-v) dv \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u [\bar{\psi}(v) dv - \bar{\psi}(v) F(u-v)] dv \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(v) [1 - F(u-v)] dv \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(v) \bar{F}(u-v) dv \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_u^0 \bar{\psi}(u-v) \bar{F}(v) dv \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(u-v) \bar{F}(v) dv.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\psi(u) = \bar{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \bar{\psi}(u-v) \bar{F}(v) dv \right). \quad (5.6)$$

Hacemos que $u \rightarrow \infty$ en (5.6) y entonces

$$1 = \bar{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}(v) dv = \bar{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \mu.$$

Esto se sigue del hecho que $\bar{\psi}(u) \rightarrow 1$ (ver la Proposición 8.2 de Rincón, 2012) y una aplicación del teorema de la convergencia dominada en el lado derecho de (5.6). Por lo tanto

$$\bar{\psi}(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}, \text{ o bien, } \psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \quad (5.7)$$

Ahora, sustituyendo la condición (5.1) y (5.7) en (5.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 - \bar{\psi}(u) &= 1 - \bar{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - \bar{\psi}(u-v)] \bar{F}(v) dv \\ -\bar{\psi}(u) &= -\frac{\lambda}{c} \mu + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{F}(v) dv - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(u-v) \bar{F}(v) dv \\ \bar{\psi}(u) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}(v) dv - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{F}(v) dv + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(u-v) \bar{F}(v) dv \\ \bar{\psi}(u) &= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(v) dv + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(u-v) \bar{F}(v) dv. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos y en lugar de v en la última igualdad obtenida. Con lo que obtenemos

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{\psi}(u-y) \bar{F}(y) dy.$$

□

A continuación presentamos dos operadores relacionados con la ecuación (5.5) y su análoga para $\tilde{\psi}$. Por sus propiedades de contracción (como se demostrará más adelante), este operador es muy importante para la obtenciones de las cotas superiores como (1.8) comentadas en el Capítulo 1.

Definición 5.4. Sean F y \tilde{F} las funciones de distribución dadas en las notaciones 2 y 3. Para cada $x \in \mathfrak{X}$ definimos las funciones $Tx, \tilde{T}x$ como sigue:

$$Tx(u) := \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \bar{F}(t) dt \right), u \geq 0. \quad (5.8)$$

$$\tilde{T}x(u) := \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \tilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \tilde{\bar{F}}(t) dt \right), u \geq 0. \quad (5.9)$$

Lema 5.5. Para cada $x \in \mathfrak{X}$, $Tx, \tilde{T}x \in \mathfrak{X}$.

Demostración. Para cada $u \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} Tx(u) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \bar{F}(t) dt \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = \frac{\lambda}{c} EY = \frac{\lambda\mu}{c} < 1. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de la condición dada en (4.3). Del mismo modo se prueba que $\tilde{T}x \in \mathfrak{X}$. \square

Este lema significa que (5.8) y (5.9) definen los operadores $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ y $\tilde{T} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$.

5.2. Propiedades de contracción de los operadores T y \tilde{T}

Sea \mathfrak{X} el conjunto de funciones definido en (3.1). Consideraremos el espacio métrico (\mathfrak{X}, ρ) , donde ρ es la métrica uniforme definida en (3.2).

Proposición 5.6. *Sea T el operador definido en (5.8). Entonces bajo la condición (4.3), T es una contracción en (\mathfrak{X}, ρ) con módulo $\alpha = \lambda\mu/c < 1$, i.e. para cada $x, y \in \mathfrak{X}$,*

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y). \quad (5.10)$$

Similarmente, bajo la condición (4.3), el operador \tilde{T} definido en (5.9) es una contracción en (\mathfrak{X}, ρ) con módulo $\tilde{\alpha} = \lambda\tilde{\mu}/c$, i.e. para cada $x, y \in \mathfrak{X}$

$$\rho(\tilde{T}x, \tilde{T}y) \leq \tilde{\alpha}\rho(x, y). \quad (5.11)$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathfrak{X}$. Por (3.2) y (5.8)

$$\begin{aligned} \rho(Tx, Ty) &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u x(u-t)\overline{F}(t)dt - \int_0^u y(u-t)\overline{F}(t)dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u \overline{F}(t)[x(u-t) - y(u-t)]dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \overline{F}(t)|x(u-t) - y(u-t)|dt \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \overline{F}(t) \sup_{s \in [0, u]} |x(s) - y(s)|dt \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \rho(x, y) \sup_{u \geq 0} \int_0^u \overline{F}(t)dt \\ &= \frac{\lambda}{c} \rho(x, y) \int_0^\infty \overline{F}(t)dt = \frac{\lambda\mu}{c} \rho(x, y). \end{aligned}$$

Entonces tomamos $\alpha = \frac{\lambda\mu}{c}$ y por la condición (4.3) obtenemos que $\alpha < 1$. Por lo tanto, concluimos que $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y)$. \square

Nota 5.7. Del Teorema 5.2 y Definición 5.4 se sigue que

$$T\psi = \psi; \quad \tilde{T}\tilde{\psi} = \tilde{\psi}. \quad (5.12)$$

y de la Proposición 5.6 obtenemos que ψ y $\tilde{\psi}$ son las únicas soluciones de (5.12).

Corolario 5.8. Sean ψ y $\tilde{\psi}$ las probabilidades de ruina definidas en (1.2) y (1.7) respectivamente. Entonces

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\alpha}\rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}), \quad (5.13)$$

donde $\alpha < 1$ fue dada en la Proposición 5.6.

Demostración. Por la desigualdad del triángulo y la propiedad de contracción del operador tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(\psi, \tilde{\psi}) &= \rho(T\psi, \tilde{T}\tilde{\psi}) \\ &\leq \rho(T\psi, T\tilde{\psi}) + \rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}) \\ &\leq \alpha\rho(\psi, \tilde{\psi}) + \rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}). \end{aligned}$$

Entonces $\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \alpha\rho(\psi, \tilde{\psi}) + \rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi})$, o bien

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\alpha}\rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}),$$

y $1 - \alpha > 0$, ya que $\alpha < 1$ por la condición (4.3). \square

Capítulo 6

Desigualdad de la estabilidad de la probabilidad de ruina en términos de la métrica uniforme

El teorema que sigue ofrece una estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo, con respecto a la métrica uniforme.

Teorema 6.1. *Sean $\psi, \tilde{\psi} \in \mathfrak{X}$ las probabilidades de ruina en los modelos (1.1) y (1.6), respectivamente. Entonces, bajo las hipótesis 1, 2 y 3 tenemos que*

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c - \mu\lambda} K(F, \tilde{F}), \quad (6.1)$$

donde ρ es la métrica uniforme definida en (3.2) y K es la métrica de Kantorovich definida en (3.3).

Para probar el teorema 6.1 necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 6.2. *Sean T, \tilde{T} operadores definidos en (5.8) y (5.9). Entonces*

$$\rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c} K(F, \tilde{F}), \quad (6.2)$$

donde ρ y K son métricas definidas en (3.2) y (3.3) respectivamente.

Demostración. Para cada $x \in \mathfrak{X}$, de (3.2), (5.8) y (5.9) tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \rho(Tx, \tilde{T}x) \\
 &= \sup_{u \geq 0} \left| \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty (\bar{F}(t) - \tilde{\bar{F}}(t)) dt \right) + \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u x(u-t)(\bar{F}(t) - \tilde{\bar{F}}(t)) dt \right) \right| \\
 &\leq \sup_{u \geq 0} \left[\frac{\lambda}{c} \int_u^\infty |\bar{F}(t) - \tilde{\bar{F}}(t)| dt + \frac{\lambda}{c} \int_0^u x(u-t) |\bar{F}(t) - \tilde{\bar{F}}(t)| dt \right] \\
 &\leq \sup_{u \geq 0} \left[\frac{\lambda}{c} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \frac{\lambda}{c} \int_0^u |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right] \\
 &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right] = \frac{\lambda}{c} K(F, \tilde{F}).
 \end{aligned}$$

□

Demostración. (Del Teorema (6.1))

Por el Corolario (5.8) y la Proposición (6.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \rho(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}) \\
 &\leq \frac{1}{1-\alpha} \frac{\lambda}{c} K(F, \tilde{F}) = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} K(F, \tilde{F}), \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

donde $c - \lambda\mu > 0$ por la condición (4.3).

