



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
IZTAPALAPA**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE PROCESOS E  
HIDRÁULICA

---

# **MODELO MATEMÁTICO PARA LA SÍNTESIS DE SERVICIOS AUXILIARES**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA QUÍMICA**

PRESENTA:

**I.Q. ANGELICA ELIZABETH BONILLA BLANCAS**

ASESOR DE TESIS:

**DR. JUAN MANUEL ZAMORA MATA**

2004

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Raul Lugo Leyte

Por todos los conocimientos y el apoyo brindado durante el desarrollo de esta tesis.

Al laboratorio de Síntesis, Optimización y Simulación de la Universidad Autónoma  
Metropolitana-Iztapalapa, Ciencias Básicas e Ingeniería

Por las facilidades otorgadas en sus instalaciones.

Al Dr. Juan Manuel Zamora Mata

Por su paciencia y conocimientos.

**A mi madre**

# ÍNDICE

## AGRADECIMIENTOS

## ÍNDICE DE FIGURAS

## ÍNDICE DE TABLAS

### Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Definición del problema.....	3
1.3 Revisión bibliográfica.....	4
1.3.1 Enfoques que minimizan la pérdida de energía disponible.....	5
1.3.2 Enfoques de superestructura.....	6
1.3.3 Optimización de sistemas de servicios auxiliares con topología fija.....	8
1.4 Motivación.....	10
1.5 Organización de esta tesis.....	10

### Capítulo 2. PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

2.1 Introducción.....	13
2.2 Problemas de programación lineal.....	13
2.3 Problemas de programación no lineal.....	14
2.4 Problemas de programación lineal mixta-entera.....	16
2.4.1 Formulación de restricciones lógicas.....	18
2.4.2 Ejemplo 2.1.....	20
2.4.3 Ejemplo 2.2.....	23
2.4.4 Método de ramificación y acotamiento para resolver problemas de programación lineal mixta-entera.....	26
2.4.5 Ejemplo 2.3. ....	29

2.5 Problemas de programación no lineal mixta-entera.....	31
2.5.1 Aproximaciones exteriores.....	33
2.5.2 Ejemplo 2.4.....	36
2.5.3 Aproximaciones exteriores con relajación de igualdades	40
2.5.4 Ejemplo 2.5.....	43
2.5.5 Aproximaciones exteriores con relajación de igualdades y penalizaciones aumentadas.....	46
2.5.6 Ejemplo 2.6.....	48
2.6 Conclusiones.....	55

**Capítulo 3. MODELADO MATEMÁTICO Y TERMODINÁMICA DE CICLOS DE VAPOR PARA LA GENERACIÓN DE CALOR Y POTENCIA**

3.1 Introducción.....	56
3.2 Ciclos de vapor para la generación de potencia.....	56
3.2.1 Eficiencia isentrópica de la turbina.....	57
3.2.2 Ciclo Rankine con sobrecalentamiento.....	58
3.2.3 Ciclo Rankine con sobrecalentamiento y recalentamiento.....	59
3.2.4 Ciclo Rankine regenerativo.....	60
3.2.5 Eficiencia térmica.....	64
3.3 Modelado matemático.....	65
3.3.1 Modelado matemático de un generador de vapor.....	66
3.3.2 Modelado matemático de un cabezal de vapor.....	67
3.3.3 Modelado matemático de turbinas de vapor.....	68
3.3.1 Modelado matemático de un intercambiador de calor.	72
3.4 Conclusiones.....	74

**Capítulo 4. UN MODELO LINEAL MIXTO-ENTERO PARA LA SÍNTESIS DE SISTEMAS DE SERVICIOS AUXILIARES**

4.1 Introducción.....	75
4.2 Ejemplo ilustrativo.....	75

4.3 Enfoque de superestructura.....	77
4.3.1 Superestructura asociada al ejemplo ilustrativo.....	78
4.4 Modelo lineal mixto-entero de Papoulias y Grossmann.....	81
4.5 Solución para el ejemplo ilustrativo según el modelo de Papoulias y Grossmann.....	84
4.6 Análisis de accesibilidad a los estados termodinámicos considerados.....	87
4.7 Conclusiones.....	92

**Capítulo 5. MODELO NO LINEAL MIXTO-ENTERO PARA LA SÍNTESIS  
DE SISTEMAS DE SERVICIOS AUXILIARES**

5.1 Introducción.....	93
5.2 Expansión de la región de búsqueda.....	94
5.3 Modelo no Lineal Mixto-Entero para la Síntesis de Sistemas de Servicios Auxiliares.....	96
5.4 Metodología de solución.....	100
5.5 Ejemplo ilustrativo.....	103
5.5.1 Solución óptima 1.....	104
5.5.2 Solución óptima 2.....	106
5.5.3 Solución óptima 3.....	108
5.5.4 Solución óptima 4.....	109
5.6 Análisis paramétrico.....	112
5.7 Análisis paramétrico para diferentes demandas de vapor de baja presión.....	113
5.8 Análisis paramétrico para diferentes demandas de agua deaerada.....	117
5.9 Conclusiones.....	118

**Capítulo 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO**

6.1 Conclusiones.....	120
6.2 Trabajo futuro.....	124

<b>Referencias</b> .....	125
Apéndice A1.....	128
Apéndice A2.....	143
Apéndice A3.....	146

# ÍNDICE DE FIGURAS

## CAPÍTULO 1

Figura 1.1. Subsistemas de una industria de proceso químico	2
Figura 1.2. Problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares	4

## CAPÍTULO 2

Figura 2.1. Solución óptima para el Ejemplo 2.1	22
Figura 2.2. Solución óptima del Ejemplo 2. 2	25
Figura 2.3. Diagrama de árbol del Ejemplo 2.3	31
Figura 2.4. Iteraciones del Ejemplo 2.4	40
Figura 2.5. Iteraciones del Ejemplo 2.6	53

## CAPÍTULO 3

Figura 3.1. Eficiencia isentrópica de la turbina de vapor	57
Figura 3.2. Ciclo Rankine con sobrecalentamiento	58
Figura 3.3. Temperatura entropía para el ciclo Rankine con sobrecalentamiento	59
Figura 3.4. Ciclo Rankine con sobrecalentamiento y recalentamiento	59
Figura 3.5. Temperatura entropía para el ciclo Rankine con sobrecalentamiento y recalentamiento	60
Figura 3.6. Adición de calor de un ciclo Rankine con sobrecalentamiento	61
Figura 3.7. Ciclo Rankine regenerativo con un calentador de agua de alimentación abierto	62
Figura 3.8. Temperatura entropía para el ciclo Rankine regenerativo con calentador de agua de alimentación abierto	63
Figura 3.9. Ciclo Rankine regenerativo con calentador de agua de alimentación cerrado	63
Figura 3.10. Temperatura entropía del ciclo Rankine regenerativo con calentador de agua de alimentación cerrado	64
Figura 3.11. Generador de vapor	66
Figura 3.12. Cabezal de vapor	67

Figura 3.13. Turbina que opera a contrapresión o a condensación	68
Figura 3.14-a	69
Figura 3.14-b	69
Figura 3.15-a	71
Figura 3.15-b	71
Figura 3.16. Intercambiador de calor	72

## **CAPÍTULO 4**

Figura 4.1. Superestructura propuesta por Papoulias y Grossmann	79
Figura 4.2. Un ciclo termodinámico incluido en la superestructura	80
Figura 4.3. Una configuración de operación alternativa incluida en la superestructura	80
Figura 4.4. Solución Lineal-1 del ejemplo ilustrativo, según el modelo de Papoulias y Grossmann	85
Figura 4.5. Análisis termodinámico de la solución Lineal-1	88
Figura 4.6. Superestructura con posibles condiciones de operación	89
Figura 4.7-a. Temperatura entropía para las posibles condiciones de operación del ejemplo ilustrativo, con eficiencia isentrópica de expansión $\eta_{sit} = 0.7$	90
Figura 4.7-b. Temperatura entropía para las posibles condiciones de operación del ejemplo ilustrativo, con eficiencia isentrópica de expansión $\eta_{sit} = 0.9$	91

## **CAPÍTULO 5**

Figura 5.1. Atemperamiento a la salida de las turbinas	94
Figura 5.2 Atemperamiento a la salida de las válvulas de expansión	95
Figura 5.3. Superestructura enriquecida	96
Figura 5.5. Solución óptima 1	105
Figura 5.6. Solución óptima 2	107
Figura 5.7. Solución óptima 3	108
Figura 5.8. Solución óptima 4	109
Figura 5.9. Diferentes demandas de vapor de baja presión	113
Figura 5.10. Eficiencia térmica para diferentes demandas de vapor de baja presión	114

Figura 5.11-a. Vapor de presión media generado por la caldera de calor de desecho	115
Figura 5.11-b. Flujo de combustible	115
Figura 5.11-c. Trabajo motor generado por cada turbina	116
Figura 5.12. Diferentes demandas de agua deaerada	117
Figura 5.13. Eficiencia térmica para diferentes demandas de agua deaerada	118

## **APÉNDICE A2**

Figura A2.1. Aproximación de costos para generador de vapor	143
Figura A2.2. Aproximación de costos para deaerador	144
Figura A2.3. Aproximación de costos para caldera de calor de desecho	144
Figura A2.4. Aproximación de costos bomba	145

## **APÉNDICE A3**

Figura A3.1. Eficiencia isentrópica en función del trabajo motor generado	146
---	-----

# ÍNDICE DE TABLAS

## CAPÍTULO 2

Tabla 2.1. Especificaciones de operación para las máquinas del Ejemplo 2.1	20
Tabla 2.2. Especificaciones para las calderas	23
Tabla 2.3. Especificaciones para las turbinas	23
Tabla 2.4. Solución óptima para el Ejemplo 2.2	26

## CAPÍTULO 3

Tabla 3.1. Eficiencia térmica	64
-------------------------------	----

## CAPÍTULO 4

Tabla 4.1. Demandas de servicios auxiliares	76
Tabla 4.2. Disponibilidad de otras secciones del proceso	76
Tabla 4.3. Condiciones de operación del equipo y del vapor	77
Tabla 4.4. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Lineal-1	85
Tabla 4.5. Costos de operación	86
Tabla 4.6. Costos de capital asociados a cada unidad de la solución Lineal-1	87
Tabla 4.7. Resumen de accesibilidad de las condiciones de operación	92

## CAPÍTULO 5

Tabla 5.1. Soluciones encontradas con la metodología de solución Continua 1-Lineal 1	104
Tabla 5.2. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-1	105
Tabla 5.3. Costos de capital asociados a cada unidad de la solución Óptima 1	106
Tabla 5.4. Costos de operación	106
Tabla 5.5. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-2	107
Tabla 5.6. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-3	109
Tabla 5.7. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-4	110
Tabla 5.8. Costos de capital asociados a cada unidad de la solución Óptima 4	111
Tabla 5.9. Costos de operación asociados a la solución Óptima 4	111
Tabla 5.10. Condiciones de operación óptimas y demandas para el ejemplo ilustrativo	112

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes

Una industria de proceso químico se puede dividir en tres secciones de acuerdo con las tareas llevadas a cabo: sistema de proceso, red de recuperación de calor y sistema de servicios auxiliares, tal como se representa en la Figura 1.1.

En el sistema de proceso se realiza la transformación de materias primas en los productos deseados, esta sección incluye los procesos de reacción y separación. En el sistema de proceso se consume la mayor parte de la energía total suministrada a la industria de proceso, dicha energía se emplea para calentar corrientes de alimentación para proceso, suministrar calor a reacciones químicas, generación de vapor, impulso de bombas, compresores, turbinas, etc.

La red de recuperación de calor, tiene como objetivo, la integración y aprovechamiento de la energía disponible en la sección de proceso, intercambiando calor entre corrientes calientes y frías, ya que es importante reutilizar la energía de alto nivel. Empleando una red de intercambio de calor óptimo se minimiza la cantidad y en algunos casos la calidad de la energía suministrada al proceso.

El sistema de servicios auxiliares es la sección de la planta que abastece al proceso las demandas de potencia eléctrica, calentamiento y enfriamiento no satisfechas por la red de intercambio de calor, vapor a diferentes niveles de presión y temperatura, refrigeración, aire comprimido y agua, principalmente. El sistema generador de calor y potencia debe ser flexible, ya que dependiendo de los requerimientos impuestos por el sistema de proceso, la cantidad total de servicios auxiliares demandados puede variar. Entonces, la dimensión del sistema de servicios auxiliares queda fuertemente determinada por el subsistema de proceso y la red de intercambio de calor.

Los sistemas de servicios auxiliares están constituidos principalmente por generadores de vapor, calderas de recuperación de calor, turbinas de alta, media ó baja presión, a condensación o a contrapresión, válvulas de expansión, condensadores, deaeradores, bombas y cabezales de vapor, entre otras unidades. El fluido de trabajo fundamental es agua de alta calidad que se emplea para generar vapor. Las variables decisivas que determinan el sistema de servicios auxiliares son temperatura, presión y flujo másico de agua o vapor en cada punto del sistema, en función de las demandas requeridas por el sistema de proceso y la red de intercambio de calor.

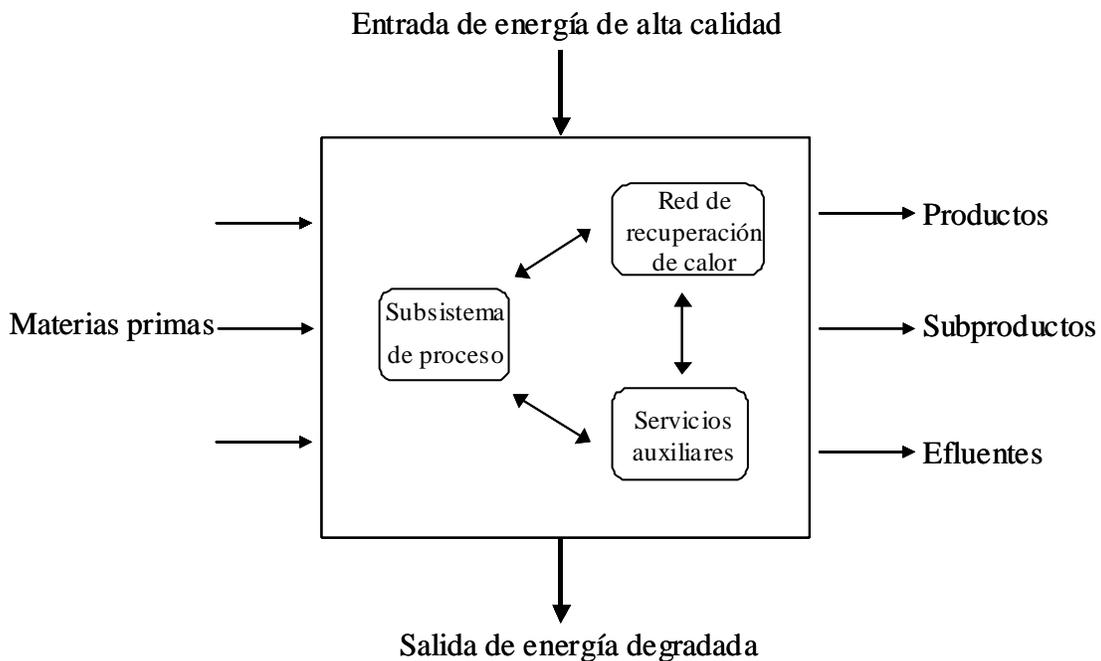


Figura 1.1. Subsistemas de una industria de proceso químico.

Una meta en la ingeniería química consiste en diseñar y producir sistemas de proceso cada vez más eficientes. La labor de diseño inicia con el desarrollo de una descripción abstracta que permite realizar conceptualmente las tareas que se demandan al sistema que se quiere diseñar. Esta labor de síntesis es por tanto un proceso en si mismo, el cual incluye la selección de pasos de transformación y los equipos e interconexiones para conformar el sistema, que llevará a cabo la tarea esencial correspondiente. La síntesis de procesos

químicos debe determinar la configuración del esquema de proceso así, como el valor de las variables de diseño y operación que busquen minimizar los costos totales del proceso.

## 1.2 Definición del Problema

Una industria química debe satisfacer sus demandas energéticas, tales como electricidad, potencia y vapor a diferentes niveles de presión en función de los requerimientos del sistema de proceso y la red de intercambio de calor. En este trabajo se asume que el conjunto de posibles condiciones de operación del vapor a diferentes niveles de presión, está determinado por la sección del proceso en el cual se demanda el mismo. Además, se supone que el conjunto de demandas de agua, vapor y electricidad a satisfacer no varían con el tiempo.

### *Problema de Síntesis de Sistemas de Servicios Auxiliares*

**El problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares que se aborda en esta tesis se declara de la siguiente manera dados un conjunto de demandas invariantes de electricidad, potencia motriz, vapor a determinados niveles de presión y temperatura y agua de proceso, debe sintetizarse un sistema de servicios auxiliares de tal manera que se determinen su configuración, unidades constituyentes con sus respectivas capacidades, condiciones de operación, flujos de energía y masa en cada punto del sistema, para que el sistema de servicios auxiliares diseñado satisfaga las demandas requeridas por el proceso químico con un costo total mínimo. Figura 1.2.**

### *Suposiciones Adicionales*

Para modelar el problema abordado, se considera que la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor es constante o función del trabajo motor generado, algunas unidades del sistema tienen más de una posibilidad de operación y a lo más pueden operar en una de ellas, no hay caídas de presión significativas dentro de las unidades y sus correspondientes interconexiones. Una fracción del vapor que suministra energía al proceso regresa como condensado. Se asume que no existen pérdidas de energía en el sistema y la planta de

tratamiento de agua es la adecuada para abastecer las necesidades del sistema de servicios auxiliares.

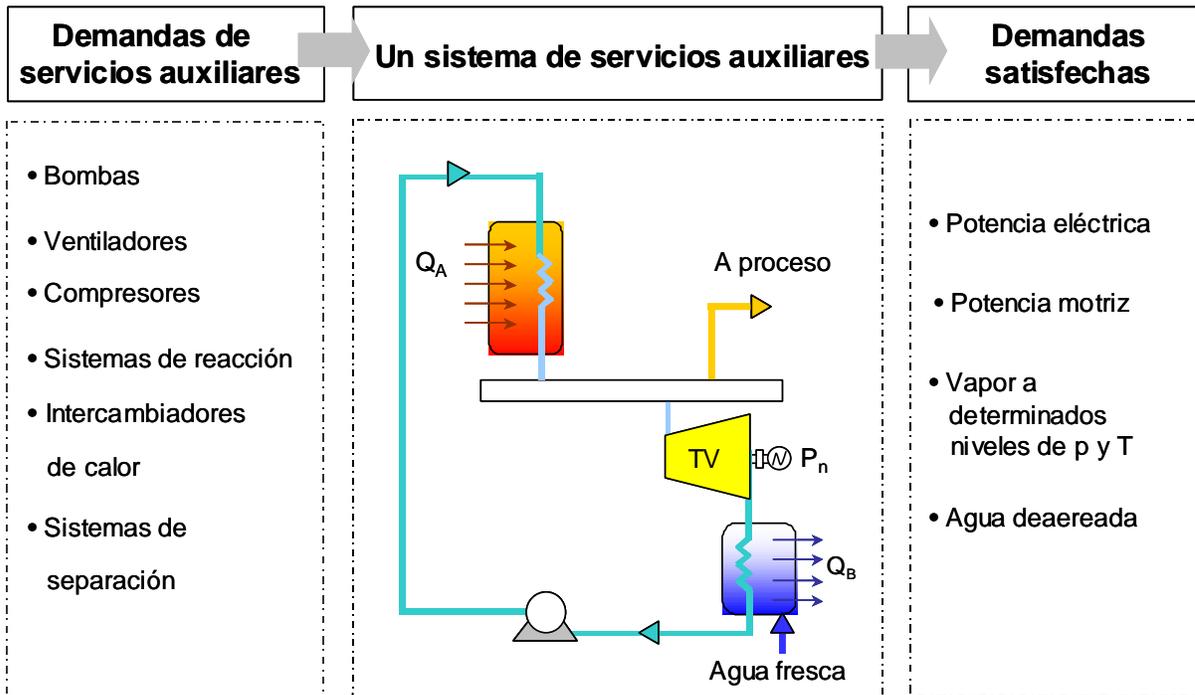


Figura 1.2. Problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares.

### 1.3 Revisión Bibliográfica

Para cumplir con los objetivos del problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares, se han propuesto diversas metodologías bajo diversas suposiciones con diferentes metas de diseño. Dichas metodologías están basadas principalmente en: reglas heurísticas, principios físicos y termodinámicos y en la optimización de alguna función objetivo. Las principales metodologías de síntesis encontradas en la literatura se describen brevemente a continuación:

### *1.3.1 Enfoques que minimizan la pérdida de energía disponible*

Nishio y Umeda (1982) proponen una metodología para minimizar la pérdida de energía disponible. Resolver el balance de energía correspondiente a la energía total del sistema resulta complejo, Nishio y col. dividen el problema de minimizar la energía disponible en dos subproblemas: minimizar la pérdida de energía disponible para el sistema de proceso, y minimizar la pérdida de energía disponible para el sistema de vapor y potencia.

El modelo para minimizar la pérdida de energía disponible en el proceso lo resuelven disponiendo de las demandas apropiadas de vapor y potencia. La pérdida de energía disponible del sistema generador de vapor-potencia se modela con los balances de materia y energía apropiados, manteniendo constante la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor.

Posteriormente clasifican las demandas del sistema como: potencia-dominantes y vapor-dominantes. Las demandas son potencia-dominantes se requiere flujo de vapor a condensación y por lo tanto son necesarias turbinas de contrapresión y de condensación en el sistema. Y son vapor-dominantes si únicamente se requieren turbinas de contrapresión, en donde el flujo de vapor a condensación es cero.

Petroulas y Reklaitis (1984) abordan el problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares minimizando la pérdida de energía disponible, ellos dividen el procedimiento para la síntesis y diseño de sistemas de servicios auxiliares en dos subproblemas. El primero es la selección de cabezales de vapor que modelan como un problema de programación lineal y consiste en determinar la temperatura y presión de cada nivel, minimizando la pérdida de energía disponible. Para resolver el modelo de programación lineal los autores fijan la temperatura máxima del sistema y el número de niveles de presión.

En el segundo subproblema debe determinarse si las demandas de potencia motriz se satisfacen a través de turbinas de vapor o de motores eléctricos. Empleando un modelo de programación lineal mixta-entera para minimizar los costos asociados a las importaciones de vapor y electricidad. En esta etapa el flujo de vapor excedente disponible en cada nivel de

presión, generado en las calderas de recuperación o proveniente de expansiones, se divide entre las turbinas de vapor para potencia motriz y el generador de potencia eléctrica.

Petroulas y Reklaitis asumen valores fijos para la temperatura inicial y final de cada corriente de calor de desecho y de cada corriente con necesidades de carga térmica, así como la presión mínima permitida de cada demanda de vapor. Además, los estados del vapor a diferentes niveles de presión, excepto el nivel de presión más alto, se relacionan con la temperatura por medio de una curva de operación definida a través de una eficiencia isentrópica constante para cada turbina de vapor dada. De esta manera a partir de las condiciones del vapor en el cabezal de alta presión, y con el valor de la eficiencia isentrópica constante es posible calcular los estados inferiores del vapor.

### *1.3.2. Enfoques de superestructura*

Papoulias y Grossmann (1983) presentan un enfoque de superestructura basado en programación lineal mixta entera, que minimiza costos de operación.

El primer paso en la metodología de Papoulias y Grossmann es la derivación de una configuración general o superestructura, que contemple todas las probables configuraciones que pueden considerarse, y de las cuales se selecciona la solución óptima. Esta superestructura contiene un número finito de unidades de proceso con sus correspondientes interconexiones.

Una vez desarrollada la superestructura de servicios auxiliares, el segundo paso es formular el problema de síntesis como un problema de programación lineal mixta-entera. Asociando variables binarias y continuas a las unidades constitutivas de la configuración general. Las variables continuas representan la capacidad de todas las unidades y flujos de corrientes (aire, gases calientes, combustible, vapor y agua). Un conjunto de variables binarias asignadas representan la existencia o no existencia de las unidades de la superestructura y el estado de operación de las unidades existentes. Las presiones y temperaturas en determinadas unidades de la superestructura son tratadas como un conjunto de valores discretos, para modelar estos

estados, se emplea otro conjunto de variables binarias, que indican la existencia o no existencia de estos estados.

Para formular y resolver el modelo de programación lineal mixta-entera (PL-ME) de Papoulias y Grossmann es necesario conocer la entalpía y entropía para las corrientes de vapor, eficiencia isentrópica constante de las turbinas y correlaciones de costos para todas las unidades y servicios.

Otros autores que emplean el enfoque de superestructura son Colmenares y Seider (1984), que proponen un procedimiento de programación no lineal para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, que se basa en el uso de superestructuras constituidas por ciclos Rankine en cascada, esto es una sucesión de ciclos Rankine que interactúan intercambiando energía, el objetivo de diseño consiste en minimizar los costos de los servicios externos ó los costos anualizados. El sistema de servicios auxiliares se integra con la red de intercambio de calor del proceso para encontrar una configuración óptima de operación, que satisface las demandas de calentamiento y potencia de una planta química.

Para desarrollar el modelo, Colmenares y Seider asumen que: la única fuente de calor disponible para el proceso proviene de los condensadores de la cascada de ciclos Rankine, la combustión se emplea únicamente para abastecer el calor necesario para sobrecalentar el vapor. También suponen que los flujos másicos, entalpías y temperaturas inicial y final de cada corriente de proceso tienen valores fijos.

La metodología de síntesis propuesta por Colmenares y Seider básicamente consiste en determinar la temperatura de punto de pliegue de la red de intercambio de calor, para después plantear y resolver el modelo de programación no lineal, que acopla la red de intercambio de calor factible con las máquinas térmicas del sistema de servicios auxiliares, minimizando una función objetivo.

Para calcular la temperatura del punto de pliegue, Colmenares y Seider en un trabajo posterior (1987) emplean el método de intervalos de temperatura agrupados. Una vez

calculado y agrupado el número de intervalos de temperatura, se definen los límites de temperatura, en los cuales debe abastecerse calor al proceso, así como la cantidad de calor requerida.

Como algunas ecuaciones que constituyen el modelo programación no lineal tienen derivadas discontinuas, el algoritmo de optimización que emplean Colmenares y Seider para resolver el modelo, está constituido por dos etapas, la primera etapa se trata de un ciclo exterior que optimiza presiones y temperaturas del sistema; y la segunda etapa es un ciclo interno que optimiza flujos de vapor y servicios externos.

### *1.3.3 Optimización de sistemas de servicios auxiliares con topología fija*

Yoo y col. (1996) desarrollan un método sistemático para modelar y simular sistemas de servicios auxiliares con topología fija, que determina las condiciones óptimas de operación. Las condiciones óptimas de operación determinadas son: la cantidad de vapor generado, la distribución de flujos de vapor en todo el sistema y el número de turbinas que deben operar.

Para el modelado del sistema generador de vapor y de potencia eléctrica, los autores suponen que las condiciones de operación de los cabezales están fijas y la eficiencia isentrópica de las turbinas es constante. El criterio de optimización consiste en minimizar la pérdida de energía disponible, concentrándose en disminuir las fuentes de irreversibilidades.

Yoo y col. dividen el problema de modelado y simulación en dos etapas. La primera etapa consiste en modelar la sección de combustión del generador de vapor como función de la cantidad de vapor sobrecalentado generado, la temperatura del aire a la entrada de la caldera y el porcentaje exceso de aire. La cantidad de combustible necesario para la generación de vapor y la eficiencia de la combustión, se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales obtenido en esta sección; el sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Newton.

La segunda etapa tiene por objetivo optimizar la distribución del vapor generado. La función objetivo maximiza el flujo neto de vapor a través de las turbinas, para minimizar el flujo de vapor que se degrada estrangulándose en las válvulas de expansión, que conectan cabezales que operan a diferentes niveles de presión.

Recientemente Rodríguez-Toral y Morton (2001) propusieron un modelo matemático de ecuaciones simultáneas para la optimización de sistemas de servicios auxiliares con configuración fija. El enfoque de ecuaciones simultáneas implica el modelado de un proceso termodinámico como un sistema de ecuaciones no lineales. Las no linealidades algebraicas del sistema se generan por el uso de ecuaciones termodinámicas precisas, empleadas para calcular los estados termodinámicos de las corrientes de vapor/agua y aire en cada punto del sistema.

Para desarrollar el modelo de ecuaciones simultáneas Rodríguez-Toral y Morton asumen constante la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor y que todas las ecuaciones que describen el modelo al menos tengan segunda derivada.

Rodríguez-Toral y Morton realizan un análisis termodinámico riguroso de las corrientes de vapor/agua y aire del sistema de servicios auxiliares a partir de un conjunto de variables y ecuaciones de estado. El conjunto de variables utilizadas para describir las corrientes de vapor/agua son: flujo másico, presión, entalpía específica, entalpía, temperatura, entropía, fracción de vapor, calidad, temperatura de saturación y entalpías de líquido y vapor saturados. Rodríguez-Toral y Morton también emplean correlaciones físicas para calcular las variables dependientes. Las corrientes de vapor/agua presentan algunas dificultades para modelarse, debido a la posible existencia de diferentes fases. La formulación de esto sin introducir variables enteras se hace a través de ecuaciones no suaves; para resolver dichas ecuaciones se emplean aproximaciones polinomiales en la vecindad de los puntos no diferenciables. El uso de estos polinomios aumenta el tamaño del sistema de ecuaciones no lineales.

## 1.4 Motivación

Como ha sido expuesto en la sección previa, existen dos tendencias básicas en la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, una se enfoca hacia el modelado matemático y la otra al análisis de la termodinámica inherente al sistema. Los autores que se orientan hacia el modelado matemático con metas de diseño que minimizan los costos de operación o la pérdida de energía disponible, han tratado hasta el momento la termodinámica del sistema con un análisis simplificado que genera limitaciones en las condiciones y estados de operación que pueden ser alcanzados por el sistema. Por otra parte, los autores que abordan un análisis termodinámico riguroso, optimizan sistemas con configuración fija, evitando formular modelos matemático muy complejos debido al tamaño que estos pueden tener al acoplarse con las ecuaciones termodinámicas que describen el sistema en análisis.

En este trabajo se desarrolla una metodología de síntesis de sistemas de servicios auxiliares que conjunta un modelado matemático y un análisis termodinámico que incluye el manejo de la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor como función del trabajo motor generado y de las condiciones del vapor requeridas por el sistema de proceso. Logrando así, una descripción matemática más apegada a la operación real de los sistemas de servicios auxiliares y una expansión en la región de búsqueda de una solución óptima.

## 1.5 Organización de esta Tesis

En esta tesis se realiza un manejo de la termodinámica involucrada, que expande de manera importante el espacio de búsqueda para el sistema de servicios auxiliares óptimo, desarrollando así una superestructura enriquecida, a partir de la propuesta hecha por Papoulias y Grossmann (1983).

En el Capítulo 2, Problemas de Programación Matemática, se presentan los conceptos básicos de programación lineal mixta entera, de programación no lineal mixta-entera y el uso de variables enteras para formular restricciones lógicas de operación y existencia de unidades. También, se describen en este capítulo el algoritmo de ramificación y acotamiento

para la solución de modelos de programación lineal mixta-entera y el algoritmo de aproximaciones exteriores con sus respectivas mejoras para la solución de modelos de programación no lineal mixta-entera.

En el Capítulo 3, se describe la operación de ciclos de vapor para la generación de potencia y se realiza un análisis termodinámico de las implicaciones que tienen las condiciones de operación en cada ciclo. Para así, formular el modelo matemático correspondiente a cada unidad del sistema. En el modelado se deben considerar restricciones del tipo, una unidad puede existir o no, cada unidad tiene más de una posible condición de operación, pero a lo más puede operar en una sólo condición, entre otras.

En el Capítulo 4 se discute la metodología de síntesis de sistemas de servicios auxiliares, propuesta por Papoulias y Grossmann, que con un modelo de programación lineal mixta-entera, tienen como meta de diseño minimizar los costos de operación y diseño. Las deficiencias de este modelo se muestran con la solución y análisis de un ejemplo ilustrativo.

En el Capítulo 5 se propone una metodología para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares con el enfoque de superestructura, que incluye un análisis termodinámico riguroso que corrige algunas de las deficiencias encontradas en las metodologías descritas por otros autores. A diferencia de los modelos propuestos anteriormente, en este modelo se incluye la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor como una función del trabajo motor generado. La superestructura asociada, es una extensión mejorada de la propuesta por Papoulias y Grossmann (1983), que básicamente es un ciclo Rankine con regeneración y recalentamiento que incluye cabezales de alta, media y baja presión. El calor necesario para generar el vapor puede provenir de calderas de recuperación de calor o de combustión directa. Las turbinas de vapor pueden ser de alta o baja presión; y operar a contrapresión o a condensación con extracción, el flujo de vapor a la salida de las turbinas se puede atemperar para cumplir con las condiciones requeridas en la unidad a la cual se alimenta. La metodología de síntesis propuesta se ilustra con formulación del modelo del ejemplo ilustrativo del Capítulo 5.

En este mismo Capítulo 5, también se desarrolla una metodología de solución para el modelo de programación matemática no lineal mixta-entera y se hace un análisis paramétrico que complementa la solución del problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares abordado.

En la sección de apéndices se incluyen: el modelo de programación no lineal mixta-entera detallado para el ejemplo ilustrativo y el cálculo de los costos para cada unidad de la superestructura.

## CAPÍTULO 2

# PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

### 2.1 Introducción

Con el aumento en los costos de la energía, la competitividad por colocarse en el mercado y las normas ambientales cada vez más exigentes, la síntesis de sistemas de servicios auxiliares radica en determinar una configuración y condiciones de operación de una planta de servicios auxiliares que, además de satisfacer el conjunto de demandas requeridas, cumpla con una meta de diseño. En la síntesis de sistemas de servicios auxiliares empleando un modelo matemático, se propone una representación explícita o implícita de procesos de flujo, que subsecuentemente se formulan como un modelo de optimización. La programación matemática, se considera el enfoque más robusto para optimizar el diseño y la operación de sistemas. En este capítulo se describen algunos conceptos básicos de programación lineal (PL), programación no lineal (PNL), programación lineal mixta-entera (PL-ME), programación no lineal mixta-entera (PNL-ME), modelado de restricciones lógicas empleando variables binarias, el algoritmo de ramificación y acotamiento para resolver problemas PL-ME y el algoritmo de aproximaciones exteriores para resolver problemas PNL-ME.

### 2.2 Problemas de Programación Lineal

La programación se basa en un modelo matemático que mediante ecuaciones y desigualdades describe el sistema en estudio. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser expresiones lineales. En este caso, la palabra programación en esencia es sinónimo de planeación. Así, la programación lineal trata la planeación de actividades empleando un modelo lineal, que permita encontrar una solución óptima, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (acorde al modelo matemático propuesto) entre diversas alternativas de solución.

Entonces, un problema de programación lineal está constituido por:

- Una función objetivo lineal, definida por una combinación lineal de variables de decisión, que se desea optimizar (maximizar o minimizar). El criterio de optimización generalmente es económico.
- Restricciones lineales, que constituyen el modelo del proceso.

Esto se puede expresar como:

$$\text{Minimizar o Maximizar } c^T x$$

Sujeto a:

$$Ax \leq b$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x \geq 0$$

Donde  $c^T x$  constituye la función objetivo, que depende de un número finito de variables de diseño,  $x$ , relacionadas a través de una o más restricciones  $Ax \leq b$ , con  $A$  una matriz y  $b$  un vector de coeficientes.

### 2.3 Problemas de Programación No Lineal

La descripción de un sistema termodinámico empleando un modelo matemático incluye, entre otras ecuaciones, a los balances de materia y energía, ecuaciones de estado, restricciones de capacidad y condiciones de operación. Asumiendo algunas simplificaciones estas ecuaciones se pueden formular linealmente, sin embargo un modelado más apegado a la operación real de los sistemas termodinámicos en estudio, puede generar términos no lineales en el modelo. Un problema de programación no lineal, (PNL), se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } f(x)$$

$$\text{Sujeto a: } h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

En donde  $f(x)$ ,  $g_j(x)$  y  $h_i(x)$  son funciones entre las cuales existe al menos una ecuación no lineal y  $x$  es un vector de  $n$  variables continuas.

### ***Algoritmos de solución***

En general, los algoritmos estándar de solución de modelos de programación no lineal no pueden distinguir entre un mínimo local y un mínimo global (excepto si encuentran otro mínimo local mejor), por lo que es determinante conocer las condiciones bajo las que se garantiza que un mínimo local es un mínimo global en la región factible. Recordando que en cálculo, cuando se minimiza una función ordinaria, doblemente diferenciable, de una sola variable de  $f(x)$  sin restricciones, esta garantía de optimalidad global está dada cuando

$$\frac{d^2f}{dx^2} \geq 0 \quad \forall x$$

Si un problema de programación no lineal no tiene restricciones, el hecho de que la función objetivo sea convexa garantiza que un mínimo local es mínimo global, de igual manera una función objetivo cóncava asegura que un máximo local es un máximo global. Si existen restricciones se necesita una condición más para dar esta garantía, esta es, que la región factible defina un conjunto convexo.

En general la región factible para un problema de programación no lineal es un conjunto convexo siempre que todas las funciones  $g_j(x)$  [Para las restricciones  $g_j(x) \leq 0$ ] sean convexas. Sin embargo, no se dispone de un algoritmo que resuelva todos los problemas de programación no lineal, existen metodologías de solución para formulaciones con estructuras especiales. (Para conceptos ver Apéndice 1).

Algunos de los principales métodos para resolver problemas de programación no lineal, son:

- Método de los multiplicadores de Lagrange

- Método de linealización iterativa
- Método de programación cuadrática sucesiva
- Método de funciones de penalización
- Método de gradientes reducidos generalizados

## 2.4 Problemas de Programación Lineal Mixta-Entera

Si en un programa matemático lineal, PL, todas las variables involucradas, deben ser estrictamente enteras (comúnmente 0-1) entonces, se trata de un problema de programación lineal entera, PL-E. Si solamente algunas de las variables,  $y$ , deben tener valor entero, el modelo se conoce como un modelo de programación lineal mixta-entera, PL-ME. Estos modelos se pueden representar de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } c^T x + h^T y$$

Sujeto a:

$$Ax + Gy \leq b$$

$$Cx + Dy = 0$$

(ML-ME1)

$$x \in \mathbb{R}^n, \text{ son continuas}$$

$$y \in \mathbb{Z}_+^l, \text{ son enteras}$$

En donde  $c^T x + h^T y$  es la función objetivo del problema planteado, por ejemplo minimizar los costos totales, constituidos por los costos asociados al nivel de operación,  $x$ , mas los costos de arranque de las unidades presentes en la estructura que deben funcionar, representados por variables binarias,  $y$ . Las ecuaciones  $Cx + Dy = 0$  y  $Ax + Gy \leq b$  representan restricciones lineales del modelo, tales como condiciones de operación, demandas a satisfacer, etc. A, B, C y D son matrices y b es un vector de coeficientes.

### *Una Aplicación de Programación Lineal Mixta-Entera en Ingeniería Química*

En la síntesis integral de procesos, diferentes configuraciones alternativas pueden considerarse sistemáticamente por inclusión en un esquema de proceso general, superestructura, que contenga un número finito de unidades con sus posibles interconexiones. Las siguientes variables pueden asociarse con la superestructura:

- a) Un vector de variables binarias 0-1,  $y$ , que se asocia la existencia o no existencia de unidades y corrientes, las cuales definen la configuración del proceso.
- b) Un vector de variables continuas de diseño,  $x$ , correspondiente al tamaño de las unidades, condiciones termodinámicas de operación, flujos de entrada y salida.

