



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE PROCESOS E HIDRAULICA

**VISUALIZACION Y DESCRIPCION
DE LA DINAMICA DE BURBUJAS**

TESIS QUE PRESENTA:

I. I. Q. JORGE FERNANDO BLANDIN ARRIETA

PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN INGENIERIA QUIMICA

ASESORES:

DR. ALBERTO SORIA LOPEZ
(AREA DE INGENIERIA QUIMICA, UAM-I)

DRA. ELIZABETH SALINAS BARRIOS
(AREA DE INGENIERIA EN RECURSOS ENERGETICOS, UAM-I)

MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE 1997

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores:

Dr. Alberto Soria López: Por haber dirigido con gran acierto este trabajo y haber contribuido enormemente en mi formación profesional, así como enseñarme que todo se logra con dedicación y, sobretodo, mucha paciencia.

Gracias.

Dra. Elizabeth Salinas Barrios: Por todo el apoyo y la confianza recibidos durante el desarrollo de este trabajo así como las brillantes ideas que permitieron concluir con éxito el trabajo más interesante que he realizado: Mi Tesis de Maestría.

Gracias.

A mi jurado:

Dr. Gustavo Fuentes Zurita
Dr. Eduardo Ramos Mora
Dr. Alberto Soria López
Dra. Elizabeth Salinas Barrios

Por todos sus interesantes comentarios aportados.

A mis amigos:

M. en C. Agustín Hayashi Martínez y M. en C. Gilberto Espinosa Parcdes, por todo el apoyo recibido y su contribución siempre interesante durante el desarrollo del presente trabajo, así como sus palabras de aliento que siempre me reanimaban.

El presente trabajo se desarrolló gracias al apoyo económico otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT).

DEDICATORIAS

A Dios:

Por haberme permitido concluir un ciclo más
de mi carrera como estudiante.

Gracias

A mi madre: Aida Arrieta Buckner
Luchadora incansable cuya fuerza es el motor de mi vida
que me impulsa a seguir luchando día con día
para poder alcanzar mis metas.

A mis hermanos:

Octavio de Jesús, Alejandro, María Eugenia,
Aida Cecilia y Claudia Patricia, les dedico con todo mi amor
el producto de tres años de esfuerzo continuo.

A mis queridas tías:
Lilia, María Antonieta e Hilda
Gracias mil por todo su amor y su apoyo.
Siempre las querré.

A todos mis primos y primas:
Los quiero a todos.

DEDICATORIAS

A mi prima Lilia:
Por haber encaminado mis pasos
hacia la investigación.

A mi tía Rosalba:
Gracias por todo tu amor y tu apoyo.
Te estaré eternamente agradecido.

A mi gran amigo y hermano de toda la vida: Helmut.
Gracias por estar conmigo en los buenos y en los malos momentos.

A mis amigos de siempre:
Ricardo, Víctor, Giovanna, Eduardo
Miguel, Camilo, Mónica, Doris, José y Mario.
Gracias por su amistad y apoyo incondicional.

A mi amigo y compañero de trabajo: Alberto Vázquez.
Gracias por compartir momentos tan agradables
y soportar mi malhumor cuando las cosas
no resultan como uno desea.

CONTENIDO

1	INTRODUCCION	5
1.1	OBJETIVOS	8
1.1.1	EXPERIMENTALES	8
1.1.2	TEORICOS	9
1.2	ORGANIZACION DEL TRABAJO	9
2	CARACTERISTICAS DE ASCENSO DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL	12
2.1	FORMAS DE LAS BURBUJAS	13
2.2	FACTORES DINAMICOS DEL FLUIDO QUE CONTROLAN LA FORMA DE LA BURBUJA	17
2.3	EFECTO DE LAS PROPIEDADES FISICAS DE LA FASE CONTINUA EN LA FORMA DE LA BURBUJA	18
2.3.1	TRANSICION EN LA FORMA DE LA BURBUJA	20
2.3.2	EFECTO DE LOS AGENTES TENSOACTIVOS EN LA DINAMICA DE LAS BURBUJAS	22
2.4	VELOCIDAD TERMINAL DE ASCENSO DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL	22
2.4.1	EFECTO DE LA ESTELA EN LA VELOCIDAD DE ASCENSO DE LA BURBUJA	23
2.4.2	CORRELACIONES GENERALES PARA LA VELOCIDAD TERMINAL DE ASCENSO DE LAS BURBUJAS	24
2.5	EL MOVIMIENTO DE UNA BURBUJA	39
2.5.1	TIPOS DE MOVIMIENTOS DE LAS BURBUJAS	40

I	DESCRIPCION TEORICA	44
3	MOVIMIENTO DE UNA BURBUJA ESFERICA EN UNA TRAYECTORIA HELICOIDAL	45
3.1	LINEAS DE CORRIENTE DE UN FLUIDO IDEAL EN MOVIMIENTO HELICOIDAL	46
3.1.1	CAMPO VECTORIAL DE LA VELOCIDAD	46
3.1.2	ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA CURVA HELICOIDAL	51
3.1.3	CURVATURA Y TORSION DE LA CURVA HELICOIDAL	53
3.2	ECUACION DE CONTINUIDAD Y ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS CARTESIANAS	58
3.3	GENERALIZACION DEL MOVIMIENTO HELICOIDAL COMO SUPERPOSICION DE DOS FLUJOS	63
3.3.1	SUPERPOSICION DE UN FLUJO DE HAGEN-POISEUILLE Y UN FLUJO TORSIONAL	64
3.4	MODELO DEL MOVIMIENTO HELICOIDAL DE UNA ESFERA SOLIDA	69
3.4.1	MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE	70
3.4.2	RELACION ENTRE EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME	74
3.4.3	MOVIMIENTO CIRCULAR DE UNA ESFERA SOLIDA	78
3.4.4	SUPERPOSICION DE UN FLUJO CIRCULAR UNIFORME Y UN FLUJO UNIFORME AXIAL	98
4	ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS HELICODALES	102
4.1	DESCRIPCION DEL SISTEMA COORDENADO HELICOIDAL	103
4.1.1	DEMOSTRACION DE LA NO ORTOGONALIDAD DEL SISTEMA COORDENADO HELICOIDAL	108
4.2	ECUACION DE CONTINUIDAD Y ECUACION DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS HELICODALES	111
4.2.1	DISCUSION Y LIMITACIONES	120

II	DESARROLLO EXPERIMENTAL	122
5	SISTEMA EXPERIMENTAL	123
5.1	ANTECEDENTES	123
5.1.1	MODELO DE KUMAR, RAMAKRISHNAN Y KULLOOR (1969)	124
5.1.2	MODELO DE GADDIS Y VOGELPOIL (1986)	128
5.2	DISEÑO DEL EQUIPO EXPERIMENTAL	135
5.2.1	PECERA	135
5.2.2	INYECTOR	136
5.3	DIGITALIZACION Y PROCESAMIENTO DE IMAGENES	141
5.3.1	CALIBRACION DE LAS VIDEOCAMARAS	141
5.3.2	CAPTURA Y PROCESAMIENTO DE LAS IMAGENES	142
5.4	MEDICION DE LA VELOCIDAD DE LAS BURBUJAS	144
5.4.1	DISEÑO DEL SISTEMA OPTOELECTRONICO	145
6	DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE RESULTADOS	147
6.1	MEDICION DE LA VELOCIDAD DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL	147
6.1.1	MEDICION DE DIAMETROS EQUIVALENTES PROMEDIO	148
6.1.2	MEDICION DE LAS VELOCIDADES PROMEDIO DE LAS BURBUJAS	152
6.1.3	CALCULO DE PARAMETROS ADIMENSIONALES	159
6.2	DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LA AMPLITUD Y FRECUENCIA DE LA OSCILACION DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL	166
7	CONCLUSIONES Y EXTENSIONES	179
A	LAS ECUACIONES DE CAMBIO EN COORDENADAS CURVILINEAS	182
A.1	La ecuación de continuidad en distintos sistemas coordenados	183
A.2	La ecuación de movimiento en distintos sistemas coordenados.	183
A.3	El tensor de esfuerzos expresado en distintos sistemas coordenados.	187

RESUMEN

Dada la importancia del estudio de la dinámica de las burbujas debido a su aplicación en diversos equipos usados en la industria química, en el presente trabajo se realiza un análisis teórico-experimental para una burbuja individual, ya que un análisis completamente teórico es virtualmente imposible, debido a la compleja naturaleza del fenómeno de la burbuja acoplado con el gran número de variables que influyen. Por otro lado, el estudio del comportamiento de burbujas individuales puede proporcionar ideas útiles en sistemas más complejos que involucren múltiples burbujas.

El desarrollo teórico comprende el planteamiento de un modelo teórico para una burbuja esférica que describe un movimiento helicoidal. Este modelo se construyó a partir de la superposición de un flujo circular uniforme generado por el movimiento circular de la esfera y un flujo uniforme axial. El movimiento circular de la esfera se generó a partir de la superposición de dos movimientos armónicos simples desfasados 90° . A partir de la solución analítica del modelo se determinaron el campo de la velocidad del fluido, el campo de presiones y las fuerzas que interactúan en el movimiento de la burbuja.

El desarrollo experimental comprende por una parte la medición de la velocidad de las burbujas y por el otro la reconstrucción en dos y tres dimensiones de la trayectoria de una burbuja de diámetro equivalente dado. Para la medición de las velocidades se diseñó un sistema optoelectrónico el cual consiste en un osciloscopio donde se registran las caídas de voltaje cuando la burbuja atraviesa dos rayos de luz generados por un apuntador láser.

A fin de determinar el tamaño de burbuja requerido para llevar a cabo la reconstrucción de su trayectoria en dos y tres dimensiones, se midieron los diámetros y velocidades de burbuja para calcular el número de Reynolds (Re_b) que permitiera identificar las características de forma y movimiento para cada uno de los tamaños generados, con base en la tabla presentada por Lindt (1970). Una vez identificado el tamaño de burbuja requerido se determinó la amplitud y la frecuencia de la oscilación de la burbuja mediante los datos obtenidos de la reconstrucción de su

movimiento en dos dimensiones. Al respecto cabe mencionar que la reconstrucción del movimiento de la burbuja se realizó a partir de la determinación de su centro de masa.

La reconstrucción en tres dimensiones se realizó a partir de la filmación de su movimiento en dos planos ortogonales utilizando dos videocámaras conectadas a una tarjeta de adquisición de imágenes, siendo la captura de cuadros en forma alternada.

Los resultados obtenidos han permitido identificar algunas de las fuerzas asociadas con el movimiento helicoidal de las burbujas y el establecimiento cuantitativo de algunos de los parámetros relacionados con su movimiento tales como la amplitud y la frecuencia de la oscilación.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

El movimiento de burbujas de gas en líquidos es un problema que ha llamado la atención de numerosos investigadores, principalmente por dos razones. En primer lugar, el estudio del movimiento de estas burbujas puede proporcionar información valiosa acerca de las propiedades de la interfase más simple: la interfase gas-líquido. En segundo lugar, los fenómenos de formación y movimiento de burbujas en líquidos es de considerable importancia en un amplio campo de industrias químicas y de procesamiento. Uno de los equipos comúnmente empleados son las columnas de burbujeo, en donde se observan las interacciones entre la fase dispersa (las burbujas) y la fase continua (el medio líquido). El tamaño, la velocidad de ascenso y la distribución del tamaño de las burbujas, así como los perfiles de velocidad del líquido y de las burbujas son parámetros importantes en el diseño de las columnas de burbujeo.

Las burbujas que ascienden en un líquido arrastran una determinada masa de líquido. Si se cumple la ley de conservación de la masa para el flujo incompresible, una cantidad igual de líquido, por lo tanto, debe fluir hacia abajo. De esta manera, en una columna de burbujeo se desarrolla una determinada circulación, en donde el líquido asciende en las porciones centrales, como resultado de las burbujas, mientras que en la vecindad de la pared fluye hacia abajo. Dependiendo de la tasa de flujo de gas, en las columnas de burbujeo se desarrollan diferentes regímenes o patrones de flujo cuya clasificación es de carácter subjetivo. La figura 1.1 muestra los cuatro regímenes o patrones de flujo que se presentan comúnmente en las columnas de burbujeo en función de la tasa de gas. Si la tasa de flujo de gas es baja y lo es también la viscosidad media del líquido, hay una distribución de burbujas de tamaño aproximadamente

igual con una velocidad de ascenso uniforme, la cual es llamada el régimen de flujo homogéneo o flujo burbuja homogéneo.

En el flujo tapón, un incremento adicional de la velocidad del gas ocasiona que las burbujas coalescan y una porción del gasto de gas es transportada a través de la columna en forma de burbujas largas --llamadas burbujas de Taylor-- que ascienden rápidamente. Estas burbujas ocupan la mayor parte de la sección transversal del tubo y son de longitud variable; desde uno a cientos de diámetros del tubo. Entre las burbujas de Taylor y la pared de la columna fluye una delgada película del líquido. Las sucesivas burbujas de Taylor son separadas en la dirección axial por paquetes de líquido que llevan pequeñas burbujas de gas.

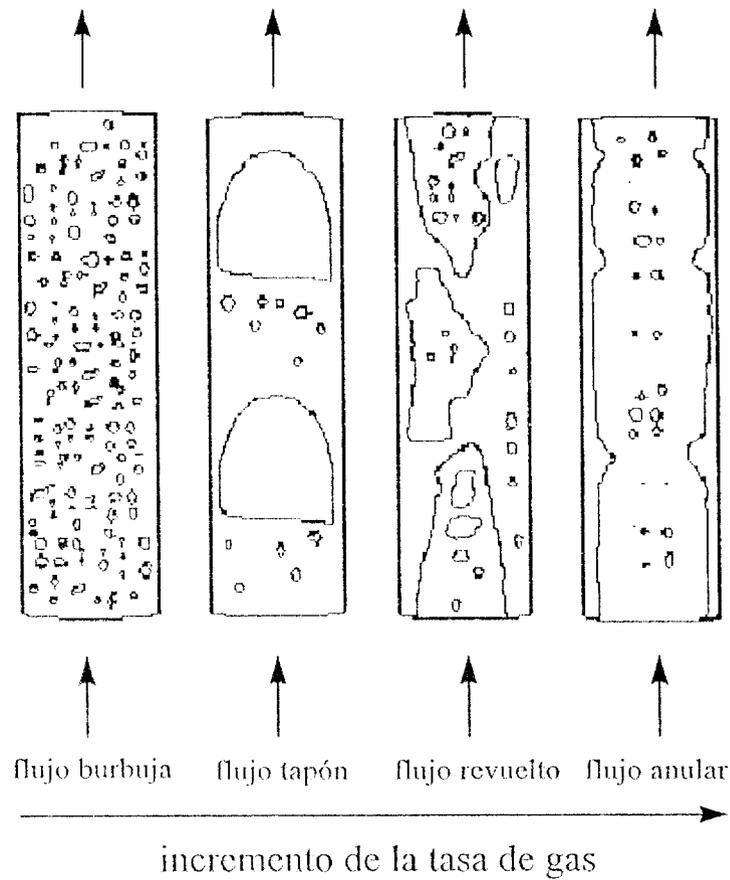


Figura 1.1: Patrones de flujo en columnas de burbujeo.

El flujo revuelto es un patrón mucho más caótico y desordenado que el flujo tapón. En él, las grandes burbujas adquieren formas distorsionadas. La continuidad en los paquetes de líquido entre sucesivas burbujas de Taylor se destruye continuamente por una alta concentración del

gas en los paquetes de líquido. Mientras esto sucede y los paquetes de líquido caen, este líquido se acumula, forma un “puente” entre las grandes burbujas y es de nuevo destruido por el gas.

El flujo anular se caracteriza por la continuidad en la dirección axial de la fase gas en el núcleo. El líquido fluye hacia arriba en una delgada película y como gotas dispersas en el gas. A excepción de las tasas de flujo altas, el líquido también fluye en forma de ondas sobre la película adyacente al tubo.

El modelamiento de estos sistemas se determina a partir de las ecuaciones que gobiernan un proceso real, las cuales deben ser cerradas, es decir, el número de incógnitas debe coincidir con el número de ecuaciones. A partir del análisis de procesos individuales se pueden obtener los mecanismos básicos que gobiernan el movimiento de ascenso de las burbujas en una columna de burbujeo de manera simplificada, es decir, despreciando algunos efectos que pueden ser claves o muy importantes, como las interacciones entre las burbujas. Esto permite obtener ecuaciones independientes que permitan resolver el sistema de ecuaciones generales, y esta es la pieza clave en la investigación que se desarrolla en el presente trabajo, ya que el estudio de una burbuja aislada permitirá, en última instancia, obtener dichas ecuaciones independientes.

Debido al movimiento desordenado que se presenta en las columnas de burbujeo cuando las tasas de flujo son altas, la aplicación del estudio de la dinámica de una burbuja individual es más apropiado al patrón de flujo burbuja. En este régimen de flujo puede suponerse que las fuerzas de interacción entre las burbujas son despreciables, es decir, se puede suponer que la perturbación del flujo de líquido debido a una burbuja no afecta a las otras y la perturbación debida a las otras no afecta a la burbuja individual. Las fuerzas de interacción son debidas a la perturbación en el campo de flujo generada por el movimiento de la burbuja. Entonces, para un flujo burbuja, pueden hacerse tres suposiciones:

1. Las burbujas son de tamaño aproximadamente constante, es decir, que una forma dada de burbuja se mantiene en todo el proceso.
2. Las fuerzas de interacción entre las burbujas son despreciables.
3. El patrón o régimen de flujo burbuja es constante.

El límite de aplicabilidad del estudio de una burbuja aislada es función de la fracción de vacíos; el flujo burbuja existe para fracción de vacío inferior a 0.3. Más allá de este orden, se

manifiestan otros procesos en los cuales ya no pueden considerarse las suposiciones anteriores, pero el rango de aplicabilidad del presente estudio incluye situaciones de interés industrial, ya que muchos reactores químicos y biológicos operan en este rango de fracción de vacío.

Debido a la importancia de aplicación de este tipo de sistemas, es necesario desarrollar modelos fundamentales para entender el comportamiento de las burbujas en diversos regímenes de flujo así como determinar las fuerzas que originan movimientos complejos como el helicoidal. Las fuerzas que generan estos movimientos helicoidales no se han estudiado ampliamente. Sin embargo, su conocimiento puede dar las bases para describir posteriormente los movimientos del gas en las columnas de burbujeo, mejorando el modelamiento y por lo tanto, los procedimientos de diseño. Por estos motivos, y dada la escasa literatura para explicar el movimiento de estas burbujas (Sparenberg, 1984; *ibid*, 1989), es importante proponer el estudio de la cinemática y la dinámica de burbujas grandes, ascendiendo con trayectorias helicoidales. El resultado deseado de este estudio es adquirir información sobre las fuerzas y los mecanismos que gobiernan el ascenso de estas burbujas.

1.1 OBJETIVOS

Una vez que se ha definido la importancia del estudio de la dinámica de una burbuja individual, es posible citar el objetivo general de la investigación que se va a llevar a cabo:

- Reconstruir la trayectoria tridimensional del centro de masa de una burbuja de aire en un medio acuoso y plantear un modelo teórico del movimiento helicoidal de una burbuja supuesta esférica.

Del objetivo general se desprenden los objetivos particulares los cuales se clasifican en:

1.1.1 EXPERIMENTALES

De acuerdo con las observaciones que se lleven a cabo se espera:

- I. Describir la trayectoria ascendente de una burbuja de aire en agua.
- II. Reportar este movimiento en coordenadas cartesianas.

En la parte correspondiente a la cinemática, se espera describir:

1. Tamaño y forma de las burbujas.
2. Las características de las burbujas que presentan el movimiento helicoidal.
3. La amplitud y la frecuencia del ciclo helicoidal.

1.1.2 TEORICOS

Los objetivos teóricos se pueden establecer siguiendo el orden consecutivo de su realización:

- I. Elaborar un modelo cinemático teórico para el movimiento helicoidal de una burbuja esférica.
- II. Resolver analíticamente el modelo propuesto.
- III. Determinar el campo de flujo alrededor de la burbuja.
- IV. Establecer las fuerzas que gobiernan el movimiento helicoidal de una burbuja supuesta esférica.

1.2 ORGANIZACION DEL TRABAJO

Una vez establecidos los objetivos de la investigación y antes de entrar de lleno al desarrollo experimental y teórico, es conveniente adelantar un bosquejo del contenido de este trabajo. El capítulo dos describe las características de forma, velocidad y movimiento de las burbujas de aire que ascienden a través de un medio líquido. Las fuerzas que intervienen para que éstas se deformen y asciendan describiendo diferentes trayectorias en función de su tamaño y de las propiedades del líquido.

En el capítulo tres se describe el sistema experimental así como los implementos que lo constituyen. Previo a esto, se da una introducción sobre las diferentes fuerzas que interactúan en el proceso de formación de la burbuja, las cuales se clasifican en superficiales y volumétricas. Aún después de que la burbuja se ha soltado del inyector, algunas fuerzas siguen ejerciendo su influencia, tal como la fuerza de flotación y la fuerza de arrastre.

En este capítulo también se describe el proceso de digitalizar y procesar cada una de las imágenes obtenidas por medio de dos cámaras de video y la metodología desarrollada para determinar el centro de masa del objeto de interés en una imagen bidimensional, en nuestro caso, el centro de masa de la burbuja. Además, se describe la forma de reconstruir la trayectoria que sigue la burbuja de un diámetro equivalente dado durante su ascenso en la pecera a través de agua.

En el capítulo cuatro se plantea un modelo teórico para una burbuja esférica que describe una trayectoria helicoidal, a partir de la superposición de dos flujos. El primero considera el movimiento rotatorio de la burbuja en un plano, a través de un líquido estático a fin de poder describir el campo de flujo del fluido y posteriormente para simular el movimiento helicoidal de la burbuja. Se le superpone un flujo uniforme axial. Las ecuaciones desarrolladas para el primer caso se resuelven analíticamente y se encuentra la fuerza de arrastre considerando flujo reptante. Se concluye con la determinación de las fuerzas que caracterizan este régimen de flujo alrededor de un objeto esférico.

A partir de las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan el movimiento de los fluidos, se puede plantear un modelo para describir el movimiento del fluido generado por el paso de la esfera cuyo centro de masa describe una trayectoria helicoidal. Por eso, en el capítulo cinco se desarrollan la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier–Stokes en coordenadas helicoidales, acorde con la geometría generada por el movimiento de la esfera. La solución de dichas ecuaciones aplicadas al problema particular requiere el empleo de métodos numéricos, lo cual implica el ocultamiento de información elemental que contribuye al entendimiento físico. Por eso, es importante resaltar lo indispensable de comprender el problema en cuestión sentando las bases que permitan su comprensión desde sus inicios.

El análisis de resultados y las conclusiones se describen en los capítulos seis y siete respectivamente. Cabe mencionar que no se pretende validar el modelo teórico con los resultados experimentales, tal como ocurre en gran medida de los estudios llevados a cabo por muchos investigadores. En el modelo teórico se supone que la burbuja es esférica, siendo su diámetro menor de 0.02 cm y su superficie rígida. Las burbujas de aire generadas en la parte experimental, se deforman durante su ascenso, adquiriendo formas oblato–esferoidales. El número

de Reynolds de la burbuja (Re_b)¹ oscila entre 1000 y 1200, lo cual es contrario al caso de la burbuja esférica que se mueve a números de Reynolds menores que uno ($Re_b < 0.1$).

Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, no se ha estudiado ampliamente a la burbuja que describe una trayectoria helicoidal durante su ascenso, y es por ello que antes de iniciar un análisis complejo de su movimiento, es conveniente hacer un análisis relativamente sencillo que permita comprender con mayor facilidad el fenómeno de ascenso de estas burbujas.

¹El número de Reynolds de la burbuja está definido por

$$Re_b = \frac{\rho_l d_e U_\infty}{\mu_l} = \frac{\text{efectos inerciales}}{\text{efectos viscosos}} \quad (1.1)$$

CAPITULO 2

CARACTERISTICAS DE ASCENSO DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL

La formación y el movimiento de burbujas en líquidos es de considerable importancia industrial para un amplio rango de industrias químicas y de procesamiento. Las columnas de burbujeo son ejemplos típicos en donde se observan las interacciones entre las burbujas y una fase líquida, con mecanismos complejos que requieren la definición de conceptos muy específicos, tales como la retención de gas y el retromezclado. Los tanques agitados utilizados para llevar a cabo reacciones gas-líquido, el tratamiento de aguas residuales, la producción de espuma, el comportamiento de burbujas de gas en la sangre, etc., también son ejemplos típicos. Además, la transferencia de masa en la interfase entre una burbuja de gas y una fase continua desempeña un papel central en la determinación del funcionamiento de los reactores químicos. La coalescencia y la ruptura de burbujas es un fenómeno asociado encontrado inevitablemente en sistemas que operan con burbujas múltiples. La coalescencia en biorreactores con aspersores de aire es de interés particular. Dependiendo de la aplicación contemplada, la coalescencia puede ser deseable (e.g. en fomentar la separación) o perjudicial para un proceso (e.g. reacciones gas-líquido donde se requiere un área interfacial grande). Uno esperaría intuitivamente que el proceso de coalescencia sea influenciado por un número grande de variables físicas y de proceso

incluyendo formas y tamaño de las burbujas, propiedades físicas de las dos fases (densidad, viscosidad, tensión superficial, etc.), la presencia de agentes tensoactivos y los modelos de flujo predominantes, e.g. campos de flujo uniforme, cortante o elongacional, etc. Además, enjambres de burbujas de gas son encontradas con frecuencia en aplicaciones en la vida real. Un análisis completamente teórico es virtualmente imposible, debido a la compleja naturaleza del fenómeno de la burbuja acoplado con el gran número de variables que influyen. Por otro lado, el estudio del comportamiento de burbujas individuales puede proporcionar ideas útiles en sistemas más complejos que involucren burbujas múltiples.

2.1 FORMAS DE LAS BURBUJAS

La interacción entre una burbuja de gas ascendente y el líquido circundante determina la forma de la burbuja y la extensión de la perturbación en el campo de flujo circundante. Las deformaciones que sufre una burbuja cuando asciende en un líquido, son producidas por las fuerzas del líquido alrededor de ella y por la presión hidrostática debida a la gravedad.

De acuerdo con la forma que adoptan durante su ascenso, las burbujas pequeñas en movimiento son generalmente clasificadas como esféricas, oblato elipsoidal y casquete esférico; la forma real depende de la magnitud relativa de cada una de las fuerzas relevantes que actúan sobre la burbuja tal como la tensión superficial y las fuerzas inerciales. La forma elipsoidal, o más generalmente, forma esferoidal con un eje de simetría vertical, representa genéricamente todas las formas que adopta la burbuja a partir de la forma esférica, incluidas en el rango de tamaño intermedio. Oblato se refiere a la forma verticalmente aplanada (o con el eje menor en la dirección del flujo), mientras que prolato se refiere a la forma verticalmente extendida. La forma de casquete esférico corresponde a las burbujas cuya superficie superior es semiesférica, siendo su base plana. En general, en líquidos newtonianos de extensión infinita no se han observado las burbujas de forma prolato esferoidales, excepto sólo en algunos momentos durante ciertos tipos de oscilación de forma (Fan y Tsuchiya, 1990).

La figura 2.1 representa algunas de las diversas formas que pueden adoptar las burbujas dependiendo de su tamaño, donde se observan las diferentes categorías para cada régimen de forma.

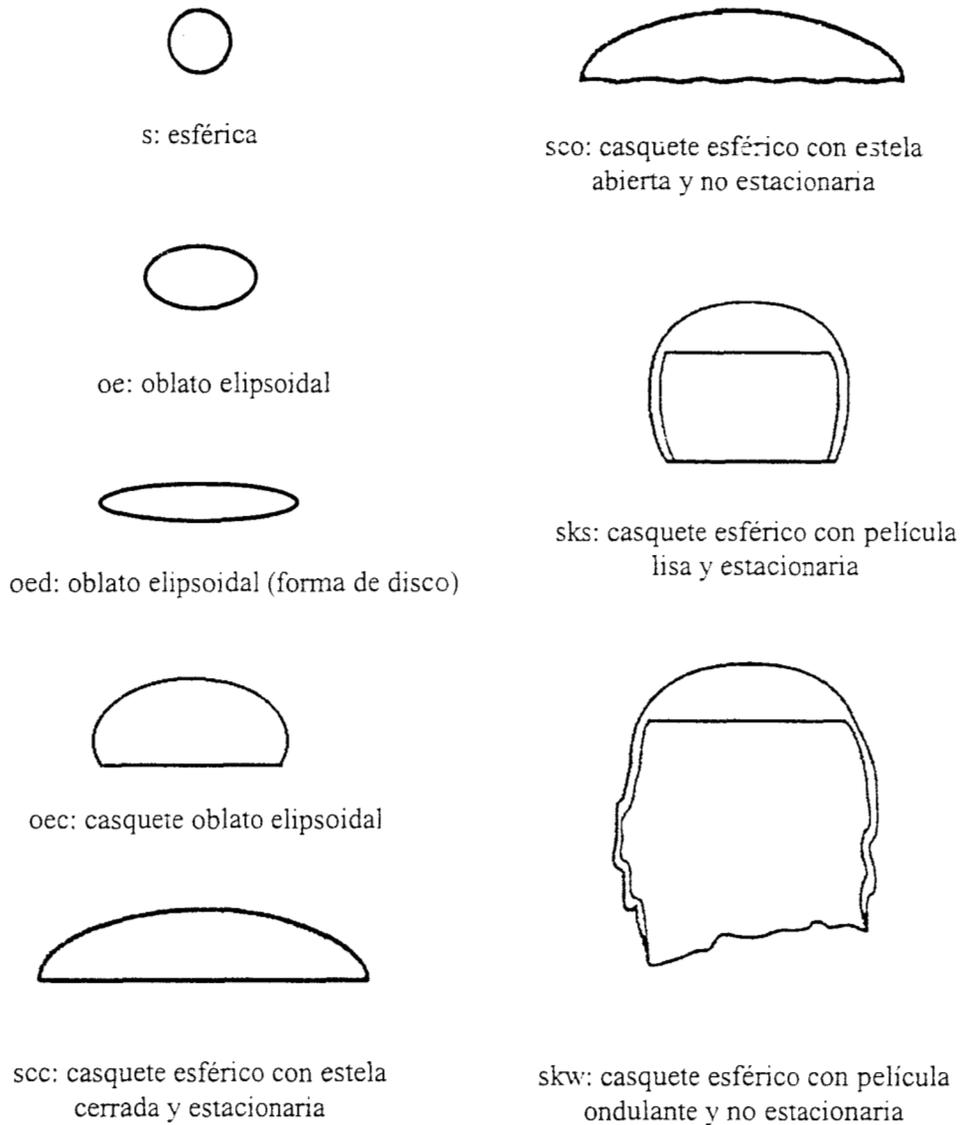


Figura 2.1: Diversas formas que adoptan las burbujas en función de su tamaño.

Para ser más específicos, en líquidos de baja viscosidad como el agua, la forma de las burbujas de tamaño intermedio es muy irregular y oscila inestablemente en una región de transición entre la forma elipsoidal y la forma de casquete esférico. Se ha observado experimentalmente (Bhaga y Weber, 1981) en algunos líquidos muy viscosos bajo condiciones estáticas, la formación de películas (skirts) alrededor de la burbuja, cuyo espesor es alrededor de $100 \mu m$. Esta película de gas es anular y delgada y se forma detrás del borde de burbujas grandes de casquete esférico (ver figura 2.1).

En general, la forma de la burbuja no puede predecirse por completo a menos que se tomen en cuenta todas las variables físicas involucradas en el fenómeno de ascenso de la misma. Haberman y Morton (1953) sugirieron un análisis dimensional basado en ocho variables: la aceleración debida a la gravedad (g), la velocidad terminal de ascenso de la burbuja (U_∞), el diámetro equivalente de la burbuja (d_e) definido como el diámetro que tendría la burbuja si fuera esférica, la densidad (ρ_ℓ) y viscosidad (μ_ℓ) del medio circundante, la tensión interfacial (σ), y la densidad (ρ_g) y viscosidad (μ_g) del gas en el interior de la burbuja. A partir de estas variables se pueden obtener cinco grupos adimensionales independientes. Si las dos últimas variables, ρ_g y μ_g , se consideran despreciables comparadas con ρ_ℓ y μ_ℓ , respectivamente, pueden eliminarse dos grupos. Bajo circunstancias especiales, puede ser posible otra simplificación. Por ejemplo, para líquidos muy viscosos o altos números de Morton (Mo)¹, la forma de la burbuja es función únicamente del número de Reynolds de la burbuja (Re_b , ec. 1.1), al igual que para líquidos a bajos números de Morton en los que predominan los efectos de la tensión superficial (Bhaga y Weber, 1981). El Morton (Mo) es un número adimensional que depende únicamente de las propiedades físicas del fluido, sin importar el tamaño o la velocidad de la burbuja.

Cuando el tamaño de la burbuja es pequeño (por ejemplo, $d_e < 0.01$ cm en agua), predominan las fuerzas de tensión superficial y la forma de la burbuja es aproximadamente esférica. Debido a que el movimiento de esta clase de burbujas corresponde a bajos números de Reynolds, el flujo alrededor de su superficie es controlado por fuerzas viscosas. Esto significa que el movimiento del líquido es viscoso en la superficie de la burbuja, siempre y cuando el $Re_b < 0.1$ a fin de poder describir el flujo por la aproximación de flujo reptante. Por lo tanto, para burbujas esféricas pequeñas a muy bajos números de Reynolds, el flujo no se separa de su superficie y no existe la formación de la estela. En la figura 2.2 se muestra la idealización de este tipo de flujo.

Las características de la forma y el movimiento de las burbujas de tamaño intermedio son muy complejas debido a los efectos de la tensión superficial y la inercia del medio que fluye alrededor de éstas. Además, en la dinámica de la burbuja influyen en gran medida la viscosidad

¹El número de Morton está definido por

$$Mo = \frac{g\mu_\ell^4}{\rho\sigma^3} = \frac{\text{efectos viscosos}}{\text{efectos de tensión superficial}} \quad (2.1)$$

del líquido y la presencia de contaminantes tensoactivos. Por ejemplo, las burbujas elipsoidales presentan características de movimiento secundario conforme ascienden, tal como trayectorias en zig-zag o en espiral y dilataciones de forma y oscilaciones.

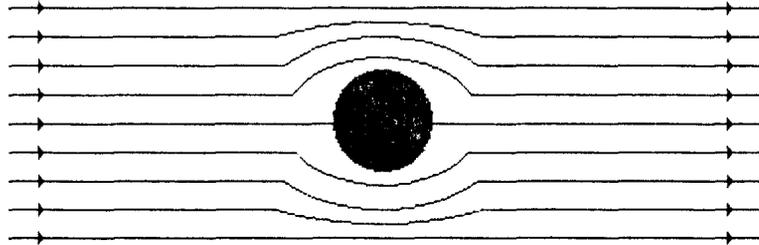


Figura 2.2: A números de Reynolds bajos ($Re_b < 0.1$), el fluido reptante en la superficie de la burbuja, de tal forma que el flujo se denomina reptante y se caracteriza por la ausencia de vórtices aguas abajo de la burbuja.

En general, para burbujas grandes cuyo diámetro equivalente sea mayor de 1.8 cm, predominan los efectos inerciales del flujo alrededor de éstas y los efectos de la tensión superficial, la viscosidad y la pureza del medio líquido son despreciables. Las burbujas grandes tienen aproximadamente una forma de casquete esférico – con la condición de que $\mu_\ell < 50$ mPa.s – y una base relativamente plana o algunas veces dentada. Las burbujas de este tipo describen una trayectoria rectilínea presentando balanceo y/o oscilaciones de la base.

La diferencia que existe en el movimiento de cada tipo de burbuja depende inherentemente de las diferencias en los campos de flujo inmediatamente detrás de la burbuja, o de su estela. Para burbujas pequeñas, el flujo a su alrededor puede ser descrito por la aproximación de flujo reptante o ley de Stokes, expresada por:

$$U_\infty = \frac{1}{18} \frac{g \rho_\ell d_e^2}{\mu_\ell} \quad (2.2)$$

siendo el tamaño de la estela despreciable en este régimen.

Si la circulación interna es importante, como en los líquidos puros, la teoría de Hadamard–Rybczynsky proporciona una mejor predicción (Landau y Lifshitz, 1979). La fórmula de Hadamard–Rybczynsky, que predice la velocidad de caída de una gota por acción de la gravedad en un líquido inmisible, está expresada por:

$$U_{\infty} = \frac{2(\rho' - \rho_{\ell})ga^2}{3\mu_{\ell}} \frac{\mu_{\ell} + \mu'}{2\mu_{\ell} + 3\mu'} \quad (2.3)$$

donde μ_{ℓ} y ρ_{ℓ} son la viscosidad y densidad del medio líquido y μ' y ρ' son la viscosidad y densidad de la gota, respectivamente; g es la fuerza debida a la aceleración de la gravedad y a es el radio de la gota.

El movimiento secundario asociado con las burbujas de tamaño intermedio probablemente resulta de la acumulación periódica de vórtices en la estela de la burbuja. La burbuja comienza a oscilar debido a la presencia de los vórtices en la estela (Edge y Grant, 1971). La figura 2.3 muestra la presencia de vórtices aguas abajo de la burbuja, ocasionando que el movimiento de ésta ya no sea rectilíneo.

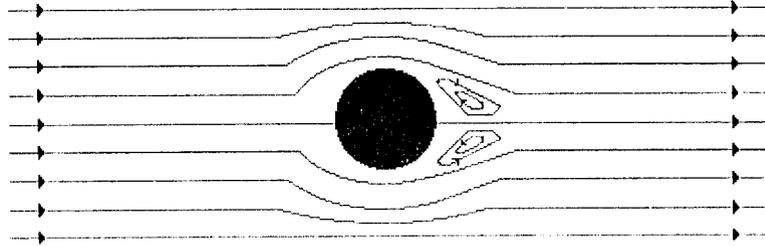


Figura 2.3: La formación de vórtices ocasiona el zigzag de la burbuja conocido como movimiento secundario.

2.2 FACTORES DINAMICOS DEL FLUIDO QUE CONTROLAN LA FORMA DE LA BURBUJA

Aparte de las propiedades físicas del medio circundante y las propiedades de la interfase gas líquido, la forma de la burbuja es controlada por las fuerzas en su interfase. El número de Reynolds (Re_b , ec. 1.1) es el parámetro más adecuado para caracterizar la intensidad del flujo. Algunos de los factores dinámicos del fluido que controlan o al menos influyen en la forma de las burbujas en movimiento se discuten con referencia a este número.

PRESIONES DE FLUJO INDUCIDO

Una burbuja en movimiento está sujeta no solamente a la presión ambiente hidrostática, sino también a la presión dinámica que actúa sobre su superficie determinada por el campo de flujo particular a su alrededor. El flujo local es detenido en el punto de estancamiento delantero y así, en base al principio de Bernoulli, la presión dinámica íntegra del flujo aparece como un empuje hacia adentro contra la superficie de la burbuja. A los lados, la presencia de la burbuja reduce el espacio disponible para el movimiento de líquido, y éste, debido a su naturaleza incompresible, debe acelerarse para mantener el flujo; por lo tanto, la presión del flujo decrece a lo largo de la superficie de la burbuja desde la parte frontal hacia sus extremos. Ya que la presión en el interior de la burbuja se mantiene uniforme debido a que la densidad y viscosidad del gas son despreciables, en ambos extremos de la burbuja la superficie debe moverse hacia afuera e incrementar la curvatura local. Aguas abajo de la burbuja, la presión del flujo no será restablecida al valor ambiente debido a la presencia de la estela.

En resumen, una burbuja moviéndose a través de un líquido experimenta una fuerza de compresión en la parte frontal y una fuerza dilatante lateralmente. La extensión de la diferencia de presión se incrementa conforme la velocidad relativa entre la burbuja y el líquido circundante o el número de Reynolds (Re_b) se incrementan. Esta presión o el efecto de la fuerza explica que la burbuja se aplana en la dirección de su movimiento y su tamaño se incrementa. El incremento en el tamaño de la burbuja produce un incremento general en la velocidad libre de ascenso de la burbuja.

2.3 EFECTO DE LAS PROPIEDADES FISICAS DE LA FASE CONTINUA EN LA FORMA DE LA BURBUJA

Aunque es posible dar una explicación cualitativa acerca del aplastamiento que sufre la burbuja al incrementarse su tamaño, es muy difícil dar predicciones cuantitativas acerca de este fenómeno, y más aún cuando están involucradas las propiedades físicas del medio circundante. Por lo que el conocimiento del estado del arte acerca de las diversas formas que adoptan las burbujas al ascender en diversos líquidos es estrictamente establecido a partir de las observaciones experimentales.

Bhaga y Weber (1981) presentaron un diagrama, mostrado en la figura 2.4, el cual muestra gráficamente las diversas formas que pueden adoptar las burbujas en función de tres números adimensionales: el número de Reynolds (Re_b , ec. 1.1), el número de Eötvös (Eo)² y el número de Morton (Mo , ec. 2.1).

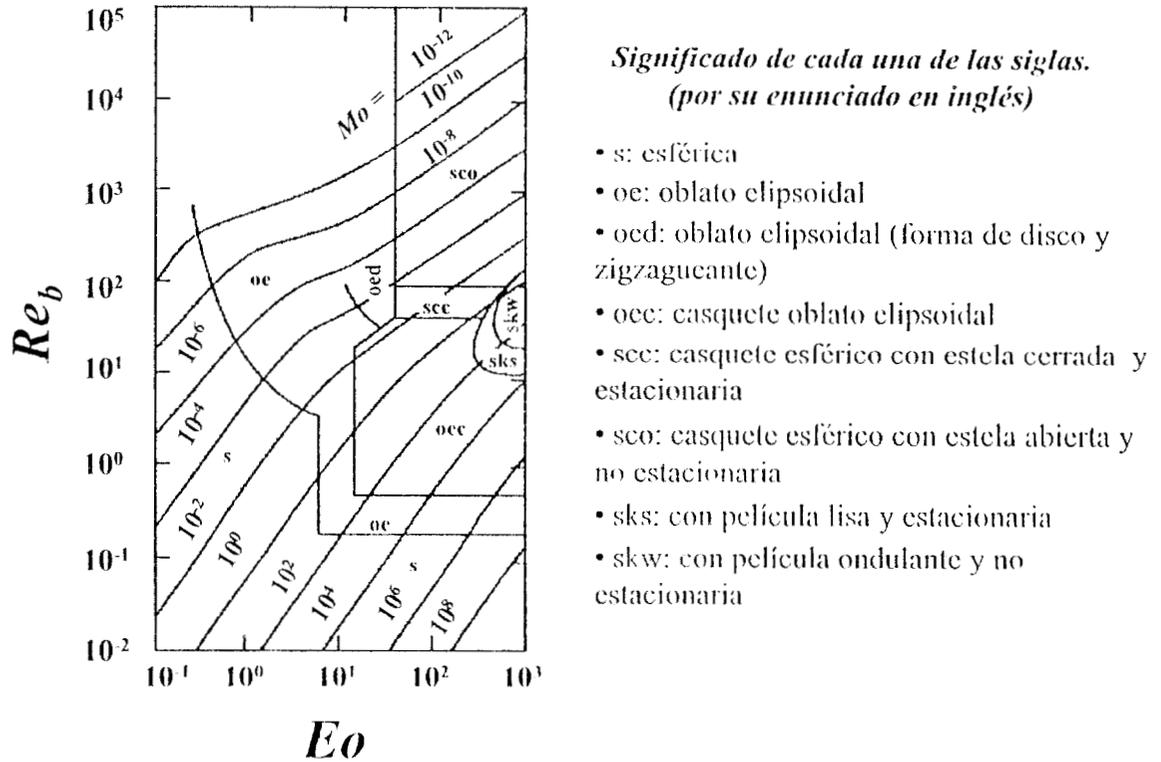


Figura 2.4: Mapa régimen-forma para burbujas individuales que ascienden en líquidos newtonianos infinitos (Tabla tomada de Bhaga y Weber, 1981).

Conociendo el tamaño de la burbuja y las propiedades físicas de la fase continua, es posible dar una predicción de la forma que adoptaría la burbuja al ascender en un líquido newtoniano de extensión infinita. Además, la figura 2.4 puede usarse para estimar velocidades terminales de ascenso de las burbujas, ya que el número de Reynolds (Re_b) es el único grupo adimensional que contiene el término para la velocidad.

²El número de Eötvös está definido por:

$$Eo = \frac{g\rho_c d_c^2}{\sigma} = \frac{\text{efectos gravitacionales}}{\text{efectos de tensión superficial}} \quad (2.4)$$

2.3.1 TRANSICION EN LA FORMA DE LA BURBUJA

La figura 2.4 muestra los límites entre los tres regímenes de forma principales descritos en la sección 2.1, viz., régimen esférico, elipsoidal y casquete esférico. Aunque estos límites son un tanto arbitrarios, existe una tendencia sistemática: las burbujas son esféricas ya sea a bajos números de Reynolds o bajos números de Eötvös; son elipsoidales a números de Reynolds relativamente altos y números de Eötvös intermedios; y casquete esférico elipsoidal a altos números de Reynolds y Eötvös.

El primer régimen de forma, el esférico, ocurre:

1. Cuando la presión dinámica ($\sim \rho_l U_\infty^2$) es mucho menor que la presión debida a la tensión superficial ($\sim \sigma/d_e$) en líquidos a bajos números de Morton. o
2. Cuando las fuerzas inerciales ($\sim \rho_l U_\infty^2 d_e^2$) en la vecindad de la burbuja son mucho menores que las fuerzas viscosas ($\sim \mu_l d_e U_\infty$) para líquidos a números de Morton mayores.

La razón de las presiones en el primer caso es el número de Weber (We)³, mientras que en el segundo caso la razón de las fuerzas es el número de Reynolds (Re_b), tal y como está definido en la ecuación 1.1. El número de Weber está relacionado con los otros números adimensionales mencionados por la siguiente expresión:

$$We = Re_b^2 (Mo/Eo)^{1/2} \quad (2.6)$$

En el régimen elipsoidal, las burbujas que ascienden en líquidos a bajos números de Morton ($Mo < 1 \times 10^{-8}$) empiezan a ser inestables conforme se incrementa el número de Weber, es decir, al incrementarse los efectos inerciales. La forma de la burbuja deja de ser axisimétrica debido a que las trayectorias ya no son rectilíneas y están asociadas intrínsecamente con estelas no estacionarias. Este tipo de inestabilidad ocurre aún cuando la distorsión de la burbuja sea pequeña. Las observaciones experimentales han determinado que el comienzo de esta inestabilidad depende de la pureza del sistema. Para líquidos puros, relativamente no viscosos, la

³El número de Weber está definido como

$$We = \frac{\rho_l U_\infty^2 d_e}{\sigma} = \frac{\text{efectos inerciales}}{\text{efectos de tensión superficial}} \quad (2.5)$$

inestabilidad marginal ocurre para $We \approx 3$ y $Re_b > 200$; para líquidos impuros, algo más viscosos, la inestabilidad ocurre para $Re_b \approx 200$ y $We < 3$.

La transición del régimen elipsoidal a casquete esférico comúnmente se lleva a cabo para $We \approx 20$ o para $EO \approx 40$. Este fenómeno de transición ha sido ampliamente observado y en base a los experimentos realizados por Davies y Taylor (1950), ha sido aceptado como un verdadero modo de transición. Sin embargo, el porqué y cómo tiene lugar la transición no se ha entendido por completo, especialmente para burbujas que ascienden en líquidos de baja viscosidad.

Para líquidos a bajos números de Morton, el aplastamiento o achatamiento de la burbuja es más pronunciado conforme se incrementa el We por arriba de 3, y su forma promedio fluctúa irregularmente adquiriendo la apariencia de un “disco” (ver figura 2.1). Aunque no se conoce con certeza el porqué de la inestabilidad, Ryskin y Leal (1984) especularon que un incremento adicional en el We puede alcanzar un punto límite en el cual “las fuerzas dinámicas, debidas al incremento en la curvatura de la burbuja, aumentan más rápidamente que las fuerzas de la tensión superficial, al menos localmente, de manera que no es posible una forma en equilibrio el comienzo de la inestabilidad de la forma”. Existe evidencia experimental de que en líquidos a intermedios números de Morton ($1 \times 10^{-6} < Mo < 1 \times 10^{-2}$), las burbujas adoptan la forma de discos, tal y como observaron Bhaga y Weber (1981) en un líquido donde $Mo = 8.20 \times 10^{-4}$ y $40 \leq Re_b \leq 70$. Observaron que esta clase de burbujas ascienden zigzagueando, mientras que burbujas más pequeñas (de forma elipsoidal pero menos achatada) y más grandes (forma de casquete esférico) ascendían en el mismo líquido describiendo trayectorias rectilíneas. Esto implica que las burbujas de forma de disco son menos estables que cualquier otra burbuja de forma diferente. Por lo tanto, más allá de un cierto We crítico, las formas muy aplanadas o de disco pueden no existir; en vez de esto, la burbuja puede adquirir la forma de casquete esférico como consecuencia de la separación del flujo.

En el régimen de casquete esférico, la forma global de la burbuja es independiente del We .

2.3.2 EFECTO DE LOS AGENTES TENSOACTIVOS EN LA DINAMICA DE LAS BURBUJAS

En general, para un tamaño de burbuja dado, el aplastamiento que sufre la burbuja es menor cuando el efecto de la tensión superficial es mayor (menor We o EO) y la viscosidad del líquido es mayor (menor Re_b). Sin embargo, cuando en el sistema están presentes sustancias tensoactivas, la forma de la burbuja ya no depende únicamente de las propiedades del líquido, ya que se ve afectada por las condiciones existentes en la interfase gas-líquido, especialmente para burbujas pequeñas. Parece ser que las moléculas tensoactivas se acumulan en la interfase, incrementando el arrastre viscoso, i.e., la solución tensoactiva se comporta como un líquido más viscoso. Este incremento en el arrastre viscoso debido a la presencia de agentes tensoactivos, disminuye la velocidad de ascenso de la burbuja y, por ende, las fuerzas inerciales. Por lo tanto, para un tamaño de burbuja dado, su forma es menos achatada en líquidos contaminados que en líquidos puros.

2.4 VELOCIDAD TERMINAL DE ASCENSO DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL

En un fluido estacionario de extensión infinita, un cuerpo que se mueve libremente bajo la influencia de la gravedad desarrolla una velocidad específica de ascenso ó descenso cuando se alcanza la condición terminal. Bajo esta condición, todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, viz., la fuerza de arrastre, la fuerza gravitacional y la fuerza de flotación, se encuentran en equilibrio.

En los trabajos experimentales, es común expresar la fuerza de arrastre en función del coeficiente de arrastre C_D , definida por

$$F_d = \frac{1}{2} \rho_l U_\infty^2 C_D S \quad (2.7)$$

donde S es el área proyectada del cuerpo perpendicular a la corriente del fluido.

Cuando el cuerpo es una burbuja de gas de densidad despreciable, C_D se obtiene a partir del balance entre la fuerza de flotación y la fuerza de arrastre:

$$\frac{\pi}{6} d_c^3 g \rho_f = \frac{1}{2} \rho_f U_\infty^2 C_D \frac{\pi}{4} d_c^2 \quad (2.8)$$

donde $\pi d_c^2/4$ es el área equivalente proyectada. La ecuación anterior se reduce a

$$C_D = \frac{4gd_c}{3U_\infty^2} \quad (2.9)$$

donde el coeficiente de arrastre es inversamente proporcional a la segunda potencia de la velocidad terminal de la burbuja. En vista de esta definición, el comportamiento del ascenso terminal de la burbuja se describe comúnmente en términos de C_D .

2.4.1 EFECTO DE LA ESTELA EN LA VELOCIDAD DE ASCENSO DE LA BURBUJA

A excepción del flujo a bajos números de Reynolds, la fuerza de arrastre que se ejerce sobre la superficie de las burbujas es causada principalmente por la diferencia de presiones que existe entre la superficie frontal y la superficie posterior de éstas (resistencia de forma). En tales casos, la velocidad terminal de las burbujas se ve influenciada directamente por la aparición de una estela. La figura 2.5 muestra la velocidad terminal de burbujas de aire en agua. Se observa que la velocidad terminal, U_∞ , empieza a disminuir cuando el tamaño de la burbuja excede un cierto valor, e.g., $d_c \approx 0.13$ cm para agua destilada.

El número de Reynolds correspondiente (Re_b) es alrededor de 450, el cual está comprendido en el rango en el que se observa el movimiento oscilatorio en la trayectoria de ascenso de la burbuja. Es decir, el coeficiente de arrastre se incrementa una vez que la burbuja empieza a oscilar.

El cambio en el movimiento de la burbuja puede estar asociado con el cambio en la estructura de la estela; la oscilación de la burbuja refleja la presencia de vórtices detrás de ésta. Debido al movimiento oscilatorio de la burbuja, la pérdida de momentum del líquido alrededor de la burbuja es apreciable y la presión en la parte posterior de ésta es menor que en la parte frontal. Así, la formación y acumulación de vórtices en la estela ocasiona que la resistencia de forma sea grande debido a que la diferencia de presiones entre la parte frontal y posterior de la burbuja es grande.

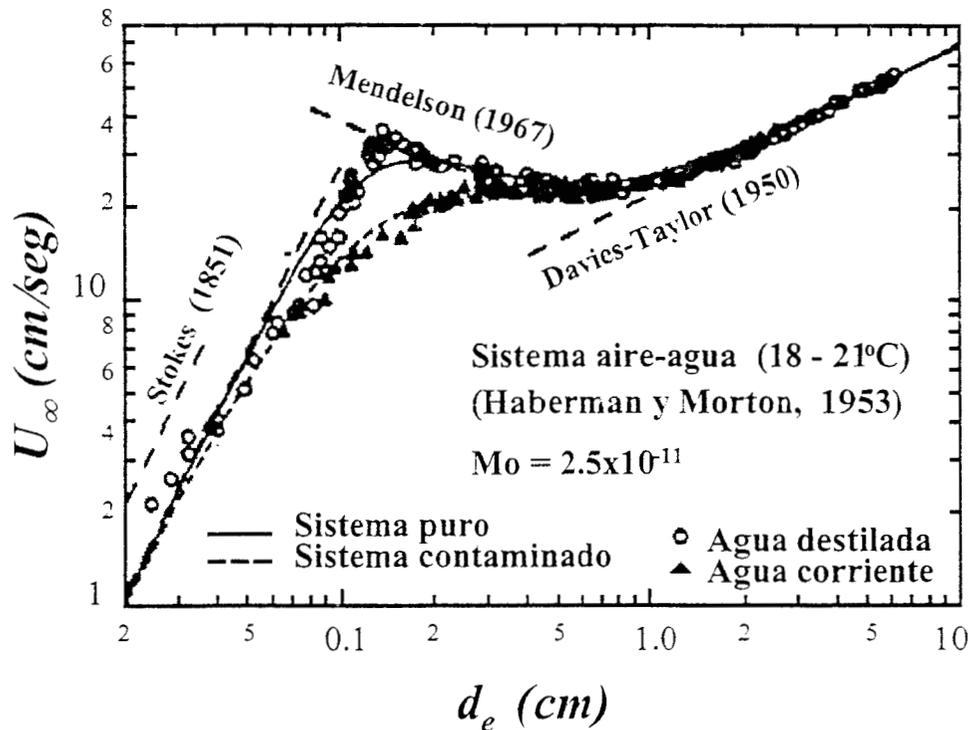


Figura 2.5: Velocidad terminal de burbujas de aire que ascienden en agua (tomada de Fan y Tsuchiya, 1990).