□

Capítulo 7

Desigualdad de la estabilidad de la probabilidad de ruina en términos de la métrica uniforme ponderada

En el resto del texto nos referiremos también a (Y, \overline{F}) , $(\tilde{Y}, \overline{\tilde{F}})$, ψ , $\tilde{\psi}$ y $\overline{\psi}$ como en Notaciones 2, 3, (1.7) y (5.1) respectivamente. De la misma manera nos referiremos a \mathfrak{X} como fue definido en (3.1), a T como en (5.8) y a \tilde{T} como en (5.9).

7.1. Motivación

En (6.1) obtuvimos una cota superior para $\rho(\psi, \tilde{\psi}) = \sup_{u \geq 0} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|$. Sin embargo, en el caso cuando las distribuciones de Y y \tilde{Y} tienen “colas ligeras” (por ejemplo cuando existe el coeficiente de ajuste, un concepto bien conocido en teoría del riesgo (ver Rolski *et al.* (1999) y más adelante) es bien sabido que ψ y $\tilde{\psi}$ decrecen exponencialmente cuando el coeficiente de Lundberg existe. Por lo tanto la desigualdad (6.1) es poco informativa cuando el capital inicial u es “grande”.

De este modo, surge el problema de encontrar una cota superior (en términos de una distancia entre las funciones de distribución F y \tilde{F}) para la dis-

tancia uniforme ponderada $\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) = \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|$.

7.2. Condiciones de existencia del coeficiente de ajuste

Notación 5. *En lo que sigue usaremos la siguiente notación:*

- Para cada $r \geq 0$, $M(r) := Ee^{rY}$.
- Para cada $r \geq 0$, $\tilde{M}(r) := Ee^{r\tilde{Y}}$.

(Son las funciones generadoras de momentos de Y y \tilde{Y} respectivamente).

Nota 7.1. • Es evidente que si para algún $\bar{r} > 0$, $M(\bar{r}) < \infty$ entonces $M(r) < \infty$ para cada $r \in [0, \bar{r}]$. La misma situación es cierta para $\tilde{M}(r)$.

- De acuerdo a la terminología estándar, si existe $\bar{r} > 0$ tal que $M(\bar{r}) < \infty$, entonces decimos que la función de distribución F de Y tiene cola ligera (ya que para cada $x > 0$ $P(Y > x) \leq M(\bar{r})e^{-\bar{r}x}$, por la desigualdad de Markov).

Definición 7.2. 1. *Supongamos que existe $\bar{r} > 0$ tal que $M(r) < \infty$ para cada $r \in (0, \bar{r})$. El número $R \in (0, \bar{r})$ es llamado coeficiente de ajuste (del modelo real) si R es la solución única (si ésta existe) de la ecuación*

$$\theta(r) := \lambda(M(r) - 1) - cr = 0,$$

donde λ es el parámetro del proceso de Poisson definido en el Capítulo 1.

2. *Supongamos que existe $\bar{r} > 0$ tal que $\tilde{M}(r) < \infty$ para cada $r \in (0, \bar{r})$. El número $\tilde{R} \in (0, \bar{r})$ es llamado coeficiente de ajuste (del modelo aproximado) si \tilde{R} es la solución única (si ésta existe) de la ecuación*

$$\tilde{\theta}(r) := \lambda(\tilde{M}(r) - 1) - cr = 0,$$

donde λ es el parámetro del proceso de Poisson definido en el Capítulo 1.

A continuación presentamos un resultado (bien conocido) sobre la existencia del coeficiente de ajuste (vea Asmussen y Albrecher, (2010), Rincón (2012) y Rolski, *et al.* (1999)).

Proposición 7.3. *Bajo las hipótesis 2,3 y 4:*

1. *Existe el coeficiente de ajuste $R \in (0, r^*)$ para el modelo real (1.1).*
2. *Existe el coeficiente de ajuste $\tilde{R} \in (0, \tilde{r}^*)$ para el modelo aproximado (1.6).*

Demostración. Sea $\theta(r)$ la función dada en la Definición 7.2. Mostraremos que $\lim_{r \uparrow r^*} \theta(r) = \infty$. Hay dos casos. Primero sea $r^* < \infty$. Entonces por el inciso (i) de la hipótesis 4 tenemos que $Ee^{rY} \rightarrow \infty$ cuando $r \uparrow r^*$, y cuando $\lambda > 0$,

$$\lim_{r \uparrow r^*} \theta(r) = \lim_{r \uparrow r^*} \lambda(M(r) - 1) - cr = \infty.$$

Ahora, sea $r^* = \infty$ en la hipótesis 4. Sea y^* tal que $F(y^*) < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^\infty e^{ry} dF(y) = \int_0^{y^*} e^{ry} dF(y) + \int_{y^*}^\infty e^{ry} dF(y) \\ &\geq \int_{y^*}^\infty e^{ry} dF(y) \geq e^{ry^*} \overline{F}(y^*) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ya que $F(y^*) < 1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{r \uparrow \infty} \theta(r) &= \lim_{r \uparrow \infty} \lambda(M(r) - 1) - cr \\ &\geq \lim_{r \uparrow \infty} \lambda(e^{ry^*} \overline{F}(y^*) - 1) - cr = \infty. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que la función $M(r)$ está bien definida en una vecindad del cero, la función $\theta(r)$ es diferenciable, de hecho tenemos que

$$\begin{aligned} \theta'(r) &= \lambda M'(r) - c, \\ \theta''(r) &= \lambda M''(r) = \lambda E(Y^2 e^{rY}) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $\theta(r)$ es estrictamente convexa. Además $\theta(0) = 0$ y $\theta'(0) = \lambda\mu - c < 0$ por la condición de ganancia neta (4.3).

Observamos que las condiciones $\theta'(0) < 0$, $\theta''(0) > 0$ y $\lim_{r \uparrow r^*} \theta(r) = \infty$ prueban el inciso 1 de la proposición. De la misma manera se prueba el inciso 2. □

Proposición 7.4. *Suponga que para algún $\bar{r} > 0$, $M(r) < \infty$ para todo $r \in (0, \bar{r})$.*

(i) *Si $R \in (0, \bar{r})$ es el coeficiente de ajuste para el modelo (1.1), entonces*

$$\int_0^\infty e^{Ry} \bar{F}(y) dy = c/\lambda. \quad (7.1)$$

(ii) *Si para algún $r \in (0, \bar{r})$, $\int_0^\infty e^{ry} \bar{F}(y) dy = c/\lambda$, entonces $r = R$, donde R es el coeficiente de ajuste para el modelo (1.1).*

Las mismas afirmaciones son ciertas para el modelo (1.6).

Para probar la Proposición 7.4 necesitaremos retomar el resultado (3.9) de la sección (3.1), es decir, usaremos el hecho siguiente: Si $Ee^{bY} < \infty$, entonces

$$e^{by}(1 - F(y)) \longrightarrow 0 \text{ cuando } y \longrightarrow \infty.$$

Demostración. Supongamos que el coeficiente de ajuste $R = r$ existe. Según el punto número uno de la definición 7.2 esto significa que:

$0 = \theta(r) = \lambda(M(r) - 1) - cr$, recordando que $M(r) = Ee^{rY}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} &= \lambda \left(\int_0^\infty e^{rt} dF(t) - \int_0^\infty dF(t) \right) - cr \\ &= \lambda \int_0^\infty (e^{rt} - 1) dF(t) - cr \\ &= -\lambda \int_0^\infty (e^{rt} - 1) d(1 - F(t)) - cr \\ &= -\lambda \int_0^\infty (e^{rt} - 1) d\bar{F}(t) - cr \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$= -\lambda \left[(e^{rt} - 1) \bar{F}(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty r e^{rt} \bar{F}(t) dt \right] - cr, \quad (7.3)$$

donde para obtener (7.3) integramos por partes en (7.2) y usando el resultado (3.9). El primer sumando del lado derecho de (7.3) es cero.