Bajo ciertas suposiciones la operación física del esquema general en estado estacionario puede representarse por el sistema de ecuaciones lineales.

$$Cx + Dy = 0$$

Las especificaciones de diseño, restricciones físicas y relaciones para los posibles sistemas de proceso tienen la forma general.

$$Ax + Gy \leq b$$

La función objetivo está dada por

$$c^T x + h^T y$$

Entonces el problema de síntesis se puede representar con un modelo de programación lineal mixta-entera.

Otras aplicaciones de modelos de programación lineal mixtos enteros en ingeniería química se encuentran principalmente, en las áreas de síntesis, diseño y control de procesos. Algunas de estas aplicaciones son: integración de secuencias de destilación (Andrecovich y Westerberg, 1985), diseños de procesos batch (Voudoris y Grossmann, 1992), planeación operacional de procesos batch (Pinto y Grossmann, 1995; Moon y Hrymak, 1999), planeación y operación integral de refinerías (Lee y Pinto, 1999; Zhang y Towler, 2001), etc.

### 2.4.1 Formulación de Restricciones Lógicas

Como se describe en la sección anterior las condiciones de operación, existencia de unidades y especificaciones de diseño son algunas de las determinantes del modelo, que se pueden formular mediante el uso de restricciones lógicas. Algunas de estas formulaciones se presentan a continuación (ver Winston, 1995; Wagner, 1975; Nemhauser, 1988):

- **Restricciones del tipo de la “M grande”**

Cuando el objetivo es modelar restricciones tales como, “la variable  $x_i$  únicamente se puede activar si la variable  $y_i$  se activa previamente”, se pueden representar de la siguiente manera:

$$x_i \leq M_i y_i$$

En donde el valor de  $M_i$  debe ser mayor o igual al máximo valor que la variable  $x_i$  pueda tomar, mientras que las variables  $y_i$  son la primer condición que se debe satisfacer.

Como ejemplo, suponga que se demanda cierta cantidad de vapor de agua,  $x_v$ , a determinada presión y temperatura. Y se dispone de un generador de vapor,  $v$ , que tiene como capacidad máxima 150 kg/s. Queda claro que dicha unidad solo puede generar vapor si está en operación, esto es, si  $y_v = 1$ . Entonces una restricción lógica que rige la operación de esta unidad es:

$$x_v \leq 150 y_v \quad y_v \in \{0,1\}$$

Entonces, la unidad  $v$  únicamente puede generar vapor si se encuentra funcionando y la cantidad de vapor que puede generar debe ser menor o igual a su máxima capacidad, 150 kg/s. Por otro lado si  $y_v = 0$ , la variable  $x_v$  debe asumir el valor cero.

- **Restricciones con “Cargo fijo”**

Suponga que se desea resolver un problema de optimización, con la siguiente formulación

$$\text{Minimizar } c^T x + h^T y$$

En donde  $y$  es el vector de variables binarias asociadas a la existencia de la actividad  $i$ , mientras que la variable continua representa el nivel de actividad  $x_i$ . Sin embargo, una formulación incorrecta puede asignar un nivel de actividad  $x_i$ , diferente de cero, sin activar la variable  $y_i$ , esto es, sin cumplir con la restricción previa  $y_i = 1$ . Para formular adecuadamente este problema de optimización, se emplean restricciones de cargo fijo. Un cargo fijo,  $h_i y_i$ , es un costo que se asigna a una actividad siempre que asuma un valor diferente del nivel cero, independientemente del nivel de producción que alcance, cuya formulación es:

$$\text{Minimizar } c^T x + h^T y$$

Sujeto a:

$$x_i \leq M_i y_i, \quad i \in I$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \text{ son continuas}$$

$$y \in \mathbb{Z}_+^I, \text{ son enteras}$$

Garantizando así el pago de un cargo fijo antes de activar, una variable de nivel,  $x_i$ , asignándole un valor diferente de cero.

- **Restricciones Si A-Entonces B**

En algunas situaciones queremos asegurar que si la restricción  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ , se satisface, entonces la restricción  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , también se satisface. Mientras que, si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  no se satisface, entonces la restricción  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , puede ó no satisfacerse. Entonces queremos asegurar que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \Rightarrow g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0.$$

Para asegurar esto se emplea la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 -g(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq M \text{ y} \\
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq M(1-y) \\
 y &= 0,1
 \end{aligned}$$

Usualmente  $M$  es número positivo grande.  $M$  debe ser suficientemente grande para que  $f \leq M$  y  $-g \leq M$  se cumpla para todos los valores de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que satisfacen las restricciones en el problema.

#### 2.4.2 Ejemplo 2.1, (Winston, 1995).

Un producto puede producirse en cuatro máquinas diferentes. Cada máquina tiene un costo de cargo fijo, un costo de producción variable por unidad procesada y una cierta capacidad de producción, especificadas en la Tabla 2.1. Un total de 2000 unidades deben producirse. Mediante la formulación de un modelo de programación lineal mixta–entera, empleando restricciones lógicas se determina que unidades deben operar y el nivel de operación de cada unidad, tal que además de satisfacer las demandas, se minimicen los costos de producción.

Tabla 2.1. Especificaciones de operación para las máquinas del Ejemplo 2.1

Máquina	Cargo Fijo	Costo variable por unidad	Capacidad
1	\$1000	\$20	900
2	\$920	\$24	1000
3	\$800	\$16	1200
4	\$700	\$28	1600

#### Modelo 2.1

Variables Enteras Positivas, asociadas al nivel de producción de cada máquina.

$x_1$  = Número de unidades procesadas en la máquina 1

$x_2$  = Número de unidades procesadas en la máquina 2

$x_3$  = Número de unidades procesadas en la máquina 3

$x_4$  = Número de unidades procesadas en la máquina 4

Variables Binarias, asociadas a la existencia de cada máquina.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la maquina } i \text{ opera y procesa unidades} \\ 0 & \text{Si la maquina } i \text{ no opera y no procesa unidades} \end{cases}$$

Subíndices:  $i = 1, 2, 3, 4$

*Función objetivo:*

$$\text{Min } z = 20x_1 + 24x_2 + 16x_3 + 28x_4 + 1000y_1 + 920y_2 + 800y_3 + 700y_4$$

*Restricciones asociadas*

1. Las restricciones del tipo “ de la M grande”, acotan el nivel de actividad. Además de permitir producción en una máquina únicamente si esta opera.

$$x_1 \leq 900y_1$$

$$x_2 \leq 1000y_2$$

$$x_3 \leq 1200y_3$$

$$x_4 \leq 1600y_4$$

2. El número de unidades producidas debe satisfacer la demanda requerida

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000$$

3. Integralidad de las variables

$$x_i \in \mathbb{Z}_+^4$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

La función objetivo minimiza los costos de producción,  $z$ , integrados por los cargos fijos y los costos asociados al nivel de operación de cada máquina. El modelo 2.1 se programa y

resuelve en ambiente GAMS, el resolvidor empleado es OSL (Optimization Subroutine Library, ver GAMS a User's Guide, 1998).

Solución óptima para el Ejemplo 2.1:

$$z = \$37,000.00, \quad y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \\ 1200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la solución óptima, Figura 2.1, para abastecer una demanda de 2000 unidades únicamente deben funcionar las máquinas 1 y 3, con un nivel de producción de 800 y 1200 unidades respectivamente; el nivel de producción de la máquina 3 está en el límite superior permitido, mientras que la máquina 1, opera 100 unidades por debajo de su límite superior, lo que permite un aumento en la demandas de hasta 100 unidades sin tener que pagar un cargo fijo extra.

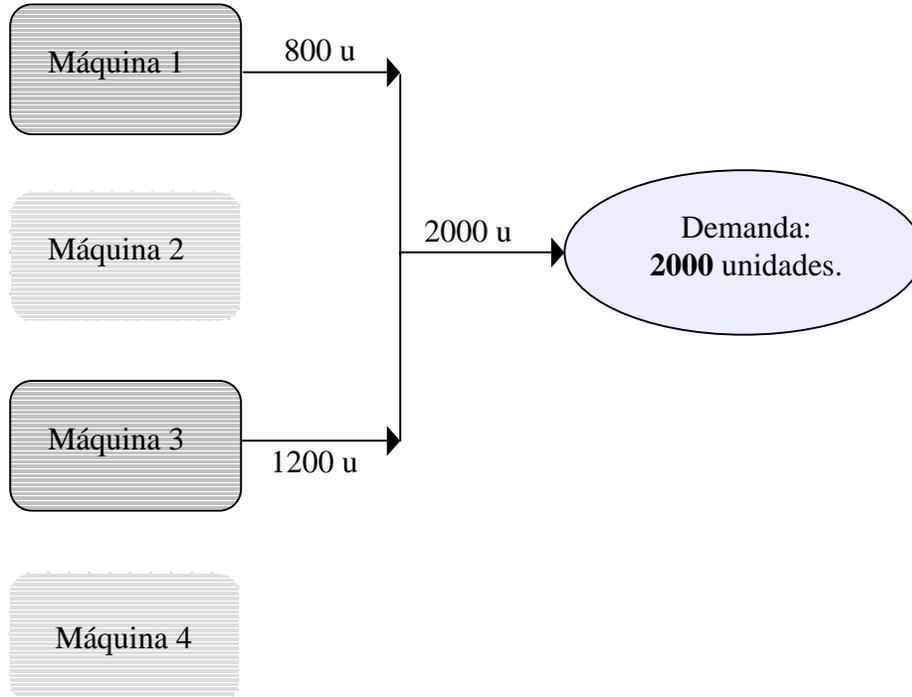


Figura 2.1. Solución óptima para el Ejemplo 2.1.

**2.4.3 Ejemplo 2.2,** (*Winston, 1995*).

Una planta debe generar 8000kW/h de potencia, para lo cual puede disponer de tres calderas y tres turbinas. Una caldera puede generar una cantidad de vapor (en ton/hr) entre un valor mínimo y máximo dados en la Tabla 2.2, el costo de producir una tonelada de vapor, incluido en la misma tabla. Cada turbina puede procesar una cantidad de vapor entre un mínimo y un máximo, dado en la Tabla 2.3, el costo de procesar una tonelada de vapor y la potencia producida por tonelada de vapor procesado se incluyen también. Empleando un modelo de programación lineal mixta-entera se determina cual es la configuración óptima para satisfacer las demandas de potencia minimizando los costos de producción.

Tabla 2.2 Especificaciones para las calderas.

<b>Caldera</b>	<b>Mínimo de vapor (ton/hr)</b>	<b>Máximo de vapor (ton/hr)</b>	<b>Costo/ton (\$/ton)</b>
1	500	1000	10
2	300	900	8
3	400	800	6

Tabla 2.3 Especificaciones para las turbinas.

<b>Turbina</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>KWh/ton vapor</b>	<b>Costo/ton</b>
1	300	600	4	\$2
2	500	800	5	\$3
3	600	900	6	\$4

*Modelo 2.2*

## Variables continuas

$x_{i,j}$  = Toneladas de vapor que la caldera  $i$ , envía a la turbina  $j$ .

$y_j$  = Potencia generada por cada turbina.

Variables binarias

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la caldera opera} \\ 0 & \text{La caldera no opera} \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la turbina opera} \\ 0 & \text{La turbina no opera} \end{cases}$$

Subíndices

$$i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, 3$$

*Función objetivo:*

$$\min z = 10*(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 8*(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 6*(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 2*(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3*(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 4*(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

*Restricciones asociadas*

1. Restricciones del tipo “Si A-Entonces B”, establecen, una puede caldera puede operar o no. Si opera, debe operar dentro del intervalo de capacidad especificado.

Caldera 1	$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1000z_1$
	$500 - (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \leq 1000(1 - z_1)$
Caldera 2	$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 900z_2$
	$300 - (x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 900(1 - z_2)$
Caldera 3	$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 800z_3$
	$400 - (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 800(1 - z_3)$

2. La potencia generada por cada turbina es función de la cantidad de vapor recibida.

$$\begin{aligned} 4*(x_{11} + x_{21} + x_{31}) &= y_1 \\ 5*(x_{12} + x_{22} + x_{32}) &= y_2 \\ 6*(x_{13} + x_{23} + x_{33}) &= y_3 \end{aligned}$$

3. Restricciones del tipo “Si A-Entonces B, establecen, una turbina puede operar o no. Si opera debe operar dentro del intervalo especificado.

Turbina 1	$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 600h_1$ $300 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq 600(1 - h_1)$
Turbina 2	$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 800h_2$ $500 - (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \leq 800(1 - h_2)$
Turbina 3	$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 900h_3$ $600 - (x_{13} + x_{23} + x_{33}) \leq 900(1 - h_3)$

4. La potencia generada debe satisfacer la demanda requerida: 8000 kW/h

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8000$$

La solución óptima del Ejemplo 2.2, se presenta en la Figura 2.1, en donde se muestra que la caldera 1 y la turbina 1 no operan, mientras que las calderas 2 y 3, así como las turbinas 2 y 3 deben operar para satisfacer las demandas. La caldera 3 y la turbina 3 operan a su máxima capacidad permitida.

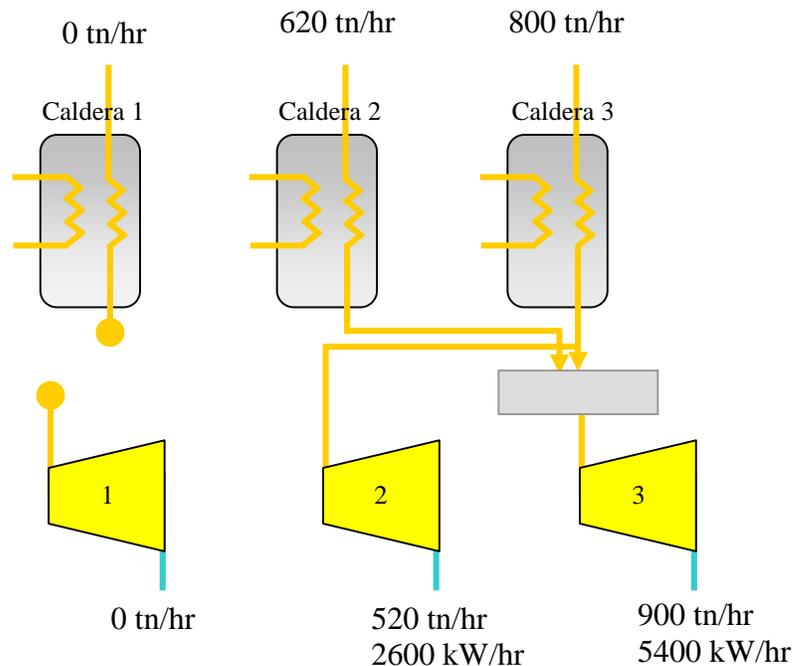


Figura 2.2. Solución óptima del Ejemplo 2.2.

La caldera 2 genera 800 ton de vapor/hr y la caldera 3 genera 620 ton de vapor/hr. La potencia generada por las turbinas 2 y 3, 2600 y 5400 kW/hr respectivamente, satisfacen las demandas requeridas. El resumen de la solución óptima del Modelo 2.2, se presenta en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4. Solución óptima para el Ejemplo 2.2.

Caldera	Turbina 1	Turbina 2	Turbina 3	Capacidad (t/h)	Costo (\$/ton)
<b>1</b>	$x_{11} = 0$	$x_{12} = 0$	$x_{13} = 0$	500-1000	10
<b>2</b>	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 620$	300-900	8
<b>3</b>	$x_{31} = 0$	$x_{32} = 520$	$x_{33} = 280$	400-800	6
Capacidad (t/h)	300-600	500-800	600-900		
kW/ton vap	4	5	6		
Costo (\$/ton)	2	3	4	Costo total	$z = \$14,920$

#### 2.4.4 Método de Ramificación y Acotamiento para Resolver Problemas de Programación Lineal Mixta-Entera

Para resolver problemas de programación lineal mixta-entera existen algoritmos eficientes. Aunque desde el punto de vista matemático gran parte de los problemas de síntesis no tienen estructura lineal mixta-entera debido a la presencia de términos no lineales en ecuaciones tales como, balances de materia y energía, algunos problemas se pueden formular como lineales bajo ciertas suposiciones o mediante el uso de variables binarias y de esta manera es posible emplear alguno de los algoritmos disponibles para resolver el modelo desarrollado.

Entre los algoritmos de solución encontramos, Métodos de descomposición (Benders, 1962; Van Roy, 1983, 1986). métodos de ramificación y acotamiento (Land and Doig, 1960; Dakin, 1965; Martín y Schrage, 1985; Pardalos y Rosen, 1987), métodos de planos cortantes (Padberg y Rinaldi, 1991; Boyd, 1994), entre otros.

**Ramificación y Acotamiento:** Debido a que es demasiado complejo resolver el problema original, éste se divide en subproblemas más pequeños. Las nociones básicas del algoritmo son separación, relajación y exploración, mediante una partición del conjunto completo de

soluciones factibles en subconjuntos más pequeños. La exploración se hace en parte acotando la mejor solución en un subconjunto y después descartando los subconjuntos cuya cota indique que no es posible que contenga una solución óptima para el problema original.

La idea del método es resolver primero el problema como un modelo continuo, omitiendo la condición de integralidad. Suponga que  $x_r$  es una variable entera restringida cuyo valor óptimo continuo  $x_r^*$  es fraccional. El intervalo  $\lfloor x_r^* \rfloor < x_r^* < \lceil x_r^* \rceil$  no puede incluir ninguna solución entera factible. Consecuentemente, un valor entero factible  $x_r$  debe satisfacer una de dos condiciones, a saber:

$$x_r \leq \lfloor x_r^* \rfloor \quad \text{o bien} \quad x_r \geq \lceil x_r^* \rceil$$

Estas dos condiciones cuando se aplican al modelo continuo, proporcionan dos problemas mutuamente excluyentes, que se crean imponiendo las restricciones:  $x_r \leq \lfloor x_r^* \rfloor$  y  $x_r \geq \lceil x_r^* \rceil$  al espacio de solución original, se dice que el problema se ha ramificado o partido en dos subproblemas. Realmente el procedimiento de ramificación desecha partes de espacio continuo que no incluyen puntos enteros factibles, reforzando las condiciones necesarias para que se tengan los enteros.

Ahora, cada subproblema puede resolverse como un programa lineal (utilizando la misma función objetivo del problema original). Si su óptimo es factible con respecto al problema entero, su solución se registra como la mejor disponible, en este caso será innecesario “ramificar” adicionalmente este subproblema ya que no puede proporcionar una mejor solución entera. De otra manera, el subproblema debe partirse en dos subproblemas imponiendo de nuevo las condiciones enteras sobre una de sus variables enteras, que por lo general tiene un valor óptimo fraccional. Naturalmente, cuando se encuentra una mejor solución entera factible para cualquier subproblema, esa deberá reemplazar la que se tenía.

El procedimiento de ramificar continúa cuando sea aplicable, hasta que cada subproblema termine con una solución entera o cuando existe evidencia de que no puede haber una mejor. En este caso la solución factible actual, si existe alguna, es la óptima.

La eficiencia de cómputo puede aumentarse introduciendo el concepto de acotamiento. Este concepto indica que, si la solución óptima continua de un subproblema proporciona un valor de la función objetivo peor que el asociado a la mejor solución entera disponible, no vale la pena explorar adicionalmente el subproblema. En este caso, se dice que el subproblema está agotado y, por consiguiente puede desecharse. En otras palabras, una vez que se encuentra la solución factible entera, su valor de la función objetivo asociado puede ser utilizado como una cota (superior en el caso de minimización e inferior en el caso de maximización) para descartar subproblemas.

Es importante adquirir una buena cota en las primeras etapas del cálculo. Los problemas específicos generados dependen de la variable seleccionada para efectuar la ramificación.

Un despliegue de todos los subproblemas generados en el desarrollo del método de ramificación y acotamiento se llama árbol, y cada subproblema se conoce como nodo, cada línea que conecta dos nodos se llama arco.

Para determinar que subproblema es el siguiente a resolver se emplean dos enfoques, comúnmente el más empleado es la regla LIFO (Last in first out), que selecciona el subproblema más recientemente creado para resolver. LIFO permite examinar primero un lado del árbol del problema de ramificación y acotamiento, y encontrar rápidamente una posible solución. Para analizar otro lado del árbol es necesario dar marcha atrás, por esta razón LIFO también es conocido como “backtracking” (marcha hacia atrás).

El segundo método comúnmente empleado es “jumptracking”, cuando un nodo se ramifica el enfoque de “jumptracking”, también conocido como FIFO (First in first out), en donde se resuelven todos los subproblemas creados, este método ofrece la ventaja de analizar todas las líneas del árbol, al ir de un lado a otro. Sin embargo, este método suele requerir mayor capacidad de almacenamiento computacional que “backtracking”.

### 2.4.5 Ejemplo 2.3. Algoritmo de Ramificación y Acotamiento, (Floudas, 1996.)

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

Sujeto a:

$$4x_1 - 4x_2 - 5 \leq 0$$

$$-x_1 + 6x_2 - 5 \leq 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+^3$$

Inicialización: solución al problema relajado, omitiendo la condición de integralidad:

$$\begin{aligned} z &= 30 \\ x_1 &= 2.5 \\ x_2 &= 1.25 \\ x_3 &= 6.25 \end{aligned} \quad (\text{S 2.3})$$

Como la solución dada en (S 2.3) no es entera y no cumple con los criterios de terminación, el siguiente paso es la selección de una variable de relajación, para la creación de subproblemas.

De la solución relajada y seleccionando a  $x_1$  como variable de relajación se generan los subproblemas 1 y 2, en los que al problema relajado original se adicionan las restricciones: para el subproblema 1,  $x_1 \leq 2$ , y en el subproblema 2,  $x_1 \geq 3$ .

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Subproblema 1} \\ 4x_1 - 4x_2 - 5 \leq 0 \\ -x_1 + 6x_2 - 5 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0 \\ x_1 \leq 2 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Subproblema 2} \\ 4x_1 - 4x_2 - 5 \leq 0 \\ -x_1 + 6x_2 - 5 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0 \\ x_1 \geq 3 \end{array} \right]$$

- Solución correspondiente a los subproblemas 1 y 2 es:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Subproblema 1} \\ z = 26.667 \\ x_1 = 2, x_2 = 1.167, x_3 = 5.833 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \text{Subproblema 2} \\ \text{Infactible} \end{array} \right)$$

Como la solución del subproblema 1 no es entera y la solución al subproblema 2 es infactible, continuar con la búsqueda de la solución óptima.

Como el subproblema 2 es infactible, la búsqueda de una solución óptima se continúa por el nodo del subproblema 1, en donde, la solución aún no cumple con los criterios de optimalidad. Seleccionando como variable de ramificación a  $x_2$  se generan los subproblemas 3 y 4, que tienen como base la solución del subproblema 1, y se adicionan las restricciones: para el subproblema 3,  $x_2 \leq 1$  y subproblema 4  $x_2 \geq 2$ .

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Subproblema 3} \\ 4x_1 - 4x_2 \quad -5 \leq 0 \\ -x_1 + 6x_2 \quad -5 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Subproblema 4} \\ 4x_1 - 4x_2 \quad -5 \leq 0 \\ -x_1 + 6x_2 \quad -5 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leq 0 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 2 \end{array} \right]$$

- Solución correspondiente a los subproblemas 3 y 4.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Subproblema 3} \\ Z = 26.0 \\ x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 6 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \text{Subproblema 4} \\ \text{Infactible} \end{array} \right)$$

La solución del subproblema 4, es infactible, por tanto, se detiene la búsqueda de solución óptima por el nodo 4. La solución del subproblema 3 es entera, y no habiendo otro nodo que ramificar se detiene la búsqueda y la mejor solución encontrada es  $z^* = 26$ .

La búsqueda de la solución óptima del Ejemplo 2.3 se presenta en el siguiente diagrama.

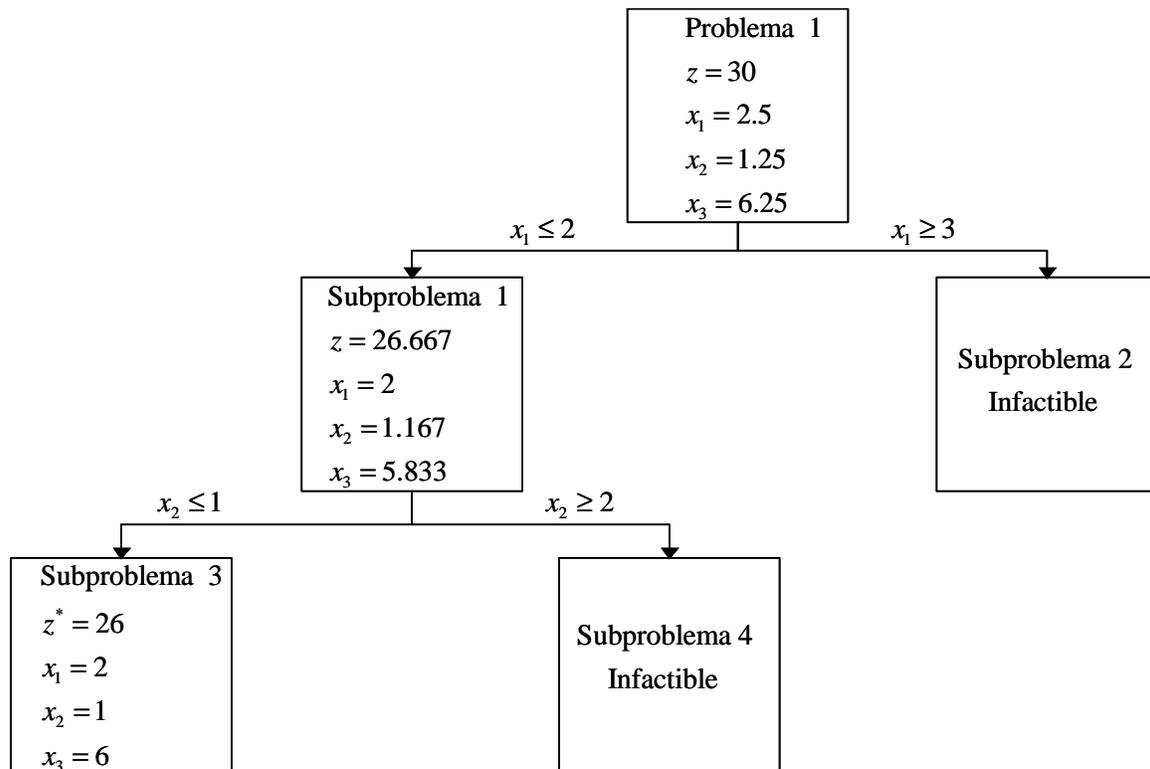


Figura 2.3 Diagrama de árbol del Ejemplo 2.3.

## 2.5 Problemas de Programación No Lineal Mixta-Entera

Cuando un problema de programación lineal mixta-entera tiene asociado al menos un término no lineal en alguna de sus ecuaciones, el problema es un modelo de programación no lineal mixta-entera, (PNL-ME), el cual se puede representar con la siguiente estructura:

$$\text{Minimizar } f(x, y)$$

$$\text{Sujeto a: } h_i(x, y) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

$$g_j(x, y) \leq 0 \quad j = 1, \dots, q$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y \in \mathbb{Z}_+^l \text{ entero}$$

En donde  $h_i(x, y) = 0$  son restricciones de igualdad, lineales ó no lineales,  $g_j(x, y) \leq 0$  son restricciones de desigualdad lineales ó no lineales y  $f(x, y)$  es la función objetivo, que puede ser una función lineal ó una función no lineal.

Los modelos de programación no lineal mixta-entera se han empleado en diferentes áreas de ingeniería química, tales como:

- Síntesis de sistemas de servicios auxiliares (Kalitventzeff y Marechal, 1988; Grossmann y Bruno, 1988; Yee y Grossmann, 1990)
- Síntesis de redes de intercambio de calor (Yee y Grossmann, 1990; Ciric y Floudas, 1991; Papalexandri y Piskopoulus, 1994; Zamora y Grossmann, 1997 y 1998)
- Síntesis de trenes de separación basados en destilación (Yeomans and Grossmann, 2000; Paules y Floudas, 1988, 1992; Penteado y Ciric, 1996)
- Diseño y planeación de procesos batch (Birevar y Grossmann, 1990)
- Síntesis de redes de reacción (Kokossis y Floudas, 1990, 1994)

Entre los modelos de programación matemática que presentan mayor dificultad para encontrar una solución son los modelos de PNL-ME, algunos algoritmos de solución existentes, para formulaciones con estructuras específicas son:

Aproximaciones exteriores (Duran y Grossmann, 1984)

Aproximaciones exteriores con relajación de igualdades (Kocis y Grossmann, 1987)

Aproximaciones exteriores con relajación de igualdades y funciones penalizadas (Viswanatham y Grossmann, 1990)

Descomposición generalizada de Benders (Benders, 1962; Geoffrion, 1972)

Descomposición generalizada cruzada (Holmerg, 1990)

Ramificación y acotamiento para PNL-ME (Garfinkel y Nemhauser, 1972; Beale, 1977; Gupta, 1980; Borchers y Mitchel, 1991)

Métodos determinísticos para programación no lineal mixta-entera (Leyffer, S., 1993)

Para resolver el modelo para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, desarrollado en esta tesis, se utiliza el código DICOPT en el ambiente de programación de GAMS. El cual se basa en el algoritmo de Aproximaciones Exteriores y algoritmos relacionados. En la siguiente sección se presentan dichos algoritmos con sus bases teóricas y un ejemplo para ilustrar el desarrollo del algoritmo.

### 2.5.1 Aproximaciones Exteriores, OA, (Duran y Grossmann, 1984)

La idea principal en el algoritmo de aproximaciones exteriores consiste en resolver una secuencia alternativa de problemas de PNL y problemas maestros de PL-ME. El problema PNL se obtiene para una selección fija de variables binarias, con lo que se procede a optimizar las variables continuas, cuya solución aporta una cota superior al problema original (si el problema es de minimización y resulta factible). El problema maestro de PL-ME, proporciona una aproximación lineal global del modelo PNL-ME que se quiere resolver.

Además, las aproximaciones lineales a las ecuaciones no lineales se relajan como desigualdades. El PL-ME maestro acumula las diferentes aproximaciones lineales de iteraciones previas, tal que mejora la aproximación al PNL-ME original. En cada iteración el programa maestro predice nuevos valores de las variables binarias y una cota inferior a la función objetivo  $z$ . La búsqueda termina cuando no se puede encontrar una cota inferior debajo de la mejor cota superior. Duran y Grossmann proponen el algoritmo de aproximaciones exteriores para la siguiente clase de problemas PNL-ME:

$$z = \min c^T y + f(x)$$

Sujeto a:

$$g(x) + By \leq 0$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n$$

$$y \in U \subset \mathbb{R}_i^+$$

P 2.1

$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  función no lineal, y  $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , se asume que son continuamente diferenciables y convexas, en el polihedro, compacto, convexo n-dimensional  $X$ .

$$X = \{x : x \in \mathbb{R}^n, A_1 x \leq a_1\}$$

$U = \{y : y \in \{0,1\}^l, \text{entero } A_2 y \leq a_2\}$ , es un conjunto finito discreto.

Debido a la linealidad de las variables discretas, los espacios factibles continuos y discretos del problema (P 2.1) pueden caracterizarse independientemente. Además, los espacios continuos corresponden a la intersección de un número finito de regiones compactas convexas, donde cada región está determinada por una parametrización discreta diferente.

### *Algoritmo de aproximaciones exteriores*

El algoritmo de aproximaciones exteriores propuesto por Duran y Grossmann, consiste en resolver una secuencia alterna finita de subproblemas no lineales y versiones relajadas de programas maestros mixtos-enteros lineales, que describen la región de solución como la intersección de una colección finita de conjuntos, haciendo uso de aproximaciones exteriores basado en la caracterización de conjuntos convexas, cuyo objetivo es encontrar una representación polihedral del espacio factible continuo.

Para un  $x^i \in \mathbb{R}^n$

$$\Omega(x^i) = \left\{ \begin{array}{l} x, y : f(x^i) + \nabla f(x^i)^T (x - x^i) - \mu \leq 0, \\ g(x^i) + \nabla g(x^i)^T (x - x^i) + B y \leq 0, \mu \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\}$$

$$V = \{y : g(x^i) + \nabla g(x^i)^T (x - x^i) + B y \leq 0, \forall x^i \in X\}$$

*Paso 1.* Declare: cota inferior  $z^0 = -\infty$ , cota superior  $z^* = +\infty$ ,  $i = 1$ .

Seleccione una combinación entera  $y^i \in U$ , o  $y^i \in U \cap V$ , si es posible.

*Paso 2.* Resuelva el subproblema  $S(y^i)$ , NLP  $y^i$ -parametrizado:

$$z(y^i) = c^T y^i + \min f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:} & \quad [S(y^i)] \\ & g(x) + B y^i \leq 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

Alguno de los siguientes casos debe ocurrir:

a) El subproblema  $S(y^i)$  tiene una solución óptima finita  $(x^i, z(y^i))$ , donde  $z(y^i)$  es una cota superior válida en el valor óptimo se programa MINLP. Actualice la cota superior actual.

$z^* = \min\{z^*, z(y^i)\}$ . Si  $z^* = z(y^i)$  declare  $y^* = y^i, x^* = x^i$ . Continuar en el paso 3.

b) Si el problema  $S(y^i)$  es infactible (i.e.  $y^i \notin V$ ) con el resultado asociado  $x^i$ . Derive y adicione a  $M^i$  un corte entero para eliminar  $y^i$  de próximas consideraciones.

*Paso 3.* Resuelva el actual programa maestro PL-ME relajado,  $M^i$ . En donde  $\mu$  es un escalar.

$$z^i = \min c^T y + \mu$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} (x, y) &\in \Omega^i \\ z^{i-1} &\leq c^T y + \mu < z^* \\ x &\in X, y \in U, \mu \in \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

Alguno de los siguientes casos debe ocurrir.

a) El problema  $M^i$  no tiene solución mixta-entera, ALTO. La solución óptima al problema PNL-ME, original está dado por la actual cota superior  $z^*$  y los vectores de variables  $(x^*, y^*)$ , que corresponden a la solución óptima del subproblema PNL  $y^*$ -parametrizado definido en el paso 2.

b) Problema  $M^i$  tiene una solución óptima finita  $(z^i, x, y)$ ;  $z^i$  es un elemento en la secuencia monótonica de cotas inferiores en el valor óptimo del programa PNL-ME, y es una nueva combinación entera a ser probada en el algoritmo. Declare  $y^{i+1} = y$ , con  $i = i + 1$ , para indicar una nueva iteración.

**2.5.2 Ejemplo 2.4 Algoritmo de Aproximaciones Exteriores** (Duran y Grossmann, 1984).

$$\text{Min } z = 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 10x_1 - 7x_6 - 18\ln(x_2 + 1) - 19.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 10$$

Sujeto a:

$$0.8\ln(x_2 + 1) + 0.96\ln(x_1 - x_2 + 1) - 0.8x_6 \geq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

$$x_2 - U y_1 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 - U y_2 \leq 0$$

P 2.2

$$\ln(x_2 + 1) + 1.2\ln(x_1 - x_2 + 1) - x_6 - U y_3 \geq -2$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = (x_j : j = 1, 2, 6) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{a}^T = (0, 0, 0), \quad \mathbf{b}^T = (2, 2, 1), \quad U = 2$$

Rescribiendo P 2.2:

$$\text{Min } z = 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 10x_1 - 7x_6 - 18\ln(x_2 + 1) - 19.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 10$$

Sujeto a:

$$0.8x_6 - 0.8\ln(x_2 + 1) - 0.96\ln(x_1 - x_2 + 1) \leq 0$$

$$x_6 - \ln(x_2 + 1) - 1.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 2y_3 - 2 \leq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

P 2.3

$$x_2 - 2y_1 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 - 2y_2 \leq 0$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 1$$

1.- Declarare  $z^l = -\infty$ ,  $z^u = \infty$  y proponiendo como punto inicial  $y^0 = (1, 0, 1)$

*Problema PNL-1*

$$\text{Min } z = 10x_1 - 7x_6 - 18\ln(x_2 + 1) - 19.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 23$$

Sujeto a:

$$0.8x_6 - 0.8\ln(x_2 + 1) - 0.96\ln(x_1 - x_2 + 1) \leq 0$$

$$x_6 - \ln(x_2 + 1) - 1.2\ln(x_1 - x_2 + 1) \leq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

$$x_2 - 2 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 1$$

Solución (PNL-1):  $z = 15.0927$   
 $x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 0.9163$

- Cota superior  $z^u = 15.0927$

*Problema PLME-1*

$$\text{Min } z = 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 + \mu_0$$

Sujeto a:

$$-9.2x_1 + 12.2x_2 - 7x_6 - 5.9923 \leq \mu_0$$

$$-0.96x_1 + 0.64x_2 + 0.8x_6 - 0.25304 \leq 0$$

$$-1.2x_1 + 0.8x_2 + x_6 - 2y_3 - 2.3163 \leq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

$$x_2 - 2y_1 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 - 2y_2 \leq 0$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$$

Solución (PLME-1):  $z = -15.3923$

$x_1 = 2$	$y_1 = 0$
$x_2 = 0$	$y_2 = 1$
$x_3 = 1$	$y_3 = 0$

Cotas:  $z^l = -15.3929$  ,  $z^u = 15.0927$

*Problema PNL 2*

$$\text{Min } z = 10x_1 - 7x_6 - 18\ln(x_2 + 1) - 19.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 10$$

Sujeto a:

$$0.86x_6 - 0.8\ln(x_2 + 1) - 0.96\ln(x_1 - x_2 + 1) \leq 0$$

$$x_6 - \ln(x_2 + 1) - 1.2\ln(x_1 - x_2 + 1) - 2 \leq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

$$x_2 - 2 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 1$$

Solución (PNL-2):  $x_1 = 1.3097, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$   
 $z = 6.009$

- Cotas:  $z^l = -15.3923, \quad z^u = 6.009$

*Problema PLME-2*

$$\text{Min } z = 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 + \mu_1$$

Sujeto a:

$$-2.1613x_1 - 10.161x_2 - 7x_6 - 2.1325 \leq \mu_1$$

$$-0.96x_1 + 0.64x_2 + 0.8x_6 - 0.25304 \leq 0$$

$$-1.2x_1 + 0.8x_2 + x_6 - 2y_3 - 2.3163 \leq 0$$

$$-0.3919x_1 - 0.408x_2 + 0.8x_6 + 0.0999 \leq 0$$

$$-0.4899x_1 - 0.51x_2 + x_6 + 0.12496 \leq 0$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

$$x_2 - 2y_1 \leq 0$$

$$x_1 - x_2 - 2y_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 y_1 + y_2 &\leq 1 \\
 y_1 + y_2 - y_3 &\leq 1 \\
 y_2 - y_1 - y_3 &\leq 0 \\
 y_1, y_2, y_3 &\in \{0,1\} \\
 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Solución (PLME-2): } z = -10.1319 \\
 \begin{array}{ll}
 x_1 = 2 & y_1 = 1 \\
 x_2 = 2 & y_2 = 0 \\
 x_3 = 1 & y_3 = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

- Cotas:  $z^l = -10.1319$ ,  $z^u = 6.009$

### Problema PNL 3

$$\text{Min } z = 10x_1 - 7x_6 - 18\ln(x_2 + 1) - 19.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 16$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 0.86x_6 - 0.8\ln(x_2 + 1) - 0.96\ln(x_1 - x_2 + 1) &\leq 0 \\
 x_6 - \ln(x_2 + 1) - 1.2\ln(x_1 - x_2 + 1) - 2 &\leq 0 \\
 x_2 - x_1 &\leq 0 \\
 x_2 &\leq 0 \\
 x_1 - x_2 - 2 &\leq 0 \\
 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Solución (PNL-3): } x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 0 \\
 z = 7.0927
 \end{array}$$

Como el valor de la cota superior se deteriora y de acuerdo con el criterio de paro empleado la solución, la solución óptima del problema (P 2.2).

$$z^* = 6.009 \quad x^* = \left. \begin{array}{l} 1.3097 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{array}$$

En la Figura 2.4, se muestran las iteraciones hechas para resolver el problema (P 2.2), con sus respectivas cotas.