Sin embargo, a pesar de que se tiene un conocimiento razonable del efecto de la estela en el comportamiento de la velocidad de ascenso de la burbuja, no se ha desarrollado expresión alguna que prediga la velocidad terminal de ésta tomando en cuenta en forma directa el efecto de la estela.

2.4.2 CORRELACIONES GENERALES PARA LA VELOCIDAD TERMINAL DE ASCENSO DE LAS BURBUJAS

La velocidad de ascenso de una burbuja de gas depende inherentemente de su tamaño: para burbujas pequeñas, la velocidad de ascenso depende en gran medida de las propiedades del líquido tales como la tensión superficial y la viscosidad; cuando las burbujas son grandes, los efectos de la tensión superficial y la viscosidad son despreciables y la velocidad de ascenso ya no depende de las propiedades del líquido tal como predice la relación que Davies y Taylor (1950) desarrollaron a partir de observaciones experimentales para burbujas de casquete esférico que ascienden en líquidos no viscosos:

$$U_{\infty} = \frac{2}{3}\sqrt{gR_c} \quad (2.10)$$

donde R_c es el radio de curvatura del casquete de la burbuja.

La ecuación 2.10 se puede expresar en términos del volumen de gas de la burbuja, V_b . Entonces,

$$U_{\infty} = 0.792\sqrt{gV_b^{1/3}} \quad (2.11)$$

Definiendo un radio equivalente r_c , el volumen de gas de la burbuja estaría dado por

$$V_b = \frac{4}{3}\pi r_c^3 \quad (2.12)$$

Finalmente, la expresión empírica que permite calcular la velocidad de ascenso de la burbuja está dada por

$$U_{\infty} = 1.003\sqrt{gr_c} \quad (2.13)$$

Haberman y Morton (1953) y Tadaki y Maeda (1961) encontraron experimentalmente que para burbujas con diámetros equivalentes mayores de 1.8 cm, no ocurría una diferencia apreciable en la velocidad de ascenso de éstas en varios líquidos. Sin embargo, para burbujas con diámetros equivalentes menores de 1.0 cm en líquidos puros, la velocidad de ascenso es mayor, en general, en líquidos con mayor tensión superficial o menor viscosidad para un tamaño de burbuja dado.

El planteamiento convencional para desarrollar una ecuación predictiva consiste en dividir todo el rango de tamaños de burbujas en diversos regímenes (Levich, 1962; Wallis, 1969): por ejemplo, la correlación desarrollada por Stokes (ec. 2.2) se aplica para burbujas esféricas suficientemente pequeñas ($Rc_b < 0.1$), y la ecuación de Davies-Taylor (ec. 2.13) para burbujas grandes de casquete esférico ($We > 20$ o $Bo > 40$). La capacidad predictiva de estas ecuaciones ha sido satisfactoria para burbujas que ascienden en diferentes líquidos siempre y cuando se seleccione el régimen apropiado.

CORRELACIONES DESARROLLADAS POR PEEBLES Y GARBER (1953)

Las correlaciones desarrolladas por Peebles y Garber (1953) están dadas en la Tabla 2.1. El cálculo de la velocidad terminal de las burbujas está dividida en cuatro regiones, cuya determinación está principalmente en función del número de Reynolds de la burbuja (Re_b).

REGION	VELOCIDAD TERMINAL	RANGO DE APLICABILIDAD
1	$U_\infty = \frac{2r_e^2(\rho_l - \rho_g)g}{9\mu_l}$	$Re_b < 2$
2	$U_\infty = 0.33g^{0.76} \left(\frac{\rho_l}{\mu_l}\right)^{0.52} r_e^{1.28}$	$2 < Re_b < 4.02Mo^{-0.214}$
3	$U_\infty = 1.35 \left(\frac{\sigma}{r_e\rho_l}\right)^{0.5}$	$4.02Mo^{-0.214} < Re_b < 3.10Mo^{-0.25}$ $16.32Mo^{0.144} < G < 5.75$
4	$U_\infty = 1.18 \left(\frac{g\sigma}{\rho_l}\right)^{0.25}$	$3.10Mo^{-0.25} < Re_b$ $5.75 < G$

Tabla 2.1: Velocidad terminal de burbujas de gas individuales que ascienden en líquidos (Tabla tomada de Wallis, 1969)

El rango de aplicabilidad de cada ecuación está en función de los parámetros adimensionales Re_b y Mo , definidos en las ecuaciones 1.1 y 2.1, respectivamente, y de un tercer parámetro, G , definido por:

$$G = \frac{1}{16}Re_b^4 Mo = \frac{gr_e^4 U_\infty^4 \rho_l^3}{\sigma^3} \quad (2.14)$$

En la región 4, la velocidad de ascenso de la burbuja es independiente del tamaño de ésta, ya que la ecuación no incluye el radio equivalente de la burbuja a diferencia de las tres regiones anteriores, aunque se incluye en el rango de aplicabilidad a través de Re_b y G . Harmathy (1960) ha sugerido el valor de 1.53 en lugar de la constante 1.18 en la región 4. El límite superior de la región 4 se obtiene cuando la velocidad de ascenso en esta región es comparable con el valor dado por la ecuación 2.13 para la velocidad terminal de burbujas de casquete esférico. Resolviendo, se obtiene la siguiente expresión

$$r_e \geq 2\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho_l}} \quad (2.15)$$

la cual define una región adicional (5) donde la ecuación 2.13 es válida.

CORRELACION DESARROLLADA POR MENDELSON (1967)

Mendelson (1967) fue el primero en reconocer que existe una analogía directa entre la velocidad de propagación de ondas superficiales sobre un líquido profundo y la velocidad terminal de burbujas que ascienden en un medio infinito. Consideró el ascenso de una burbuja de gas como simplemente perturbaciones interfaciales cuya dinámica es parecida a la propagación de una onda en la superficie de un líquido ideal. Basándose en esta suposición, sustituyó la longitud de onda en la ecuación de la velocidad de la onda (Lamb, 1945) por el perímetro equivalente de la burbuja.

La ecuación para la velocidad de la onda C presentada por Mendelson es en realidad un caso especial de la expresión general para la velocidad de la onda que se desplaza en la interfase entre dos fluidos de densidades diferentes ρ_1 y ρ_2 y diferentes profundidades h_1 y h_2 :

$$C = \sqrt{\frac{g \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\rho + \frac{2\pi}{\lambda} \sigma}{\rho_1 \coth \frac{2\pi h_1}{\lambda} + \rho_2 \coth \frac{2\pi h_2}{\lambda}}} \quad (2.16)$$

donde λ es la longitud de onda y σ es la tensión interfacial o superficial.

Para el caso donde la profundidad de ambos fluidos es grande relativa a la longitud de onda (h_1/λ y $h_2/\lambda \gg 1$) y el fluido más ligero es aire ($\rho_1 = \rho_g \ll \rho_2 = \rho_\ell$), la ecuación 2.16 se reduce a

$$C = C_\infty = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho_\ell}} \quad (2.17)$$

Mendelson convirtió la relación dada por la ecuación 2.17 en la velocidad terminal para burbujas que ascienden en un medio infinito reemplazando la longitud de onda por el perímetro p de la sección transversal máxima de una esfera equivalente cuyo volumen V_e es igual al de la burbuja; entonces

$$\lambda = p = \pi d_e \quad (2.18)$$

donde

$$d_e = \left[\frac{6V_e}{\pi} \right]^{1/3} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, la velocidad terminal está dada por

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\sigma}{d_e \rho_l} + \frac{gd_e}{2}} \quad (2.20)$$

Aplicando la correlación anterior al sistema agua-aire, se obtiene la curva que se muestra en la figura 2.6 donde, contrario a la correlación desarrollada por Clift *et al.* (1978), ésta predice velocidades terminales razonablemente aceptables para diámetros de burbuja mayores de 0.1 cm.

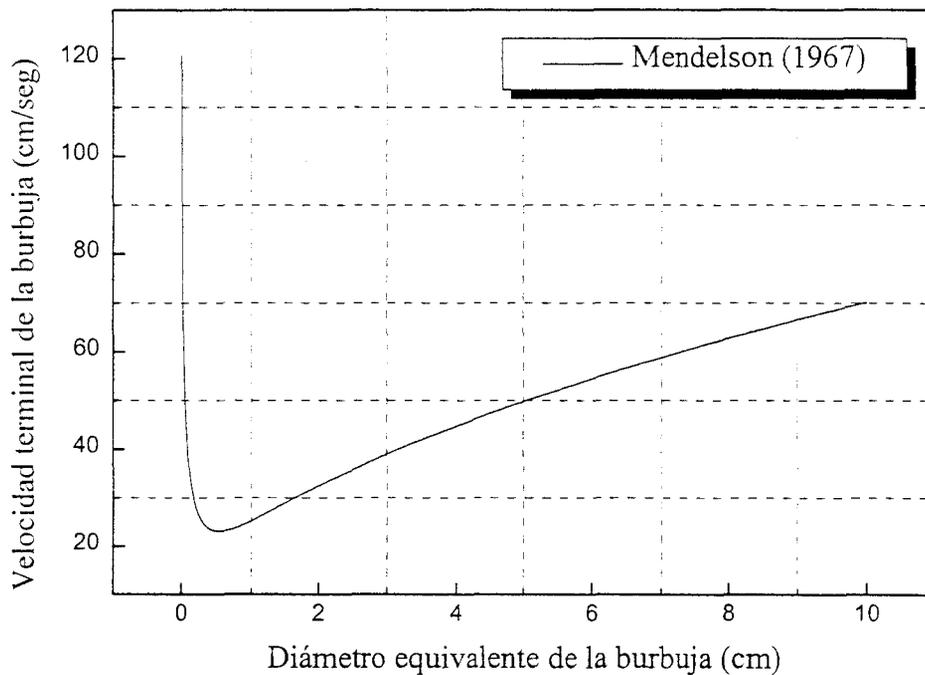


Figura 2.6: Gráfica de la correlación desarrollada por Mendelson, para el sistema agua-aire.

Por otro lado, si no es posible despreciar ninguna de las dos densidades de los fluidos, aunque todavía se cumple la condición de que h_1/λ y $h_2/\lambda \gg 1$, la ecuación 2.16 se reduce a

$$C_\infty = \sqrt{\frac{g\lambda\Delta\rho}{2\pi(\rho_\ell + \rho_g)} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda(\rho_\ell + \rho_g)}} \quad (2.21)$$

La velocidad terminal correspondiente de la burbuja sería

$$U_\infty = C_\infty(\lambda=\pi d_c) = \sqrt{\frac{gd_c\Delta\rho}{2(\rho_\ell + \rho_g)} + \frac{2\sigma}{d_c(\rho_\ell + \rho_g)}} \quad (2.22)$$

donde $\Delta\rho$ es la diferencia de densidades.

Reordenando la ecuación 2.22 se obtiene

$$(\rho_\ell + \rho_g) U_\infty^2 = \frac{gd_c\Delta\rho}{2} + \frac{2\sigma}{d_c} \quad (2.23)$$

la cual representa un balance entre la fuerza inercial, la fuerza de la gravedad y la fuerza de la tensión superficial. Marrucci *et al.* (1970) aplicaron la analogía de la onda con el movimiento de gotas líquidas en sistemas no newtonianos, y observaron que la fase dispersa (burbujas o gotas) deben considerarse en movimiento estacionario; en consecuencia, en contraste con el problema clásico original de la onda, la inercia no contribuye. Por lo tanto, la densidad de la fase dispersa en el término inercial debe eliminarse, de tal forma que la ecuación 2.22 se convierte en

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\sigma}{d_c\rho_\ell} + \frac{gd_c\Delta\rho}{2\rho_\ell}} \quad (2.24)$$

Cuando $\rho_g \ll \rho_\ell$ la ecuación 2.24 se reduce a la ecuación de Mendelson dada por la ecuación 2.20.

Aunque la ecuación 2.24 se ajusta razonablemente bien con las velocidades terminales medidas en líquidos monocomponentes puros, tiende a valores bajos para las velocidades terminales medidas en sistemas multicomponentes en el régimen de la burbuja distorsionada donde predominan los efectos de la tensión superficial (Mendelson 1967).

Los resultados de Mendelson llevaron a Fan y Tsuchiya (1990) a generalizar la ecuación 2.24 reemplazando σ por $c\sigma$ donde c es una constante que varía de 1.0 a 2.0 dependiendo del fluido. De esta forma, la ecuación 2.24 se convierte en

$$U_{\infty} = \sqrt{\frac{2c\sigma}{d_e\rho_{\ell}} + \frac{gd_e\Delta\rho}{2\rho_{\ell}}} \quad (2.25)$$

Con esta generalización, la analogía de la onda no sólo se ajusta bien con las velocidades terminales de las burbujas en fluidos multicomponentes (Fan y Tsuchiya, 1990), sino también con las velocidades terminales de gotas en fluidos cuando ρ_{ℓ} y ρ_g son reemplazadas por las densidades de la fase continua y la fase dispersa, respectivamente.

CORRELACION GENERALIZADA DESARROLLADA POR GRACE, WAIREGI Y NGUYEN (1976)

Inicialmente, Grace *et al.* (1976) desarrollaron una expresión analítica, la cual cubre un amplio rango de datos experimentales. Dicha correlación ha sido capaz de predecir la velocidad terminal de burbujas y gotas de forma elipsoidal que ascienden/descienden, según sea el caso, en líquidos de bajos a intermedios números de Morton ($Mo < 10^{-3}$, $EO < 40$, $Re_b > 0.1$, sin efectos de pared). La correlación es aplicable bajo estas condiciones y, en particular, es útil para sistemas que contengan agentes tensoactivos contaminantes en pequeña proporción. Sin embargo, para cubrir un rango más amplio de datos experimentales, es necesario el desarrollo de una correlación alternativa que incluya a las burbujas de forma de casquete esférico ($EO > 40$) que ascienden en líquidos a altos números de Morton ($Mo > 1 \times 10^5$). El planteamiento para esta correlación es derivar una ecuación para cada régimen que tome en cuenta la fuerza o fuerzas dominantes que actúan sobre la burbuja, y combinar estas ecuaciones en una correlación general que sea válida para todos los tamaños de burbujas. Tal planteamiento se describe a continuación y se demuestra que la correlación general obtenida no solamente refleja la fuerza dominante en el régimen correspondiente, sino también que es válida su aplicación en los regímenes de transición.

Cuando el tamaño de la burbuja es pequeño y la forma es esférica, dominan las fuerzas viscosas así como las fuerzas de tensión superficial. A números de Reynolds extremadamente bajos ($Re_b < 0.1$), la teoría de Hadamard-Rybczynski y la teoría de Stokes se aplican a burbujas esféricas cuya superficie sea móvil e inmóvil (rígida⁴), respectivamente. En la práctica, especialmente para burbujas en líquidos de baja viscosidad, el número de Reynolds fácilmente excede la

⁴Comúnmente, la rigidez es atribuida a la contaminación de la interfase gas-líquido por agentes tensoactivos.

unidad y el término inercial ya no es despreciable. Levich (1962) obtuvo una ecuación usando la teoría de capa límite siendo aplicable para burbujas esféricas a altos números de Reynolds (por ejemplo, para burbujas de aire en agua: $50 < Re_b < 500$). Todas estas teorías resultan en una expresión analítica para la velocidad terminal dada por

$$U_{\infty 1} = \frac{\rho_l g d_c^2}{K_b \mu_l} \quad (2.26)$$

donde la constante K_b es 12, 18 y 36 para las teorías de Hadamard-Rybczynski, Stokes y Levich, respectivamente.

Para burbujas de tamaño intermedio a grande, la ecuación desarrollada por Mendelson (ec. 2.20) ha proporcionado las mejores predicciones para burbujas que ascienden en líquidos monocomponentes puros (Clift *et al.*, 1978). Dicha ecuación tiene dos términos que compiten, la tensión superficial y la fuerza gravitacional, tal y como está dado por

$$U_{\infty 2} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_l d_c} + \frac{g d_c}{2}} \quad (2.27)$$

definida en la ecuación 2.20.

Aunque la analogía entre el ascenso de una burbuja y el desplazamiento de una onda superficial desarrollada por Mendelson ha permitido obtener resultados aceptables, no se ha dado una explicación razonable que justifique su derivación. Sin embargo, es interesante notar que Lehrer (1976) derivó una ecuación casi idéntica con la única diferencia de que en el primer término de la ecuación 2.27 el coeficiente es 3 en vez de 2. La derivación de Lehrer está basada en el incremento de la energía potencial del medio delante de la burbuja que resulta cuando ésta se genera en un medio continuo.

Considerando una burbuja que permanece esférica a lo largo de todo su ascenso, Lehrer postuló que esta energía potencial es convertida a energía cinética conforme la fase continua que ha sido desplazada fluye alrededor de la burbuja a través de una distancia vertical d_c con una rapidez neta U_{∞} . Si las teorías de Mendelson y Lehrer son aceptadas, es tentador usar un valor entre 2 y 3 para el coeficiente en el término de la tensión superficial de la ecuación 2.27. Una ventaja de este hecho ocurre en las observaciones experimentales, en donde es posible seleccionar por prueba y error el valor del coeficiente, comprendido en el rango mencionado,

que mejor ajuste la correlación con los datos experimentales existentes.

La ecuación de Mendelson puede ser expresada en forma más general, reemplazando σ por $c\sigma$ en la ecuación 2.27, donde c es el factor de corrección definido anteriormente e introducido por Fan y Tsuchiya (1990). De esta forma se obtiene

$$U_{\infty 2} = \sqrt{\frac{2c\sigma}{\rho_{\ell}d_e} + \frac{gd_e}{2}} \quad (2.28)$$

la cual se conoce como la ecuación de Mendelson modificada.

La condición que se requiere de que $U_{\infty 1}$ domina cuando el tamaño de la burbuja es pequeño, mientras que el segundo término en $U_{\infty 2}$ domina cuando el tamaño de la burbuja es grande puede satisfacerse combinando las ecuaciones 2.26 y 2.27 en la siguiente forma

$$U_{\infty} = [U_{\infty 1}^{-n} + U_{\infty 2}^{-n}]^{-1/n} \quad (2.29)$$

o en forma adimensional,

$$U'_{\infty} = \left[\left(\frac{Mo^{-1/4}}{K_b} d_e'^2 \right)^{-n} + \left(\frac{2c}{d_e'} + \frac{d_e'}{2} \right)^{-n/2} \right]^{-1/n} \quad (2.30)$$

donde n es un parámetro empírico positivo introducido para considerar sistemas puros y contaminados.

Coppus y Rietema (1980) sugirieron la velocidad adimensional (U'_{∞}) y el diámetro de burbuja adimensional (d_e') definidos como

$$U'_{\infty} = U_{\infty} \left(\frac{\rho_{\ell}}{\sigma g} \right)^{1/4} \quad (2.31)$$

y

$$d_e' = d_e \sqrt{\frac{\rho_{\ell} g}{\sigma}} = \sqrt{Eo} \quad (2.32)$$

A partir de la ecuación 2.30 se deduce que para valores pequeños del diámetro equivalente, la velocidad terminal es determinada principalmente por el término viscoso y en menor proporción por el término de la tensión superficial. Conforme el valor de d_e se incrementa, la velocidad

terminal U_∞ es gobernada por el término inercial, el cual es independiente de las propiedades físicas del líquido.

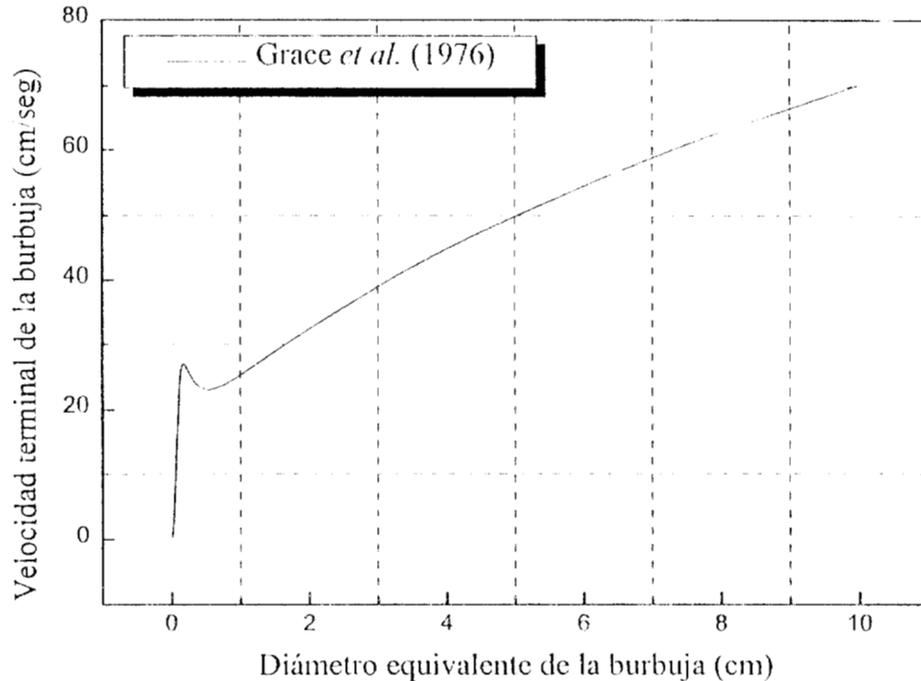


Figura 2.7: Curva teórica obtenida a partir de las correlaciones desarrolladas por Grace et al. (ec. 2.29), para el sistema agua-aire.

La ecuación 2.30 tiene tres parámetros, K_b , c y n , los cuales se determinaron a partir del mejor ajuste de los resultados analíticos con los datos experimentales. De estos parámetros, K_b y c fueron evaluados independientemente del rango de tamaño de burbuja.

Cuando Grace *et al.* (1976) estaban comprobando la aplicabilidad de la ecuación 2.30 para diferentes líquidos, observaron que los valores de c y n pueden considerarse constantes para líquidos específicos a un nivel dado de contaminación. Recomiendan el uso de $c = 1.2$ y $c = 1.4$ para líquidos monocomponentes y multicomponentes, respectivamente. La diferencia en los valores de c para los dos tipos de líquidos es debido aparentemente a la tensión superficial efectiva entre ambos. Los valores recomendados para n varían entre 0.8 y 1.6 dependiendo de la pureza del líquido.

Por otro lado, encontraron que el valor de K_b varía de un líquido a otro, oscilando entre 12 y 40. El comportamiento de K_b está correlacionado por la siguiente expresión:

$$K_b = K_{b0} Mo^{-0.035} \quad (K_b > 12) \quad (2.33)$$

donde $K_{b0} = 14.7$ y 10.2 para soluciones acuosas (o agua) y mezclas o solventes orgánicos, respectivamente. Si el valor calculado de K_b a partir de la ecuación 2.33 es menor de 12, entonces el valor para K_b es reemplazado por 12.

CORRELACIONES DESARROLLADAS POR CLIFT, GRACE Y WEBER (1978)

Clift *et al.* (1978) desarrollaron las siguientes correlaciones para determinar la velocidad de ascenso de las burbujas, las cuales son válidas para el rango $Mo < 10^{-3}$, $EO < 40$ y $Re_b > 0.1$.

$$U_\infty = \frac{\mu_l}{\rho_l d_e} Mo^{-0.149} (J - 0.557) \quad (2.34)$$

donde el parámetro J se determina a partir de las siguientes relaciones:

$$J = 0.94H^{0.747} \quad \text{para } 2 < H \leq 59.3 \quad (2.35)$$

$$J = 3.42H^{0.441} \quad \text{para } H > 59.3 \quad (2.36)$$

El parámetro H se calcula a partir de la siguiente correlación

$$H = \frac{4}{3} EO Mo^{-0.149} \left(\frac{\mu_l}{\mu_{H_2O}} \right) \quad (2.37)$$

La figura 2.8 muestra la curva teórica para el sistema agua-aire obtenida a partir de la ecuación 2.34. Se observa que aproximadamente a partir del diámetro de burbuja igual a 0.1 cm, la correlación de Clift predice una reducción gradual de la velocidad terminal de ascenso conforme se incrementa el diámetro de la burbuja.

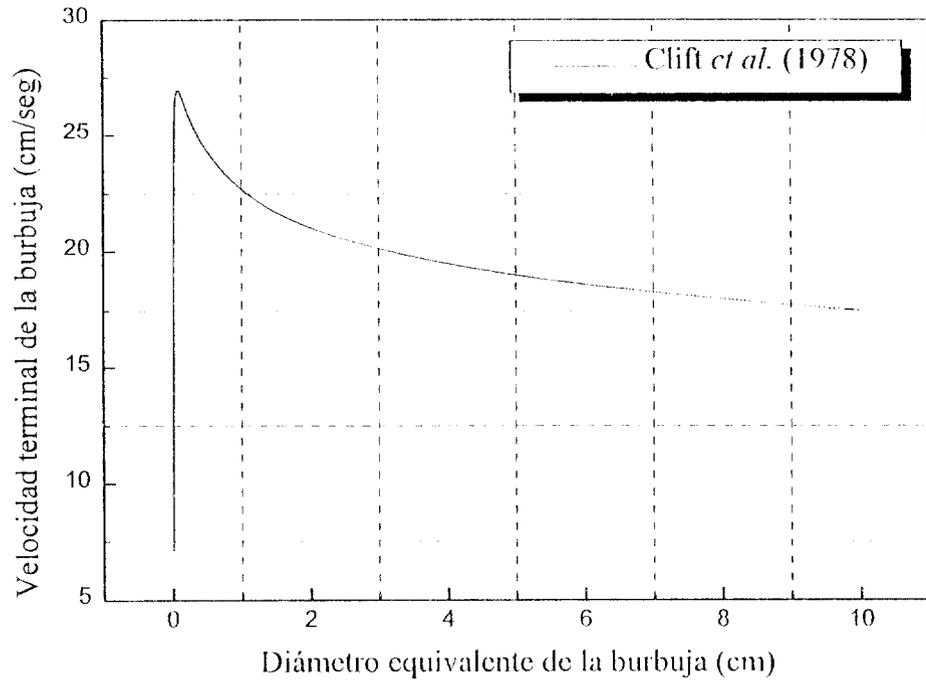


Figura 2.8: Curva teórica obtenida a partir de la ecuación 2.34 para el sistema agua-aire.

Esto contradice las observaciones experimentales y el rango de validez de la correlación es muy limitado. Sin embargo, para burbujas cuyo diámetro es menor de 0.3 cm, la correlación resulta ser muy eficaz cuando se comparan los resultados experimentales y los valores obtenidos a través de dicha correlación (Jamialahmadi *et al.*, 1994).

CORRELACION GENERALIZADA DESARROLLADA POR JAMIALAHMADI, BRANCH Y MÜLLER. STEINHAGEN (1994)

Jamialahmadi *et al.* (1994) clasifican las expresiones desarrolladas para calcular velocidades terminales de acuerdo con el tamaño de las burbujas. Posteriormente combinan estas expresiones a fin de obtener una correlación general la cual validan con datos experimentales obtenidos por diversos autores.

En 1851, Stokes desarrolló una expresión analítica para calcular la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera sólida que sigue una trayectoria rectilínea con movimiento uniforme.

Esta expresión está dada por

$$F_d = 6\pi\mu_\ell U_\infty^{sp} r_b \quad (2.38)$$

en donde F_d es la fuerza de arrastre y U_∞^{sp} la velocidad terminal de la esfera. Supóngase que la esfera está descendiendo en un líquido de viscosidad y densidad μ_ℓ y ρ_ℓ , respectivamente, hasta que alcanza el estado terminal. en donde la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero (ver figura 2.9).

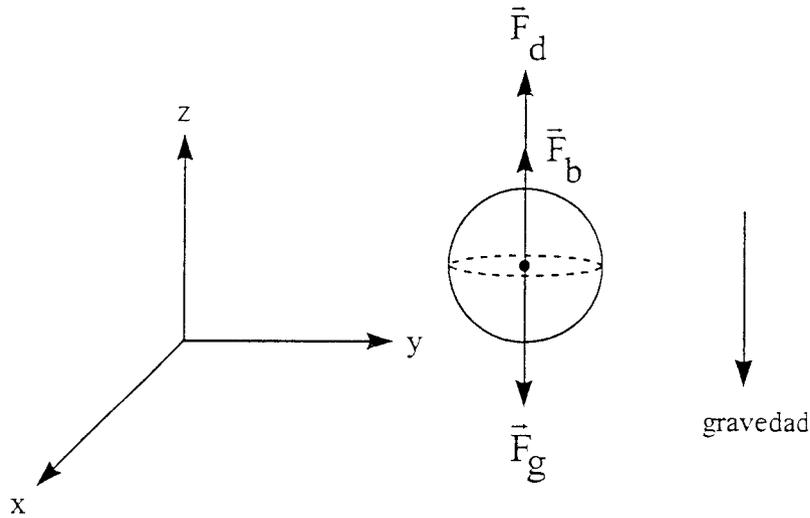


Figura 2.9: Fuerzas que actúan sobre una esfera cayendo en un fluido viscoso.

La fuerza de gravedad actúa sobre la esfera en la dirección de la caída, y la fuerza de flotación y la fuerza de arrastre debido al movimiento actúan en sentido contrario. Por lo tanto, igualando estas fuerzas

$$\frac{4}{3}\pi r_b^3 \rho^{sp} g = \frac{4}{3}\pi r_b^3 \rho_\ell g + 6\pi\mu_\ell U_\infty^{sp} r_b \quad (2.39)$$

se obtiene la expresión analítica para calcular la velocidad terminal de la esfera dada por

$$U_\infty^{sp} = \frac{1}{18} \frac{\rho_\ell - \rho_g}{\mu_\ell} g d_b^2 \quad (2.40)$$

Sin embargo, la ecuación 2.40 es válida sólo si se cumple la condición de no deslizamiento en la superficie de la esfera y $Re_b < 0.1$. Hadamard-Rybczynski (1911) demostraron que esta

ecuación requiere ser modificada si la burbuja considerada esférica está sujeta a una circulación interna. La expresión desarrollada por Hadamard-Rybczynski está dada por

$$U_{\infty}^{sp} = \frac{2(\rho_g - \rho_l) g d_b^2}{3\mu_l} \frac{\mu_l + \mu_g}{2\mu_l + 3\mu_g} \quad (2.41)$$

de tal forma que si se considera despreciable la densidad del gas comparada con la densidad del líquido y haciendo $d_b = d_c$ en las ecuaciones 2.40 y 2.41, se obtienen las mismas expresiones descritas en las ecuaciones 2.2 y 2.3 para ambas teorías, respectivamente.

La aplicabilidad de las ecuaciones 2.40 y 2.41 está limitada para burbujas cuyo diámetro sea menor de 0.2 cm. Ya que las burbujas con mayor diámetro tienden a oscilar, el movimiento ascendente de una burbuja grande puede ser considerado análogo al movimiento de una onda viajando en un fluido ideal (Lamb, 1945):

$$U_{\infty}^i = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (2.42)$$

donde λ es la longitud de la onda.

Para burbujas moderadamente grandes, la influencia de la tensión superficial en la forma de la burbuja es grande y por lo tanto no puede despreciarse. Entonces, la velocidad terminal de ascenso de acuerdo con Lamb (1945) es:

$$U_{\infty}^m = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda(\rho_l + \rho_g)}} \quad (2.43)$$

Las ecuaciones 2.42 y 2.43 describen la velocidad de una onda donde la gravedad y la tensión superficial son dominantes, respectivamente. Ambas ecuaciones se superponen a fin de obtener la velocidad de ascenso considerando ambos mecanismos:

$$U_{\infty}^m = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda(\rho_l + \rho_g)} + \frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (2.44)$$

Para evaluar la ecuación 2.44 se requiere la longitud de onda. Retomando la analogía de Mendelson de que la longitud de onda para burbujas con velocidades terminales no incluidas en el régimen de Stokes, es igual a la circunferencia ecuatorial de la esfera equivalente, πd_c , y sustituyendo este valor en la ecuación 2.44 se obtiene:

$$U_{\infty}^{-w} = \sqrt{\frac{2\sigma}{d_e(\rho_l + \rho_g)} + \frac{gd_e}{2}} \quad (2.45)$$

Despreciando la densidad de la fase gas, la ecuación 2.45 se reduce a la analogía de la onda desarrollada por Mendelson (1967). Las ecuaciones 2.40 o 2.41 y 2.45 se combinan para obtener una ecuación individual que cubre todo el rango de los tamaños de burbuja.

$$U_{\infty} = \frac{U_{\infty}^{sp} U_{\infty}^{-w}}{\sqrt{(U_{\infty}^{sp})^2 - (U_{\infty}^{-w})^2}} \quad (2.46)$$

Esta correlación analítica generalizada para la predicción de velocidades terminales de ascenso de burbujas ha sido desarrollada cubriendo un amplio rango de propiedades físicas del líquido:

$$720 \text{ Kg/m}^3 \leq \rho_l \leq 1040 \text{ Kg/m}^3$$

$$0.000233 \text{ Kg/mseg} \leq \mu_l \leq 0.059 \text{ Kg/mseg}$$

$$0.0725 \text{ N/m} \leq \sigma \leq 0.022 \text{ N/m}$$

Aplicando la correlación al sistema agua-aire se obtiene la curva teórica de la figura 2.10. la cual predice la velocidad terminal de la burbuja en función de su diámetro equivalente.

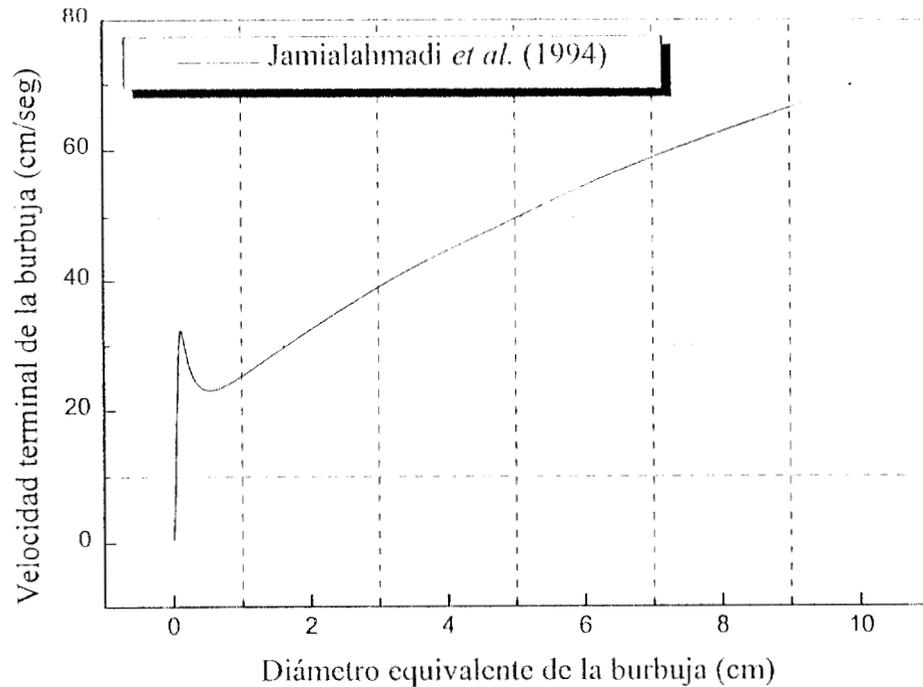


Figura 2.10: Velocidad terminal de la burbuja en función de su diámetro equivalente para el sistema agua-aire, a partir de la ecuación 2.46

Los efectos de las propiedades físicas del gas en la velocidad de ascenso de la burbuja pueden ser despreciados, siempre y cuando se cumpla que $\rho_l \gg \rho_g$ y $\mu_l \gg \mu_g$.

2.5 EL MOVIMIENTO DE UNA BURBUJA

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, existe una gran variedad de equipos y procesos utilizados en un amplio campo de industrias, tales como las dedicadas a la elaboración de productos químicos básicos y alimentos y las dedicadas a la concentración de minerales, en los cuales las operaciones están directamente relacionadas con las leyes que gobiernan el movimiento del gas en forma de burbujas (Levich, 1962).

También se debe tomar en cuenta el burbujeo de gases a través de líquidos, un proceso usado en muchas ramas de las industrias químicas y de alimentos y en el proceso de flotación para la concentración de minerales. Así, por ejemplo, muchos procesos químicos de producción llevan

a cabo la absorción de una gran variedad de sustancias gaseosas por varios reactivos líquidos en absorbedores construidos especialmente para ello. El burbujeo de bióxido de carbono en hervidores de saturación, es uno de los procesos básicos en la industria del azúcar para la obtención de este producto a partir de la remolacha. Por estas razones, se han llevado a cabo numerosos estudios, tanto experimentales como teóricos, con el objetivo de describir cada una de las características del movimiento de las burbujas abarcando diferentes aspectos.

Cuando una burbuja asciende a través de un medio continuo, realiza trabajo sobre el medio a una tasa igual a la velocidad de ascenso de la burbuja por la fuerza neta de flotación que actúa sobre ella. En un medio muy viscoso, la energía que se genera por medio de este trabajo puede disiparse por completo en el medio debido a la viscosidad (disipación viscosa laminar), dando como resultado que el movimiento de la burbuja sea puramente rectilíneo. Sin embargo, cuando una burbuja asciende en un medio poco viscoso, la energía que se genera debido a su ascenso puede no ser consumida únicamente por la disipación viscosa: algo de energía se libera debido a la dispersión de la estela (disipación turbulenta) lo cual ocasiona que el movimiento de la burbuja ya no sea rectilíneo, sino oscilatorio. Este tipo de movimiento es llamado secundario y está íntimamente relacionado con la presencia de vórtices en la estela de la burbuja.

El movimiento secundario de la burbuja es muy complejo. A fin de poder dar una mejor explicación del fenómeno, se han realizado observaciones experimentales cubriendo un amplio rango de números de Reynolds. Este tipo de movimiento puede ser cualquier grado de superposición de dos tipos de movimiento:

1. Un tipo de vibración de “cuerpo rígido” caracterizado por trayectorias en zig-zag o en espiral y/o balanceo y
2. Una deformación de “cuerpo no rígido” caracterizado por dilataciones de forma u oscilaciones de la base (Bhaga y Weber, 1981).

2.5.1 TIPOS DE MOVIMIENTOS DE LAS BURBUJAS

La trayectoria de ascenso (definida como la trayectoria del centro de masa de la burbuja) y el cambio en la orientación (definido como el ángulo entre el eje mayor de la burbuja y el eje vertical del sistema) de la burbuja, están fuertemente relacionados con su forma (Fan y Tsuchiya, 1990).

Normalmente, el movimiento de las burbujas esféricas es rectilíneo. La inestabilidad se presenta cuando la burbuja empieza a deformarse y adopta la forma de un esferoide oblato, dando como resultado una trayectoria en espiral o en zig-zag; al mismo tiempo la orientación de la burbuja cambia de tal forma que su eje mayor tiende a ser perpendicular a la dirección del movimiento instantáneo, aunque se observa, para algunos tamaños de burbuja, algún desfase en el ángulo de orientación de la burbuja. Conforme la burbuja cambia su forma de elipsoide a casquete esférico, el radio de la espiral o la amplitud del zig-zag decrece gradualmente y el movimiento se vuelve rectilíneo, pero con balanceo. La burbuja de casquete esférico, conforme su tamaño se incrementa, asciende eventualmente en forma rectilínea.

Generalmente, la descripción anterior es válida en sistemas a bajos números de Morton, mientras que en sistemas a altos números de Morton - donde predominan los efectos viscosos del fluido -, el movimiento de la burbuja es siempre rectilíneo sin importar su forma. El número de Reynolds correspondiente (Re_b) debe ser lo suficientemente grande para que la burbuja oscile. Sin embargo, en sistemas a altos números de Morton, la burbuja cambia su forma de esférica a casquete esférico, antes de que el valor del Re_b sea de 100 (Bhaga y Weber, 1981).

Los fluidos puros de baja viscosidad poseen valores muy bajos de Morton ($Mo \approx 1 \times 10^{-9}$) y es para estos fluidos que se observan movimientos en espiral. El número de Reynolds típico para el fenómeno está comprendido en el intervalo de $200 < Re_b < 1000$.

MOVIMIENTO EN ESPIRAL O EN ZIG-ZAG

El movimiento en espiral de las burbujas puede seguir una dirección en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario, dependiendo de las condiciones de generación. La trayectoria en zig-zag resulta del movimiento en un plano vertical de un lado a otro, donde se ha observado que la orientación de ésta permanece constante y que cambia al azar conforme la burbuja asciende (Fan y Tsuchiya, 1990).

Existen diversas opiniones sobre las condiciones que influyen en la burbuja a que ésta describa una trayectoria en espiral o en zig-zag. Sin embargo, se ha aceptado que el modo de oscilación es controlado principalmente por dos factores:

1. Las propiedades físicas del medio a través del cual asciende la burbuja, especialmente en presencia o ausencia de agentes tensoactivos, y

2. La forma en que la burbuja es generada en el medio y, por lo tanto, su movimiento inicial.

Con respecto al primer factor, aunque existen discrepancias entre los resultados obtenidos por diversos autores con respecto a las características generales de las burbujas, sí coinciden, en particular, en la dependencia del modo de ascenso de la burbuja sobre las propiedades físicas del medio circundante tal y como se describe a continuación. Cuando una burbuja asciende a través de un líquido con impurezas, su centro de masa describe una trayectoria en zig-zag. Por otro lado, cuando la burbuja es generada en un sistema libre de contaminantes, es decir, un sistema puro, su centro de masa describe una trayectoria en espiral cuando su tamaño es pequeño ($0.15 < d_e < 0.3 - 0.5$ cm en agua destilada) o una trayectoria en zig-zag cuando su tamaño es grande ($0.3 - 0.5 < d_e < 1.0 - 1.5$ cm en agua destilada). El efecto de las impurezas, las cuales actúan principalmente como agentes tensoactivos, es importante aún a muy bajas concentraciones. Por lo tanto, la mayoría de los resultados experimentales que existen reportados en la literatura, han sido considerados como obtenidos a través de un sistema impuro, a menos que se hayan tomado las debidas precauciones a fin de eliminar los contaminantes en el sistema.

La contribución del segundo factor no ha sido estudiada tan intensamente como el primero. Saffman (1956), sin embargo, ha proporcionado algunas observaciones útiles para burbujas de aire que ascienden a través de agua filtrada, en el rango de tamaños $1.0 < d_e < 4.6$ mm, a fin de despejar algunas dudas sobre el efecto de las perturbaciones introducidas durante la inyección de la burbuja e inducidas por un flujo externo. A continuación, se presentan sus observaciones:

1. Para $d_e < 1.4$ mm, la burbuja ascendió describiendo una trayectoria rectilínea sin oscilaciones.
2. Para $1.4 < d_e < 2.0$ mm, la burbuja siempre zigzagueó.
3. Para $d_e > 2.0$ mm, la burbuja zigzagueó si la inyección se llevó a cabo con un mínimo de perturbaciones. Sin embargo, la burbuja cambió su trayectoria a una en espiral, una vez que fue golpeada por un obstáculo colocado arriba del inyector o en la trayectoria de la burbuja.
4. Si una segunda burbuja con $d_e > 2.0$ mm fue inyectada inmediatamente después de la

primera, ésta tiende a seguir el mismo movimiento que la anterior. Sin embargo, una burbuja de $d_c < 2.0$ mm siempre zigzagueó, aún si esta fue liberada en la estela de una burbuja que describe una trayectoria en espiral.

5. El movimiento en zig zag podría cambiar a uno en espiral, pero nunca podría suceder lo contrario.

En resumen, se ha observado que la burbuja oscila describiendo una trayectoria en zig zag cuando:

1. la interfase gas líquido es “rígida” bajo la presencia de contaminantes de superficie o,
2. cuando la burbuja se genera con un mínimo de perturbaciones.

La trayectoria en espiral, por otro lado, puede prevalecer para:

1. burbujas de tamaño pequeño y superficie “limpia” o,
2. en presencia de perturbaciones externas (un obstáculo localizado sobre el inyector o en la trayectoria de la burbuja).

PARTE I

DESCRIPCION TEORICA

CAPITULO 3

MOVIMIENTO DE UNA BURBUJA ESFERICA EN UNA TRAYECTORIA HELICOIDAL

En el capítulo 2 se discutieron los diferentes tipos de movimiento que presentan las burbujas cuando ascienden en un medio continuo en función de su diámetro equivalente. Para una cierta clase de estas burbujas, la trayectoria que describe su centro de masa es helicoidal, siendo ésta la que representa mayor importancia en el presente trabajo.

En este capítulo se plantea un modelo teórico a fin de poder describir el movimiento idealizado que presentan esta clase de burbujas a partir de la superposición de dos flujos. El primero representa el movimiento del fluido generado por el movimiento circular uniforme de una esfera rígida. El segundo es un flujo uniforme que asciende en la dirección axial.

Es importante mencionar que dicho modelo representa el movimiento idealizado para esta clase de burbujas ya que al suponerse esféricas, no se han considerado las deformaciones que presentan durante su ascenso debido a las fuerzas ejercidas sobre su superficie. Siu embargo, ya que las fuerzas que intervienen en el movimiento helicoidal no se han estudiado ampliamente y que existe poca información al respecto, este modelo proporciona una primera aproximación a la interpretación física del movimiento de estas burbujas, a fin de contribuir en el desarrollo de modelos más complejos.

3.1 LINEAS DE CORRIENTE DE UN FLUIDO IDEAL EN MOVIMIENTO HELICOIDAL

En esta sección se desarrollan las ecuaciones paramétricas que describen las líneas de corriente para un fluido ideal en movimiento helicoidal, donde la esfera no está incluida en el campo de flujo. Posteriormente, el cálculo de la curvatura y torsión de la hélice - dos de los parámetros más importantes de toda curva - permite establecer las características más importantes de su comportamiento.

El desarrollo de los temas anteriores permite establecer en forma previa algunas de las características más importantes del movimiento helicoidal de un fluido, que permitirán el análisis y comprensión de temas posteriores relacionados con este tipo de movimiento.

3.1.1 CAMPO VECTORIAL DE LA VELOCIDAD

El movimiento de un fluido puede idealizarse imaginando cada partícula de él como un punto, en el cual esté aplicado un vector \vec{u} , que representa en magnitud y dirección la velocidad instantánea de la partícula correspondiente. El conjunto de estos vectores \vec{u} constituye el campo vectorial de las velocidades. Por lo tanto, si se trabaja bajo el punto de vista local, se puede representar el movimiento del fluido asociando al espacio el campo vectorial de las velocidades, que puede variar de un instante a otro en el caso de fenómenos transitorios.

Se llama línea de corriente a toda línea trazada idealmente en el interior de un campo de flujo, de manera que la tangente en cada uno de sus puntos indique la dirección del vector velocidad correspondiente al punto mismo. La figura 3.1 representa un conjunto de líneas de corriente, donde se observa que el vector de la velocidad para cada partícula de fluido es tangente a la curva en cada punto localizado sobre ella.

Con excepción de puntos singulares eventuales, por cada punto tiene que pasar una y sólo una línea de corriente, ya que si las líneas de corriente se cruzaran, en los puntos de intersección se tendrían dos o más velocidades distintas al mismo tiempo. Toda superficie cubierta completamente por líneas de corriente es una superficie de flujo.

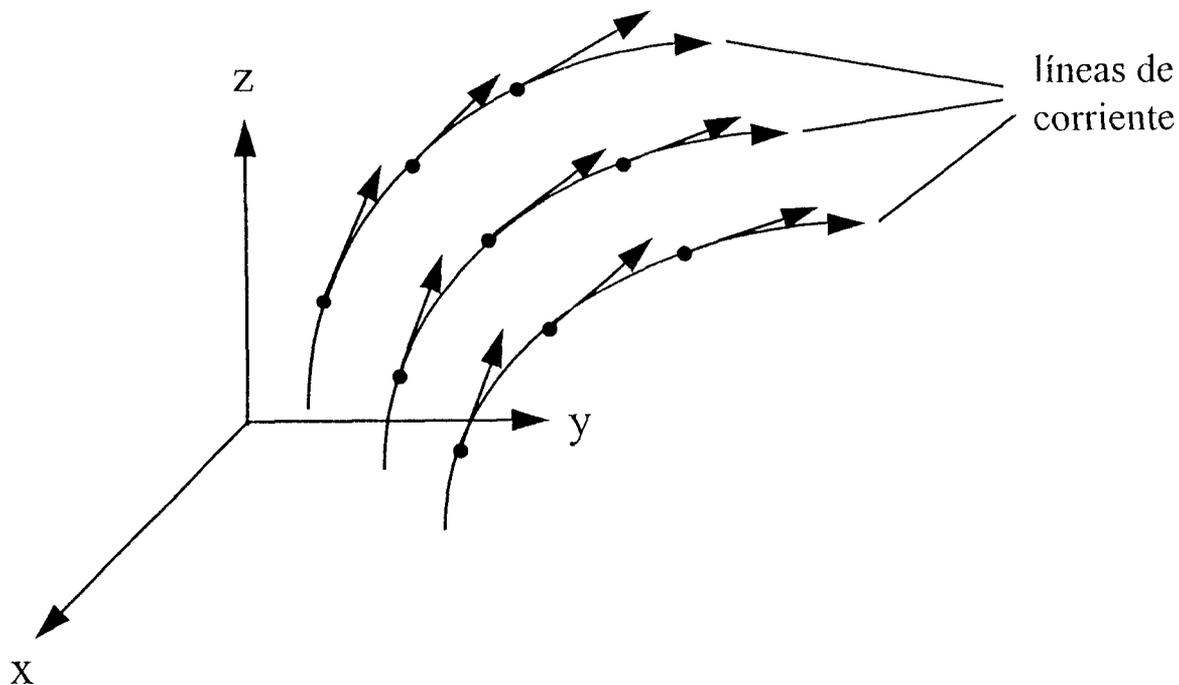


Figura 3.1: El campo de flujo representado por líneas de corriente donde el vector de la velocidad para cada partícula de fluido es tangente a la curva.

Las ecuaciones paramétricas que describen las líneas de corriente se obtienen al resolver las tres ecuaciones simultáneas representadas en forma vectorial por

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u} \quad (3.1)$$

o, en notación por índices:

$$\frac{dx_i}{ds} = u_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

donde s es un parámetro medido a lo largo de la línea de corriente. Este parámetro no debe confundirse con el tiempo, ya que en las ecuaciones 3.1 y 3.2, el tiempo permanece constante. Si estas ecuaciones se integraran, las expresiones resultantes representan las líneas de corriente para un tiempo fijo. La figura 3.2 representa la interpretación geométrica de la ecuación 3.1, donde el vector de posición varía en función del parámetro s y el tiempo permanece constante.

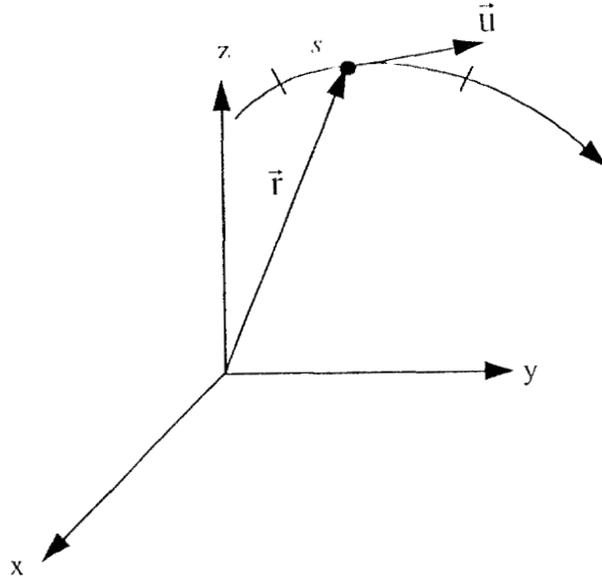


Figura 3.2: Variación del vector de posición \vec{r} con respecto a la longitud de arco s para un tiempo t fijo.

Puesto que una partícula de fluido se mueve en la dirección de la línea de corriente en cualquier instante, su desplazamiento $d\vec{r}$, de componentes dx , dy y dz , tiene la misma dirección del vector velocidad \vec{u} , cuyas componentes en las direcciones x , y , z son u_x , u_y , u_z , respectivamente. Por lo tanto, a partir de la ecuación 3.2 se obtienen las relaciones que permiten definir las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (3.3)$$

las cuales establecen que las componentes correspondientes son proporcionales y, por ende, que $d\vec{r}$ y \vec{u} tienen la misma dirección, tal como se muestra en las figuras 3.3 y 3.4, respectivamente. Este sistema está formado por dos ecuaciones diferenciales independientes y cualquier línea continua que lo satisfaga constituye una línea de corriente.

Si las componentes u_x , u_y y u_z de la velocidad son funciones conocidas de la posición y del tiempo, las ecuaciones 3.3 pueden integrarse obteniéndose así la línea de corriente que en un cierto instante t_0 pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) .

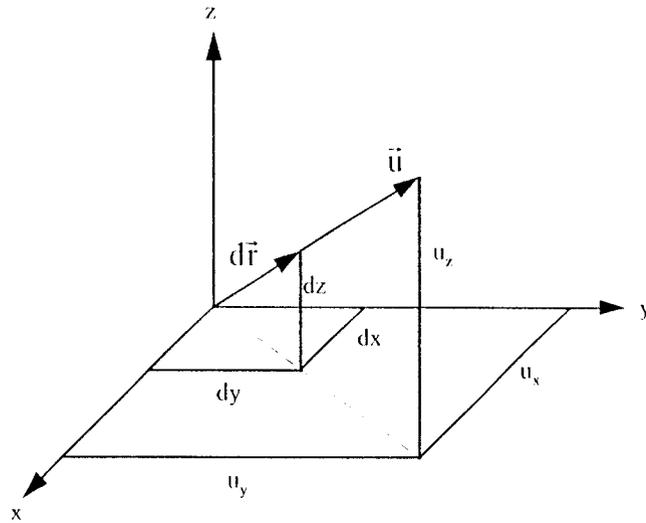


Figura 3.3: Los componentes de los vectores $d\vec{r}$ y \vec{u} , son proporcionales entre sí.