Por lo tanto $0 = \lambda \int_0^\infty r e^{rt} \bar{F}(t) dt - cr$, entonces

$$\int_0^\infty e^{rt} \bar{F}(t) dt = c/\lambda.$$

Procediendo de manera inversa en las igualdades anteriores, se puede probar el inciso (ii). \square

7.3. Desigualdad de Lundberg

La llamada desigualdad de Lundberg (que a continuación presentaremos) es uno de los resultados más importantes en teoría del riesgo. En particular en nuestro trabajo, esta desigualdad juega un papel muy importante, ya que en lo que resta del texto vamos a auxiliarnos de este resultado en repetidas ocasiones.

Antes de presentar la desigualdad de Lundberg, introducimos el siguiente resultado (tomado de Rincón (2012)), del cual haremos uso para demostrar la desigualdad de Lundberg.

Proposición 7.5. *Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ el proceso de riesgo de Cramer-Lundberg definido en (1.1). Entonces para cada $r \geq 0$ tal que $M(r) < \infty$, el proceso*

$$\{e^{-rX_t - \theta(r)t} : t \geq 0\} \quad (7.4)$$

es una martingala.

Demostración. Primero mostraremos que $Ee^{-rX_t - \theta(r)t} < \infty$.

$$\begin{aligned} Ee^{-rX_t - \theta(r)t} &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-r(u+ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j)}) \\ &= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} E(e^{r \sum_{j=1}^{N_t} Y_j}) \\ &= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} e^{\lambda t(M(r)-1)} < \infty. \end{aligned}$$

Ahora mostramos la propiedad de martingala. Para $0 \leq s < t$ y por propiedad de incrementos independientes y estacionarios del proceso de riesgo,

$$\begin{aligned}
 E(e^{-rX_t - \theta(r)t} | \mathcal{F}_s) &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-rX_t} | \mathcal{F}_s) \\
 &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-r(X_t - X_s) - rX_s} | \mathcal{F}_s) \\
 &= e^{-\theta(r)t - rX_s} E(e^{-r(X_t - X_s)}) \\
 &= e^{-\theta(r)t - rX_s} E(e^{-r(c(t-s) - \sum_{j=N_s+1}^{N_t} Y_j)}) \\
 &= e^{-\theta(r)t - rX_s - rc(t-s)} E(e^{r \sum_{j=1}^{N_t-s} Y_j}) \\
 &= e^{-\theta(r)t - rX_s - rc(t-s)} e^{\lambda(t-s)(M(r)-1)} \\
 &= e^{-rX_s - \theta(r)s}.
 \end{aligned}$$

□

En particular, si el coeficiente de ajuste R existe, es decir, $\theta(R) = 0$, entonces el proceso $\{e^{RX_t} : t \geq 0\}$ es una martingala. Precisamente este resultado nos ayudará a mostrar la desigualdad de Lundberg dada a continuación, también tomada de Rincón (2012).

Teorema 7.6 (Desigualdad de Lundberg). *Supongamos que se cumplen las hipótesis 2, 3 y 4. Sean R y \tilde{R} los coeficientes de ajuste de los modelos (1.1) y (1.6) respectivamente. Entonces para cada capital inicial $u \geq 0$,*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \tag{7.5}$$

$$\tilde{\psi}(u) \leq e^{-\tilde{R}u}. \tag{7.6}$$

Demostración. Sea τ el tiempo de paro correspondiente al tiempo de ruina. Como el proceso $\{e^{-RX_t} : t \geq 0\}$ es una martingala, se tiene que el proceso detenido $\{e^{-RX_t \wedge \tau} : t \geq 0\}$ también es una martingala. Ambos procesos inician en el valor e^{-Ru} . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 e^{-Ru} &= e^{-RX_0} = E(e^{-RX_t \wedge \tau}) \\
 &= E(e^{-RX_t \wedge \tau} | \tau \leq t)P(\tau \leq t) + E(e^{-RX_t \wedge \tau} | \tau > t)P(\tau > t) \\
 &\geq E(e^{-RX_t \wedge \tau} | \tau \leq t)P(\tau \leq t) \\
 &= E(e^{-RX_\tau} | \tau \leq t)P(\tau \leq t).
 \end{aligned}$$

Haciendo que $t \rightarrow \infty$ monótonamente, el evento $\{\tau \leq t\}$ converge crecientemente al evento $\{\tau \leq \infty\}$. Entonces, por el teorema de la convergencia monótona se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-Ru} &\geq E(e^{-RX_\tau} | \tau < \infty) P(\tau < \infty) \\ &\geq E(1 | \tau < \infty) P(\tau < \infty) = P(\tau < \infty) = \psi(u). \end{aligned}$$

□

La desigualdad de Lundberg ofrece una cota superior para la probabilidad de ruina (cuando el coeficiente de ajuste existe). Esta cota nos dice que la probabilidad de ruina decrece exponencialmente, cuando el capital inicial u crece a infinito.

Generalmente el coeficiente de ajuste no es fácil de calcular (si sabemos que éste existe). Hay un caso particular cuando el coeficiente de ajuste se calcula explícitamente.

Ejemplo 7.7 (Reclamaciones exponenciales). Supongamos que los montos de las reclamaciones tienen distribución exponencial, digamos $Y \sim Exp(\kappa)$, entonces

$$M(r) = \kappa / (\kappa - r) \text{ para } r < \kappa.$$

Luego $\theta(r) = \lambda \left(\frac{\kappa}{\kappa - r} - 1 \right) - cr = \lambda \left(\frac{r}{\kappa - r} \right) - cr = \left(\frac{\lambda}{\kappa - c} - c \right) r$. Entoces $\theta(r) = 0$ cuando $r = 0$ o bien, cuando $\frac{\lambda}{\kappa - c} - c = 0$. Por lo tanto, encontramos que $R = \kappa - \lambda/c$.

Más aún, por el teorema (7.6) tenemos que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} = e^{-(\kappa - \lambda/c)u}. \quad (7.7)$$

7.4. Propiedades de contracción de los operadores T y \tilde{T} con respecto a la métrica ponderada ρ_β .

En esta sección se demostrarán las propiedades de contractividad de los operadores T y \tilde{T} .

Bajo las condiciones de la hipótesis 4, sean $R \in (0, r^*)$, $\tilde{R} \in (0, \tilde{r}^*)$ los coeficientes de ajuste (que existen según la Proposición 7.3). Sea $R_* := \min\{R, \tilde{R}\}$.

En lo que sigue, sea $\delta \in (0, R_*)$ un número arbitrario pero fijo.

Convenio 7.8. Para $\beta := R_* - \delta$ vamos a considerar en \mathfrak{X} la métrica uniforme ponderada ρ_β definida en (3.4).

Lema 7.9. Supongamos que se cumplen las condiciones (1.3) y (1.4) y la hipótesis 4. Entonces

$$\overline{M}_\delta := \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{(R_* - \delta)t} \overline{F}(t) dt < 1. \quad (7.8)$$

Demostación. Primero notemos que por la hipótesis 4 y la Proposición 7.3, \overline{M}_δ está bien definida y es finita.

Ahora, en el intervalo $[0, r^*)$ definimos la función

$$I(r) := \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{rt} \overline{F}(t) dt.$$

De acuerdo con su definición, $I(r)$ es estrictamente creciente.

Luego, de la ecuación (7.1) se sigue que $I(R) = 1$.

Por otro lado, de la condición (4.3) obtenemos que $I(0) = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$. Por lo tanto la función $I(r)$ tiene la gráfica mostrada en la Figura 7.1.