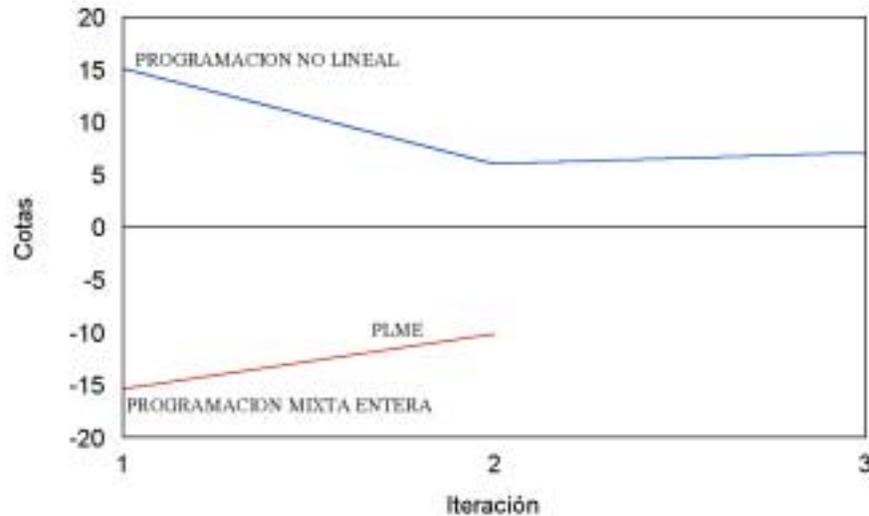


Figura 2.4. Iteraciones del Ejemplo 2.4.

### 2.5.3 Aproximaciones Exteriores con Relajación de Igualdades, OA/ER, (Kocis y Grossmann, 1987)

Propuesto para resolver modelos de programación no lineal mixta-entera, de la forma:

$$z = \min c^T y + f(x)$$

Sujeto a:

$$h(x) = 0$$

$$g(x) \leq 0$$

P 2.4

$$Ax = a$$

$$By + Cx \leq d$$

$$x \in X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x^L \leq x \leq x^U\}$$

$$y \in Y = \{y \mid y \in \{0,1\}^m, Ey \leq e\}$$

En donde  $f(x)$ ,  $h(x) = 0$  y  $g(x) \leq 0$  representan funciones no lineales, involucradas en la función objetivo.  $Ax = a$  representa el subconjunto de ecuaciones lineales, mientras que  $By + Cx \leq d$  representan igualdades o desigualdades lineales que involucran variables continuas y binarias.

Para resolver esta clase de modelos MINLP Kocis y Grossmann (1987) proponen el algoritmo Aproximaciones Exteriores con Relajación de Igualdades OA/ER, bajo las siguientes condiciones:

*Cond 1:*  $X$  es un conjunto convexo, compacto no vacío y las funciones satisfacen las condiciones:

$f(x)$  es convexa en  $x$

$g_i(x)$   $i \in I_{IN} = \{i : g_i(x) < 0\}$  son convexas en  $x$ ,

$g_i(x)$   $i \in I_{EQ} = \{i : g_i(x) = 0\}$  son quasi convexas en  $x$ ,

$Th(x)$  quasi convexas en  $x$ ,

En donde  $T$  es un matriz diagonal de  $(m \times m)$  con elementos  $t_{ii}$

$$t_{ii} = \begin{cases} -1 & \text{Si } \lambda_i < 0 \\ +1 & \text{Si } \lambda_i > 0 \\ 0 & \text{Si } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\lambda_i$  son los multiplicadores de Lagrange asociados con las  $m$  restricciones de igualdad del problema (P 2.4).

*Cond 2:*  $f$ ,  $h$  y  $g$  son continuamente diferenciables.

*Cond 3:* Las restricciones se cumplen para todo el problema de programación no lineal resultante de P 2.4 fijando  $y$ .

El algoritmo con relajación de igualdades es similar al algoritmo de aproximaciones exteriores, ya que el procedimiento involucra la solución de una secuencia de problemas PNL y PL-ME. Los problemas PNL corresponden al problema PNL-ME original con un vector de variables enteras fijo, el problema maestro es una aproximación lineal al problema PNL-ME original.

En el algoritmo OA/ER un nuevo problema maestro se define de tal manera que las ecuaciones no lineales de la formulación PNL-ME se pueden manejar explícitamente.

El algoritmo de Aproximaciones Exteriores con Relajación de Igualdades se puede resumir de la siguiente manera:

*Paso 1.* Seleccione un vector de variables binarias iniciales  $y^1$ ; declare  $k = 1$  y las siguientes cotas superior e inferior iniciales,  $z_L^0 = -\infty$ ,  $z_U = \infty$ , para generar el problema PNL 1

$$z = \min c^T y^k + f(x)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ g(x) &\leq 0 \\ Ax &= a \\ Cx &\leq d - By^k \\ x &\in X \end{aligned} \quad \text{PNL 1}$$

*Paso 2.* Resolver (PNL 1) fijando  $y^k$ , para encontrar  $z(y^k)$ ,  $x^k$ , y  $\lambda^k$ . Si  $z(y^k) < z^U$ , entonces declare  $y^* = y^k$ ,  $x^* = x^k$ , y  $z^U = z(y^k)$ . Defina la matriz  $T^k$

*Paso 3.* Calcule en  $x^k$  las aproximaciones lineales para  $f(x)$ ,  $h(x)$  y  $g(x)$

$$\begin{aligned} (w^k)^T x - w_o^k &\leq f(x) \\ T^k h(x) \leq 0 &\Rightarrow T^k [R^k x - r^k] \leq 0 \\ S_{IN}^k x - s_{IN}^k &\leq g_{IN}(x) \\ g_{EQ}(x) \leq 0 &\Rightarrow S_{EQ}^k x - s_{EQ}^k \leq 0 \end{aligned}$$

*Paso 4.* Declare el programa maestro ( $M^K$ ) de la siguiente forma y resuelva

$$z_L^K = \min_{x,y,\mu} c^T y + \mu$$

Sujeto a:

$$(w^k)^T x - \mu \leq \omega_o^k$$

$$T^k R^k x \leq T^k r^k \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$S^k x \leq s^k$$

$M^K$

$$Ax = a$$

$$By + Cx \leq d$$

$$Ey \leq e$$

$$z_L^{K-1} \leq c^T y + \mu \leq z_U$$

$$y \in \{0,1\}^m \cap \{\text{Cortes enteros}\}^{K-1}$$

$$\mu \in R^1$$

a) Si existe una solución factible,  $y^{K+1}$  con valor de la función objetivo  $z_L^K$ , declare  $k=k+1$ , ir al paso 2.

b) Si no existe solución factible, alto. La solución óptima es  $z_U$  en  $y^*$ ,  $x^*$ .

#### 2.5.4 Ejemplo 2.5. Algoritmo de Aproximaciones Exteriores con Relajación de Igualdades.

$$\text{Min } z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 + 2y_1 + 3y_2$$

Sujeto a:

$$x_1^2 - 5x_2 - 5 = 0$$

P 2.5

$$8 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 5y_1 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \in \{0,1\}$$

Declare:  $z_0^1 = -\infty$ ,  $z^u = \infty$ . Punto inicial  $y^0 = (1,1)$ ,

*Problema PNL-1*

$$\text{Min } z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 + 5$$

Sujeto a:

$$x_1^2 - 5x_2 - 5 = 0$$

$$8 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 5 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 4.3563$$

$$\text{Solución (PNL-1): } x_2 = 2.7955$$

$$z^1 = 5.1688$$

Actualizando cotas: Cota superior  $z^u = 5.1688$ , cota inferior  $z^l = -\infty$

Con multiplicador para la restricción de igualdad no lineal  $\lambda_1 = -0.08$ .

Entonces la restricción de igualdad se puede relajar como:

$$5 - x_1^2 + 5x_2 \leq 0$$

Con linealización en alrededor de la solución del problema NLP-1:

$$0.7126x_1 - 0.409x_2 - 2.5265 \leq \mu$$

Y la linealización del termino  $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$  de la función objetivo es:

$$23.97 - 8.7126x_1 + 5x_2 \leq 0$$

*Problema PLME-1*

$$\text{Min } z = \mu + 2y_1 + 3y_2$$

Sujeto a:

$$0.7126x_1 - 0.409x_2 - 2.5265 \leq \mu$$

$$23.97 - 8.7126x_1 + 5x_2 \leq 0$$

$$8 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 5y_1 \leq 0$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \leq 0$$

$$x_1 = 3.0968, \quad x_2 = 0.6022$$

$$\text{Solución (PLME-1): } y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$

$$z^1 = 2$$

Cota superior  $z^u = 5.1688$ , cota inferior  $z^l = 2$

*PNL-2*

$$\text{Min } z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 + 2$$

Sujeto a:

$$x_1^2 - 5x_2 - 5 = 0$$

$$8 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 5 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 4.3563$$

$$\text{Solución (PNL-2): } x_2 = 2.7955$$

$$z^1 = 2.1688$$

Actualizando cotas: Cota superior  $z^u = 2.1688$ , cota inferior  $z^l = 2$

*PLME-2*

$$\text{Min } z = \mu + 2y_1 + 3y_2$$

Sujeto a:

$$0.7126x_1 - 0.409x_2 - 2.5265 \leq \mu$$

$$23.97 - 8.7126x_1 + 5x_2 \leq 0$$

$$8 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 5y_1 \leq 0$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 - y_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \leq 0$$

Solución (PLME-2): Infactible

Resumen de las iteraciones hechas en el Ejemplo 2.5:

Problema PNL-1	5.1688
Problema PLME-1	2.0000
Problema PNL-2	2.1688
Problema PLME-2	Infactible

De acuerdo con el criterio de paro la solución del problema P 2.5 es:

$$x_1 = 4.3563, \quad x_2 = 2.7955$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$

$$z^* = 2.1688$$

### **2.5.5 Aproximaciones Exteriores con Relajación de Igualdades y Penalizaciones Aumentadas, OA/ER/AP, (Viswanathan y Grossmann, 1990)**

Viswanatham y Grossmann, proponen una variante del algoritmo de aproximaciones exteriores, que no requiere la identificación explícita de las no convexidades y la declaración inicial de un conjunto de variables enteras.

Sea el problema inicial.

$$z = \min c^T y + f(x)$$

Sujeto a:

$$Ay + h(x) = 0$$

$$B(y) + g(x) \leq 0$$

$$Cy + Dx \leq d$$

$$x \in X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x^L \leq x \leq x^U\}$$

$$y \in Y = \{y \mid y \in \{0,1\}^m, Ey \leq e\}$$

*Paso 1.* Resuelva la relajación del problema (P) con  $y \in Y_r = \{y \in \mathbb{R}^m, 0 \leq y \leq e\}$ , donde  $e$  es el vector unitario, para obtener el punto de KKT  $(x^0, y^0)$ . Si  $y^0$  es un entero, alto. De otra manera declare  $k = 0$ ,  $z^{OLD} = \infty$ , e ir al paso 2.

*Paso 2.* Encuentre un punto entero  $y^{k+1}$  con el problema maestro (PM), que presenta una función penalizada aumentada para encontrar el mínimo sobre el cascarón convexo determinado por los espacios medios en el punto de KKT,  $(x^0, y^0)$ .

$$z = \min c^T y + \sum_k w_k^0 s_k^0 + \sum_{i,k} w_{i,k}^p p_{i,k} + \sum_{i,k} w_{i,k}^q q_{i,k}$$

Sujeto a:

$$f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) - \alpha \leq s_k^0$$

$$T_k^0 \left[ Ay + h(x^k) + \nabla h(x^k)^T (x - x^k) \right] \leq p_k$$

$$By + g(x^k) + \nabla g(x^k)^T (x - x^k) \leq q_k$$

(PM)

$$Cy + Dx \leq d$$

$$\sum_{i \in B_k} y_i - \sum_{i \in N_k} y_i \leq |B_k| - 1$$

$$x \in X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x^L \leq x \leq x^U\}$$

$$y \in \{0,1\}^m$$

$$s_k^0, p_{i,k}, q_{i,k} \geq 0$$

$$k = 1, \dots, K$$

*Paso 3.* Resuelva el subproblema (PNL)  $[P(y^{k+1})]$  para determinar el punto de KKT  $(x^{k+1}, y^{k+1})$  con valor objetivo  $z^{k+1}$ . Si el PNL es infactible declare bandera = 0. Si el NLP es factible, declare  $z^{NEW} = z^{k+1}$ , declare bandera = 1.

$$z = \min c^T y^k + f(x)$$

Sujeto a:

$$Ay^k + h(x) = 0 \quad (\text{PNL})$$

$$By^k + g(x) \leq 0$$

$$Cy^k + Dx \leq d[P(y^k)]$$

$$x \in X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x^L \leq x \leq x^U\}$$

*Paso 4.*

a) Si bandera = 1, determine si  $z^{NEW} > z^{OLD}$ , si satisface alto. La solución óptima es  $z^{OLD}$ . De otra manera declare  $z^{OLD} = z^{NEW}$  y  $k = k + 1$ , ir al paso 2 adicionando la linealización correspondiente y el corte entero correspondiente.

b) Si bandera = 0, declare  $k = k + 1$  y vaya al paso 1 adicionando el corte entero.

### 2.5.6 Ejemplo 2.6 Algoritmo de Aproximaciones Exteriores con Relajación de Igualdades y Penalizaciones Aumentadas, (Floudas, 1996).

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3$$

Sujeto a:

$$x_1^2 + y_1 = 1.25$$

$$x_2^{1.5} + 1.5y_2 = 3.0$$

P 2.6

$$x_1 + y_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 + y_2 \leq 3.0$$

$$-y_1 - y_2 + y_3 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$$

1.- Resuelva la relajación del problema P 2.5

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3$$

Sujeto a:

$$x_1^2 + y_1 = 1.25$$

$$x_2^{1.5} + 1.5y_2 = 3.0 \quad (\text{P.R.-2.6})$$

$$x_1 + y_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 + y_2 \leq 3.0$$

$$-y_1 - y_2 + y_3 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 1.118, \quad x_2 = 1.479$$

$$\text{Solución del problema (P.R.-2.6): } y_1 = 0, \quad y_2 = 0.8, \quad y_3 = 0.5$$

$$z = 8.025$$

$$\text{Con multiplicadores } \lambda_1 = -0.89$$

$$\lambda_2 = -1.6$$

Entonces las restricciones de igualdad se pueden relajar como:

$$1.25 - x_1^2 + y_1 \leq 0$$

$$3 - x_2^{1.5} + 1.5y_2 \leq 0$$

Con linealización alrededor del punto óptimo del problema relajado

$$2.499 - 2.236x_1 + y_1 \leq 0$$

$$2.699 - 1.824x_2 + 1.5y_2 \leq 0$$

Introduciendo variables de holgura  $q_{1,1}$  y  $q_{2,1}$  y pesos para las linealizaciones, tenemos que:

$$w_1^0 = 1000$$

$$w_{1,1}^0 = 1100$$

$$w_{1,2}^0 = 356$$

Entonces el problema maestro 1, PLME-1, tiene la forma

*Problema PLME-1*

$$\text{Min } z = 1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3 + 1100q_{1,1} + 364q_{1,2} + 1000s_1 + \mu$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 3x_2 \leq \mu + s_1$$

$$2.499 - 2.236x_1 + y_1 \leq q_{1,1}$$

$$2.699 - 1.824x_2 + 1.5y_2 \leq q_{2,1}$$

$$x_1 + y_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 + y_2 \leq 3$$

$$-y_1 - y_2 + y_3 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

$$x_1 = 1.1176, \quad x_2 = 1.4792$$

$$\text{Solución (PLME-1): } y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

$$z_1^1 = 6.6729$$

Fijando el vector de variables binarias en la solución de PLME-1, se genera el problema primal PNL-1.

*Problema PNL-1*

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeto a:

$$x_1^2 = 1.25$$

$$x_2^{1.5} = 3.0$$

$$x_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 \leq 3.0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Solución (PNL-1): } x_1 = 1.1180, \quad x_2 = 2.0801$$

$$z_1^n = 8.4763$$

$$\begin{aligned} \text{Con multiplicadores } \lambda_1 &= -0.89 \\ \lambda_2 &= -1.386 \end{aligned}$$

Entonces las restricciones de igualdad se pueden relajar como:

$$\begin{aligned} 1.25 - x_1^2 + y_1 &\leq 0 \\ 3 - x_2^{1.5} + 1.5y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Con linealización alrededor del punto óptimo del problema PNL-1

$$\begin{aligned} 2.499 - 2.236x_1 + y_1 &\leq 0 \\ 4.5 - 2.0633x_2 + 1.5y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Introduciendo la variable de holgura  $q_{2,2}$  y peso para la linealización de la segunda restricción de igualdad, tenemos que:

$$w_2^0 = 614$$

*Problema PLME-2*

$$\text{Min } z = 1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3 + 1100q_{1,1} + 364q_{1,2} + 614q_{2,2} + 1000s_1 + \mu$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq \mu + s_1 \\ 2.499 - 2.236x_1 + y_1 &\leq q_{1,1} \\ 2.699 - 1.824x_2 + 1.5y_2 &\leq q_{2,1} \\ 4.5 - 2.1633x_2 &\leq q_{2,2} \\ x_1 + y_1 &\leq 1.6 \\ 1.333x_2 + y_2 &\leq 3 \\ -y_1 - y_2 + y_3 &\leq 0 \\ -y_1 - y_2 - y_3 &\leq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \quad y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1.1176, \quad x_2 = 1.5038$$

$$\text{Solución (PLME-2): } y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1$$

$$z_2^1 = 1291.91$$

Fijando en el problema (P 2.6) el conjunto de variables binarias de acuerdo con la solución óptima del (PLME-2). El problema primal (PNL-2), tiene la siguiente forma.

*Problema PNL-2*

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 1.5$$

Sujeto a:

$$x_1^2 = 1.25$$

$$x_2^{1.5} = 1.5$$

$$x_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 \leq 2.0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Solución (PNL-2): } \begin{array}{l} x_1 = 1.1180, \quad x_2 = 1.3104 \\ z_2^n = 7.6672 \end{array}$$

$$\text{Con multiplicadores } \begin{array}{l} \lambda_1 = -0.89 \\ \lambda_2 = -1.747 \end{array}$$

De acuerdo con el criterio de paro detener la búsqueda. Las iteraciones hechas en el ejemplo 2.4, se resumen en la Figura 2.5. En donde se muestra como la solución óptima del problema PNL-2 y la solución óptima del problema PLME-2, se trasponen. De acuerdo con el algoritmo propuesto por Viswanathan y Grossmann, esto es un criterio para detener la búsqueda de una solución óptima.

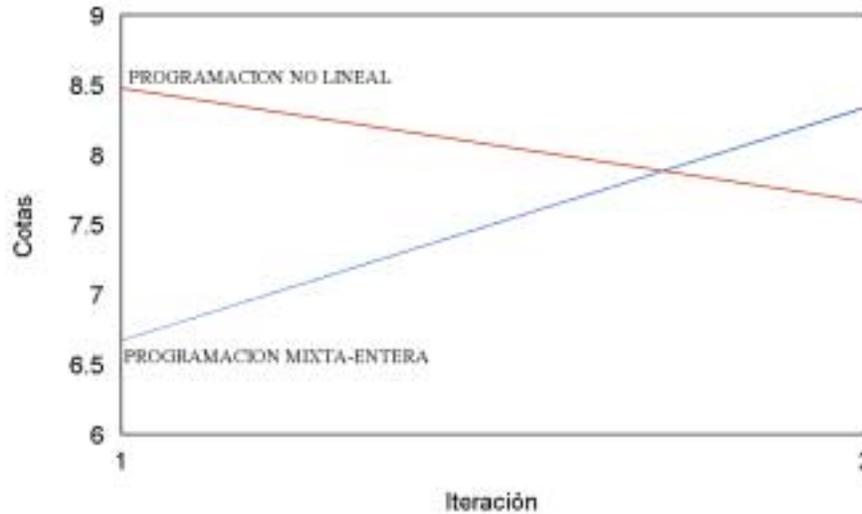


Figura 2.5. Iteraciones del Ejemplo 2.6.

Si se decidiera continuar la búsqueda pasando por alto este hecho, para saber que sucede con las iteraciones consecutivas, tenemos que:

Las restricciones de igualdad se pueden relajar como:

$$\begin{aligned} 1.25 - x_1^2 + y_1 &\leq 0 \\ 3 - x_2^{1.5} + 1.5y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Con linealización alrededor del punto óptimo del problema PNL-2

$$\begin{aligned} 2.499 - 2.236x_1 + y_1 &\leq 0 \\ 2.25 - 1.717 + 1.5y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Introduciendo la variable de holgura  $q_{2,3}$  y peso para la linealización de la segunda restricción de igualdad, tenemos que:

$$w_2^0 = 253$$

Entonces el problema maestro PLME-3 tiene la forma:

*Problema PLME-3*

$$\text{Min } z = 1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3 + 1100q_{1,1} + 364q_{1,2} + 614q_{2,2} + 253q_{2,3} + 1000s_1 + \mu$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 3x_2 \leq \mu + s_1$$

$$2.499 - 2.236x_1 + y_1 \leq q_{1,1}$$

$$2.699 - 1.824x_2 + 1.5y_2 \leq q_{2,1}$$

$$4.5 - 2.1633x_2 \leq q_{2,2}$$

$$2.25 - 1.717x_2 \leq 0$$

$$x_1 + y_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 + y_2 \leq 3$$

$$-y_1 - y_2 + y_3 \leq 0$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 \leq -1$$

$$y_2 + y_3 - y_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

$$\begin{array}{l} \text{Solución PLME-3} \\ x_1 = 1.1176, \quad x_2 = 1.5038 \\ y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0 \\ z_3^1 = 1304 \end{array}$$

Fijando el conjunto de variables binarias del problema inicial (P 2.6), en el conjunto de variables enteras de la solución óptima de PLME-3, el problema primal PNL-3, será:

*Problema PNL-3*

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 2$$

Sujeto a:

$$x_1^2 = 1.25$$

$$x_2^{1.5} = 1.5$$

$$x_1 \leq 1.6$$

$$1.333x_2 \leq 2.0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Solución PNL-3 } \begin{array}{l} x_1 = 0.5, \quad x_2 = 2.081 \\ z_3^n = 8.7403 \end{array}$$

Entonces en la siguiente iteración tenemos que  $z_3^n > z_2^n$ , el segundo criterio de paro del algoritmo se alcanza. Entonces una solución óptima para el problema (P-2.6) es

$$\begin{array}{l} x_1 = 1.1180, \quad x_2 = 1.3104 \\ y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1 \\ z^* = 7.6672 \end{array}$$

## 2.6 Conclusiones

La formulación de modelos de programación matemática empleando restricciones lógicas y variables binarias, permite modelar problemas de optimización, reduciendo el número de suposiciones hechas, generando así, modelos mas apegados a la situación real en estudio. Además, la reducción en las consideraciones hechas sobre el modelo puede generar términos no lineales. Para estos modelos de programación no lineal mixta-entera se dispone de algoritmos, como los presentados en este capítulo, que permiten encontrar eficientemente soluciones a los problemas de PNLME. En los capítulos subsecuentes se hace uso de las herramientas presentadas para formular y resolver un modelo de programación matemática para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares.

## CAPÍTULO 3

# MODELADO MATEMÁTICO Y TERMODINÁMICA DE CICLOS DE VAPOR PARA LA GENERACIÓN DE CALOR Y POTENCIA

### 3.1 Introducción

Las plantas químicas y petroquímicas consumen una cantidad considerable de energía química que se transforma en calor y potencia, el objetivo de una generación eficiente de calor y potencia es reducir los gastos de generación de los mismos. Un diseño óptimo del sistema generador permitirá cumplir adecuadamente con este propósito. En este capítulo se describe la termodinámica de algunos ciclos de vapor para la generación de calor y potencia. Posteriormente, se aborda con detalle el modelado matemático de los sistemas generadores de calor y potencia, en el contexto de la síntesis de procesos. Piezas claves de este modelado lo constituyen los balances de materia y energía y las restricciones lógicas asociadas a la operación de las unidades constitutivas de estos ciclos.

### 3.2 Ciclos de Vapor para la Generación de Potencia

La mayor parte de los dispositivos que generan potencia operan en ciclos. En una planta convencional de energía, la energía química del combustible se libera por combustión. La función del dispositivo de producción de trabajo consiste en convertir parte del calor de combustión en energía mecánica, con la mayor eficiencia posible.

En los ciclos de potencia reales se cuantifican las irreversibilidades. Las causas más comunes de irreversibilidades son la fricción del fluido y la disipación de calor hacia los alrededores. La fricción del fluido ocasiona caídas de presión en el generador de vapor, el condensador y en las tuberías, entre otras unidades. Para compensar este efecto, el agua debe bombearse a una presión más alta que la requerida por el ciclo ideal, entonces el trabajo suministrado a la bomba es mayor. Otra fuente de irreversibilidad es la disipación de calor hacia los alrededores, por lo que es necesario transferir más calor al vapor en el generador.



plantear el modelo matemático para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, ya que al variar la potencia generada en cada turbina, las condiciones de operación también cambian, aumentando o disminuyendo este parámetro, sin ser mayor al de diseño. A continuación se describen los principales ciclos de vapor para la generación de potencia.

### 3.2.2 Ciclo Rankine con Sobrecalentamiento

El ciclo Rankine es el ciclo ideal para los ciclos de potencia de vapor. En este ciclo el vapor es sobrecalentado en el generador de vapor, y se condensa por completo en el condensador. El ciclo Rankine se compone de cuatro procesos, Figura 3.2. (e.g. Cengel y Boles, 1996, El-Wakil, 1985).

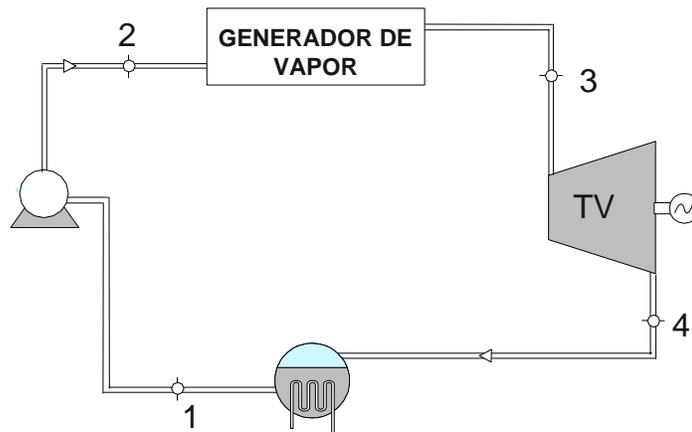


Figura 3.2. Ciclo Rankine con Sobrecalentamiento.

- 1-2. Bombeo
- 2-3. Calentamiento a presión constante en un generador de vapor
- 3-4. Expansión politrópica en una turbina
- 4-1. Condensación a presión constante

El agua entra a la bomba en el estado 1, y se bombea hasta la presión de operación del generador de vapor (estado 2), durante el bombeo la temperatura del agua aumenta ligeramente, el agua sale del generador de vapor como vapor sobrecalentado, (estado 3). El vapor sobrecalentado entra a la turbina y después de una expansión politrópica sale (estado

4), generando un trabajo, para entrar al condensador y salir como líquido saturado, que entra a la bomba completando de esta manera el ciclo, Figura 3.3.

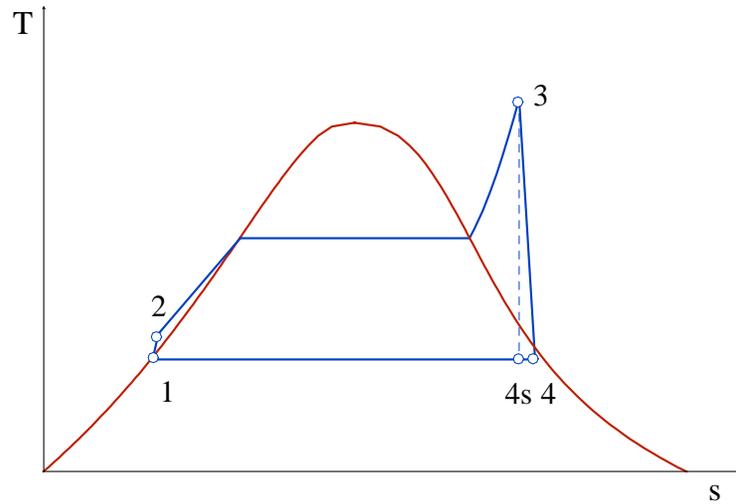


Figura 3.3. Temperatura entropía para el ciclo Rankine con sobrecalentamiento.

### 3.2.3 Ciclo Rankine con Sobrecalentamiento y Recalentamiento

En el ciclo Rankine con sobrecalentamiento más recalentamiento el vapor se expande en dos etapas, entre estas etapas el vapor es recalentado, Figura 3.4, (e.g. Cengel y Boles, 1996), logrando así, un aumento en la eficiencia del ciclo.

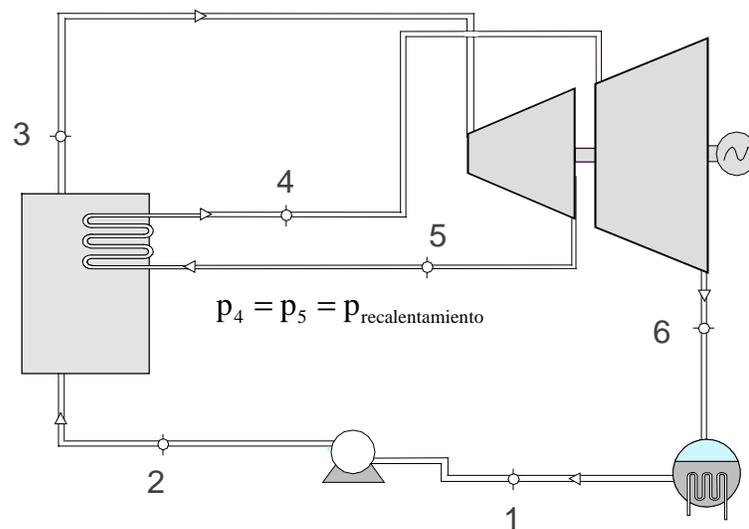


Figura 3.4. Ciclo Rankine con sobrecalentamiento y recalentamiento.

En la primera etapa de expansión en la turbina de alta presión, el vapor se expande hasta una presión intermedia, donde se extrae para ser recalentado a presión constante, usualmente hasta la temperatura de entrada a la primera turbina. Posteriormente el vapor se expande hasta la presión del condensador. La aplicación de un recalentamiento en una central eléctrica mejora la eficiencia del ciclo. (e.g. Cengel y Boles, 1996).

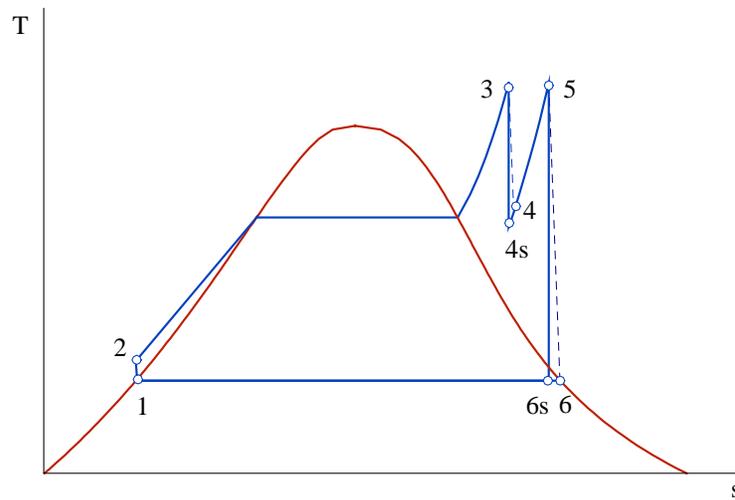


Figura 3.5. Temperatura entropía para el ciclo Rankine con sobrecalentamiento y recalentamiento.

En la Figura 3.5, se muestra el diagrama temperatura-entropía, para el ciclo Rankine con recalentamiento, las etapas que constituyen el ciclo Rankine con recalentamiento son:

- 1-2. Proceso de bombeo
- 2-3. Calentamiento a presión constante en un generador de vapor
- 3-4. Expansión politrópica hasta  $p_4$
- 4-5. Recalentamiento en un generador de vapor
- 5-6. Expansión politrópica hasta  $p_6$
- 6-1. Condensación a presión constante

### 3.2.4 Ciclo Rankine Regenerativo

El calor añadido en el ciclo Rankine, se puede dividir en tres secciones, Figura 3.6, (e.g. Cengel y Boles, 1996).

- Calentamiento de agua (economizador),  $q_{Ec}$

- Evaporación,  $q_{Ev}$
- Sobrecalentamiento,  $q_{Sc}$

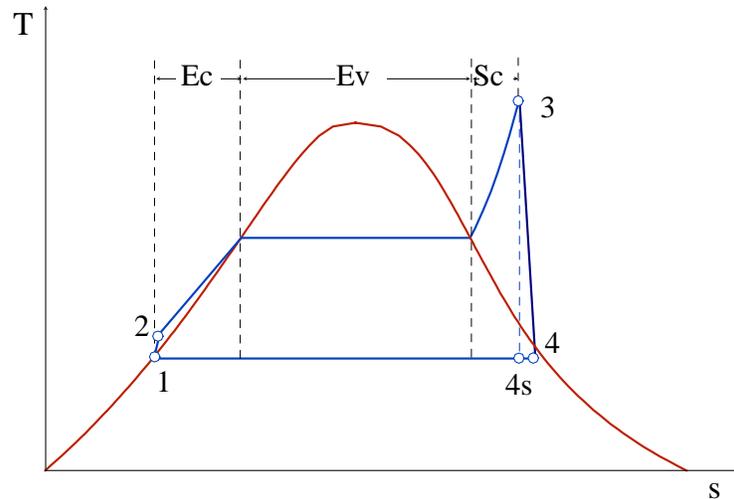


Figura 3.6. Adición de calor de un ciclo Rankine con sobrecalentamiento.

Una desventaja del ciclo Rankine con sobrecalentamiento se presenta en la etapa de adición de calor al agua de alimentación para llevar a la temperatura a la que se genera vapor. La temperatura del agua a la salida de la bomba es aproximadamente la temperatura de condensación, estado 2, muy inferior a la temperatura de los procesos de vaporización y sobrecalentamiento, la eficiencia del ciclo se reduce considerablemente como consecuencia de esta adición de calor a temperatura relativamente baja. Para reducir el calor suministrado para elevar la temperatura del agua de alimentación, antes de entrar al generador de vapor se hace circular por un intercambiador de calor (regeneración).

Un proceso de regeneración en las plantas de potencia de vapor se logra con extracción de vapor en la turbina a diferentes presiones. Este vapor se utiliza para calentar el agua de alimentación. Si las dos corrientes de fluido se mezclan, el calentador es abierto, en caso contrario el calentador es cerrado.

- *Calentadores de agua de alimentación abiertos.*

En los calentadores de agua de alimentación abiertos, el vapor extraído de la turbina, donador de calor, y la corriente de agua, receptor de calor, deben estar a la misma presión, para poder mezclarse. Figura 3.7.

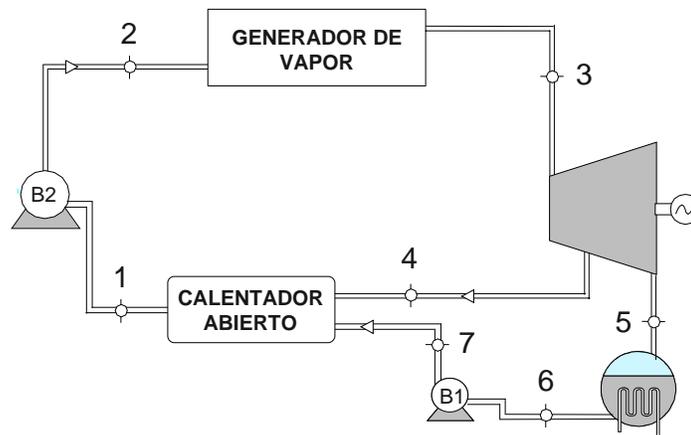


Figura 3.7. Ciclo Rankine regenerativo con un calentador de agua de alimentación abierto.

Parte del vapor que entra en la turbina en el estado 3 se extrae de la turbina a presión intermedia, estado 4. El vapor extraído se alimenta a un intercambiador de calor. La fracción de vapor que no se extrae de la turbina se expande hasta la presión del condensador, estado 5, en el condensador se condensa hasta líquido saturado, estado 6. Empleando una bomba se aumenta la presión del condensado hasta la presión del vapor extraído, estado 7. El líquido comprimido, estado 7, entra al calentador de agua de alimentación, en donde se mezcla directamente con la corriente extraída de la turbina, los flujos másico de las dos corrientes se ajustan para que la corriente al final de la mezcla sea líquido saturado, estado 1. Una segunda bomba eleva la presión del líquido saturado hasta el estado 2, que corresponde a la presión del generador de vapor, Figura 3.8.





### 3.3 Modelado Matemático

La existencia de las unidades presentes en un ciclo de vapor para la generación de calor y potencia, así como las restricciones lógicas asociadas a la existencia y operación de estas unidades se pueden modelar empleando las formulaciones descritas en el Capítulo 2. En esta sección se presenta el modelado matemático, en el contexto de síntesis de sistemas de servicios auxiliares de las unidades características de los ciclos de vapor para la generación de calor y potencia.

#### Notación

##### *Variables continuas*

$F$	=Flujo;
$h$	=Entalpía específica;
$Q$	=Flujo de calor;
$PCI$	=Poder calorífico superior
$W$	=Potencia;
$w$	=Trabajo motor generado en la turbina;
$\eta$	=Eficiencia.

##### *Variables binarias*

$$y = \begin{cases} 1 & \text{Si la unidad existe} \\ 0 & \text{Si la unidad no existe} \end{cases}$$

##### *Subíndices*

$ce$	=corriente fría que entra;
$cs$	=corriente fría que sale;
$cv$	=cabezal de vapor;
$comb$	=combustible;
$e$	=entra;
$ext1$	=extracción en la primer etapa de expansión en la turbina;
$ext2$	=extracción en la segunda etapa de expansión en la turbina;
$gv$	=generador de vapor;
$he$	=corriente caliente que entra;
$hs$	=corriente caliente que sale;
$ic$	=intercambiador de calor;
$icd$	=corriente donadora de calor en el intercambiador de calor;
$icr$	=corriente receptora de calor en el intercambiador de calor;
$i$	=1, 2;

*rec1* =recirculación 1;  
*rec2* =recirculación 2;  
*s* =sale;  
*t* =turbina;  
*t1* =primer etapa de expansión en la turbina;  
*t2* =segunda etapa de expansión en la turbina;  
*t3* =tercer etapa de expansión en la turbina.