A pesar de que no se requiere la utilización de líneas de trayectoria para nuestros propósitos, es conveniente dar su definición y la relación que existe con las líneas de corriente. A diferencia de una línea de corriente, la línea de trayectoria es la curva marcada por el recorrido de una determinada partícula de fluido a medida que se mueve a través del campo de flujo a diferentes intervalos de tiempo. Cada partícula de fluido viaja a lo largo de su propia trayectoria.

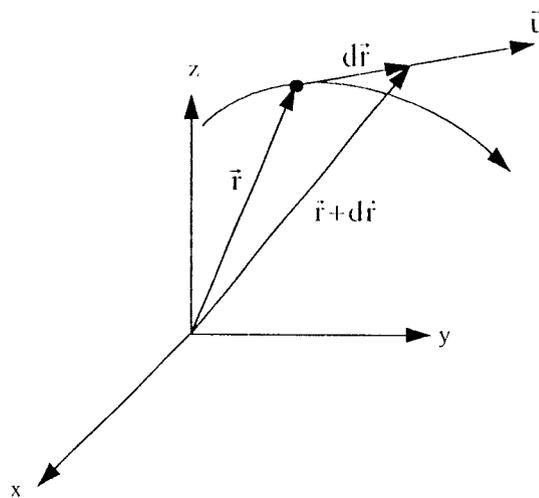


Figura 3.4: Los vectores $d\vec{r}$ y \vec{u} se desplazan sobre la misma línea imaginaria tangente a la curva.

Las ecuaciones paramétricas que describen la trayectoria de una partícula de fluido en un campo de flujo se obtienen al resolver las tres ecuaciones simultáneas representadas en forma vectorial por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \quad (3.4)$$

o, en notación por índices:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

donde el vector de la velocidad es función de la posición y del tiempo.

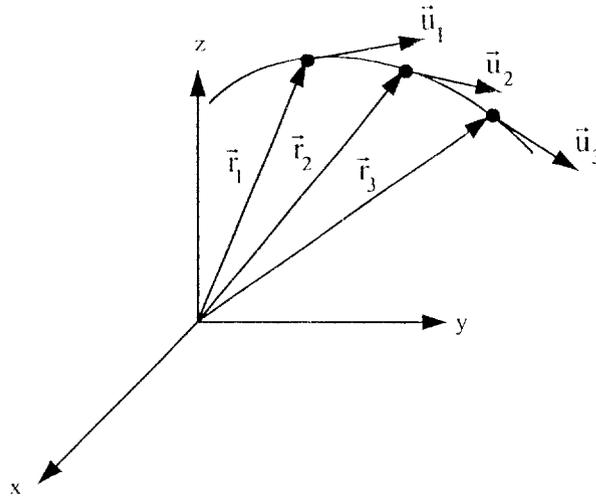


Figura 3.5: Una partícula de fluido describe una línea de trayectoria al seguir su posición en función del tiempo.

Las ecuaciones de la dinámica de los fluidos se simplifican en el caso de flujo estacionario. Por flujo estacionario entendemos aquel fluido en el cual la velocidad es constante en el tiempo en cualquier punto ocupado por el fluido. En otras palabras, \vec{u} es función únicamente de las coordenadas, de tal forma que

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

Cuando el flujo es estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, y coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido. Dicho de otra manera, si la velocidad no es función del tiempo, cualquier partícula de fluido siempre viaja a lo largo de una línea de corriente única. Sin embargo, cuando el flujo es no estacionario esto no ocurre debido a que las tangentes a las líneas de corriente proporcionan las direcciones de las velocidades de las partículas del fluido en varios puntos en el espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias proporcionan las direcciones de las velocidades de las partículas del fluido a varios tiempos.

3.1.2 ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA CURVA HELICOIDAL

Considérese un fluido ideal en estado estacionario cuya ecuación vectorial de la velocidad está representada por

$$\vec{u} = -\alpha y \hat{i} + \alpha x \hat{j} + \beta r \hat{k} \quad (3.7)$$

donde α y β son constantes positivas y r es la distancia radial al eje z (Morse y Feshbach, 1953).

Ya que $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, las componentes de la velocidad son

$$u_x = -\alpha y, \quad u_y = \alpha x, \quad u_z = \beta r \quad (3.8)$$

Las líneas de corriente que describen el campo de flujo para este fluido, se calculan a partir de la ecuación 3.3. Tomando

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad (3.9)$$

y sustituyendo los valores correspondientes para las componentes de la velocidad u_x y u_y se obtiene

$$\frac{dx}{-\alpha y} = \frac{dy}{\alpha x} \quad (3.10)$$

que al integrar se obtiene la ecuación de un círculo de radio constante

$$x^2 + y^2 = C_1 \quad (3.11)$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas para las coordenadas x y y son

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad (3.12)$$

donde se cumple que

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3.13)$$

y restringen el punto (x, y, z) al cilindro circular de radio r cuyo eje de simetría es el eje z , de manera que si ahora se especifica la coordenada z en términos de θ , el punto (x, y, z) será el trazo de una curva en la superficie del cilindro.

Para calcular la coordenada z en función de θ , de la ecuación 3.3 se toma

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z} \quad (3.14)$$

donde el diferencial de la ecuación paramétrica para la coordenada x es

$$dx = -r \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (3.15)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.14 la ecuación 3.15 y los valores correspondientes para u_x y u_z , se obtiene

$$\frac{-r \operatorname{sen} \theta d\theta}{-\alpha y} = \frac{dz}{\beta r} \quad (3.16)$$

e integrando se obtiene

$$z = \frac{\beta}{\alpha} r \theta \quad (3.17)$$

la cual representa la tercera ecuación paramétrica que junto con las ecuaciones para las coordenadas x y y describen las líneas de corriente para el flujo de un fluido ideal.

El caso donde z se incrementa a una tasa constante proporcional a θ , genera la curva llamada hélice, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \frac{\beta}{\alpha} r \theta \quad (3.18)$$

El vector de posición que describe la trayectoria de una partícula de fluido con respecto a un sistema de referencia euleriano, es decir, con respecto a un sistema de referencia fijo en el espacio y la partícula de fluido moviéndose con respecto a él, está representado por

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + \frac{\beta}{\alpha} r \theta \hat{k} \quad (3.19)$$

donde, al variar el ángulo θ en un intervalo determinado, el vector de posición describe la curva helicoidal tal como se muestra en la figura 3.6.

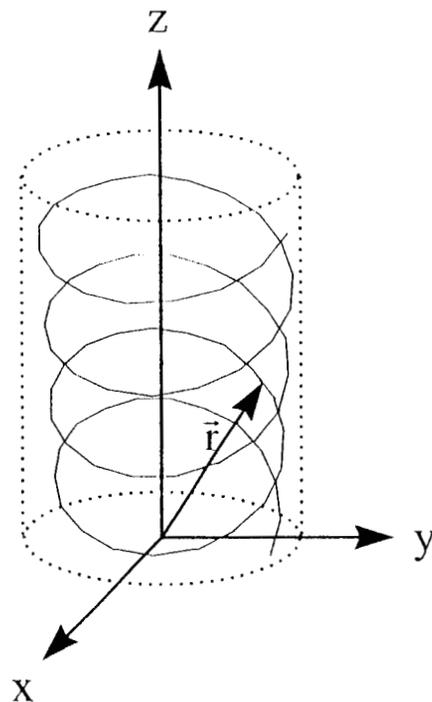


Figura 3.6: El vector de posición \vec{r} describe la curva helicoidal o hélice que asciende sobre la superficie del cilindro circular de radio r en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

3.1.3 CURVATURA Y TORSION DE LA CURVA HELICOIDAL

El cálculo de la curvatura y torsión de la curva helicoidal se determina mediante las fórmulas de Frenet Serret, las cuales involucran una triada de vectores unitarios ortogonales \vec{T} , \vec{N} y

\vec{B} (figura 3.7), que se mueven sobre la curva (Young, 1978).

El vector unitario tangente a la hélice en cualquier punto está definido por

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\vec{r}'(\theta)}{|\vec{r}'(\theta)|} \quad (3.20)$$

donde

$$\vec{r}'(\theta) = \frac{d\vec{r}}{d\theta} = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} \quad (3.21)$$

y

$$|\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \quad (3.22)$$

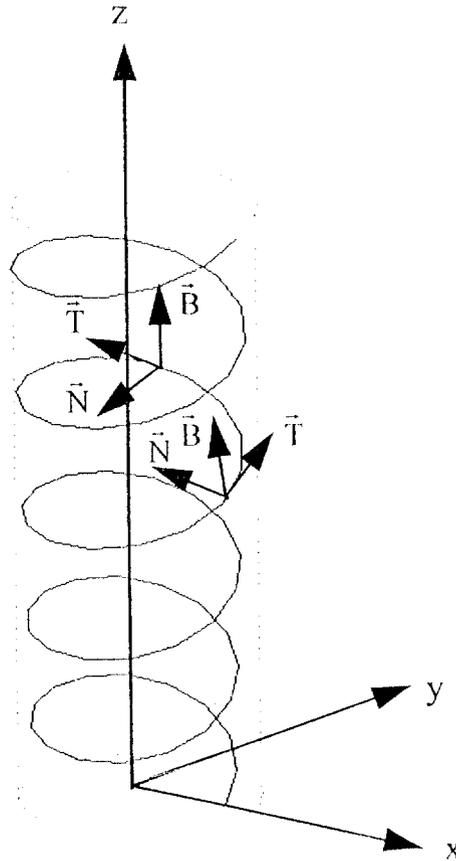


Figura 3.7: La triada de vectores unitarios \vec{T} , \vec{N} y \vec{B} se desplaza sobre la curva helicoidal cambiando continuamente de dirección a lo largo de ésta.

Evaluando 3.21 y 3.22 se obtiene

$$\vec{r}'(\theta) = \frac{d\vec{r}}{d\theta} = -r \operatorname{sen}\theta \hat{i} + r \cos\theta \hat{j} + \frac{\beta}{\alpha} r \hat{k} \quad (3.23)$$

y

$$\left| \vec{r}'(\theta) \right| = \frac{r}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (3.24)$$

Sustituyendo 3.23 y 3.24 en 3.20, se obtiene el vector unitario tangente a la hélice en cada punto, en función del ángulo θ :

$$\vec{T}(\theta) = \frac{-\alpha \operatorname{sen}\theta \hat{i} + \alpha \cos\theta \hat{j} + \beta \hat{k}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (3.25)$$

Si se sustituye el parámetro θ por una longitud de arco s que mida la distancia a lo largo de la hélice desde algún punto fijo de ella, se obtiene el vector de posición expresado en función del parámetro s representado por

$$\vec{r}(s) = x(s) \hat{i} + y(s) \hat{j} + z(s) \hat{k} \quad (3.26)$$

y el vector unitario tangente a la curva, en función de la longitud de arco en la dirección creciente de s , está dado por

$$\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad (3.27)$$

Denotando s como la longitud de arco de la curva desde el punto correspondiente a $\theta = a$ hasta un punto correspondiente a un valor arbitrario de θ , se puede expresar s por medio de la integral

$$s(\theta) = \int_a^\theta \left| \frac{d\vec{r}}{d\Theta} \right| d\Theta \quad (3.28)$$

Evaluando $s(\theta)$ para el vector de posición de la hélice desde $\theta = 0$, se obtiene

$$s(\theta) = \frac{r}{\alpha} \theta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (3.29)$$

Resolviendo para θ

$$\theta = \frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (3.30)$$

y sustituyendo en la ecuación 3.19 se obtiene el vector de posición

$$\vec{r}(s) = r \cos\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{i} + r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{j} + \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \beta \hat{k} \quad (3.31)$$

que al derivarse en función de s , se obtiene el vector tangente unitario

$$\vec{T}(s) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{i} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{j} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \hat{k} \quad (3.32)$$

expresados ambos en función de la longitud de arco s .

Si $\vec{T}(s)$ es el vector unitario tangente a la curva en cualquier punto, entonces

$$\vec{T}'(s) = \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \quad (3.33)$$

es normal a sí mismo. Entonces, el vector unitario normal principal, \vec{N} , se puede expresar como

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{N} \quad (3.34)$$

donde κ es un escalar positivo y representa la curvatura de la hélice en el punto correspondiente al parámetro s y está dada por

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \quad (3.35)$$

Para calcular la curvatura de la hélice, de la ecuación 3.32 se obtiene

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{\alpha^2}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \cos\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{i} - \frac{\alpha^2}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{j} \quad (3.36)$$

cuyo módulo es

$$\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{\alpha^2}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (3.37)$$

el cual representa la curvatura κ definida por la ecuación 3.35, es decir

$$\kappa = \frac{\alpha^2}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (3.38)$$

donde se observa que la curvatura de la hélice en cualquier punto es constante.

El vector unitario binormal a la curva en cualquier punto está definido por

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \quad (3.39)$$

y

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N} \quad (3.40)$$

donde el escalar τ es la torsión de la curva en el punto correspondiente al parámetro s .

A partir de las ecuaciones 3.34 y 3.35, el vector unitario normal puede ser expresado por

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{\left| d\vec{T}/ds \right|} \quad (3.41)$$

donde

$$\vec{N} = -\cos\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)\hat{i} - \text{sen}\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)\hat{j} \quad (3.42)$$

Una vez que se han calculado las expresiones para \vec{T} y \vec{N} , se encuentra la expresión para \vec{B} a partir de 3.39, siendo

$$\vec{B} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \text{sen}\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)\hat{i} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)\hat{j} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\hat{k} \quad (3.43)$$

cuya derivada con respecto a la longitud de arco s es

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\alpha\beta}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \cos\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{i} + \frac{\alpha\beta}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha s}{r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \hat{j} \quad (3.44)$$

Entonces, la torsión de la hélice se puede obtener de la ecuación 3.40, dando como resultado la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{\alpha\beta}{r(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (3.45)$$

donde se observa que la torsión es constante en cualquier punto.

A partir de las expresiones obtenidas para la curvatura y la torsión, se obtiene la relación que existe entre ambos parámetros

$$\tau = \frac{\beta}{\alpha} \kappa \quad (3.46)$$

siendo la torsión proporcional a la curvatura.

3.2 ECUACION DE CONTINUIDAD Y ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS CARTESIANAS

La ecuación de continuidad o ecuación de conservación de la masa para un fluido en régimen transitorio y en tres dimensiones está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.47)$$

donde el vector de la velocidad (\vec{v}) y la densidad (ρ) son funciones de la posición en el espacio y el tiempo. Esta ecuación, además de expresar el hecho de que la masa se conserva, expresa otra propiedad importante del fluido: implica que la velocidad local \vec{v} del fluido y la densidad varían en forma continua. Esto es, el flujo puede ser estacionario o transitorio, viscoso o sin fricción, compresible o incompresible.

Las ecuaciones de movimiento para un fluido real se pueden desarrollar considerando las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento del fluido, incluyendo los esfuerzos cortantes

generados por el movimiento del fluido y la viscosidad. Dicho desarrollo deriva en las ecuaciones de Navier–Stokes, llamadas así en honor de C. L. M. H. Navier (1785–1836) y Sir George G. Stokes (1819–1903) por haber sido los primeros en deducirlas. Son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y no lineales, que representan tres ecuaciones escalares que corresponden a los tres posibles valores que puede tomar el subíndice libre j , es decir, las tres direcciones de movimiento con respecto a un sistema de coordenadas. Expresando la ecuación general en notación por índices:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \quad (3.48)$$

donde μ representa el coeficiente de la viscosidad dinámica y κ representa el coeficiente de la viscosidad de bulbo.

En la ecuación 3.48, se observa que la viscosidad μ se considera dependiente de las coordenadas espaciales. Esto se hace porque en un flujo compresible, los cambios de la velocidad y presión, junto con el calor debido a la fricción, dan lugar a considerables variaciones de temperatura, las cuales pueden tomarse en cuenta en la ecuación de la energía (no incluida aquí). Sin embargo, como se está considerando un sistema isotérmico, no se toma en cuenta la ecuación de la energía. En el caso general, la dependencia de la viscosidad respecto a la temperatura deberá incorporarse en las ecuaciones que la rigen.

En aplicaciones generales, los parámetros desconocidos que aparecen en las ecuaciones de Navier–Stokes son las tres componentes de la velocidad (v_1, v_2, v_3), la presión (p), la densidad (ρ) y la viscosidad (μ). Para un fluido en equilibrio de composición conocida, la densidad y la viscosidad son función de la presión y de la temperatura. Por lo tanto, hay cinco variables primarias para el caso de un problema de flujo general: las tres componentes de la velocidad, la presión y la temperatura.

No obstante, en el caso de muchos flujos las variaciones de temperatura son tan pequeñas que puede suponerse que la densidad y la viscosidad son constantes en todo el campo de flujo. En estos casos sólo hay cuatro variables: las tres componentes de la velocidad (v_1, v_2, v_3) y la presión (p). Por eso se tiene, junto con la ecuación de continuidad, un sistema cerrado de cuatro

ecuaciones independientes que se pueden resolver para las cuatro variables.

Para muchos flujos - de líquidos principalmente - se puede suponer que no varíe la densidad. A este tipo de fluidos se les define como incompresibles, es decir, aquel fluido que al seguirlo durante su movimiento, no sólo permanece constante su masa sino también su volumen. La condición de continuidad para un fluido incompresible ($\rho = \text{constante}$) está dada a partir de la ecuación 3.47 como:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.49)$$

o expresada en notación por índices

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.50)$$

La ecuación 3.49 o 3.50 es la forma común de la ecuación de continuidad para flujos permanentes y no permanentes o transitorios de fluidos incompresibles, ya que la variación con el tiempo no aparece en forma explícita aún cuando el flujo no sea estacionario. Los únicos parámetros desconocidos en esta ecuación escalar son las tres componentes de la velocidad (v_1, v_2, v_3).

Restringiendo el análisis al caso de un flujo con densidad y viscosidad constantes, la ecuación 3.48 se reduce al caso particular de un fluido newtoniano e incompresible:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (3.51)$$

Desarrollando la ecuación 3.51 en sus tres direcciones:

componente x_1 ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \mu \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right] \quad (3.52)$$

componente x_2 ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \mu \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right] \quad (3.53)$$

componente x_3 ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \mu \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right] \quad (3.54)$$

o expresada en notación de Gibbs,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.55)$$

donde el primero y segundo términos del lado izquierdo de la ecuación 3.55 representan la aceleración temporal local (o término de acumulación) y la aceleración convectiva del fluido (o simplemente efectos convectivos), respectivamente. El primer término del lado derecho representa la fuerza de presión por unidad de volumen, el segundo la fuerza gravitacional por unidad de volumen y el tercero la fuerza viscosa por unidad de volumen. Es decir, los tres términos del lado derecho de la ecuación representan la suma de las fuerzas que actúan (por unidad de volumen) sobre una partícula de fluido.

El miembro izquierdo de la ecuación 3.55 representa la aceleración total del elemento de fluido. En forma individual, el primer término representa el hecho de que para cualquier punto fijo del espacio, la velocidad del fluido varía con el tiempo. A este término también se le llama rapidez temporal de cambio local. El segundo término representa el cambio en la velocidad cuando el tiempo está fijo y cambian las coordenadas espaciales. Es decir, indica que en un flujo independiente del tiempo (estacionario) hay un cambio en la velocidad debido a que al fluir el sistema, el elemento de fluido que estamos considerando, cambia su posición y por lo tanto induce un cambio en la velocidad. Es decir, representa el cambio en la velocidad debido a que el elemento de fluido fue transportado a una nueva posición. Puesto que el cambio se debe a que el elemento se “mueve” (pues hay un flujo), a este término se le llama rapidez de cambio convectivo.

La no linealidad de la ecuación de Navier-Stokes, representada por el término de aceleración convectiva, surge del doble papel que desempeña la velocidad en determinar la aceleración de una partícula de fluido. Esta no linealidad es responsable de la dificultad matemática que se presenta al tratar de describir la dinámica de los fluidos en movimiento. Es por esto, que gran parte de la información que se tiene del comportamiento dinámico de éstos, se debe a las observaciones realizadas en experimentos de laboratorio y de la observación de los fenómenos naturales. Sin embargo, se han resuelto numéricamente una gran variedad de problemas viscosos de interés, y para ciertos casos, se ha despreciado el término no lineal al considerar bajos números de Reynolds, lo cual ha permitido el desarrollo de importantes expresiones matemáticas. Una de ellas es la fórmula de Stokes (Stokes, 1851), que describe la fuerza de arrastre que ejerce el fluido sobre la superficie de una esfera en movimiento rectilíneo uniforme.

La fuerza total que ejerce la presión por unidad de volumen, representa la variación de la presión en las tres direcciones en un campo de flujo general. Por ejemplo, la fuerza neta por unidad de volumen que actúa en la dirección x_1 como resultado de un cambio de presión en tal dirección está representada en la ecuación 3.52 por el término $-\frac{\partial p}{\partial x_1}$. El gradiente de presiones siempre aparece en toda ecuación dinámica; cuando un fluido es puesto en movimiento, el campo de presión es diferente con respecto al que existe cuando el fluido está en reposo y actúa únicamente la presión hidrostática ($\rho \vec{g}$).

La contribución de la fuerza de la gravedad se considera incluida en la ecuación, ya que en la gran mayoría de los casos el movimiento de un fluido ocurre en un campo gravitacional. Este término es comúnmente conocido como fuerza volumétrica, porque actúa sobre el volumen de una partícula de fluido, no sobre su superficie tal como actúan los esfuerzos entre las partículas de fluido.

Los componentes de la gravedad expresados en notación por índices (Demm, 1980) están dados por

$$g_i = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (3.56)$$

donde el signo negativo se debe a que la altura se mide hacia arriba y la fuerza gravitacional en sentido contrario.

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación 3.51 se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (p + \rho gh) + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (3.57)$$

haciendo

$$P = p + \rho gh \quad (3.58)$$

donde el escalar P es llamado la presión equivalente, la ecuación 3.55 puede expresarse en forma más compacta por

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.59)$$

La ecuación de continuidad y la ecuación de Navier Stokes expresadas en forma vectorial, constituyen un par de ecuaciones diferenciales parciales simultáneas. Ambas representan leyes físicas (conservación de masa y conservación de momentum) las cuales siempre se aplicarán a cada partícula de fluido. Juntas proporcionan una ecuación escalar y una ecuación vectorial para una variable escalar (la presión) y una variable vectorial (la velocidad), es decir, se tiene un sistema cerrado en donde el número de incógnitas coincide correctamente con el número de ecuaciones.

3.3 GENERALIZACION DEL MOVIMIENTO HELICOIDAL COMO SUPERPOSICION DE DOS FLUJOS

La superposición de dos o más flujos permite obtener campos de flujo más prácticos y/o más complejos. El movimiento helicoidal de un fluido puede obtenerse a partir de la superposición de dos flujos. En el primer campo de flujo desarrollado se considera la superposición de un flujo de Hagen-Poiseuille y un flujo torsional, ambos flujos unidireccionales, sin considerar a la esfera.

En el segundo campo de flujo sí se considera a la esfera y se describe el movimiento del fluido a partir de la superposición del flujo generado por el movimiento circular de la esfera y un flujo uniforme en la dirección axial. Este es el modelo propuesto en el presente trabajo.

3.3.1 SUPERPOSICION DE UN FLUJO DE HAGEN- POISEUILLE Y UN FLUJO TORSIONAL

Mediante la superposición de flujos unidireccionales, es posible obtener diversos tipos de flujo más complejos conocidos como multidireccionales. Cada uno de los perfiles de velocidad de los flujos unidireccionales es la solución de la ecuación de movimiento referida al sistema de coordenadas acorde con la geometría del problema, y que es lineal con respecto al único componente de la velocidad. Esta condición se satisface para diversos flujos unidireccionales tales como flujos radiales, rectilíneos, torsionales, etc., en donde la omisión del término no lineal (convectivo) siempre resulta en una ecuación diferencial lineal. De esta forma, todas las categorías de flujos unidireccionales que cumplen con estas características pueden superponerse para generar flujos en dos y tres direcciones. El vector de la velocidad de tales flujos multidireccionales está dado por

$$\vec{u} = u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2 + u_3\hat{e}_3 \quad (3.60)$$

el cual está formado por los componentes de la velocidad u_1 , u_2 y u_3 de los flujos unidireccionales superpuestos.

FLUJO DE HAGEN- POISEUILLE

El flujo de Hagen-Poiseuille, nombrado así a partir de los experimentos realizados por G. Hagen y J. L. Poiseuille en tubos capilares en 1839, se presenta en tubos o cuando el líquido es forzado a fluir bajo presión. El flujo es generado ya sea en forma mecánica mediante el uso de una bomba, lo cual crea un gradiente de presión constante $\Delta p/\Delta L$, o por acción de la gravedad, \vec{g} , cuando la posición del tubo no es horizontal. La figura 3.8 presenta la geometría de este tipo de flujo.

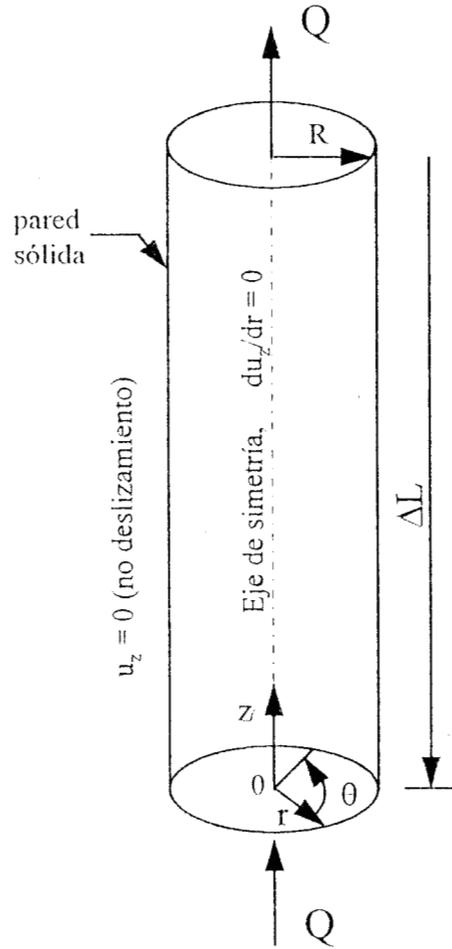


Figura 3.8: Flujo axisimétrico de Hagen–Poiseuille

Suponiendo que todas las líneas de flujo son paralelas a la pared del cilindro, el componente de la velocidad del fluido en la dirección radial es cero, es decir

$$u_r = 0 \quad (3.61)$$

Si el flujo está completamente desarrollado, entonces el perfil de velocidad no varía a lo largo del eje de flujo $u_z \neq u_z(z)$ y la velocidad del fluido en la dirección angular es cero $u_\theta = 0$.

A partir de las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas (apéndice A), se obtiene la ecuación diferencial para el flujo en estado estacionario de un fluido newtoniano e incompresible a través del cilindro de la figura 3.8. La ecuación resultante está dada por

$$\frac{dp}{dz} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) + \rho g_z \quad (3.62)$$

la cual se resuelve con las condiciones a la frontera:

$$\text{en } r = 0, \quad \frac{du_z}{dr} = 0 \quad (3.63)$$

y

$$\text{en } r = R, \quad u_z = 0 \quad (3.64)$$

Haciendo $g_z = -g$ para un tubo vertical e integrando la ecuación 3.62, resulta

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{\Delta L} + \rho g \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.65)$$

La constante de integración C_1 es igual a cero por dos razones. La primera se observa en la ecuación donde para un valor de $r = 0$, el logaritmo tiende a infinito. Por lo tanto, para evitar este punto singular, el valor de esta constante debe ser cero. La segunda razón surge de la primera condición a la frontera, la cual significa que la derivada de la velocidad debe permanecer finita en el centro del cilindro.

La constante de integración C_2 se evalúa de la condición de no deslizamiento en la superficie interna del cilindro. Por lo tanto, la expresión para la velocidad del fluido está dada por

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{\Delta L} + \rho g \right) (r^2 - R^2) \quad (3.66)$$

la cual representa un perfil de velocidad parabólico.

FLUJO TORSIONAL

Los flujos torsionales son generados por la rotación de fronteras sólidas en contacto con líquidos. El líquido, debido a la condición a la frontera de no deslizamiento, tiene que seguir el movimiento de la frontera sólida, siendo generado de esta forma un flujo torsional.

Supongamos que un fluido de densidad y viscosidad constantes está contenido en un recipiente cilíndrico de radio R , tal como se muestra en la figura 3.9. El cilindro rota alrededor de

su eje con una velocidad angular Ω . El eje del cilindro es horizontal, de forma que $g_\theta = g_z = 0$ y $g_r = -g$. Cuando se alcanza el estado estacionario y el flujo está completamente desarrollado, se puede suponer que el flujo es axisimétrico con respecto al sistema de coordenadas cilíndricas.

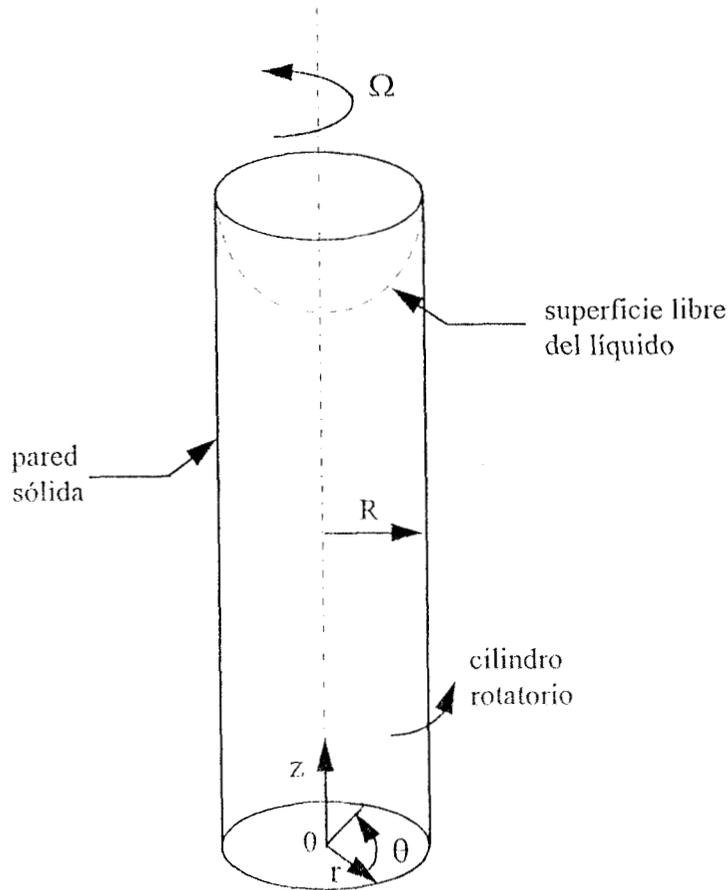


Figura 3.9: Superficie libre de un líquido que gira, cuya forma es la de un paraboloide de revolución.

En el estado estacionario $u_r = u_z = 0$ y $u_\theta \neq 0$, lo cual significa que el flujo es unidireccional, donde el único componente de la velocidad, u_θ , es función únicamente del radio, es decir

$$u_\theta = u_\theta(r) \quad (3.67)$$

La ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas (apéndice A) en la dirección θ se reduce a

$$\mu \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_\theta) \right] = 0 \quad (3.68)$$

la cual puede integrarse de forma inmediata para obtener

$$u_\theta = \frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3.69)$$

en la que C_1 y C_2 son constantes de integración. Como u_θ no puede ser infinito para $r = 0$, la constante C_2 ha de ser cero. Se sabe además que para $r = R$ la velocidad u_θ es $R\Omega$. De acuerdo con esto puede evaluarse C_1 y llegar a

$$u_\theta = \Omega r \quad (3.70)$$

lo que establece que cada elemento del fluido que gira se mueve de igual forma que los elementos de un cuerpo rígido.

SUPERPOSICION DEL FLUJO DE HAGEN-POISEUILLE Y EL FLUJO TORSIONAL

La superposición del flujo de Hagen-Poiseuille cuyo componente de velocidad está dado por la ecuación 3.66,

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} (r^2 - R^2)$$

y un flujo torsional de velocidad

$$u_\theta = \Omega r$$

referida en la ecuación 3.70, resulta en un flujo helicoidal cuyo vector de la velocidad está dado por

$$\vec{u} = u_z \hat{e}_z + u_\theta \hat{e}_\theta = \left[\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} (r^2 - R^2) \right] \hat{e}_z + [\Omega r] \hat{e}_\theta \quad (3.71)$$

tal como se muestra en la figura 3.10, donde se observa que el flujo asciende en sentido contrario a las manecillas de un reloj debido a que la rotación del cilindro en el flujo torsional es en ese mismo sentido.

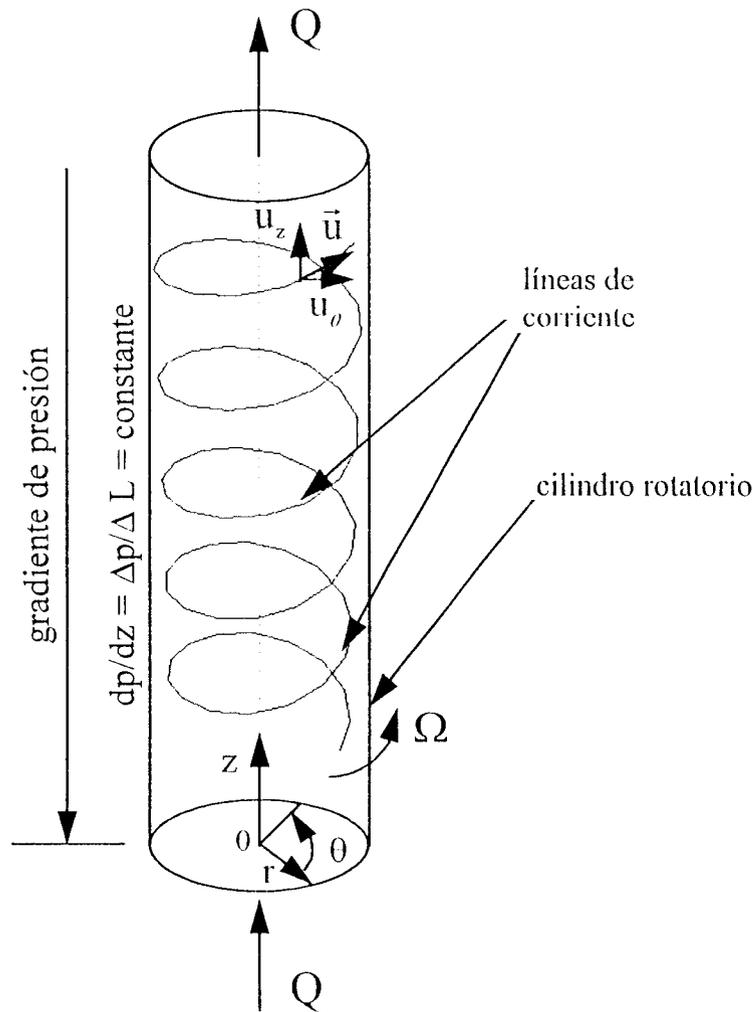


Figura 3.10: La superposición de un flujo de Hagen-Poiseuille y un flujo torsional resulta en un flujo helicoidal.

3.4 MODELO DEL MOVIMIENTO HELICOIDAL DE UNA ESFERA SOLIDA

Como ya se dijo anteriormente, el movimiento helicoidal para una esfera sólida se obtiene a partir de la superposición de dos flujos: el generado por el movimiento circular de la esfera y un flujo uniforme en la dirección axial.

El movimiento circular de la esfera se obtiene a partir de la superposición de dos movimientos armónicos simples desfasados $\frac{\pi}{2}$. A este respecto, es conveniente hacer una breve introducción

de las características del movimiento armónico simple (MAS) y su relación con el movimiento circular uniforme, tal y como se describe a continuación.

3.4.1 MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

El desplazamiento de una partícula en un movimiento periódico se puede expresar siempre mediante senos y cosenos. Como el término armónico se aplica a expresiones que contienen esas funciones, el movimiento periódico se llama a menudo movimiento armónico.

Si una partícula que tiene movimiento periódico se mueve alternativamente en un sentido y en otro siguiendo la misma trayectoria, a su movimiento se le denomina oscilatorio o vibratorio. La relación que existe entre el movimiento armónico simple y la curva senoidal se ilustra en la figura 3.11. Un plumón sujeto a una esfera que oscila en forma vertical traza una onda sobre un rollo de papel que se mueve horizontalmente con velocidad constante. El desplazamiento vertical de la esfera desde la posición de equilibrio se realiza a lo largo de la coordenada x . Las unidades de tiempo están representadas en la coordenada t .

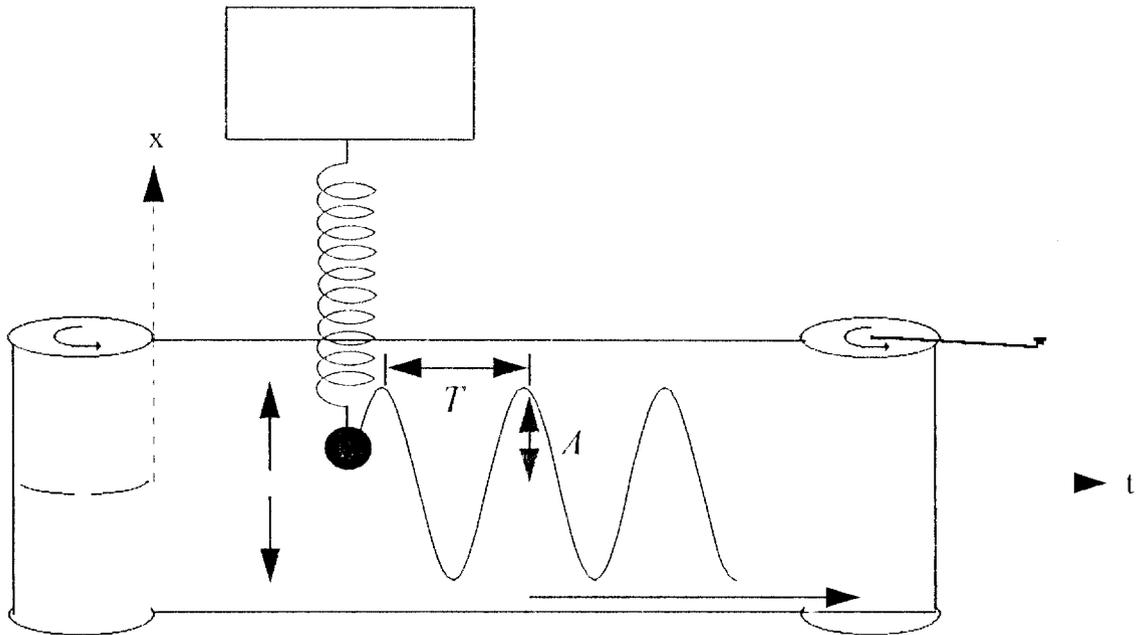


Figura 3.11: El resorte oscilante ilustra la naturaleza sinusoidal del MAS en función del tiempo.

Se dice que una partícula que se mueve a lo largo del eje x presenta un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x , desde la posición de equilibrio, varía en el tiempo de acuerdo

con la relación

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.72)$$

donde A , ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar un significado físico a estas constantes, es conveniente graficar x como función del tiempo t , representado en la figura 3.12. Se puede observar que A , llamada la amplitud del movimiento, es simplemente el máximo desplazamiento de la partícula ya sea en la dirección positiva o negativa de x . La constante ω es la frecuencia angular del movimiento y está definida por

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3.73)$$

donde f es la frecuencia del movimiento y representa el número de oscilaciones que la partícula realiza en la unidad de tiempo (*ciclos/seg* o *hertz*). El periodo T es el tiempo que le lleva a la partícula completar un ciclo de su movimiento (*seg/ciclo*), es decir, el tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos. Las unidades de la frecuencia angular son *rad/seg*.

El ángulo constante ϕ se llama constante de fase o ángulo de fase inicial del movimiento y junto con la amplitud quedan determinados unívocamente por el desplazamiento y la velocidad inicial de la partícula. Las constantes ϕ y A nos dicen cuál era el desplazamiento en $t = 0$. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama la fase del movimiento y es de utilidad en la comparación del movimiento de los sistemas de partículas. Se observa en la figura 3.12 que la función x es periódica y se repite cuando ωt se incrementa en 2π radianes.

La velocidad de una partícula que sigue un movimiento armónico simple se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación 3.72:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.74)$$

La aceleración de la partícula está dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.75)$$

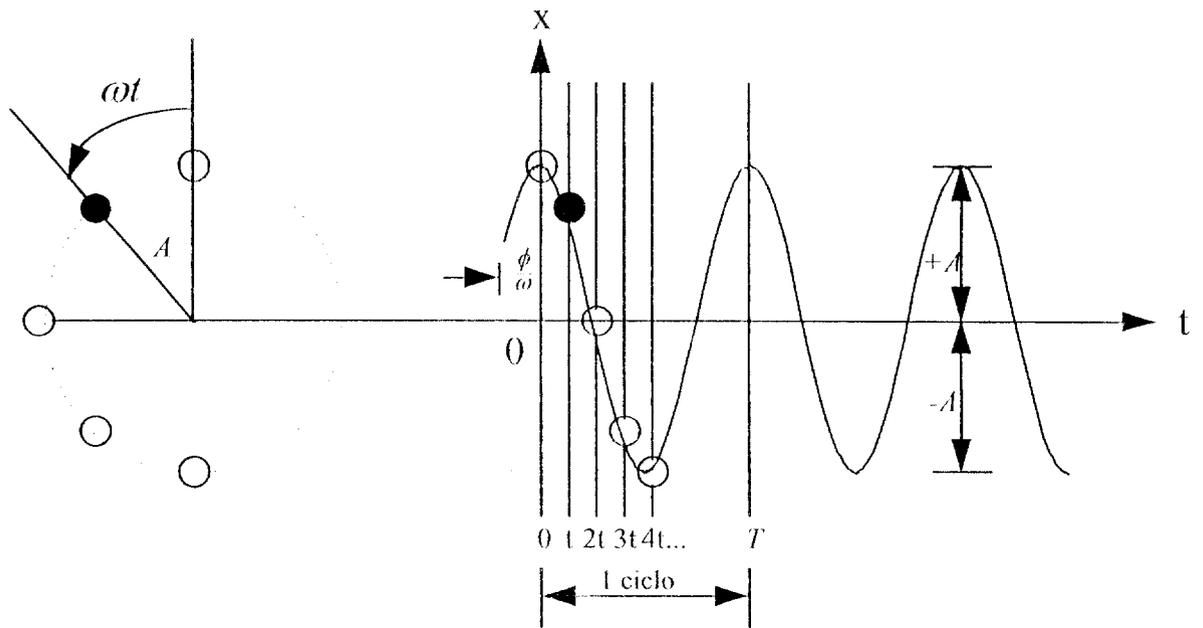


Figura 3.12: Movimiento armónico simple de periodo T y amplitud A .

Dado que $x = A \cos(\omega t + \phi)$, la ecuación 3.75 se puede expresar en la siguiente forma

$$a = -\omega^2 x \quad (3.76)$$

De la ecuación 3.74, tomando en cuenta que los valores de la función seno o coseno oscilan entre ± 1 , los valores extremos de v son igual a $\pm \omega A$. En la ecuación 3.75 se puede ver que los valores extremos de la aceleración son $\pm \omega^2 A$. Por lo tanto, los máximos valores de la velocidad y la aceleración son

$$v_{\max} = \omega A \quad (3.77)$$

$$a_{\max} = \omega^2 A \quad (3.78)$$

La figura 3.13 representa el desplazamiento contra el tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. La proyección de un punto moviéndose con un movimiento circular uniforme

en un círculo de referencia de radio A también se mueve en forma senoidal.

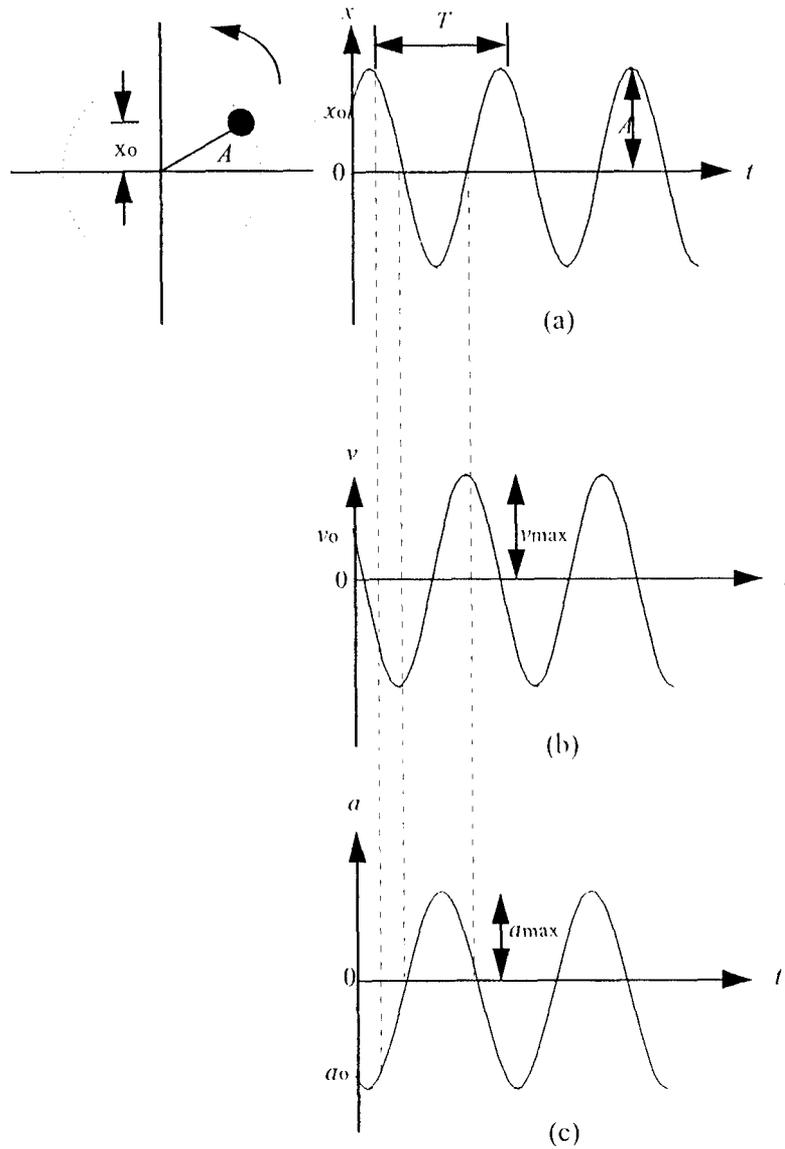


Figura 3.13: Representación gráfica del desplazamiento, velocidad y aceleración de la partícula en el MAS, en función del tiempo.

Las curvas de velocidad y aceleración contra el tiempo se muestran en las figuras 3.13-b y 3.13-c, respectivamente. En estas curvas se observa cómo la fase de la velocidad difiere en $\frac{\pi}{2}$ rad, o 90° , con la fase del desplazamiento. Esto es, cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. De igual forma, cuando x es cero, la rapidez es un máximo. Se puede observar también que la fase de la aceleración difiere en π rad, o 180° , de la fase del desplazamiento.

Esto es, cuando x es un máximo, a es un máximo en la dirección opuesta.

3.4.2 RELACION ENTRE EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Uno de los procedimientos más útiles para describir el movimiento armónico simple se obtiene considerándolo como la proyección de un movimiento circular uniforme. Este hecho es muy simple y se ilustra en forma gráfica en la figura 3.14. Considérese una partícula P que se mueve con velocidad lineal uniforme v_r y velocidad angular uniforme ω , alrededor de un círculo de radio r con centro en O .

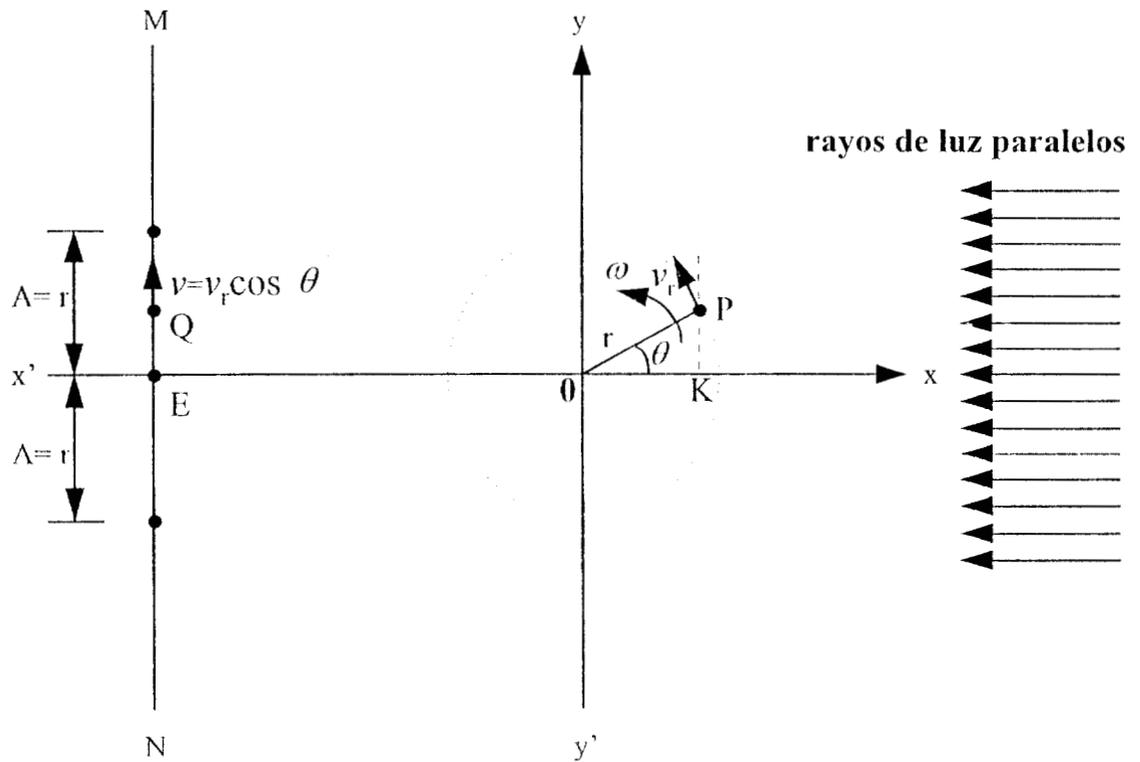


Figura 3.14: La sombra de una partícula Q describe un movimiento armónico simple, mientras ésta describe una trayectoria circular con movimiento uniforme.

La partícula está en movimiento circular uniforme. Imaginemos rayos de luz paralelos al eje x produciendo la sombra del punto P que se mueve sobre la línea MN paralela al eje y y perpendicular al eje x en el punto E . Sea Q la sombra del punto P sobre la línea MN . Conforme se mueve P en movimiento circular uniforme, el punto Q oscila en un sentido y otro

a lo largo de la línea MN con movimiento armónico simple.

Por otro lado, supóngase que una esfera rígida, considerada hipotéticamente como un cuerpo puntual, describe una trayectoria circular. El sistema de referencia está localizado en el centro de la circunferencia, es decir, está fijo en el espacio y la partícula se mueve angularmente con radio constante con respecto a él, de modo que la posición de ésta cambia con respecto al tiempo. La figura 3.15 muestra a esta partícula, a la que llamamos P , en movimiento circular uniforme; su velocidad angular es ω y el radio del círculo que describe es R .

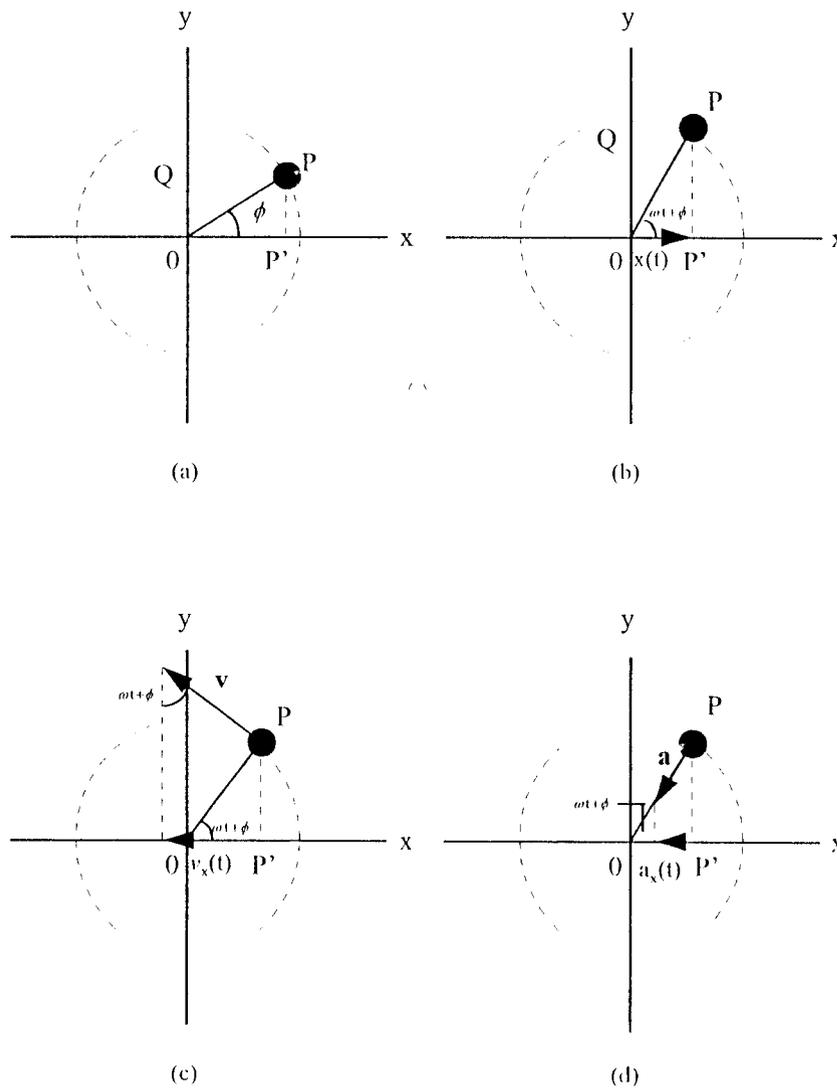


Figura 3.15: Relación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme.