Finalmente obtenemos que para cada $r \in [0, R)$, $I(r) < 1$ y por lo tanto $\overline{M}_\delta < 1$, como se quería. \square

Proposición 7.10. Sean \overline{M}_δ la constante definida en (7.8), ρ_β como en el Convenio 7.8 y el operador T que fue definido en (5.8). Entonces para cada $x, y \in \mathfrak{X}$ tales que $\rho_\beta(x, y) < \infty$ se tiene que $\rho_\beta(Tx, Ty) \leq \overline{M}_\delta \rho_\beta(x, y)$.

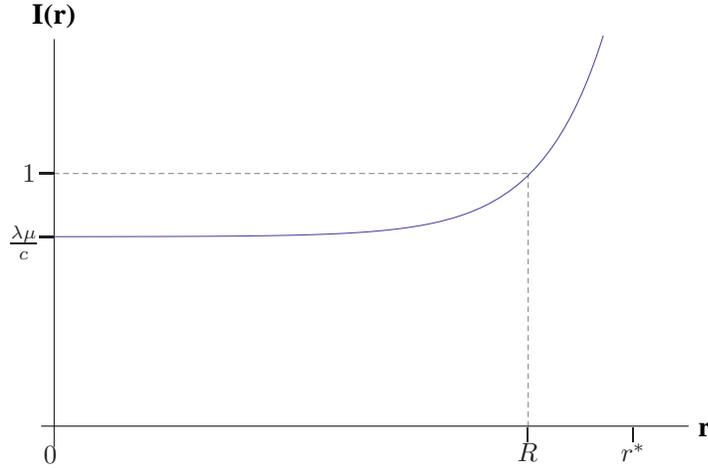


Figura 7.1: Gráfica de $I(r)$.

Demostración. De (5.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \rho_\beta(Tx, Ty) &= \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \left| \int_0^u x(u-t) \overline{F}(t) dt - \int_0^u y(u-t) \overline{F}(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \overline{F}(t) |x(u-t) - y(u-t)| e^{\beta u} dt \\
 &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \overline{F}(t) |x(u-t) - y(u-t)| e^{\beta(u-t)} e^{\beta t} dt \\
 &\leq \frac{\lambda}{c} \rho_\beta(x, y) \sup_{u \geq 0} \int_0^u \overline{F}(t) e^{\beta t} dt \\
 &\leq \rho_\beta(x, y) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{(R_* - \delta)t} \overline{F}(t) dt, \\
 &= \overline{M}_\delta \rho_\beta(x, y).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho_\beta(Tx, Ty) \leq \overline{M}_\delta \rho_\beta(x, y)$. □

Proposición 7.11. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 2, 3 y 4. Sean ρ_β como en el convenio 7.8, $\psi, \tilde{\psi}$ como en (1.1) y (1.7) respectivamente. Entonces $\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq 2$.*

Demostración. Según la definición de la métrica uniforme ponderada dada

en (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &= \sup_{u \geq 0} |e^{\beta u} \psi(u) - e^{\beta u} \tilde{\psi}(u)| \\ &\leq \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \psi(u) + \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \tilde{\psi}(u).\end{aligned}$$

Aplicando las desigualdades de Lundberg dadas en (7.5) y (7.6) para las probabilidades de ruina ψ y $\tilde{\psi}$ respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} e^{-Ru} + \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} e^{-\tilde{R}u} \\ &= \sup_{u \geq 0} e^{-(R-R_*)u} + \sup_{u \geq 0} e^{-(\tilde{R}-R_*)u}.\end{aligned}$$

Ahora usaremos el hecho de que $R_* \leq R$, (similarmente para \tilde{R}), obtenemos que cada sumando en la parte derecha de la última desigualdad es menor que $\sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} = 1$. \square

Usando la proposición 7.11 y la proposición 7.10, el siguiente lema se demuestra similarmente a la prueba del corolario 5.8.

Lema 7.12. *Bajo todas las hipótesis anteriores,*

$$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1 - \overline{M}_\delta} \rho_\beta(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}). \quad (7.9)$$

7.5. Una cota superior para $\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi})$

Teorema 7.13. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 2, 3 y 4. Entonces para cada $\delta \in (0, R_*)$ se cumple*

$$\begin{aligned}\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \\ &\left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right], \quad (7.10)\end{aligned}$$

donde la constante $\overline{M}_\delta < 1$ está definida en (7.8) y \tilde{R} es el coeficiente de ajuste del modelo aproximado (1.6).

Demostración. Por el lema (7.12), las definiciones 5.10 y 5.11 tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{1}{1 - \overline{M}_\delta} \rho_\beta(T\tilde{\psi}, \widetilde{T\tilde{\psi}}) \\ &= \frac{1}{1 - \overline{M}_\delta} \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \left| \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [\overline{F}(t) - \widetilde{\overline{F}}(t)] dt + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \tilde{\psi}(u-t) [\overline{F}(t) - \widetilde{\overline{F}}(t)] dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |\overline{F}(t) - \widetilde{\overline{F}}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_0^u \tilde{\psi}(u-t) |\overline{F}(t) - \widetilde{\overline{F}}(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Lundberg (7.6) tenemos que

$$\tilde{\psi}(u-t) \leq e^{-\tilde{R}(u-t)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \times \\ &\left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |\overline{F}(t) - \widetilde{\overline{F}}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{R_* u} e^{-\delta u} e^{-\tilde{R}u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |\overline{F}(t) - \widetilde{\overline{F}}(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Dado que $R_* \leq \tilde{R}$ tenemos que $e^{R_* u} e^{-\tilde{R}u} \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \times \\ &\left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

□

Recordamos que ψ y $\tilde{\psi}$ denotan las probabilidades de ruina en los modelos real y aproximado, respectivamente. También, para $\delta \in (0, \min\{R, \tilde{R}\})$ convenimos tomar $\beta := \min\{R, \tilde{R}\} - \delta$.

Corolario 7.14. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 2, 3 y 4. Entonces para cada $\delta \in (0, R_*)$*

$$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{2\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} K_{\tilde{R}}(F, \tilde{F}), \quad (7.11)$$

donde la constante $\overline{M}_\delta < 1$ fue definida en (7.8), \tilde{R} es el coeficiente de ajuste para el modelo aproximado (1.6) y $K_{\tilde{R}}$ es la métrica de Kantorovich definida en (3.6).

Nota 7.15. La desigualdad (7.11) tiene sentido pleno solo cuando $K_{\tilde{R}}(F, \tilde{F}) < \infty$, propiedad que ya probamos en la proposición 3.10.

Demostración. (Del corolario 7.14).

Del teorema 7.13 se cumple que

$$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \times \left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right]. \quad (7.12)$$

Sustituyendo el valor de β en el lado derecho de (7.12) tenemos que

$$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \times \left[\sup_{u \geq 0} e^{(R_* - \delta)u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right].$$

De nuevo usamos el hecho de que $R_* = \min\{R, \tilde{R}\} \leq \tilde{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \sup_{u \geq 0} e^{(\tilde{R} - \delta)u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \\ &\quad \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \\ &= \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \left[\sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} e^{\tilde{R}u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right] \\ &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \left[\sup_{u \geq 0} \int_u^\infty e^{\tilde{R}u} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Observemos ahora que en la primera integral de la última desigualdad, $t \in [u, \infty)$ esto significa que $u \leq t$, más aún $e^{\tilde{R}u} \leq e^{\tilde{R}t}$ y en consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}) &\leq \frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \left[\sup_{u \geq 0} \int_u^\infty e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right] \\ &= \frac{2\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \int_0^\infty e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt = \frac{2\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} K_{\tilde{R}}(F, \tilde{F}), \end{aligned}$$

lo cual prueba el corolario. \square

Nota 7.16. En la situación cuando los valores de R y \tilde{R} son desconocidas pero se saben las siguientes cotas: $0 < h \leq R$ y $0 < q \leq \tilde{R} \leq H$, se demuestran desigualdades análogas a la desigualdad (7.10) y (7.11) con $\delta \in (0, \min\{h, q\})$ en la parte izquierda y con $K_H(F, \tilde{F})$ en la parte derecha.