#### Parámetros

a y b =constantes para la calcular la eficiencia de una turbina como función del trabajo motor generado  
 M =Límite superior

### 3.3.1 Modelado matemático de un generador de vapor

Los generadores de vapor son dispositivos empleados para generar vapor, el cual se emplea como fuente de calor, en procesos industriales y en particular como fluido de trabajo en ciclos de generación de potencia, etc. Los generadores de vapor están diseñados para transmitir calor de una fuente externa a una corriente de agua o vapor. La fuente de calor generalmente es energía química liberada por combustión o una corriente proveniente de otra sección del proceso.

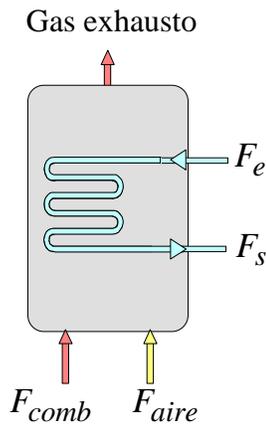


Figura 3.11. Generador de vapor.

#### Modelo GV-1

*Balances de materia y energía para el agua*

$$\begin{aligned}
 F_e - F_s &= 0 \\
 F_e h_e - F_s h_s + Q_{gv} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

*Balace para el combustible suministrado*

$$Q_{gv} = F_{comb} PCI \eta_{comb} \quad (3.2)$$

*Restricciones asociadas*

$$F_s \leq M_{gv} y_{gv} \quad (3.3)$$

$$F_i, h_i, Q_{gv} \geq 0 \quad (3.4)$$

### 3.3.2 Modelado matemático de un cabezal de vapor

Los cabezales son elementos de los ciclos de vapor que operan a determinados niveles de presión. Reciben el vapor de diversas unidades para posteriormente alimentar a otras unidades. El cabezal de vapor de alta presión es alimentado por el generador de vapor y distribuye el vapor sobrecalentado a turbinas de alta presión, válvulas de expansión, principalmente. El cabezal de presión media recibe vapor de turbinas de alta presión, válvulas de expansión o calderas de recuperación de calor, y satisface las demandas de vapor de procesos químicos, turbinas de baja presión, válvulas de expansión e intercambiadores de calor, entre otras unidades. El cabezal de baja presión distribuye el vapor contenido a otras secciones del proceso como al deareador, etc. Figura 3.12.

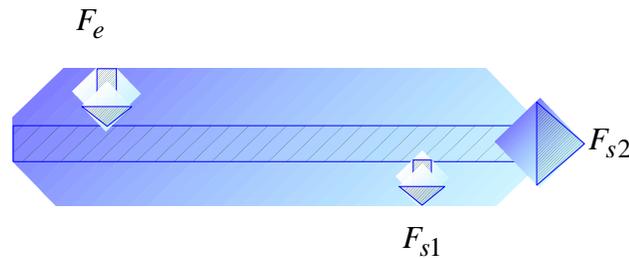


Figura 3.12. Cabezal de vapor.

Modelo CV-1

*Balances de materia y energía*

$$F_e - \sum_{i=1}^s F_{si} = 0 \quad (3.5)$$

$$F_e h_e - \sum_{i=1}^s F_i h_i = 0$$

*Restricciones asociadas*

$$F_s \leq M_{cv} y_{cv} \quad (3.6)$$

Restricción de existencia

$$y_{gv} = y_{cv} \quad (3.7)$$

$$F_i, h_i \geq 0 \quad (3.8)$$

### 3.3.3 Modelado matemático de turbinas de vapor

La turbina es la máquina, en la cual la energía calorífica del vapor se convierte a energía mecánica. Las turbinas pueden ser de alta o baja presión, operando a contrapresión, a condensación y/o con extracción. Suponga una turbina que opera a contrapresión.

*Modelado matemático de una turbina sin extracción*

La descripción matemática de una turbina que opera a contrapresión o a condensación sin extracción, Figura 3.13, se presenta en el modelo Ts-1.

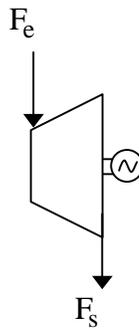


Figura 3.13. Turbina que opera a contrapresión o a condensación.

Modelo TS-1

*Balances de materia y energía*

$$\begin{aligned} F_e - F_s &= 0 \\ F_e h_e - F_s h_s - W_t &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Restricciones asociadas*

$$F_{salida} \leq M_t y_t \quad (3.10)$$

$$W_t \leq M_t y_t \quad (3.11)$$

Restricción de operación con el cabezal de vapor

$$y_t \leq y_{cv} \quad (3.12)$$

Eficiencia isentrópica de expansión

$$\eta_t = a w_t + b y_t \quad (3.13)$$

$$F_i, h_i, W_t \geq 0 \quad (3.14)$$

**Modelado de una turbina que opera a contrapresión o a condensación con una extracción.**

Para modelar una turbina que opera a contrapresión o a condensación, con una extracción, Figura 3.14-a, se supone que la expansión se lleva a cabo en dos etapas. Figura 3.14-b.

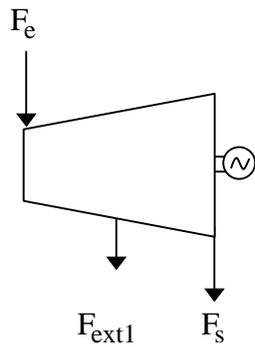


Figura 3.14-a.

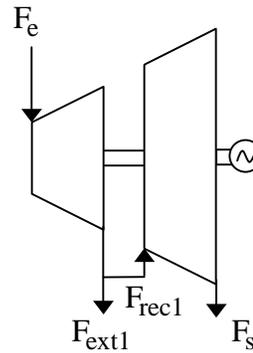


Figura 3.14-b

Modelo TE-2

*Balances de materia y energía*

$$\begin{aligned} F_e - F_{ext1} - F_{rec1} &= 0 \\ F_{rec1} - F_s &= 0 \\ F_e h_e - F_{ext1} h_{ext1} - F_{rec1} h_{rec1} - W_{t1} &= 0 \\ F_{rec1} h_{rec1} - F_s h_s - W_{t2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

*Restricciones asociadas*

$$\begin{aligned} F_{ext1} + F_{rec1} &\leq M_t y_{t1} \\ F_s &\leq M_t y_{t2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} W_{t1} &\leq M_t y_{t1} \\ W_{t2} &\leq M_t y_{t2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Restricción de existencia con el cabezal de vapor

$$y_{t1} \leq y_{cv} \quad (3.18)$$

Restricción de existencia entre las etapas de expansión

$$y_{t2} \leq y_{t1} \quad (3.19)$$

Eficiencia isentrópica de expansión

$$\begin{aligned} \eta_{t1} &= a_{t1} w_{t1} + b_{t1} y_{t1} \\ \eta_{t2} &= a_{t2} w_{t2} + b_{t2} y_{t2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Eficiencia isentrópica entre las etapas de expansión

$$\eta_{t1} - \eta_{t2} - (1 - y_{t2}) \leq 0 \quad (3.21)$$

$$F_i, h_i, W_t \geq 0 \quad (3.22)$$

***Modelado de una turbina que opera a contrapresión o a condensación con dos extracciones.***

Para modelar, en el contexto de síntesis, una turbina que opera a contrapresión o a condensación con dos extracciones, Figura 3.15-a, se supone que la expansión se lleva a cabo en tres etapas, Figura 3.15-b.

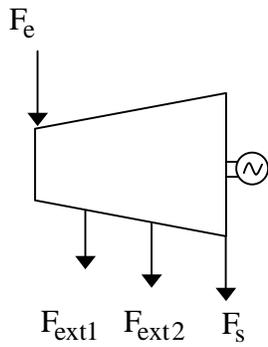


Figura 3.15-a.

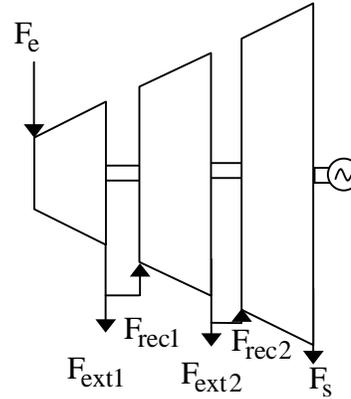


Figura 3.15-b

## Modelo TE-3

*Balances de materia y energía*

$$\begin{aligned}
 F_e - F_{ext1} - F_{rec1} &= 0 \\
 F_{rec1} - F_{ext2} - F_{rec2} &= 0 \\
 F_{rec2} - F_s &= 0 \\
 F_e h_e - F_{ext1} h_{ext1} - F_{rec1} h_{rec1} - W_{t1} &= 0 \\
 F_{rec1} h_{rec1} - F_{ext2} h_{ext2} - F_{rec2} h_{rec2} - W_{t2} &= 0 \\
 F_{rec2} h_{rec2} - F_s h_s - W_{t3} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

*Restricciones asociadas*

$$\begin{aligned}
 F_{ext1} + F_{rec1} &\leq M_t y_{t1} \\
 F_{ext2} + F_{rec2} &\leq M_t y_{t2} \\
 F_s &\leq M_t y_{t3}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 W_{t1} &\leq M_t y_{t1} \\
 W_{t2} &\leq M_t y_{t2} \\
 W_{t3} &\leq M_t y_{t3}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Restricción de operación con el cabezal de vapor.

$$y_{t1} \leq y_{cv} \tag{3.26}$$

Restricción de operación entre las etapas de expansión

$$\begin{aligned} y_{t2} &\leq y_{t1} \\ y_{t3} &\leq y_{t2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eficiencia isentrópica

$$\begin{aligned} \eta_{t1} &= a_{t1}w_{t1} + b_{t1}y_{t1} \\ \eta_{t2} &= a_{t2}w_{t2} + b_{t2}y_{t2} \\ \eta_{t3} &= a_{t3}w_{t3} + b_{t3}y_{t3} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Restricciones de la eficiencia isentrópica entre las etapas de expansión

$$\begin{aligned} \eta_{t1} - \eta_{t2} - (1 - y_{t2}) &\leq 0 \\ \eta_{t2} - \eta_{t3} - (1 - y_{t3}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

*Variables no negativas*

$$F_i, h_i, W_t \geq 0 \quad (3.30)$$

### 3.3.4 Modelado matemático de un intercambiador de calor

El tipo de intercambiador de calor más empleado es de tubos y coraza, con flujo a contracorriente que resulta ser el arreglo más eficiente, para la transferencia de calor

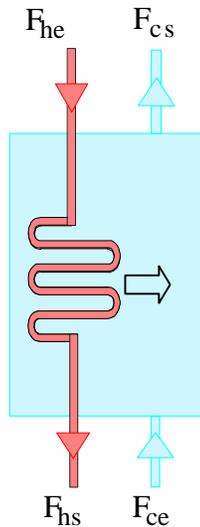


Figura 3.16. Intercambiador de calor.

El modelado de intercambiadores de calor se lleva a cabo en dos secciones, una es para la corriente donadora de calor y otra para la corriente receptora de calor.

Modelo IC-1:

*Balances de materia y energía*

$$\begin{aligned}
 F_{ce} - F_{cs} &= 0 \\
 F_{he} - F_{hs} &= 0 \\
 F_{ce}h_{ce} - F_{cs}h_{cs} + Q_{ic} &= 0 \\
 F_{he}h_{he} - F_{hs}h_{hs} - Q_{ic} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

*Restricciones asociadas*

$$\begin{aligned}
 F_{cs} &\leq M_{ic}y_{icr} \\
 F_{hs} &\leq M_{ic}y_{icd}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

*Variables no negativas*

$$F_i, h_i, W_t \geq 0 \tag{3.33}$$

## Comentarios

- 1) Cuando la función objetivo minimiza los costos totales, integrados por un cargo fijo más los costos asociados al nivel de operación de cada unidad,  $n$ , una solución óptima errónea puede activar el flujo de la unidad  $n$ , sin igualar a uno la variable binaria asociada a la existencia de la unidad, sin pagar cargo fijo. Esto se puede evitar empleando restricciones del tipo “de la  $M$  grande”, ecuaciones (3.3), (3.6), (3.10), (3.16), (3.24) y (3.32). Que además permiten acotar la capacidad de la unidad  $n$ .
- 2) En el modelado de las turbinas se emplean restricciones del tipo “de la  $M$  grande”, para permitir la generación de trabajo motor solamente si la turbina correspondiente existe, ecuaciones (3.11), (3.17) y (3.25).
- 3) Es importante notar que la existencia en determinadas condiciones de operación de algunas unidades esta fuertemente ligada entre ellas. Suponga que el vapor generado en el

generador de vapor se envía al cabezal de vapor, entonces el cabezal de vapor y el generador de vapor deben operar a la misma presión y temperatura. Esta restricción se puede modelar empleando variables binarias, asociadas a la existencia de estas unidades en determinada condición de operación, ecuación (3.7).

- 4) Note que las condiciones de operación de las turbinas esta condicionada por las condiciones de operación de la unidad que la alimenta, generalmente un cabezal de vapor. Entonces, la turbina puede operar en determinadas condiciones de presión y temperatura únicamente si el cabezal opera en estas condiciones, ecuaciones (3.12), (3.18) y (3.26).
- 5) Para las turbinas con más de una etapa de expansión, se debe restringir la existencia de las etapas de expansión, de tal manera que la segunda expansión puede existir únicamente si existe la primera expansión en las condiciones de operación apropiadas. Y así sucesivamente para etapas de expansión posteriores, ecuaciones (3.19) y (3.27).
- 6) Por restricciones tecnológicas la eficiencia isentrópica entre las etapas de expansión de una turbina debe ser igual, ecuaciones (3.21) y (3.29).
- 7) Debe notarse que las variables flujo másico, entalpía, trabajo motor y potencia son no negativas. Ecuaciones (3.4), (3.8), (3.14), (3.22), (3.30) y (3.33).

### 3.4 Conclusiones

La programación matemática es una herramienta que permite modelar, en el contexto de síntesis, la existencia de unidades constitutivas de ciclos de generación de calor y potencia, a través de sistemas de ecuaciones algebraicas incluyendo sus restricciones de operación. Sin embargo, una descripción mas apegada a la operación real de dichos sistemas y la complejidad del modelo desarrollado depende en gran parte del número de suposiciones hechas.

## CAPÍTULO 4

# UN MODELO LINEAL MIXTO-ENTERO PARA LA SÍNTESIS DE SISTEMAS DE SERVICIOS AUXILIARES

### 4.1 Introducción

Para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares se han propuesto diferentes enfoques, siendo uno de los más populares el de superestructura, de Papoulias y Grossmann (1983). Una superestructura es un diagrama de flujo que contiene diversas alternativas para el diseño, que subsecuentemente se representan como un modelo de optimización. La solución resultante, extrae del conjunto de procesos de flujo propuestos, una configuración que cumpla con el criterio de optimización empleado. Para problemas de programación lineal esta configuración, es la mejor configuración posible de acuerdo con el criterio de rendimiento empleado. En este capítulo se analiza y discute el modelo de programación lineal mixta-entera de Papoulias y Grossmann con un ejemplo ilustrativo.

### 4.2 Ejemplo Ilustrativo (Nishio et al., 1980)

Una refinería tiene demandas de servicios auxiliares como vapor a diferentes niveles de presión, potencia y agua de proceso, descritas en la Tabla 4.1. Además se dispone de carga térmica suficiente para generar vapor en calderas de calor de desecho, especificada en la Tabla 4.2. Las condiciones de operación de algunas unidades del sistema de servicios auxiliares y las condiciones de operación del vapor requerido (condiciones discretas de operación), se especifican en la Tabla 4.3. Los cabezales de alta presión y presión media tienen tres posibles condiciones de operación, sin embargo cada unidad puede operar solamente en una de estas condiciones. Determinar la configuración, flujos másicos en cada estado del sistema y condiciones de operación de cada unidad, para satisfacer estas demandas de servicios auxiliares, minimizando los costos de generación. Este ejemplo lo retoman Papoulias y Grossmann en su artículo “A Structural Optimization Approach in Process Synthesis-I”, para darle solución con su modelo lineal, sin embargo, debido a que los autores

no presentan información de costos suficiente para reproducir el ejemplo, en esta tesis los costos se calculan con coeficientes del año 2003.

Las demandas de servicios auxiliares requeridas por la refinería son 34.75 kg/s de vapor a presión media, 52.02 kg/s de vapor a baja presión, 32030 kW de electricidad, más la potencia requerida por el sistema de servicios auxiliares y 76.38 kg/s de agua deaerada.

Tabla 4.1. Demandas de Servicios Auxiliares.

Vapor (kg/s)	presión media	34.75
	baja presión	52.02
Electricidad (kW)	No. 1	32030
Potencia (kW)	No. 2	818
	3	1965
	4	2020
	5	1530
	6	1940
	7	3120
	8	85
	9	440
	10	203
	11	650
	Potencia Interna	12 bombas
Agua (kg/s)	deaerada	76.38

La carga térmica disponible para calderas de calor de desecho, proveniente de alguna otra sección de la planta, permite generar vapor a presión media y vapor a baja presión, por consiguiente, el costo de capital más los costos de operación necesarios para generar el vapor en dichas calderas se deben incluir en el costo total del sistema.

Tabla 4.2. Disponibilidad de otras secciones del proceso.

Vapor a presión media (kg/s)	62.22
Vapor a baja presión (kg/s)	13.94
Condensado (kg/s)	33.36

Tabla 4.3. Condiciones de operación del equipo y del vapor.

Corriente / equipo	Condiciones	Estado
Cabezal de AP	p = 96.53 bar, T = 713 K,	1'
	p = 68.95 bar, T = 661 K,	1''
	p = 55.16 bar, T = 782 K,	1'''
Cabezal de MP	p = 20.68 bar, T = 758 K,	2'
	p = 17.24 bar, T = 600 K,	2''
	p = 13.79 bar, T = 690 K,	2'''
Cabezal de BP	p = 3.45 bar, T = 411 K,	3
Deaerador	p = 1.031 bar, T = 373 K.	4
Intercambiador Donador de calor Receptor de calor Caldera	vapor a presión media agua alimentada eficiencia = 90 % PCI = 43950 kJ/kg	
Condensador al vacío	p exhausto=0.16 bar T condensado = 328 K T entrada agua enfr = 303 K T salida agua enfr = 323 K	
Bomba agua de enfriamiento	p entrada = 1.013 bar p salida = 7.94 bar T entrada = 303 K eficiencia = 65 %	

### 4.3 Enfoque de Superestructura

En síntesis de sistemas de servicios auxiliares con un enfoque de superestructura, el primer paso consiste en proponer un esquema del sistema general que contenga diferentes configuraciones alternativas para el proceso. Estas configuraciones básicamente son el resultado de una revisión basada en el uso de reglas heurísticas, termodinámicas, y/o experiencia del diseñador. El equipo que puede usarse típicamente en una planta de generación de calor y potencia incluye generadores de vapor, calderas de recuperación de calor, turbinas de vapor de alta o baja presión, operando a contrapresión o a condensación, bombas, intercambiadores de calor, y otras unidades auxiliares como condensadores, deaeradores, válvulas de expansión, planta de tratamiento de agua de alimentación. La

interconexión de estas unidades, se representa por la superestructura de opciones alternativas, que incluye muchas posibles soluciones y define implícitamente un espacio de búsqueda para el diseño óptimo.

Una vez propuesta la superestructura acorde al problema, el siguiente paso en la síntesis de sistemas de servicios auxiliares consiste en desarrollar un modelo matemático de la superestructura, que incluye: balances de materia y energía, diversas restricciones de operación y diseño, estableciendo entre otras, ecuaciones de operación y capacidad de las unidades, demandas a satisfacer y una función objetivo que cuantifica la calidad del sistema de servicios auxiliares que se diseña. La optimización del modelo desarrollado conduce a la configuración final del sistema, la cual deja de incluir todos los elementos redundantes o innecesarios para la satisfacción de los requerimientos establecidos con un costo mínimo. El desarrollo de la superestructura adecuada es de gran importancia, por que de ésta depende en gran parte la calidad del sistema óptimo final.

#### **4.3.1 Superestructura asociada al ejemplo ilustrativo**

La superestructura asociada al ejemplo ilustrativo (Figura 4.1), está constituida por tres cabezales de vapor, una para cada nivel de presión demandado, de donde se abastecen las demandas de vapor al nivel correspondiente o bien el vapor se transfieren al siguiente nivel de presión, por medio de un reductor de presión, ó se alimenta a una turbina de vapor que genera un trabajo motor, las turbinas de vapor pueden operar a contrapresión ó a condensación, ambas con posibilidad de extracción. La superestructura incluye unidades complementarias como: bombas, deaerador, condensador, purga, tratamiento de agua.

La generación de vapor se efectúa empleando un generador de vapor o bien calderas de calor de desecho. En algunos casos, como en el ejemplo ilustrativo, para satisfacer las condiciones termodinámicas requeridas por el vapor de presión media, se emplea un recalentamiento en el generador de vapor, ver Capítulo 3, sección 3.2.3.

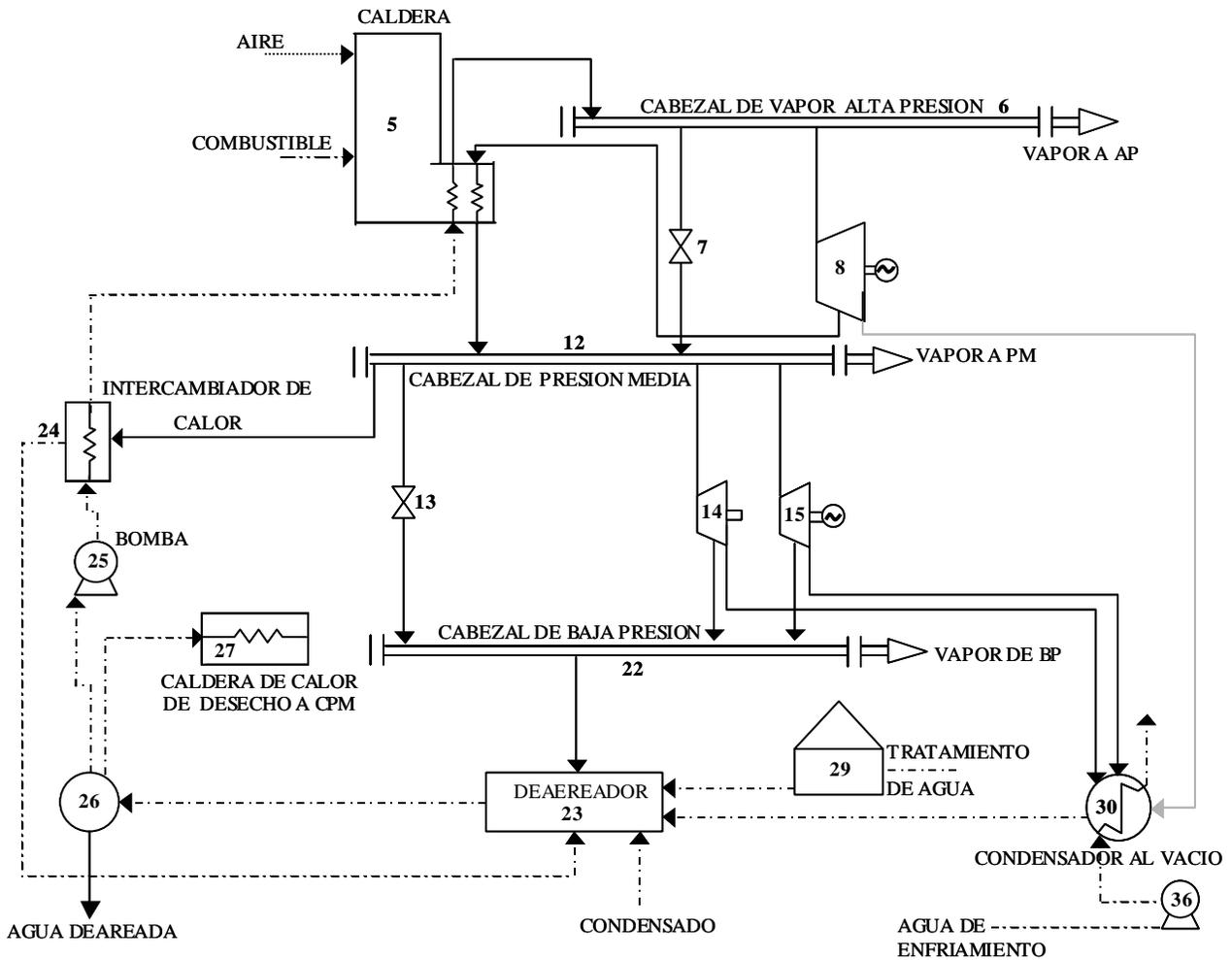


Figura 4.1. Superestructura propuesta por Papoulias y Grossmann.

Una superestructura adecuada debe incluir diferentes alternativas de solución, que permitan conformar diversas topologías, mediante la activación adecuada de subconjuntos de unidades en determinadas condiciones de operación. La superestructura desarrollada para el ejemplo ilustrativo, por Papoulias y Grossmann, contiene configuraciones alternativas. Analizando la superestructura, se tiene que en principio está constituida por un ciclo Rankine regenerativo con sobrecalentamiento y recalentamiento, Figura 4.2, descrito en el Capítulo 3. El regenerador recibe vapor del cabezal de presión media previamente recalentado, el vapor sale del regenerador a la temperatura de saturación correspondiente a la presión del fluido.

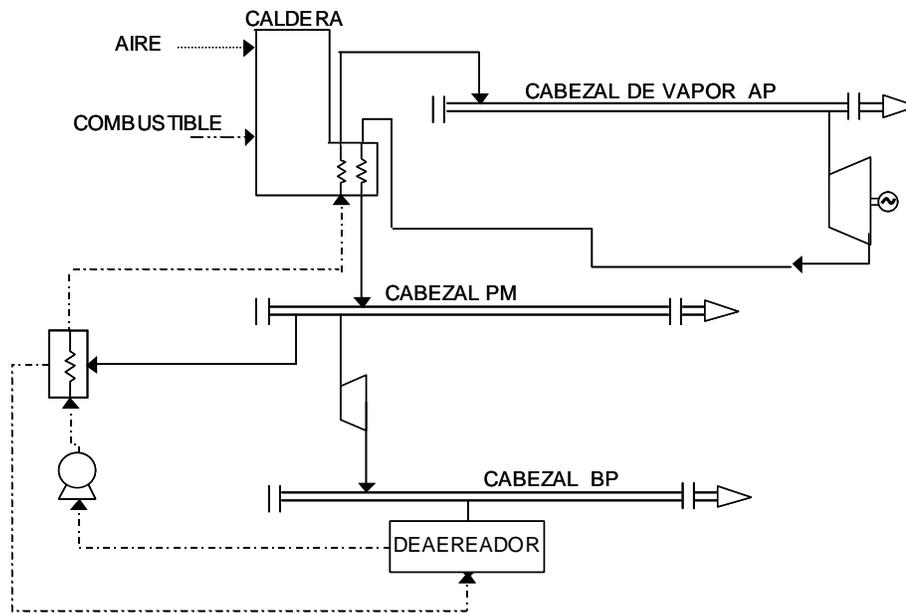


Figura 4.2. Un ciclo termodinámico incluido en la superestructura.

Además, el trabajo motor puede generarse en turbinas de alta presión o en turbinas de baja presión que pueden operar a contrapresión o a condensación, con alternativa de extracción, Figura 4.3.

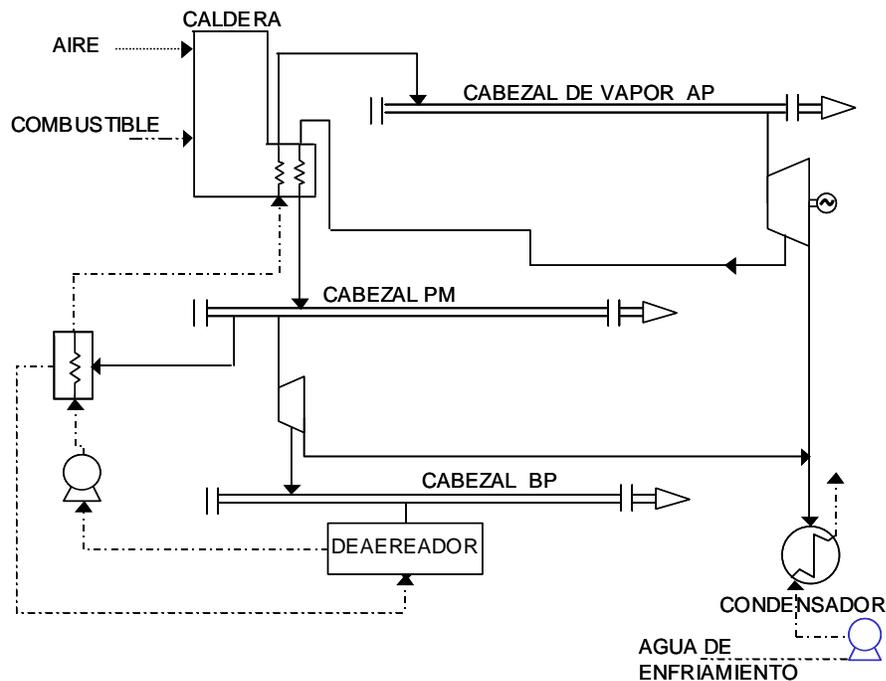


Figura 4.3. Una configuración de operación alternativa incluida en la superestructura.

## 4.4 Modelo Lineal Mixto-Entero de Papoulias y Grossmann

Para dar una solución al problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares, Papoulias y Grossmann en su artículo “A Structural Optimization Approach in Process Síntesis-I”, formulan un modelo de programación lineal mixta-entera, bajo las siguientes suposiciones, la eficiencia isentrópica de las turbinas es un valor constante, todas las unidades puede existir a lo más en una condición de operación, las relaciones de costo son lineales compuestas por cargo fijo y un cargo variable, función del flujo correspondiente a cada unidad. Para una superestructura que está constituida por  $n$  unidades, en donde la unidad  $n$  tiene  $m$  interconexiones a la salida con otras unidades.

### Modelo LME-1

#### Notación

##### Índices

- $n$  = unidad operando  
 $m$  = unidad a la que se dirige el flujo de salida de la unidad  $n$   
 $k$  = posible condición de operación de la unidad  $n$

##### Conjuntos

- $N$  =  $\{n:n$  es una unidad componente de la superestructura}  
 $N_1$  =  $\{n_1:n_1$  es una unidad con temperatura y presión de operación determinadas};  $N_1 \in N$   
 $K_n$  =  $\{k:k$  unidad  $n$  que opera a condición  $P_{nk}\}$ ;  $n \in N$   
 $N_U$  =  $\{n_u:n_u$  unidad con consumo de combustible};  $N_U \in N$   
 $N_E$  =  $\{n_E:n_E$  unidad con consumo de agua fresca alimentada};  $N_E \in N$   
 $N_P$  =  $\{n_P:n_P$  unidades que abastecen las demandas de potencia};  $N_P \in N$   
 $N_S$  =  $\{n_S:n_S$  unidades que abastecen las demandas de vapor};  $N_S \in N$   
 $N_r$  =  $\{n_r:n_r$  unidades que abastecen las demandas de agua deaerada};  $N_r \in N$

##### Parámetros

- $h_{nkm}$  = Entalpía específica asociada a cada flujo de salida  
 $\alpha_{nk}$  = Cargo fijo de la unidad  $n$ , que opera en la condición  $k$   
 $\beta_n$  = Costo asociado a la capacidad de operación (flujo) de la unidad  $n$   
 $\gamma_{nk}$  = Costo de combustible  
 $\delta_n$  = Costo de agua fresca de alimentación

##### Variables continuas, positivas

- $F_{nkm}$  = Flujo de salida de la unidad  $n$ , a condición  $k$ , que abastece a la unidad  $m$   
 $Q_n$  = Calor generado ó requerido por la unidad  $n$

$W_n$  = Potencia generada o requerida por la unidad  $n$

Variables binarias

$y_{nk}$  = Variable asociada a la existencia de la unidad  $n$  operando en la condición  $k$

*Función objetivo*

$$\min C = \sum_{n \in N} \sum_{k \in K_n} (y_{nk} \beta_{nk} + \beta_n G_n) + \sum_{n \in N_u} \sum_{k \in K_n} \gamma_{nk} F_{nk} + \sum_{n \in N_E} \delta_n W_n \quad (4.1)$$

*Restricciones asociadas*

1. Balances de materia

$$\sum_{m \in I_n} \sum_{k \in K_m} F_{mkn} - \sum_{m \in O_n} \sum_{k \in K_n} F_{nkm} = 0 \quad n \in N \quad (4.2)$$

2. Balances de energía

$$\sum_{m \in I_n} \sum_{k \in K_m} F_{mkn} h_{mkn} - \sum_{m \in O_n} \sum_{k \in K_n} F_{nkm} h_{nkm} - Q_n - W_n = 0 \quad n \in N \quad (4.3)$$

3. Para asegurar que cada unidad que exista opera a lo mas en una condición de operación  $k$  se aplica la siguiente desigualdad

$$\sum_{k \in K_n} y_{nk} \leq 1 \quad n \in N \quad (4.4)$$

4. Para asegurar que el flujo de salida de cada unidad esta a las mismas condiciones de operación  $k$ , si la unidad  $n$  existe, se debe incluir la siguiente desigualdad.

$$\sum_{m \in O_n} F_{nkm} - U y_{nk} \leq 0 \quad k \in K_n, \quad n \in N \quad (4.5)$$

Otras restricciones para asegurar que las unidades existentes operan consistentemente son:

- Una se origina cuando una unidad  $m$  existirá a la condición  $k$ , si y únicamente si existe una unidad  $n$  a la misma condición. En este caso un conjunto de variables binarias puede corresponder a las unidades:

$$y_{mk} = y_{nk} \quad k \in K_n \quad (4.6)$$

- El segundo tipo de restricción se origina cuando la existencia de una unidad  $m$  a la condición  $k$ , implica la existencia de la unidad  $n$  a la misma condición, pero lo contrario no necesariamente debe cumplirse.

$$y_{mo} = y_{mk} \quad k \in K_n \quad n \in N \quad m \in O_n \quad (4.7)$$

Donde  $y_{mo}$  esta relacionada a la existencia de la unidad  $n$  por las restricciones:

$$y_{mo} - \sum_{k \in K_n} y_{nk} \leq 0 \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I \in O_m} F'_{mk} - U y_{nk} &\leq 0 \quad k \in K_n \\ \sum_{k \in K_n} \sum_{I \in O_m} F'_{mk} - U y_{mo} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Para encontrar las demandas de servicios auxiliares, las variables continuas en el modelo deben cumplir las siguientes restricciones:

- a) Demandas de potencia

$$\tilde{W}_p = \sum_{n \in N_p} W_n \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (4.10)$$

- b) Demandas de vapor (en forma de calor requerido)

$$\tilde{Q}_s = \sum_{n \in N_p} Q_n \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (4.11)$$

- c) Demandas de agua

$$F_r = \sum_{n \in N_r} \sum_{k \in K_n} F'_{nk} \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (4.12)$$

Restricciones de capacidad para cada unidad

$$G_n = \begin{cases} \sum_{m \in O_n} \sum_{k \in K_n} F_{nkm} & \text{Capacidad de flujo de la unidad } n \\ W_n & \text{Carga de trabajo del controlador de la turbina o motor } n \end{cases} \quad (4.13)$$

Estas capacidades en general están limitadas por capacidades mínimas y máximas:  $G_n^L$ ,  $G_n^U$ , en la restricción:

$$G_n^l \left( \sum_{k \in K_n} y_{nk} \right) \leq G_n \leq G_n^l \left( \sum_{k \in K_n} y_{nk} \right) \quad (4.14)$$

Comentarios

- La función objetivo está integrada por los cargos fijos asociados a la existencia de cada unidad presente en la configuración final más los costos variables asociados al nivel de operación. Así mismo, se suman los costos de operación dados por el combustible, agua o algún otro gasto de servicio externo, ecuación (4.1).
- Para las restricciones del tipo de “la M grande”, ecuación (4.5), U es un número suficientemente grande para cada unidad, que acota la corriente de flujo de la unidad correspondiente.

## 4.5 Solución para el ejemplo ilustrativo según el Modelo de Papoulias y Grossmann

El modelo (LME-1), asociado al ejemplo ilustrativo, se resuelve en ambiente GAMS, empleando como resolvidor OSL. La configuración óptima, solución Lineal-1, se muestra en la Figura 4.3. La cual tiene un costo de \$51, 618, 604.7/año, de los cuales \$46, 932, 480.00 corresponden a costos de operación anual y \$4, 686, 124.67 a costos de capital, anualizados a 5 años.

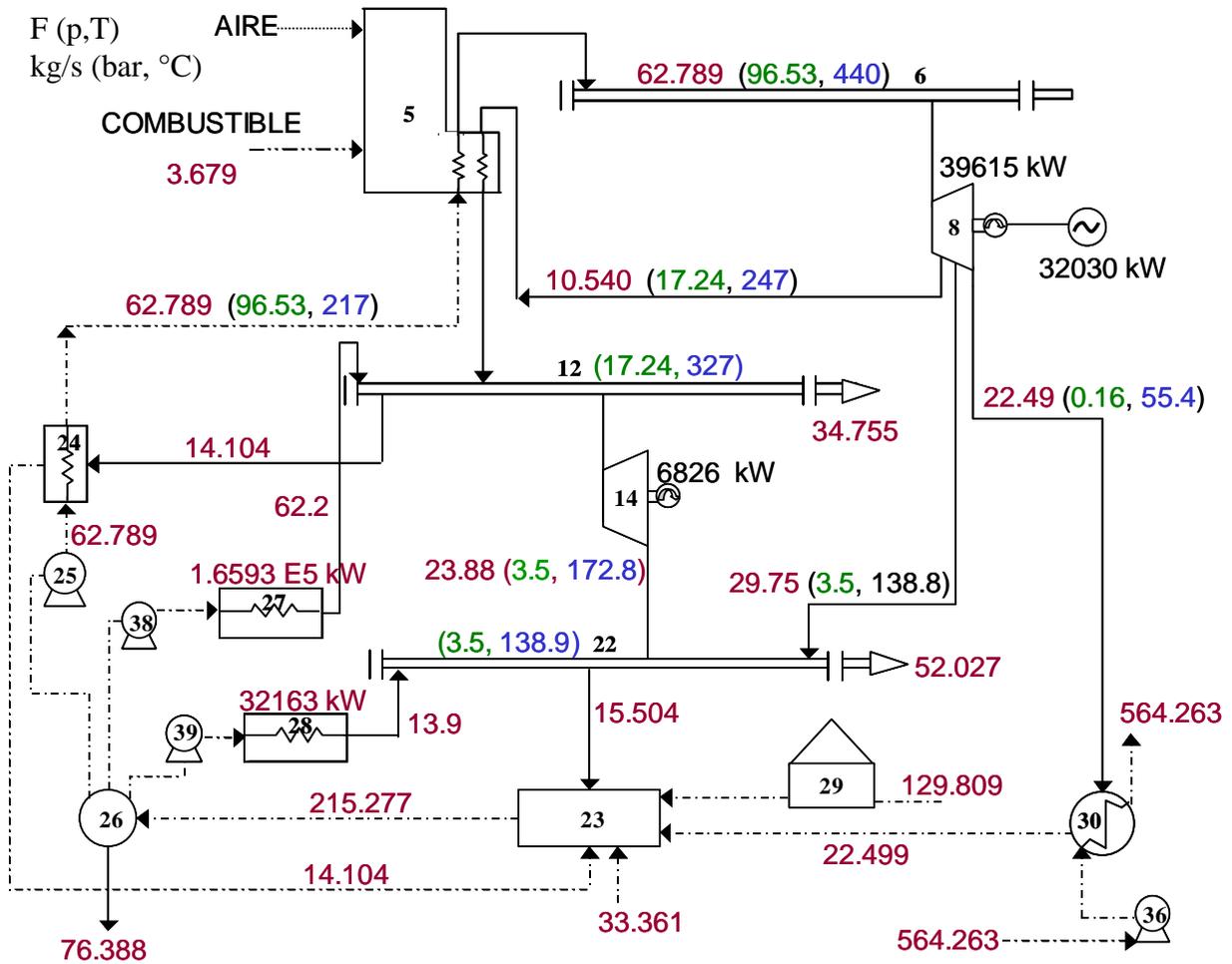


Figura 4.4 Solución Lineal-1 del ejemplo ilustrativo, según el modelo de Papoulias y Grossmann.