En el tiempo $t = 0$ (figura 3.15 a) el radio OP forma un ángulo ϕ con el eje x . En un

tiempo t más tarde (figura 3.15 b) el radio OP forma un ángulo $\omega t + \phi$ con el eje x , y la proyección de OP a lo largo del eje x (o, lo que es equivalente, la componente x del radiovector que corresponde a OP) es

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi) \quad (3.79)$$

Esta expresión es, por supuesto, idéntica a la ecuación 3.72 para el desplazamiento del oscilador armónico simple, correspondiendo la amplitud A de la onda con el radio R del círculo. Si ahora P' representa la proyección de la partícula P sobre el eje x , entonces P' ejecuta un movimiento armónico simple a lo largo del eje x .

Invirtiéndolo el argumento anterior, se puede establecer que la ecuación 3.79 para el desplazamiento de un oscilador armónico simple es suficiente para describir a la componente x de un vector cuya punta trace una trayectoria circular con velocidad constante. Para tener una descripción completa del vector, es conveniente describir a la componente y . Las figuras 3.15 a y 3.15 b muestran a la proyección y OQ en los tiempos 0 y t . La componente y puede expresarse por

$$y(t) = R \sin(\omega t + \phi) \quad (3.80)$$

El vector de posición de la partícula en el plano $x - y$, en el tiempo t , está expresado por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = R \cos(\omega t + \phi)\hat{i} + R \sin(\omega t + \phi)\hat{j} \quad (3.81)$$

Nótese que la proyección del movimiento circular uniforme a lo largo de la dirección y representa también el movimiento armónico simple, como lo haría la proyección a lo largo de cualquier dirección. Nótese también que, en todo tiempo t ,

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3.82)$$

como se espera para el movimiento circular.

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad tangencial constante es ωR . La figura 3.15-c muestra al vector que representa a la velocidad instantánea \vec{v} en el

tiempo t . La componente x de \vec{v} , la cual da la velocidad de P' a lo largo de la dirección x , es

$$v_x(t) = -\omega R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (3.83)$$

y la componente y de \vec{v} , la cual da la velocidad de P' a lo largo de la dirección y , es

$$v_y(t) = \omega R \cos(\omega t + \phi) \quad (3.84)$$

entonces, el vector que expresa la velocidad de la partícula al moverse en el plano $x - y$, está expresado por

$$\vec{v} = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} = -\omega R \operatorname{sen}(\omega t + \phi)\hat{i} + \omega R \cos(\omega t + \phi)\hat{j} \quad (3.85)$$

En el movimiento circular, la aceleración centrípeta es $\omega^2 R$, y como se muestra en la figura 3.15-d, la componente x de la aceleración de P es

$$a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi) \quad (3.86)$$

y la componente y de la aceleración es

$$a_y(t) = -\omega^2 R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (3.87)$$

entonces, el vector que expresa la aceleración de la partícula al moverse en el plano $x - y$, está expresado por

$$\vec{a} = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi)\hat{i} - \omega^2 R \operatorname{sen}(\omega t + \phi)\hat{j} \quad (3.88)$$

Las ecuaciones 3.83 y 3.86 son idénticas a las ecuaciones 3.74 y 3.75 para el movimiento armónico simple, donde una vez más A es reemplazado por R . Por lo tanto, se concluye que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son idénticos en el movimiento armónico simple y en la proyección del movimiento circular.

Al usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ se puede reescribir la ecuación 3.80 como:

$$y(t) = R \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) \quad (3.89)$$

de tal forma que la ecuación 3.81 puede ser expresada como

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = R \cos(\omega t + \phi)\hat{i} + R \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})\hat{j} \quad (3.90)$$

siendo el vector de posición expresado en función de dos movimientos armónicos simples desfasados $\pi/2$. Entonces el movimiento circular puede considerarse como la combinación de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con amplitudes y frecuencias idénticas pero difiriendo en fase en 90° .

3.4.3 MOVIMIENTO CIRCULAR DE UNA ESFERA SOLIDA

La relación que existe entre el movimiento circular uniforme y el movimiento armónico simple, tal y como se analizó en la sección anterior, será de utilidad para poder describir el movimiento circular de una esfera sólida a partir de la superposición de dos movimientos armónicos simples desfasados 90° . Esta esfera se encuentra inmersa en un fluido newtoniano estático y al estar en movimiento provoca que el fluido se mueva al paso de ésta. Por lo tanto, se puede describir el movimiento del fluido mediante las ecuaciones hidrodinámicas que lo gobiernan, para determinar el campo de la velocidad del fluido en la vecindad de la esfera, el campo de la presión y la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre su superficie, utilizando las condiciones a la frontera apropiadas.

El planteamiento de este modelo teórico requiere de una serie de suposiciones que permitan la simplificación del modelo:

1. El radio del círculo sobre el cual se mueve la esfera es muy grande comparado con el radio de ésta:

$$\mathcal{R} \gg R \quad (3.91)$$

donde \mathcal{R} es el radio del círculo y R es el radio de la esfera, tal como se observa en la figura 3.16.

2. El movimiento es uniforme, es decir, la magnitud del vector de la velocidad de la esfera

es constante.

3. El diámetro y la velocidad de la esfera son muy pequeños, lo cual nos permite suponer flujo reptante con números de Reynolds mucho menores que uno ($Re_b < 0.1$).
4. Las propiedades del fluido son constantes, es decir, propiedades tales como la densidad, viscosidad y temperatura del líquido se mantienen constantes.

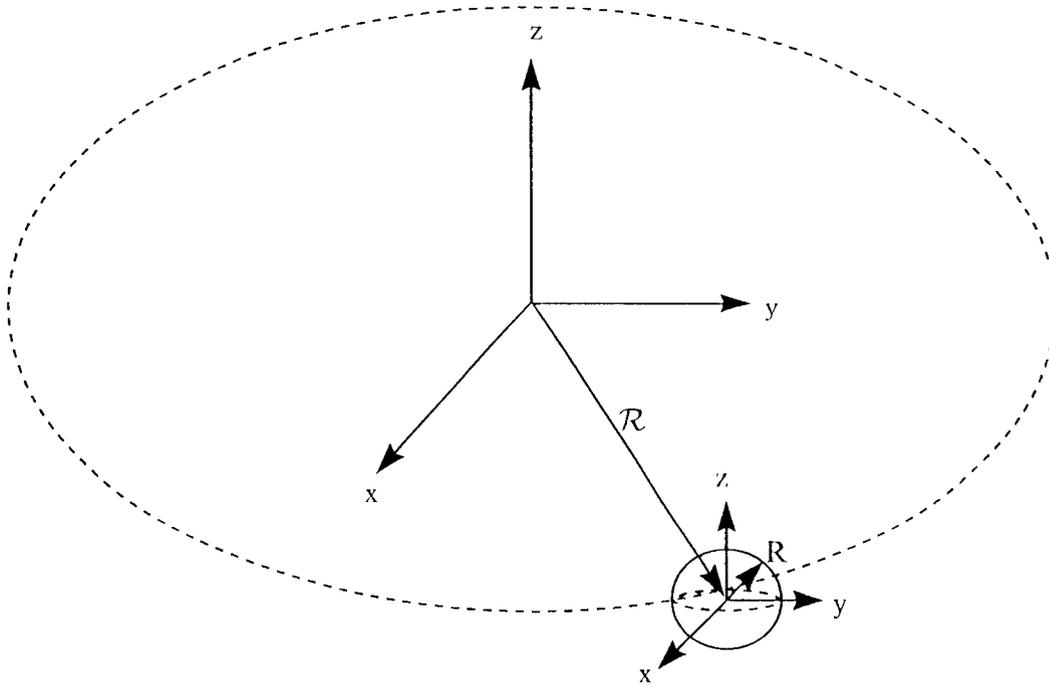


Figura 3.16: La esfera de radio R describe una trayectoria circular con movimiento uniforme desplazándose en el plano $x - y$.

Estas suposiciones permiten que se pueda analizar el campo de flujo alrededor de la esfera en una trayectoria muy grande en un intervalo de tiempo considerable.

CAMPO DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO

Las ecuaciones hidrodinámicas que describen el comportamiento de un fluido newtoniano e incompresible fueron analizadas en la sección 3.2 y son la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{3.92}$$

y la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.93)$$

donde

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.94)$$

representa la viscosidad cinemática del fluido.

Las condiciones de frontera para este problema son:

$$\text{C. F. 1} \quad \vec{v} = 0 \quad \text{en } r \rightarrow \infty \quad (3.95)$$

y

$$\text{C. F. 2} \quad \vec{v} = \vec{u} \quad \text{en } r = R \quad (3.96)$$

El análisis de orden de magnitud de la ecuación 3.93 permite despreciar el término inercial no lineal para números de Reynolds muy bajos ($Re_b < 0.1$), y la ecuación de movimiento se reduce a una ecuación lineal:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.97)$$

En particular, en este problema no se puede considerar que el fenómeno ocurra en estado estacionario, ya que la dependencia con el tiempo está ligada con el movimiento armónico. Por lo tanto, el fenómeno ocurre en estado transitorio y en la ecuación de movimiento se debe considerar la aceleración local del fluido.

La solución analítica de la ecuación 3.97 se obtiene a partir de la metodología desarrollada por Landau y Lifshitz (1979), los cuales obtuvieron el campo de la velocidad del fluido para una esfera que realiza una oscilación traslacional. En nuestro caso, la metodología se aplica a una esfera que describe una trayectoria circular, la cual puede representarse como la superposición de dos movimientos traslacionales.

Tomando el rotacional de la ecuación 3.97 se obtiene

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{v})}{\partial t} = \nu \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) \quad (3.98)$$

El vector \vec{v} , que representa la velocidad del fluido, se puede expresar como el rotacional de un vector, es decir

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{B} \quad (3.99)$$

la cual satisface la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 \quad (3.100)$$

donde \vec{B} es un vector cualquiera.

El rotacional de un vector polar es un vector axial y viceversa, el rotacional de un vector axial es un vector polar. Ya que la velocidad es un vector polar ordinario, el vector \vec{B} debe ser un vector axial.

A partir de la geometría física del problema en cuestión, es posible construir una expresión para el vector \vec{B} . Ya que este vector depende solamente del vector de posición \vec{r} (tomando el origen en el centro de la esfera) y de la velocidad de la esfera \vec{u} , el único vector axial que puede construirse para un cuerpo simétrico como la esfera, a partir de dos vectores polares, es el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{u}$. Tomando el vector de la velocidad de la esfera paralelo al eje axial, tal como se describe en la figura 4.17, el producto vectorial de ambos vectores polares proporciona el vector \vec{B} ,

$$\vec{B} = \vec{r} \times \vec{u} \quad (3.101)$$

el cual es tangente a la superficie de la esfera.

Entonces, el vector axial \vec{B} queda expresado como

$$\vec{B} = f'(r) \hat{n} \times \vec{u} \quad (3.102)$$

donde $f'(r)$ es una función escalar del vector de posición \vec{r} y \hat{n} es un vector unitario en la dirección de \vec{r} . Ya que

$$f'(r) \hat{n} = \nabla f(r) \quad (3.103)$$

el vector \vec{B} quedaría expresado por

$$\vec{B} = f'(r) \hat{n} \times \vec{u} = \nabla f \times \vec{u} \quad (3.104)$$

y sustituyendo la expresión obtenida para el vector \vec{B} en la ecuación de la velocidad del fluido (ec. 3.99), se obtiene

$$\vec{v} = \nabla \times (\nabla f \times \vec{u}) = \nabla \times (\nabla \times f \vec{u}) \quad (3.105)$$

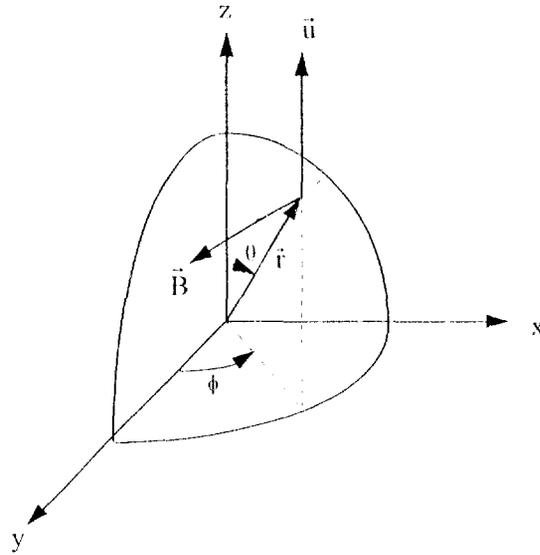


Figura 3.17: El vector \vec{B} tangente a la superficie de la esfera se construye a partir de su vector de posición y la velocidad de la esfera.

Se ha mencionado que el vector \vec{u} representa la velocidad de la esfera, mas sin embargo no se ha desarrollado expresión alguna que la represente. La velocidad de la esfera que describe una trayectoria circular se obtiene al superponer la velocidad de oscilación horizontal y la velocidad de oscilación vertical, es decir

$$\vec{u} = \vec{u}_o e^{-i\omega t} \quad (3.106)$$

representa la velocidad de la esfera al oscilar con movimiento armónico simple en una trayectoria horizontal (Davis, 1988; Landau y Lifshitz, 1979) y,

$$\vec{u} = \vec{u}_o e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (3.107)$$

representa la velocidad de la esfera que oscila con movimiento armónico simple, pero ahora en una trayectoria vertical. La superposición de ambas velocidades permite obtener la expresión para la velocidad de la esfera que describe una trayectoria circular:

$$\vec{u} = \vec{u}_o e^{-i\omega t} + \vec{u}_o e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (3.108)$$

la cual se reduce a

$$\vec{u} = \vec{u}_o (1 - i) e^{-i\omega t} \quad (3.109)$$

donde \vec{u}_o es un vector constante cuya magnitud está dada por

$$u_o = |\vec{u}_o| = A e^{-i\phi} \quad (3.110)$$

siendo A la amplitud de la oscilación y ϕ la constante de fase.

El exponencial complejo $e^{-i\omega t}$ proporciona a la velocidad de la esfera la naturaleza sinusoidal de su movimiento en función del tiempo. En base a la identidad de Euler, el exponencial complejo puede ser expresado como

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (3.111)$$

Debido a que la parte real de una solución compleja es la única que tiene sentido físico, este factor asegura la dependencia del movimiento oscilatorio en función del tiempo.

Sustituyendo la velocidad de la esfera en movimiento circular (ec. 3.109) en la ecuación 3.105, la velocidad del fluido está dada entonces por

$$\vec{v} = \nabla \times \left\{ \nabla \times f \left[\vec{u}_o^{\rightarrow} (1-i) e^{-i\omega t} \right] \right\} = (1-i) e^{-i\omega t} \nabla \times [\nabla \times (f \vec{u}_o^{\rightarrow})] \quad (3.112)$$

Tomando el rotacional de la ecuación anterior,

$$\nabla \times \vec{v} = (1-i) e^{-i\omega t} \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times f \vec{u}_o^{\rightarrow})] \quad (3.113)$$

y usando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (3.114)$$

donde $\vec{F} = \nabla \times f \vec{u}_o^{\rightarrow}$, se obtiene

$$\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times f \vec{u}_o^{\rightarrow})] = -\nabla^2 (\nabla \times f \vec{u}_o^{\rightarrow}) \quad (3.115)$$

que al sustituir en la ecuación 3.113, se obtiene

$$\nabla \times \vec{v} = -(1-i) e^{-i\omega t} \nabla^2 (\nabla \times f \vec{u}_o^{\rightarrow}) \quad (3.116)$$

Sustituyendo la ecuación 3.116 en la ecuación 3.98, se obtiene

$$\left[\frac{i\omega}{\nu} \nabla^2 (\nabla f) + \Delta^2 (\nabla f) \right] \times \vec{u}_o^{\rightarrow} = 0 \quad (3.117)$$

donde $\Delta^2 = \nabla^2 (\nabla^2)$. Ya que el vector \vec{u}_o^{\rightarrow} es constante y diferente de cero, la única posibilidad de que se satisfaga la ecuación es que el término entre corchetes sea igual a cero, es decir

$$\frac{i\omega}{\nu} \nabla^2 (\nabla f) + \Delta^2 (\nabla f) = 0 \quad (3.118)$$

Como ∇^2 y ∇ conmutan

$$\frac{i\omega}{\nu} \nabla (\nabla^2 f) + \nabla (\Delta^2 f) = 0 \quad (3.119)$$

Debido a que f es función únicamente de r , el gradiente del laplaciano también es función de r únicamente. Entonces, la ecuación anterior se puede expresar como

$$\frac{i\omega}{\nu} \frac{d}{dr} (\nabla^2 f) + \frac{d}{dr} (\Delta^2 f) = 0 \quad (3.120)$$

e integrando con respecto a r , se obtiene

$$\frac{i\omega}{\nu} \nabla^2 f + \Delta^2 f = cte. \quad (3.121)$$

Bajo el supuesto de que la esfera está inmersa en un fluido de extensión infinita, la ecuación 3.121 debe satisfacer la primera condición a la frontera: $\vec{v} |_{\infty} = 0$. En otras palabras, la velocidad del fluido evaluada en el infinito es cero debido a que la presencia de la esfera no lo afecta. Por lo tanto, en base a estas suposiciones y examinando la ecuación 3.112 donde se observa que la velocidad del fluido está determinada por las segundas derivadas de la función f , ésta debe hacerse cero en el infinito. Así, las cuartas derivadas deben también desaparecer y la constante de integración en la ecuación 3.121 es cero. Por lo tanto:

$$\frac{i\omega}{\nu} \nabla^2 f + \Delta^2 f = 0 \quad (3.122)$$

La ecuación 3.122 expresada en coordenadas esféricas resulta

$$r^2 \frac{d^2 (\nabla^2 f)}{dr^2} + 2r \frac{d (\nabla^2 f)}{dr} + \frac{i\omega}{\nu} r^2 \nabla^2 f = 0 \quad (3.123)$$

la cual es la ecuación diferencial transformada de Bessel cuya solución es

$$\nabla^2 f = a \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.124)$$

A partir de la solución de la ecuación 3.123 se obtienen las expresiones para $f(r)$ y $f'(r)$, siendo

$$f(r) = \frac{ae^{ikr}}{(ik)^2 r} - \frac{b}{r} + c \quad (3.125)$$

y

$$f'(r) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{ae^{ikr}}{ik} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + b \right] \quad (3.126)$$

donde b y c son constantes de integración y k es el número de onda y está definido por

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm (i+1) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \quad (3.127)$$

De la ecuación para la velocidad del fluido, ecuación 3.112, se obtiene

$$\vec{v} = (1-i)e^{-i\omega t} \nabla \times [f'(r) \hat{n} \times \vec{u}_o] \quad (3.128)$$

donde se ha tomado

$$\nabla f = f'(r) \hat{n} \quad (3.129)$$

ya que f es función únicamente de r .

Sustituyendo la ecuación 3.126 en la ecuación 3.128, la velocidad del fluido se expresa como:

$$\vec{v} = (1-i)e^{-i\omega t} \nabla \times \left[\left(\frac{1}{r^2} \left[\frac{ae^{ikr}}{ik} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + b \right] \right) \hat{n} \times \vec{u}_o \right] \quad (3.130)$$

La expresión anterior se puede expandir usando la siguiente identidad vectorial (Hsu, 1987):

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} (\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G} (\nabla \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} \quad (3.131)$$

donde

$$\vec{F} = f'(r) \hat{n} = \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\frac{ae^{ikr}}{ik} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + b \right] \right\} \hat{n} \quad (3.132)$$

y

$$\vec{G} = \vec{u}_o \quad (3.133)$$

Entonces, la ecuación 3.130 queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{v} = & (1 - i) e^{-i\omega t} \left[\frac{ae^{ikr}}{ikr^2} - \frac{ae^{ikr}}{(ik)^2 r^3} + \frac{b}{r^3} - \frac{ae^{ikr}}{r} \right] \vec{u}_o \\ & + (1 - i) e^{-i\omega t} \left[\frac{ae^{ikr}}{r} - \frac{3ae^{ikr}}{ikr^2} + \frac{3ae^{ikr}}{(ik)^2 r^3} - \frac{3b}{r^3} \right] (\vec{u}_o \cdot \hat{n}) \hat{n} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Para evaluar las constantes a y b , se utiliza la segunda condición impuesta en la superficie de la esfera, siendo

$$\vec{v} = \vec{u} \quad \text{en } r = R \quad (3.135)$$

es decir, en la superficie de la esfera la velocidad del fluido es igual a la velocidad de la esfera, la cual implícitamente se sabe que es cero, ya que su superficie no se está moviendo.

Si el sistema de coordenadas está localizado en el centro geométrico de la esfera, tal como se observa en la figura 3.18, un observador montado en la esfera no siente el movimiento de ésta, pero sí observa cómo el fluido se va acercando hacia él.

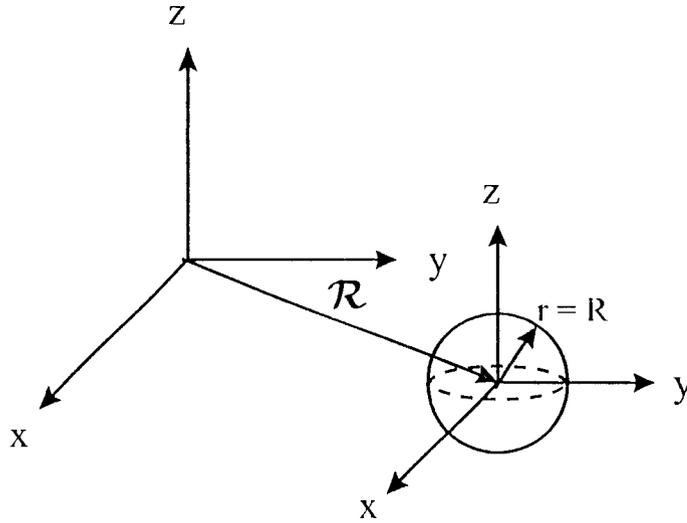


Figura 3.18:

Si el radio de la circunferencia que describe la esfera es muy grande comparado con el radio de la esfera ($\mathcal{R} \gg R$), entonces

$$\mathcal{R} - R \approx \mathcal{R} \quad (3.136)$$

por lo tanto, si el sistema de coordenadas está localizado en el centro de la circunferencia la condición a la frontera está siendo evaluada en el centro de masa de la esfera.

De acuerdo con la condición en la superficie de la esfera, la velocidad del fluido expresada por la ecuación 3.134 es igual a la velocidad de la esfera (ec. 3.109). Comparando ambas ecuaciones se deducen las siguientes expresiones:

$$\frac{ac^{ikr}}{ikr^2} - \frac{ac^{ikr}}{(ik)^2 r^3} + \frac{b}{r^3} - \frac{ac^{ikr}}{r} = 1 \quad (3.137)$$

y

$$\frac{ac^{ikr}}{r} - \frac{3ac^{ikr}}{ikr^2} + \frac{3ac^{ikr}}{(ik)^2 r^3} - \frac{3b}{r^3} = 0 \quad (3.138)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las expresiones para las constantes:

$$a = -\frac{3R}{2} e^{-ikR} \quad (3.139)$$

y

$$b = -\frac{1}{2} R^3 \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \quad (3.140)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.139 y 3.140 en la ecuación 3.134, se obtiene la ecuación que representa el campo de la velocidad del fluido alrededor de la esfera,

$$\begin{aligned} \vec{v} = & (1-i) e^{-i\omega t} \left\{ \left[-\frac{3R}{2r^2} e^{ik(r-R)} \left(\frac{1}{ik} - \frac{1}{(ik)^2 r} - r \right) - \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \right] \vec{u}_o \right. \\ & + \left[-\frac{3R}{2r^2} e^{ik(r-R)} \left(r - \frac{3}{ik} + \frac{3}{(ik)^2 r} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{3R^3}{2r^3} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \right] (\vec{u}_o \cdot \hat{n}) \hat{n} \right\} \quad (3.141) \end{aligned}$$

Si se define

$$M \equiv -\frac{3R}{2r^2} e^{ik(r-R)} \left(\frac{1}{ik} - \frac{1}{(ik)^2 r} - r \right) - \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \quad (3.142)$$

y

$$N \equiv -\frac{3R}{2r^2} e^{ik(r-R)} \left(r - \frac{3}{ik} + \frac{3}{(ik)^2 r} \right) + \frac{3R^3}{2r^3} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \quad (3.143)$$

entonces, la ecuación 3.141 queda expresada por

$$\vec{v} = (1-i) e^{-i\omega t} M \vec{u}_o + (1-i) e^{-i\omega t} N (\vec{u}_o \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad (3.144)$$

Los componentes de la velocidad del fluido en coordenadas esféricas en las tres direcciones (r, θ, ϕ) se obtienen efectuando el producto punto del vector de la velocidad y los vectores unitarios. Tomando el vector \vec{u}_o paralelo al eje axial, tal como se muestra en la figura 3.19, y resolviendo en las tres direcciones se obtiene:

$$v_r = \vec{v} \cdot \hat{n} = u_o \cos \theta (1-i) e^{-i\omega t} (M+N) \quad (3.145)$$

donde los puntos de estancamiento están localizados en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$.

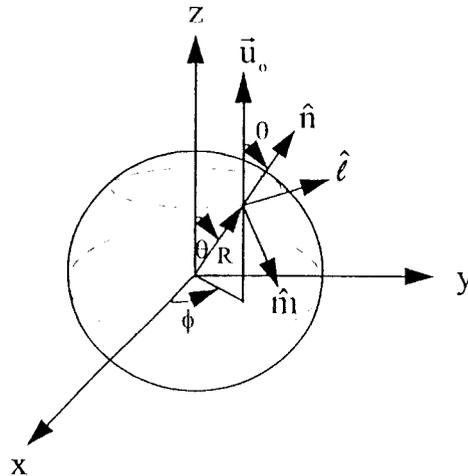


Figura 3.19:

$$v_\theta = \vec{v} \cdot \hat{\ell} = -u_0 \text{sen} \theta (1 - i) e^{-i\omega t} M \quad (3.146)$$

donde los puntos de estancamiento están localizados en $\theta = 0$ y en $\theta = 2\pi$.

$$v_\phi = \vec{v} \cdot \hat{m} = 0 \quad (3.147)$$

donde se observa que el vector \vec{u}_0^* es perpendicular al vector unitario \hat{m} , por lo que el componente de la velocidad del fluido en esa dirección es cero.

CAMPO DE PRESIONES

Para calcular el campo de presiones alrededor de la superficie de la esfera, partimos de la ecuación de movimiento (ec. 3.97), expresando el gradiente de presiones como

$$\nabla P = -\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.148)$$

Para evaluar el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, se aplica la ecuación 3.144 obteniéndose la expresión:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -i\omega [(1 - i) e^{-i\omega t} M \vec{u}_0^* + (1 - i) e^{-i\omega t} N (\vec{u}_0^* \cdot \hat{n}) \hat{n}] \quad (3.149)$$

la cual se reduce a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -i\omega \vec{v} \quad (3.150)$$

Para la evaluación del segundo término se aplica la ecuación 3.112. Entonces, el laplaciano de la velocidad queda expresado por

$$\nabla^2 \vec{v} = (1 - i) e^{-i\omega t} \nabla^2 [\nabla \times (\nabla \times f \vec{u}_0^*)] \quad (3.151)$$

Aplicando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (3.152)$$

donde

$$\vec{F} = f \vec{u}_0 \quad (3.153)$$

la ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \vec{v} = (1-i) e^{-i\omega t} \nabla^2 [\nabla (\nabla \cdot f \vec{u}_0) - \vec{u}_0 \nabla^2 f] \quad (3.154)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.148 las ecuaciones 3.150 y 3.154, se obtiene

$$\nabla P = i\omega\rho \vec{v} + \mu(1-i) e^{-i\omega t} \nabla^2 [\nabla (\nabla \cdot f \vec{u}_0) - \vec{u}_0 \nabla^2 f] \quad (3.155)$$

Desarrollando el laplaciano del segundo término del lado derecho, la ecuación anterior se reduce a

$$\nabla P = i\omega\rho \vec{v} + \mu(1-i) e^{-i\omega t} \nabla [\vec{u}_0 \cdot \nabla (\nabla^2 f)] - \mu(1-i) e^{-i\omega t} \vec{u}_0 \Delta^2 f \quad (3.156)$$

A fin de simplificar la ecuación 3.156, se evalúa el laplaciano del laplaciano de la función f [$\nabla^2 (\nabla^2 f) = \Delta^2 f$] y retomando la ecuación 3.124 se obtiene:

$$\Delta^2 f = \frac{a (ik)^2 e^{ikr}}{r} \quad (3.157)$$

y

$$\vec{u}_0 \cdot \nabla (\nabla^2 f) = a e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \quad (3.158)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.157 y 3.158 en la ecuación 3.156 se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla P = & i\omega\rho \vec{v} + a\mu(1-i) e^{-i\omega t} \nabla \left[e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \right] \\ & - \mu(1-i) e^{-i\omega t} \frac{a (ik)^2 e^{ikr}}{r} \vec{u}_0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

El gradiente del segundo término de la ecuación 3.159 se desarrolla a fin de simplificar aún

más la ecuación para poder resolverla, obteniéndose

$$\nabla \left[e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \right] = \left[\frac{(ik)^2 e^{ikr}}{r} - \frac{2ik e^{ikr}}{r^2} + \frac{2e^{ikr}}{r^3} \right] (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad (3.160)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 3.159, se obtiene la expresión general para el gradiente de presiones en la vecindad de la esfera:

$$\begin{aligned} \nabla P &= i\omega\rho\vec{v} + a\mu(1-i)e^{-i\omega t} \left[\frac{(ik)^2 e^{ikr}}{r} - \frac{2ik e^{ikr}}{r^2} + \frac{2e^{ikr}}{r^3} \right] (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \hat{n} \\ &\quad - \mu(1-i)e^{-i\omega t} \frac{a(ik)^2 e^{ikr}}{r} \vec{u}_0 \end{aligned} \quad (3.161)$$

Ya que la presión es una fuerza ejercida en la dirección normal en la superficie de la esfera, ésta es función sólo del radio y, por lo tanto, el gradiente de presiones se reduce a

$$\nabla P = \frac{dP}{dr} \hat{n} \quad (3.162)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} \hat{n} &= i\omega\rho\vec{v} + a\mu(1-i)e^{-i\omega t} \left[\frac{(ik)^2 e^{ikr}}{r} - \frac{2ik e^{ikr}}{r^2} + \frac{2e^{ikr}}{r^3} \right] (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \hat{n} \\ &\quad - \mu(1-i)e^{-i\omega t} \frac{a(ik)^2 e^{ikr}}{r} \vec{u}_0 \end{aligned} \quad (3.163)$$

Efectuando el producto punto del vector unitario normal \hat{n} en ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} \hat{n} \cdot \hat{n} &= i\omega\rho\vec{v} \cdot \hat{n} + a\mu(1-i)e^{-i\omega t} \left[\frac{(ik)^2 e^{ikr}}{r} - \frac{2ik e^{ikr}}{r^2} + \frac{2e^{ikr}}{r^3} \right] (\vec{u}_0 \cdot \hat{n}) \hat{n} \cdot \hat{n} \\ &\quad - \mu(1-i)e^{-i\omega t} \frac{a(ik)^2 e^{ikr}}{r} \vec{u}_0 \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad (3.164)$$

la cual, después de simplificarla, se reduce a

$$\frac{d}{dr} = i\omega\rho\vec{v} \cdot \hat{n} + 2a\mu(1-i)e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{ikr}}{r^3} - \frac{ik e^{ikr}}{r^2} \right] (\vec{u}_o \cdot \hat{n}) \quad (3.165)$$

donde

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = v_r \quad (3.166)$$

definida en la ecuación 3.145.

Integrando la ecuación y evaluando el campo de presión en la superficie de la esfera, es decir, en $r = R$ se obtiene

$$P = P_o + i\omega\rho R(1-i)e^{-i\omega t}u_o \cos\theta - \frac{3}{2}\mu R(1-i)e^{-i\omega t}u_o \cos\theta \left[\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} + k^2 \right] \quad (3.167)$$

FUERZA DE ARRASTRE

Para calcular la fuerza \vec{F} ejercida sobre la esfera por el fluido que se mueve (o lo que es lo mismo, el arrastre sobre la esfera al moverse a través del fluido), se hace uso de las coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a \vec{u}_o ; por simetría todas las cantidades son función solamente de r y del ángulo polar θ . La fuerza \vec{F} es paralela a la velocidad \vec{u}_o .

La fuerza que actúa sobre un área superficial unitaria es

$$f_i = -\sigma_{ik}n_k \quad (3.168)$$

donde σ_{ik} es el tensor de esfuerzos y \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie de la esfera y dirigido hacia el fluido. La figura 3.20 muestra al vector unitario actuando sobre un diferencial de superficie dS .

Entonces, la fuerza total que actúa sobre toda la superficie de la esfera está representada en forma integral por

$$F_i = \oint_s \sigma_{ik}n_k dS \quad (3.169)$$

Suponiendo que el fluido es incompresible e isotrópico, el tensor de esfuerzos está dado por

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (3.170)$$

donde σ'_{ik} es el tensor de esfuerzos viscosos.

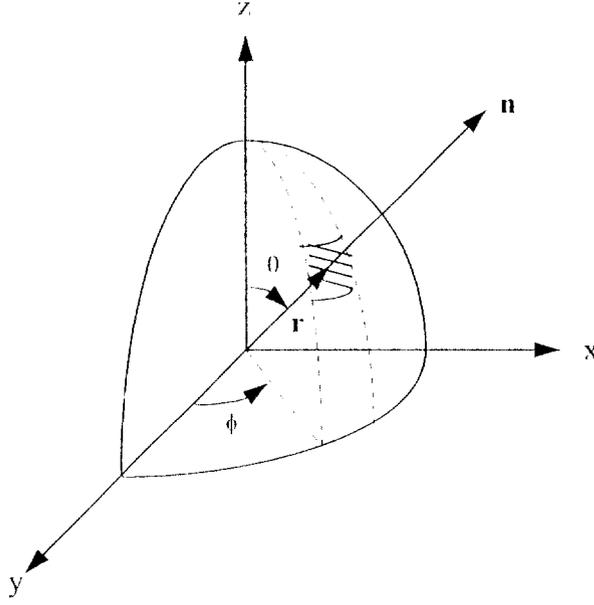


Figura 3.20:

Los componentes σ_{ik} tienen el siguiente significado: el primero define la superficie (i.e., la dirección de la normal a la superficie bajo consideración); el segundo define la dirección sobre la cual actúa el esfuerzo. Por lo tanto, los únicos esfuerzos que actúan sobre la superficie de la esfera son el esfuerzo normal σ_{rr} y el esfuerzo tangencial $\sigma_{r\theta}$. Entonces, la ecuación 3.169 se reduce a

$$\vec{F} = \oint_s \left(\sigma_{rr} \hat{u} + \sigma_{r\theta} \hat{\ell} \right) dS \quad (3.171)$$

donde, debido a que la fuerza actúa en la misma dirección de \vec{u} , su magnitud se obtiene al efectuar el producto punto de la ecuación 3.171 por el vector constante \vec{u}_0

$$F = \vec{F} \cdot \vec{u}_0 = \oint_s \left(\sigma_{rr} \hat{u} \cdot \vec{u}_0 + \sigma_{r\theta} \hat{\ell} \cdot \vec{u}_0 \right) dS = \oint_s \left(\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta \right) dS \quad (3.172)$$

Evaluando los componentes σ_{rr} y $\sigma_{r\theta}$ del tensor de esfuerzos o tensor de presiones se obtiene

$$\sigma_{rr} = -p + \sigma'_{rr} \quad (3.173)$$

y

$$\sigma_{r\theta} = \sigma'_{r\theta} \quad (3.174)$$

donde los componentes del tensor de esfuerzos viscosos, expresados en coordenadas esféricas, están dados por

$$\sigma'_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (3.175)$$

y

$$\sigma'_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (3.176)$$

Utilizando las ecuaciones 3.145 y 3.146, se evalúan los componentes obteniéndose

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -p + 2\mu \left\{ u_o \cos \theta e^{-i\omega t} \left[3R e^{ik(r-R)} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3}{ikr^3} - \frac{3}{k^2 r^4} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3R^3}{r^4} \left(\frac{3}{ikR} + \frac{3}{k^2 R^2} - 1 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.177)$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & \mu \ell \left\{ \frac{1}{r} [-u_o \text{sen} \theta e^{-i\omega t} (A + B)] \right. \\ & - u_o \text{sen} \theta e^{-i\omega t} \left[\frac{3}{2} R e^{-ikR} \left(\frac{ikc^{ikr}}{r} - \frac{2c^{ikr}}{r^2} + \frac{3c^{ikr}}{ikr^3} + \frac{3c^{ikr}}{k^2 r^4} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{3R^3}{2r^4} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \right] + \frac{u_o \text{sen} \theta A e^{-i\omega t}}{r} \right\} \end{aligned} \quad (3.178)$$

que al ser evaluados en $r = R$, es decir, en la superficie de la esfera se obtiene

$$\sigma_{rr} |_{r=R} = -p \quad (3.179)$$

y

$$\sigma_{r\theta} |_{r=R} = \mu u_o \operatorname{sen} \theta (1-i) e^{-i\omega t} \left(\frac{3}{2R} - \frac{3ik}{2} \right) \quad (3.180)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.179 y 3.180 en la ecuación 3.172, se obtiene

$$F = \oint_s \left[-p \cos \theta - \mu u_o \operatorname{sen} \theta (1-i) e^{-i\omega t} \left(\frac{3}{2R} - \frac{3ik}{2} \right) \operatorname{sen} \theta \right] dS \quad (3.181)$$

Sustituyendo el campo de presión evaluado en la superficie de la esfera (ec. 3.167) e integrando entre los límites para θ y ϕ

$$\begin{aligned} F = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ [-p_o + i\omega \rho_\ell R (1-i) e^{-i\omega t} u_o \cos \theta \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \mu_\ell R (1-i) e^{-i\omega t} u_o \cos \theta \left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} + k^2 \right) \right] \cos \theta \\ & \left. - \mu_\ell u_o \operatorname{sen}^2 \theta (1-i) e^{-i\omega t} \left(\frac{3}{2R} - \frac{3ik}{2} \right) \right\} R^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (3.182)$$

Evaluando las integrales se obtiene la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre la esfera dada por

$$\begin{aligned} F = & -6\pi \mu_\ell R (1-i) e^{-i\omega t} u_o + 6\pi ik \mu_\ell R^2 (1-i) e^{-i\omega t} u_o \\ & - \frac{4}{3} i\omega \rho_\ell \pi R^3 (1-i) e^{-i\omega t} u_o + 2\mu_\ell \pi k^2 R^3 (1-i) e^{-i\omega t} u_o \end{aligned} \quad (3.183)$$

y ya que la velocidad de la esfera está definida por la ecuación 3.109, la ecuación anterior se reduce a

$$F = -6\pi \mu_\ell R u + 6\pi ik \mu_\ell R^2 u - \frac{4}{3} i\omega \rho_\ell \pi R^3 u + 2\mu_\ell \pi k^2 R^3 u \quad (3.184)$$

Reordenando términos:

$$F = -6\pi\mu\ell Ru - 6\sqrt{2}\pi\mu\ell R \left(\frac{R}{\delta}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}} u - \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\frac{1}{2}\rho\ell\right) \frac{du}{dt} \quad (3.185)$$

donde

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (3.186)$$

representa la profundidad de penetración de la onda, la cual disminuye cuando se incrementa la frecuencia, pero aumenta con la viscosidad cinemática del fluido, y el término:

$$\frac{du}{dt} = -i\omega u = -i\omega u_o (1 - i) e^{-i\omega t} \quad (3.187)$$

representa la aceleración de la esfera. Este término está formado por la superposición de las dos velocidades de la esfera desfasadas 90° (ec. 3.109).

El primer término de la ecuación 3.185 representa la resistencia que ofrece el fluido estático de viscosidad μ a la esfera en movimiento con velocidad \vec{u} . Este término también es conocido como el arrastre viscoso de Stokes pseudoestacionario.

El segundo término representa la disipación viscosa y está en función de la penetración de la onda en el fluido donde el parámetro adimensional R/δ es crítico en la determinación de la extensión de las perturbaciones y la forma en que son amortiguadas en el interior del fluido.

Debido a que las perturbaciones del fluido son generadas por el movimiento oscilatorio de la esfera, necesariamente la extensión de éstas está ligada con la frecuencia de la oscilación. A bajas frecuencias,

$$\frac{R}{\delta} \ll 1 \quad (3.188)$$

la longitud de penetración de la onda es muy grande debido a que las perturbaciones no son amortiguadas en gran medida por el fluido viscoso, lo cual incrementa el proceso de difusión. A altas frecuencias,

$$\frac{R}{\delta} \gg 1 \quad (3.189)$$

la longitud de penetración de la onda disminuye debido a que las vibraciones son amortiguadas principalmente por la viscosidad del fluido, lo cual incrementa la magnitud de la pérdida de

energía por disipación viscosa. Así, las ondas pueden ocurrir en un fluido viscoso, pero son rápidamente amortiguadas conforme se alejan de la superficie de la esfera cuyo movimiento genera las ondas.

El tercer término representa la fuerza inercial ejercida por el movimiento del líquido alrededor de la superficie de la esfera. Retomando la ecuación 5.24,

$$F_i = (\rho_{sp}V_{sp} + \rho_\ell V_\ell) a$$

donde el término entre paréntesis representa la masa virtual, la cual es la suma de la masa real de la esfera y la masa agregada, siendo esta última en este caso la mitad de la masa del fluido desplazado por la esfera. En particular, en este problema se ha despreciado la densidad de la esfera comparada con la densidad del fluido y la ecuación anterior se reduce a

$$F_i = (\rho_\ell V_\ell) a = V_{sp} \left(\frac{1}{2} \rho_\ell \right) a = \frac{4}{3} \pi R^3 \left(\frac{1}{2} \rho_\ell \right) \frac{du}{dt} \quad (3.190)$$

siendo esta ecuación la fuerza inercial y que constituye el tercer término.

3.4.4 SUPERPOSICION DE UN FLUJO CIRCULAR UNIFORME Y UN FLUJO UNIFORME AXIAL

En este capítulo se desarrolló el campo de la velocidad del fluido para una esfera que se encuentra inmersa en un fluido newtoniano e incompresible, la cual describe una trayectoria circular con movimiento uniforme. La expresión que describe este tipo de flujo está definida por la ecuación 3.144:

$$\vec{v} = (1 - i) e^{-i\omega t} M \mathbf{u}_o^\dagger + (1 - i) e^{-i\omega t} N (\mathbf{u}_o^\dagger \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

En forma hipotética, se puede representar el movimiento de círculos de fluido colocados paralelamente a lo largo de un cilindro, tal como se muestra en la figura 3.21

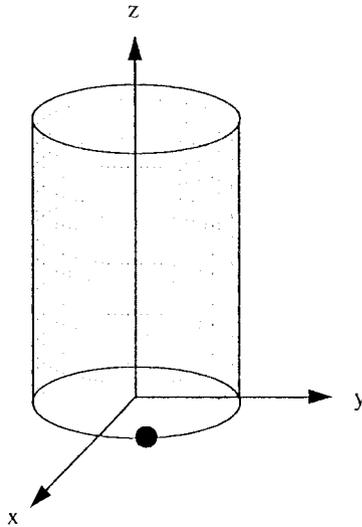


Figura 3.21: En forma ideal, se considera el movimiento de círculos de fluido a lo largo de un cilindro vertical.

La esfera se encuentra en el plano $x - y$ con movimiento uniforme.

Ahora, si a este flujo circular se superpone un flujo uniforme en la dirección axial, entendiéndose por flujo uniforme aquel cuya velocidad es constante, entonces se puede simular el movimiento helicoidal del fluido a lo largo del supuesto cilindro. En forma gráfica ésto puede ser representado por

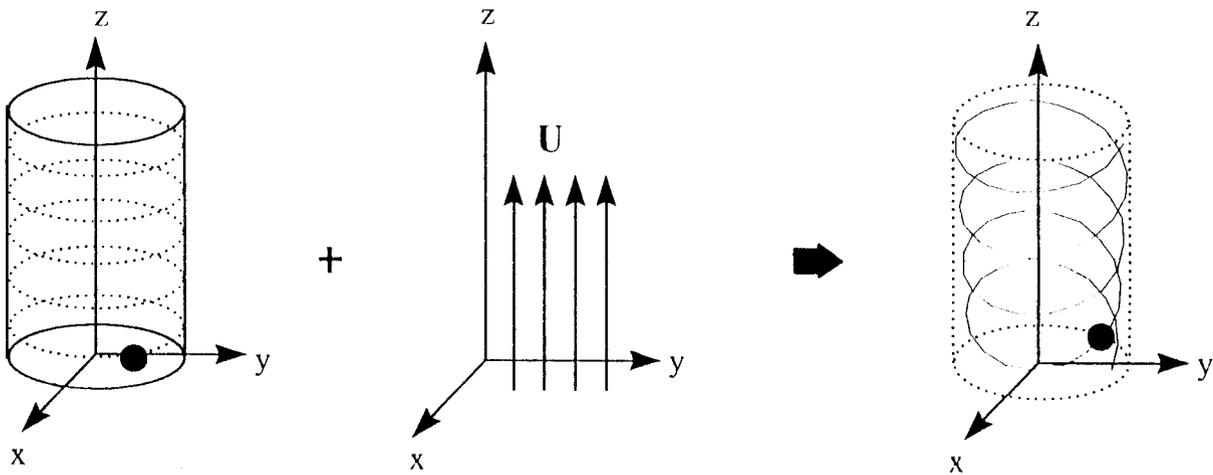


Figura 3.22: La superposición de un flujo circular uniforme y un flujo uniforme axial con velocidad \vec{U} resulta en un flujo helicoidal.

Esta conceptualización física es válida siempre y cuando la distancia entre cada círculo de fluido sea muy pequeña, es decir, desde el punto de vista del movimiento helicoidal esto correspondería a que el paso de la hélice fuera muy pequeño y la curvatura pequeña, y lo que se espera es el movimiento de la esfera en forma helicoidal pero en forma de pequeños saltos entre cada círculo de fluido. El objetivo de superponer el flujo uniforme axial es precisamente para darle el movimiento al fluido en la dirección axial, pero ya que la esfera se está moviendo en forma circular muy lentamente, el movimiento de ambos no es en forma rectilínea, lo que sucedería si fuera el caso de una esfera en reposo.

Por lo tanto, la expresión matemática que resulta de la superposición de ambos flujos y que describe el campo de la velocidad del fluido con movimiento helicoidal está dada en forma vectorial por

$$\vec{v} = (1-i)e^{-i\omega t} M \vec{u}_o + (1-i)e^{-i\omega t} N (\vec{u}_o \cdot \hat{n}) \hat{n} + \vec{U} \quad (3.191)$$

donde \vec{U} es la velocidad del flujo uniforme dada por

$$\vec{U} = (0, 0, U) \quad (3.192)$$

La expresión para la fuerza de arrastre sobre la esfera en movimiento helicoidal está dada por

$$F = -6\pi\mu_f R \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) (1-i)e^{-i\omega t} u_o - 3\pi R^2 \sqrt{\frac{2\mu_f \rho_f}{\omega}} \left(1 + \frac{2R}{9\delta}\right) \frac{du}{dt} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f g \quad (3.193)$$

donde el último término representa la fuerza de flotación.

Teóricamente, las fuerzas que interactúan sobre la esfera durante su ascenso a través del fluido son:

1. La fuerza de arrastre ejercida por el movimiento del fluido en la superficie de la esfera.
2. Una fuerza inercial ejercida por el movimiento del fluido alrededor de la esfera.
3. Una fuerza disipativa debido a que parte del trabajo realizado por el movimiento de la esfera se consume por disipación viscosa.

4. La fuerza de flotación que origina el ascenso de la esfera.

CAPITULO 4

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS HELICODALES

En particular, en algunos problemas es conveniente usar la ecuación de continuidad y las ecuaciones de movimiento referidas a un sistema coordinado en vez de la forma vectorial. El sistema coordinado comúnmente empleado es el cartesiano, pero algunas veces, debido a la geometría del problema en cuestión, es conveniente un sistema curvilíneo para su mejor descripción. El problema en cuestión que se aborda en el presente trabajo, es describir el campo de flujo alrededor de una esfera cuyo centro de masa describe aproximadamente una trayectoria helicoidal al ascender en un medio acuoso.

Entonces, el campo de flujo puede ser descrito a partir de las ecuaciones gobernantes expresadas en coordenadas helicoidales, acordes con la geometría física del problema, y con las condiciones iniciales y a la frontera apropiadas. Esto permite desarrollar un modelo teórico cuya solución numérica haga posible la validación de los datos experimentales.

4.1 DESCRIPCION DEL SISTEMA COORDENADO HELICOIDAL

Antes de dar inicio a la descripción del sistema de coordenadas helicoidales, es conveniente retomar la curva tridimensional llamada hélice y mencionar algunas características adicionales que permitirán ampliar su descripción. Las ecuaciones paramétricas que la describen están representadas por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = a\theta \quad (4.1)$$

donde r representa el radio del cilindro sobre el cual crece la curva helicoidal, θ el desplazamiento angular y a es una constante positiva en función del paso de la hélice y está definida como:

$$a = \frac{\text{paso}}{2\pi} \quad (4.2)$$

Comparando las ecuaciones 3.18 con las ecuaciones 4.1 la diferencia entre ambas se observa en la expresión desarrollada para la coordenada z . Sin embargo, la constante positiva a es equivalente al coeficiente de θ en 3.18, es decir,

$$\frac{\beta}{\alpha} r \leftrightarrow a \quad (4.3)$$

Al graficar se obtienen curvas semejantes, sin embargo, la constante positiva a es el término que físicamente es más claro de visualizar debido a su funcionalidad con el paso de la hélice (cc. 4.2), a diferencia de las constantes α y β .

Elevando al cuadrado las ecuaciones paramétricas para las coordenadas x e y se obtiene la expresión

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (4.4)$$

la cual representa la ecuación de un círculo de radio r . Entonces, se deduce que la curva helicoidal está ubicada sobre la superficie lateral de un cilindro circular de radio r cuyo eje axial es el eje de coordenadas z . Además, al incrementarse el valor de θ se incrementa la

coordenada z ya que la constante a siempre es mayor que cero. Por lo tanto, como θ incrementa su valor la curva asciende en forma de espiral alrededor del cilindro, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

La figura 4.1 representa a una curva helicoidal que asciende en sentido contrario al de las manecillas de un reloj sobre el eje axial. El ángulo θ se ha elegido en el intervalo $0 < \theta < 8\pi$, donde se observa que para $\theta = 0^\circ$, los valores de las coordenadas x e y son r y 0 , respectivamente, por lo que la hélice empieza a ascender a partir del punto $(r, 0)$ ubicado sobre el eje de las abscisas.

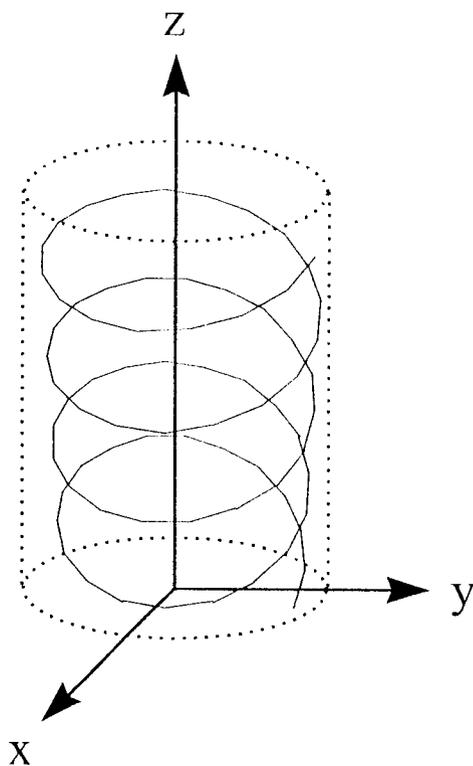


Figura 4.1: La curva helicoidal crece en sentido contrario al de las manecillas del reloj conforme asciende en las paredes de un cilindro circular de radio r .

La hélice de la figura 4.1 es una curva cuya curvatura y torsión son constantes y están expresadas por:

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + a^2} \quad y \quad \tau = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

A partir de la ecuación 4.2 se obtiene la relación que permite determinar el paso de la hélice en función de la constante a , es decir

$$\text{paso} = 2\pi a \quad (4.5)$$

En la figura 4.2 se observa la forma en que asciende la curva helicoidal sobre las paredes del cilindro desde el punto de partida, conforme se incrementa el ángulo. Cuando llega a un punto paralelo al de partida, $\theta = 2\pi$, el valor correspondiente en dicho punto es $2\pi a$. A partir de este punto, la curva se sigue incrementando a un paso constante igual a $2\pi a$.

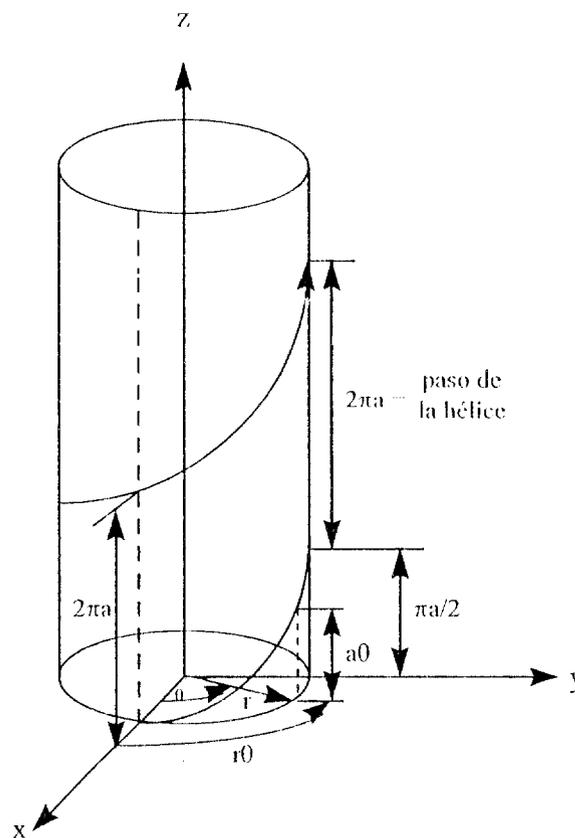


Figura 4.2: El paso de la hélice está definido por $2\pi a$.