Capítulo 8

Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo de riesgo a tiempo discreto

8.1. Notaciones

Definición 8.1 (Vea Rincón (2010)). *El proceso de riesgo a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 0\}$ está dado por*

$$X_n = u + n - \sum_{j=1}^n Y_j, \quad \left(\sum_{j=1}^0 Y_j := 0 \right), \quad (8.1)$$

donde u es un entero no negativo que representa el capital inicial de la compañía y Y_1, Y_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto $\{0, 1, \dots\}$ y tales que $\mu := EY_j < 1$.

Notación 6. Denotaremos por F a la función de distribución de cualquier variable aleatoria Y_1, Y_2, \dots y

$$\bar{F}(t) := 1 - F(t). \quad (8.2)$$

También denotaremos una variable aleatoria genérica Y_1, Y_2, \dots por Y .

Definición 8.2. *El modelo de riesgo aproximado a tiempo discreto es el proceso $\{\tilde{X}_n : n \geq 0\}$ dado por*

$$\tilde{X}_n = u + n - \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j, \quad \left(\sum_{j=1}^0 \tilde{Y}_j := 0 \right), \quad (8.3)$$

donde u es como en el modelo (8.1) y $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto $\{0, 1, \dots\}$ y tales que $\tilde{\mu} := E\tilde{Y}_j < 1$.

Notación 7. Denotaremos por \tilde{F} a la función de distribución de cualquier variable aleatoria $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ y

$$\overline{\tilde{F}}(t) := 1 - \tilde{F}(t). \quad (8.4)$$

También denotaremos una variable aleatoria genérica $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ por Y .

Definición 8.3. *La probabilidad de ruina $\psi(u)$ para el modelo (8.1) con horizonte infinito está definido como sigue*

$$\psi(u) = P(\tau < \infty | X_0 = u), \quad (8.5)$$

donde $\tau := \inf\{n > 0 : X_n < 0\}$. Similarmente se define la probabilidad de ruina $\tilde{\psi}(u)$ para el modelo aproximado (8.3) como

$$\tilde{\psi}(u) = P(\tilde{\tau} < \infty : \tilde{X}_0 = u), \quad (8.6)$$

donde $\tilde{\tau} := \inf\{n > 0 : \tilde{X}_n < 0\}$.

Del mismo modo que en el problema a tiempo continuo, establecemos el problema de comparación de las funciones ψ y $\tilde{\psi}$ en términos de algunas distancias entre las funciones de distribución F y \tilde{F} .

Notación 8. La probabilidad de no ruina (o la probabilidad de supervivencia):

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(u) &:= 1 - \psi(u), \\ \overline{\tilde{\psi}}(u) &:= 1 - \tilde{\psi}(u). \end{aligned} \quad (8.7)$$

8.2. Una ecuación para la probabilidad de ruina ψ

Teorema 8.4. *Para el proceso de riesgo a tiempo discreto (8.1), la probabilidad de ruina satisface la siguiente ecuación:*

$$\psi(u) = \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \psi(u-m)\bar{F}(m), \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

donde por convenio $(\sum_{m=0}^{-1} \psi(-m)\bar{F}(m) := 0)$.

Nota 8.5. La misma ecuación como en (8.8) se cumple para la probabilidad de ruina $\tilde{\psi}$ definida en (8.6).

La demostración del Teorema 8.4 puede encontrarse por ejemplo en Rincón (2012).

Definición 8.6. Sea \mathfrak{Y} un conjunto de funciones definido por

$$\mathfrak{Y} := \{y \equiv y(u) \in [0, 1] : u = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Consideraremos el espacio métrico (\mathfrak{Y}, ρ) donde ρ es la métrica uniforme definida análogamente a (3.2).

Definición 8.7. Sean F, \tilde{F} las funciones de distribución de las variables aleatorias Y, \tilde{Y} correspondientes a los modelos (8.1) y (8.3) respectivamente. Para cada $y \in \mathfrak{Y}$ definimos las funciones Sy y $\tilde{S}y$ como sigue:

$$Sy(u) := \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m)\bar{F}(m), \quad u \geq 0. \quad (8.9)$$

$$\tilde{S}y(u) := \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m)\tilde{\bar{F}}(m), \quad u \geq 0. \quad (8.10)$$

Lema 8.8. Para cada $y \in \mathfrak{Y}$, $Sy, \tilde{S}y \in \mathfrak{Y}$.

Demostración. Para cada $u \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 Sy(u) &= \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m)\bar{F}(m) \\
 &\leq \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \bar{F}(m) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}(m) = EY < 1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $Sy \in \mathfrak{Y}$. □

Este lema significa que las expresiones (8.9) y (8.10) definen los operadores

$$\begin{aligned}
 S : \mathfrak{Y} &\longrightarrow \mathfrak{Y} & y \\
 \tilde{S} : \mathfrak{Y} &\longrightarrow \mathfrak{Y}.
 \end{aligned}$$

8.3. Propiedades contractivas del operador S con respecto a la métrica uniforme

Proposición 8.9. *Sea ρ la métrica uniforme definida en (3.2) y sea S el operador definido en (8.9). Entonces S es una contracción en (\mathfrak{Y}, ρ) con módulo $\mu = EY < 1$, es decir, para cada $x, y \in \mathfrak{Y}$,*

$$\rho(Sx, Sy) \leq \mu\rho(x, y). \tag{8.11}$$

Similarmente, el operador \tilde{S} definido en (8.10) es una contracción en (\mathfrak{Y}, ρ) con módulo $\tilde{\mu} = E\tilde{Y} < 1$, es decir, para cada $x, y \in \mathfrak{Y}$

$$\rho(\tilde{S}x, \tilde{S}y) \leq \tilde{\mu}\rho(x, y). \tag{8.12}$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathfrak{Y}$ arbitrarios pero fijos. Estimamos

$$\begin{aligned}
 \rho(Sx, Sy) &= \sup_{u \geq 1} \left| \sum_{m=0}^{u-1} x(u-m) \overline{F}(m) - \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m) \overline{F}(m) \right| \\
 &\leq \sup_{u \geq 1} \sum_{m=0}^{u-1} |x(u-m) - y(u-m)| \overline{F}(m) \\
 &\leq \sup_{u \geq 1} \sum_{m=0}^{u-1} \sup_{s \in [0, u]} |x(s) - y(s)| \overline{F}(m) \\
 &\leq \rho(x, y) \sup_{u \geq 1} \sum_{m=0}^{u-1} \overline{F}(m) \leq \rho(x, y) \sum_{m=0}^{\infty} \overline{F}(m) \\
 &\leq \rho(x, y) EY,
 \end{aligned}$$

tomando $\mu = EY$ tenemos que $\rho(Sx, Sy) \leq \mu \rho(x, y)$, donde $\mu < 1$.

El caso para \tilde{S} es similar. \square

Nota 8.10. Del Teorema 8.4 y las definiciones de los operadores S y \tilde{S} se sigue que

$$\begin{aligned}
 S\psi &= \psi, \\
 \tilde{S}\tilde{\psi} &= \tilde{\psi}.
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Y de la proposición 8.9 se obtiene que las funciones $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$, $u \geq 0$ son soluciones únicas de la ecuación (8.13).

Corolario 8.11. Para las probabilidades de ruina ψ y $\tilde{\psi}$ definidas en (8.5) y (8.6) respectivamente, tenemos

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} \rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}), \tag{8.14}$$

donde $\mu < 1$ fue dado en la Proposición 8.9.