En la Tabla 4.4 se presentan las demandas de potencia requeridas por las bombas y las demandas térmicas requeridas por las calderas de recuperación de calor presentes en la configuración óptima Lineal-1.

Tabla 4.4. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Lineal-1.

Unidad	Potencia requerida
25	961 kW
36	356 kW
38	319 kW
39	1.9 kW

En la solución Lineal-1, el cabezal de alta presión opera en la posible condición de operación 1 (96.54 bar y 440 °C) de las tres establecidas, mientras que el cabezal de presión media opera en la condición 2, de las tres permitidas para este nivel, (17.24 bar y 327 °C). Las demandas de potencia y electricidad se satisfacen empleando una turbina de alta presión y una turbina de baja presión. La turbina de alta presión opera a condensación, con dos extracciones, una a presión media y otra a baja presión, generando 39, 615 kW, con una eficiencia isentrópica de 0.75. La turbina de presión media opera a contrapresión, tiene una eficiencia isentrópica de 0.8 y genera 6, 826 kW. En la configuración final operan las calderas de calor de desecho, que aprovechan la carga térmica disponible del proceso, para generar vapor. La caldera de desecho de vapor a presión media aprovecha 1. 65E5 kW disponibles mientras que la caldera de desecho de baja presión debe disponer de 32, 163 kW.

El generador de vapor tiene una carga térmica de 1. 43 E5 kW para generar el vapor de alta presión más 1, 946 kW para recalentamiento del vapor de presión media. La potencia requerida por las bombas se presenta en la Figura 4.5.

Para calcular el costo de la solución Lineal-1, se supone una operación anual de 8400 horas y un factor de recuperación de capital de 0.154252. En la Tabla 4.5 se presentan los costos de operación asociados a la solución Lineal-1.

Tabla 4.5. Costos de operación.

Combustible (keroseno)	0.3879 \$/kg
Agua fresca	0.00017 \$/kg

En la Tabla 4.6 se muestran los parámetros de cargo fijo y variable (Garret, 1989; Ulrich, 1984; Woods y Anderson, 1979) para cada unidad constitutiva de la solución Lineal-1, siguiendo la numeración asignada en la Figura 4.4.

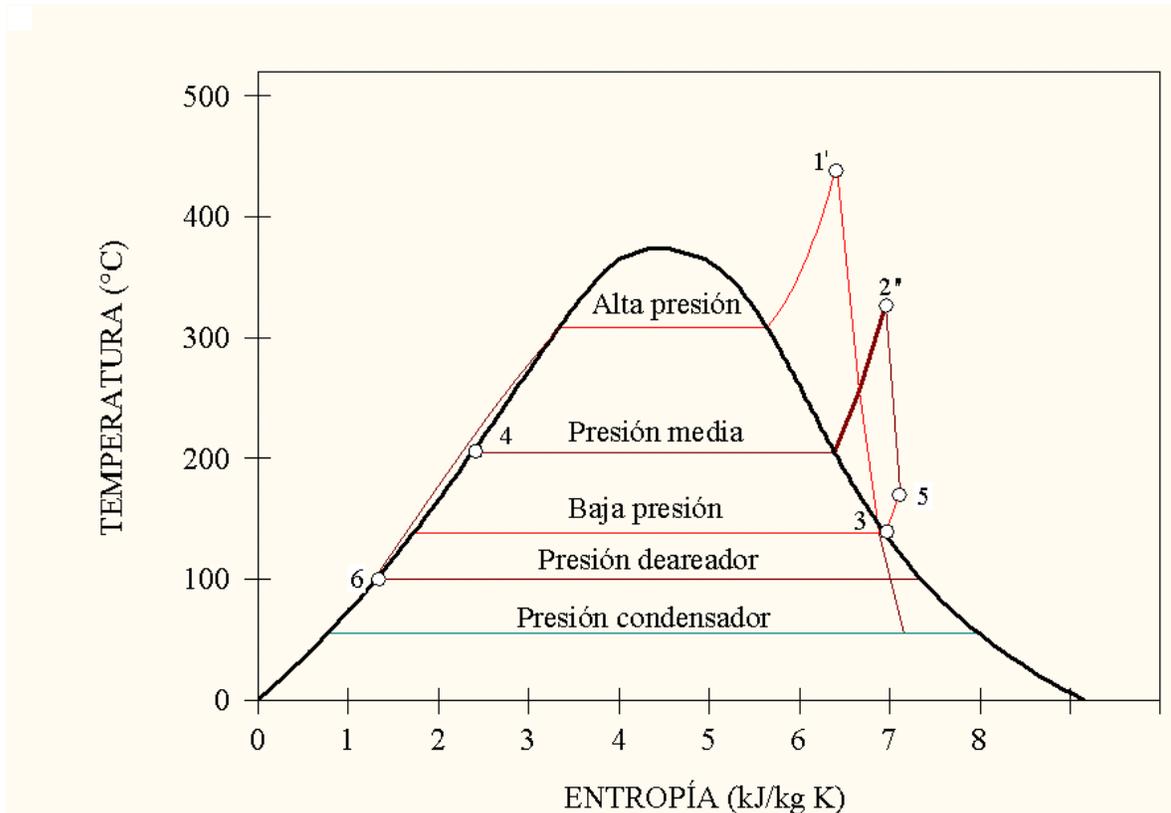
Tabla 4.6. Costos de capital asociados a cada unidad de la solución Lineal-1.

Unidad	Cargo fijo	Cargo de nivel
5	\$41, 139.7	Alta presión: \$1, 578, 339.65
		Recalentamiento: \$220, 788.75
6	\$10, 882	\$782, 548.00
10	\$254, 541.3	\$1, 110, 804.60
12	\$10, 882	\$109, 814.07
14	\$84, 847.1	\$191, 155.30
22	\$10, 882	\$62, 303.43
23	\$11, 017	\$131, 054.18
24	\$48, 920	\$118, 759.11
25	\$1, 278.30	\$104, 768.22
26	\$298.00	\$169, 853.55
27	\$70, 893.00	\$1, 088, 189.00
28	\$70, 893.00	\$243, 180.50
29	\$167, 636.00	\$1, 362, 215.65
30	\$48, 920.00	\$43, 013.66
36	\$1, 278.30	\$48, 232.66
38	\$1, 278.30	\$34, 777.38
39	\$1, 278.30	\$207.14
Generador	\$54, 475.00	\$7, 260, 240.1
Total	\$891, 339.30	\$14, 660, 423.97

#### 4.6 *Análisis de Accesibilidad a los Estados Termodinámicos Considerados*

Un análisis termodinámico de la solución Lineal-1 generada con el modelo de Papoulias y Grossmann, muestra un ciclo Rankine regenerativo con sobrecalentamiento y recalentamiento, Figura 4.5. Este análisis termodinámico permite localizar algunas inconsistencias, generadas por la falta de algunas unidades dentro de la superestructura para

la correcta operación de la misma. Entre las inconsistencias encontradas tenemos que, la fracción de vapor a presión media en el estado 2'', que se extrae del cabezal y se alimenta al regenerador, después de ceder calor sale como líquido saturado, estado 4, este vapor se alimenta al deaerador, pero antes de alimentar el vapor al deaerador se debe estrangular hasta la presión del mismo. Por tanto en este proceso es necesaria una válvula de expansión.



#### 4.5 Análisis termodinámico de la solución Lineal-1.

Por otra parte la presión del condensador es menor que la presión del deaerador, entonces, entre estas unidades se requiere una bomba que eleve la presión del condensado hasta la presión del deaerador.

Debido a que las condiciones termodinámicas del vapor demandado a diferentes niveles de presión, tienen un conjunto de posibles valores establecidas para cada nivel de presión,

Figura 4.6, es necesario realizar un análisis termodinámico de la superestructura correspondiente que permita visualizar el comportamiento simultáneo de todas las posibles condiciones de operación a diferentes eficiencias de expansión, Figura 4.7-a y Figura 4.7-b.

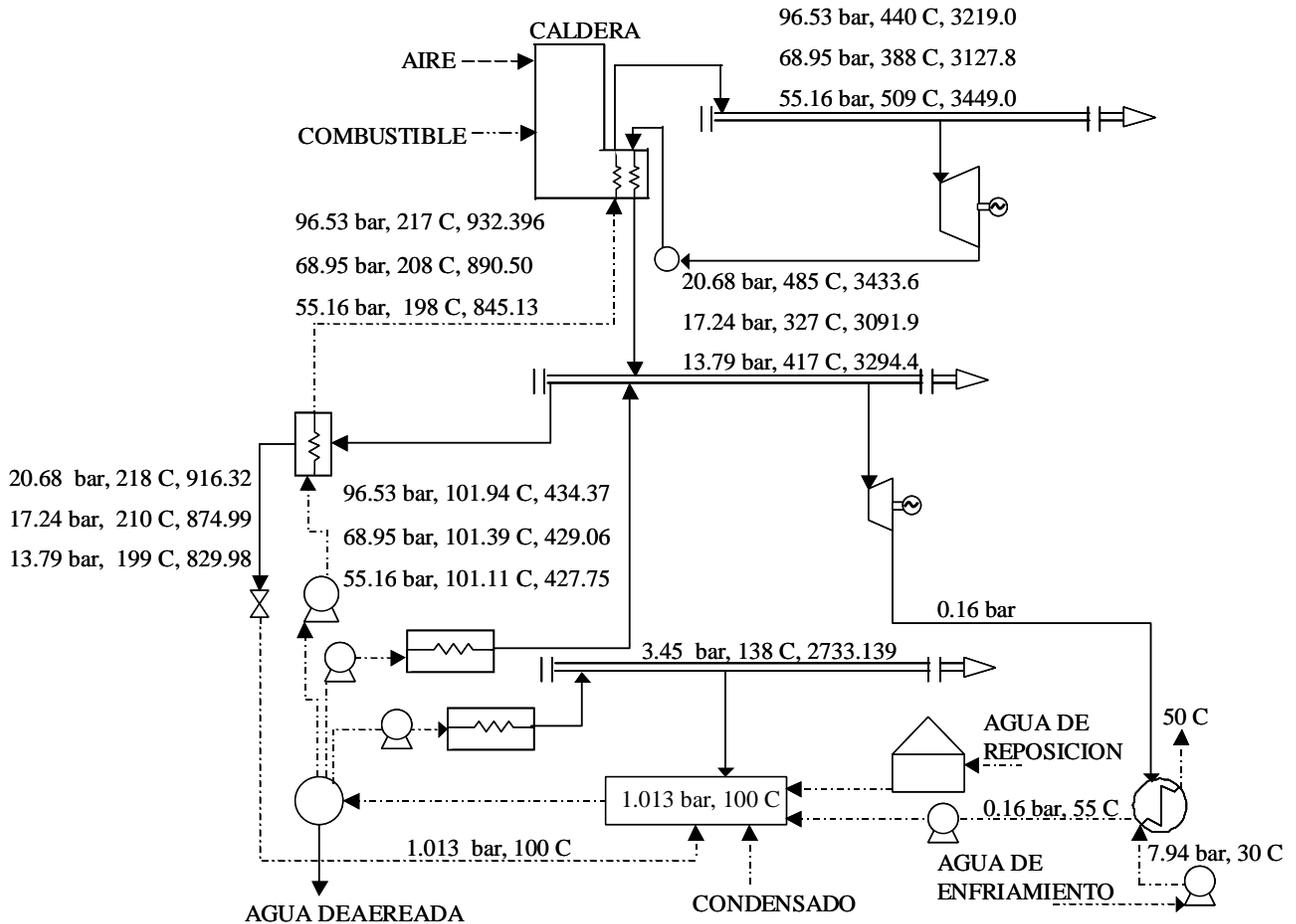


Figura 4.6. Superestructura con posibles condiciones de operación.

Analizando el diagrama Temperatura entropía con  $\eta_{sit} = 0.7$ , Figura 4.7-a, correspondientes a la superestructura propuesta por Papoulias y Grossmann, Figura 4.1, para el conjunto de posibles condiciones de operación del ejemplo ilustrativo, Tabla 4.3. Tenemos que el vapor de alta presión (1', 1'', 1''') y el vapor de presión media (2', 2'', 2''') que se expanden hasta baja presión, no satisfacen las condiciones de presión y temperatura requeridas en el cabezal

de baja presión (estado 3). Estos estados termodinámicos no presentan ningún problema, a  $\eta_{sit} = 0.7$  si se expanden hasta la presión de condensación.

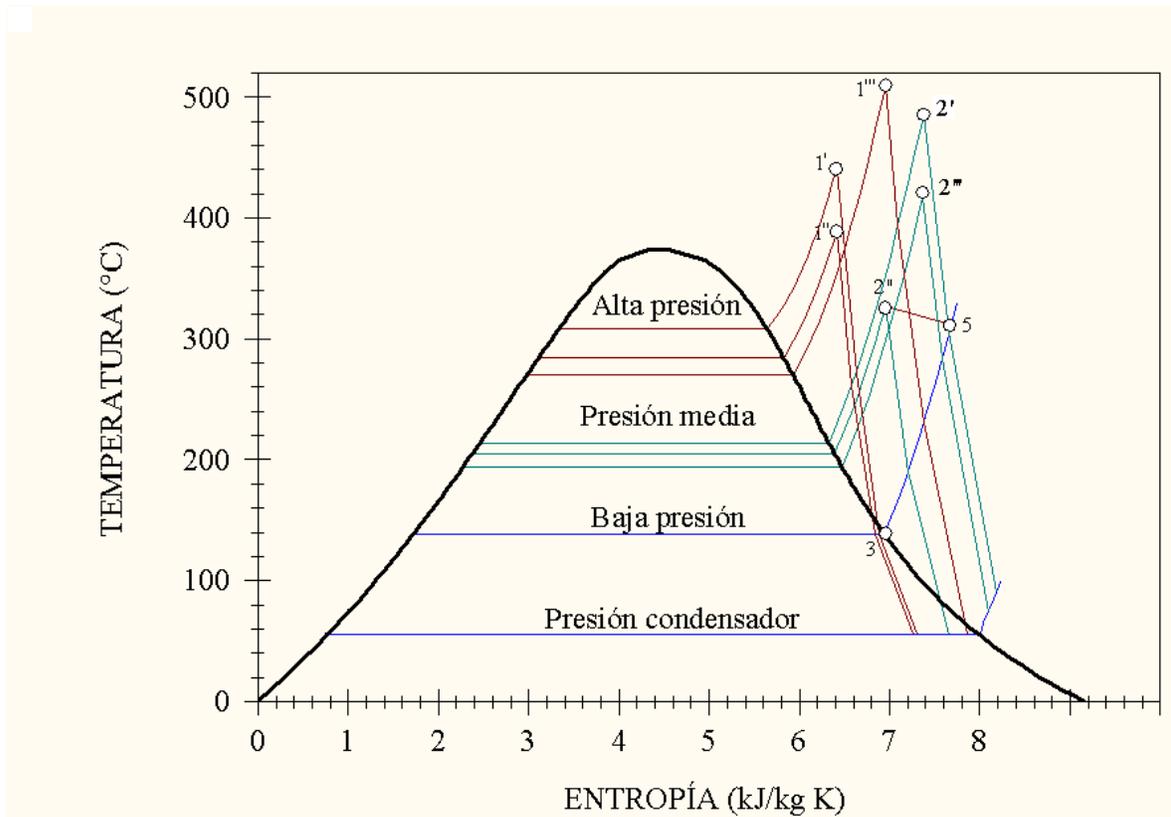


Figura 4.7-a. Temperatura entropía para las posibles condiciones de operación del ejemplo ilustrativo, con eficiencia isentrópica de expansión  $\eta_{sit} = 0.7$

En la superestructura de Papoulias y Grossmann para cumplir con el estado 3, se requiere que el vapor de alta presión proveniente de la expansión de los estados 1' o 1'', se mezcle en las proporciones adecuadas con el vapor proveniente de la expansión de cualquiera de los estados de presión media, (2', 2'' ó 2'''), al nivel de baja presión.

Siendo esta la única alternativa para que se alcancen las condiciones de temperatura y presión requeridas por el vapor de baja presión. Determinado así que en la solución óptima exista al menos una turbina de alta presión que opere en los estados 1' o 1'' y que descargue en el cabezal de baja presión, además, de una turbina de presión media que descargue a baja presión.

En la Figura 4.7-b, se presenta el diagrama temperatura entropía con  $\eta_{sit} = 0.9$ , cota superior de la eficiencia isentrópica de acuerdo con las limitantes tecnológicas. En este diagrama se aprecia la misma tendencia que la presentada en la Figura 4.7-a.

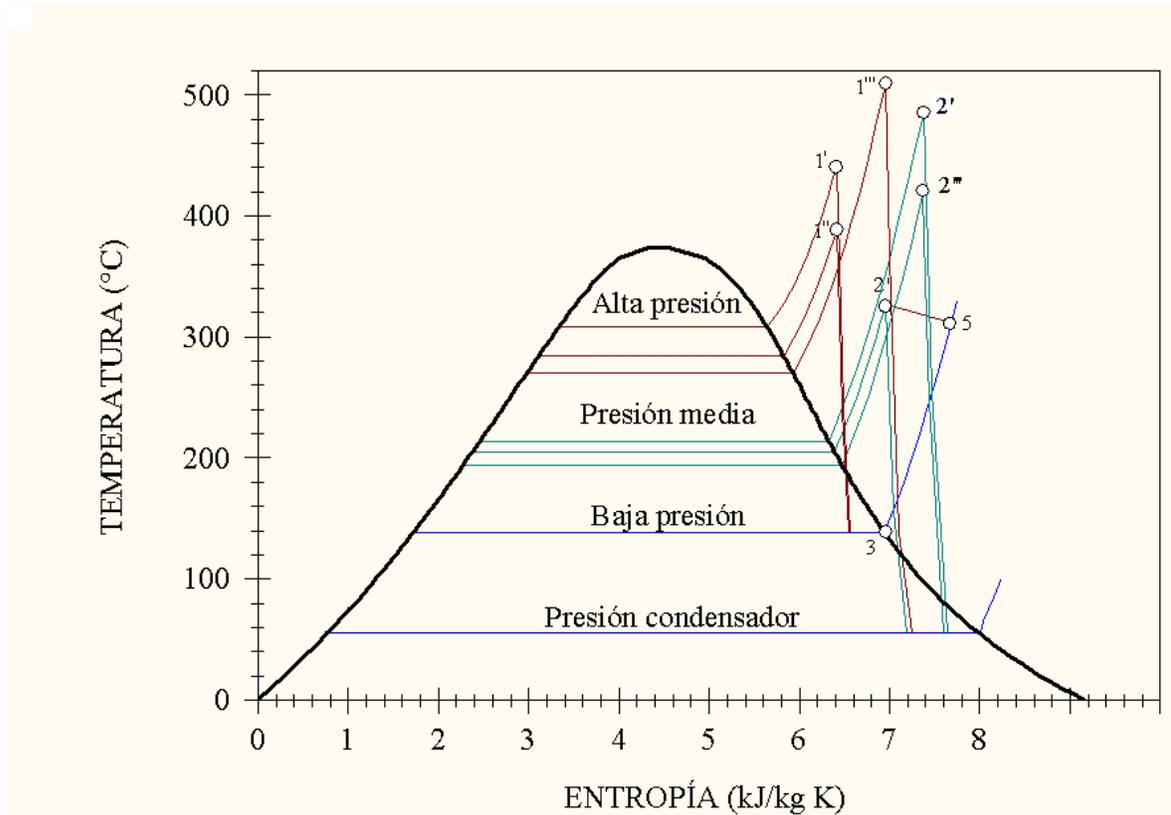


Figura 4.7-b. Temperatura entropía para las posibles condiciones de operación del ejemplo ilustrativo, con eficiencia isentrópica de expansión  $\eta_{sit} = 0.9$

Después de analizar el conjunto de posibles estados de operación, bajo diferentes eficiencias de expansión sabemos que, el estado 1''' para el vapor de alta presión resulta inaccesible para una configuración óptima, aún operando con cualquier posible estado del vapor de presión media (2', 2'', 2'''), por que no se cumplen con las condiciones requeridas por el vapor de baja presión, estado 3. Entonces, un problema encontrado en la superestructura de Papoulias y Grossmann es la falta de alternativas para satisfacer las demandas de vapor de baja presión. Por otra parte las válvulas de expansión que toman vapor de un nivel de presión superior y descargan a un nivel de presión inferior (2''-5), no satisfacen las condiciones termodinámicas requeridas en el cabezal al que descargan, estado 3. Reduciendo así de manera drástica e

induciendo de forma absoluta a una solución subóptima, todo ello como consecuencia del manejo sobre simplificado de la termodinámica del sistema.

En la Tabla 4.7 se resumen las condiciones de operación inaccesibles, estos es aquellos estados termodinámicos que después de una expansión no alcanzan los estados termodinámicos requeridos, por el vapor de baja presión, estado 3, y en el condensador.

Tabla 4.7. Resumen de accesibilidad de las condiciones de operación.

<b>Corriente/Equipo</b>	<b>Condiciones</b>	<b>Accesible si se expande a</b>
Cabezal de alta presión	p=96.53 bar, T=440°C, p=68.95 bar, T=388°C, p=55.16 bar, T=509°C,	A baja presión A baja presión A condensación
Cabezal de presión media	p=20.68 bar, T=485°C, p=17.24 bar, T=327°C, p=13.79 bar, T=417°C,	Accesible Accesible Accesible
Cabezal de baja presión	p=3.45 bar, T=138.9°C,	* * * * *
Deaerador	p=1.031 bar, T=100°C,	* * * * *
Condensador al vacío	p=0.16 bar, T=55°C.	* * * * *

## 4.7. Conclusiones

La principal ventaja en el uso de modelos de programación lineal es la garantía de que el óptimo encontrado es el óptimo global, esto es, la optimización encuentra la mejor solución existente. Para formular modelos de programación lineal es necesario realizar una serie de suposiciones que reducen la región de búsqueda de una solución óptima. Generar un modelo más apegado a la operación real de los sistemas de generación de servicios auxiliares requiere de formulaciones no lineales, en el Capítulo 5, se desarrolla una metodología de síntesis de sistemas de servicios auxiliares empleando un modelo de programación no lineal mixta-entera, que permite reducir el número de suposiciones hechas y además permite ampliar la región de búsqueda de una solución óptima.

## CAPÍTULO 5

# MODELO NO LINEAL MIXTO-ENTERO PARA LA SÍNTESIS DE SISTEMAS DE SERVICIOS AUXILIARES

### 5.1 Introducción

Algunos autores como Papoulias y Grossmann (1983), Nishio y col. (1984, 1985), Petroulas y Reklaitis (1984), Colmenares y Seider (1989), Chouh y Shi (1987), Hui y Natori (1997), Yoo y col. (1996) y Halasz y Nagy (2002), quienes han abordado el problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares esencialmente orientan sus trabajos hacia el modelado matemático, con metas de diseño que minimizan los costos de operación o la pérdida de energía disponible, manejando la termodinámica del sistema con un análisis simplificado que genera falta de alternativas reales en el espacio de búsqueda de diseño, con las consecuentes limitaciones en las condiciones de operación del sistema. En este capítulo de la tesis se desarrolla una superestructura enriquecida, a partir de la propuesta inicial hecha por Papoulias y Grossmann (1983), realizando un manejo riguroso de la termodinámica involucrada, el cual expande de manera importante el espacio de búsqueda para el sistema de servicios auxiliares óptimo.

Por otra parte, en los modelos desarrollados por los autores antes mencionados, a la eficiencia isentrópica de las turbinas se le asigna un valor constante, para calcular el trabajo generado. Sin embargo, de la experiencia se sabe que la eficiencia isentrópica es función del trabajo motor generado. En este capítulo se desarrolla un modelo para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares que considera la eficiencia de las turbinas como función matemática de las condiciones termodinámicas del vapor de entrada, trabajo motor generado y vapor de salida. En este capítulo también se propone una metodología de solución para el problema de programación no lineal mixta-entera desarrollado y se realiza un análisis paramétrico que complementa la solución del problema abordado.

## 5.2 Expansión de la Región de Búsqueda

Como se demostró en el Capítulo 4, la superestructura desarrollada por Papoulias y Grossmann tiene algunas inconsistencias operacionales, que limitan la región de búsqueda. Para expandir la región de búsqueda de una solución óptima se proponen diversas estrategias, como atemperar las corrientes a la salida de las turbinas que operan a contrapresión o con extracción, para satisfacer las condiciones termodinámicas requeridas en un nivel de presión inferior. En la Figura 5.1, se ejemplifica dicho atemperamiento, si la turbina de alta presión opera a condensación, una extracción de ésta a baja presión, requerirá de un atemperamiento para cumplir con las condiciones del vapor de baja presión ( $3''-3$ ) y de manera análoga con una turbina que descargue al nivel de baja presión, ( $3'-3$ ).

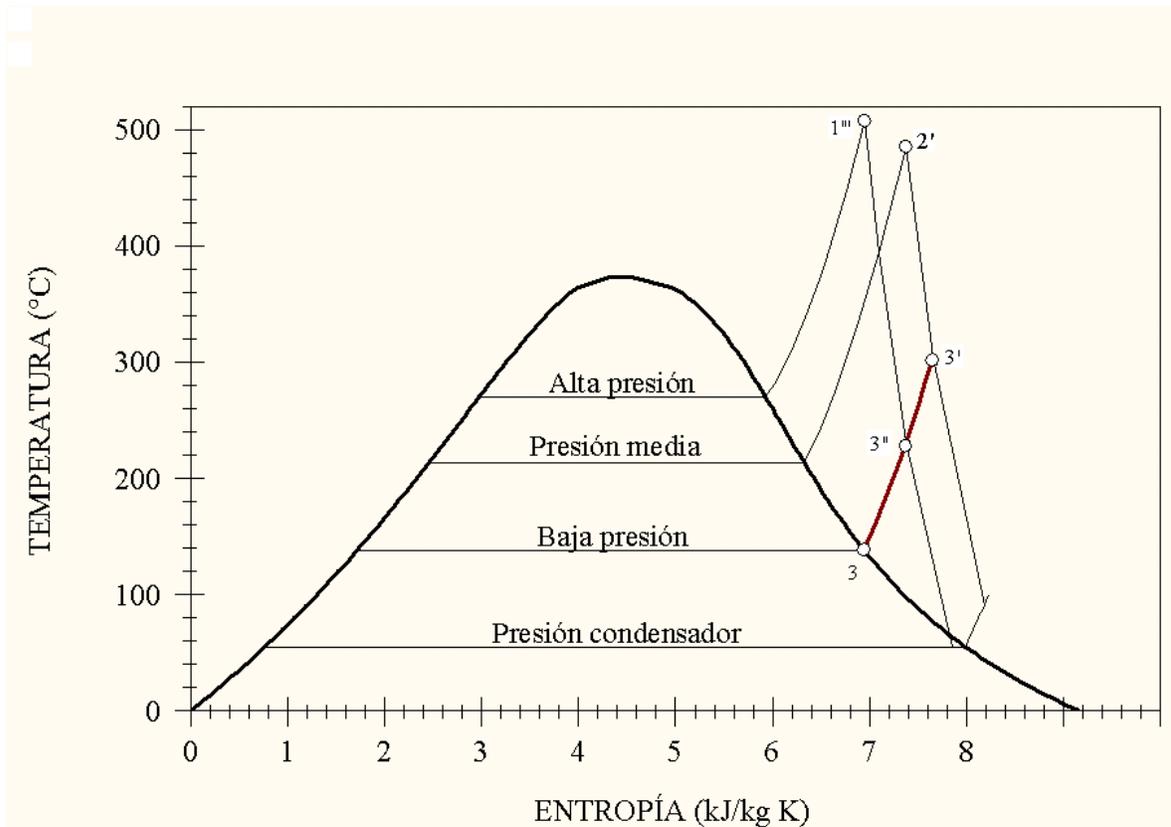


Figura 5.1. Atemperamiento a la salida de las turbinas.

Debido a que la expansión en las válvulas es un proceso a entalpía constante, Figura 5.2, para utilizar las válvulas de expansión ( $1'''-5$  y  $2''-6$ ), es necesario atemperar el vapor a la salida

de éstas hasta alcanzar las condiciones de operación requeridas en el cabezal de descarga, (5-2'' y 6-3). Otra estrategia de diseño consiste en implementar la calidad a la salida de las turbinas como variable, permitiendo una expansión hasta la calidad del vapor de 0.88. Esto se debe que a calidades menores, se presenta el condensado en el interior de las turbinas, dañando a las últimas coronas de alabes, de ahí la relevancia de tomar este parámetro de operación. Como se muestra en la presión del condensador, de la Figura 5.1.

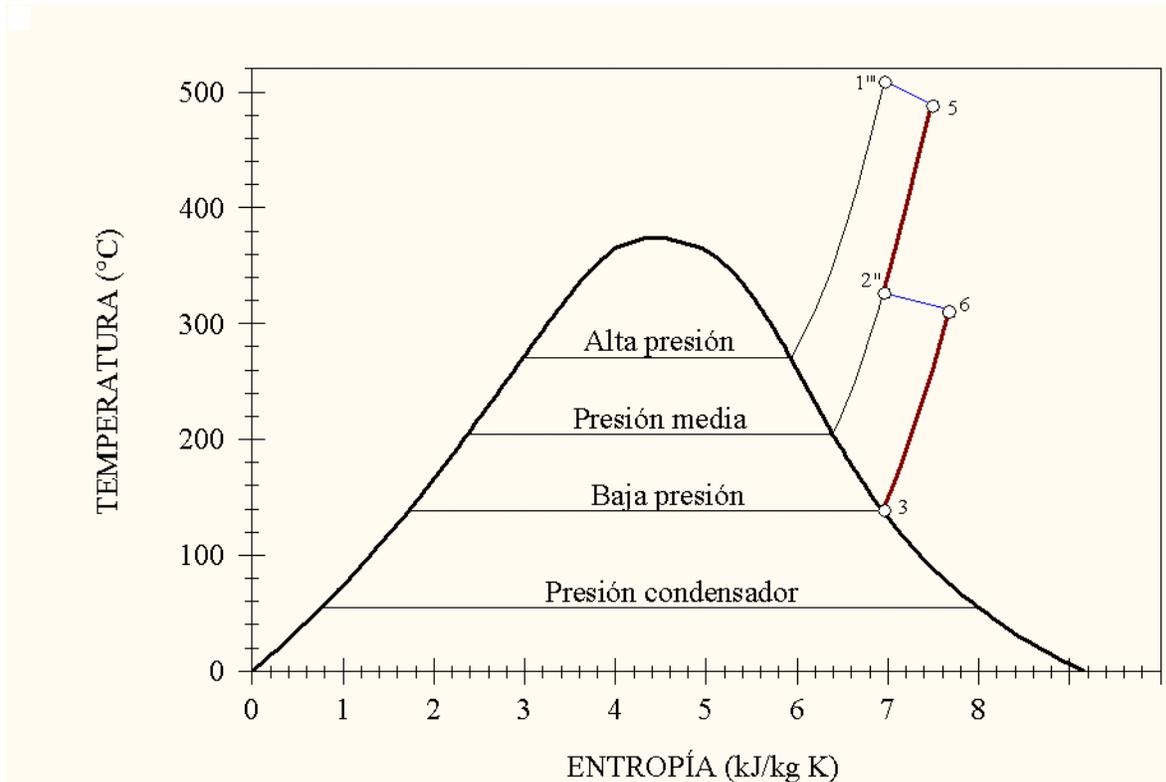


Figura 5.2 Atemperamiento a la salida de las válvulas de expansión.

La incorporación de las alternativas de atemperamiento a la salida de las turbinas de vapor y a la salida de las válvulas de expansión, más una interconexión adecuada entre las unidades integrantes de la superestructura, véase Capítulo 4, son algunas de las estrategias propuestas para superar las limitantes termodinámicas encontradas en la superestructura de Papoulias y Grossmann, generando así una superestructura enriquecida, Figura 5.3.

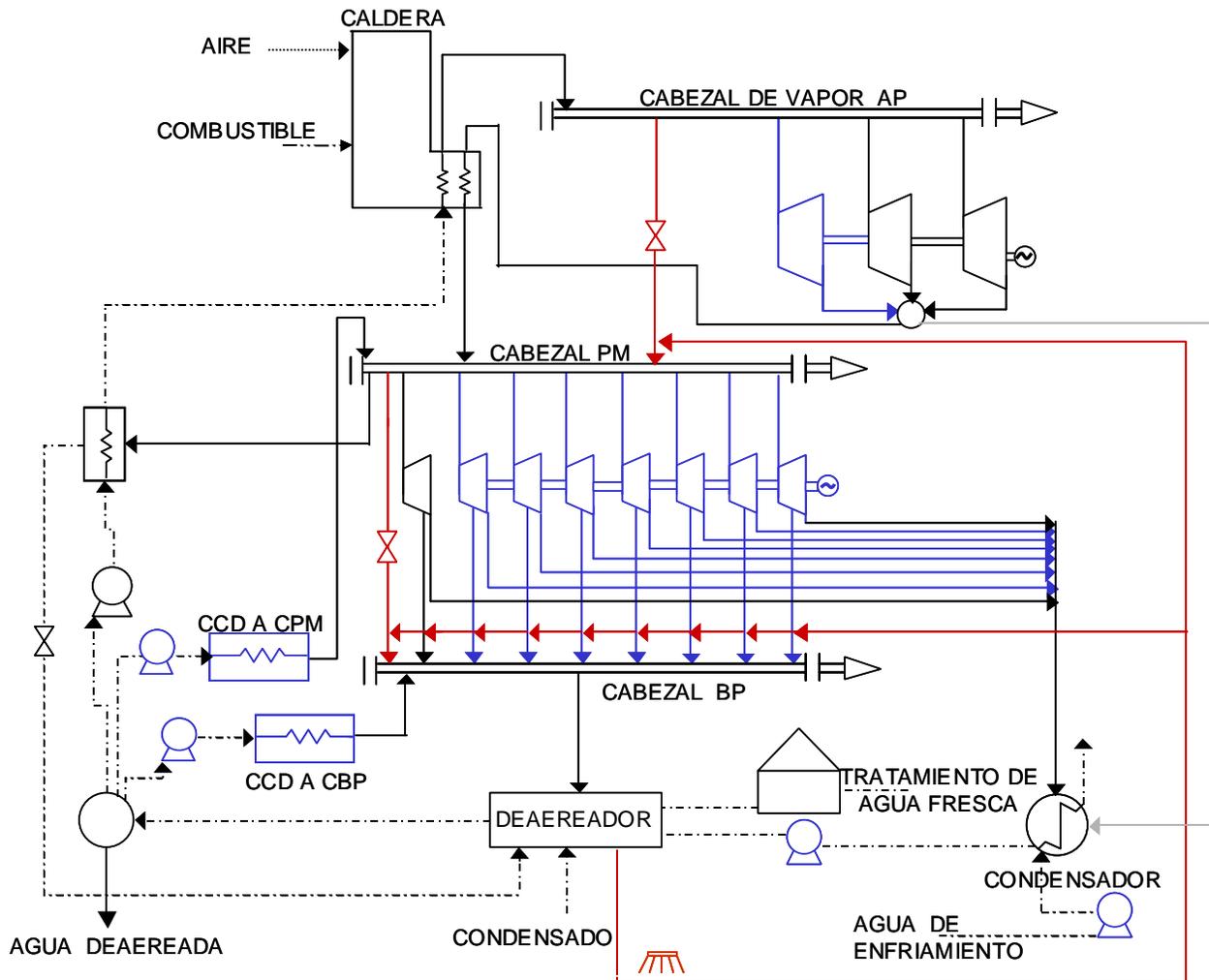


Figura 5.3. Superestructura enriquecida.

El siguiente paso en la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, es desarrollar un modelo matemático que describa las unidades constitutivas de la superestructura propuesta, sus condiciones de operación y restricciones de operación.

### 5.3 Modelo No Lineal Mixto-Entero para la Síntesis de Sistemas de Servicios Auxiliares

El modelo matemático descrito a continuación asociado a la superestructura enriquecida incorpora entre las estrategias de diseño la funcionalidad de la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor como función del trabajo motor generado.