En la figura 4.3 se muestra como varía la extensión de la hélice para tres valores diferentes de la constante a . En los tres casos, el valor del radio es el mismo y el ángulo se ha elegido en el intervalo $0 < \theta < 8\pi$. Se observa que al aumentar el valor de la constante a , el paso de la hélice es más pronunciado.

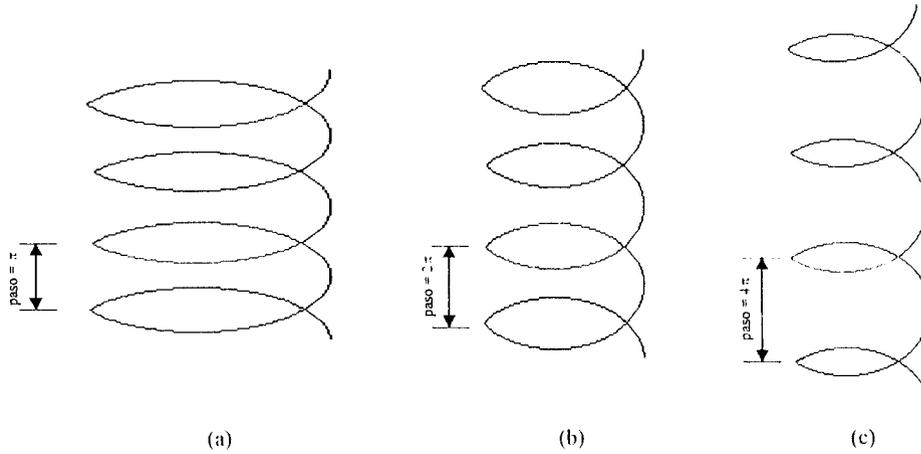


Figura 4.3: Tres formas diferentes de la hélice para tres valores de la constante a : (a) $a = 1/2$, (b) $a = 1$ y (c) $a = 2$.

La descripción anterior será de mucha utilidad para comprender con mayor facilidad el sistema coordenado helicoidal.

Expresando el sistema de coordenadas cartesianas en la forma

$$x^i = (x^1, x^2, x^3) \quad (4.6)$$

y las coordenadas helicoidales como

$$y^i = (\rho, \sigma, \zeta) \quad (4.7)$$

entonces, las coordenadas helicoidales están relacionadas con las coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$x^1 = \rho \cos \sigma, \quad x^2 = \rho \operatorname{sen} \sigma, \quad x^3 = \zeta + a\sigma \quad (4.8)$$

donde a es la constante positiva definida anteriormente.

Si se comparan las ecuaciones 4.8 con las ecuaciones 4.1, se observa que existe igualdad para las expresiones de x^1 y x^2 . Pero para x^3 , se suma la coordenada ζ , lo cual permite describir la superficie de la hélice.

La figura 4.4 muestra la superficie generada al mantener constante la coordenada ρ y variar σ y ζ . Se observa que la superficie pareciera ser una cinta enrollándose sobre la superficie de un cilindro en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

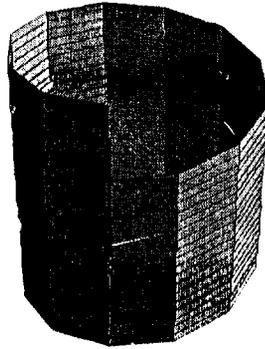


Figura 4.4: La superficie crece en sentido contrario al de las manecillas de un reloj sobre el eje axial.

La figura 4.5 muestra la superficie generada al mantener la coordenada ζ constante, y variar las coordenadas ρ y σ . Esta es la superficie que representa mayor interés en el análisis posterior.

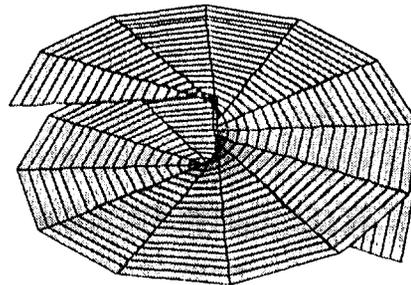


Figura 4.5: Manteniendo constante la coordenada ζ y variando ρ y σ en un intervalo dado, se obtiene la superficie helicoidal que asciende a lo largo del eje z en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

La superficie generada al mantener la coordenada σ constante variando ρ y ζ se observa en la figura 4.6, la cual representa un plano con un ángulo de inclinación correspondiente al valor

constante de σ .

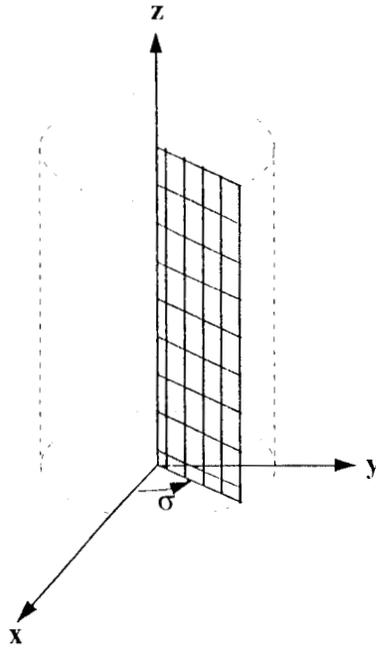


Figura 4.6: La superficie generada cuando se mantiene constante la coordenada σ forma un plano que se desplaza alrededor del cilindro imaginario en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

4.1.1 DEMOSTRACION DE LA NO ORTOGONALIDAD DEL SISTEMA COORDENADO HELICOIDAL

El vector de posición en coordenadas cartesianas está dado por

$$\vec{r} = x^1 \hat{i} + x^2 \hat{j} + x^3 \hat{k} \quad (4.9)$$

Conociendo la relación que existe entre el sistema cartesiano y el helicoidal, el vector de posición queda expresado en función del sistema de coordenadas helicoidales como

$$\vec{r} = \rho \cos \sigma \hat{i} + \rho \sin \sigma \hat{j} + (\zeta + a\sigma) \hat{k} \quad (4.10)$$

Las derivadas parciales de \vec{r} con respecto a ρ, ζ, σ son:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \sigma \hat{i} + \sin \sigma \hat{j} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \sigma} = -\rho \operatorname{sen} \sigma \hat{\mathbf{i}} + \rho \cos \sigma \hat{\mathbf{j}} + a \hat{\mathbf{k}} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \zeta} = \hat{\mathbf{k}} \quad (4.13)$$

por lo tanto, los factores de escala son:

$$h_\rho = \left| \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \rho} \right| = \left[(\cos \sigma)^2 + (\operatorname{sen} \sigma)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (4.14)$$

$$h_\sigma = \left| \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \sigma} \right| = \left[(-\rho \operatorname{sen} \sigma)^2 + (\rho \cos \sigma)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (\rho^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

$$h_\zeta = \left| \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \zeta} \right| = 1 \quad (4.16)$$

y los vectores base unitarios son:

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \rho} = \cos \sigma \hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} \sigma \hat{\mathbf{j}} \quad (4.17)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \sigma} = \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \left(-\rho \operatorname{sen} \sigma \hat{\mathbf{i}} + \rho \cos \sigma \hat{\mathbf{j}} + a \hat{\mathbf{k}} \right) \quad (4.18)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\zeta = \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \zeta} = \hat{\mathbf{k}} \quad (4.19)$$

Efectuando el producto escalar entre los vectores base unitarios se obtiene

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{e}}_\sigma = 0 \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\sigma \cdot \hat{\mathbf{e}}_\zeta = a \quad (4.21)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\zeta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho = 0 \quad (4.22)$$

En base a los resultados anteriores se puede decir en forma previa que el sistema de coordenadas helicoidales no es ortogonal. Para que un sistema coordenado sea considerado como ortogonal, se debe cumplir que el producto punto entre los tres vectores base unitarios sea cero, para las tres combinaciones.

Las expresiones dadas por las ecuaciones 4.11, 4.12 y 4.13 representan los vectores base g_i , donde

$$g_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \sigma \hat{i} + \text{sen} \sigma \hat{j} \quad (4.23)$$

$$g_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} = -\rho \text{sen} \sigma \hat{i} + \rho \cos \sigma \hat{j} + a \hat{k} \quad (4.24)$$

$$g_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} = \hat{k} \quad (4.25)$$

Los vectores recíprocos g^i están expresados en función de los vectores base g_i , de la siguiente forma:

$$g^1 = \frac{g_2 \times g_3}{g_1 \cdot (g_2 \times g_3)} \quad (4.26)$$

$$g^2 = \frac{g_3 \times g_1}{g_1 \cdot (g_2 \times g_3)} \quad (4.27)$$

$$g^3 = \frac{g_1 \times g_2}{g_1 \cdot (g_2 \times g_3)} \quad (4.28)$$

Realizando las operaciones indicadas para los vectores base g_i , los vectores recíprocos son:

$$g^1 = \cos \sigma \hat{i} + \text{sen} \sigma \hat{j} \quad (4.29)$$

$$g^2 = -\frac{1}{\rho} \text{sen} \sigma \hat{i} + \frac{1}{\rho} \cos \sigma \hat{j} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{a}{\rho} \operatorname{sen} \sigma \hat{\mathbf{i}} - \frac{a}{\rho} \cos \sigma \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \quad (4.31)$$

Una vez que se tienen los vectores de la base recíproca, se calculan los componentes del tensor métrico g_{ij} y g^{ij} para el sistema coordenado helicoidal

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad \text{y} \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (4.32)$$

donde

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \quad (4.33)$$

y

$$g^{ij} = \begin{vmatrix} \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}^1 & \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}^2 & \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}^3 \\ \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g}^1 & \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g}^2 & \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g}^3 \\ \mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{g}^1 & \mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{g}^2 & \mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{g}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & -\frac{a}{\rho^2} & \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2} \end{vmatrix} \quad (4.34)$$

Ya que los elementos que no pertenecen a la diagonal en g_{ij} y g^{ij} son diferentes de cero y sabiendo que el producto punto de los vectores base unitarios no cumple con la condición de ortogonalidad, se puede afirmar, sin lugar a dudas, que el sistema coordenado helicoidal no es ortogonal.

4.2 ECUACION DE CONTINUIDAD Y ECUACION DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS HELICOIDALES

La primera persona que sugirió el sistema de coordenadas helicoidales fue J. W. Nicholson en 1910 (Wang, 1981), quien erróneamente pensó que el sistema era ortogonal. Para un sistema de coordenadas ortogonales, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes pueden derivarse fácilmente, usando simplemente los factores de escala. Pero, para un sistema no ortogonal, es necesario hacer uso del análisis tensorial para derivar dichas ecuaciones.

La ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento expresadas en forma tensorial están dadas por:

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ i \end{matrix} \right\} v^k = 0 \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ j \end{matrix} \right\} v^k \right) = -\frac{g^{ij}}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x^j} + f^i + \nu g^{kj} v^i{}_{,jk} \quad (4.36)$$

donde la derivada covariante en la ecuación 4.36 es

$$v^i{}_{,jk} = \left[\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial v^l}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial v^l}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ m \ j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ m \ j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ m \ l \end{matrix} \right\} \right) v^m \right] \quad (4.37)$$

y los índices encerrados entre llaves representan el símbolo de Christoffel de la segunda clase el cual está dado por:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} = g^{il} [j \ k, l] \quad (4.38)$$

De acuerdo al sistema coordenado utilizado, pueden calcularse los símbolos de Christoffel para cada uno de ellos. Más adelante se expresan estos símbolos para el sistema coordenado helicoidal.

En la aplicación de las ecuaciones en forma tensorial a problemas específicos, los componentes del vector v^i son reemplazados por los componentes físicos $v^{(i)}$ del vector \vec{v} . Eringen (1967) definió los componentes físicos $v^{(i)}$ en relación con los componentes del vector v^i como

$$v^{(i)} = v^i \sqrt{g_{ii}}, \quad v^i = \frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (4.39)$$

donde

$$\sqrt{g_{ii}} = |g_i| \quad (4.40)$$

Sustituyendo los componentes físicos $v^{(i)}$ por los componentes del vector v^i , la ecuación de

continuidad y la ecuación de movimiento quedan expresadas como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ i \end{matrix} \right\} \left(\frac{v^{(k)}}{\sqrt{g_{kk}}} \right) = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} + \sqrt{g_{ii}} \left(\frac{v^{(j)}}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ j \end{matrix} \right\} \left(\frac{v^{(k)}}{\sqrt{g_{kk}}} \right) \right] = -\frac{\sqrt{g_{ii}}}{\rho} g^{ij} \frac{\partial P}{\partial x^j} + f^{(i)} + \nu \sqrt{g_{ii}} g^{kj} v^{(i)}{}_{,jk} \quad (4.42)$$

donde la derivada covariante es

$$\begin{aligned} v^{(i)}{}_{,jk} = & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} \left(\frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{v^{(l)}}{\sqrt{g_{ll}}} \right) + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{v^{(l)}}{\sqrt{g_{ll}}} \right) \right. \\ & - \left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ m \ j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l \ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ m \ j \end{matrix} \right\} \right. \\ & \left. \left. - \left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ m \ l \end{matrix} \right\} \right) \left(\frac{v^{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

El símbolo de Christoffel de la primera clase es:

$$[j \ k, i] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \quad (4.44)$$

Para el sistema coordenado helicoidal se obtiene cada componente $[j \ k, i]$ desarrollando la ecuación 4.44 para las combinaciones de $i, j, k = 1, 2, 3$ y tomando en cuenta los valores obtenidos para los componentes covariantes (g_{ij}) del tensor métrico, los símbolos de Christoffel de la primera clase que son diferentes de cero para dicho sistema son:

$$[2 \ 2, 1] = -r \quad (4.45)$$

$$[1 \ 2, 2] = r \quad (4.46)$$

$$[2 \ 1, 2] = r \quad (4.47)$$

Los símbolos de Christoffel de la segunda clase para el sistema coordenado helicoidal se obtienen de forma similar que los símbolos de Christoffel de la primera clase, con excepción de que se toman en cuenta los valores de los componentes contravariantes (g^{ij}) del tensor métrico, siendo diferentes de cero:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right\} = -r \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{r} \quad (4.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right\} = -\frac{a}{r} \quad (4.50)$$

Desarrollando la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{v^{(3)}}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{11}}} \right) \\ & + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(3)}}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{22}}} \right) \\ & + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \quad 2 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(3)}}{\sqrt{g_{33}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3 \quad 3 \end{array} \right\} \left(\frac{v^{(3)}}{\sqrt{g_{33}}} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2 + a^2, \quad g_{33} = 1 \quad (4.52)$$

y sustituyendo los valores calculados para los símbolos de Christoffel de la segunda clase, la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{v^{(3)}}{\sqrt{1}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{1}} \right) = 0 \quad (4.53)$$

Haciendo $x^1 = \rho$, $x^2 = \sigma$, $x^3 = \zeta$; $v^{(1)} = v_\rho$, $v^{(2)} = v_\sigma$, $v^{(3)} = v_\zeta$

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) + \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} v_\rho = 0 \quad (4.54)$$

Por lo tanto, la ecuación de continuidad expresada en coordenadas helicoidales es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) + \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.55)$$

Por simplicidad, para desarrollar la ecuación de movimiento primero se expresa el laplaciano en su forma desarrollada y posteriormente se sustituyen los valores de los componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico, obteniéndose:

para $i = 1, j, k = 1, 2, 3$

$$\nu \sqrt{g_{11}} g^{kj} v_{,jk}^{(1)} = \nu \left[v_{,11}^{(1)} + \frac{1}{r^2} v_{,22}^{(1)} - \frac{a}{r^2} (v_{,23}^{(1)} + v_{,32}^{(1)}) + \frac{r^2 + a^2}{r^2} v_{,33}^{(1)} \right] \quad (4.56)$$

para $i = 2, j, k = 1, 2, 3$

$$\nu \sqrt{g_{22}} g^{kj} v_{,jk}^{(2)} = \nu \sqrt{r^2 + a^2} \left[v_{,11}^{(2)} + \frac{1}{r^2} v_{,22}^{(2)} - \frac{a}{r^2} (v_{,23}^{(2)} + v_{,32}^{(2)}) + \frac{r^2 + a^2}{r^2} v_{,33}^{(2)} \right] \quad (4.57)$$

para $i = 3, j, k = 1, 2, 3$

$$\nu \sqrt{g_{33}} g^{kj} v_{,jk}^{(3)} = \nu \left[v_{,11}^{(3)} + \frac{1}{r^2} v_{,22}^{(3)} - \frac{a}{r^2} (v_{,23}^{(3)} + v_{,32}^{(3)}) + \frac{r^2 + a^2}{r^2} v_{,33}^{(3)} \right] \quad (4.58)$$

Desarrollando cada componente $v_{,jk}^{(i)}$ y tomando en cuenta los valores obtenidos para los símbolos de Christoffel de la segunda clase, se obtienen las expresiones para las combinaciones de la derivada covariante:

para $i = 1, j, k = 1, 2, 3$

$$v^{(1)}_{,11} = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \left(\frac{v^{(1)}}{\sqrt{1}} \right) = \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^1 \partial x^1} \quad (4.59)$$

$$v^{(1)}_{,22} = \left[\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2 \partial x^2} - 2r \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + r \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(r \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) - v^{(1)} \right] \quad (4.60)$$

$$v^{(1)}_{,23} = \left[\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2 \partial x^3} - r \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left(r \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] \quad (4.61)$$

$$v^{(1)}_{,32} = \left[\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^3 \partial x^2} - r \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] \quad (4.62)$$

$$v^{(1)}_{,33} = \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^3 \partial x^3} \quad (4.63)$$

para $i = 2, j, k = 1, 2, 3$

$$v^{(2)}_{,11} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{r} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] \quad (4.64)$$

$$v^{(2)}_{,22} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^{(1)}}{r} \right) \right] \quad (4.65)$$

$$v^{(2)}_{,23} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{1}{r} v^{(1)} \right) \right] \quad (4.66)$$

$$v^{(2)}_{,32} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} \right] \quad (4.67)$$

$$v^{(2)}_{,33} = \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \quad (4.68)$$

para $i = 3, j, k = 1, 2, 3$

$$v^{(3)}_{,11} = \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{2a}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{a}{r} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) - \frac{a}{r^2} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] \quad (4.69)$$

$$v^{(3)}_{,22} = \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{2a}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^2} + r \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{a}{r} v^{(1)} \right) \right] \quad (4.70)$$

$$v^{(3)}_{,23} = \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{a}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{a}{r} v^{(1)} \right) \right] \quad (4.71)$$

$$v^{(3)}_{,32} = \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^3 \partial x^2} - \frac{a}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} \right] \quad (4.72)$$

$$v^{(3)}_{,33} = \frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^3 \partial x^3} \quad (4.73)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones 4.56, 4.57 y 4.58, se obtienen las expresiones desarrolladas del laplaciano para $i = 1, 2, 3$, siendo:

para $i = 1$,

$$\begin{aligned} \nu \sqrt{g_{11}} g^{kj} v_{,jk}^{(1)} = & \nu \left\{ \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2 \partial x^2} - 2r \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + r \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(r \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) - v^{(1)} \right] - \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2 \partial x^3} - r \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x^3} \left(r \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] - \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^3 \partial x^2} - r \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] \right\} \quad (4.74) \end{aligned}$$

$$+\frac{r^2+a^2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^3 \partial x^3} \right) \Bigg\}$$

para $i = 2$,

$$\begin{aligned} \nu \sqrt{g_{22} g^{kj}} v_{,jk}^{(2)} &= \nu \sqrt{r^2+a^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{r} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right] \\ &+ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{v^{(1)}}{r} \right) \right] - \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{1}{r} v^{(1)} \right) \right] \\ &\left. - \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^2} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} \right] + \frac{r^2+a^2}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

para $i = 3$,

$$\begin{aligned} \nu \sqrt{g_{33} g^{kj}} v_{,jk}^{(3)} &= \nu \left\{ \frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{2a}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{a}{r} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) \right. \\ &- \frac{a}{r^2} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{2a}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^2} + r \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{a}{r} v^{(1)} \right) \right] \\ &- \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{a}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{a}{r} v^{(1)} \right) \right] - \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^3 \partial x^2} - \frac{a}{r} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} \right] \\ &\left. + \frac{r^2+a^2}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x^3 \partial x^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.76)$$

De la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} + \sqrt{g_{ii}} \left(\frac{v^{(j)}}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{v^{(i)}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ j \end{matrix} \right\} \left(\frac{v^{(k)}}{\sqrt{g_{kk}}} \right) \right] &= \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\rho} g^{ij} \frac{\partial P}{\partial x^j} \\ &+ f^{(i)} + \nu \sqrt{g_{ii}} g^{kj} v_{,jk}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.77)$$

desarrollando para $i = 1, j, k = 1, 2, 3$, sustituyendo los valores para los símbolos de Christoffel de la segunda clase y los componentes covariantes y contravariantes, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^1} + \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^2} - r \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) + v^{(3)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x^1} + f^{(1)} + \nu \sqrt{g_{11} g^{kj}} v^{(1)}{}_{,jk} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Expresando los componentes en coordenadas helicoidales:

Haciendo $x^1 = \rho, x^2 = \sigma, x^3 = \zeta; v^{(1)} = v_\rho, v^{(2)} = v_\sigma, v^{(3)} = v_\zeta$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial \sigma} - \rho \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) + v_\zeta \frac{\partial v_\rho}{\partial \zeta} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} + f_\rho + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \sigma^2} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) + \rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\rho \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) - v_\rho \right] - \frac{a}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \sigma \partial \zeta} - \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\rho \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{a}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \zeta \partial \sigma} - \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right) \right] + \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \zeta^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.79)$$

desarrollando para $i = 2, j, k = 1, 2, 3$, sustituyendo los valores para los símbolos de Christoffel de la segunda clase y los componentes covariantes y contravariantes, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + \sqrt{r^2 + a^2} \left[v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^1} + \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2 + a^2}} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^2} + v^{(3)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^3} r \frac{(v^{(2)})^2}{r^2 + a^2} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\rho} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial P}{\partial x^2} - a \frac{\partial P}{\partial x^3} \right] + f^{(2)} + \nu \sqrt{g_{22} g^{kj}} v^{(1)}{}_{,jk} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Haciendo $x^1 = \rho, x^2 = \sigma, x^3 = \zeta; v^{(1)} = v_\rho, v^{(2)} = v_\sigma, v^{(3)} = v_\zeta$

$$\frac{\partial v_\sigma}{\partial t} + \sqrt{\rho^2 + a^2} \left[v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \frac{\partial v_\rho}{\partial \sigma} + v_\zeta \frac{\partial v_\rho}{\partial \zeta} - \rho \frac{v_\sigma^2}{\rho^2 + a^2} \right] \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{\sqrt{\rho^2+a^2}}{\rho} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial P}{\partial \sigma} - a \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right] + f_\sigma + \nu \sqrt{\rho^2+a^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{v_\rho}{\rho} \right) \right] - \frac{a}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \zeta} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \zeta} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} v_\rho \right) \right] - \frac{a}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \sigma} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \zeta} \right] + \frac{\rho^2+a^2}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

desarrollando para $i = 3, j, k = 1, 2, 3$, sustituyendo los valores para los símbolos de Christoffel de la segunda clase y los componentes covariantes y contravariantes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v^{(3)}}{\partial t} + \left[v^{(1)} \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x^1} + \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x^2} + v^{(3)} \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x^3} - \frac{2a}{r} v^{(1)} \frac{v^{(2)}}{\sqrt{r^2+a^2}} \right] \quad (4.82) \\
= & -\frac{1}{\rho} \left[\frac{r^2+a^2}{r^2} \frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{a}{r^2} \frac{\partial P}{\partial x^2} \right] + f^{(3)} + \nu \sqrt{g_{33}} g^{kj} v^{(3)}{}_{,jk}
\end{aligned}$$

Haciendo $x^1 = \rho, x^2 = \sigma, x^3 = \zeta; v^{(1)} = v_\rho, v^{(2)} = v_\sigma, v^{(3)} = v_\zeta$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_\zeta}{\partial t} + \left[v_\rho \frac{\partial v_\zeta}{\partial \rho} + \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \frac{\partial v_\zeta}{\partial \sigma} + v_\zeta \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} - \frac{2a}{\rho} v_\rho \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right] \quad (4.83) \\
= & -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\rho^2+a^2}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{a}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right] + f_\zeta + \nu \left\{ \left[\frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \rho^2} - \frac{2a}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) \right. \right. \\
& - \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{a}{\rho} \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right) - \frac{a}{\rho^2} \frac{v_\sigma}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \sigma^2} - \frac{2a}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial v_\zeta}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{a}{\rho} v_\rho \right) \right] \\
& - \frac{a}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \sigma \partial \zeta} - \frac{a}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{a}{\rho} v_\rho \right) \right] - \frac{a}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \zeta \partial \sigma} - \frac{a}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \zeta} \right] + \frac{\rho^2+a^2}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial \zeta^2} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

4.2.1 DISCUSION Y LIMITACIONES

Se han desarrollado la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes en las tres direcciones correspondientes para un sistema coordenado no ortogonal: el sistema de coordenadas helicoidales.

El análisis de cada uno de los términos que constituyen las ecuaciones antes mencionadas no

se incluye aquí. Tampoco se aplican a un problema en particular, lo cual pueda parecer poco práctico, pero se menciona su posible aplicación al problema de la burbuja que describe una trayectoria helicoidal. En realidad, el objetivo de este capítulo es plantear las ecuaciones que se pueden aplicar a fin de describir el comportamiento de la burbuja cuando asciende a través de un fluido con movimiento helicoidal.

PARTE II

DESARROLLO EXPERIMENTAL

.

CAPITULO 5

SISTEMA EXPERIMENTAL

En este capítulo se describe cada uno de los componentes del sistema experimental diseñado a fin de llevar a cabo la reconstrucción bidimensional y tridimensional de la trayectoria de diversas burbujas de diámetro pequeño (aproximadamente 0.2 cm), a partir de la determinación de su centro de masa. Así mismo, se describe la metodología que se siguió para su determinación.

También se describe la metodología desarrollada para determinar la velocidad de las burbujas de aire y el sistema optoelectrónico utilizado para llevar a cabo tales mediciones.

5.1 ANTECEDENTES

Aunque el objetivo principal de este trabajo no es describir la dinámica de la formación de una burbuja de aire, es conveniente mencionar algunos de los factores más importantes que influyen en el proceso de formación de ésta, tales como las propiedades del medio que la rodea, el diámetro del orificio sobre el cual se forma, las condiciones de flujo volumétrico de aire, etc., para de esta forma poder situarla dentro del esquema de la trayectoria que debería seguir. La influencia de tales factores en el tamaño de la burbuja, en particular de las propiedades físicas del medio que la rodea, ha sido estudiada por un gran número de investigadores (Kumar *et al.*, 1969; Bhaga y Weber, 1981; Gaddis y Vogelpohl, 1986). Sin embargo existe discrepancia en los resultados obtenidos y ésto conduce a analizar las condiciones de operación en que se obtuvieron.

A continuación se mencionan dos modelos planteados por Kumar *et al.* (1969) y Gaddis y

Vogelpohl (1986), respectivamente, a modo de introducción, a fin de tener una idea más clara de lo que representa el mecanismo de formación de una burbuja de gas en un líquido.

5.1.1 MODELO DE KUMAR, RAMAKRISHNAN Y KULLOOR (1969)

Kumar *et al.* (1969) propusieron un modelo basado en un mecanismo que supone dos etapas en la formación de la burbuja de aire bajo condiciones de flujo constante. La primera etapa consiste en la expansión de una burbuja cuya base permanece sin desprenderse en la parte superior de una boquilla (figura 5.1 a), mientras que en la segunda etapa la base de la burbuja se separa del orificio del inyector quedando en contacto con éste por medio de un cuello (figura 5.1-b). Ambas etapas están representadas en la figura 5.1.

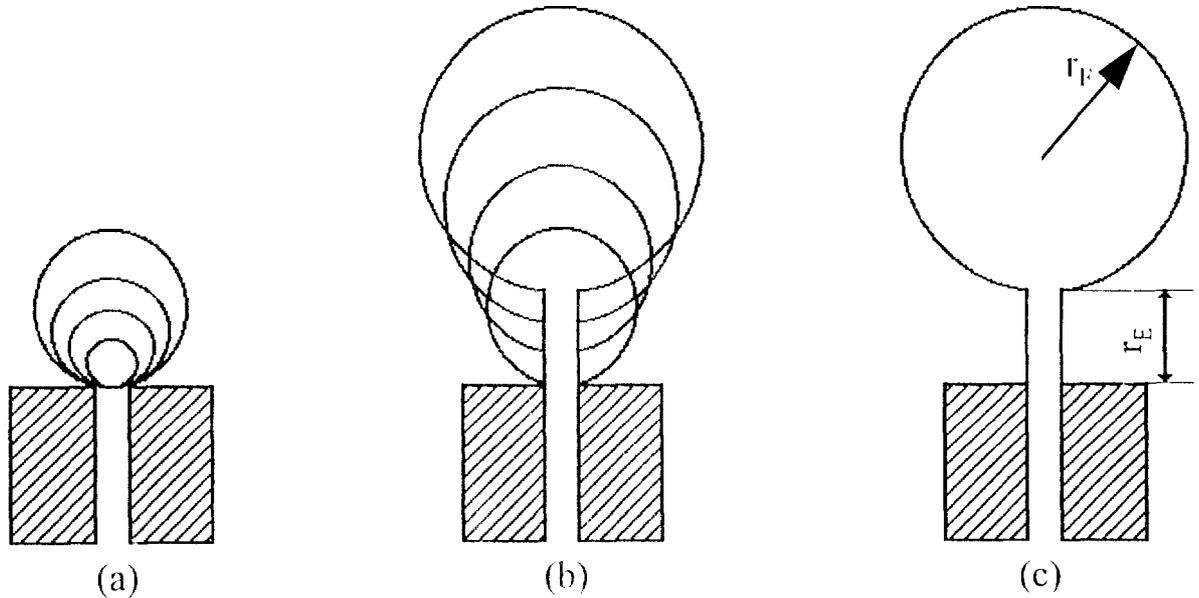


Figura 5.1: Mecanismo propuesto por Kumar *et al.* para la formación de una burbuja: (a) etapa de expansión, (b) etapa de separación de la boquilla del inyector, (c) etapa de separación.

El volumen final de la burbuja es la suma de los volúmenes correspondientes a cada etapa, siendo

$$V_F = V_E + Qt_c \quad (5.1)$$

donde V_E es el volumen de la burbuja justo antes de desprenderse su base del orificio de la boquilla y el producto Qt_c es el volumen alcanzado durante la segunda etapa, siendo t_c el tiempo de separación y Q el flujo volumétrico de gas.

Para evaluar V_E se pueden considerar dos opciones, dependiendo del flujo volumétrico de gas empleado:

1. Cuando se opera con flujos volumétricos de gas muy pequeños ($Q \approx 0$), el volumen de la burbuja se puede obtener a partir de un balance de fuerzas entre la fuerza de flotación y la fuerza de tensión superficial (Brodkey, 1995):

$$V_E (\rho_\ell - \rho_g) g = \left(\frac{\pi d_e^3}{6} \right) (\rho_\ell - \rho_g) g = \pi d_n \sigma \cos \theta f \left(\frac{d_n}{a} \right) \quad (5.2)$$

donde V_E es el volumen de una burbuja de diámetro equivalente d_e , θ es el ángulo de contacto en la interfase gas-líquido-sólido, d_n es el diámetro del orificio del inyector y $f \left(\frac{d_n}{a} \right)$ es un factor de forma igual a uno para burbujas esféricas. Resolviendo para V_E , se obtiene la expresión que predice el volumen de la burbuja al final de la primera etapa:

$$V_E = \frac{\pi d_n \sigma \cos \theta}{g \rho_\ell} \quad (5.3)$$

donde se ha considerado despreciable la densidad del gas con respecto a la densidad del líquido y el factor de forma igual a uno.

2. Cuando el flujo volumétrico es finito, existen fuerzas asociadas al proceso de expansión de la burbuja, la cual se expande a una tasa definida, que deben sumarse a la fuerza de flotación y la fuerza de tensión superficial. Estas son la fuerza inercial y la fuerza de arrastre viscoso (fuerza de Stokes). La expresión desarrollada por Kumar *et al.* está expresada en forma general por

$$V_E^{\frac{5}{3}} = \frac{11Q^2}{192\pi \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} g} + \frac{3}{2 \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} g} \left(\frac{\mu_\ell}{\rho_\ell} Q V_E^{\frac{1}{3}} \right) + \frac{\pi d_n \sigma \cos \theta}{g \rho_\ell} V_E^{\frac{2}{3}} \quad (5.4)$$

la cual puede reducirse a casos particulares dependiendo de la naturaleza del fluido circundante. Por ejemplo, si se considera despreciable la viscosidad del líquido ($\mu_\ell \approx 0$), el segundo término del lado derecho de la ecuación se elimina y la ecuación se reduce al caso de un fluido no viscoso

donde predomina el efecto de la tensión superficial. Si se considera el flujo volumétrico despreciable ($Q \approx 0$), la ecuación se reduce al caso de una burbuja de volumen constante (ec. 5.3).

Durante la segunda etapa las fuerzas ascendentes exceden a las fuerzas que mantienen a la burbuja sujeta a la boquilla del inyector ocasionando que la burbuja se acelere. Se supone que la burbuja se separa cuando su base ha cubierto una distancia igual al radio (r_E) considerado en el balance de fuerzas para la burbuja. Esto corresponde muy aproximadamente a la condición donde la burbuja ascendente no es alcanzada por la siguiente burbuja que está expandiéndose en el inyector, evitando así que ambas coalescan.

El modelo planteado por Kumar *et al.*, a partir de la segunda ley de movimiento de Newton expresada para el movimiento de la burbuja, es el siguiente:

$$r_E = \frac{B}{2Q(A+1)} (V_F^2 - V_E^2) - \left(\frac{C}{AQ} \right) (V_F - V_E) - \frac{3G}{2Q \left(A - \frac{1}{3} \right)} \left(V_F^{\frac{2}{3}} - V_E^{\frac{2}{3}} \right) \quad (5.5)$$

donde

$$A = 1 + \frac{96\pi (1.25) r_E \mu \ell}{11 \rho r Q} \quad (5.6)$$

$$B = \frac{16g}{11Q} \quad (5.7)$$

$$C = \frac{16\pi d_n \sigma \cos \theta}{11 \rho r Q} \quad (5.8)$$

$$G = \frac{2A\mu\ell}{11 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho \ell} \quad (5.9)$$

A partir de la ecuación 5.5 se puede obtener el volumen final de la burbuja, V_F , por prueba y error. El valor de r_E se calcula del volumen final de la primera etapa, V_E .

En base a los resultados obtenidos del modelo teórico de Kumar *et al.*, y haciendo la comparación con los resultados experimentales de diversos investigadores, se determina el efecto que tiene la tensión superficial, la viscosidad y la densidad en el volumen de la burbuja, tal y como se describe a continuación.

Efecto de la tensión superficial

La fuerza de la tensión superficial es uno de los factores que influyen en el volumen de la burbuja en ambas etapas de su formación.

- a) Cuando el flujo volumétrico de gas es muy pequeño ($Q \approx 0$), el volumen de la burbuja depende únicamente de la fuerza de flotación y la fuerza de la tensión superficial, como ya se ha mencionado con anterioridad.
- b) En el caso de líquidos de baja viscosidad, el efecto de la tensión superficial es dominante a tasas de flujo bajas pero su influencia disminuye en forma continua al incrementar la tasa de flujo. La tasa de flujo finalmente alcanza un valor donde el efecto de la tensión superficial se puede considerar despreciable. Por encima de este valor, independientemente del valor de la tensión superficial y aún para diferentes líquidos, el volumen de la burbuja será siempre el mismo para una tasa de flujo dada.
- c) Para líquidos muy viscosos el efecto de la fuerza de la tensión superficial es muy pequeño. La tasa de flujo a la cual el efecto de la tensión superficial es despreciable, es más pequeña comparada con el caso de líquidos no viscosos.

Efecto de la viscosidad

- a) Un incremento en la viscosidad aumenta el tamaño de la burbuja. Para líquidos muy viscosos predomina el arrastre viscoso y el volumen de la burbuja se ve influenciado por la viscosidad. El efecto es despreciable cuando las tasas de flujo son bajas.
- b) El efecto de la viscosidad es grande a tasas de flujo altas, y
- c) su efecto es grande para líquidos de baja tensión superficial y orificios de diámetro pequeño.

Efecto de la densidad

De la ecuación 5.4 se observa que cuando Q y μ_f son pequeños sólo permanece el último término del lado derecho de la ecuación y el volumen de la burbuja disminuye al aumentar la densidad.

Por otro lado, cuando Q es grande y μ_ℓ es pequeño los últimos dos términos del lado derecho de la ecuación 5.4 son despreciables cuando se usan orificios cuyos diámetros sean muy pequeños. En este caso, el volumen de la burbuja es independiente de la densidad del líquido. Para líquidos de baja densidad y diámetros de orificio pequeños, la densidad del líquido no influye en el volumen de la burbuja cuando la tasa de flujo es alta. En el caso de líquidos muy viscosos, cuando el diámetro de los orificios es pequeño, el primer y tercer términos del lado derecho de la ecuación 5.4 se desprecian y nuevamente el volumen de la burbuja disminuye al aumentar la densidad del líquido. En base a esto, la densidad puede o no influir en el volumen de la burbuja.

Cuando el diámetro de orificio es pequeño, la tensión superficial reduce su importancia y para líquidos muy viscosos, el efecto de la tensión superficial es despreciable comparado con el arrastre viscoso.

5.1.2 MODELO DE GADDIS Y VOGELPOHL (1986)

El modelo analítico desarrollado por Gaddis y Vogelpohl (1986) predice el diámetro de la burbuja cuando ésta se separa de la boquilla del inyector, en líquidos estáticos bajo condiciones de flujo volumétrico constante. Este modelo corresponde a la segunda etapa del mecanismo de formación de una burbuja propuesto por Kumar *et al.*, sólo que en éste se incluye la fuerza debida a la presión, F_p .

La figura 5.2 representa el modelo geométrico para la burbuja que se expande debido al flujo de gas y que todavía permanece sujeta a la boquilla del inyector por medio de un cuello. Además, se indican las diferentes fuerzas que se ejercen sobre ella, las cuales se clasifican en volumétricas y superficiales.

Las fuerzas volumétricas o de ascenso que actúan sobre la burbuja son:

Fuerza de flotación, F_b :

La expresión que representa esta fuerza está dada por:

$$F_b = \frac{\pi}{6} d_c^3 (\rho_\ell - \rho_g) g \quad (5.10)$$

donde d_e es el diámetro de una esfera de volumen equivalente. Esta ecuación implica que la presión del gas p_g es igual a la presión del líquido p_ℓ en un plano localizado en la base de la burbuja.

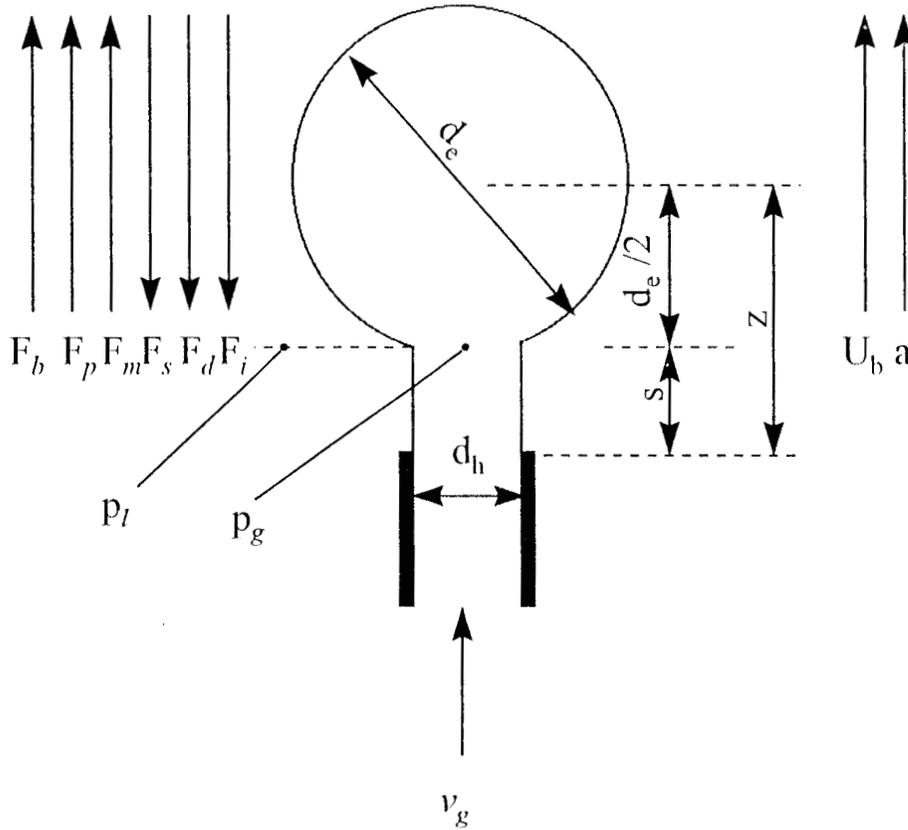


Figura 5.2: Modelo geométrico de una burbuja esférica sujeta a la boquilla del inyector a través de un cuello cilíndrico.

Fuerza ejercida por la presión, F_p :

Ya que $p_g > p_\ell$, debido a que la burbuja se está expandiendo contra la presión ejercida por el líquido en su superficie, en el balance de fuerzas debe incluirse la fuerza ejercida por la presión, dada por

$$F_p = \frac{\pi}{4} d_n^2 (p_g - p_\ell) \quad (5.11)$$

donde d_n es el diámetro de la boquilla del inyector.

Fuerza debida al movimiento del gas, F_m :

Esta fuerza resulta de la energía cinética del gas que se está inyectando al interior de la burbuja. Suponiendo que esta fuerza (inercial) se ejerce en la base de la burbuja, su expresión puede obtenerse a partir del producto entre la presión dinámica del gas y el área de la sección transversal del orificio del inyector:

$$F_m = \frac{\pi}{4} d_n^2 \rho_g v_g^2 \quad (5.12)$$

donde v_g es la velocidad del gas que fluye a través del inyector. Sin embargo, esta fuerza es pequeña y puede ignorarse excepto a altas presiones y altas tasas de flujo de gas.

Las fuerzas superficiales que actúan sobre la burbuja en contraposición a las fuerzas ascendentes o volumétricas son:

Fuerza ejercida por la tensión superficial, F_s :

Durante la etapa de expansión de la burbuja, ésta permanece adherida a la orilla interna de la boquilla del inyector. La fuerza de esta adhesión depende de la tensión superficial entre la fase gaseosa y la fase líquida y del diámetro del orificio. Por lo tanto, la expresión para esta fuerza está dada por:

$$F_s = \pi d_n \sigma \quad (5.13)$$

la cual expresa el producto entre la circunferencia del orificio y la tensión superficial entre las dos fases.

Fuerza de arrastre, F_d :

Conforme la burbuja se expande su superficie se aleja de la boquilla del inyector. Este movimiento ocasiona una corriente del líquido circundante alrededor de su superficie, provocando el arrastre por fricción que actúa en contra de la separación de la burbuja del orificio del inyector. La expresión analítica expresada para la burbuja está dada por:

$$F_d = \frac{\pi}{4} d_b^2 C_D \frac{\rho_l U_b^2}{2} \quad (5.14)$$

la cual representa el producto entre el área máxima proyectada de la burbuja perpendicular a la corriente libre del líquido, el coeficiente de arrastre y la presión dinámica de la fase líquida contra la parte frontal de la burbuja.

A bajos números de Reynolds ($Re_b < 0.1$), el arrastre total sobre una esfera es debido principalmente a las fuerzas viscosas, y el coeficiente de arrastre está dado por

$$C_D = \frac{24}{Re_b} \quad (5.15)$$

A altos números de Reynolds ($Re_b \geq 10^3$), el arrastre total es debido principalmente a la resistencia de forma. El coeficiente de arrastre para una esfera sólida tiene un valor aproximado de 0.4, válido en el rango $1 \times 10^3 \leq Re_b \leq 2 \times 10^5$; para una burbuja grande que asciende libremente en un líquido no viscoso, es de alrededor de 2.6. Este valor del coeficiente de arrastre para burbujas grandes se debe a que la forma de la burbuja (irregularmente aplanada) está cambiando continuamente durante su ascenso. Los dos argumentos anteriores sirven de base para suponer que el coeficiente de arrastre durante la etapa de formación de burbujas grandes, está en el rango de $0.4 \leq C_D \leq 2.6$. Suponiendo que el coeficiente de arrastre es la unidad para burbujas a altos números de Reynolds y superponiendo los coeficientes de arrastre para ambos regímenes se obtiene

$$C_D = \frac{24}{Re_b} + 1 \quad (5.16)$$

el cual cubre todo el intervalo de Re_b .

Suponiendo que la velocidad U_b en la ecuación 5.14 puede representarse por la velocidad promedio durante el periodo de formación de la burbuja, se obtiene

$$U_b = \frac{z}{t_b} \quad (5.17)$$

donde z es el desplazamiento del centro de la burbuja medido a partir de la boquilla del inyector en la etapa de separación, y t_b es el tiempo de formación de la burbuja.

Haciendo

$$z = \frac{d_c}{2} + s_c \quad (5.18)$$

donde s_c es la longitud del cuello en el momento en el que se suelta la burbuja.

A partir de observaciones experimentales, Rübiger (1984) desarrolló una relación empírica para calcular el valor de s_c , dada por

$$s_c = \frac{d_c}{4} \quad (5.19)$$

Suponiendo que la ecuación 5.19 se aplica en todos los casos, se sustituye en la ecuación 5.18 y se obtiene

$$z = \frac{3}{4}d_c \quad (5.20)$$

El tiempo de formación de la burbuja está dado por

$$t_b = \frac{V}{Q} = \frac{\pi d_c^3}{6Q} \quad (5.21)$$

donde V es el volumen final de la burbuja en la etapa de separación y Q es la tasa de flujo volumétrico de gas a través de la boquilla del inyector.

Sustituyendo las ecuaciones 5.20 y 5.21 en la ecuación 5.17 se obtiene

$$U_b = \frac{9Q}{2\pi d_c^2} \quad (5.22)$$

y la fuerza de arrastre se reduce a

$$F_d = \frac{27\mu_c Q}{2d_c} + \frac{81\rho_c Q^2}{32\pi d_c^2} \quad (5.23)$$

Fuerza inercial, F_i :

El volumen de la burbuja se incrementa durante la etapa de separación y debido a que la fuerza de flotación se incrementa continuamente, la burbuja se acelera hasta alcanzar el punto de separación. La fuerza inercial está expresada por

$$F_i = (\rho_g V + \rho_\ell V_\ell) a_b \quad (5.24)$$

donde V_ℓ es el volumen de líquido asociado con el movimiento de la burbuja y a_b es la aceleración de ésta. En base a las consideraciones teóricas del movimiento de fluidos no viscosos (Milne Thomson, 1949), el volumen del líquido está representado por

$$V_\ell = \frac{11}{16} V \quad (5.25)$$

Suponiendo que la aceleración en el momento de la separación de la burbuja está representada por

$$a_b = \frac{U_b}{t_b} \quad (5.26)$$

y retomando las ecuaciones 5.21, 5.22 y 5.25, se obtiene la expresión para la fuerza inercial dada por

$$F_i = \left(\frac{99}{32\pi} + \frac{9}{2\pi} \frac{\rho_g}{\rho_\ell} \right) \frac{\rho_\ell Q^2}{d_c^2} \quad (5.27)$$

Haciendo el balance de fuerzas en el momento de la etapa de separación de acuerdo con la figura 5.2, se obtiene:

$$F_b + F_m = F_s + F_d + F_i \quad (5.28)$$

y sustituyendo las respectivas expresiones para cada fuerza, se obtiene

$$d_c^3 = S + \frac{L}{d_c} + \frac{T}{d_c^2} \quad (5.29)$$

donde S , L y T son constantes dadas por

$$S = \frac{6d_n\sigma}{(\rho_\ell - \rho_g)g} \left(1 - \frac{We}{4} \right) \quad (5.30)$$

$$L = \frac{81\mu_\ell Q}{\pi(\rho_\ell - \rho_g)g} \quad (5.31)$$

$$T = \left(\frac{135}{4\pi^2} + \frac{27\rho_g}{\pi^2\rho_\ell} \right) \frac{\rho_\ell Q^2}{(\rho_\ell - \rho_g)g} \quad (5.32)$$

y

$$We = \frac{d_n \rho_g v_g^2}{\sigma} = \frac{16\rho_g Q^2}{\pi^2 d_n^3 \sigma} \quad (5.33)$$

Cuando es posible despreciar la densidad del gas comparada con la densidad del líquido ($\rho_g \ll \rho_\ell$), pueden hacerse las siguientes aproximaciones:

$$S = \frac{6d_n\sigma}{g\rho_\ell} \quad (5.34)$$

$$L = \frac{81\mu_\ell Q}{\pi g\rho_\ell} \quad (5.35)$$

$$T = \frac{135Q^2}{4\pi^2 g} \quad (5.36)$$

y

$$We \rightarrow 0 \quad (5.37)$$

Un caso especial de la ecuación 5.29 puede derivarse cuando el diámetro de la burbuja en la etapa de la separación es controlado por la tensión superficial, es decir, cuando el flujo volumétrico de aire es muy bajo ($Q \approx 0$). Haciendo $Q = 0$ en la ecuación 5.29 y despreciando la densidad del gas, se obtiene

$$d_c = \left(\frac{6d_n\sigma}{g\rho_\ell} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.38)$$

la cual coincide con la ecuación 5.3 haciendo $\theta = 0$ y $V_E = \frac{\pi d_c^3}{6}$.

5.2 DISEÑO DEL EQUIPO EXPERIMENTAL

El sistema montado para llevar a cabo los experimentos consta principalmente de un inyector de aire y un contenedor rectangular al que llamaremos pecera. El inyector está centrado en el fondo de la pecera en posición vertical. Se abre la válvula de la toma principal de aire del laboratorio y mediante una válvula de aguja de regulación fina se mantiene un flujo muy bajo ($Q \approx 0$), a fin de poder generar una sola burbuja. Posteriormente y mediante el uso de dos cámaras de video, se filman dos vistas ortogonales de la pecera; usando una tarjeta de adquisición de imágenes se hace la captura de éstas y se procesan a fin de poder determinar el centro de masa de la burbuja, cuadro por cuadro, y se reconstruye la trayectoria tridimensional de la burbuja.

El sistema experimental está representado esquemáticamente en la figura 5.3.

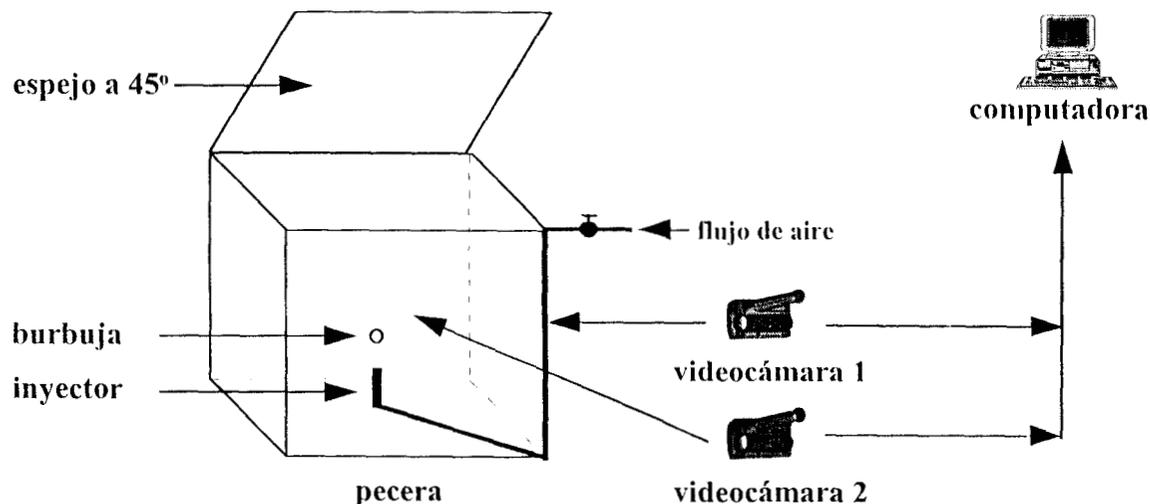


Figura 5.3: Sistema experimental

5.2.1 PECERA

Se construyó una pecera que cuenta con vidrios transparentes en sus cuatro caras y uno en la parte inferior; el espesor de los vidrios es de 9 mm. En la parte superior se ha colocado un espejo con un ángulo de inclinación de 45°, el cual permite la observación del movimiento de las burbujas a partir de una vista superior.

Las dimensiones de la pecera son 80 cm de ancho, 80 cm de largo y 60 cm de altura. El diseño de la pecera se hizo en base a los cálculos realizados para determinar la distancia a la

cual se pueden despreciar los efectos de la pared y la distancia a la cual la burbuja alcanza su velocidad terminal (Bird *et al.*, 1987; Brodkey, 1995).

Supóngase que una esfera de radio R desciende a través de un fluido estacionario de viscosidad μ_ℓ con una velocidad terminal U_∞ . Se requiere determinar la distancia horizontal desde la esfera, en un plano perpendicular a la dirección de caída, donde la velocidad del fluido sea 0.01 veces la velocidad límite de la esfera. Tomando la ecuación 4.2-13 de Bird *et al.* (1987) dada por

$$\frac{v_\theta}{U_\infty} = \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin\theta \quad (5.39)$$

Para

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{v_\theta}{U_\infty} = 0.99 \quad (5.40)$$

y haciendo

$$\frac{R}{r} \ll 1$$

la ecuación se reduce a

$$r = \frac{3}{0.04} R = 75R \quad (5.41)$$

donde se ha despreciado el término cúbico. Entonces, la ecuación expresa el hecho de que aproximadamente a 75 radios de la esfera la velocidad del fluido reduce su efecto un 99%. Por lo tanto, si el diámetro de la esfera que se genera es de aproximadamente 1 cm, la distancia a la cual se pueden despreciar los efectos de pared será de aproximadamente 40 cm a partir del centro de la pecera.

5.2.2 INYECTOR

Existe gran variedad de dispositivos diseñados exclusivamente para generar burbujas de gas en diferentes condiciones de operación. Sin embargo, el dispositivo comúnmente empleado en la mayoría de las investigaciones experimentales para generar burbujas consiste en un tubo

cilíndrico de corta longitud sumergido en forma vertical. Ambos extremos son planos y lo atraviesa un orificio cuyo diámetro está representado por d_n .