Demostración. Por desigualdad del triángulo y la propiedad de contracción de S tenemos que

$$\begin{aligned}
 \rho(\psi, \tilde{\psi}) &= \rho(S\psi, \tilde{S}\tilde{\psi}) \leq \rho(S\psi, S\tilde{\psi}) + \rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \\
 &\leq \mu \rho(\psi, \tilde{\psi}) + \rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}).
 \end{aligned}$$

Entonces $\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \mu\rho(\psi, \tilde{\psi}) + \rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi})$, o bien $\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu}\rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi})$, con $1 - \mu > 0$ por la condición $\mu < 1$. □

8.4. Una cota superior para $\rho(\psi, \tilde{\psi})$ en el modelo de riesgo a tiempo discreto

Teorema 8.12. *Sean $\psi, \tilde{\psi} \in \mathfrak{M}$ las probabilidades de ruina para los modelos (8.5) y (8.6), entonces*

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu}d(F, \tilde{F}),$$

donde ρ es la métrica uniforme definida en (3.2) y

$$d(F, \tilde{F}) := \sum_{m=0}^{\infty} |F(m) - \tilde{F}(m)|.$$

Para probar el Teorema (8.12) necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 8.13. *Sean S, \tilde{S} operadores definidos en (8.9) y (8.10). Entonces*

$$\rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \leq d(F, \tilde{F}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & \rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \\ &= \sup_{u \geq 0} \left| \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \tilde{\psi}(u-m)\bar{F}(m) - \sum_{m=u}^{\infty} \bar{\tilde{F}}(m) - \sum_{m=0}^{u-1} \tilde{\psi}(u-m)\bar{\tilde{F}}(m) \right| \\ &\leq \sup_{u \geq 0} \left[\sum_{m=u}^{\infty} |\bar{F}(m) - \bar{\tilde{F}}(m)| + \sum_{m=0}^{u-1} \tilde{\psi}(u-m)|\bar{F}(m) - \bar{\tilde{F}}(m)| \right] \\ &\leq \sup_{u \geq 0} \left[\sum_{m=u}^{\infty} |\bar{F}(m) - \bar{\tilde{F}}(m)| + \sum_{m=0}^{u-1} |\bar{F}(m) - \bar{\tilde{F}}(m)| \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} |\bar{F}(m) - \bar{\tilde{F}}(m)| \\ &= d(F, \tilde{F}). \end{aligned}$$

□

Demostración. (Del Teorema 8.12). Por el Corolario 8.15 y la Proposición 8.13 tenemos que $\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} \rho(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} d(F, \tilde{F})$.

Por lo tanto $\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} d(F, \tilde{F})$, como se quería. □

Proposición 8.14. Sean Y, \tilde{Y} variables aleatorias con valores en $\{1, 2, \dots\}$ con funciones de distribución F y \tilde{F} respectivamente. Entonces

$$d(F, \tilde{F}) = K(F, \tilde{F}),$$

donde K es la métrica de Kantorovich definida en (3.3).

Demostración. Dado que $Y, \tilde{Y} \in \{0, 1, 2, \dots\}$, en el intervalo $[k, k+1)$ sus respectivas funciones de distribución son constantes. Por lo tanto el máximo de $|F(t) - \tilde{F}(t)|$ se alcanza en cualquier punto del intervalo $[k, k+1)$, esto conduce a

$$\begin{aligned} K(F, \tilde{F}) &= \int_0^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty |F(k) - \tilde{F}(k)| = d(F, \tilde{F}). \end{aligned}$$

□

Según la última proposición mostrada, podemos reescribir nuestro resultado en el teorema 8.12 como:

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} K(F, \tilde{F}).$$

Capítulo 9

Ejemplos y contraejemplos

Este capítulo ofrece primero un contraejemplo que justifica el uso de la métrica de Kantorovich en la desigualdad (1.8) presentada en el Capítulo 1; luego damos algunos ejemplos numéricos con distribuciones particulares F y \tilde{F} que ilustran nuestros resultados.

9.1. Un contraejemplo

La métrica ρ definida en (3.2) e involucrada en la desigualdad (6.1) es un análogo de la distancia uniforme (o de Kolmogorov) entre las funciones de distribución de variables aleatorias no negativas:

$$Kol(F, \tilde{F}) := \sup_{x \geq 0} |F(x) - \tilde{F}(x)|.$$

La convergencia con respecto a Kol implica la convergencia débil y para funciones de distribución continuas, la convergencia en métrica de Kolmogorov es equivalente a convergencia débil.

Una conjetura que parece ser razonable es que en lugar de la desigualdad (6.1) es posible demostrar la siguiente desigualdad más fuerte:

$$\rho(\psi, \tilde{\psi}) \leq \phi[Kol(F, \tilde{F})], \quad (9.1)$$

donde $\phi(t)$, $t \geq 0$ es una función continua tal que $\phi(t) \downarrow 0$ cuando $t \downarrow 0$.

El siguiente contraejemplo muestra que en efecto las desigualdades como (9.1) no son posibles. Por eso la presencia de la métrica de Kantorovich en

(6.1) es natural. Además, según (5.4)

$$|\psi(0) - \tilde{\psi}(0)| = \frac{\lambda}{c} |\mu - \tilde{\mu}|,$$

con $\mu = EY$ y $\tilde{\mu} = E\tilde{Y}$.

Entonces la cercanía uniforme (en $u \geq 0$) de $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$ requiere la cercanía de los primeros momentos de Y y \tilde{Y} .

Por otro lado, en el Capítulo 3 mencionamos que la convergencia con respecto a la métrica de Kantorovich significa convergencia débil más convergencia de primeros momentos absolutos.

El contraejemplo a (9.1) al que nos referíamos anteriormente, consiste en considerar el modelo (1.1) (modelo real) con una función de distribución F del tamaño de las reclamaciones dadas. Consideraremos también una sucesión de modelos aproximados (1.6) con funciones de distribución \tilde{F}_n , tales que $\tilde{F}_n \implies F$ (converge débilmente), pero para las correspondientes probabilidades de ruina ψ y $\tilde{\psi}_n$ se cumple que $\rho(\psi, \tilde{\psi}_n) \not\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como antes, sean Y y \tilde{Y}_n las variables aleatorias que representan los tamaños de las reclamaciones en el modelo real (1.1) y en el modelo aproximado (1.6), respectivamente.

Escogemos:

$F_Y = \delta_1$ es decir $P(Y = 1) = 1$ y para $n = 1, 2, \dots$

$$\tilde{Y}_n = \begin{cases} 1 & \text{, con probabilidad } p_1 = 1 - 1/n, \\ n & \text{, con probabilidad } p_2 = 1/n. \end{cases}$$

- Denotamos $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$. En el libro Kass, *et al.* (2001) se encuentra el siguiente resultado que presenta una fórmula explícita para calcular la probabilidad de ruina en el caso cuando los tamaños de las reclamaciones Y son variables aleatorias discretas, con un número finitos de valores.
- Si los tamaños de las reclamaciones Y pueden tener solamente un número finito de valores positivos x_1, x_2, \dots, x_m con probabilidades

p_1, p_2, \dots, p_m , entonces la probabilidad de ruina es igual a

$$\psi(u) = 1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k_1, \dots, k_m} (-z)^{k_1 + \dots + k_m} e^z \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{k_j}}{k_j!},$$

donde $z = \frac{\lambda}{c}(u - k_1 x_1 - \dots - k_m x_m)_+$. La suma se extiende sobre todos los valores de $k_1, \dots, k_m = 0, 1, 2, \dots$ tal que z sea positivo.