**Modelo (SA-1)****Notación****Índices**

- $n$  = unidad constitutiva de la superestructura  
 $m$  = unidad a la que se dirige el flujo de salida de la unidad  $n$   
 $k$  = condición de operación de la unidad  $n$

**Conjuntos**

- $N$  = { $n$ : $n$  unidades que constituyen la superestructura}  
 $N_1$  = { $n_1$ : $n_1$  unidades con un conjunto de posibles condiciones de operación determinado};  $N_1 \in N$   
 $K_n$  = { $k$ : $k$  posible condición de operación de la unidad  $n$ };  $n \in N$   
 $N_U$  = { $n_u$ : $n_u$  unidades que requieren combustible}  
 $N_E$  = { $n_E$ : $n_E$  unidades que requieren agua fresca alimentada}  
 $N_P$  = { $n_p$ : $n_p$  unidades que abastecen las demandas de potencia}  
 $N_S$  = { $n_s$ : $n_s$  unidades que abastecen las demandas de vapor}  
 $N_r$  = { $n_r$ : $n_r$  unidades que abastecen las demandas de agua fresca de proceso}  
 $N_T$  = { $n_t$ : $n_t$  turbinas presentes en la superestructura}

**Parámetros**

- $\alpha_{nk}$  = Cargo fijo de la unidad  $n$ , que opera en la condición  $k$   
 $\beta_n$  = Costo asociado a la capacidad de operación (flujo) de la unidad  $n$   
 $\gamma_{nk}$  = Costo de combustible  
 $\delta_n$  = Costo de agua fresca de alimentación

**VARIABLES CONTINUAS, POSITIVAS**

- $F_{nkm}$  = Flujo de salida de la unidad  $n$  que opera en la condición  $k$  y abastece a la unidad  $m$   
 $h_{nkm}$  = Entalpía específica asociada a cada flujo de salida de la unidad  $n$   
 $Q_n$  = Calor generado ó requerido por la unidad  $n$   
 $w_n$  = Trabajo motor generado por la unidad  $n_t$   
 $W_n$  = Potencia requerida por la unidad  $n$   
 $\eta_{n,k}$  = Eficiencia de la turbina  $n$ , que opera a la condición  $k$

**VARIABLES BINARIAS**

- $y_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{Si la unidad } n \text{ existe en la condición de operación } k \\ 0 & \text{Si la unidad } n \text{ no existe en la condición de operación } k \end{cases}$

**Función objetivo**

$$\min C = \sum_{n \in N} \sum_{k \in K_n} (\alpha_{nk} y_{nk} + \beta_{nk} G_{nk}) + \sum_{n \in N_u} \sum_{k \in K_n} \gamma_{nk} F_{nk} + \sum_{n \in N_E} \delta_n F_{cn} \quad (5.1)$$

**Restricciones:****Balances de materia**

$$\sum_{m \in I_n} \sum_{k \in K_m} F_{mkn} - \sum_{m \in O_n} \sum_{k \in K_n} F_{nkm} = 0, \quad n \in N \quad (5.2)$$

**Balances de energía**

$$\sum_{m \in I_n} \sum_{k \in K_m} F_{mkn} h_{mkn} - \sum_{m \in O_n} \sum_{k \in K_n} F_{nkm} h_{nkm} - Q_n - W_n = 0, \quad n \in N \quad (5.3)$$

**Balances de energía para las turbinas**

$$\sum_{m \in I_{n_t}} \sum_{k \in K_m} F_{mkn_t} h_{mkn_t} - \sum_{m \in O_{n_t}} \sum_{k \in K_n} F_{nkm} h_{nkm} - \sum_{m \in O_{n_t}} \sum_{k \in K_n} w_{n_t k} F_{n_t km} = 0, \quad n_t \in N_T \quad (5.4)$$

**Restricciones lógicas**

$$\sum_{k \in K_n} y_{nk} \leq 1 \quad n \in N \quad (5.5)$$

$$\sum_{m \in O_n} F_{nkm} - U y_{nk} \leq 0, \quad k \in K_n, \quad n \in N \quad (5.6)$$

**Eficiencia de las turbinas de vapor como función del trabajo generado**Etapas de expansión dentro de la turbina  $n_t$ 

$$\eta_{n_t, k} = a_{n_t, k} y_{n_t, k} + b_{n_t, k} w_{n_t, k} \quad n_t \in N_T \quad (5.7)$$

Cota superior de la eficiencia isentrópica

$$\eta_{n_t, k} \leq M_U^* y_{n_t, km} \quad (5.8)$$

Por restricciones operación, si la turbina  $n_t$  existe la eficiencia isentrópica debe ser mayor a  $M_T$ .

$$\left( \sum_{k \in K_n} y_{n,k} \right) * M_L \leq \eta_{n_t,k} \quad n_t \in N_T \quad (5.9)$$

Si existe más de una etapa de expansión dentro de una turbina la eficiencia isentrópica de expansión entre estas etapas debe ser igual.

$$\eta_{t, k_t} - \eta_{t, k_t+1} - U(1 - y_{t, k_t+1}) \leq 0 \quad (5.10)$$

Una unidad  $m$  existirá en la condición  $k$ , si y únicamente si existe la unidad  $n$  en la misma condición.

$$y_{mk} = y_{nk} \quad k \in K_n \quad (5.11)$$

Una unidad  $m$  operando en la condición  $k$  solo puede existir si la unidad  $n$  existe operando en la condición  $k$ , aunque lo contrario no se cumpla.

$$\sum y_{mk} \leq y_{nk} \quad k \in K_n \quad (5.12)$$

### Restricciones de demandas

a) *Demandas de potencia y electricidad*

$$\tilde{P}_p = \sum_{n \in N_T} w_{nk} F_{nk} \quad T = 1, 2, \dots, P \quad (5.13)$$

b) *Demandas de vapor*

$$\tilde{Q}_s = \sum_{n \in N_s} Q_n \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (5.14)$$

c) *Demandas de agua de proceso*

$$F_r = \sum_{n \in N_r} \sum_{k \in K_n} F_{nk}^r \quad r = 1, 2, \dots, R \quad (5.15)$$

### **Comentarios**

1. La inclusión de eficiencia isentrópica como variable en los balances de energía de las turbinas, genera términos no lineales, en las ecuaciones (5.3), (5.7) y (5.14).
2. Los coeficientes de la ecuación (5.7) dependen de las condiciones de operación en los cabezales, el condensador y las características propias de la turbina, ver apéndice A3.

## **5.4 Metodología de Solución**

El enfoque de superestructura para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, se puede visualizar en tres etapas. En la primer etapa se construye una superestructura asociada al problema, que incluye diferentes configuraciones alternativas. En la segunda etapa se desarrolla un modelo matemático que describe los balances de materia y energía, la capacidad, condiciones termodinámicas de operación y restricciones lógicas de cada unidad constitutiva de la superestructura, incluyendo restricciones de demanda y la función objetivo que minimiza los costos totales. En la tercera etapa se resuelve el modelo correspondiente a la síntesis de sistemas de servicios auxiliares desarrollado para encontrar soluciones óptimas alternativas.

Al implementar el modelo (SA-1) para el ejemplo ilustrativo del Capítulo 4, sección 4.2, se observa que la solución del modelo asociado presenta dificultades para localizar puntos óptimos, tales como, como estrecha dependencia con el punto de inicio y con el acotamiento de las variables continuas del modelo, que se refleja en resultados infactibles y tiempos de computo elevados. Es bien sabido que el principal reto en el uso de modelos de PNLM-E no convexos, es encontrar una solución óptima y converger el modelo, en esta sección se desarrolla una metodología de solución para el modelo de síntesis de sistemas de servicios auxiliares, que cumpla satisfactoriamente con estos objetivos.

Algunas de las principales dificultades de los problemas de programación no lineal mixta-entera se deben a la presencia de variables enteras. Cuando estas variables son binarias, la

asignación de un conjunto de valores 0 o 1, para los elementos del vector de variables enteras, tendrá como resultado un modelo no lineal continuo.

En el modelo (SA-1) las variables binarias describen la existencia o no existencia en determinada condición de operación de cada unidad, por tanto, si se determina una configuración inicial y el vector de variables binarias, se fija en esta configuración, Continua-1,  $\hat{y}$ , el resultado será un problema de programación no lineal, constituido únicamente por variables de decisión continuas, (PNL-1).

En el modelo (SA-1), los términos no lineales en las ecuaciones (5.3), (5.7) y (5.13) están asociados a la incorporación de la eficiencia y entalpía como función del trabajo motor generado. Por tanto, al asignar un valor al trabajo motor generado por cada turbina, las variables entalpía y eficiencia isentrópica también se determinan. Entonces, si en el modelo (PNL-1), se asigna un valor fijo al trabajo motor generado,  $\hat{W}_{t,k}$ , de cada turbina existente en la configuración Inicial-1, el resultado será un modelo de programación lineal, (Lineal-1), el cual, si resulta factible, encontrará su mejor solución.

Si el modelo (Lineal-1) resulta factible y tiene solución,  $(\hat{x}, \hat{y})$ . Se procede a resolver el modelo (SA-1) original dando como punto de inicio a los vectores  $(\hat{x}, \hat{y})$ .

La determinación de la configuración Inicial-1, vector  $\hat{y}$ , y del trabajo motor,  $\hat{W}_{t,k}$ , para generar el modelo (Lineal-1), se puede hacer aleatoriamente. El procedimiento de solución antes descrito se resume a continuación:

### **Metodología de solución Continuo 1-Lineal 1**

Acote las variables  $w_{t,k}$ ,  $t \in N_T$ ,  $k \in K_n$ , especificando una cota superior,  $w_{t,k}^{U,i}$  y una cota inferior,  $w_{t,k}^{L,i}$ . Declare  $z^* = \infty$ .

**Fase 1. Modelo (NLP-1)*****Paso 1. Estado de operación de los cabezales de vapor***

Asigne valores con carácter aleatorio a la existencia de los cabezales de vapor con más de una posible condición de operación. Fije en uno las variables binarias asociadas a la condición de operación determinada con el valor aleatorio de cada cabezal de vapor y en cero el resto de las variables binarias asociadas a la existencia de cada cabezal.

***Paso 2. Turbinas presentes en la configuración Lineal-1***

Asocie valores con carácter aleatorio a la existencia de cada turbina presente en la superestructura. Si la turbina existe fije en uno la variable binaria correspondiente a la existencia de la unidad consistente con las condiciones de operación de los cabezales de vapor, determinadas en el paso 1.

Genere el modelo (PNL-1), con las variables fijadas en el paso 1 y en el paso 2, que en conjunto establecen la configuración Lineal-1.

**Fase 2. Modelo (Lineal-1)*****Paso 1. Trabajo motor generado***

En esta etapa se determina el trabajo motor generado por cada turbina, presente en la configuración (Continua-1), asociando valores aleatorios al trabajo motor generado,  $\hat{W}_{t,k}$ .

***Paso 2. Solución del modelo (Lineal-1)***

Resuelva el modelo (Lineal-1), si el problema resulta factible declare la solución  $\hat{z} = f(\hat{x}, \hat{y})$ . En caso contrario inicie en el paso 1 de la Fase 1.

***Paso 3. Actualizar  $z^*$*** 

Actualice  $z^*$ , declarando  $z^* = \hat{z}$  con  $y^* = \hat{y}$  y  $x^* = \hat{x}$

**Fase 3. Modelo (SA-1)*****Paso 1. Solución del modelo de programación no lineal mixta-entera inicial***

Resuelva el modelo (SA-1), inicializando en el punto  $y^* = \hat{y}$  y  $x^* = \hat{x}$ . Declare la solución  $\tilde{z} = f(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

***Paso 2. Actualizar  $z^*$ .***

Si  $z^* > \tilde{z}$ . Actualice la solución óptima actual, declarando  $z^* = \tilde{z}$  con  $x^* = \tilde{x}$  y  $y^* = \tilde{y}$ . En caso contrario alto.

**5.5 Ejemplo Ilustrativo**

Para mostrar la implementación y solución del modelo (SA-1), se retoma el ejemplo ilustrativo del Capítulo 4, sección 2, bajo las siguientes suposiciones, la entalpía a la salida de las turbinas y la eficiencia isentrópica son función del trabajo motor generado. La eficiencia isentrópica tiene una cota inferior de 0.7 y una superior de 0.9.

El modelo (SA-1) asociado al ejemplo ilustrativo está constituido por 554 variables de las cuales 181 son variables binarias y 373 son variables continuas. El cual se programa en ambiente GAMS, empleando como resolvidor dicopt. Dicopt se basa en el algoritmo de aproximaciones exteriores, Capítulo 2 sección 2.5.

Empleando la metodología de solución Continuo 1-No lineal 1, se encuentran diferentes óptimos locales. Por cuestiones prácticas, únicamente se detallan cuatro óptimos locales. En la Tabla 5.1, se incluyen el costo anual de las dos soluciones óptimas con menor costo y las dos soluciones óptimas con mayor costo. Como un valor de referencia se incluye el costo de la solución Lineal-1, sin embargo, los costos no son comparativos, ya que algunas

suposiciones hechas para resolver el problema cambian del modelo lineal de Papoulias y Grossmann al modelo (SA-1) desarrollado en esta tesis.

Tabla 5.1. Soluciones encontradas con la metodología de solución Continua 1-Lineal 1.

<b>Solución</b>	<b>Costo total</b>
Óptima 1	\$49, 023, 794.61/año
Óptima 2	\$50, 779, 397.88/año
<b><i>Lineal-1</i></b>	<b><i>\$51, 618, 604.70/año</i></b>
Óptima 3	\$62, 201, 226.83/año
Óptima 4	\$71, 466, 690.96/año

### 5.5.1 Solución óptima 1

La solución óptima 1 tiene un costo de \$49,023,794.61/año de los cuales \$4,631,474.61/año son costos de capital y \$44,392,320.00/año corresponden a costos de operación. En la solución Óptima 1 el cabezal de alta presión opera a 96.53 bar y 440 °C, el cabezal de presión media opera a 20.68 bar y 485 °C, las demandas de potencia y electricidad se satisfacen con dos turbinas. Una turbina de alta presión que opera a contrapresión, generando 16, 897 kW, con descarga de vapor exhausto a presión media y una turbina de baja presión que opera contrapresión generando 29, 277 kW y descarga vapor exhausto a baja presión, el cual previo a su alimentación al cabezal de baja presión se atempera. Ambas turbinas operan con eficiencia isentrópica de 0.9. Las demandas de potencia de las bombas necesarias en la solución Óptima 1, se incluyen en la Tabla 5.2.

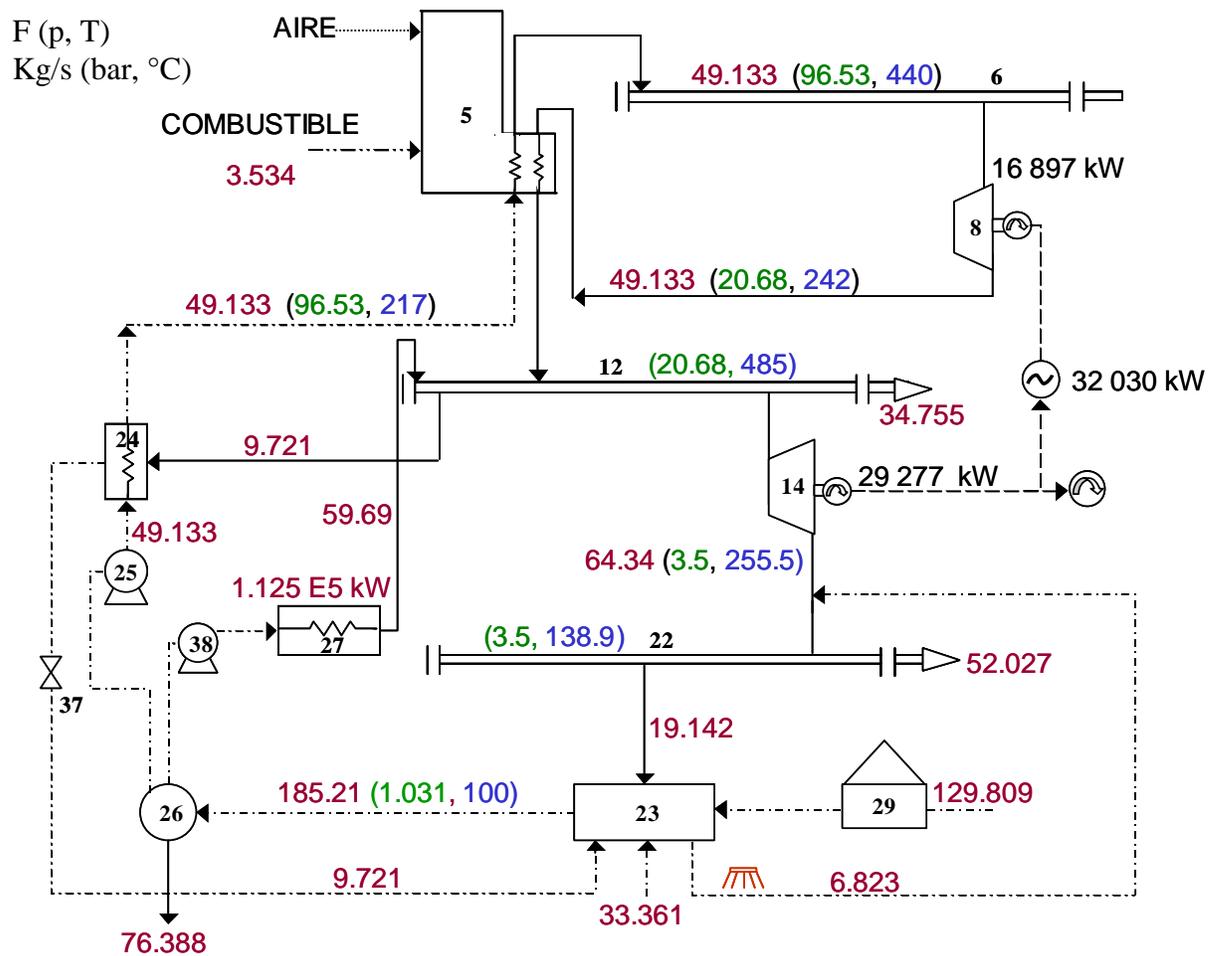


Figura 5.5. Solución Óptima 1.

Tabla 5.2. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-1.

Unidad	Potencia requerida
25	772.7 kW
38	600.9 kW

La caldera requiere para generar vapor de alta presión 1.125 E5 kW, y para recalentar el vapor que sale de la turbina de alta presión 2.729 E4 kW. En la solución Óptima 1, se aprovechan 1.79 E5 kW del calor disponible en la caldera de calor de desecho, para generar 59.69 kg/s de vapor a presión media. El costo detallado de los equipos se presenta en la Tabla 5.3. Los costos de capital se anualizan a 5 años.

Tabla 5.3. Costos de capital asociados a cada unidad de la solución Óptima 1.

Unidad	Cargo fijo	Cargo de nivel
5	\$41, 139.7	Alta presión: \$1,235,066.048
		Recalentamiento: \$1,029,223.334
6	\$10, 882	\$84, 405.58
10	\$84,847.10	\$473,183.58
12	\$10, 882	\$164,279.52
14	\$84, 847.1	\$819,873.11
22	\$10, 882	\$65,659.81
23	\$11, 017	\$116,903.93
24	\$48, 920	\$92,930.16
25	\$1, 278.30	\$84,239.75
26	\$298.00	\$146,131.48
27	\$70, 893.00	\$1,044,276.55
29	\$167, 636.00	\$1,362,215.65
37	\$2,567	\$4,724.41
38	\$1, 278.30	\$65,510.12
Generador	\$54, 475.00	\$7,260,240.10
Total	\$603,120.86	\$14,048,463.13

Tabla 5.4. Costos de operación

Combustible	1.444
Agua fresca	0.024

### 5.5.3 Solución óptima 2

En la solución Óptima 2, el cabezal de alta presión opera en la posible condición de operación 3, mientras que el cabezal de presión media opera en la posibilidad 1. Para satisfacer las demandas de electricidad se requieren dos turbinas. Una turbina de alta presión

que opera contrapresión y el vapor exhausto se atempera antes de alimentarse al cabezal de baja presión. La turbina de baja presión opera a contrapresión y el vapor exhausto de esta expansión se atempera antes de su ingreso al cabezal de baja presión.

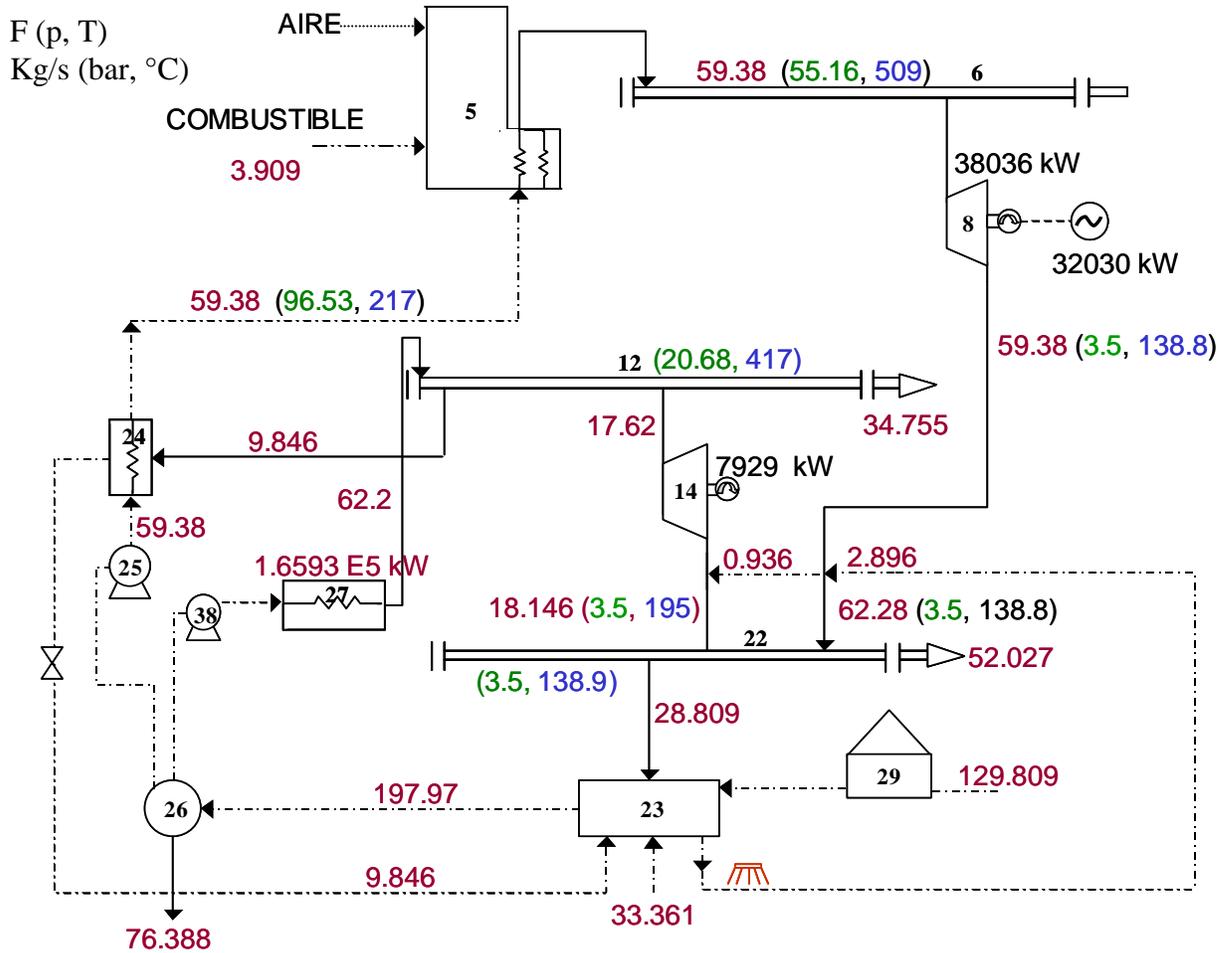


Figura 5.6. Solución Óptima 2.

Tabla 5.5. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-2.

Unidad	Potencia requerida
25	540.80 kW
38	626.45 kW

### 5.5.3 Solución óptima 3

La solución Óptima 3, presenta un aumento de costos con respecto a la solución Lineal-1 de 17%, sin embargo, también permite apreciar la expansión de la región de búsqueda. En esta configuración el cabezal de alta presión opera en la posible condición de operación 2, y el cabezal de baja presión en la alternativa 3. Dos turbinas, una de alta presión y una de presión media, satisfacen las demandas de electricidad y potencia, ambas con una eficiencia isentrópica de 0.9 La turbina de alta presión opera a contrapresión, y su vapor exhausto sale a presión media, y se recalienta antes de alimentarse al cabezal de presión media. La turbina de baja presión opera a contrapresión y descarga al cabezal de baja presión. La caldera de calor de desecho de presión media, aprovecha una parte del calor disponible y genera 40.732 kg/s de vapor. El generador de vapor requiere 1.534E5 kW para generar vapor de alta presión, más 3.847 E4 kW para recalentamiento del vapor de alta presión.

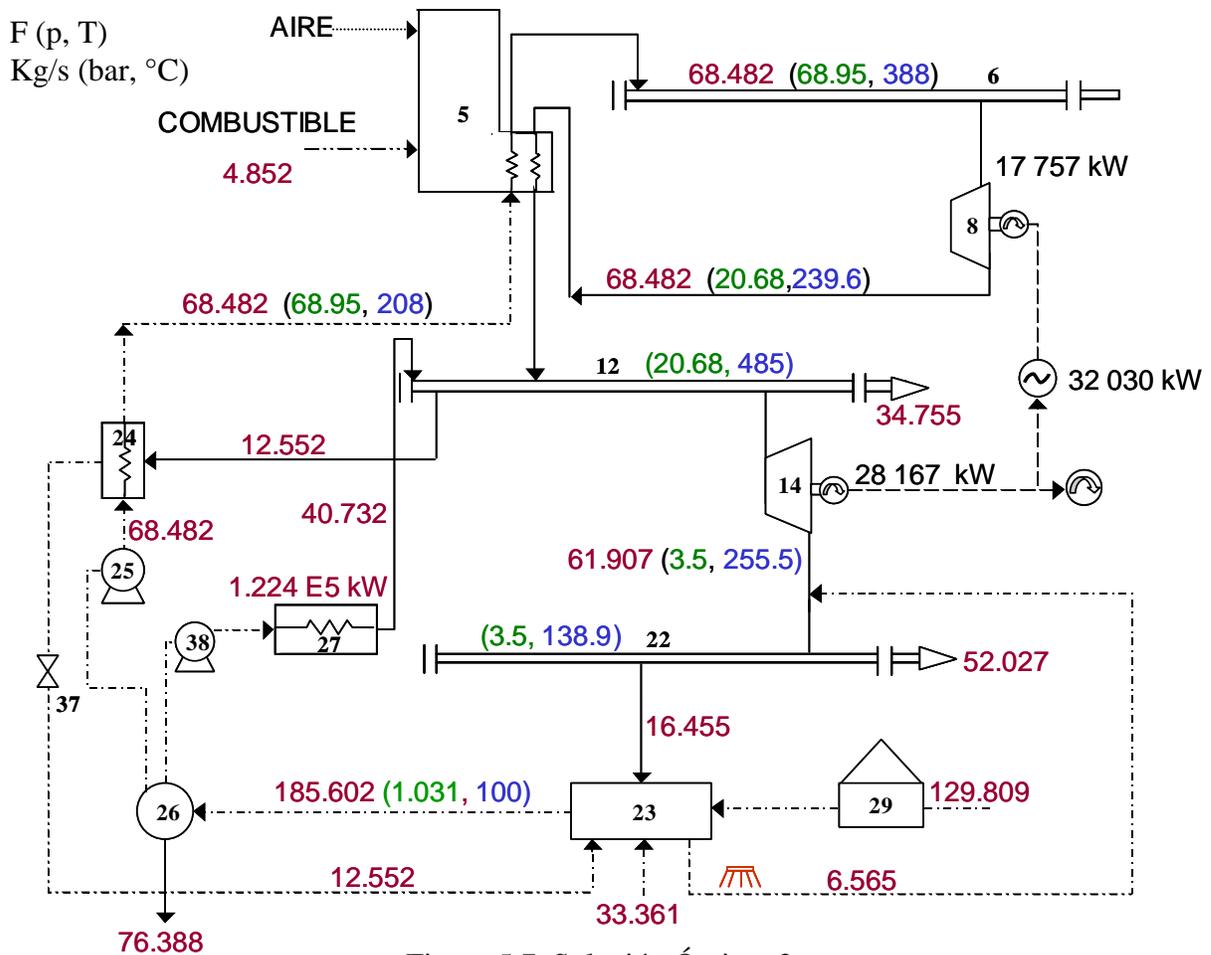


Figura 5.7. Solución Óptima 3.

Tabla 5.6. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-3.

Unidad	Potencia requerida
25	713.37 kW
38	410.09 kW

**5.5.4 Solución óptima 4**

La solución Óptima 4, en comparación con la solución Lineal-1, a pesar de no ser la mejor solución óptima, su configuración permite apreciar la expansión de la región de búsqueda.

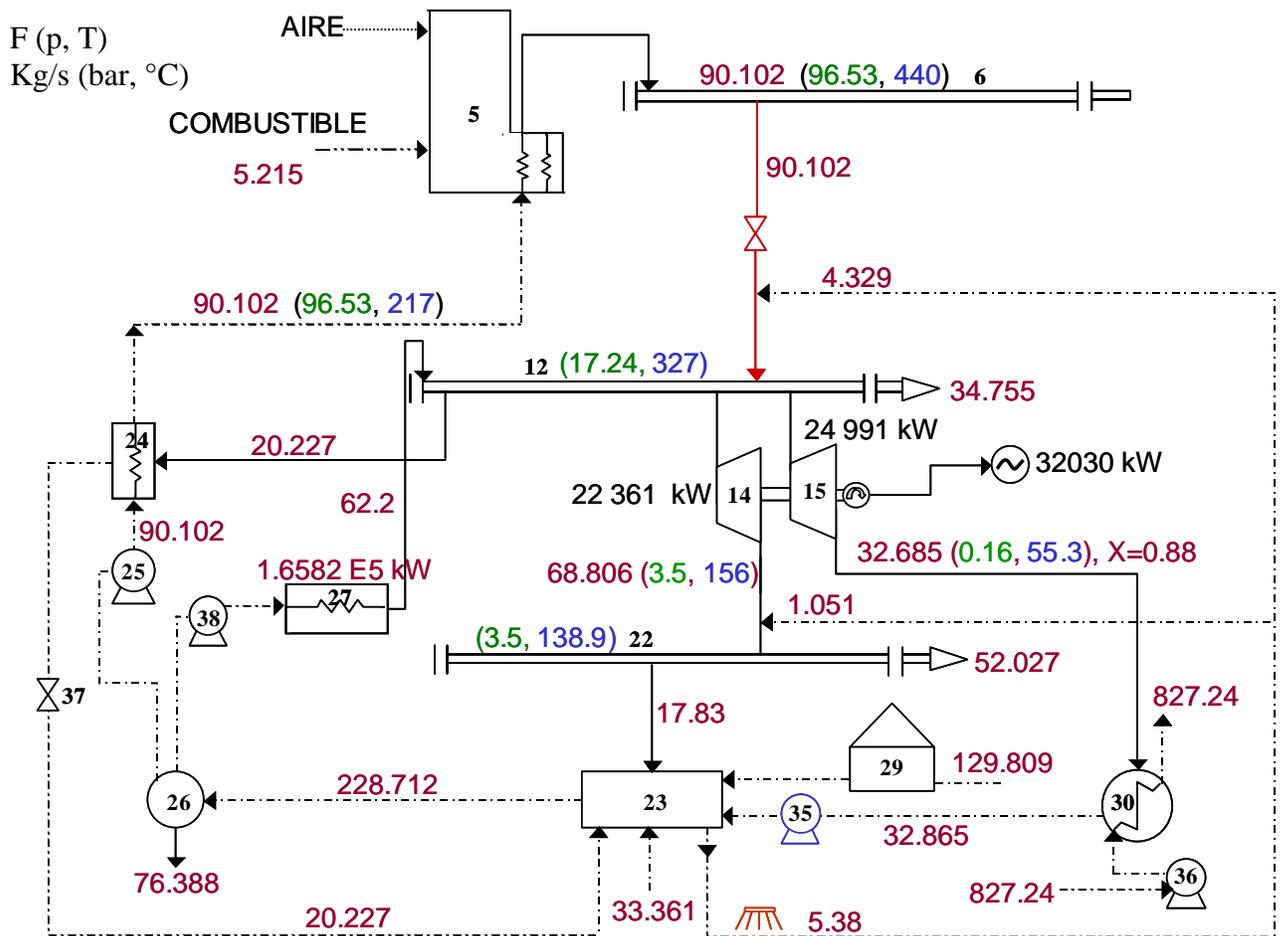


Figura 5.8. Solución Óptima 4.

Tabla 5.7. Demandas de potencia para las bombas presentes en la solución Óptima-4.

<b>Unidad</b>	<b>Potencia requerida</b>
25	1417.02 kW
35	2.399 kW
36	521.99 kW
38	610.52 kW

En la solución Óptima 4, el cabezal de alta presión opera a 96.53 bar y 440 °C. El cabezal de presión media opera a 17.24 bar y 327 °C. El vapor de presión media requerido en el sistema se satisface a través de una válvula de expansión y una caldera de calor de desecho. Dos turbinas de baja presión satisfacen las demandas de electricidad y potencia motriz. Una turbina opera a contrapresión y su vapor exhausto se atempera antes de alimentarse al cabezal de baja presión. La segunda turbina opera a condensación. Ambas turbinas operan con eficiencia isentrópica de 0.9.

En la solución Óptima 4. El generador de vapor requiere 2.0630 E5 kW para generar vapor de alta presión. En la válvula de expansión se estrangula el vapor de alta presión para generar vapor en el nivel de presión media, que antes de alimentarse al cabezal de presión media se atempera. El generador de vapor requiere 2.063 E5 kW, para generar 90.102 kg/s de vapor a 96.53 bar y 440 °C. La caldera de calor de desecho de presión media aprovecha todo el calor disponible para generar 62.2 kg/s de vapor. En esta configuración se necesita un condensador al que se suministran 827.245 kg/s de agua para enfriar el exhausto de la turbina de condensación.

Los costos de capital y de operación de la solución Óptima 4, se detallan en la Tabla 5.8 y en la Tabla 5.9. La solución óptima 4, además de tener un incremento de costos de 38 % con respecto a la solución Óptima 1, es un sistema altamente ineficiente desde el punto de vista termodinámico.

Tabla 5.8. Costos de capital asociados a cada unidad de la solución Óptima 4.

<b>Unidad</b>	<b>Cargo fijo</b>	<b>Cargo de nivel</b>
5	\$41,139.7	\$2,264,911.99
6	\$10,882.00	\$154,786.23
7	\$23,486.00	\$26, 850.00
12	\$10,882.00	\$236,227.29
14	\$84,847.10	\$626,224.05
15	\$169,694.00	\$699,847.96
22	\$10,882.00	\$64,449.37
23	\$11,017.00	\$142,508.19
24	\$48,920.00	\$170,418.92
25	\$1,278.30	\$154,484.28
26	\$298.00	\$180,436.41
27	\$70,893.00	\$1,088,189.00
29	\$167,636.00	\$1,362,215.65
30	\$48,920.00	\$1,564,733.92
35	\$1,278.30	\$261.54
36	\$1,278.30	\$56,907.35
37	\$2,567.00	\$9,830.32
38	\$1, 278.30	\$66,559.11
Generador	\$54, 475.00	\$7,260,240.10
Total	\$761,651.90	\$16,891,733.97

Tabla 5.9. Costos de operación asociados a la solución Óptima 4.

Combustible	2.02
Agua fresca	0.17

## 5.6 Análisis Paramétrico

Resolver el problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares no implica únicamente encontrar una configuración óptima que satisfaga las demandas y minimice los costos. Una solución adecuada debe incluir un análisis paramétrico que permita, visualizar la funcionalidad del sistema óptimo bajo diferentes escenarios de demandas y a la vez conocer los márgenes de optimalidad del diseño.

Para realizar el análisis paramétrico consideré la configuración Óptima 1, Figura 5.5, y las demandas de servicios auxiliares del ejemplo ilustrativo original (caso base), Tabla 5.10. Debido a que la topología, fijé las variables binarias conforme a la solución Óptima 1. Los parámetros que se pueden variar son las demandas de servicios auxiliares.

Tabla 5.10. Condiciones de operación óptimas y demandas para el ejemplo ilustrativo.

<b>Unidad</b>	<b>Demandas caso base</b>	<b>Condiciones óptimas de operación</b>
Vapor de alta presión	0	96.53 bar, 440 °C
Vapor de presión media	37.55 kg/s	20.68 bar, 485 °C
Vapor de baja presión	52.02 kg/s	3.45 bar, 138 °C
Agua deaerada	76.388 kg/s	1.013 bar, 100 °C

Para generar las curvas paramétricas se varía un parámetro del caso base, mientras que el resto de las demandas se fija en su valor inicial. El parámetro que se varía en este análisis puede ser la demanda de vapor de baja presión o la demanda de agua deaerada, esta variación bajo diferentes niveles de demandas de vapor de presión media.

## 5.7 Análisis Paramétrico para Diferentes Demandas de Vapor de Baja Presión

En esta sección del análisis paramétrico se varían las demandas de vapor de baja presión, desde 40 kg/s hasta 75 kg/s, a diferentes niveles de demandas de vapor de presión media, Figura 5.9.

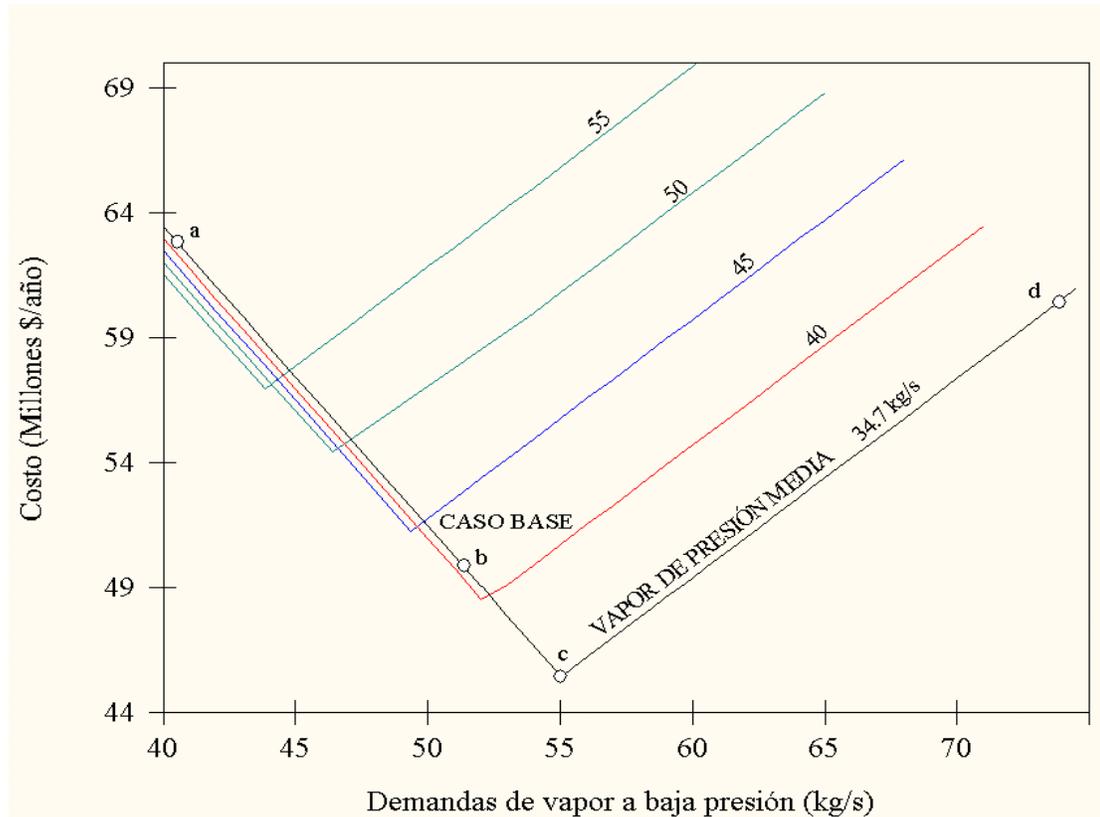


Figura 5.9. Diferentes demandas de vapor de baja presión.

Las demandas del caso base corresponden al punto (b), el cual se ubica sobre la curva correspondiente a la demanda de vapor de presión media de 34.755 kg/s. Al analizar esta curva paramétrica se observa que al incrementar las demandas de vapor de baja presión desde el punto (a) hacia el punto (b), los costos disminuyen hasta un costo mínimo, punto (c). Si después del punto (c), se incrementan las demandas de vapor de baja presión, los costos aumentan.

De manera análoga se construyen otras curvas paramétricas, variando las demandas de vapor de baja presión a diferentes niveles de demandas de vapor de presión media. Estas curvas siguen la misma tendencia que la curva correspondiente a 34.755 kg/s.

El comportamiento inesperado de las curvas paramétricas, hace necesario un análisis que permita explicar esta tendencia. La representación gráfica de la eficiencia del ciclo, muestra que el punto óptimo de cada curva coincide con la eficiencia máxima que se puede alcanzar en cada caso de demandas de vapor de presión media, Figura 5.10.