El inyector de aire diseñado en el presente estudio, es un tubo cilíndrico que se encuentra fijo en el interior de un tubo de cobre. Está hecho de un material no mojanete (teflón) cuyo extremo superior, a diferencia de los comúnmente usados, cuenta con una perforación a 72° a partir de un eje horizontal. La figura 5.4 muestra las características de este inyector.

La perforación a 72° resulta al tomar en cuenta el ángulo de contacto entre las tres fases (teflón-aire-agua), el cual es de 108° , y considerar la manera en que la burbuja se forma en la boquilla del inyector.

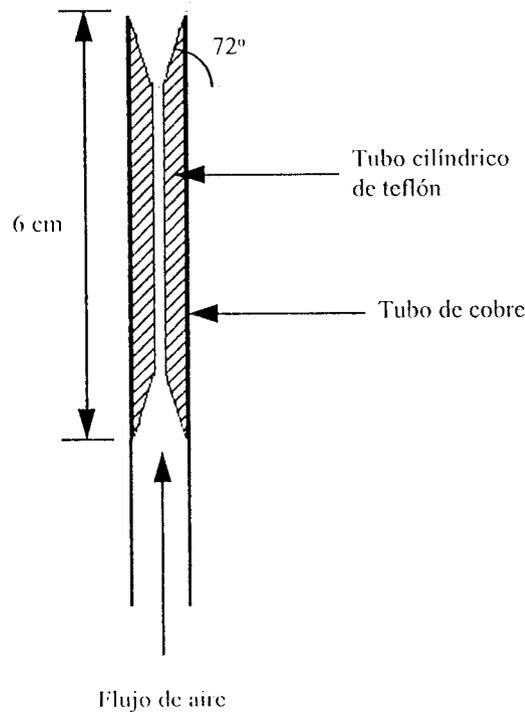


Figura 5.4: Corte longitudinal del inyector

La figura 5.5 muestra las distintas etapas del proceso de formación de la burbuja en el inyector. Inicialmente, a diferencia de lo que sucede en los inyectores cuyo extremo superior es plano (ver figura 5.1), el aire asciende en el orificio del inyector de tal forma que la interfase gas-líquido se mantiene plana (etapas 1 y 2). Posteriormente, la burbuja empieza a formarse manteniéndose sujeta a las paredes de teflón durante su crecimiento, siendo la superficie de

contacto horizontal con la pared (etapas 3, 4 y 5). El tamaño de la burbuja se incrementa rápidamente hasta que se suelta del inyector, justo cuando las fuerzas volumétricas exceden a las fuerzas superficiales, y asciende sujeta a las propiedades del medio que la rodea (etapa 6).

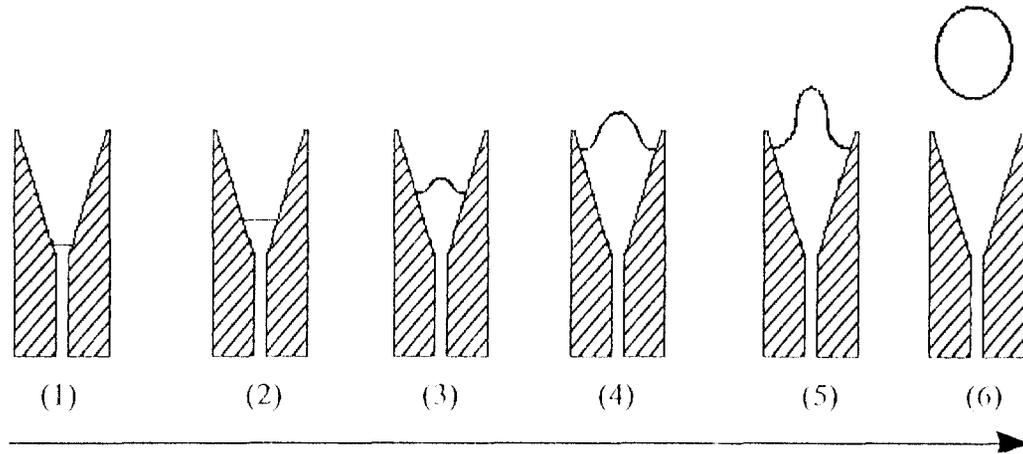
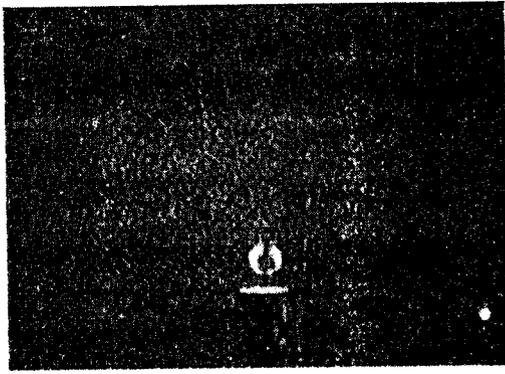


Figura 5.5: Modelo que representa la generación de la burbuja en el inyector (a e) y su partida (f).

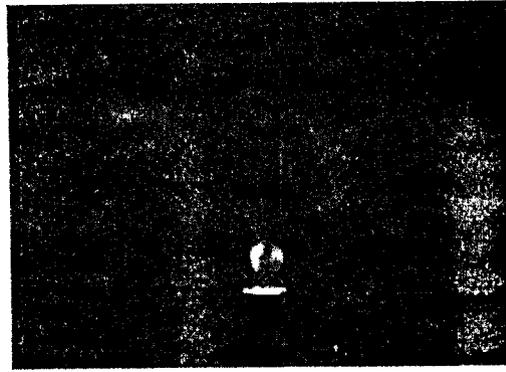
Ya que nuestro propósito no es desarrollar un modelo teórico que describa la formación de la burbuja en el inyector, sólo se mencionan las fuerzas volumétricas y superficiales como tales, sin hacer un análisis minucioso. Un análisis detallado de estas fuerzas se dio en la sección 5.1, a través de los modelos desarrollados por Kumar *et al.* y Gaddis y Vogelpohl.

El volumen inicial de la burbuja se determinó a partir de la filmación de una secuencia de burbujas generadas en un intervalo de tiempo de 10 segundos entre burbuja y burbuja; el flujo de aire se mantuvo constante. Las imágenes así obtenidas se procesaron y se determinó su volumen a partir de la medición de los diámetros horizontal y vertical para cada burbuja.

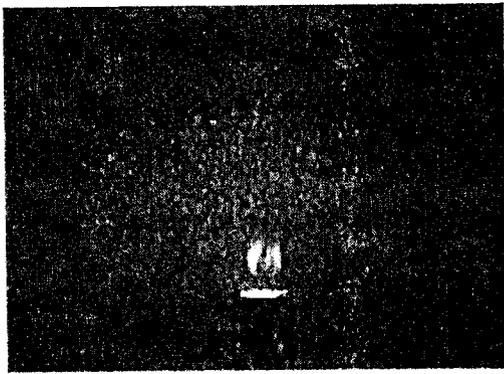
La medición de estos diámetros arrojó un valor de 0.86 ± 0.01 cm para cada burbuja. Esto se logró gracias a que la forma de la burbuja es esférica justo cuando se suelta del inyector y permanece así una corta distancia (aproximadamente 2 cm) para posteriormente deformarse debido a la influencia del medio que la rodea. En la figura 5.7 se muestran las imágenes de seis de estas burbujas a las que se determinó su volumen inicial, ya que conforme la burbuja asciende su superficie se expande debido a la disminución de la presión hidrostática, con el consiguiente aumento de su volumen.



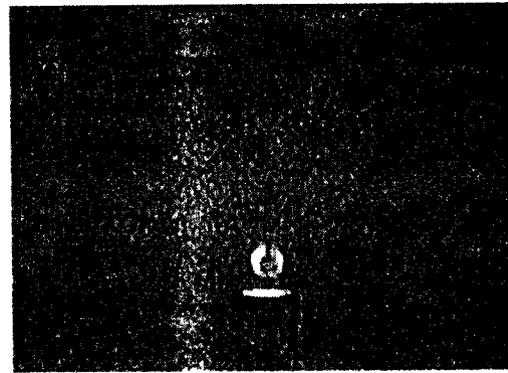
(1)



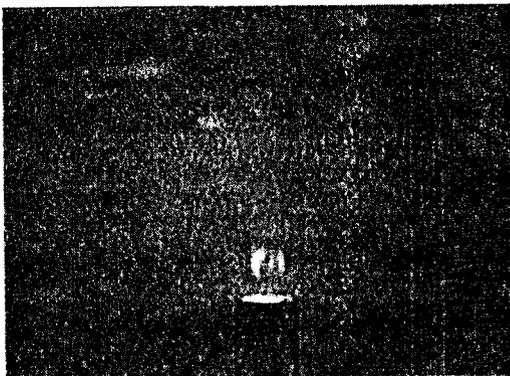
(2)



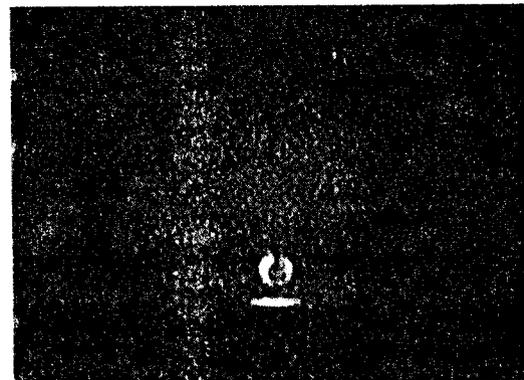
(3)



(4)



(5)



(6)

Figura 5.7: Imágenes de seis burbujas generadas utilizando el inyector mencionado, donde se observa su forma esférica.

El valor obtenido para el diámetro permite señalar que el volumen de la burbuja es constante cuando el flujo volumétrico de gas es bajo, tal y como está señalado en forma cualitativa en la figura 5.8. El volumen calculado a partir del diámetro medido es de 0.33 cm^3 . El hecho de que el volumen de la burbuja permanezca constante en cada evento es de suma importancia ya que permite la reproducibilidad del fenómeno. Sin embargo, una desventaja de este inyector surge de la falta de expresiones analíticas desarrolladas para el cálculo del volumen teórico de una burbuja en función de las características físicas del inyector, lo cual hace imposible la comparación de los volúmenes calculados experimentalmente con los calculados a partir de una expresión analítica.

Dependiendo de la rapidez de flujo de gas, la formación de la burbuja puede clasificarse en tres regiones diferentes (Brodkey, 1995) representadas en forma cualitativa en la figura 5.8. Cuando la tasa de flujo es muy baja ($Q \approx 0$), el volumen de la burbuja permanece esencialmente constante para un diámetro de orificio dado y por lo tanto la frecuencia de producción de burbujas es proporcional a la tasa de flujo de gas. Este tipo de formación corresponde a la llamada burbuja estática o de volumen constante.

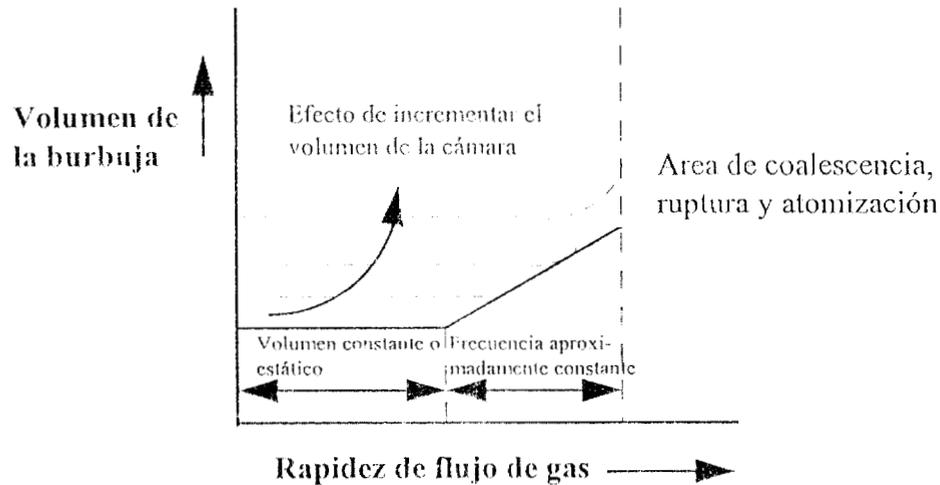


Figura 5.8: Volumen de la burbuja como una función de la tasa de flujo de gas.

Al incrementar el flujo de gas la formación de la burbuja atraviesa por una región de transición, la frecuencia se estabiliza en un valor constante y el volumen se incrementa en proporción a la rapidez de flujo de gas. Este segundo tipo corresponde a la llamada burbuja de frecuencia constante. A mayores tasas de flujo, ocurren los fenómenos de coalescencia y ruptura

de las burbujas; estas son la condiciones de operación de la mayoría de los equipos industriales.

5.3 DIGITALIZACION Y PROCESAMIENTO DE IMAGENES

La captura de imágenes se llevó a cabo utilizando dos cámaras de video colocadas en dos vistas ortogonales, a fin de poder tener dos referencias de la trayectoria de ascenso de la burbuja. Por ejemplo, si fijamos un sistema de coordenadas cartesianas en una de las esquinas de la pecera, y se coloca una cámara de video en la cara frontal y la segunda en una de las caras laterales, se tendrá un eje común para ambas vistas y dos ejes distintos. Es decir, si el eje común es z , una cámara filma sobre el plano $x - z$ y la segunda filma sobre el plano $y - z$.

Mediante un sistema de iluminación adecuado se logró la captura de un conjunto de burbujas, con intervalos de tiempo cortos entre cada una pero tratando, en la medida de lo posible, de mantener el líquido en condiciones estáticas al generar cada una de ellas y evitar que las perturbaciones generadas en el fluido por el ascenso de una burbuja, afecten la trayectoria de ascenso de la siguiente burbuja.

Como medio líquido se utilizó agua desionizada a fin de trabajar en condiciones de extrema pureza y evitar, en la medida de lo posible, el efecto que sobre la trayectoria de la burbuja pudieran tener contaminantes, agentes tensoactivos, obstáculos que desviarán a la burbuja de su trayectoria, etc.

5.3.1 CALIBRACION DE LAS VIDEOCAMARAS

La calibración de las videocámaras es una necesidad que surge debido a la dificultad que se presenta cuando se requiere que dos o más videocámaras filmen un cuadro de referencia que tenga las mismas dimensiones y la misma resolución en cada una de ellas. Esta dificultad se presenta sobretodo si se utilizan videocámaras de diferente marca comercial ya que las características pueden diferir, tales como el enfoque, las líneas de resolución, el diámetro del lente, etc.

Supongamos que una esfera está suspendida en el interior de la pecera y se requiere determinar las coordenadas de su centro geométrico en ambos planos, de tal forma que las coordenadas correspondan exactamente en ambos planos. Ya que el objeto suspendido es una esfera, la proyección en cada plano es un círculo y las coordenadas del centro geométrico corresponderían

al centro de cada círculo. Si fuera posible lograr que las coordenadas coincidan en cada plano, se tendrían las dos videocámaras colocadas a la misma distancia y con la misma resolución. Sin embargo, lograr lo anterior es muy difícil. Una forma de evitar esta dificultad es fijar un punto común en ambos planos (el centro geométrico de la esfera por ejemplo) no importando la resolución de las videocámaras y la distancia a la cual estén colocadas cada una de ellas, tomar este punto como el origen de un sistema cartesiano en cada plano y a partir de éste determinar las distancias correspondientes al centro de masa de la burbuja en cada una de sus posiciones.

Ahora, supóngase que un cilindro de altura h está suspendido en el interior de la pecera en posición vertical. Se obtiene una imagen del cilindro de cada videocámara y se procesan a fin de determinar la altura del cilindro expresada en píxeles, para cada plano correspondiente. Una vez que se ha logrado lo anterior, se tiene la relación de la altura del cilindro expresada en unidades de longitud y su correspondiente valor en píxeles para cada plano. Esto permite hacer un escalamiento de las distancias del centro de masa de la burbuja al origen del sistema de coordenadas, expresadas ahora en unidades de longitud. Esto se debe realizar, ya que el valor correspondiente en píxeles de la altura del cilindro para cada plano, no es constante debido a la resolución de cada videocámara.

5.3.2 CAPTURA Y PROCESAMIENTO DE LAS IMAGENES

Las dos videocámaras están conectadas a una tarjeta de adquisición de imágenes modelo DT-3155 cuya capacidad de captura es de 30 cuadros por segundo. Una característica adicional de esta tarjeta es que cuenta con entradas hasta para cuatro videocámaras, siendo la captura de cuadros en forma alternada secuencial.

Anteriormente se mencionó que en los experimentos realizados sólo se utilizaron dos videocámaras las cuales estaban conectadas a la PC, por lo que se obtienen 15 cuadros por segundo por cada videocámara. Por lo tanto, las posiciones de la trayectoria de la burbuja se encuentran desfasadas $2/30$ seg en cada plano.

Las imágenes obtenidas en formato bmp (bitmap picture) se procesaron a fin de determinar el centro de masa de la burbuja en cada una de sus posiciones. Lo anterior se realizó desarrollando un programa utilizando el paquete MatLab para Windows versión 4.0, el cual incluye el módulo Toolbox para procesamiento de imágenes. El centro de masa de la burbuja se obtiene

a partir del contorno de la misma.

El contorno de la burbuja en una imagen plana está formado por los pares de coordenadas (x_i, y_i) . La media aritmética de todos los valores de las coordenadas x_i ,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (5.42)$$

y la media aritmética de todos los valores de las coordenadas y_i ,

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \quad (5.43)$$

donde n es el número de puntos que constituyen el contorno, representan el par de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) que corresponden al centro de masa de la burbuja. Esto se aplica a cada una de las imágenes que representan la trayectoria de la burbuja y se obtienen los puntos para cada una de sus posiciones, que al ser graficados describen la trayectoria que siguió la burbuja durante una parte de su ascenso en la pecera.

Si se elige la vista frontal de la pecera como el plano $x - z$ y la vista lateral derecha como el eje $y - z$, donde se ha elegido por conveniencia el eje z común en ambos planos, se tiene entonces por un lado las coordenadas (x, z) del centro de masa de la burbuja, y por otro lado las coordenadas (y, z) . Ya que el eje común a ambos planos es la coordenada z , se tiene la altura de la burbuja para los tiempos $1/30, 2/30, 3/30 \text{ seg}, \dots$. Sin embargo, esto no sucede con las coordenadas x y y . En el plano $x - z$ se tendrían las posiciones de la coordenada x para los tiempos $1/30, 3/30, 5/30 \text{ seg}, \dots$, y en el plano $y - z$ se tendrían las posiciones de la coordenada y para los tiempos $2/30, 4/30, 6/30 \text{ seg}, \dots$.

Siendo el propósito principal la reconstrucción tridimensional de la trayectoria de la burbuja, se requiere conocer las coordenadas (x, y, z) para cada una de las posiciones de la burbuja. Una forma de obtener las coordenadas faltantes para los tiempos correspondientes, es promediar entre dos valores conocidos y extrapolar en los valores extremos. Otra forma consiste en graficar los puntos para el plano $x - z$, obteniéndose la curva que describe la trayectoria de la burbuja en ese plano. Por otro lado, en el plano $y - z$ se conocen las alturas que corresponden a los tiempos que faltan en el plano $x - z$. Sobre la curva que describe la trayectoria en un plano se puede obtener el valor aproximado de cada una de las coordenadas desconocidas.

5.4 MEDICION DE LA VELOCIDAD DE LAS BURBUJAS

La medición de la velocidad contribuye a complementar las características de forma y movimiento las burbujas. Para su determinación se implementó el sistema optoelectrónico descrito en la figura 5.9. Los resultados obtenidos experimentalmente por medio de este sistema se comparan con las velocidades terminales para burbujas de igual diámetro obtenidas por medio de correlaciones teóricas desarrolladas por diversos investigadores.

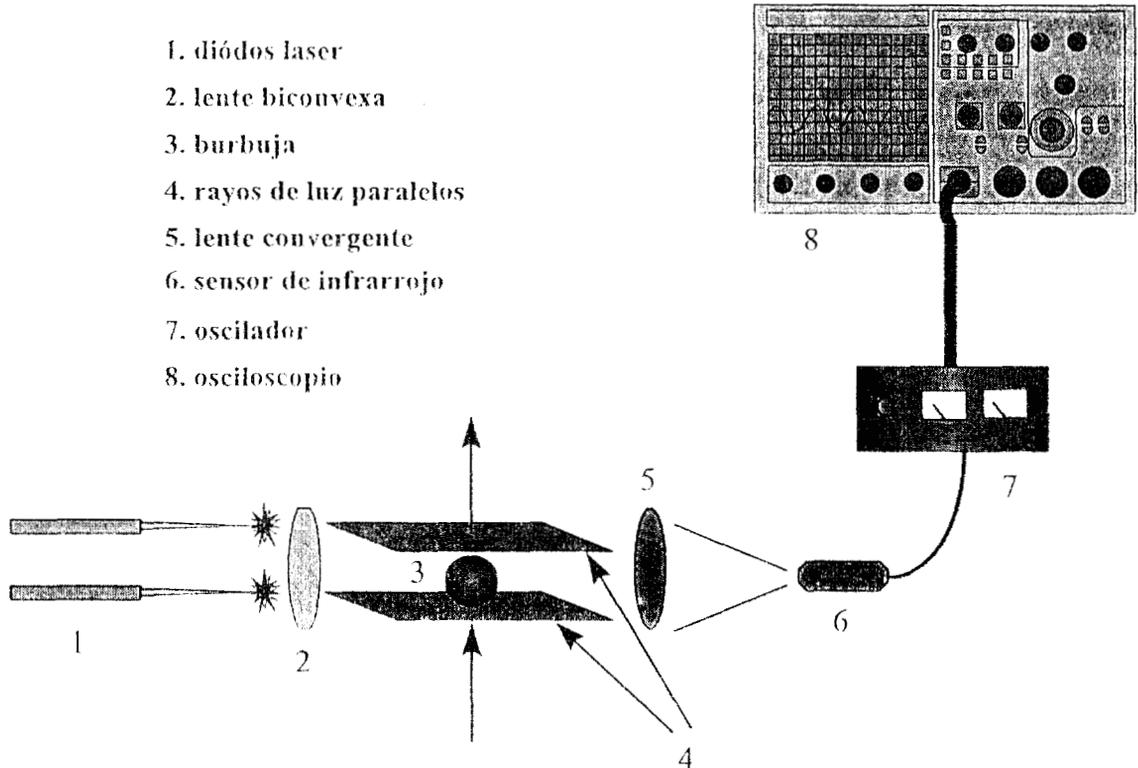


Figura 5.9: Descripción del sistema optoelectrónico utilizado para medir la velocidad terminal de la burbuja.

Es importante mencionar que a pesar de que existen varios artículos que presentan los resultados de la medición de la velocidad terminal para un amplio rango de tamaños de burbuja, poco se dice sobre el método empleado para su determinación. En este trabajo, se describe ampliamente la metodología desarrollada, que aunque fue aplicada a un solo tamaño de burbuja, los resultados obtenidos fueron relativamente buenos.

5.4.1 DISEÑO DEL SISTEMA OPTOELECTRONICO

En un extremo de la pecera se colocaron dos diodos laser de luz infrarroja, cuya longitud de onda es de 660-680 nm, y mediante un arreglo de lentes se generaron dos planos paralelos separados 1 cm de distancia, los cuales atraviesan la pecera de extremo a extremo. En el otro extremo se recibe la señal que ha sido perturbada por el paso de la burbuja, actuando como receptores dos sensores de infrarrojo. La información recibida en estos sensores se envía a un oscilador que produce señales de onda cuadrada las cuales se envían a un osciloscopio, donde se registran las perturbaciones por medio de dos señales, una para cada rayo de luz.

Las mediciones se iniciaron de la boquilla del inyector. Posteriormente, se desplazaron los rayos de luz hacia arriba un centímetro a la vez y se midieron los tiempos que dura la interacción de los planos de luz con la burbuja. Esto se hizo mediante un sistema de grabación de la señal del osciloscopio en una película de video y su análisis posterior. Sin embargo, hay mejores maneras de hacerlo con una tarjeta de adquisición de datos, la cual no estuvo disponible para estos experimentos.

Los tiempos de las caídas de voltaje en el osciloscopio se midieron tomando como tiempo inicial la caída de la primera señal cuando la burbuja atraviesa el primer plano de luz (figura 5.10 a) y como tiempo final la caída de la segunda señal justo cuando la burbuja atraviesa el segundo plano (figura 5.10-b). Entonces, se tiene el tiempo transcurrido cuando la burbuja recorrió 1 cm.

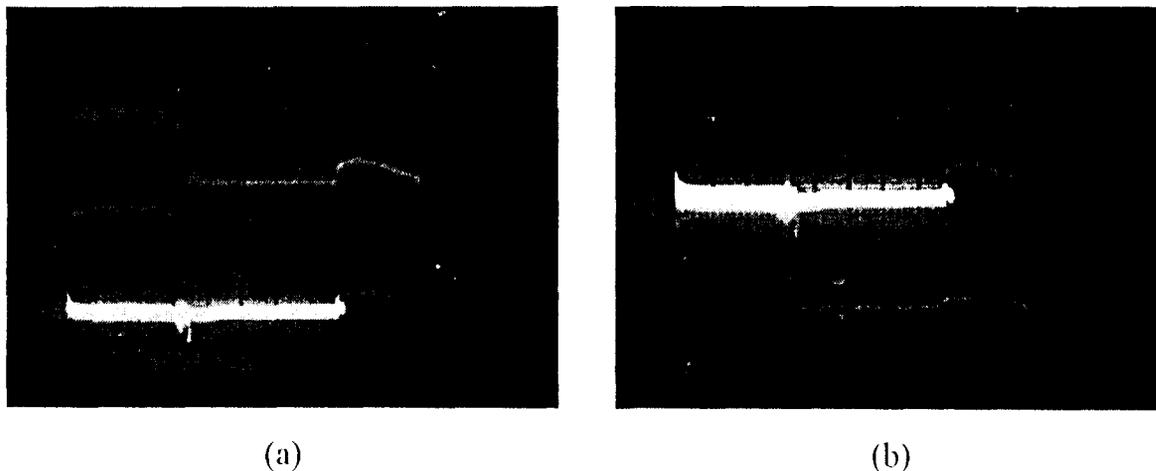


Figura 5.10: Caídas de voltaje registradas en el osciloscopio cuando la burbuja atraviesa: a) el primer plano de luz y b) el segundo plano de luz.

Utilizando una cámara de video se filmó la secuencia de caídas de voltajes dejando pasar 50 burbujas de diámetro aproximadamente constante para cada evento, a fin de tener un promedio de la rapidez de la burbuja para cada centímetro. Aplicando la relación:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5.44)$$

donde Δx siempre es igual a 1 cm, se determinó la rapidez promedio de la burbuja. El tiempo Δt se determinó contando el número de cuadros empleados para registrar las caídas de voltaje cuando la burbuja atraviesa los dos planos de luz. Se obtiene el número de cuadros empleados para cada burbuja y se obtiene el número de cuadros promedio. El conteo se realizó utilizando una videocasetera S-VHS, con la cual es posible ir pasando cuadro por cuadro manualmente y sabiendo que su rapidez de captura es de 60 cuadros por segundo, a partir de esta relación se determina el tiempo promedio para las 50 burbujas. De esta forma se calcula la velocidad promedio para cada centímetro de altura.

Debido a que sólo se cuenta con una videocasetera cuya velocidad es de 60 cuadros por segundo, podemos pensar que la desviación del valor experimental con respecto al valor teórico, puede ser atribuido a la imprecisión en el número de cuadros correspondientes para cada evento, es decir, no se puede afirmar que el número real de cuadros por evento sean números enteros, por ejemplo, exactamente 3, debido a que las variaciones en el número de cuadros (1.1-1.9 ó 2.1-2.9) cuando la burbuja atraviesa el rayo de luz, quedan incluidas en un solo cuadro. Este problema podría resolverse si se contara con una videocasetera que permitiera procesar un mayor número de cuadros por segundo.

CAPITULO 6

DESARROLLO EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE RESULTADOS

6.1 MEDICION DE LA VELOCIDAD DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL

La Tabla 6.1 resume las características de forma y movimiento de burbujas de aire que ascienden en agua, con respecto al diámetro equivalente de éstas. Aunque se cuenta con mucha información al respecto, aún no se ha generalizado ya que existen discrepancias entre las observaciones experimentales llevadas a cabo por diversos investigadores.

Esta tabla será de utilidad para poder seleccionar el tamaño de burbuja que presente las características deseadas en el presente estudio, es decir, que la trayectoria o movimiento que describa durante su ascenso a través del agua de la pecera sea helicoidal. En este punto cabe agregar, que al inicio de este estudio no se contaba con la tabla anteriormente mencionada. Entonces se pensó en diseñar diversos inyectores de aire (hechos de materiales diferentes: teflón, bronce y acrílico) que generaran el tamaño de burbuja requerido para llevar a cabo los experimentos. Afortunadamente, mediante la revisión bibliográfica se localizó la tabla que sirvió para delimitar el entorno requerido para los análisis posteriores.

Una vez conocido el rango de diámetros de burbujas para el cual se ha observado que éstas describen trayectorias helicoidales, se generaron burbujas de diferentes tamaños y se midieron

REGION	DIAMETRO EQUIVALENTE	NUMERO DE REYNOLDS $Re_b = \frac{\rho_e U_\infty d_e}{\mu_e}$	DESCRIPCION
1	$d_e < 0.08$	$Re_b < 70$	burbujas esféricas, trayectoria rectilínea
2	$0.08 < d_e < 0.124$	$70 < Re_b < 400$	burbujas esféricas, trayectoria rectilínea
3	$0.124 < d_e < 0.154$	$400 < Re_b < 500$	oblato esferoidal, movimiento rectilíneo
4	$0.154 < d_e < 0.48$	$500 < Re_b < 1100$	oblato esferoidal, movimiento helicoidal
5	$0.48 < d_e < 0.70$	$1100 < Re_b < 1600$	oblato esferoidal irregular, movimiento casi rectilíneo
6	$0.70 < d_e < 1.76$	$1600 < Re_b < 5000$	transición de oblato esferoidal a casquete esférico, movimiento casi rectilíneo
7	$d_e > 1.76$	$Re_b > 5000$	casquete esférico, movimiento rectilíneo

Tabla 6.1: Comportamiento de burbujas de aire que ascienden en agua (Tabla tomada de Lindt, 1972)

sus diámetros equivalentes, respectivamente. Posteriormente, se determinó la velocidad promedio de estas burbujas mediante el sistema optoelectrónico descrito anteriormente, iniciando las mediciones a partir de la boquilla del inyector y terminando 10 cm por arriba de éste. Cabe señalar que por cada centímetro se midieron las caídas de voltaje para 50 burbujas.

Conocidos el diámetro equivalente promedio y la velocidad promedio de cada tamaño de burbuja, se puede calcular el parámetro adimensional comúnmente empleado para determinar las características de forma y movimiento de las burbujas y el cual está indicado en la Tabla 6.1: el número de Reynolds para la burbuja (Re_b).

6.1.1 MEDICION DE DIAMETROS EQUIVALENTES PROMEDIO

El diámetro equivalente de estas burbujas se determinó de igual forma que para las burbujas mostradas en el capítulo anterior. Se generaron cuatro tamaños de burbuja ($d_e \approx 0.19, 0.51,$

0.73 y 0.86 cm) y se midieron sus diámetros horizontal y vertical (ver figura 6.1) tomando a la burbuja justo cuando sale del inyector. Se observó que los tres primeros tamaños de burbuja adquieren la forma de un elipsoide oblatos y se mantienen así en todo su ascenso a través del agua de la pecera.

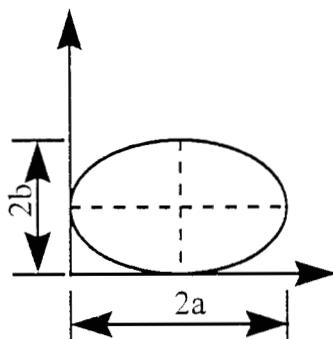


Figura 6.1: Esquema que muestra la forma de medir los diámetros o ejes de una elipse.

Si el área para la elipse de la figura 6.1 está dada por:

$$A = ab\pi \tag{6.1}$$

y conociendo los valores de los semiejes a y b , se puede calcular el área de la elipse, de tal forma que para obtener el diámetro equivalente de una burbuja esférica se considera el área de un círculo, dada por:

$$A = \frac{\pi d_e^2}{4} \tag{6.2}$$

Entonces, resolviendo para d_e se obtiene

$$d_e = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \tag{6.3}$$

A partir de las ecuaciones 6.1 y 6.3 se calcularon los diámetros equivalentes de 10 burbujas, para cada tamaño correspondiente, obteniéndose un diámetro equivalente promedio, el cual está indicado en las Tablas 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5, respectivamente y que a continuación se muestran.

La incertidumbre de los diámetros horizontales y verticales de las burbujas filmadas se determinó a partir de la medición de éstos en dos unidades de longitud diferentes: centímetros y nanómetros, para 20 burbujas de prueba. Posteriormente, los diámetros expresados en

$2a \pm 0.06$ (cm)	$2b \pm 0.06$ (cm)	$a \pm 0.03$ (cm)	$b \pm 0.03$ (cm)	$A \pm 0.02$ (cm ²)	$d_e \pm 0.06$ (cm)
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
0.19	0.15	0.09	0.08	0.02	0.17
0.26	0.15	0.13	0.07	0.03	0.20
0.19	0.15	0.09	0.08	0.02	0.17
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
0.22	0.15	0.11	0.07	0.03	0.18
0.27	0.15	0.13	0.08	0.03	0.20
0.19	0.15	0.09	0.08	0.02	0.17
0.22	0.11	0.11	0.06	0.02	0.16
0.27	0.15	0.13	0.08	0.03	0.20
diámetro equivalente promedio					0.18

Tabla 6.2: Valores de los diámetros de burbuja obtenidos experimentalmente y su respectivo diámetro equivalente

$2a \pm 0.06$ (cm)	$2b \pm 0.06$ (cm)	$a \pm 0.03$ (cm)	$b \pm 0.03$ (cm)	$A \pm 0.02$ (cm ²)	$d_e \pm 0.06$ (cm)
0.91	0.33	0.45	0.16	0.24	0.55
0.91	0.30	0.45	0.15	0.22	0.53
0.85	0.30	0.42	0.15	0.20	0.51
0.88	0.27	0.44	0.14	0.19	0.49
0.85	0.30	0.42	0.15	0.20	0.51
0.86	0.27	0.43	0.14	0.18	0.48
0.88	0.30	0.44	0.15	0.21	0.52
0.85	0.30	0.42	0.15	0.20	0.51
0.85	0.30	0.42	0.15	0.20	0.51
0.82	0.33	0.41	0.17	0.21	0.52
diámetro equivalente promedio					0.51

Tabla 6.3: Valores de los diámetros de burbuja obtenidos experimentalmente y su respectivo diámetro equivalente

$2a \pm 0.06$ (cm)	$2b \pm 0.06$ (cm)	$a \pm 0.03$ (cm)	$b \pm 0.03$ (cm)	$A \pm 0.02$ (cm ²)	$d_e \pm 0.06$ (cm)
0.74	0.71	0.37	0.35	0.41	0.72
0.82	0.78	0.41	0.39	0.50	0.80
0.90	0.75	0.45	0.37	0.52	0.81
0.75	0.76	0.37	0.38	0.44	0.75
0.80	0.76	0.40	0.38	0.48	0.78
0.72	0.74	0.36	0.37	0.42	0.73
0.61	0.65	0.30	0.32	0.30	0.62
0.61	0.64	0.30	0.32	0.30	0.62
0.80	0.72	0.40	0.36	0.45	0.76
0.83	0.68	0.41	0.34	0.44	0.75
diámetro equivalente promedio					0.73

Tabla 6.4: Valores de los diámetros de burbuja obtenidos experimentalmente y su respectivo diámetro equivalente

$a \pm 0.06$ (cm)	$b \pm 0.06$ (cm)	$A \pm 0.08$ (cm ²)	$d_e \pm 0.06$ (cm)
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
0.86	0.86	0.58	0.86
diámetro equivalente promedio			0.86

Tabla 6.5: Valores de los diámetros de burbuja obtenidos experimentalmente y su respectivo diámetro equivalente

nanómetros se convirtieron en centímetros a fin de poder realizar las diferencias entre ambos valores correspondientes a una misma burbuja y se hizo un promedio de estas diferencias, tomando el valor resultante (± 0.06) como la incertidumbre de las mediciones. La incertidumbre del área y el diámetro equivalente se calculó a partir de fórmulas desarrolladas en la literatura (Baird, 1991).

6.1.2 MEDICION DE LAS VELOCIDADES PROMEDIO DE LAS BURBUJAS

De acuerdo con Dryden *et al.* (1956), una burbuja de aire alcanza su velocidad terminal tan pronto como se suelta del inyector. La posición crítica a partir de donde alcanza su velocidad terminal es alrededor de 3 a 4 cm por arriba del inyector de aire. Sin embargo, el autor no especifica si este valor es para un tamaño de burbuja dado o se cumple en general para cualquier tamaño de burbuja.

Tomando este dato como referencia, las mediciones se realizaron a partir de la boquilla del inyector y se continuaron cierta distancia por arriba de éste. Para los dos diámetros de burbuja reportados en la Tabla 6.6, la medición de la velocidad se realizó utilizando el sistema optoelectrónico descrito anteriormente, cuyos resultados se muestran en dicha Tabla.

Distancia (cm)	Velocidad de la burbuja (cm/seg)	
	$d_e = 0.51$ (cm)	$d_e = 0.73$ (cm)
1	16.6	18.6
2	19.7	23.8
3	20.6	23.6
4	17.9	22.4
5	20.4	25.0
6	18.6	23.8
7	21.5	22.9
8	22.7	24.7
9	21.7	23.1
10	23.0	22.9

Tabla 6.6: Resultados de la velocidad de la burbuja 10 cm por arriba del inyector

Las velocidades para los diámetros equivalentes de 0.19 y 0.86 cm están reportadas en las

Diámetro equivalente de burbuja = 0.19 cm			
Burbuja 1		Burbuja 2	
Distancia (cm)	Velocidad (cm/seg)	Distancia (cm)	Velocidad (cm/seg)
0.64	19.11	0.49	14.58
1.62	29.40	1.46	29.16
2.71	32.70	2.56	33.30
3.90	34.80	3.70	34.20
5.00	34.20	4.89	35.70
5.60	33.00	5.38	29.16
		5.90	33.00

Tabla 6.7: Velocidades de dos burbujas a la salida del inyector

Tablas 6.7 y 6.8, respectivamente, las cuales se determinaron midiendo la distancia recorrida por la burbuja entre el tiempo que le llevó recorrer esa distancia. El tiempo correspondiente se obtiene a partir del conteo de números de cuadros, y conociendo que cada cuadro corresponde a $\frac{1}{60}$ de segundo, se obtiene la relación que permite calcular el tiempo requerido. La razón de porqué se determinó la velocidad de la burbujas de esta forma se debe a que estas mediciones se obtuvieron filmando a la burbuja a la salida del inyector y; posteriormente, se procesó cuadro por cuadro para obtener la distancia recorrida cada $\frac{1}{60}$ de segundo.

Diámetro equivalente de burbuja = 0.86 cm			
Burbuja 1		Burbuja 2	
Distancia (cm)	Velocidad (cm/seg)	Distancia (cm)	Velocidad (cm/seg)
0.26	3.12	0.21	6.66
0.63	10.97	0.73	10.40
1.12	14.70	1.47	14.80
2.10	19.44	2.33	17.20
2.90	26.64	3.31	29.40
3.60	17.22	4.06	22.50
4.00	14.43	4.90	25.20
4.00	14.43	5.78	26.40
4.70	20.40	6.04	15.60
		6.43	23.40

Tabla 6.8: Velocidades de dos burbujas a la salida del inyector

Las figuras 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5 muestran el comportamiento de la velocidad de la burbuja cuando sale del inyector y asciende cierta distancia. A pesar de que no se tienen más puntos, se aprecia que aproximadamente a partir del séptimo centímetro (para las burbujas de diámetro equivalente igual a 0.51 y 0.73 cm), la velocidad de la burbuja empieza a estabilizarse y la dispersión de los datos cada vez es menor. Puede decirse entonces, que la burbuja empieza a alcanzar su velocidad terminal aproximadamente a los siete centímetros a partir de la boquilla del inyector y se toman los últimos cuatro valores de velocidad para calcular una velocidad promedio, la cual no es la terminal pero será de utilidad en cálculos posteriores.

Para las burbujas de diámetro equivalente igual a 0.19 y 0.86 cm, se promediaron los últimos seis valores y de igual forma que para las burbujas anteriores, los resultados se tomaron como la velocidad terminal requerida para cálculos posteriores. Los resultados para los cuatro tamaños de burbuja generados se muestran en la Tabla 6.9.

Diámetro equivalente (cm)	Velocidad promedio (cm/seg)
0.19	27.8
0.51	21.6
0.73	23.7
0.86	23.2

Tabla 6.9: Valores promedio para la velocidad de la burbuja según su diámetro equivalente

La Tabla 6.10 muestra la comparación de las velocidades promedio experimentales con las velocidades terminales evaluadas con las correlaciones teóricas para cada diámetro de burbuja. Los valores en los que se observa una mayor desviación son los obtenidos a partir de la correlación propuesta por Davies & Taylor (1950). Esto es congruente con el rango de validez de dicha correlación la cual es aplicable únicamente a burbujas grandes cuya forma es la de un casquete esférico comprendidas en el rango de $We > 20$ y $Eo > 40$, siendo que para nuestro caso se tiene que $2.0 < We < 6.3$ y $0.5 < Eo < 10$. Sin embargo, se incluye aquí únicamente con fines comparativos.

Además, se observa que los valores obtenidos a partir de la correlación de Clift *et al.* van disminuyendo conforme se incrementa el diámetro de burbuja. Esto coincide con lo que anteriormente se mencionó en el capítulo dos, donde se indica que esta correlación se ajusta

Correlación	U_{∞} (cm/seg)			
	$d_e = 0.19$ cm	$d_e = 0.51$ cm	$d_e = 0.73$ cm	$d_e = 0.86$ cm
Mendelson	29.30	23.13	23.60	24.32
Davies & Taylor	9.70	15.90	19.03	20.68
Grace <i>et al.</i>	26.80	23.06	23.60	24.30
Jamialahmadi <i>et al.</i>	28.98	23.14	23.61	24.32
Clift <i>et al.</i>	26.30	24.30	23.45	23.05
Blandín <i>et al.</i>	27.80	21.60	23.70	23.20

Tabla 6.10: Comparación de los valores experimentales de velocidades de burbujas con los valores teóricos determinados a partir de las correlaciones respectivas

razonablemente bien para burbujas cuyo diámetro equivalente sea menor de 0.3 cm. Por arriba de este valor, la correlación predice un decremento en la velocidad terminal conforme se incrementa el diámetro de burbuja, lo cual contradice las observaciones experimentales. Esto puede verse claramente en la figura 2.8, donde se ha obtenido la curva teórica para el sistema agua-aire.

Se observa también que existen ligeras variaciones entre los valores obtenidos de velocidad terminal para cada una de las correlaciones restantes. Sin embargo, los valores experimentales están comprendidos en este rango de variación.

Las velocidades promedio experimentales se grafican tomando como referencia la curva para el sistema agua-aire, construida a partir de la correlación desarrollada por Jamialahmadi *et al.* (1994). La razón de utilizar esta correlación se debe a que es la más actual de las consideradas en este trabajo.

Se observa que la desviación de los datos experimentales con respecto a la curva teórica es muy pequeña, aun cuando no se están considerando los primeros como velocidades terminales, ya que uno esperaría que para poder hacer esta consideración los valores medidos sean constantes (de acuerdo con la definición de velocidad terminal). Sin embargo, la aproximación es muy buena y esto apoya la idea de utilizarlos en los cálculos posteriores.

En la Tabla 6.11 se muestra el porcentaje de error de los valores experimentales comparados con los valores obtenidos utilizando la correlación desarrollada por Jamialahmadi *et al.* (1994) para el sistema agua-aire. En forma cuantitativa se puede decir que las desviaciones son menores del 7%, lo cual reafirma la idea de poder utilizar los valores obtenidos experimentalmente en

los cálculos.

d_e (cm)	Velocidad (cm/seg)		
	Jamialahmadi <i>et. al.</i>	Blandin <i>et. al.</i>	Error porcentual (%)
0.19	28.98	27.80	4.1
0.51	23.14	21.60	6.6
0.73	23.61	23.70	0.4
0.86	24.32	23.20	4.6

Tabla 6.11: Comparación de las velocidades experimentales con las obtenidas a partir de la correlación de Jamialahmadi *et. al.* y su respectivo porcentaje de error

Cabe mencionar que los rangos de validez de las correlaciones mencionadas se han determinado a partir de datos experimentales, con la finalidad de determinar su rango de aplicabilidad. Entonces, se puede pensar en forma inversa e indicar que el porcentaje de error corresponde a las correlaciones y no al dato experimental. Pero, en vista de que sólo se tiene un valor para cada diámetro de burbuja dado, no se podría afirmar lo anterior.

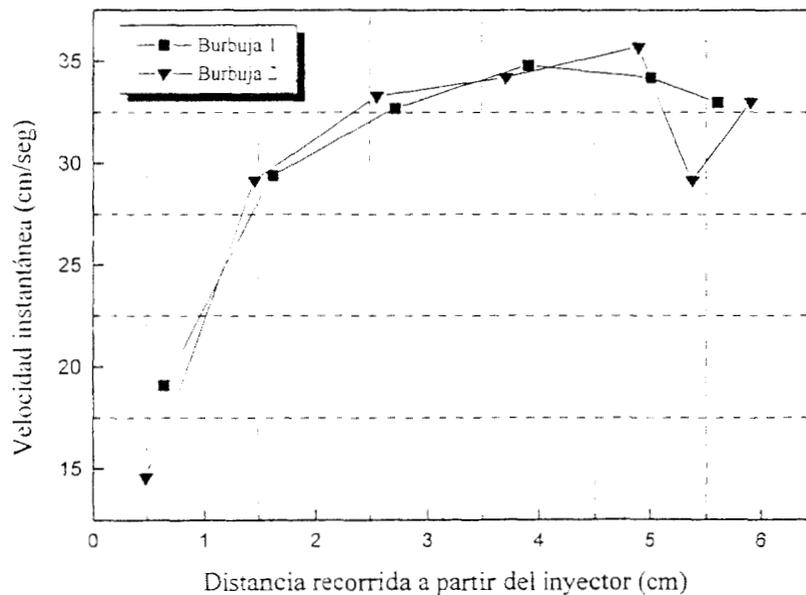


Figura 6.2: Distancia recorrida vs. velocidad para la burbuja de diámetro equivalente igual a 0.19 cm.

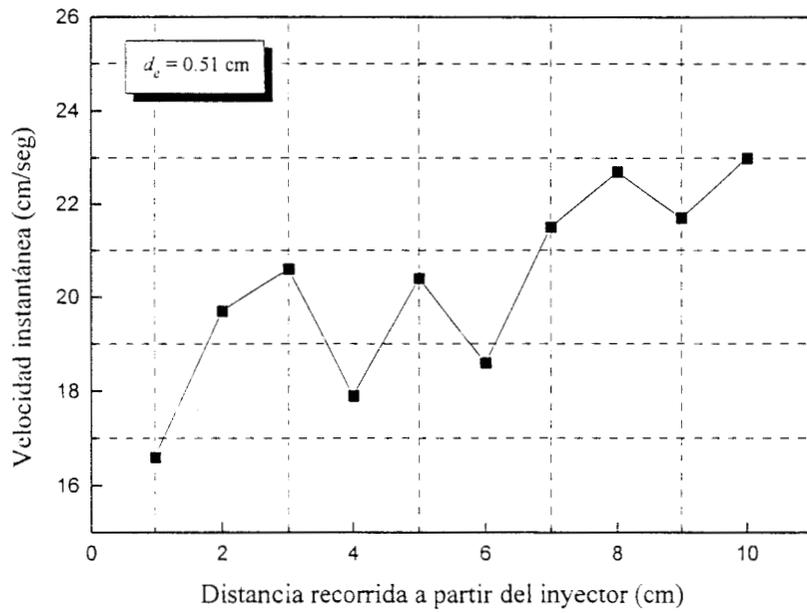


Figura 6.3: Distancia recorrida vs. velocidad para la burbuja de diámetro equivalente igual a 0.51 cm.

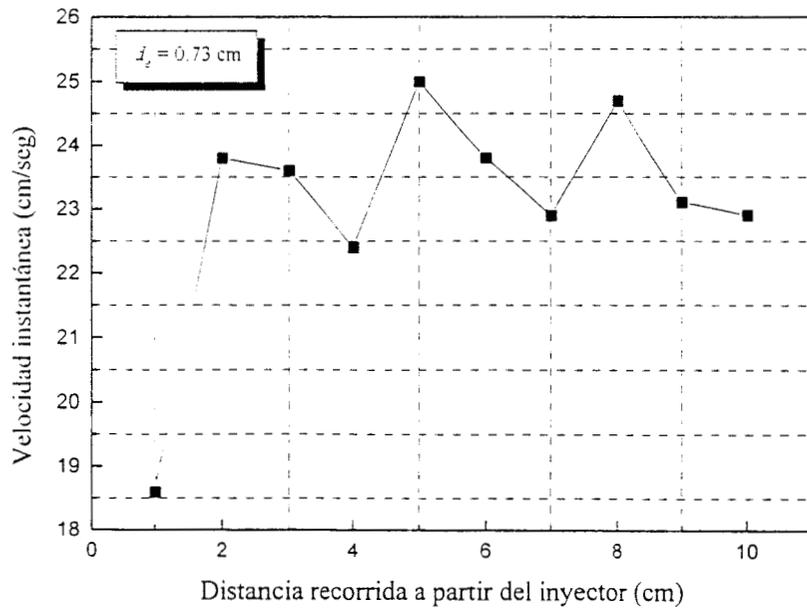


Figura 6.4: Distancia recorrida vs. velocidad para la burbuja de diámetro equivalente igual a 0.73 cm.

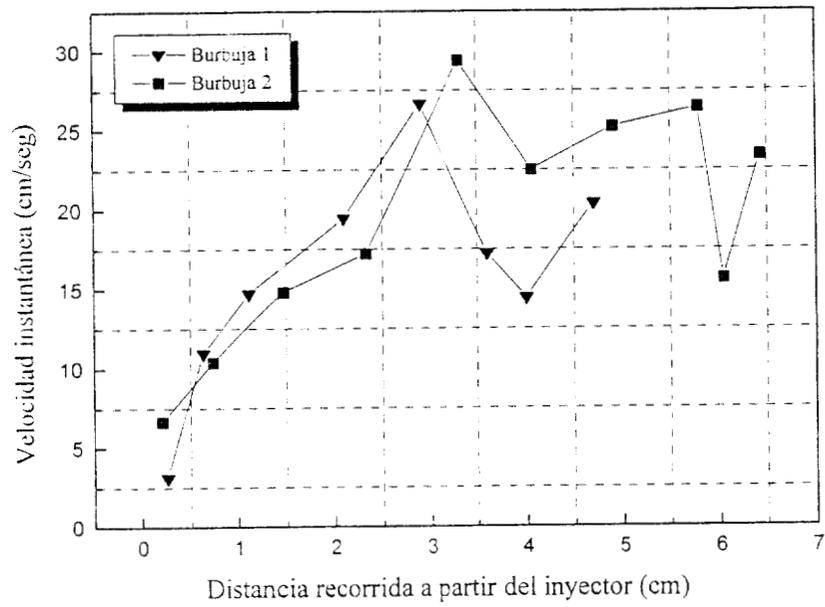


Figura 6.5: Distancia recorrida vs. velocidad para la burbuja de diámetro equivalente igual a 0.86 cm.

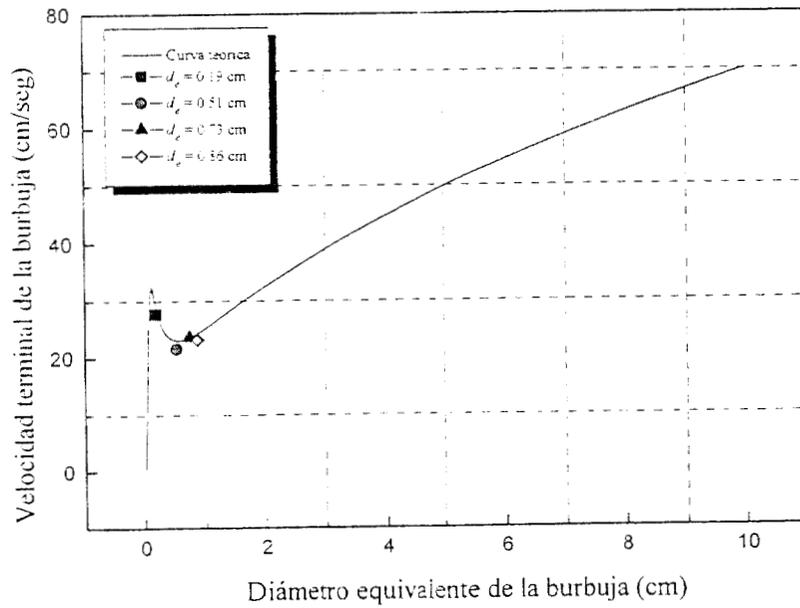


Figura 6.6: Comparación de las velocidades promedio experimentales con la curva teórica.

El método empleado para medir velocidades de burbuja ha permitido obtener resultados favorables de acuerdo con lo expuesto anteriormente. Sin embargo, a fin de otorgarle mayor credibilidad al método, sería conveniente generar burbujas cubriendo un amplio rango de tamaños incluyendo desde burbujas pequeñas hasta burbujas grandes de casquete esférico, esto con la finalidad de medir su velocidad y tener una cantidad considerable de puntos que permita determinar qué tanto se acercan o se alejan de las correlaciones teóricas. Empero, el objetivo de este trabajo no es el de generar burbujas de distintos diámetros y estudiar su movimiento, lo cual nos limita a decir que podría quedar como un futuro trabajo de investigación.

En conclusión, podemos decir que la velocidad experimental de las burbujas observadas están comprendidas en el rango de velocidades observadas en columnas de burbujeo para el régimen de flujo burbuja, para el cual la velocidad superficial del gas es menor de 0.05 m/seg y la velocidad de ascenso de las burbujas está en el intervalo de 0.18 a 0.30 m/seg (Shah *et al.*, 1982).