En nuestro ejemplo tomamos $u = 3$, $\lambda = 1$ y $c = 3$. Entonces, $\theta = 2$. Buscamos el valor z correspondiente al modelo real (1.1). Tenemos que

$$z = \frac{1}{3}(3 - k_1)_+ = \frac{1}{3} \max(0, 3 - k_1)_+.$$

Los valores de k_1 que hacen a z positiva son $k_1 = 0, 1, 2$ con lo cual tenemos que

$$z = \begin{cases} 1 & , \text{si } k_1 = 0, \\ 2/3 & , \text{si } k_1 = 1, \\ 1/3 & , \text{si } k_1 = 2. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\psi(3) = 1 - \frac{2}{3} \left[(-1)^0 e^1 \left(\frac{1^0}{0!} \right) + (-2/3)^1 e^{2/3} \left(\frac{1^1}{1!} \right) + (-1/3)^2 e^{1/3} \left(\frac{1^2}{2!} \right) \right] \approx 0.0018.$$

Para el caso de la variable aleatoria Y_n tenemos que

$$z_n = \frac{1}{3}(3 - k_1 - nk_2)_+.$$

Para $n > 2$, z_n es positiva al tomar $k_2 = 0$ y $k_1 = 0, 1, 2$. Por lo tanto, para cada $n > 2$

$$z_n = \begin{cases} 1 & , \text{si } k_1 = 0, k_2 = 0, \\ 2/3 & , \text{si } k_1 = 1, k_2 = 0, \\ 1/3 & , \text{si } k_1 = 2, k_2 = 0. \end{cases}$$

Para la variable aleatoria Y_n tenemos que $\tilde{\theta} = 3/2 - 1 = 1/2$. Y por lo tanto

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_n(3) &= 1 - \frac{1}{3} \left[(-1)^{0+0} e^1 \left(\frac{(1-1/n)^0 (1/n)^0}{0! 0!} \right) + (-2/3)^{1+0} e^{2/3} \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{(1-1/n)^1 (1/n)^0}{1! 0!} \right) + (-1/3)^{2+0} e^{1/3} \left(\frac{(1-1/n)^2 (1/n)^0}{2! 0!} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left[e^1 - \frac{2}{3} e^{2/3} (1-1/n) + \frac{1}{18} e^{1/3} (1-1/n)^2 \right].\end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_n(3) = 1 - \frac{1}{3} \left(e^1 - \frac{2}{3} e^{2/3} + \frac{1}{18} e^{1/3} \right) \approx 0.5009.$$

Por lo tanto tenemos que $\tilde{\psi}_n(3) \not\rightarrow \psi(3)$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora, trazando las gráficas de las funciones de distribución F y \tilde{F}_n (ver figura 9.1) vemos que $Kol(F, \tilde{F}_n) = 1/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

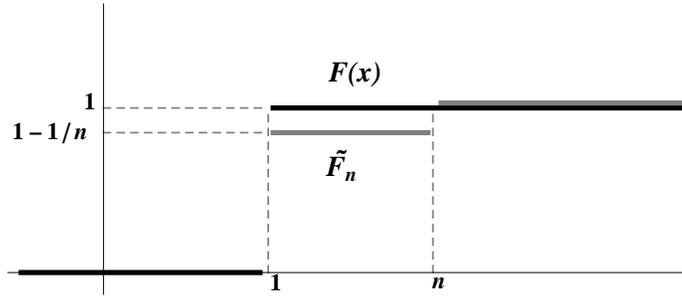


Figura 9.1: Funciones de distribución de Y y \tilde{Y}_n .

9.2. Ejemplo de aplicación de la desigualdad (6.1) cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución exponencial

Consideremos las variables aleatorias $Y \sim \text{Exp}(\kappa = 1)$ y $\tilde{Y}_\varepsilon \sim \text{Exp}(\tilde{\kappa} = 1 + \varepsilon)$ con funciones de distribución denotadas por F y \tilde{F}_ε respectivamente. Sabemos cómo calcular la probabilidad de ruina cuando el tamaño de las

9.2 Ejemplo de aplicación de la desigualdad (6.1) cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución exponencial 59

reclamaciones tienen distribución exponencial (ver (7.7)).

Tomamos $\lambda = 1$ y $c = 2$. Entonces tenemos para nuestro caso que

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{1}{2}e^{-u/2}, \\ \tilde{\psi}_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2(1+\varepsilon)}e^{-(1/2+\varepsilon)u}.\end{aligned}$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}\rho(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon) &= \sup_{u \geq 0} \left| \frac{1}{2}e^{-u/2} - \frac{1}{2(1+\varepsilon)}e^{-(1/2+\varepsilon)u} \right| \\ &= \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \sup_{u \geq 0} [1 + \varepsilon - e^{-\varepsilon u}]e^{-u/2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, la métrica de Kantorovich es:

$$\begin{aligned}K(F, \tilde{F}_\varepsilon) &= \int_0^\infty |1 - e^{-t} - 1 + e^{-(1+\varepsilon)t}| dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} |1 - e^{-\varepsilon t}| dt = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Hacemos uso del programa *Mathematica* para obtener (para ciertos valores de ε) estimaciones para los lados derecho e izquierdo (cálculo de supremos) de (6.1).

ε	$\rho(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon)$	$\frac{\lambda}{c-\mu\lambda}K(F, \tilde{F})$
0.01	0.0056	0.0099
0.1	0.0539	0.0909
0.2	0.0972	0.1667
0.49	0.1852	0.3289

Los resultados numéricos presentados en la tabla de arriba muestran que en el caso particular considerado, la desigualdad de estabilidad (6.1) es bastante precisa (la estimación es aproximadamente el doble del valor estimado).

9.3. Ejemplo de aplicación de la desigualdad (6.1) cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución Gama

A continuación presentamos otro ejemplo de aplicación de la desigualdad (6.1). A diferencia del ejemplo anterior, ahora los montos de las reclamaciones tienen distribución Gama.

Consideramos las variables aleatorias $Y \sim Gama(n = 2, \alpha = 1)$ y $\tilde{Y}_\varepsilon \sim Gama(\tilde{n} = 2, \tilde{\alpha} = 1 + \varepsilon)$ con funciones de distribución denotadas por F y \tilde{F}_ε respectivamente.

En Yuanjiang, *et al.* (2003) (ver Teorema 2 de esta referencia, pág. 139) se ofrece la siguiente fórmula explícita para calcular la probabilidad de no ruina para el modelo clásico de riesgo, en el caso particular cuando los montos de las reclamaciones tienen una distribución Gama con parámetros $n = 2$ y $\alpha > 0$,

$$\bar{\psi}(u) = 1 + \frac{\nu_2(\nu_1 + \alpha)^2}{(\nu_1 - \nu_2)\alpha^2} e^{\nu_1 u} + \frac{\nu_1(\nu_2 + \alpha)^2}{(\nu_2 - \nu_1)\alpha^2} e^{\nu_2 u},$$

donde λ es el parámetro del proceso de Poisson del proceso $N(t)$, c es la entrada de primas por unidad de tiempo a la compañía de seguros y

$$\nu_1 = \frac{\lambda - 2c\alpha + \sqrt{\lambda^2 + 4c\alpha\lambda}}{2c},$$

$$\nu_2 = \frac{\lambda - 2c\alpha - \sqrt{\lambda^2 + 4c\alpha\lambda}}{2c}.$$

Para este ejemplo tomaremos $\lambda = 1$ y distintos valores para la entrada de primas c . Las estimaciones (elaboradas en *Mathematica*) para las partes derecha e izquierda de la desigualdad (6.1) aparecen en la siguiente tabla para distintos valores de ε .

$c = 3$		
ε	$\rho(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon)$	$\frac{\lambda}{c-\mu\lambda} K(F, \tilde{F})$
0.5	0.2931	0.6667
0.2	0.1594	0.3333
0.1	0.0908	0.1818
0.01	0.0104	0.0198

$c = 4$

ε	$\rho(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon)$	$\frac{\lambda}{c-\mu\lambda}K(F, \tilde{F})$
0.5	0.1930	0.3333
0.2	0.1003	0.1667
0.1	0.0557	0.0909
0.01	0.0062	0.0099

$c = 10$

ε	$\rho(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon)$	$\frac{\lambda}{c-\mu\lambda}K(F, \tilde{F})$
0.5	0.0685	0.0833
0.2	0.0345	0.0417
0.1	0.0189	0.0227
0.01	0.0021	0.0025

$c = 100$

ε	$\rho(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon)$	$\frac{\lambda}{c-\mu\lambda}K(F, \tilde{F})$
0.5	0.006672	0.006803
0.2	0.003336	0.003401
0.1	0.001820	0.001855
0.01	0.000198	0.000202

Como puede observarse en la tabla, el lado derecho de (6.1) aproxima bastante bien al lado izquierdo de la cota. De hecho, el caso cuando $c = 10$ ofrece una estimación bastante aceptable.

9.4. Ejemplo de aplicación de la desigualdad (7.10)

De nuevo consideremos las variables aleatorias $Y \sim \text{Exp}(\kappa = 1)$ y $\tilde{Y}_\varepsilon \sim \text{Exp}(\tilde{\kappa} = 1 + \varepsilon)$ con funciones de distribución denotadas por F y \tilde{F}_ε respec-

tivamente.