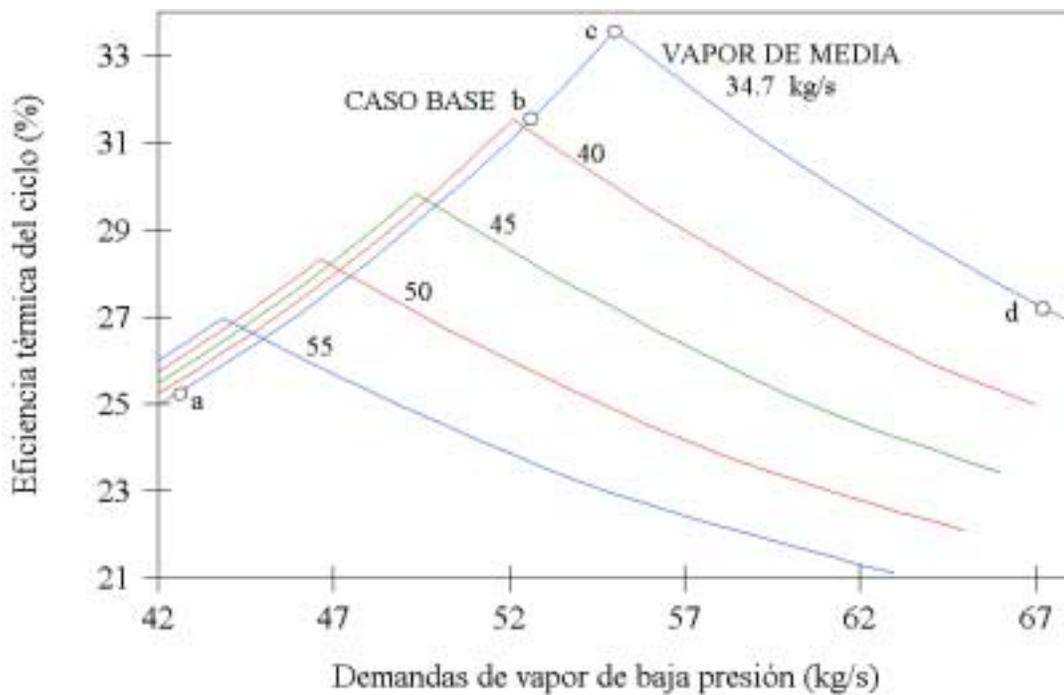


Figura 5.10. Eficiencia térmica para diferentes demandas de vapor de baja presión.

Analizando las soluciones asociadas a cada curva, tenemos que durante el barrido de las demandas de vapor de baja presión, los parámetros en donde la variación tiene mayor impacto son en el flujo de combustible, vapor de presión media generado por la caldera de calor de desecho. Una representación gráfica del comportamiento de estos parámetros con respecto a la variación en las demandas de vapor de baja presión manteniendo en 34.755 kg/s las demandas de vapor de presión media se presenta en la Figura 5.11.

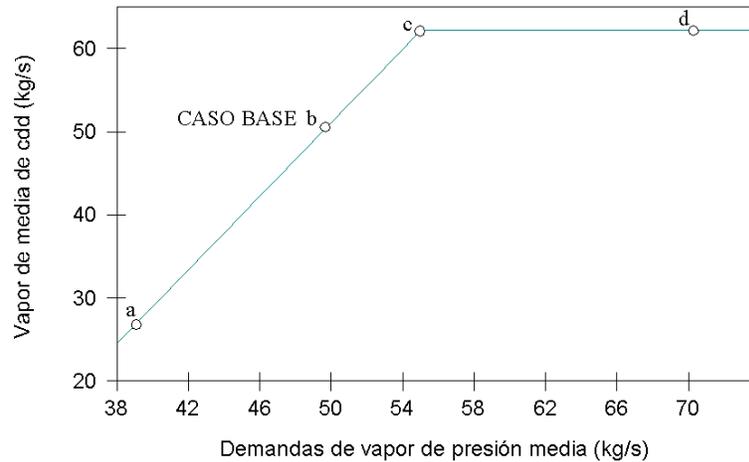


Figura 5.11-a. Vapor de presión media generado por la caldera de calor de desecho.

En la Figura 5.11-a, se encuentra la variación del vapor generado por la caldera de calor de desecho al incrementar las demandas de vapor de presión media. El comportamiento de la curva muestra que el vapor generado por la caldera del calor de desecho se incrementa, hasta alcanzar la máxima cantidad de vapor de presión media que puede generar la caldera, en este valor se localiza el punto (c). Después de este punto, al aumentar las demandas de vapor de presión media la cantidad de vapor generado por la caldera de calor de desecho se mantiene constante en 62.2 kg/s

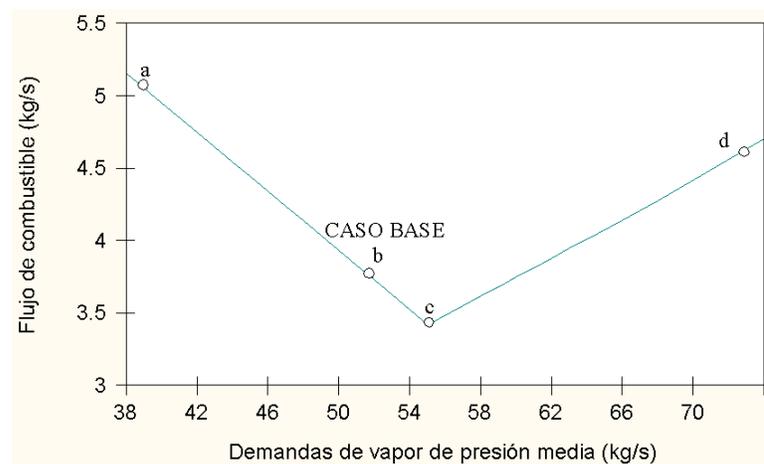


Figura 5.11-b. Flujo de combustible.

En la Figura 5.11-b, se presenta el flujo de combustible suministrado al sistema al incrementar las demandas de vapor de baja presión. El flujo de combustible suministrado, disminuye desde el punto (a), hasta el punto (c), en donde se encuentra el menor flujo de combustible suministrado al sistema. De la grafica anterior, vemos que en este punto se alcanza la máxima cantidad de vapor de presión media que puede generar la caldera de calor de desecho.

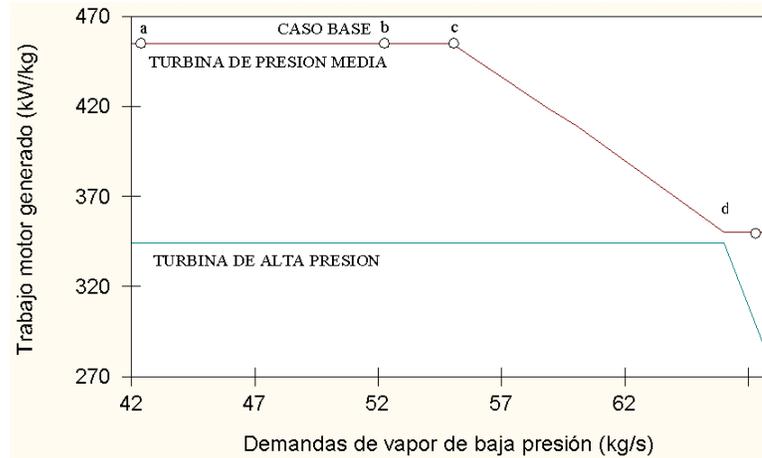


Figura 5.11-c. Trabajo motor generado por cada turbina.

En la Figura 5.11-c, se muestra la variación del trabajo motor generado por las turbinas presentes en la configuración al incrementar las demandas de vapor de presión media. La turbina de presión media, genera el máximo trabajo motor permitido ( $\eta_{sit} = 0.9$ ), hasta el punto (c), al continuar incrementando en las demandas de vapor de baja presión, el trabajo motor generado por esta turbina disminuye, hasta alcanzar la cota inferior ( $\eta_{sit} = 0.7$ ). La turbina de alta presión genera el máximo trabajo motor permitido, operando a  $\eta_{sit} = 0.9$ . Cuando la turbina de presión media alcanza su cota inferior, el trabajo motor generado por la turbina de alta presión, desciende hasta alcanzar su cota inferior, operando a  $\eta_{sit} = 0.7$ . Este comportamiento se debe a que las demandas de electricidad y potencia se mantienen constantes mientras que el flujo de vapor que circula a través de las turbinas aumenta, por tanto, el trabajo motor generado por estas unidades debe disminuir.

### 5.8. Análisis Paramétrico para Diferentes Demandas de Agua Deaerada

Para el segundo caso de análisis paramétrico desarrollado, se varían las demandas de agua deaerada a diferentes niveles de demandas de vapor de presión media, mientras que las demandas de vapor de baja presión, electricidad y potencia se mantienen fijas, Figura 5.12.

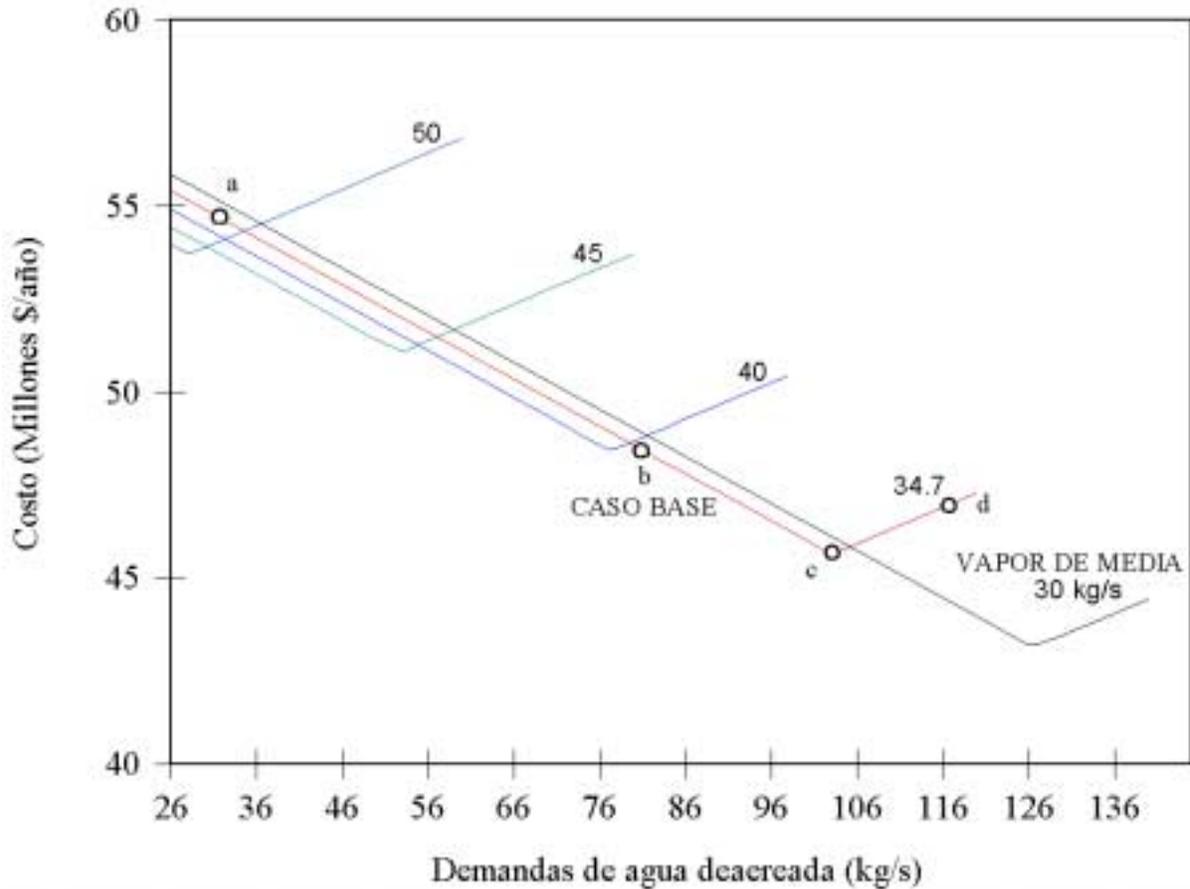


Figura 5.12. Diferentes demandas de agua deaerada.

El punto correspondiente a las demandas del ejemplo ilustrativo, caso base, punto (b), se localiza en la segunda curva paramétrica. Para estas curvas se aprecia la misma tendencia que en la sección anterior, esto es, incrementar las demandas de agua deaerada disminuye el costo anual hasta alcanzar un costo mínimo, punto (c).

Un análisis de eficiencia muestra que los puntos óptimos de nivel de demandas de vapor de presión media, coinciden con la eficiencia máxima de cada ciclo, Figura 5.13.

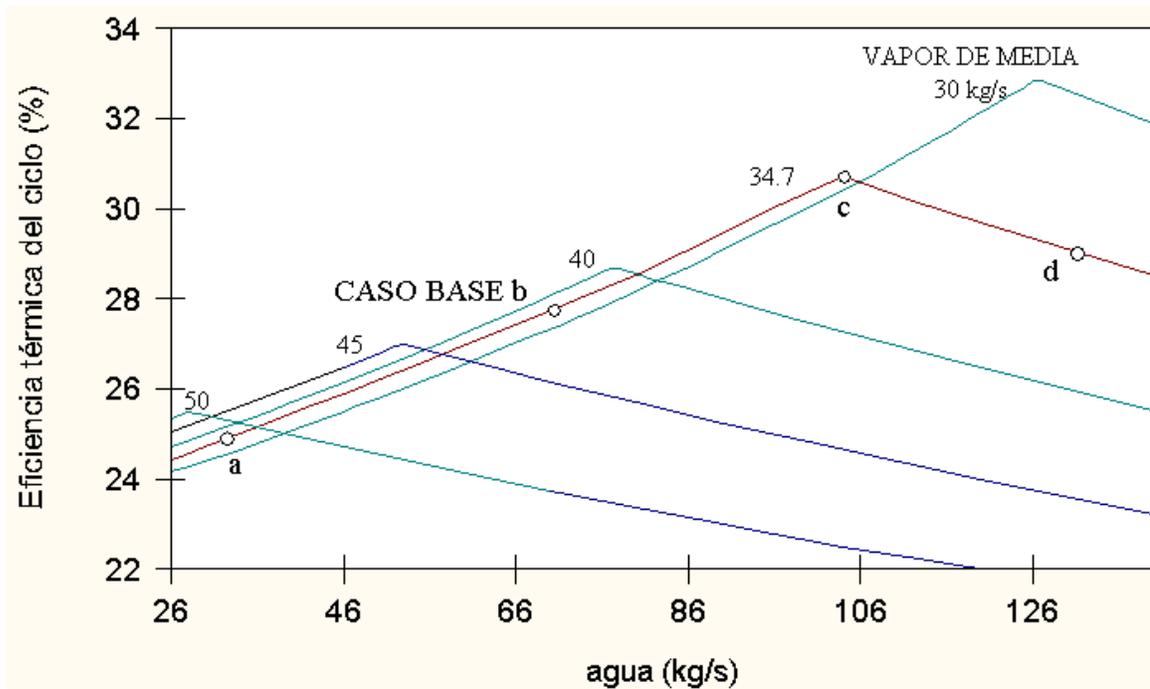


Figura 5.13. Eficiencia térmica para diferentes demandas de agua deaerada.

Las curvas paramétricas de eficiencia térmica, básicamente, siguen la misma tendencia que las curvas de eficiencia para diferentes demandas de vapor de baja presión.

## 5.9 Conclusiones

El modelo (SA-1) hereda gran parte de las propiedades del modelo Lineal-1, de Papoulias y Grossmann. Sin embargo, al incorporar la eficiencia isentrópica de las turbinas y la entalpía como función del trabajo motor se generan términos no lineales en el modelo. La solución del modelo no resulta sencilla debido a la presencia de variables binarias aunada a las no linealidades del modelo. La metodología de solución Continua 1-Lineal 1, combina una reducción de las variables a optimizar más una linealización del modelo, y resulta ser una herramienta eficaz para la solución y convergencia del modelo (SSA-1), que además permite encontrar puntos de inicio para resolver el modelo de programación no lineal mixta-entera original.

La implementación del modelo (SA-1) y la metodología de solución Continua 1-Lineal 1, se muestran con un ejemplo ilustrativo, encontrando soluciones óptimas alternativas. Las diferentes configuraciones que presentan estos óptimos locales, muestran la expansión de la región de búsqueda lograda con la superestructura enriquecida. Sin embargo, algunas de estas soluciones termodinámicamente son ineficientes, ya que la programación matemática no sabe discernir entre un ciclo termodinámico eficiente y un ciclo termodinámico ineficiente.

Finalmente haber realizado un análisis paramétrico para el ejemplo ilustrativo, es una herramienta que permite visualizar el comportamiento de los costos bajo diferentes escenarios de demandas. Permitiendo así, sugerir configuraciones con operación alternas a un menor costo, en las cuales se genera una cantidad extra de los servicios auxiliares demandados. Para el ejemplo ilustrativo se puede sugerir operar a un costo menor, generando un excedente de vapor de baja presión, mismo que se puede emplear en servicios adicionales de la planta, como calentar agua para regaderas, entre otras.

## CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

### Conclusiones

En esta tesis se ha abordado el problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares con un enfoque de superestructura. El sistema de servicios auxiliares es la sección de la industria de proceso que satisface las demandas de electricidad, agua deareada y vapor a determinados niveles de presión y temperatura. Las dimensiones del sistema de servicios auxiliares están determinadas por la sección de proceso y la red de intercambio de calor. Sin embargo, dentro de los costos de operación de una industria de proceso, un porcentaje considerable del capital se destina a los sistemas de servicios auxiliares, por esto es importante diseñar un sistema de servicios auxiliares que además de satisfacer las demandas requeridas minimice los costos totales del mismo. El problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares consiste en encontrar una configuración, detallando unidades existentes, capacidad, condiciones de operación y flujos másicos en cada punto del sistema, que además de satisfacer las demandas requeridas, opere al menor costo total.

En el Capítulo 1, se describió el trabajo de algunos autores encontrados en la literatura. Entre los cuales se destacan enfoques que, minimizan la pérdida de energía disponible en síntesis Nishio y Umeda (1982), Petroulas y Reklaitis (1984). Enfoques de superestructura en síntesis Papoulias y Grossmann (1983), Colmenares y Seider (1984), Strouvalis, Mavromatis y Kokossis (1998), Manninen y Zhu (1999) y Zhang y Zhu (2001). Y Optimización de sistemas de servicios auxiliares con topología fija Rodriguez-Toral y Morton (2001), Yoo y col. (2002).

El modelo desarrollado en esta tesis para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares es un problema de programación matemática no lineal mixta-entera. En el Capítulo 2 se describió la estructura de los problemas de programación lineal, programación no lineal, programación lineal mixta-entera y de programación no lineal mixta-entera. En este capítulo también se

ilustró el uso de variables binarias para el modelado de restricciones lógicas. Para resolver el modelo (SA-1), correspondiente al ejemplo ilustrativo se empleó como resolvidor DICOPT en ambiente GAMS. DICOPT, se basa en el algoritmo de aproximaciones exteriores. Este algoritmo se describió e ilustró en el Capítulo 2.

En el Capítulo 3 se presentaron generalidades de ciclos termodinámicos para la generación de potencia. En la segunda sección de este capítulo se abordó el modelado matemático de la existencia de las principales unidades constitutivas de estos ciclos con sus condiciones de operación, empleando las restricciones lógicas descritas en el Capítulo 2.

En el Capítulo 4 se describió el enfoque de superestructura para solucionar el problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares, propuesto por Papoulias y Grossmann. En este capítulo se analizó y detalló el modelo de Papoulias y Grossmann para un ejemplo ilustrativo, este análisis permite visualizar algunas deficiencias del modelo lineal, entre las que se encuentran, una región de búsqueda limitada y condiciones de operación inaccesibles.

En el Capítulo 5, se desarrolló un modelo de programación no lineal mixta-entera para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares con un enfoque de superestructura, en la primer sección de este capítulo se realizó un análisis termodinámico que expande la región de búsqueda de soluciones óptimas y en base a este análisis se desarrollo un superestructura enriquecida, que incorpora entre otras estrategias de expansión, atemperamiento a la salida de las turbinas de vapor y de las válvulas de expansión, incorporación de bombas que conectan adecuadamente unidades.

En la segunda sección del Capítulo 5, se desarrolló un modelo de programación no lineal mixta-entera, (SA-1), asociado a la superestructura enriquecida, que incluye términos no

lineales, debidos al modelado de la eficiencia isentrópica de las turbinas de vapor y de la entalpía a la salida de las turbinas como función del trabajo motor generado. La implementación del modelo (SA-1) se ilustra con el ejemplo descrito en el Capítulo 4. Como la solución del modelo matemático presentó ciertas dificultades al resolver como dependencia con el punto de inicio, infactibilidad, tiempos de cómputo muy altos, en este capítulo se propuso una metodología de solución, Continua 1-Lineal 1. Esta metodología combina una reducción en el número de variables binarias asociadas al modelo con una linealización del mismo.

La metodología de solución Continua 1- Lineal 1, se implementó en ambiente GAMS obteniendo diferentes soluciones óptimas, las cuales demuestran que la superestructura enriquecida propuesta expande de manera efectiva la región de diseños factibles para la solución del problema de síntesis de sistemas de servicios auxiliares.

Para concluir con la solución del ejemplo ilustrativo se realizó un análisis paramétrico, basado en la topología y condiciones de operación de la solución Óptima-1 para diferentes escenarios de demandas, que permite considerar criterios operacionales y tecnológicos adicionales para la selección de configuración final. El análisis paramétrico muestra que en el punto óptimo de operación, cuando el sistema opera a menor costo, genera 3 kg/s de vapor de baja presión más que la cantidad demandada. La solución Óptima 1, no coincide con este punto por que las restricciones de demanda se modelan como igualdades. Si a las restricciones de demanda se les considera como desigualdad con cota inferior en las demandas del caso base estos óptimos coinciden.

En resumen, en esta tesis se identificó y resolvió una limitación de la superestructura para la síntesis de servicios auxiliares de Papoulias y Grossmann. Dicha limitación restringe considerablemente la región de diseño del problema. La superestructura enriquecida desarrollado expande de manera importante la región de búsqueda de soluciones óptimas.

Esta superestructura incorpora, atemperamiento a la salida de las turbinas de vapor de presión alta y de presión intermedia, logrando así, accesibilidad a todas las posibles condiciones de operación. De manera análoga se atemperan las corrientes a la salida de las válvulas de expansión.

Se desarrolló un modelo matemático para la síntesis de servicios auxiliares que incorpora la eficiencia isentrópica y la entalpía a la salida de las turbinas como función del trabajo motor generado. El beneficio obteniendo con este modelo es una descripción matemática más apegada a la operación real de estos sistemas.

Converger y encontrar puntos óptimos es la principal dificultad para resolver los problemas de programación no lineal mixta-entera no convexos. Para resolver el modelo matemático (SA-1), se desarrolló una metodología de solución que permite la localización eficiente de un punto de inicio.

Para complementar adecuadamente la mejor solución obtenida se realizó un análisis paramétrico, que permite visualizar la funcionalidad del sistema bajo diferentes escenarios de demandas. Los resultados obtenidos en el análisis paramétrico manteniendo fija la configuración Óptima 1, muestran la existencia de condiciones de operación con costo menor, esto se debe a que las restricciones de demanda se incluyen como igualdad con el valor demandado, en caso de incluir estas restricciones como desigualdad, manteniendo las demandas requeridas como cota inferior la mejor solución óptima encontrada coincide con la solución mínima del análisis paramétrico.

## Trabajo Futuro

Para generar un modelo que describa con mayor detalle la operación de los sistemas de sistemas de servicios auxiliares se deben implementar en el modelo matemático, las siguientes consideraciones:

- Caídas de presión en los equipos
- Pérdidas de agua

Con el aumento en los costos de la energía y la creciente preocupación por implementar ciclos generadores de calor y potencia cada vez más eficientes. Un trabajo futuro podría explorar el comportamiento de los costos asociados a la síntesis de sistemas de servicios auxiliares, empleando un ciclo combinado, el cual es un ciclo más eficiente que un ciclo de vapor.

## Referencias

1. Nishio M. y Itoh, K., 1980, "A Thermodynamic Approach to Steam-Power System Design", *Ind. Chem. Process Des. Dev*, Vol. 19, 306-312.
2. Papoulias S. y Grossmann, I., 1983, "A Structural Optimization Approach in Process Synthesis-I", *Computers and Chem. Eng*, Vol. 21, 787-800.
3. Grossmann, I., 1980, "Applications of Mixed-Integer Linear Programming in Process Synthesis", *Computers and Chem. Eng.*, Vol. 4, 205-214.
4. Floudas C., 1995, "Nonlinear and Mixed-Integer Optimization Fundamentals and Applications", Oxford University Press, New York.
5. Duran, M. y Grossmann I., 1984, "An Outer-Approx. For A Class Of Mixed-Integer Nonlinear Programs", *Mathematical Prog.*, Vol. 36, 307-309.
6. Kocis G.R. y Grossmann I., 1987, "Relaxation Strategy for the Structural Optimization of Process Flow Sheets", *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 26, 1869-1880.
7. Wiswantham J. y Grossmann I. 1990, "A Combined Penalty Function and Outer-Aproximation Method For MINLP Optimization", *Computers Chemical Eng.*, Vol. 14, 769-782.
8. Broke A., et al., 1998, "GAMS, A User's Guide", GAMS Development Corporation.
9. De La Fuente O'Connor Jose Luis, "Tecnologías Computacionales para Sistemas de Ecuaciones, Optimización Lineal y Entera", Ed. Reverté, S. A., Barcelona, Edición en español.

10. Yoo Y. y col., 1996, "Modeling and Simulation of Energy Distribution Systems in a Petrochemical Plant", Korean J. of Chem. Eng., Vol. 13, 384-392.
11. Nishio M. y Shiroko K., 1982, "Optimal Use of Steam an Power in Chemical Plants", Ind. Eng. Chem. Proccs Des. Dev., Vol. 21, 640-646.
12. Colmenares T. y Seider W., 1989, "Síntesis of Utility Systems Integrated with Chemical Processes", Ind. Eng. Chem. Res. Vol. 28, 84-93.
13. Petroulas T. y Reklaitis G., 1984, "Computer-Aided Synthesis and Design of Plant Utility Systems", AIChE Journal, Vol. 30, 69-78.
14. Rodríguez-Toral M. y Morton W., 2001, "The Use of New SQP Methods for the Optimization of Utility Systems", Computers and Chem. Eng., Vol. 25, 287-300.
15. Hillier F.S., Lieberman G.J., "Introducción a la Investigación de Operaciones", McGraw-Hill, 6ª. Edición
16. Heui-Seok Y y Chonghum H., 2002, "The Integration of Complete Replanning and Rule-Based Repairing for Optimal Operation of Utility Plants", Korean J. Chem. Eng, Vol. 18, 442-450.
17. Chih-Chung C. y Yen-Shiang S., 1987, "A Thermodynamic Approach to the Design and Synthesis of Plant Utility Systems", Ind. Eng. Chem. Res., Vol. 26, 1100-1108.
18. Cengel Y. y Boles M.,1999, "Temodinámica", Vol. I y II, McGraw-Hill, 2ª. Edición.
19. Edgar T. F. y Himmelblau D. M., 1988, "Optimization of Chemical Proceses", McGraw-Hill.

20. Biegler L. T., Grossmann I. E. y Westerberg A. W., 1997, "Systematic Methods of Chemical Process Design", Prentice-Hall.
21. Ulrich D. G., 1992, "How to Calculate Utility Cost", Chemical Engineering, 110-133.
22. Woods D. R., Anderson S. J. y Norman S. L., 1979, "Evaluation of Capital Cost Data: Offsite Utilities (Supply)", Can. J. Chem. Eng.
23. Guthrie K. M., 1974, "Process Plant Estimating, Evaluation and Control", Craftsman Book Co.
24. Smith R., 1995, "Chemical Process Design", McGraw-Hill.
25. Winston W. L., 1993, "Operations Research Applications and Algorithms", Duxbury Press, 3a. Edición.
26. Aguilar Rodriguez M., 1981, "Criterio de Diseño de Plantas Termoeléctricas", Editorial Limusa, 1ª. Edición.
27. Nemhauser G.L. y Wolsey L:A., 1988, "Integer and Combinatorial Optimization", Wiley.
28. Wagner H.M., 1975, "Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions", Prentice-Hall.
29. Marechal F. y Kalitventzeff B., 1998, "Process Integration: Selection of the Optimal Utility System", Computers and Chem. Eng., Vol. 22, s149-s156.

## Apéndice A1

### Modelo (SA-1) para el Ejemplo Ilustrativo

El ejemplo ilustrativo del Capítulo 5 (Nishio y Umeda, 1980), se retomara en esta sección para ilustrar el modelo desarrollado para la síntesis de sistemas de servicios auxiliares.

Unidades con condiciones de operación discretas

- Cabezal de alta presión
- Cabezal de presión media
- Cabezal de baja presión
- Condensador

Función Objetivo

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z = & \sum_{k=1}^3 (\alpha_{5,k} y_{5,k} + \beta_{5,k} G_{5,k}) + \sum_{k=1}^3 (\alpha_{6,k} y_{6,k} + \beta_{6,k} G_{6,k}) + \sum_{k=1}^3 (\alpha_{7,k} y_{7,k} + \beta_{7,k} G_{7,k}) + \\
 & \sum_{n=8}^{n=10} \sum_{k=1}^9 (\alpha_{n,k} y_{n,k} + \beta_{n,k} G_{n,k}) + \sum_{k=1}^3 (\alpha_{12,k} y_{12,k} + \beta_{12,k} G_{12,k}) + \alpha_{13,1} y_{13,1} + \beta_{13,1} G_{13,1} + \\
 & \sum_{n=14}^{n=21} \sum_{k=1}^3 (\alpha_{n,k} y_{n,k} + \beta_{n,k} G_{n,k}) + \alpha_{22,1} y_{22,1} + \beta_{22,1} G_{22,1} + \alpha_{23,1} y_{23,1} + \beta_{23,1} G_{23,1} + \sum_{k=1}^3 (\beta_{24,k} G_{24,k} + \\
 & \alpha_{24,1} y_{24,1}) + \sum_{k=1}^3 (\alpha_{25,k} y_{25,k} + \beta_{25,k} G_{25,k}) + \alpha_{26,1} y_{26,1} + \beta_{26,1} G_{26,1} + \alpha_{27,1} y_{27,1} + \beta_{27,1} G_{27,1} + \\
 & \alpha_{28,1} y_{28,1} + \beta_{28,1} G_{28,1} + \alpha_{29,1} y_{29,1} + \beta_{29,1} G_{29,1} + \alpha_{30,1} y_{30,1} + \beta_{30,1} G_{30,1} + \alpha_{35,1} y_{35,1} + \beta_{35,1} G_{35,1} + \\
 & \alpha_{36,1} y_{36,1} + \beta_{36,1} G_{36,1} + \alpha_{37,k} y_{37,k} + \beta_{37,k} G_{37,k} + \sum_{k=1}^3 (\alpha_{38,k} y_{38,k} + \beta_{38,k} G_{38,k}) + \alpha_{39,1} y_{39,1} + \\
 & \beta_{39,1} G_{39,1} + \gamma_{5,k} F_{5,k} + \delta_{29} F_{c,29}
 \end{aligned}
 \tag{A1.1}$$

Restricciones asociadas:

*Unidad 5. Caldera con tres posibles condiciones de operación.*

*Sección 5 (Flujo de salida al cabezal de alta presión)*

Balance de materia

$$F_{4,1,5} + F_{24,1,5} + F_{24,2,5} + F_{24,3,5} - F_{5,1,6} - F_{5,2,6} - F_{5,3,6} = 0 \quad (\text{A1.2})$$

Balance de energía

$$F_{4,1,5} h_{4,1,5} + F_{24,1,5} h_{24,1,5} + F_{24,2,5} h_{24,2,5} + F_{24,3,5} h_{24,3,5} - F_{5,1,6} h_{5,1,6} - F_{5,2,6} h_{5,2,6} - F_{5,3,6} h_{5,3,6} + Q_5 = 0 \quad (\text{A1.3})$$

Restricciones

$$y_{5,1} + y_{5,2} + y_{5,3} = 1 \quad (\text{A1.4})$$

$$F_{5,1,6} \leq U y_{5,1}$$

$$F_{5,2,6} \leq U y_{5,2} \quad (\text{A1.5})$$

$$F_{5,3,6} \leq U y_{5,3}$$

Restricción de existencia con el cabezal de alta presión

$$y_{5,1} = y_{6,1}$$

$$y_{5,2} = y_{6,2} \quad (\text{A1.6})$$

$$y_{5,3} = y_{6,3}$$

*Sección 5B (Flujo de salida al cabezal de presión media) Tres posibles condiciones de operación*

Balance de materia

$$F_{11,1,5} - F_{5,1,12} - F_{5,2,12} - F_{5,3,12} = 0 \quad (\text{A1.7})$$

Balance de energía

$$F_{11,1,5} h_{11,1,5} - F_{5,1,12} h_{5,1,12} - F_{5,2,12} h_{5,2,12} - F_{5,3,12} h_{5,3,12} + Q_{5B} = 0 \quad (\text{A1.8})$$

Restricciones

$$y_{5B,1} + y_{5B,2} + y_{5B,3} = 1 \quad (\text{A1.9})$$

$$\begin{aligned}
 F_{5,1,12} &\leq U \text{ y } y_{5B,1} \\
 F_{5,2,12} &\leq U \text{ y } y_{5B,2} \\
 F_{5,3,12} &\leq U \text{ y } y_{5B,3}
 \end{aligned}
 \tag{A1.10}$$

Además aplica (6.9) con cabezal de presión media

$$\begin{aligned}
 y_{5B,1} &= y_{12,1} \\
 y_{5B,1} &= y_{12,2} \\
 y_{5B,1} &= y_{12,3}
 \end{aligned}
 \tag{A1.11}$$

Balance para combustible

$$F_{c5} h_{c5} \eta_{c5} - Q_5 - Q_{5B} = 0 \tag{A1.12}$$

*Unidad 6. Cabezal de alta presión con tres posibles condiciones de operación*

Balance de materia

$$\begin{aligned}
 F_{5,1,6} + F_{5,2,6} + F_{5,3,6} - F_{6,1,7} - F_{6,2,7} - F_{6,3,7} - F_{6,1,8} - F_{6,2,8} - F_{6,3,8} - \\
 F_{6,1,9} - F_{6,2,9} - F_{6,3,9} - F_{6,1,10} - F_{6,2,10} - F_{6,3,10} - F_{6,1,33} - F_{6,2,33} - F_{6,3,33} = 0
 \end{aligned}
 \tag{A1.13}$$

Balance de energía

$$\begin{aligned}
 F_{5,1,6} h_{5,1,6} + F_{5,2,6} h_{5,2,6} + F_{5,3,6} h_{5,3,6} - F_{6,1,7} h_{6,1,7} - F_{6,2,7} h_{6,2,7} - F_{6,3,7} h_{6,3,7} - \\
 F_{6,1,8} h_{6,1,8} - F_{6,2,8} h_{6,2,8} - F_{6,3,8} h_{6,3,8} - F_{6,1,9} h_{6,1,9} - F_{6,2,9} h_{6,2,9} - F_{6,3,9} h_{6,3,9} - \\
 F_{6,1,10} h_{6,1,10} - F_{6,2,10} h_{6,2,10} - F_{6,3,10} h_{6,3,10} - F_{6,1,33} h_{6,1,33} - F_{6,2,33} h_{6,2,33} - \\
 F_{6,3,33} h_{6,3,33} = 0
 \end{aligned}
 \tag{A1.14}$$

Restricciones

$$y_{6,1} + y_{6,2} + y_{6,3} = 1 \tag{A1.15}$$

$$\begin{aligned}
 F_{6,1,7} + F_{6,1,8} + F_{6,1,9} + F_{6,1,10} + F_{6,1,33} &\leq U \text{ y } y_{6,1} \\
 F_{6,2,7} + F_{6,2,8} + F_{6,2,9} + F_{6,2,10} + F_{6,2,33} &\leq U \text{ y } y_{6,2} \\
 F_{6,3,7} + F_{6,3,8} + F_{6,3,9} + F_{6,3,10} + F_{6,3,33} &\leq U \text{ y } y_{6,3}
 \end{aligned}
 \tag{A1.16}$$

*Unidad 7. Reductor de alta presión con tres posibles condiciones de operación*

Balance de materia

$$F_{6,1,7} + F_{6,2,7} + F_{6,3,7} - F_{7,1,12} - F_{7,2,12} - F_{7,3,12} = 0 \quad (\text{A1.17})$$

Balance de energía

$$F_{6,1,7}h_{6,1,7} + F_{6,2,7}h_{6,2,7} + F_{6,3,7}h_{6,3,7} - F_{7,1,12}h_{7,1,12} - F_{7,2,12}h_{7,2,12} - F_{7,3,12}h_{7,3,12} = 0 \quad (\text{A1.18})$$

Restricciones

$$y_{7,1} + y_{7,2} + y_{7,3} \leq 1 \quad (\text{A1.19})$$

$$\begin{aligned} F_{7,1,12} &\leq U y_{7,1} \\ F_{7,2,12} &\leq U y_{7,2} \\ F_{7,3,12} &\leq U y_{7,3} \end{aligned} \quad (\text{A1.20})$$

Aplica restricción (6.10) con cabezal de presión media

$$\begin{aligned} F_{7,1,12} &\leq U y_{12,1} \\ F_{7,2,12} &\leq U y_{12,2} \\ F_{7,3,12} &\leq U y_{12,3} \end{aligned} \quad (\text{A1.21})$$

*Unidad 8-10. Turbinas de alta presión con nueve posibles condiciones de operación*

Balances de materia

$$F_{6,1,8} + F_{6,2,8} + F_{6,3,8} - F_{8,1,11} - F_{8,1,M} = 0 \quad (\text{A1.22})$$

$$F_{8,1,M} - F_{8,1,22A} - F_{8,1,C} = 0 \quad (\text{A1.23})$$

$$F_{8,1,22A} + F_{23,1,8} - F_{8,1,22} = 0 \quad (\text{A1.24})$$

$$F_{8,1,C} - F_{8,1,30} = 0 \quad (\text{A1.25})$$

Balances de energía

$$F_{6,1,8}h_{6,1,8} + F_{6,2,8}h_{6,2,8} + F_{6,3,8}h_{6,3,8} - F_{8,1,11}h_{8,1,11} - F_{8,1,M}h_{8,1,11} - w_8^*(F_{8,1,11} + F_{8,1,M}) = 0$$

(A1.26)

$$F_{8,1,M}h_{8,1,11} - F_{8,1,22A}h_{8,1,C} - F_{8,1,C}h_{8,1,C} - (F_{8,1,22A} + F_{8,1,C}) * (w_{8,B1} + w_{8,B2} + w_{8,B3} + w_{8,B4} + w_{8,B5} + w_{8,B6} + w_{8,B7} + w_{8,B8} + w_{8,B9}) = 0$$

$$F_{8,1,22A}h_{8,1,C} + F_{23,1,8}h_{23,1,8} - F_{8,1,22}h_{8,1,22} = 0 \quad (A1.28)$$

$$F_{8,1,C}h_{8,1,C} - F_{8,1,30}h_{8,1,30} - F_{8,1,30} * (w_{8,C1} + w_{8,C2} + w_{8,C3} + w_{8,C4} + w_{8,C5} + w_{8,C6} + w_{8,C7} + w_{8,C8} + w_{8,C9}) = 0$$

(A1.29)