6.1.3 CALCULO DE PARAMETROS ADIMENSIONALES

Antes de realizar los cálculos correspondientes, es necesario introducir los valores de las propiedades físicas de ambas fases tomadas de la literatura a la temperatura de 20 °C, los cuales están indicados en la Tabla 6.12. Estas serán de utilidad en la evaluación de los parámetros adimensionales relacionados con el sistema y que permiten determinar algunas de las características de la forma y movimiento de las burbujas, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo dos.

Propiedades físicas			
Fase	ρ (gr/cm ³)	μ (gr/cmseg)	σ (dinas/cm)
agua	0.998	0.01	72.8
aire	1.204×10^{-3}	1.81×10^{-4}	72.8

Tabla 6.12: Propiedades físicas del agua y del aire a la temperatura de 20 C

La Tabla 6.13 resume las magnitudes de los parámetros Re_b , Mo , Eo y We evaluados a partir de las ecuaciones 1.1, 2.1, 2.4 y 2.5, respectivamente, donde los valores correspondientes para la velocidad y diámetro equivalente son los que se obtuvieron a partir de las mediciones experimentales, y los valores de las propiedades físicas son tomados de la Tabla 6.12 para ambas fases. El valor de la aceleración de la gravedad es de 981 cm/seg.

Diámetro equivalente	Parámetros adimensionales			
	d_e (cm)	Re_b	Mo	Eo
0.19	527	2.55×10^{-11}	0.5	2.0
0.51	1099	2.55×10^{-11}	3.5	3.3
0.73	1727	2.55×10^{-11}	7.2	5.6
0.86	1991	2.55×10^{-11}	9.9	6.3

Tabla 6.13: Valores numéricos de los parámetros adimensionales para el sistema agua-aire

Para el primer diámetro de burbuja, $d_e = 0.19$ cm, el número de Reynolds correspondiente está localizado en la región 4 de la Tabla 6.1, donde se predice que la burbuja adopta la forma de un oblato esferoidal que asciende describiendo trayectorias helicoidales. El número de Morton es constante para los cuatro diámetros de burbuja, ya que este parámetro sólo depende de las propiedades físicas del fluido. Se tiene entonces que para bajos números de Morton (líquidos poco viscosos tal como el agua), las burbujas empiezan a ser inestables conforme se incrementa

el número de Weber, es decir, al incrementarse los efectos inerciales y disminuir su importancia los efectos de tensión superficial.

En la figura 6.7 se muestran cuatro imágenes de una burbuja, de diámetro equivalente igual a 0.19 cm. saliendo del inyector donde se observa que adquiere la forma de un oblato elipsoidal.

En la figura 6.8, se muestra la reconstrucción del movimiento en dos dimensiones de dicha burbuja, a una altura de aproximadamente 17 cm por arriba del inyector. Se observa el movimiento oscilatorio que visto en tres dimensiones constituye el movimiento helicoidal.

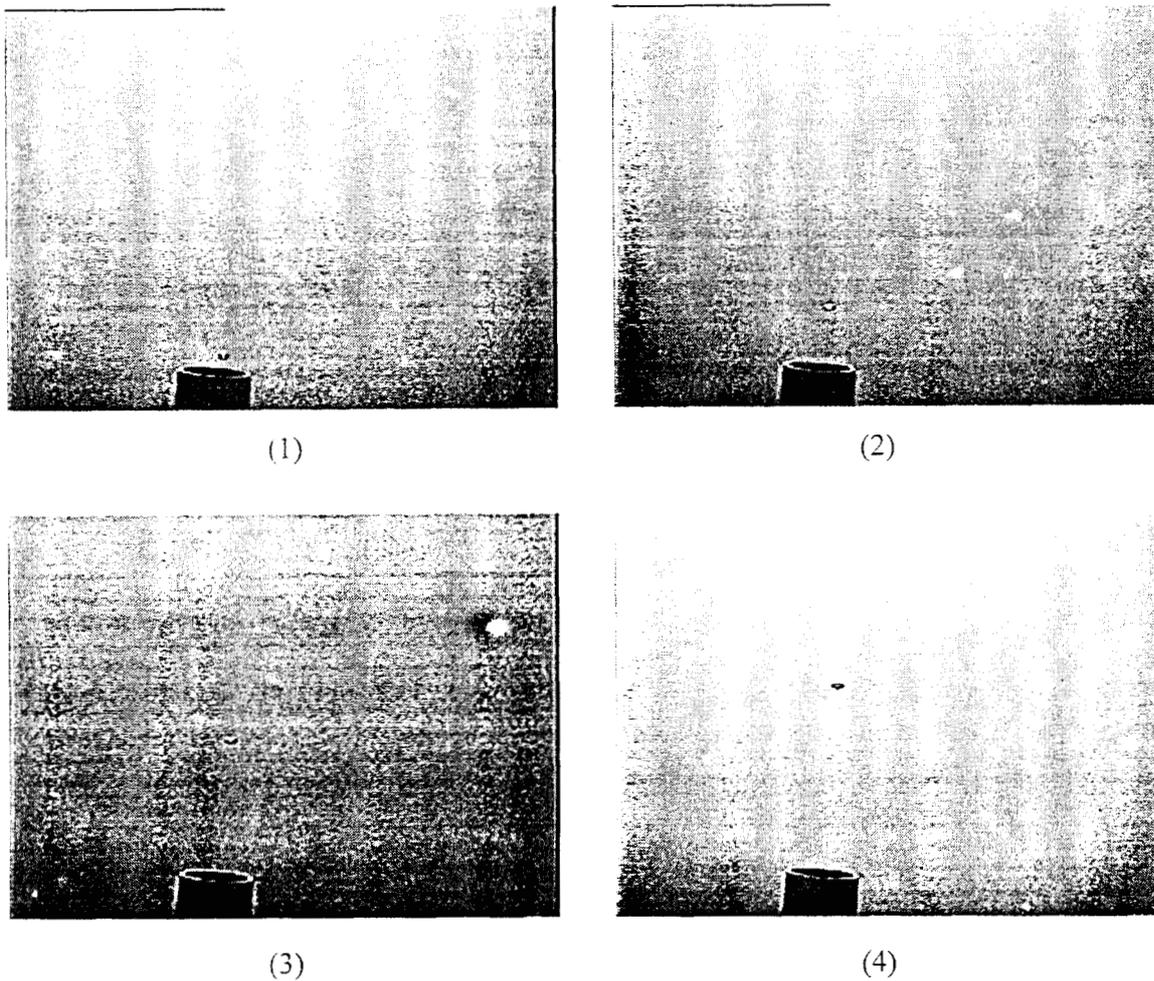


Figura 6.7: Secuencia de movimiento de una burbuja con $d_e = 0.19$ cm saliendo del inyector.

Para el diámetro de burbuja igual a 0.51 cm. se observa que este valor está localizado en la región 5, donde la forma de la burbuja es un oblato esferoidal irregular y su movimiento es casi rectilíneo: el valor del Reynolds calculado para dicho diámetro está localizado, estrictamente

hablando, en la región 4. Al respecto se pueden plantear dos justificaciones: la primera toma en cuenta que el valor experimental de la velocidad correspondiente esté ligeramente por debajo de un valor real, debido a errores de medición, lo cual conlleva a una disminución en el valor del número de Reynolds. La segunda considera que la clasificación de la Tabla 6.1 está elaborada en base a observaciones experimentales, las cuales no siempre coinciden con lo observado por otros investigadores. Además, el valor del Reynolds sólo difiere en una unidad. Por lo tanto, esta burbuja estaría localizada en la región 5, donde las características de forma y movimiento no son acordes con las deseadas.

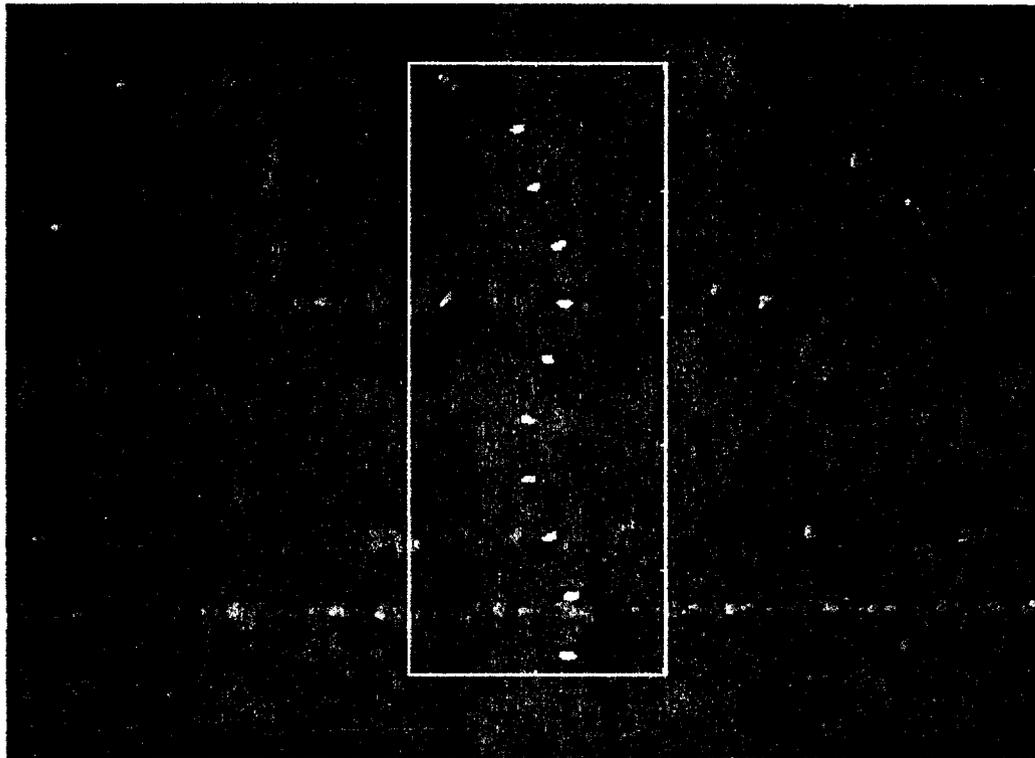
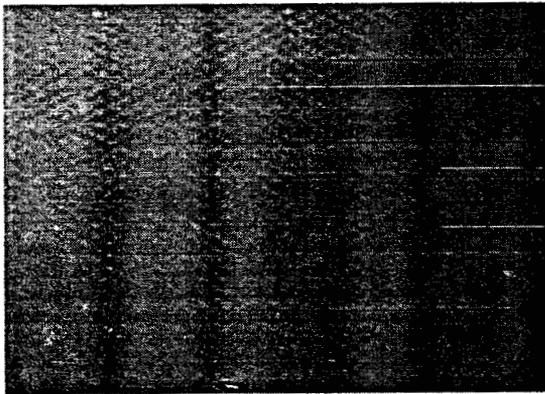
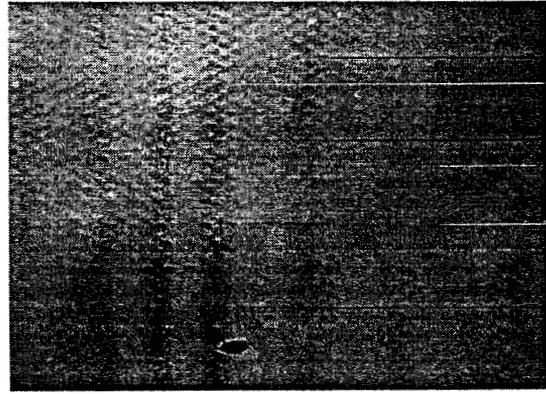


Figura 6.5: Reconstrucción del movimiento de la burbuja con $d_e = 0.19$ cm.

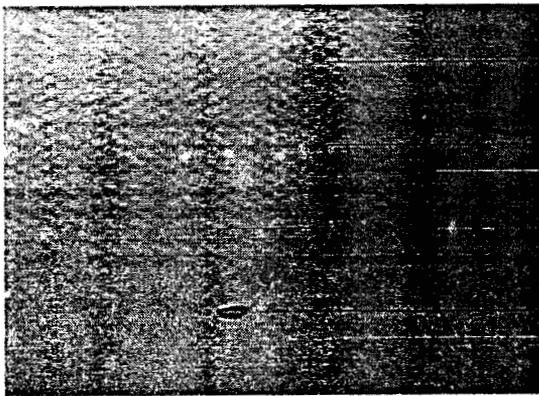
Si el número de Reynolds es igual a 1727 este valor estaría localizado en la región 6 de la Tabla 6.1, para el diámetro de burbuja igual a 0.73 cm. En esta región las características de forma de estas burbujas se describen como una transición de oblato esferoidal a casquete esférico y su movimiento es casi rectilíneo. La descripción anterior corresponde a las observaciones visuales mostradas en la secuencia de imágenes de la figura 6.9, para la burbuja de aire que asciende a través del agua, durante una parte de su ascenso.



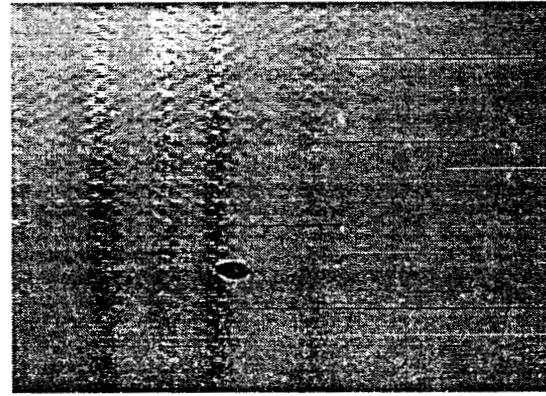
(a)



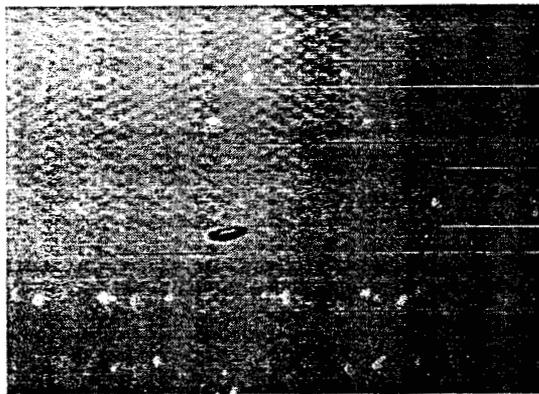
(b)



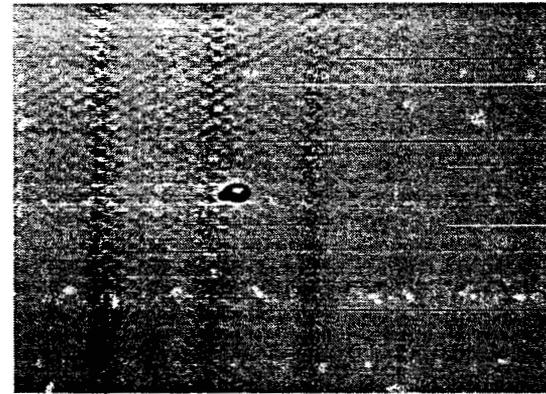
(c)



(d)



(e)

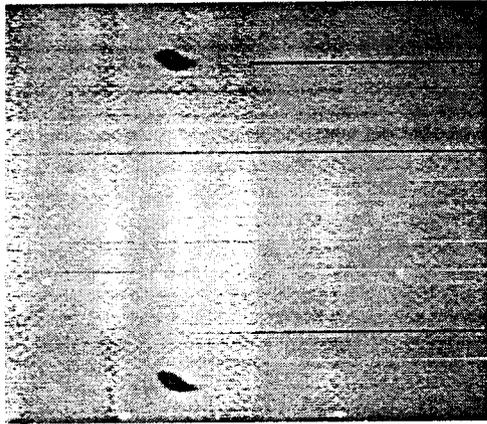


(f)

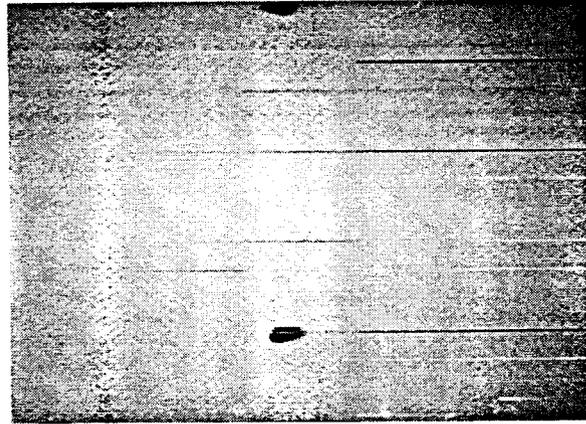
Figura 6.9: Secuencia del movimiento de una burbuja de aire con $d_e = 0.73$ cm y las diferentes formas que adopta conforme asciende.

Para las burbujas de diámetro equivalente igual a 0.86 cm, el número de Reynolds correspondiente está localizado en la región 6, donde, al igual que la burbuja de 0.73 cm de diámetro, la forma se describe como una transición de oblato esferoidal a casquete esférico y su movimiento casi rectilíneo. La figura 6.10 muestra una secuencia del ascenso de esta clase de burbujas, donde se observa que se deforma aleatoriamente y no se podría definir

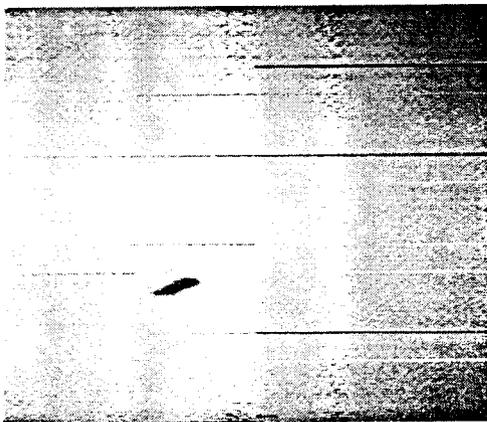
Las figuras 6.11 y 6.12 muestran el movimiento en dos dimensiones de esta clase de burbujas, donde se observa que su movimiento es casi rectilíneo con un ligero zigzag.



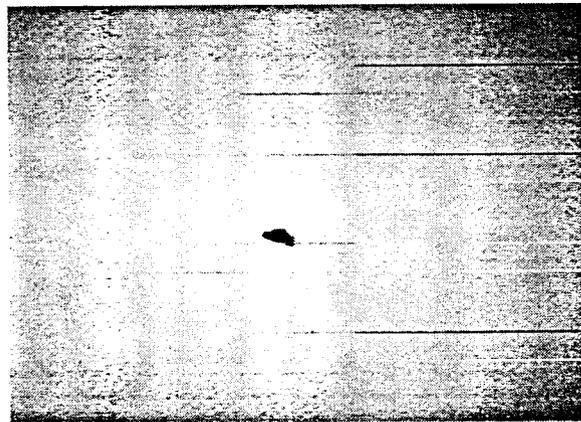
(1)



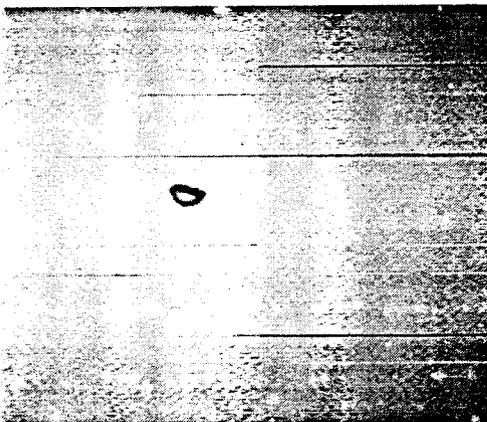
(2)



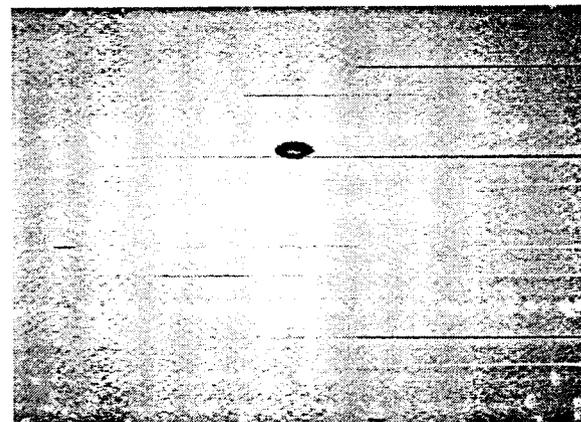
(3)



(4)



(5)



(6)

Figura 3.10: Secuencia del movimiento de una burbuja con $d_e = 0.36$ cm



Figura 6.11: Reconstrucción del movimiento en dos dimensiones de una burbuja con $d_e = 0.86$ cm.



Figura 6.12: Reconstrucción del movimiento en dos dimensiones de una burbuja con $d_e = 0.86$ cm.

6.2 DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LA AMPLITUD Y FRECUENCIA DE LA OSCILACION DE UNA BURBUJA INDIVIDUAL

En la gran mayoría de los estudios llevados a cabo por diversos investigadores, sólo se describe cualitativamente el tipo de movimiento que realizan las burbujas y se miden sus diámetros equivalentes para poder hacer una clasificación del tipo de movimiento observado en función del rango de diámetros medidos. Sin embargo, poco se ha dicho sobre algunos de los parámetros involucrados en cada tipo de movimiento, tales como la amplitud y frecuencia de oscilación tratándose de burbujas que describen una trayectoria ya sea en zig-zag o helicoidal.

La amplitud y frecuencia de oscilación de una burbuja individual, son dos parámetros cuya determinación permitiría describir cuantitativamente el movimiento de las burbujas cuyo centro de masa describe una trayectoria helicoidal. La proyección en un plano de este tipo de movimiento visto en tres dimensiones, es la oscilación que se observa cuando el ascenso de la burbuja de aire se reproduce únicamente en dos dimensiones. A fin de llevar a cabo este tipo de mediciones, el movimiento de la burbuja es filmado por medio de una videocámara colocada en cualquiera de las cuatro caras de la pecera. En nuestro caso, las observaciones se realizaron filmando la parte frontal.

De acuerdo con los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se seleccionó la burbuja de diámetro equivalente igual a 0.19 cm, ya que en base a la Tabla 6.1 y a las observaciones experimentales, se determinó que la trayectoria que describen es helicoidal. Posteriormente, se generaron 19 burbujas de aire y se filmó parte de su trayectoria (aproximadamente 10 cm), iniciando a una altura de 17 cm por arriba del inyector para asegurar que la burbuja alcance su velocidad terminal y su movimiento ocurra en estado estacionario, ya que como se mencionó en el capítulo dos, las fuerzas ejercidas sobre la burbuja se encuentran en equilibrio cuando se alcanza dicho estado. Las imágenes obtenidas para cada una de ellas se procesaron a fin de determinar su centro de masa cuadro por cuadro y se hizo la reconstrucción de la trayectoria bidimensional con los pares de coordenadas correspondientes al centro de masa para cada una de las posiciones de la burbuja.

Los datos obtenidos están graficados en cada una de las figuras que a continuación se

presentan (figuras 6.13-6.17), donde cada uno de los experimentos han sido llamados zza , zzb , zzc , etc., a fin de facilitar su identificación.

Cuando se estaban realizando los experimentos, se observó a simple vista que estas burbujas no inician su ascenso describiendo trayectorias helicoidales cuando son generadas en el inyector, sino aproximadamente a 10 ó 15 cm por arriba de éste. Tal vez esto se deba a que las fuerzas que interactúan sobre la burbuja no se han equilibrado por completo y el efecto de la estela en el movimiento de la burbuja todavía es aleatorio. Más sin embargo, como ya mencioné anteriormente, esto sólo se observó cualitativamente a simple vista, lo cual no nos permite probar afirmaciones o hipótesis.

En cada una de las figuras se observa que la burbuja describe una oscilación, la cual corresponde a la proyección en un plano de su movimiento helicoidal visto en tres dimensiones. El periodo de tiempo entre burbuja y burbuja generada es aproximadamente de 10 a 15 minutos, lo cual permitió que las perturbaciones ocasionadas por el paso de una burbuja, no afectaran a la siguiente, ya que como se explicó en el capítulo dos, las burbujas tienden a seguir la misma trayectoria cuando son generadas en forma continua, es decir, la estela de una burbuja arrastra a la otra, siguiendo ambas la misma trayectoria.

Cada trayectoria está formada por los puntos correspondientes al centro de masa de la burbuja, los cuales a su vez suman entre 10 y 11 puntos por burbuja. La imposibilidad de obtener una mayor cantidad de puntos para realizar la reconstrucción, se debe principalmente a dos factores. El primero es debido a que el tamaño de la burbuja, el cual es muy pequeño, no permite que el campo visual de la videocámara abarque una distancia mayor de 10 cm sin perder de vista a la burbuja. Es decir, si se quiere filmar un recorrido mayor de la burbuja, se requiere filmar un campo visual mayor, lo cual reduce el tamaño de burbuja observado en la pantalla, haciéndola un cuerpo puntual. Esto resulta ser un gran inconveniente, ya que el centro de masa de la burbuja se obtiene a partir de los puntos que forman su contorno. Después de realizar una serie de acercamientos y alejamientos con el zoom de la videocámara, se determinó el campo visual que mejor satisficiera nuestras necesidades de observación.

El segundo factor se debe a las características técnicas de la videocámara utilizada en las filmaciones, siendo su velocidad de captura de 60 cuadros por segundo. Esto reduce el número de posiciones de la burbuja por ciclo, limitando el alcance de nuestras observaciones. Actualmente

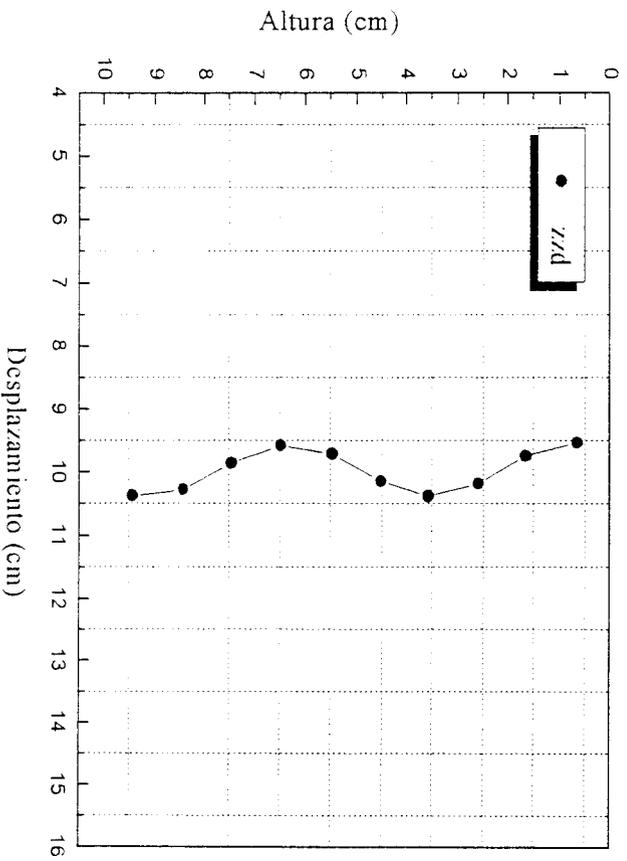
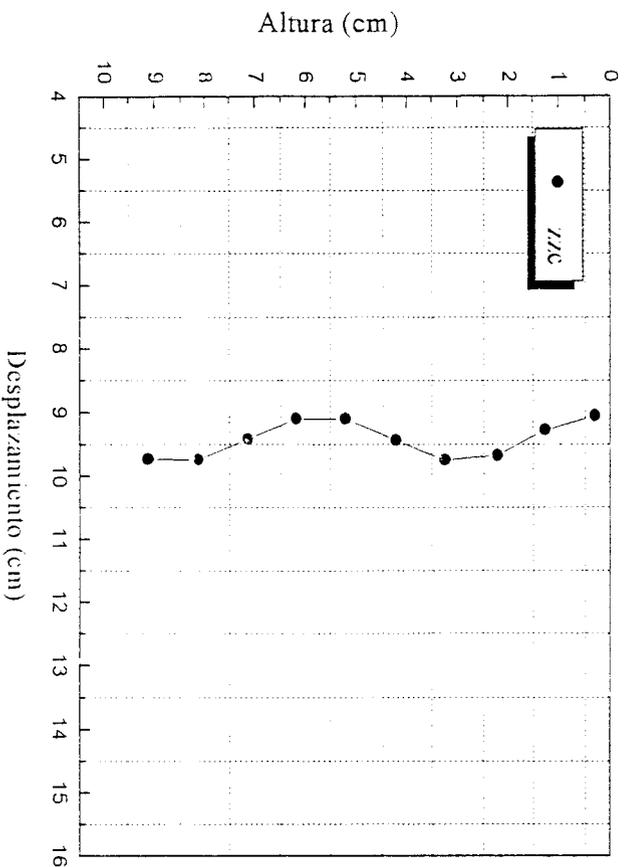
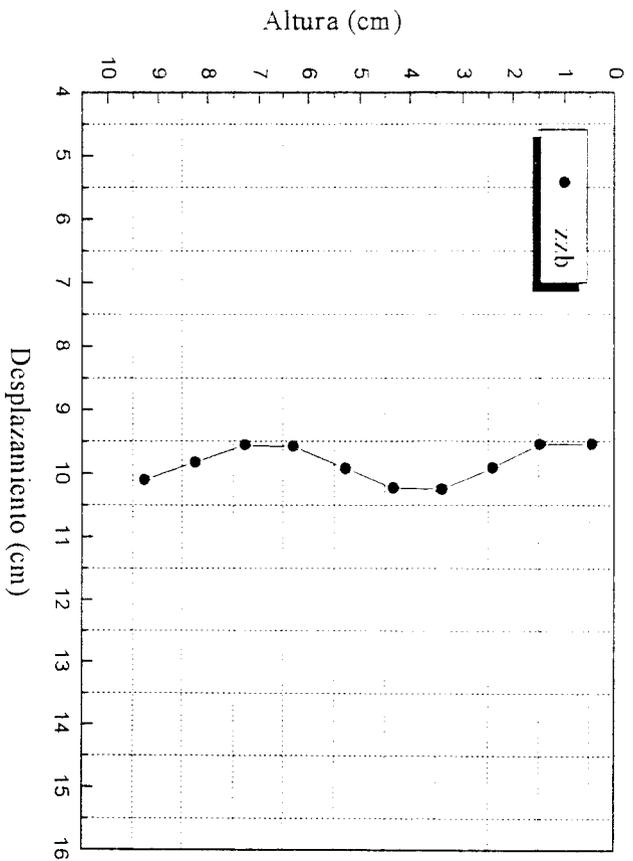
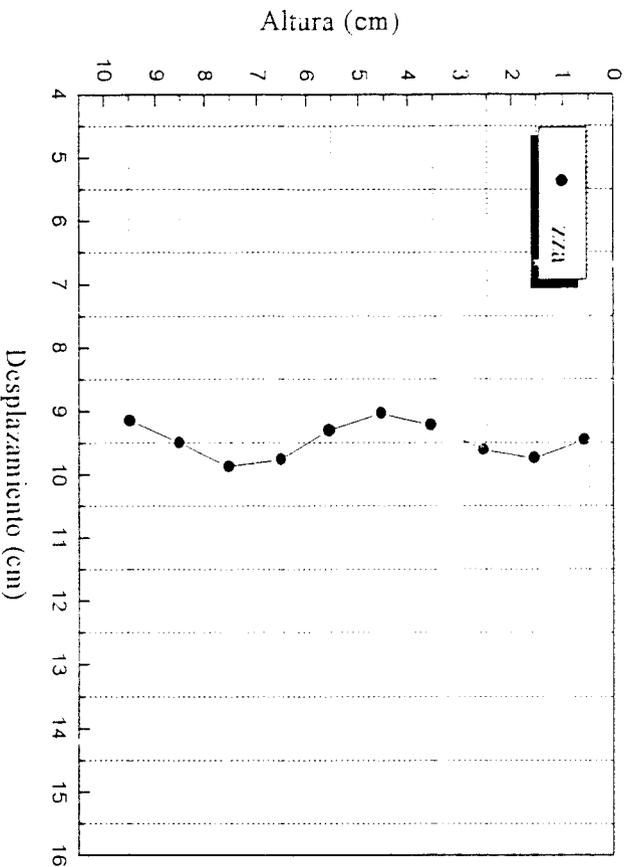


Figura 6.13: Reconstrucción de la trayectoria bidimensional

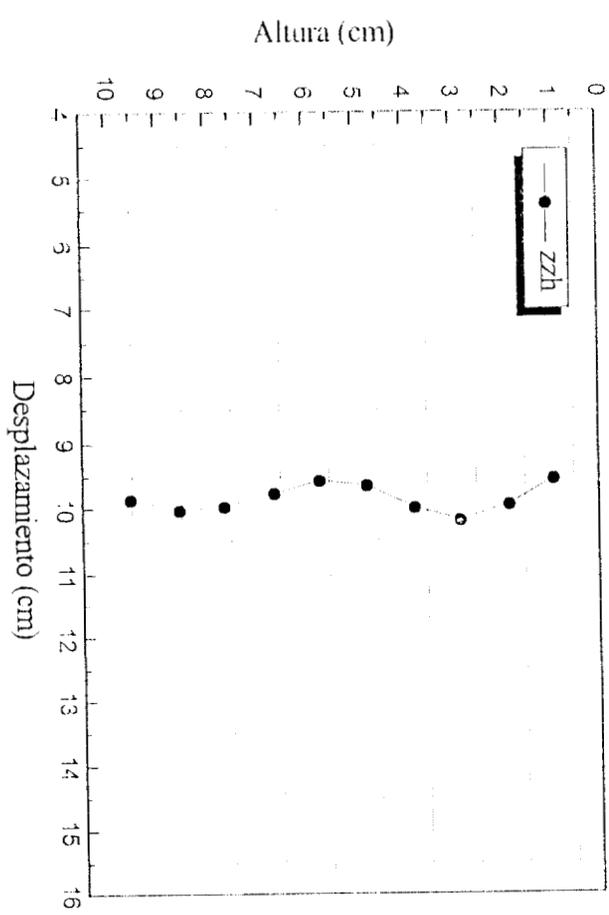
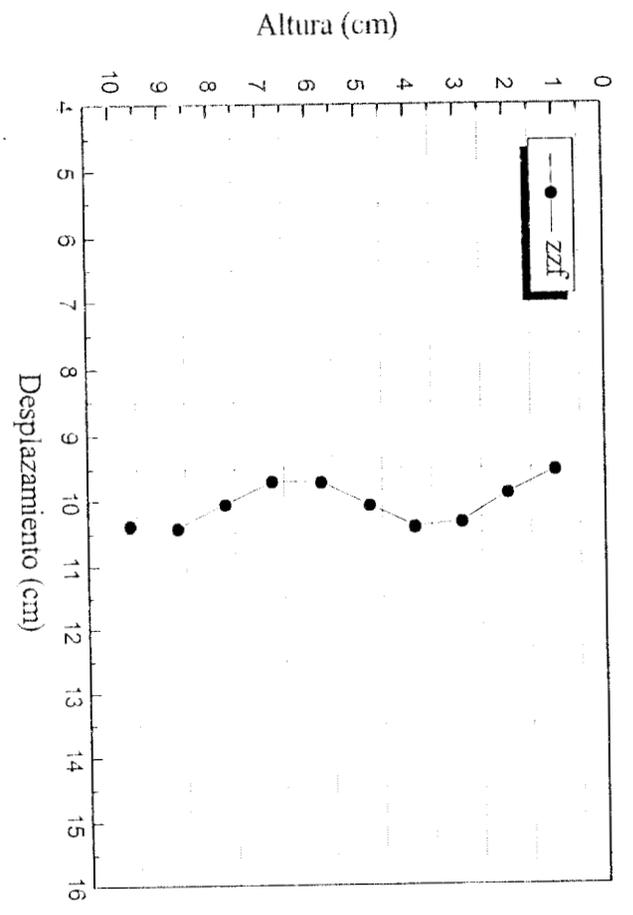
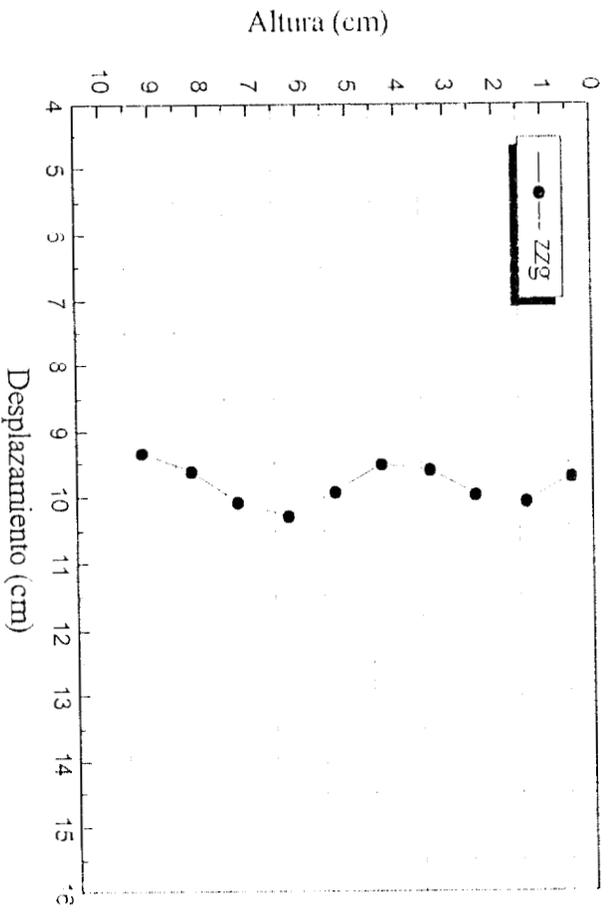
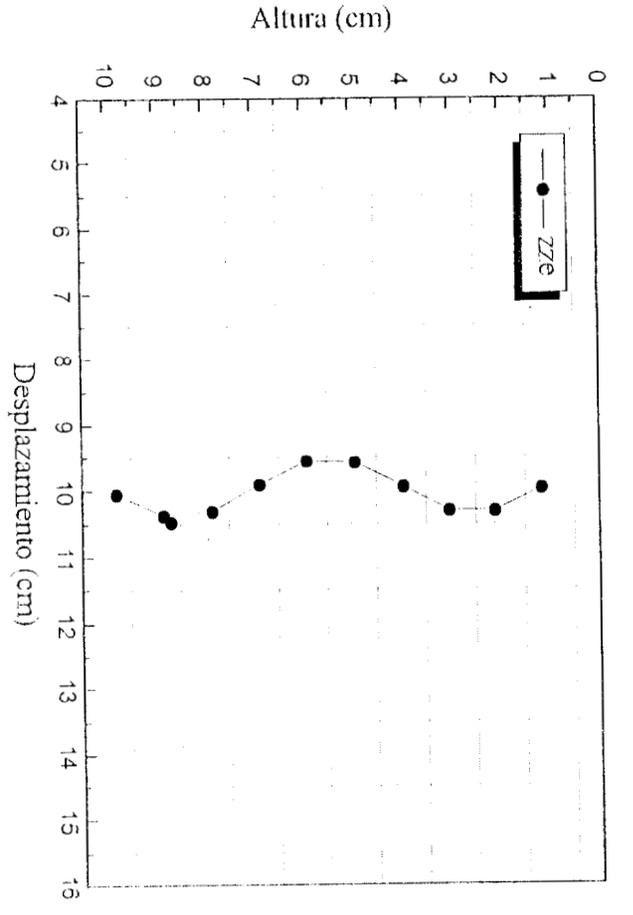


Figura 6.14: Reconstrucción de la trayectoria bidimensional

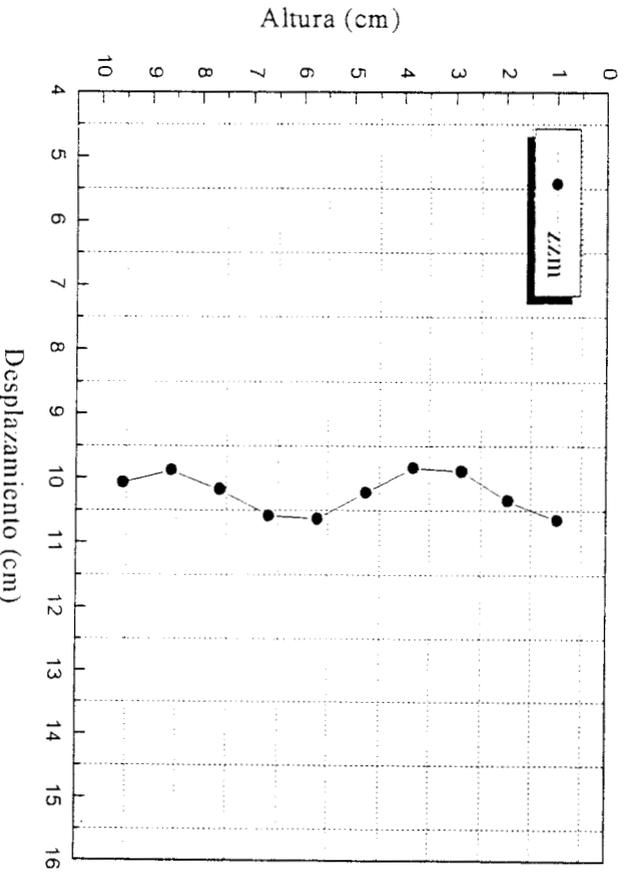
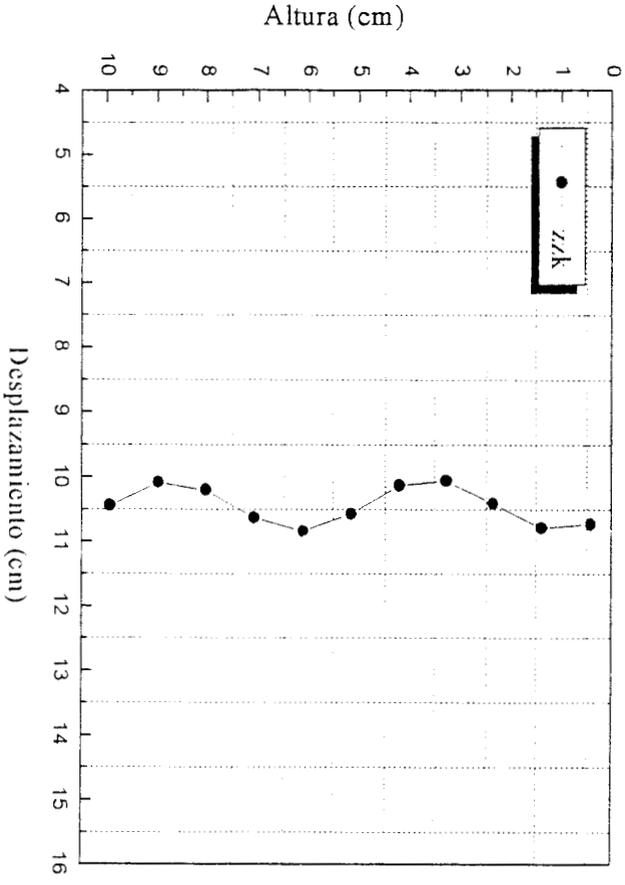
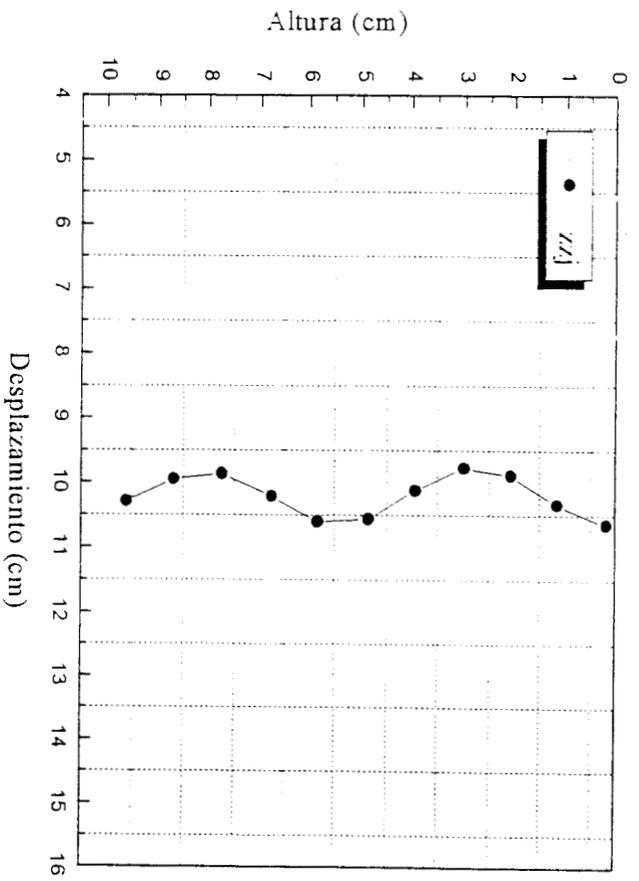
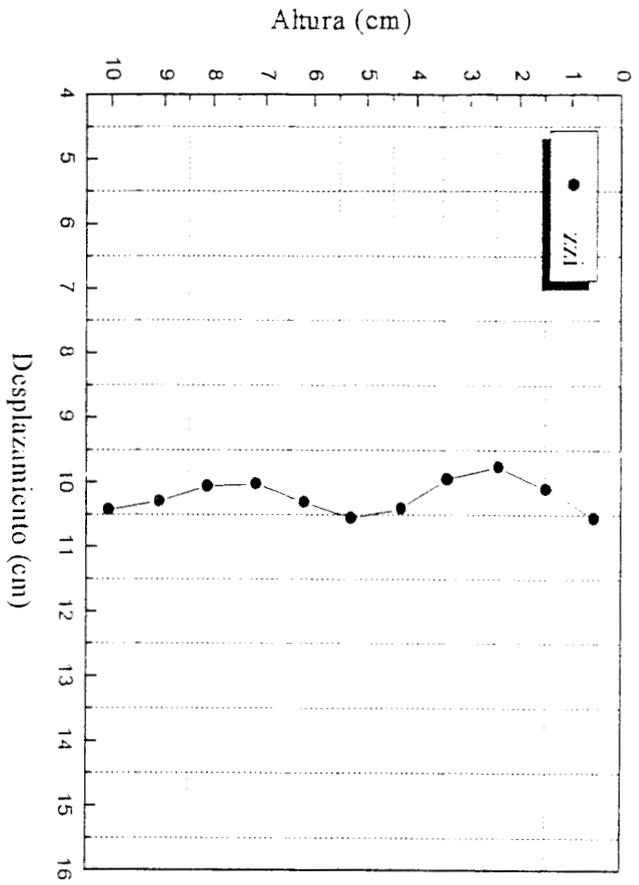


Figura 6.15: Reconstrucción de la trayectoria bidimensional

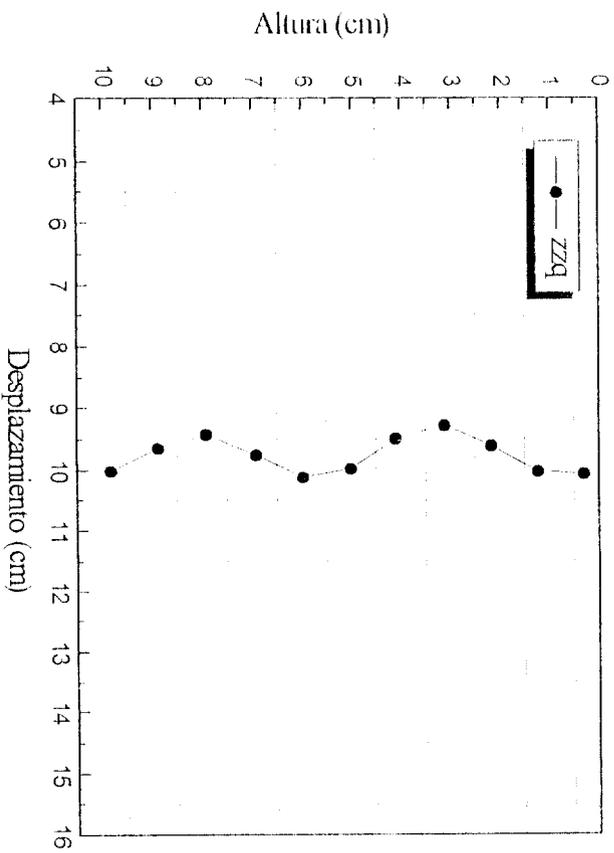
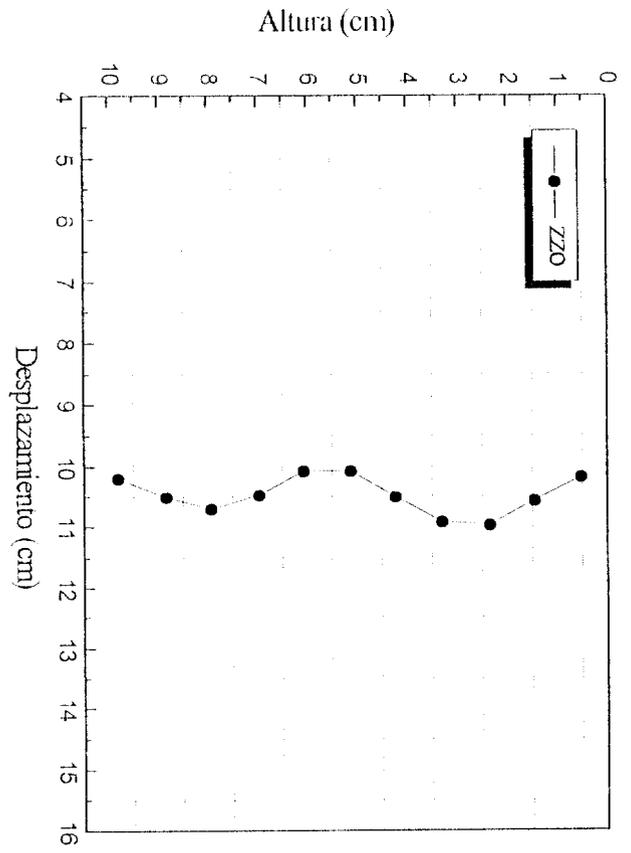
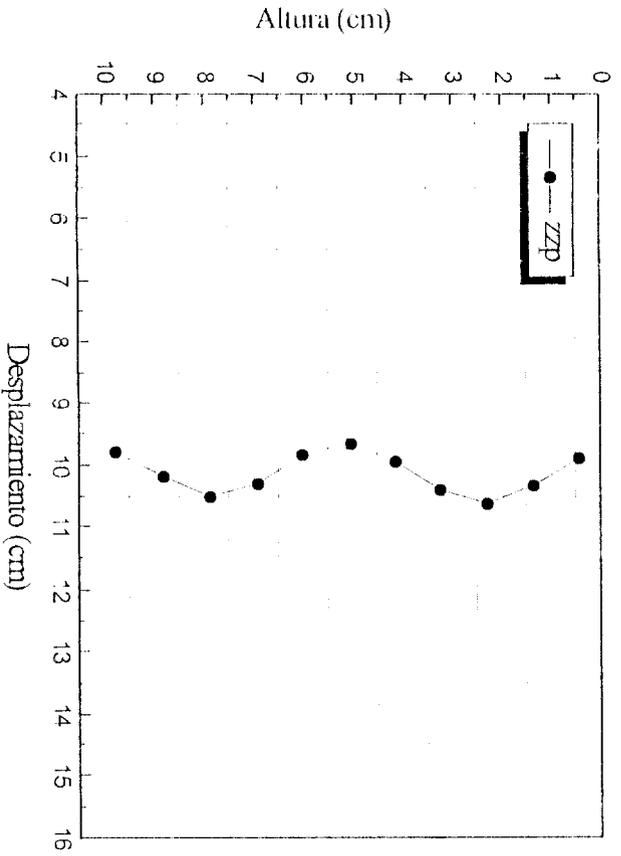
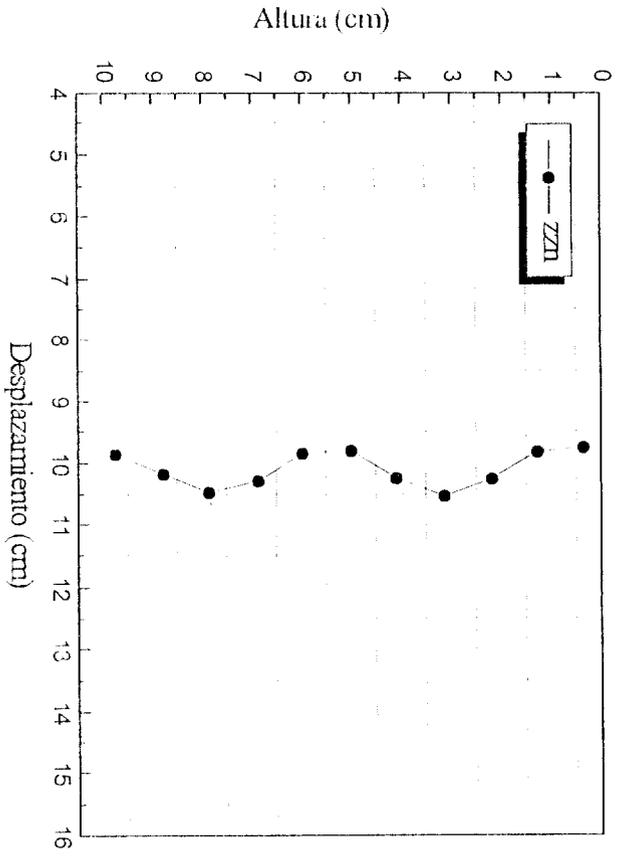


Figura 6.16: Reconstrucción de la trayectoria bidimensional

existen en el mercado equipos que pueden filmar hasta 6000 cuadros por segundo. Sin embargo, su precio es muy elevado y lejos de nuestras posibilidades económicas.

El diámetro equivalente de estas burbujas se determinó de igual forma que en la sección 6.1.1. Se midieron sus diámetros horizontal y vertical tomando a la burbuja justo cuando sale del inyector (ver figura 6.1).

Los resultados obtenidos experimentalmente y los obtenidos aplicando la ecuación 6.3 se muestran en la Tabla 6.14.