También tomamos $\lambda = 1$ y $c = 3$.

Los coeficientes de ajuste son (ver Rincón, (2010), pág 220):

$$\begin{aligned} R &= \kappa - \lambda/c = 1 - 1/3 = 2/3. \\ \tilde{R} &= \tilde{\kappa} - \lambda/c = 1 + \varepsilon - 1/3 = 2/3 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Establecemos también el parámetro β que determina la métrica uniforme ponderada ρ_β . Para esto recordemos que $\beta = R_* - \delta$, $R_* = \min(R, \tilde{R}) = R = 2/3$ y $\delta \in (0, R_*)$ puede ser escogida arbitrariamente. Entonces

$$\beta = 2/3 - \delta, \quad \delta \in (0, 2/3).$$

Las respectivas probabilidades de ruina son:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{1}{3}e^{-2/3u}, \\ \tilde{\psi}_\varepsilon(u) &= \frac{1}{3(1+\varepsilon)}e^{-(2/3+\varepsilon)u}. \end{aligned}$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon) &= \sup_{u \geq 0} \left| \frac{1}{3}e^{-2/3u} - \frac{1}{3(1+\varepsilon)}e^{-(2/3+\varepsilon)u} \right| e^{(2/3-\delta)u} \\ &= \frac{1}{3(1+\varepsilon)} \sup_{u \geq 0} [1 + \varepsilon - e^{-\varepsilon u}] e^{-\delta u}. \end{aligned}$$

Y para calcular el lado derecho de la desigualdad (7.10) veamos que

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{c(1 - \overline{M}_\delta)} \left[\sup_{u \geq 0} e^{\beta u} \int_u^\infty |F(t) - \tilde{F}(t)| dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{\tilde{R}t} |F(t) - \tilde{F}(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{3(1 - \overline{M}_\delta)} \times \\ &\quad \left[\sup_{u \geq 0} e^{(2/3-\delta)u} \int_u^\infty e^{-t}(1 - e^{-\varepsilon t}) dt + \sup_{u \geq 0} e^{-\delta u} \int_0^u e^{(-1/3+\varepsilon)t} e^{-t}(1 - e^{-\varepsilon t}) dt \right], \end{aligned}$$

donde

$$\overline{M}_\delta = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{(2/3-\delta)t} e^{-t} dt = \frac{1}{1+3\delta} < 1.$$

Ahora, teniendo las expresiones explícitas para los lados izquierdo y derecho de la desigualdad (7.10), nos ayudamos del programa *Mathematica* para calcular dichas expresiones (cálculo de supremos). Consideramos los casos $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.49$. A continuación se muestra una tabla donde se muestran explícitamente los resultados obtenidos.

ε	δ	$\rho_\beta(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon)$	Lado derecho de (7.10)
0.1	0.49	0.0363	0.0861
	0.2	0.0598	0.2711
	0.1	0.0917	0.7153
	0.01	0.2707	12.9332
0.2	0.49	0.0653	0.1720
	0.2	0.1000	0.6131
	0.1	0.1405	1.5976
	0.01	0.2751	42.6753
0.49	0.59	0.1180	0.3441
	0.49	0.1242	0.4552
	0.3	0.1459	1.1247
	0.2	0.1680	2.9810

La tabla anterior permite evaluar la exactitud de la estimación de la desigualdad (7.10) y da una primera idea de cuál debe ser el valor del “parámetro controlable” δ que provee la diferencia más pequeña entre las partes derecha e izquierda de dicha desigualdad. Como podemos observar en la tabla, la cota (7.10) es “más precisa” para valores de δ “relativamente grandes”.

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado resultados que permiten estudiar la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo. Para obtener las desigualdades presentadas en el Capítulo 4, empleamos el método de operadores contractivos en el modelo clásico de riesgo, este método es muy simple y como mencionamos antes, hasta donde sabemos no se encuentra en la literatura.

En el Capítulo 2 discutimos algunos resultados conocidos en este tema y las principales ventajas que nuestros resultados tienen sobre éstos trabajos. La ventaja más importante que ahora nos gustaría resaltar es el método (muy sencillo) que utilizamos para obtener dichos resultados en esta tesis .

Una situación importante que no podemos dejar de abordar, es considerar algunas extensiones que este trabajo puede tener. A continuación mencionamos algunas de ellas:

1. Obtener nuevas cotas de estabilidad para la probabilidad de ruina con horizonte finito.
2. Considerar una aproximación $\tilde{\lambda}$ de la intensidad desconocida λ de llegadas de las reclamaciones.
3. Aplicando nuestro método de operadores contractivos y métricas probabilísticas, obtener nuevas cotas superiores para un modelo más general que el empleado en este trabajo, por ejemplo el Modelo de Sparre Andersen.

Algunos trabajos antes mencionados (además de los que discutimos en el Capítulo 2) pueden ser de mucha utilidad en una posible investigación de aspectos como los señalados anteriormente.

Bibliografía

- Asmussen, S. and Albrecher, H. (2010). Ruin probabilities. World Scientific Printers.
- Bernouaret, Z. and Aïssani, D. (2010). Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal* 2, 83-92.
- Burnecki, K. and Mista, P. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wrocław University of Technology. www.im.pwr.wroc.pl/hugo.html.
- Cai, J. and Dickson, D. C M. (2003). Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest. *Insurance: Mathematics and Economics* 32, 61-71.
- Chan, G. and Yang, H. (2005). Sensitivity analysis on ruin probabilities with heavy-tailed claims. *Statistical Methodology* 2, 59-63.
- Enikeeva, F., Kalashnikov, V. and Rusaityte, D. (2001). Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 18-39.
- Gerber, H. U. (1979). An introduction to mathematical risk theory. S.S. Huebner Foundation, Wharton School, Philadelphia.
- Gordienko, E. (2004). Stability estimates of generalized geometric sums and their applications. *Kybernetika* Vol. 40, Num. 2, 257-272.
- LeQuoc, P. and Vázquez-Abad, F. J. (2000). Sensitivity analysis for ruin probabilities: Canonical risk model. *Journal of the Operational Research Society*.

- Loisel, S. and Privault, N. (2009). Sensitivity analysis and density estimation for finite-time ruin probabilities. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 230, 107-120.
- Kass, R., Goovaerts, M., Dhaene, J, Deniut, M., (2001). *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers.
- Kartashov, N. V. (1986). Inequalities in theorems of ergodicity and stability for Markov chains with common phase space, I, II. *Theory probability and its applications* 30, 247-259, 507-515.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley and Sons.
- Maldonado Santiago, A. D. (2011). *Probabilidad de ruina con el modelo clásico de Cramer-Lundberg para distribuciones de cola ligera*. (Tesis de licenciatura). Universidad Tecnológica de la Mixteca. Huajuapán de León, Oaxaca, México.
- Marceau, E. and Rioux, J. (2001). On robustness in risk theory. *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 167-185.
- Meyn, S. and Tweedie, R. (1993). *Markov chains and stochastic stability*. Springer, New York.
- Rachev, S. T. and Rüschendorf, L. (1998). *Mass transportation problems. Vol. II: Applications*. Springer.
- Rachev, S. T. (1991). *Probability metrics and the stability of stochastic models*. John Wiley and Sons.
- Rincón, L. (2012). *Introducción a la teoría del riesgo*. 1ra ed. México: UNAM, Facultad de Ciencias.
- Rolski, T., Schmidli, H. and Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley and Sons.
- Rusaityte, D. (2001). *Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments*. Laboratory of actuarial mathematics, University of Copenhagen. Working paper No. 178.

-
- Schal, M. Control of ruin probabilities by discrete-time investments. Ins. Angew, Math. Univ. Bonn, D-53115 Bonn, Wegelerstr. 6.
- Yuanjiang, H., Xucheng, L. and Zhang, J. (2003). Some results of ruin probability for the classical risk process. Journal of applied mathematics and decision sciences 7(3), 133-146.