### Restricciones

$$y_{8,1} + y_{8,2} + y_{8,3} + y_{8,4} + y_{8,5} + y_{8,6} + y_{8,7} + y_{8,8} + y_{8,9} \leq 1 \quad (A1.30)$$

$$y_{8,1,22} + y_{8,2,22} + y_{8,3,22} + y_{8,4,22} + y_{8,5,22} + y_{8,6,22} + y_{8,7,22} + y_{8,8,22} + y_{8,9,22} \leq 1$$

$$y_{8,1,30} + y_{8,2,30} + y_{8,3,30} + y_{8,4,30} + y_{8,5,30} + y_{8,6,30} + y_{8,7,30} + y_{8,8,30} + y_{8,9,30} \leq 1$$

$$F_{8,1,11} + F_{8,1,M} \leq U(y_{8,1} + y_{8,2} + y_{8,3} + y_{8,4} + y_{8,5} + y_{8,6} + y_{8,7} + y_{8,8} + y_{8,9})$$

$$F_{8,1,22} + F_{8,1,C} \leq U * (y_{8,1,22} + y_{8,2,22} + y_{8,3,22} + y_{8,4,22} + y_{8,5,22} + y_{8,6,22} + y_{8,7,22} + y_{8,8,22} + y_{8,9,22})$$

$$F_{8,1,30} \leq U * (y_{8,1,30} + y_{8,2,30} + y_{8,3,30} + y_{8,4,30} + y_{8,5,30} + y_{8,6,30} + y_{8,7,30} + y_{8,8,30} + y_{8,9,30})$$

$$y_{8,8,30} + y_{8,9,30}$$

(A1.31)

### Eficiencias

$$\eta_{8,11} = (w_{iso8,1}^{-1}y_{8,1} + w_{iso8,2}^{-1}y_{8,2} + w_{iso8,3}^{-1}y_{8,3} + w_{iso8,4}^{-1}y_{8,4} + w_{iso8,5}^{-1}y_{8,5} + w_{iso8,6}^{-1}y_{8,6} + w_{iso8,7}^{-1}y_{8,7} + w_{iso8,8}^{-1}y_{8,8} + w_{iso8,9}^{-1}y_{8,9}) * w_8 \quad (A1.32)$$

$$\eta_{8,22} = (a_{8,B1}w_{8,B1} - b_{8,B1}y_{8,1,22} + a_{8,B2}w_{8,B2} - b_{8,B2}y_{8,2,22} + a_{8,B3}w_{8,B3} - b_{8,B3}y_{8,3,22} + a_{8,B4}w_{8,B4} - b_{8,B4}y_{8,4,22} + a_{8,B5}w_{8,B5} - b_{8,B5}y_{8,5,22} + a_{8,B6}w_{8,B6} - b_{8,B6}y_{8,6,22} + a_{8,B7}w_{8,B7} - b_{8,B7}y_{8,7,22} + a_{8,B8}w_{8,B8} - b_{8,B8}y_{8,8,22} + a_{8,B9}w_{8,B9} - b_{8,B9}y_{8,9,22})$$

$$a_{8,B4}w_{8,B4} - b_{8,B4}y_{8,4,22} + a_{8,B5}w_{8,B5} - b_{8,B5}y_{8,5,22} + a_{8,B6}w_{8,B6} - b_{8,B6}y_{8,6,22} + a_{8,B7}w_{8,B7} - b_{8,B7}y_{8,7,22} + a_{8,B8}w_{8,B8} - b_{8,B8}y_{8,8,22} + a_{8,B9}w_{8,B9} - b_{8,B9}y_{8,9,22})$$

(A1.33)

$$\begin{aligned} \eta_{8, 30} = & (a_{8, C1}w_{8, C1} - b_{8, C1}y_{8, 1, 30} + a_{8, C2}w_{8, C2} - b_{8, C2}y_{8, 2, 30} + a_{8, C3}w_{8, C3} - b_{8, C3}y_{8, 3, 30} + \\ & a_{8, C4}w_{8, C4} - b_{8, C4}y_{8, 4, 30} + a_{8, C5}w_{8, C5} - b_{8, C5}y_{8, 5, 30} + a_{8, C6}w_{8, C6} - b_{8, C6}y_{8, 6, 30} + \\ & a_{8, C7}w_{8, C7} - b_{8, C7}y_{8, 7, 30} + a_{8, C8}w_{8, C8} - b_{8, C8}y_{8, 8, 30} + a_{8, C9}w_{8, C9} - b_{8, C9}y_{8, 9, 30}) \end{aligned} \quad (A1.34)$$

Restricciones de eficiencias

$$\begin{aligned} w_{8, B1} & \leq M_8 * y_{8, 1, 22} \\ w_{8, B2} & \leq M_8 * y_{8, 2, 22} \\ w_{8, B3} & \leq M_8 * y_{8, 3, 22} \\ w_{8, B4} & \leq M_8 * y_{8, 4, 22} \\ w_{8, B5} & \leq M_8 * y_{8, 5, 22} \\ w_{8, B6} & \leq M_8 * y_{8, 6, 22} \\ w_{8, B7} & \leq M_8 * y_{8, 7, 22} \\ w_{8, B8} & \leq M_8 * y_{8, 8, 22} \\ w_{8, B9} & \leq M_8 * y_{8, 9, 22} \end{aligned}$$

(A1.35)

$$\begin{aligned} w_{8, C1} & \leq M_8 * y_{8, 1, 30} \\ w_{8, C2} & \leq M_8 * y_{8, 2, 30} \\ w_{8, C3} & \leq M_8 * y_{8, 3, 30} \\ w_{8, C4} & \leq M_8 * y_{8, 4, 30} \\ w_{8, C5} & \leq M_8 * y_{8, 5, 30} \\ w_{8, C6} & \leq M_8 * y_{8, 6, 30} \\ w_{8, C7} & \leq M_8 * y_{8, 7, 30} \\ w_{8, C8} & \leq M_8 * y_{8, 8, 30} \\ w_{8, C9} & \leq M_8 * y_{8, 9, 30} \end{aligned}$$

(A1.36)

La eficiencia ente las etapas de expansión debe ser igual entre si

$$\eta_{8, 11} * (y_{8, 1} + y_{8, 2} + y_{8, 3} + y_{8, 4} + y_{8, 5} + y_{8, 6} + y_{8, 7} + y_{8, 8} + y_{8, 9}) = \eta_{8, 22} * (y_{8, 1, 22} + y_{8, 2, 22} + y_{8, 3, 22} + y_{8, 4, 22} + y_{8, 5, 22} + y_{8, 6, 22} + y_{8, 7, 22} + y_{8, 8, 22} + y_{8, 9, 22})$$

(A1.37)

$$\eta_{8, 11} * (y_{8, 1} + y_{8, 2} + y_{8, 3} + y_{8, 4} + y_{8, 5} + y_{8, 6} + y_{8, 7} + y_{8, 8} + y_{8, 9}) = \eta_{8, 30} * (y_{8, 1, 30} + y_{8, 2, 30} + y_{8, 3, 30} + y_{8, 4, 30} + y_{8, 5, 30} + y_{8, 6, 30} + y_{8, 7, 30} + y_{8, 8, 30} + y_{8, 9, 30})$$

(A1.38)

*Unidad 11. Divisor de corriente*

Balance de materia

$$F_{8, 1, 11} + F_{9, 1, 11} + F_{10, 1, 11} - F_{11, 1, 5} = 0$$

(A1.39)

Balance de energía

$$F_{8,1,11}h_{8,1,11} + F_{9,1,11}h_{9,1,11} + F_{10,1,11}h_{10,1,11} - F_{11,1,5}h_{11,1,5} = 0 \quad (\text{A1.40})$$

Restricciones

$$F_{11,1,5} \leq Uy_{11,1} \quad (\text{A1.41})$$

*Unidad 12. Cabezal de presión media con tres posibles condiciones de operación*

Balance de materia

$$\begin{aligned} &F_{5,1,12} + F_{5,2,12} + F_{5,3,12} + F_{7,1,12} + F_{7,2,12} + F_{27,1,12} + F_{27,2,12} + F_{27,3,12} + \\ &F_{7,3,12} - F_{12,1,13} - F_{12,2,13} - F_{12,3,13} - F_{12,1,nt} - F_{12,2,nt} - F_{12,3,nt} - F_{12,1,24} - \\ &F_{12,2,24} - F_{12,3,24} - F_{12,1,33} - F_{12,2,33} - F_{12,3,33} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.42})$$

Balance de energía

$$\begin{aligned} &F_{5,1,12}h_{5,1,12} + F_{5,2,12}h_{5,2,12} + F_{5,3,12}h_{5,3,12} + F_{7,1,12}h_{7,1,12} + F_{7,2,12}h_{7,2,12} + \\ &F_{7,3,12}h_{7,3,12} + F_{27,1,12}h_{27,1,12} + F_{27,2,12}h_{27,2,12} + F_{27,3,12}h_{27,3,12} - F_{12,1,13}h_{12,1,13} - \\ &F_{12,2,13}h_{12,2,13} - F_{12,3,13}h_{12,3,13} - F_{12,1,n}h_{12,1,n} - F_{12,2,n}h_{12,2,n} - F_{12,3,n}h_{12,3,n} - \\ &F_{12,1,24}h_{12,1,24} - F_{12,2,24}h_{12,2,24} - F_{12,3,24}h_{12,3,24} - F_{12,1,33}h_{12,1,33} - \\ &F_{12,2,33}h_{12,2,33} - F_{12,3,33}h_{12,3,33} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.43})$$

Restricciones

$$y_{12,1} + y_{12,2} + y_{12,3} = 1 \quad (\text{A1.44})$$

$$\begin{aligned} &F_{12,1,14} + F_{12,1,15} + F_{12,1,16} + F_{12,1,17} + F_{12,1,18} + F_{12,1,19} + F_{12,1,20} + F_{12,1,21} + \\ &F_{12,1,13} + F_{12,1,24} + F_{12,1,33} \leq U y_{12,1} \end{aligned} \quad (\text{A1.45})$$

$$\begin{aligned} &F_{12,2,14} + F_{12,2,15} + F_{12,2,16} + F_{12,2,17} + F_{12,2,18} + F_{12,2,19} + F_{12,2,20} + F_{12,2,21} + \\ &F_{12,2,13} + F_{12,2,24} + F_{12,2,33} \leq U y_{12,2} \end{aligned} \quad (\text{A1.46})$$

$$\begin{aligned} &F_{12,3,14} + F_{12,3,15} + F_{12,3,16} + F_{12,3,17} + F_{12,3,18} + F_{12,3,19} + F_{12,3,20} + F_{12,3,21} + \\ &F_{12,3,13} + F_{12,3,24} + F_{12,3,33} \leq U y_{12,3} \end{aligned} \quad (\text{A1.47})$$

*Unidad 13. Reductor de presión media*

Balance de materia

$$F_{12, 1, 13} + F_{12, 2, 13} + F_{12, 3, 13} - F_{13, 1, 22} = 0 \quad (\text{A1.48})$$

Balance de energía

$$F_{12, 1, 13}h_{12, 1, 13} + F_{12, 2, 13}h_{12, 2, 13} + F_{12, 3, 13}h_{12, 3, 13} - F_{13, 1, 22}h_{13, 1, 22} = 0 \quad (\text{A1.49})$$

Restricciones

$$F_{13, 1, 22} \leq U y_{13, 1} \quad (\text{A1.49})$$

*Unidad 14-21. Turbinas de presión media con tres posibles condiciones de operación*

Balances de materia

$$F_{12, 1, 14} + F_{12, 2, 14} + F_{12, 3, 14} - F_{14, 1, 22A} - F_{14, 1, C} = 0 \quad (\text{A1.50})$$

$$F_{14, 1, 22A} + F_{23, 1, 14} - F_{14, 1, 22} = 0 \quad (\text{A1.51})$$

$$F_{14, 1, C} - F_{14, 1, 30} = 0 \quad (\text{A1.52})$$

Balances de energía

$$F_{12, 1, 14}h_{12, 1, 14} + F_{12, 2, 14}h_{12, 2, 14} + F_{12, 3, 14}h_{12, 3, 14} - F_{14, 1, 22A}h_{14, 1, C} - F_{14, 1, C}h_{14, 1, C} - w_{14}*(F_{14, 1, C} + F_{14, 1, 22A}) = 0$$

$$F_{14, 1, 22A}h_{14, 1, C} + F_{23, 1, 14}h_{23, 1, 14} - F_{14, 1, 22}h_{14, 1, 22} = 0 \quad (\text{A1.54})$$

$$F_{14, 1, C}h_{14, 1, C} - F_{14, 1, 30}h_{14, 1, 30} - (w_{14,A1} + w_{14,A2} + w_{14,A3})*(F_{14, 1, 30}) = 0 \quad (\text{A1.55})$$

Restricciones

$$y_{14, 1, 22} + y_{14, 2, 22} + y_{14, 3, 22} \leq 1 \quad (\text{A1.56})$$

$$y_{14, 1, 30} + y_{14, 2, 30} + y_{14, 3, 30} \leq 1 \quad (\text{A1.57})$$

$$F_{14, 1, 22} + F_{14, 1, C} \leq U(y_{14, 1, 22} + y_{14, 2, 22} + y_{14, 3, 22}) \quad (\text{A1.58})$$

$$F_{14, 1, 30} \leq U(y_{14, 1, 30} + y_{14, 2, 30} + y_{14, 3, 30}) \quad (\text{A1.59})$$

Eficiencias

$$\eta_{14, 22} = (w_{iso14, 1, 22}^{-1} y_{14, 1, 22} + w_{iso14, 2, 22}^{-1} y_{14, 2, 22} + w_{iso14, 3, 22}^{-1} y_{14, 3, 22}) * w_{14} \quad (A1.60)$$

$$\eta_{14, 30} = (a_{14,A1} w_{14,A1} - b_{14,A1} y_{14, 1, 30} + a_{14,A2} w_{14,A2} - b_{14,A2} y_{14, 2, 30} + a_{14,A3} w_{14,A3} - b_{14,A3} y_{14, 3, 30}) \quad (A1.61)$$

$$w_{14, A1} \leq M_{14} * y_{14, 1, 30}$$

$$w_{14, A2} \leq M_{14} * y_{14, 2, 30} \quad (A1.62)$$

$$w_{14, A3} \leq M_{14} * y_{14, 3, 30}$$

$$\eta_{14, 22} * (y_{14, 1} + y_{14, 2} + y_{14, 3}) = \eta_{14, 30} * (y_{14, 1, 30} + y_{14, 2, 30} + y_{14, 3, 30}) \quad (A1.63)$$

*Unidad 22. Cabezal de baja presión*

Balance de materia

$$F_{13, 1, 22} + F_{14, 1, 22} + F_{15, 1, 22} + F_{16, 1, 22} + F_{17, 1, 22} + F_{18, 1, 22} + F_{19, 1, 22} + F_{20, 1, 22} + F_{21, 1, 22} + F_{28, 1, 22} - F_{22, 1, 23} - F_{22, 1, 33} = 0 \quad (A1.64)$$

Balance de energía

$$F_{13, 1, 22} h_{13, 1, 22} + F_{14, 1, 22} h_{14, 1, 22} + F_{15, 1, 22} h_{15, 1, 22} + F_{16, 1, 22} h_{16, 1, 22} + F_{17, 1, 22} h_{17, 1, 22} + F_{18, 1, 22} h_{18, 1, 22} + F_{19, 1, 22} h_{19, 1, 22} + F_{20, 1, 22} h_{20, 1, 22} + F_{28, 1, 22} h_{28, 1, 22} + F_{21, 1, 22} h_{21, 1, 22} - F_{22, 1, 23} h_{22, 1, 23} - F_{22, 1, 33} h_{22, 1, 33} = 0 \quad (A1.65)$$

Restricciones

$$F_{22, 1, 23} + F_{22, 1, 33} \leq U y_{22, 1} \quad (A1.66)$$

*Unidad 23. Deaerador*

Balance de materia

$$F_{22, 1, 23} + F_{37, 1, 23} + F_{37, 2, 23} + F_{37, 3, 23} + F_{29, 1, 23} + F_{35, 1, 23} + F_{c, 1, 23} - F_{23, 1, 26} - F_{23, 1, 7} - F_{23, 1, 8} - F_{23, 1, 9} - F_{23, 1, 10} - F_{23, 1, 13} - F_{23, 1, 14} - F_{23, 1, 15} - F_{23, 1, 16} - F_{23, 1, 18} - F_{23, 1, 19} - F_{23, 1, 20} - F_{23, 1, 21} = 0 \quad (A1.67)$$

Balance de energía

$$\begin{aligned}
 &F_{22, 1, 23}h_{22, 1, 23} + F_{37, 1, 23}h_{37, 1, 23} + F_{37, 2, 23}h_{37, 2, 23} + F_{37, 3, 23}h_{37, 3, 23} + F_{29, 1, 23}h_{29, 1, 23} + \\
 &F_{35, 1, 23}h_{35, 1, 23} + F_{c, 1, 23}h_{c, 1, 23} - F_{23, 1, 26}h_{23, 1, 26} - F_{23, 1, 7}h_{23, 1, 7} - F_{23, 1, 8}h_{23, 1, 8} - \\
 &F_{23, 1, 9}h_{23, 1, 9} - F_{23, 1, 10}h_{23, 1, 10} - F_{23, 1, 13}h_{23, 1, 13} - F_{23, 1, 14}h_{23, 1, 14} - F_{23, 1, 15}h_{23, 1, 15} - \\
 &F_{23, 1, 16}h_{23, 1, 16} - F_{23, 1, 18}h_{23, 1, 18} - F_{23, 1, 19}h_{23, 1, 19} - F_{23, 1, 20}h_{23, 1, 20} - F_{23, 1, 21}h_{23, 1, 21} = 0
 \end{aligned}
 \tag{A1.68}$$

Restricciones

$$F_{23, 1, 26} \leq U_{y_{23, 1}} \tag{A1.69}$$

*Unidad 24. Intercambiador*

*Para receptor de calor*

Balance de materia

$$F_{25, 1, 24} + F_{25, 2, 24} + F_{25, 3, 24} - F_{24, 1, 5} - F_{24, 2, 5} - F_{24, 3, 5} = 0 \tag{A1.70}$$

Balance de energía

$$\begin{aligned}
 &F_{25, 1, 24}h_{25, 1, 24} + F_{25, 2, 24}h_{25, 2, 24} + F_{25, 3, 24}h_{25, 3, 24} - F_{24, 1, 5}h_{24, 1, 5} - F_{24, 2, 5}h_{24, 2, 5} - \\
 &F_{24, 3, 5}h_{24, 3, 5} + Q_{24} = 0
 \end{aligned}
 \tag{A1.71}$$

Restricciones

$$y_{24, 1} + y_{24, 2} + y_{24, 3} \leq 1 \tag{A1.72}$$

$$F_{24, 1, 5} \leq U_{y_{24, 1}}$$

$$F_{24, 2, 5} \leq U_{y_{24, 2}} \tag{A1.73}$$

$$F_{24, 3, 5} \leq U_{y_{24, 3}}$$

*Para donador de calor*

*Balance de materia*

$$F_{12, 1, 24} + F_{12, 2, 24} + F_{12, 3, 24} - F_{24, 1, 37} - F_{24, 2, 37} - F_{24, 3, 37} = 0 \tag{A1.74}$$

Balance de energía

$$F_{12, 1, 24}h_{12, 1, 24} + F_{12, 2, 24}h_{12, 2, 24} + F_{12, 3, 24}h_{12, 3, 24} - F_{24, 1, 37}h_{24, 1, 37} -$$

$$F_{24, 2, 37}h_{24, 2, 37} - F_{24, 3, 37}h_{24, 3, 37} - Q_{24} = 0 \quad (A1.75)$$

Restricciones

$$y_{24, 1B} + y_{24, 2B} + y_{24, 3B} \leq 1 \quad (A1.76)$$

$$F_{24, 1, 37} \leq Uy_{24, 1B}$$

$$F_{24, 2, 37} \leq Uy_{24, 2B} \quad (A1.77)$$

$$F_{24, 3, 37} \leq Uy_{24, 3B}$$

*Unidad 25. Bomba*

Balance de materia

$$F_{26, 1, 25} - F_{25, 1, 24} - F_{25, 2, 24} - F_{25, 3, 24} = 0 \quad (A1.78)$$

Balance de energía

$$F_{26, 1, 25}h_{26, 1, 25} - F_{25, 1, 24}h_{25, 1, 24} - F_{25, 2, 24}h_{25, 2, 24} - F_{25, 3, 24}h_{25, 3, 24} + W_{25} = 0 \quad (A1.79)$$

Restricciones

$$y_{25, 1} + y_{25, 2} + y_{25, 3} \leq 1 \quad (A1.80)$$

$$F_{25, 1, 24} \leq Uy_{25, 1}$$

$$F_{25, 2, 24} \leq Uy_{25, 2} \quad (A1.81)$$

$$F_{25, 3, 24} \leq Uy_{25, 3}$$

*Unidad 26. Divisor de flujo*

Balance de materia

$$F_{23, 1, 26} - F_{26, 1, 25} - F_{26, 1, 38} - F_{26, 1, 39} - F_{26, 1, 33} - F_{26, 1, 34} = 0 \quad (A1.82)$$

Balance de energía

$$F_{23,1,26}h_{23,1,26} - F_{26,1,25}h_{26,1,25} - F_{26,1,38}h_{26,1,38} - F_{26,1,39}h_{26,1,39} - F_{26,1,33}h_{26,1,33} - F_{26,1,34}h_{26,1,34} = 0 \quad (\text{A1.83})$$

Restricciones

$$F_{26,1,25} + F_{26,1,38} + F_{26,1,39} + F_{26,1,33} + F_{6,1,34} \leq U_{y26} \quad (\text{A1.84})$$

*Unidad 27. Caldera de calor de desecho a cabezal de presión media*

Balance de materia

$$F_{38,1,27} + F_{38,2,27} + F_{38,3,27} - F_{27,1,12} - F_{27,2,12} - F_{27,3,12} = 0 \quad (\text{A1.85})$$

Balance de energía

$$F_{38,1,27}h_{38,1,27} + F_{38,2,27}h_{38,2,27} + F_{38,3,27}h_{38,3,27} - F_{27,1,12}h_{27,1,12} - F_{27,2,12}h_{27,2,12} - F_{27,3,12}h_{27,3,12} - Q_{27} = 0 \quad (\text{A1.86})$$

Restricciones

$$y_{27,1} + y_{27,2} + y_{27,3} \leq 1 \quad (\text{A1.87})$$

$$F_{27,1,12} \leq U_{y_{27,1}}$$

$$F_{27,2,12} \leq U_{y_{27,2}} \quad (\text{A1.88})$$

$$F_{27,3,12} \leq U_{y_{27,3}}$$

Restricciones de existencia con cabezal de presión media:

$$y_{27,1} = y_{12,1}$$

$$y_{27,2} = y_{12,2} \quad (\text{A1.89})$$

$$y_{27,3} = y_{12,3}$$

*Unidad 28. Caldera de calor de desecho a cabezal de presión baja*

Balance de Materia

$$F_{39,1,28} - F_{28,1,22} = 0 \quad (\text{A1.90})$$

Balance de energía

$$F_{39, 1, 28}h_{39, 1, 28} - F_{28, 1, 22}h_{28, 1, 22} - Q_{28} = 0 \quad (\text{A1.91})$$

Restricciones

$$F_{28, 1, 22} \leq Uy_{28, 1} \quad (\text{A1.92})$$

*Unidad 29. Agua de reposición*

Balance de materia

$$F_{34, 1, 29} - F_{29, 1, 23} = 0 \quad (\text{A1.93})$$

Balance de energía

$$F_{34, 1, 29}h_{34, 1, 29} - F_{29, 1, 23}h_{29, 1, 23} = 0 \quad (\text{A1.94})$$

Restricciones

$$F_{29, 1, 23} \leq Uy_{29, 1} \quad (\text{A1.95})$$

*Unidad 30. Condensador al vacío*

Balance de materia

$$F_{8, 1, 30} + F_{9, 1, 30} + F_{10, 1, 30} + F_{14, 1, 30} + F_{15, 1, 30} + F_{16, 1, 30} + F_{17, 1, 30} + F_{18, 1, 30} + F_{19, 1, 30} + F_{20, 1, 30} + F_{21, 1, 30} + F_{36, 1, 30} - F_{30, 1, 34} - F_{30, 1, 35} = 0 \quad (\text{A1.96})$$

Balance de energía

$$F_{8, 1, 30}h_{8, 1, 30} + F_{9, 1, 30}h_{9, 1, 30} + F_{20, 1, 30}h_{20, 1, 30} + F_{14, 1, 30}h_{14, 1, 30} + F_{15, 1, 30}h_{15, 1, 30} + F_{16, 1, 30}h_{16, 1, 30} + F_{17, 1, 30}h_{17, 1, 30} + F_{18, 1, 30}h_{18, 1, 30} + F_{19, 1, 30}h_{19, 1, 30} + F_{20, 1, 30}h_{20, 1, 30} + F_{21, 1, 30}h_{21, 1, 30} - F_{30, 1, 35}h_{30, 1, 35} - Q_{30} = 0 \quad (\text{A1.97})$$

*Para receptor de calor*

Balance de materia

$$F_{36, 1, 30} - F_{30, 1, 34} = 0 \quad (\text{A1.98})$$

Balance de energía

$$F_{36, 1, 30}h_{36, 1, 30} - F_{30, 1, 34}h_{30, 1, 34} + Q_{30} = 0 \quad (\text{A1.99})$$

Restricciones

$$F_{30, 1, 35} + F_{30, 1, 34} \leq U_{y30} \quad (\text{A1.100})$$

*Unidad 35. Bomba del condensador al deaerador*

Balance de materia

$$F_{30, 1, 35} - F_{35, 1, 23} = 0 \quad (\text{A1.101})$$

Balance de energía

$$F_{30, 1, 35}h_{30, 1, 35} - F_{35, 1, 23}h_{35, 1, 23} + W_{35} = 0 \quad (\text{A1.102})$$

Restricciones

$$F_{35, 1, 23} \leq U_{y35, 1} \quad (\text{A1.103})$$

*Unidad 36. Bomba de agua de enfriamiento*

Balance de materia

$$F_{34, 1, 36} - F_{36, 1, 30} = 0 \quad (\text{A1.104})$$

Balance de energía

$$F_{34, 1, 36}h_{34, 1, 36} - F_{36, 1, 30}h_{36, 1, 30} + W_{36} = 0 \quad (\text{A1.105})$$

Restricciones

$$F_{36, 1, 30} \leq U_{y36} \quad (\text{A1.106})$$

*Unidad 37. Reductor de presión*

Balance de materia

$$F_{24, 1, 37} + F_{24, 2, 37} + F_{24, 3, 37} - F_{37, 1, 23} - F_{37, 2, 23} - F_{37, 3, 23} = 0 \quad (\text{A1.107})$$

Balance de energía

$$F_{24, 1, 37}h_{24, 1, 37} - F_{24, 2, 37}h_{24, 2, 37} - F_{24, 3, 37}h_{24, 3, 37} - F_{37, 1, 23}h_{37, 1, 23} -$$

$$F_{37, 2, 23}h_{37, 2, 23} - F_{37, 3, 23}h_{37, 3, 23} = 0 \quad (\text{A1.108})$$

Restricciones

$$F_{37, 1, 23} \leq Uy_{37, 1} \quad (A1.109)$$

*Unidad 38. Bomba a caldera de calor de desecho a presión media*

Balance de materia

$$F_{26, 1, 38} - F_{38, 1, 27} - F_{38, 2, 27} - F_{38, 3, 27} = 0 \quad (A1.110)$$

Balance de energía

$$F_{26, 1, 38}h_{26, 1, 38} - F_{38, 1, 27}h_{38, 1, 27} - F_{38, 2, 27}h_{38, 2, 27} - F_{38, 3, 27}h_{38, 3, 27} + W_{38} = 0 \quad (A1.111)$$

Restricciones

$$y_{38, 1} + y_{38, 2} + y_{38, 3} = 1 \quad (A1.112)$$

$$F_{38, 1, 27} \leq Uy_{38, 1}$$

$$F_{38, 2, 27} \leq Uy_{38, 2} \quad (A1.113)$$

$$F_{38, 3, 27} \leq Uy_{38, 3}$$

*Unidad 39. Bomba a caldera de calor de desecho a baja presión*

Balance de materia

$$F_{26, 1, 39} - F_{39, 1, 28} = 0 \quad (A1.114)$$

Balance de energía

$$F_{26, 1, 39}h_{26, 1, 39} - F_{39, 1, 28}h_{39, 1, 28} + W_{39} = 0 \quad (A1.115)$$

Restricciones

$$F_{39, 1, 28} \leq Uy_{39, 1} \quad (A1.116)$$

## Apéndice A2

### Aproximación de Costos de Capital

Para resolver el ejemplo ilustrativo los costos de capital se aproximan mediante funciones de cargo fijo. Los costos de capital se actualizaron al año 2003 empleando The chemical engineering plant cost index.

A continuación se presentan las curvas de aproximación para algunas unidades presentes en la superestructura.

Generador de vapor:

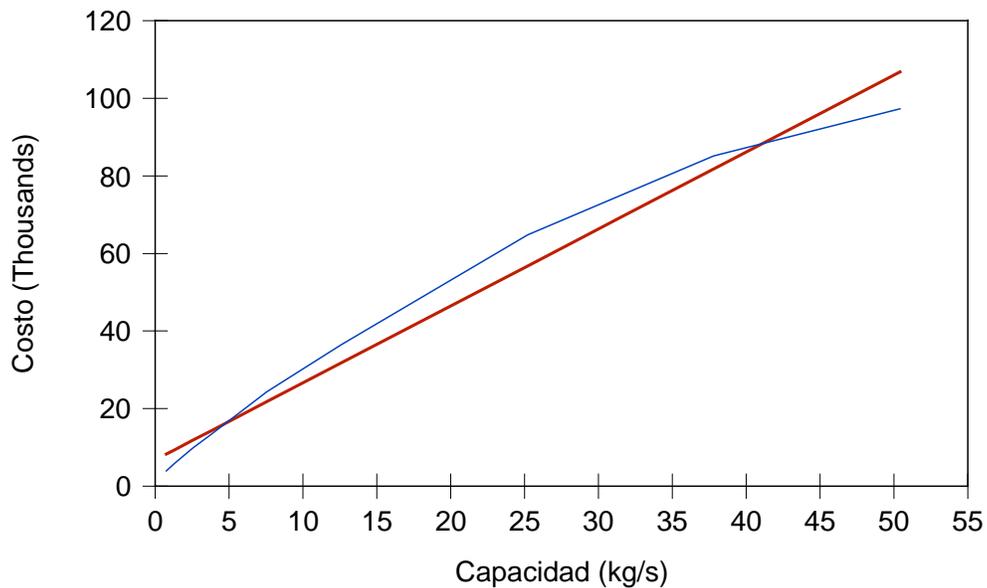


Figura A2.1. Aproximación de costos para generador de vapor

Deaerador:

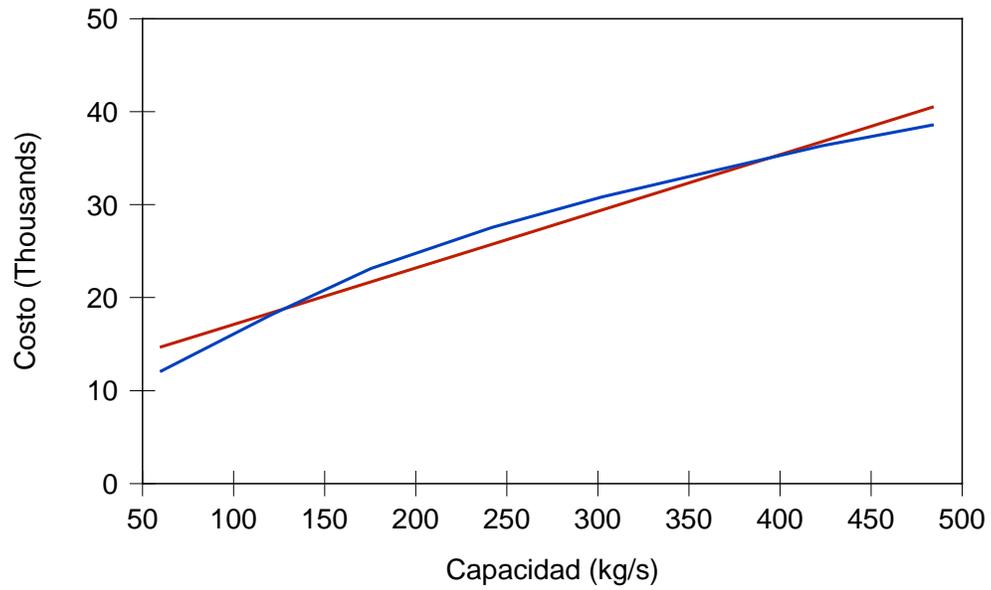


Figura A2.2. Aproximación de costos para deaerador

Caldera de calor de desecho:

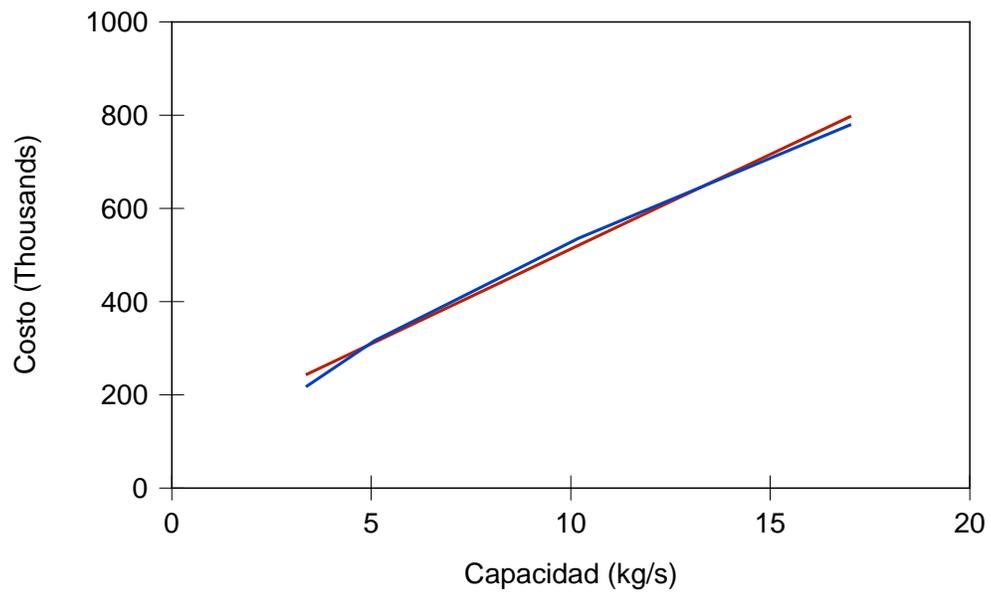


Figura A2.3. Aproximación de costos para caldera de calor de desecho

Bombas:

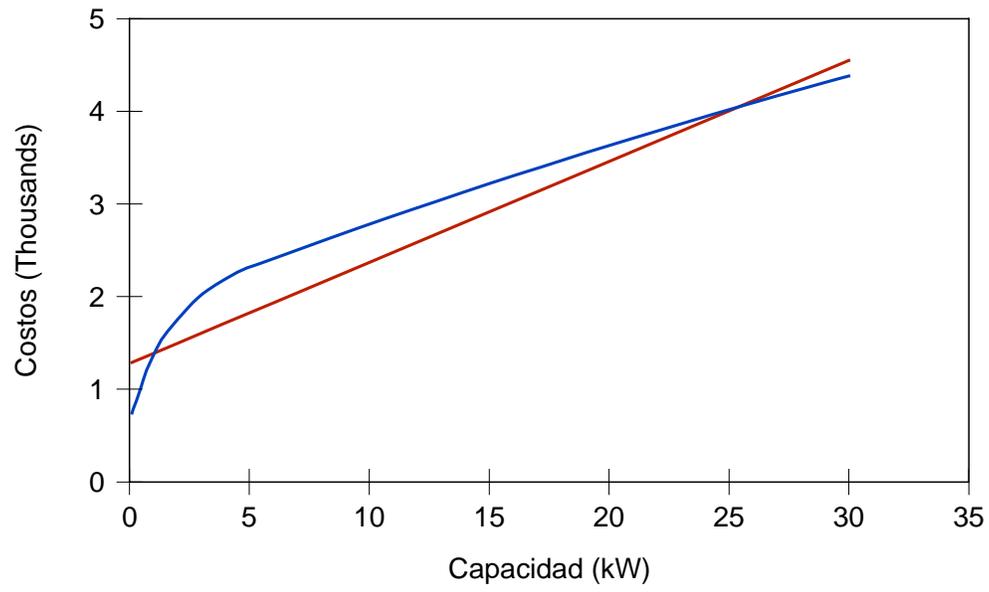


Figura A2.4. Aproximación de costos para bombas

## Apéndice A3

### Coefficientes de Eficiencia Isentrópica

Para desarrollar el modelo matemático se incorpora la eficiencia isentrópica como función del trabajo motor generado. Un análisis realizado a algunas plantas generadoras de electricidad a diferentes demandas de potencia, muestra que esta funcionalidad se puede aproximar linealmente. En la siguiente figura A3.1 se ilustra la curva que aproxima la función.

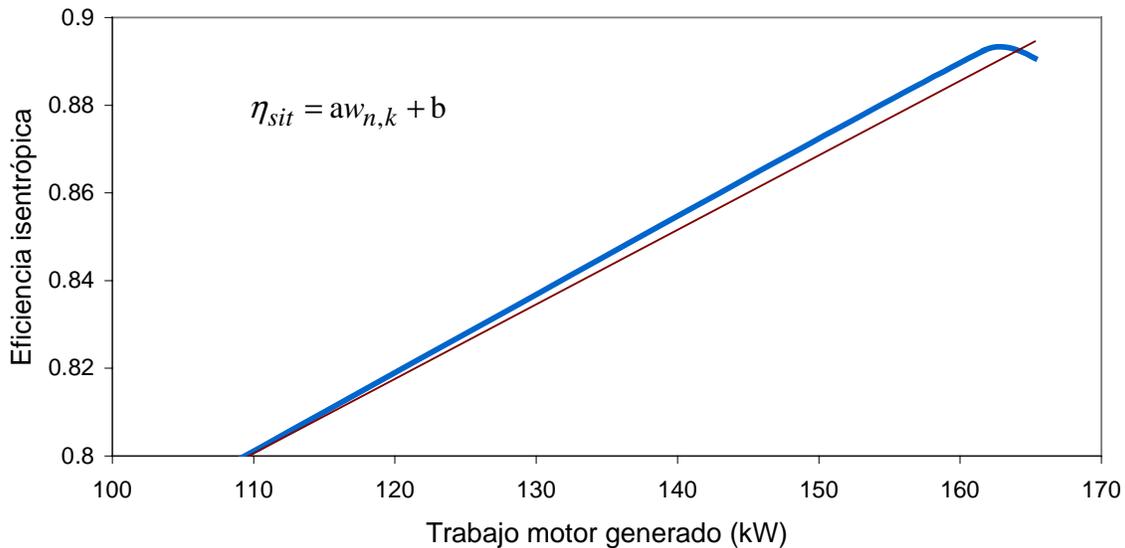


Figura A3.1. Eficiencia isentrópica en función del trabajo motor generado.

Los coeficiente a y b, dependen de las condiciones del vapor a la entrada de la turbina, de la presión a la salida de la turbina y de las características inherentes de la turbina.