$2a \mp 0.06$ (cm)	$2b \mp 0.06$ (cm)	$a \mp 0.03$ (cm)	$b \mp 0.03$ (cm)	$A \mp 0.02$ (cm ²)	$d_e \mp 0.06$ (cm)
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
0.19	0.15	0.09	0.08	0.02	0.17
0.26	0.15	0.13	0.07	0.03	0.20
0.19	0.15	0.09	0.08	0.02	0.17
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
0.22	0.15	0.11	0.07	0.03	0.18
0.27	0.15	0.13	0.08	0.03	0.20
0.19	0.15	0.09	0.08	0.02	0.17
0.22	0.11	0.11	0.06	0.02	0.16
0.27	0.15	0.13	0.08	0.03	0.20
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
0.27	0.11	0.13	0.06	0.02	0.17
0.27	0.16	0.13	0.08	0.03	0.20
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
0.30	0.15	0.15	0.08	0.04	0.21
0.27	0.19	0.13	0.09	0.04	0.22
0.27	0.15	0.13	0.08	0.03	0.20
0.27	0.15	0.13	0.08	0.03	0.20
0.23	0.15	0.11	0.08	0.03	0.19
diámetro equivalente promedio					0.19

Tabla 6.14: Valores de los diámetros de burbuja obtenidos experimentalmente y su respectivo diámetro equivalente

Se observa que el diámetro horizontal siempre es mayor que el vertical, donde se cumple la condición de que para la forma oblato elipsoidal, su eje mayor siempre es perpendicular a la dirección del flujo del fluido, a diferencia de la forma prolato elipsoidal cuyo eje mayor es

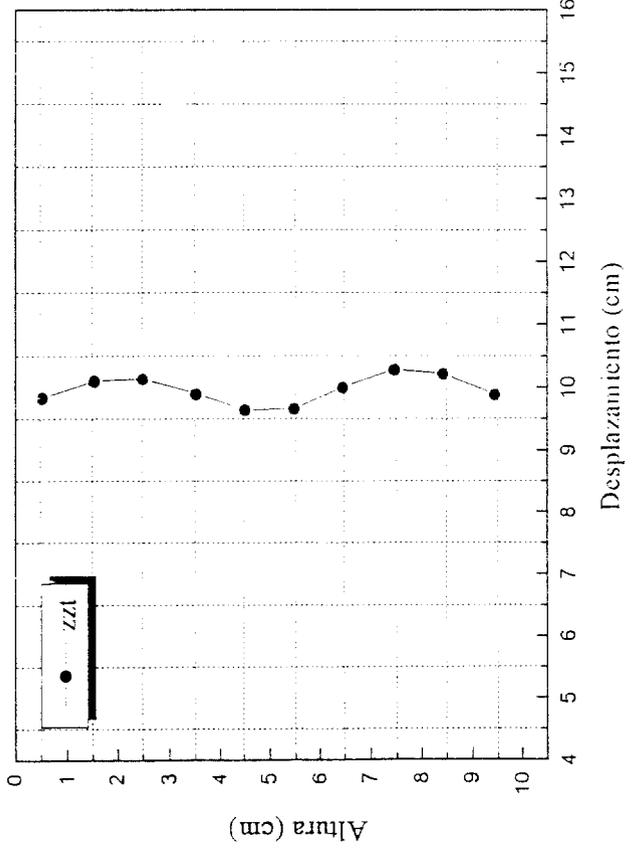
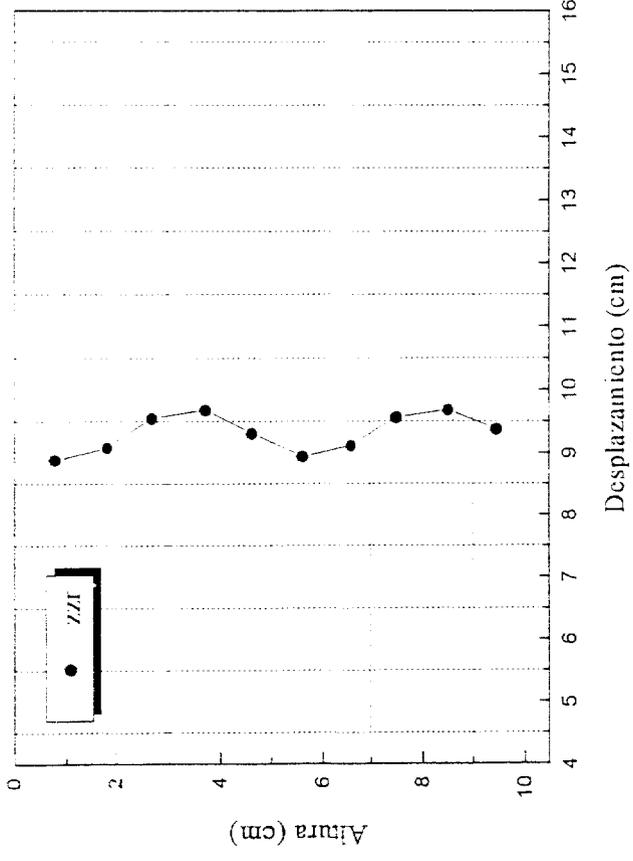
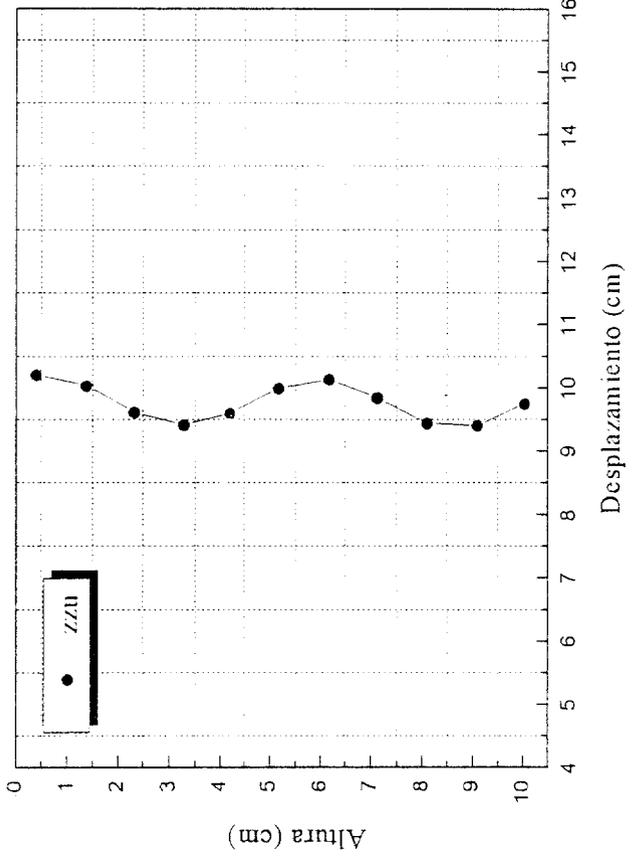
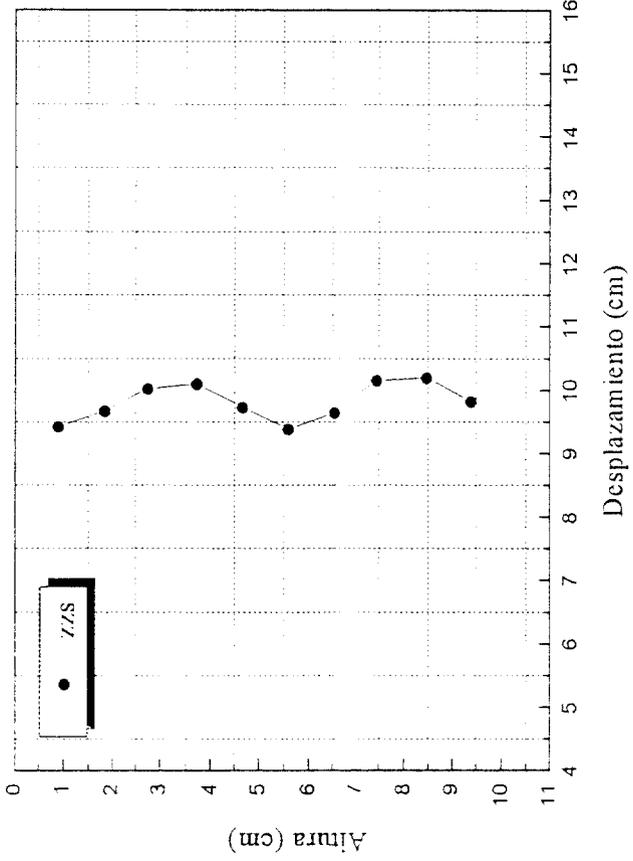


Figura 6.17 Reconstrucción de la trayectoria bidimensional

paralelo a la dirección del flujo.

Como ya se mencionó en el capítulo dos, la forma aplanada o achatada de estas burbujas se debe principalmente a la diferencia de presiones entre su parte frontal y la posterior, donde el movimiento zigzagueante o helicoidal que describen puede ser provocado por la presencia de vórtices en la estela de la burbuja.

La superposición de dos trayectorias cualesquiera en una misma gráfica arroja un dato interesante: el movimiento de las burbujas es aproximadamente semejante para un diámetro de burbuja dado. Como era de esperar, existe un desfase entre las oscilaciones, ya que no se podría esperar que las burbujas describan exactamente la misma trayectoria a la misma altura, y esto se debe principalmente a las condiciones existentes cuando la burbuja es puesta en libertad en el agua, siendo estas condiciones las que determinan la trayectoria a seguir. Sin embargo, como se observa en las figuras 6.18 y 6.19, el desfase es mínimo en algunos casos.

A cada una de las trayectorias se le determinó la amplitud y frecuencia de la oscilación, a partir del mejor ajuste de una curva cosenoidal, donde los parámetros de ajuste son tres: la amplitud y frecuencia de la oscilación y el ángulo de desfase. Un ejemplo de este ajuste se observa en la figura 6.20, el cual se determinó desarrollando un programa en MatLab. Los resultados obtenidos se indican en la Tabla 6.15 correspondiente a cada experimento.

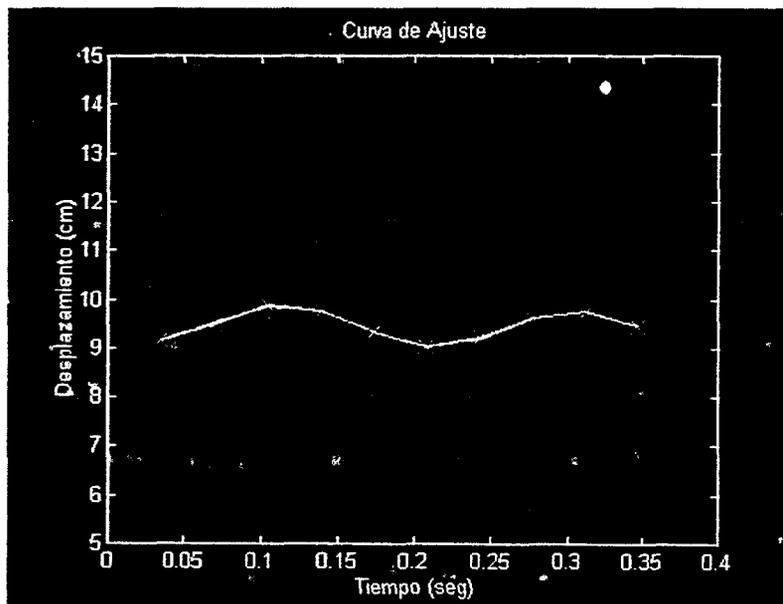


Figura 6.20: La curva de ajuste (azul) sobre la curva experimental (amarillo) permite determinar la amplitud y la frecuencia de la oscilación de la burbuja.

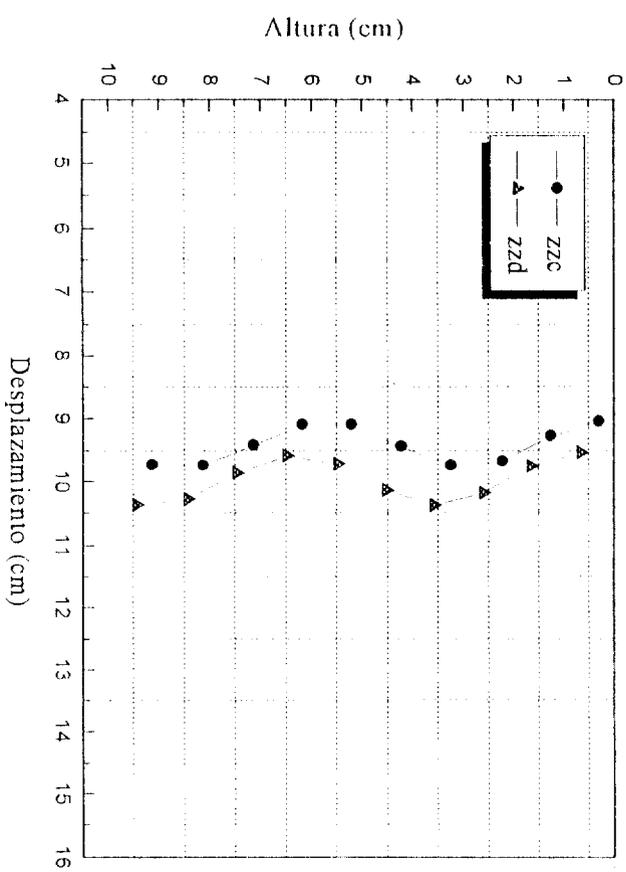
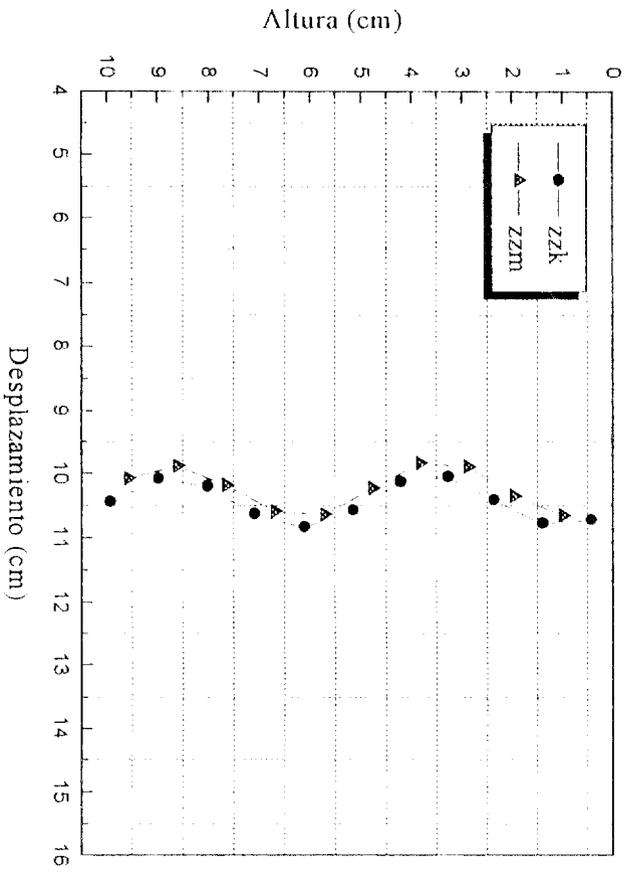
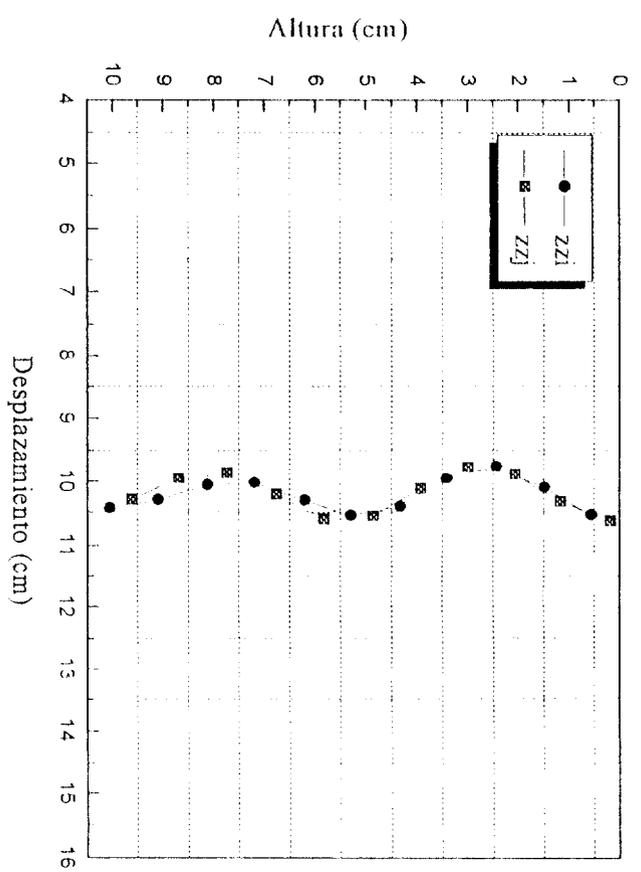
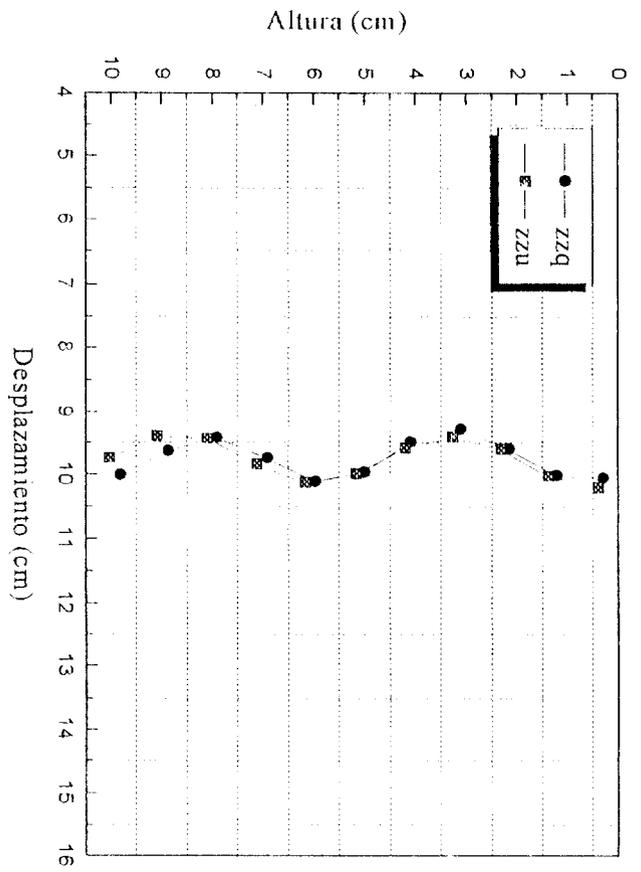


Figura 6.18: Comparación de dos trayectorias diferentes

NOMBRE DEL EXPERIMENTO	AMPLITUD (cm)	FRECUENCIA (Hz)
zza	0.400	5.260
zzb	0.380	4.845
zzc	0.361	5.008
zzd	0.415	5.292
zze	0.429	4.655
zzf	0.416	5.300
zzg	0.396	5.801
zzi	0.327	5.694
zzj	0.436	5.566
zzk	0.402	5.329
zzm	0.425	5.244
zzn	0.374	5.749
zzo	0.425	5.019
zzp	0.442	4.952
zzq	0.401	5.593
zzr	0.385	6.316
zzs	0.378	5.954
zzt	0.316	5.007
zzu	0.387	5.111

Tabla 6.15: Valores de amplitud y frecuencia calculados a partir del ajuste de la función coseno

Se requiere ahora determinar si existe o no alguna correlación entre los resultados experimentales. A fin de lograr esto, se grafican las tres combinaciones posibles entre los parámetros amplitud, frecuencia y diámetro equivalente, siendo entonces amplitud y frecuencia, amplitud y diámetro equivalente y frecuencia y diámetro equivalente, las combinaciones cuyo comportamiento se desea determinar. Los gráficos obtenidos se presentan en las figuras 6.21, 6.22 y 6.23, donde se observa que no existe correlación alguna entre los parámetros debido a la dispersión aleatoria de los puntos. La forma más sencilla de correlacionar los puntos sería aplicando una regresión y obtener la recta que mejor se ajuste a estos datos, pero surge la pregunta de qué tan confiable puede ser correlacionarlos de esta forma.

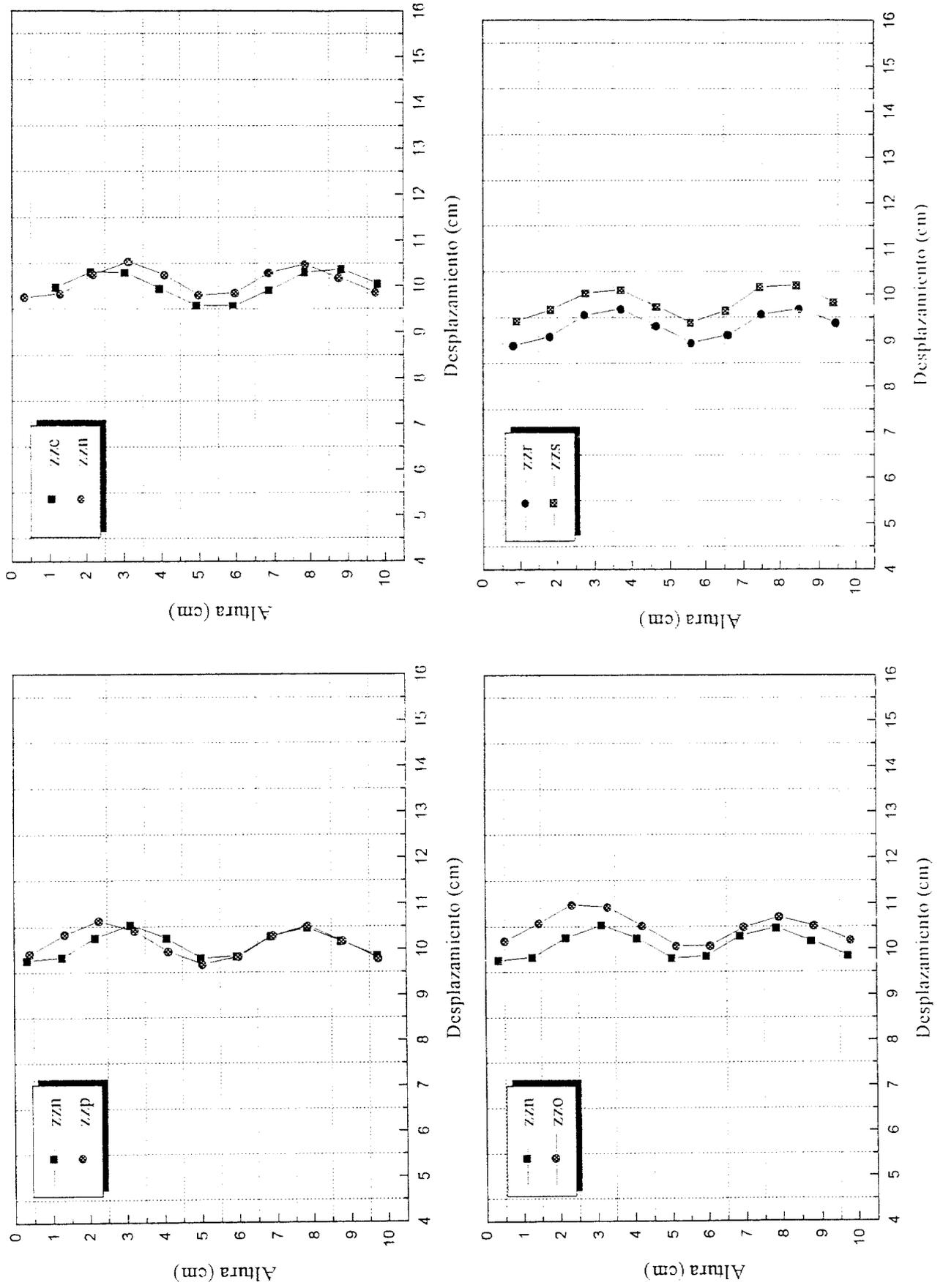


Figura 6 19 Comparación de dos trayectorias diferentes

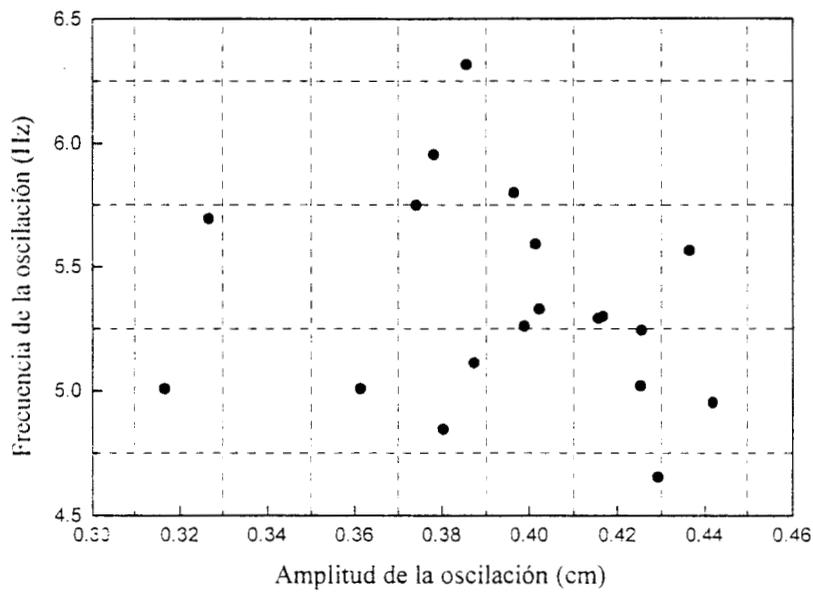


Figura 6.21: Amplitud vs. frecuencia de la oscilación de burbuja.

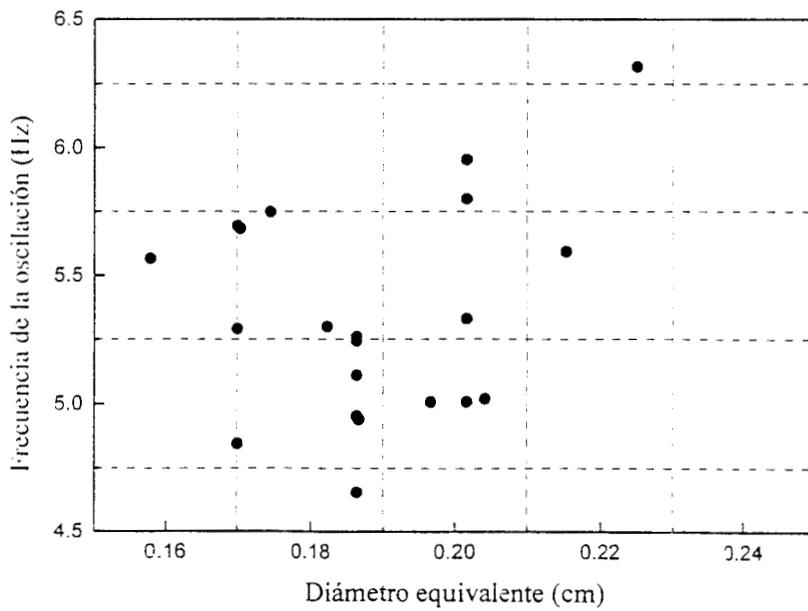


Figura 6.22: Diámetro equivalente de la burbuja vs. frecuencia de la oscilación.

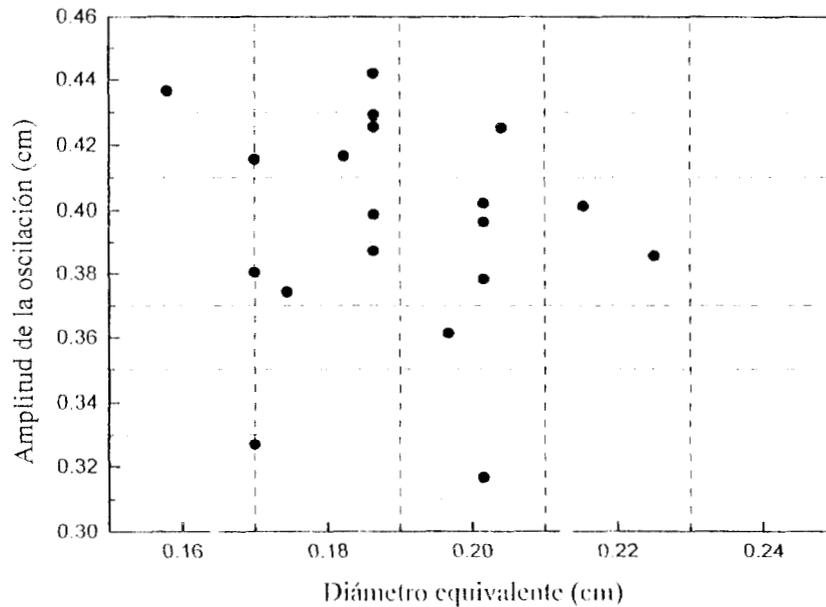


Figura 6.23: Diámetro equivalente de la burbuja vs. amplitud de la oscilación.

En vista de que aparentemente no se puede obtener alguna correlación entre los parámetros, entonces se determinan los límites entre los cuales puede estar localizado el valor. A estos límites se les denomina intervalos de confianza y el valor respectivo para cada uno de los parámetros se expresa como un valor central \pm un error típico. En base a esto se procede a determinar estadísticamente la media muestral (el valor central) de cada uno de los parámetros y el error típico a partir de una distribución t-student.

En las figuras 6.24, 6.25 y 6.26 están graficados los valores obtenidos experimentalmente para la amplitud de la oscilación, frecuencia de la oscilación y el diámetro equivalente de burbuja vs. el número de experimento, respectivamente. Esta forma de graficar los parámetros vs número de experimento es válida siempre y cuando se tengan experimentos equivalentes. En nuestro caso, el diámetro de las burbujas generadas fue variable aún cuando se tomaron las precauciones de que los experimentos fueran reproducibles bajo iguales condiciones.

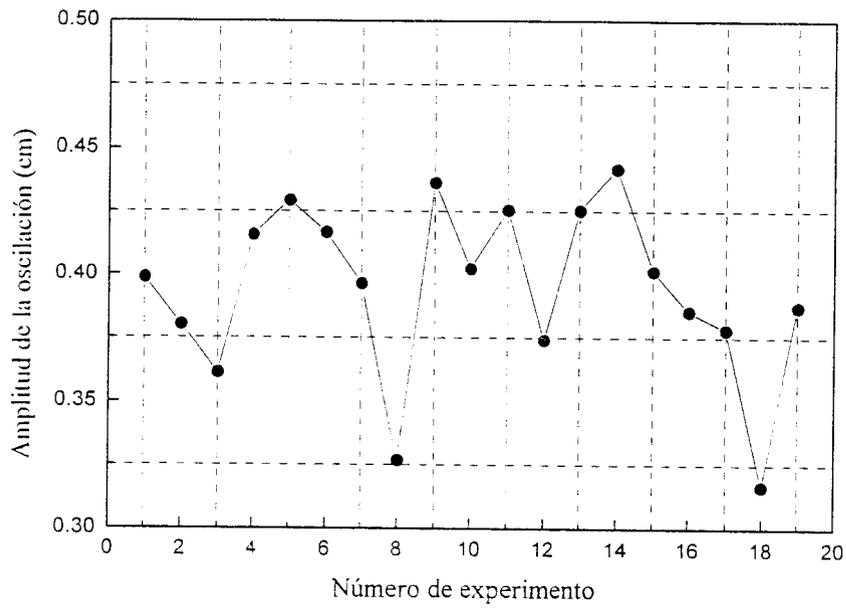


Figura 6.24: Gráfico de los resultados experimentales de amplitud de oscilación vs. experimento.

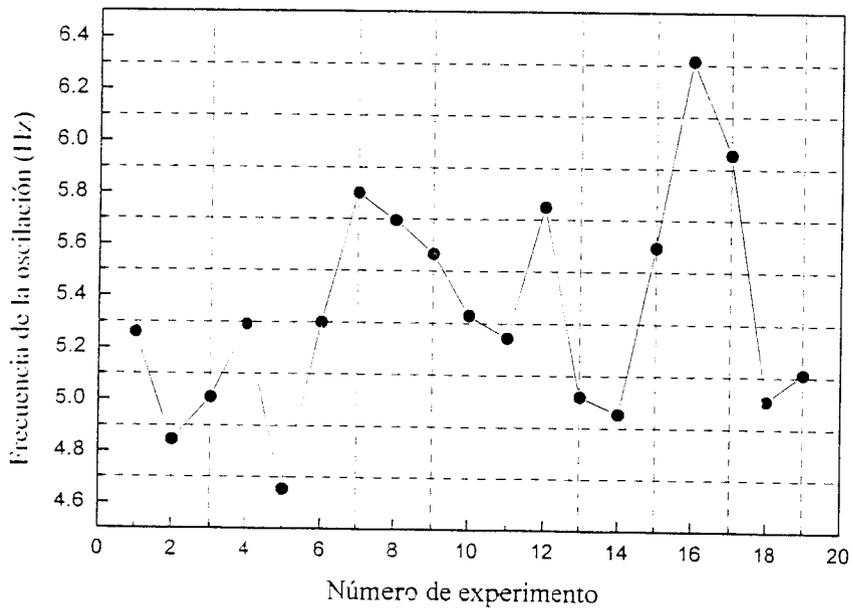


Figura 6.25: Gráfico de los resultados experimentales de frecuencia de oscilación vs. experimento.

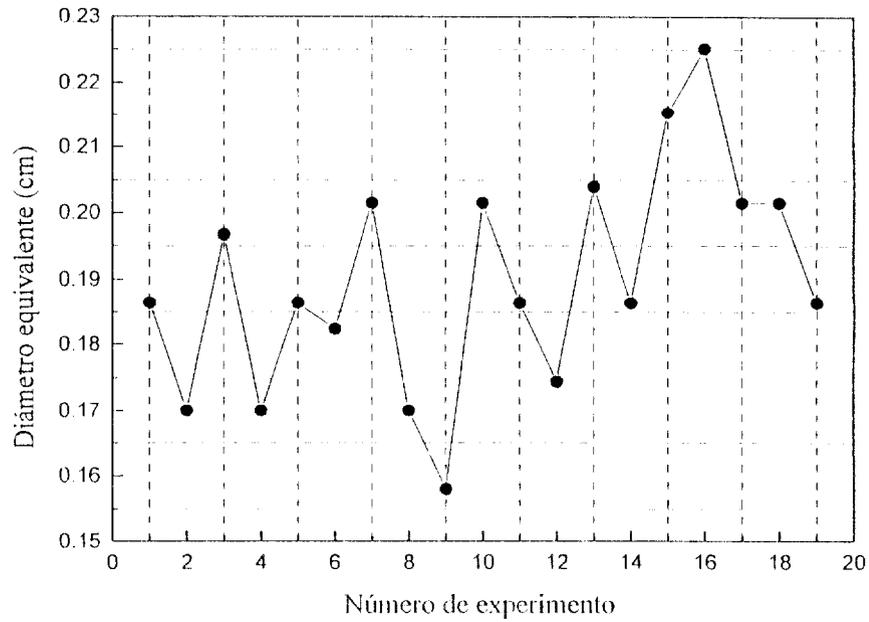


Figura 6.26: Gráfico de los resultados experimentales de diámetro de burbuja vs. experimento.

La Tabla 6.16 muestra los resultados obtenidos a partir de un análisis estadístico de los resultados experimentales. Además, se determinaron los intervalos de confianza calculados a partir de la distribución t-student para un 95% de confianza, es decir, una probabilidad de 0.95 de que la media poblacional esté comprendida entre ambos límites.

ESTADISTICO	AMPLITUD (cm)	FRECUENCIA (Hz)	DIAMETRO (cm)
Media	0.395	5.352	0.190
Desviación estándar	0.034	0.422	0.017
Error típico	0.017	0.209	0.008
Límite de confianza inf.	0.378	5.143	0.182
Límite de confianza sup.	0.412	5.561	0.198

Tabla 6.16: Resultados obtenidos estadísticamente para los valores experimentales de amplitud, frecuencia y diámetro equivalente

Dicho en otras palabras, se tiene un 95% de confianza de que los valores de la amplitud y la frecuencia de la oscilación de una burbuja de un diámetro equivalente dado, se encuentre

en este rango de valores. Se tienen entonces los siguientes valores de amplitud, frecuencia y diámetro equivalente:

$$\begin{aligned}
 A &= 0.395 \pm 0.017 \text{ cm} \\
 f &= 5.352 \pm 0.209 \text{ Hz} \\
 d_e &= 0.190 \pm 0.008 \text{ cm}
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

De acuerdo con la Tabla 6.1, el diámetro equivalente de burbuja obtenido experimentalmente está contenido en el rango de valores en el que se observa el movimiento helicoidal y la forma que adopta es la de un oblato elipsoidal, tal y como se observó en los experimentos realizados.

En las figuras 6.27, 6.28 y 6.29 se muestran las trayectorias obtenidas a partir de las mediciones experimentales de los centros de masa de cuatro burbujas, cuyo diámetro equivalente está comprendido en el intervalo de la ecuación 6.4. La metodología desarrollada para llevar a cabo la reconstrucción ya fue explicada en la sección 5.3 del capítulo 5.

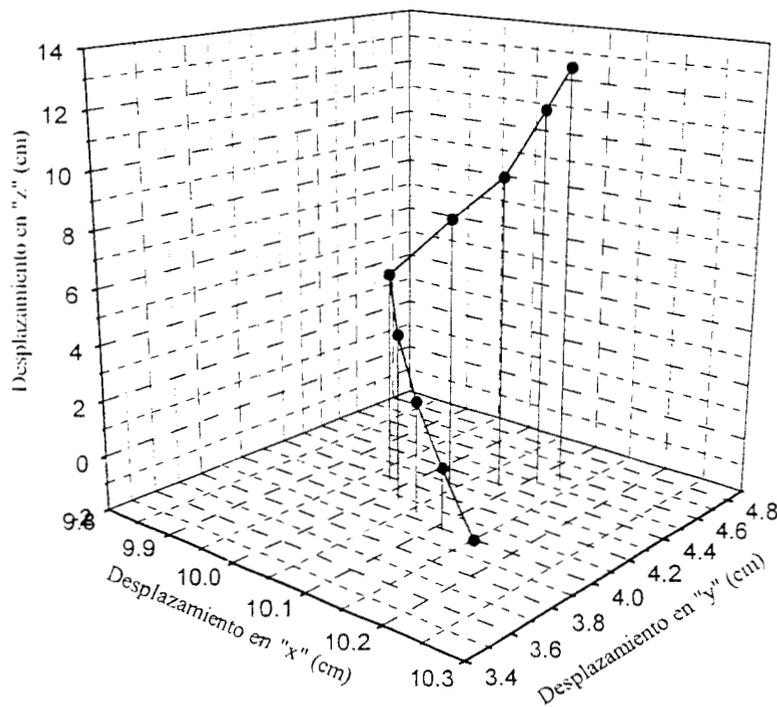


Figura 6.27: La burbuja asciende en el sentido de las manecillas del reloj.

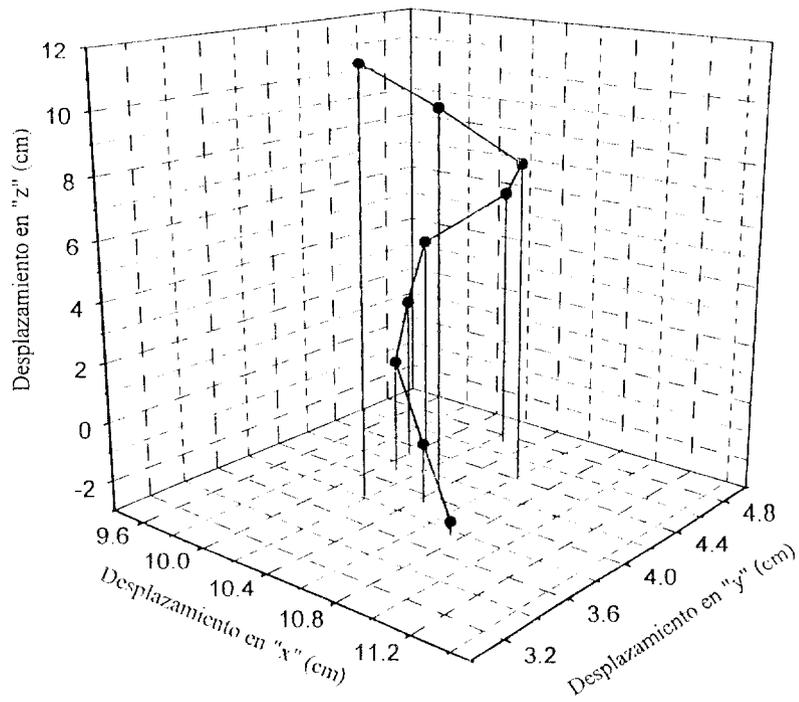


Figura 6.28: La burbuja asciende en el sentido de las manecillas del reloj.

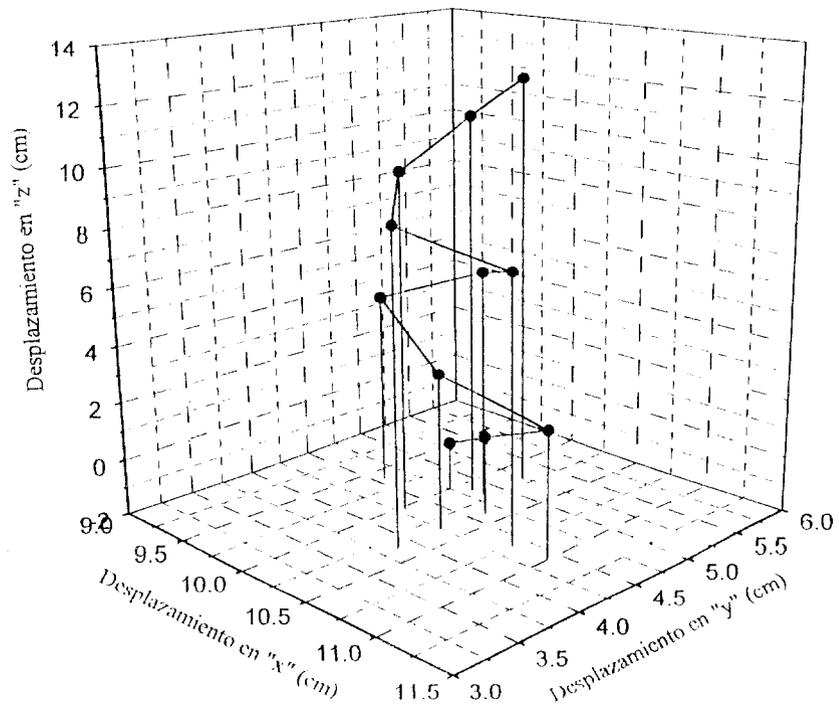


Figura 6.29: La burbuja asciende en el sentido de las manecillas del reloj.

Se observa en los tres casos, que la burbuja asciende en el sentido de las manecillas del reloj. Esto no es una regla general, ya que el modo de ascenso de la burbuja es aleatorio y no hemos determinado las causas que originan que las burbujas asciendan ya sea en el sentido de las manecillas de un reloj o en sentido contrario. También se observa que sólo se logró reconstruir una parte muy pequeña de su ascenso, sin embargo es claro el tipo de movimiento que describe.

De igual forma que para la reconstrucción bidimensional, la reconstrucción tridimensional de la trayectoria de la burbuja sólo se hizo aproximadamente a partir de 10 puntos, lo cual limita las observaciones que sobre éstas puedan obtenerse. Sin embargo, es importante resaltar que no se han realizado reconstrucciones de este tipo (hasta donde sabemos y por la bibliografía revisada), y que la metodología para realizar este tipo de estudios está sujeta a seguir siendo mejorada a fin de poder obtener resultados que permitan llevar a cabo observaciones experimentales más precisas y más confiables.

Debido a que no existe información bibliográfica que permita comparar los resultados experimentales obtenidos en el presente estudio con los obtenidos en otros estudios realizados por otros investigadores, la veracidad de los primeros puede ser cuestionada. Sin embargo, son resultados que podrían ser comparados con futuras investigaciones.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

Se ha estudiado el movimiento helicoidal de burbujas mediante el planteamiento de un modelo teórico y su solución analítica, así como de experimentos llevados a cabo en el presente trabajo, que han permitido abordar un tema que no ha sido estudiado previamente con amplitud. El porqué una burbuja de aire describe una trayectoria helicoidal y cuáles son las fuerzas que determinan este tipo de movimiento, son preguntas que todavía no es posible responder con certeza. Mas sin embargo, en el presente trabajo se han dado algunos pasos encaminados a identificar las causas probables que determinan que las burbujas asciendan a través de un medio continuo describiendo este tipo de movimiento.

En los experimentos realizados se generaron cuatro tamaños diferentes de burbuja. A partir de la medición de sus diámetros equivalentes y de su velocidad, fue posible identificar el tamaño de burbuja (aproximadamente 0.2 cm) que presentara las características del movimiento deseado para llevar a cabo la reconstrucción de su trayectoria. Debido precisamente a su tamaño, el alcance de las filmaciones fue limitado y se obtuvieron recorridos cortos de la trayectoria de la burbuja, con 5 puntos por ciclo, lo cual fue suficiente para determinar la función oscilatoria.

A partir de la reconstrucción de la trayectoria bidimensional de las burbujas, se determinaron la amplitud y la frecuencia de la oscilación de una burbuja de diámetro equivalente dado, los cuales no pudieron ser comparados con datos reportados en la literatura debido a la inexistencia

de estos últimos. Hay que mencionar que este tamaño de burbuja no es el único que describe trayectorias helicoidales, sino que está incluido en un rango de valores en el que se ha observado este tipo de movimiento (ver Tabla 6.1).

De acuerdo con la relación que existe entre el movimiento circular uniforme y el movimiento armónico simple, donde el radio de la trayectoria circular que describe una partícula es la amplitud de la oscilación, se concluye que el valor central de este último valor ($A = 0.395 \pm 0.017$ cm) lo podemos considerar como el radio de la trayectoria helicoidal que describe la burbuja en su ascenso.

En los experimentos realizados se observó que el tipo de movimiento que describe una burbuja en su ascenso es función principalmente de su tamaño y por consiguiente de las fuerzas que se ejercen sobre ella. El efecto de las fuerzas de arrastre viscoso, inerciales, de tensión superficial, de flotación, etc., contribuyen indudablemente en el tipo de movimiento que la burbuja describe. Para un diámetro de burbuja dado (aproximadamente 0.2 cm) incluido en el rango de tamaños de burbuja que describen trayectorias helicoidales (ver Tabla 6.1), se observó que la oscilación es aproximadamente igual para el número de burbujas generadas. A pesar de que los resultados fueron obtenidos a partir de 19 burbujas individuales, éstos permiten dar una primera aproximación cuantitativa de dos de los parámetros más importantes que describen el ciclo helicoidal: la amplitud y la frecuencia. La metodología desarrollada para llevar a cabo este tipo de estudios ha sido planteada y se ha dado el primer paso en el largo camino que falta por recorrer hasta que sean establecidas firmemente las fuerzas que originan este tipo de movimiento, ya sea a partir de modelos matemáticos que tomen en cuenta la geometría real de la burbuja durante su ascenso, o de resultados que sean obtenidos experimentalmente haciendo uso de tecnología más avanzada.

La metodología desarrollada para llevar a cabo la reconstrucción de la trayectoria tridimensional de una burbuja, no aplica únicamente a esta clase de “cuerpos”. Puede ser aplicada a una gran variedad de casos en donde se requiera determinar la trayectoria que ha seguido un objeto.

A partir del modelo teórico se identificaron: el arrastre viscoso de Stokes pseudoestacionario, la disipación viscosa, la fuerza inercial ejercida por el movimiento del líquido alrededor de la superficie de la esfera, la fuerza de flotación y la aceleración, las cuales interactúan sobre una

esfera sólida cuyo diámetro es pequeño ($d_c < 0.01$ cm) y se mueve a bajos números de Reynolds ($Re_b < 0.1$). Como ya se ha mencionado anteriormente, este modelo no aplica a los tamaños de burbuja que se generaron en los experimentos, pero nos acerca a la comprensión del movimiento de estos últimos.

Con respecto al sistema optoelectrónico que se diseñó para medir la velocidad de las burbujas generadas, es importante mencionar que la principal desventaja que se presentó en las mediciones fue el requerir de una videocasetera para determinar los tiempos de caídas de voltajes. Como ya se mencionó anteriormente, el uso de este equipo limita la precisión de las mediciones ya que mucha de la información queda “almacenada” en un sólo cuadro, debido a que no hay posibilidad alguna de tener fracciones de cuadros.

Este sistema permitiría medir velocidades de burbujas con mayor precisión si se contara con una tarjeta (interfase) que responda a los impulsos de voltaje generados por el paso de la burbuja a través de los dos planos de luz. Los receptores usados en el sistema son en realidad fototransistores que responden a las variaciones de radiación luminosa (proveniente de los diodos laser) en el orden de microsegundos.

Ahora, si en lugar de utilizar la videocámara que está limitada a un cierto número de cuadros por segundo, se utilizara la interfase mencionada anteriormente, se evitaría el uso de la videocámara como intermediario y se ganaría en precisión en las mediciones.

Por último, habría que resaltar que los alcances de este estudio son amplios y se pretende seguir trabajando en el tema a fin de obtener mayor información que nos permita entender el porqué una burbuja asciende describiendo trayectorias helicoidales cuando alcanza un tamaño dado.

APENDICE A

LAS ECUACIONES DE CAMBIO EN COORDENADAS CURVILINEAS

Las ecuaciones de cambio expresadas en coordenadas rectangulares son las más sencillas de utilizar. Sin embargo, este sistema de coordenadas no siempre es el más conveniente para la resolución de problemas. Como ya se vio en el capítulo 4, la descripción y solución del flujo de Hagen-Poiseuille se simplificó mediante el uso de coordenadas cilíndricas y el movimiento del fluido alrededor de la esfera en coordenadas esféricas, lo que no hubiera ocurrido en caso de utilizar las ecuaciones de cambio expresadas en algún otros sistema. Entonces, la aplicación de las ecuaciones de cambio expresadas en un sistema de coordenadas en particular depende de la geometría física del problema.

A continuación, se expresan la ecuación de continuidad, la ecuación de movimiento y el tensor de esfuerzos en los tres sistemas coordenados más comúnmente empleados: el sistema de coordenadas cartesianas, el de coordenadas cilíndricas y el de coordenadas esféricas.

A.1 La ecuación de continuidad en distintos sistemas coordenados

Coordenadas rectangulares (x, y, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \text{sen} \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{A.3})$$

A.2 La ecuación de movimiento en distintos sistemas coordenados.

La ecuación de movimiento en coordenadas rectangulares (x, y, z) :

En función de τ :

componente x ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x - \mu \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] \quad (\text{A.4})$$

componente y ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y - \mu \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] \quad (\text{A.5})$$

componente z ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z - \mu \left[\frac{\partial r_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial r_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial r_{zz}}{\partial z} \right] \quad (\text{A.6})$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido Newtoniano con densidad y viscosidad constantes:

componente x,

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.7})$$

componente y,

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.8})$$

componente z,

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.9})$$

La ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

En función de τ :

componente r,

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \quad (\text{A.10})$$

componente θ ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] \quad (\text{A.11})$$

componente z ,

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (\text{A.12})$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido Newtoniano con densidad y viscosidad constantes:

componente r ,

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

componente θ ,

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

componente z ,

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

La ecuación de movimiento en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

En función de τ :

componente r :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

componente θ :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

componente ϕ :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \rho g_\phi - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido Newtoniano con densidad y viscosidad constantes:

componente r :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

componente θ :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]
\end{aligned} \tag{A.20}$$

componente ϕ :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\
&= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \rho g_\phi + \mu \left[\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]
\end{aligned} \tag{A.21}$$

A.3 El tensor de esfuerzos expresado en distintos sistemas coordenados.

Componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\tau_{xx} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \tag{A.22}$$

$$\tau_{yy} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \tag{A.23}$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \tag{A.24}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \tag{A.25}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \tag{A.26}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \tag{A.27}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.28})$$

Componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.31})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.32})$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.33})$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (\text{A.34})$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.35})$$

Componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.36})$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.37})$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.39})$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\text{sen}\theta} \right) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.40})$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu \left[\frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \text{sen}\theta) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.42})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R. (1989). *Vector, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, New York.
- [2] Baird, D. C. (1991). *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, Prentice-Hall, México.
- [3] Bertin, J. J. (1986). *Mecánica de fluidos para ingenieros*, Prentice Hall, México.
- [4] Bhaga, D. y Weber, M. E. (1981). Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities, *J. Fluid Mech.*, **105**, 61-85.
- [5] Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N. (1987). *Fenómenos de Transporte*, Reverté, Barcelona, España.
- [6] Brodkey, R. S. (1995). *The phenomena of fluids motion*, Dover Publications, New York.
- [7] Castleman, K. R. (1996). *Digital Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [8] Catchpole, J. P. y Fulford, G. (1966). Dimensionless Groups, *Industrial and Engineering Chemistry*, **58**, 46-60.
- [9] Clift, R., Grace, J. R. y Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York.
- [10] Davies, R. M. y Taylor, G. I. (1950). The Mechanics of Large Bubbles Rising through Extended Liquids and through Liquids in Tubes, *Proc. Roy. Soc. London*, **A200**, 375-390.
- [11] Davis, J. L. (1988). *Wave propagation in Solids and Fluids*, Springer Verlag, Nueva York.

- [12] Denn, M. M. (1980). *Process Fluid Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [13] Dryden, H. L., Murnaghan, F. D. y Bateman, H. (1956). *Hydrodynamics*, Dover Publications, New York.
- [14] Elmore, W. C. y Heald, M. A. (1985). *Physics of Waves*, Dover Publications, New York.
- [15] Fau, L.-S. y Tsuchiya, K. (1990). *Bubble wake dynamics in liquids and liquid-solid suspensions*, Butterworth-Heinemann, Stoneham, MA.
- [16] Gaddis, E. S. y Vogelpohl, A. (1986). Bubble formation in quiescent liquids under constant flow conditions, *Chem. Eng. Sci.*, **41**, 97-105.
- [17] Gerhart, P. M., Gross, R. J. y Hochstein, J. I. (1995). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware.
- [18] González, R. C. y Wintz, P. (1987). *Digital Image Processing*, Addison-Wesley, U. S. A.
- [19] Harris, N. C., Hemmerling, E. M. y Mallmann, A. J. (1990). *Physics: Principles and Applications*, McGraw-Hill, New York.
- [20] Hsu, H. P. (1987). *Análisis Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware.
- [21] Jamialahmadi, M., Branch, C. y Müller-Steinhagen (1994). Terminal bubble rise velocity in liquids, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **72**, 119-122.
- [22] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. (1979). *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, New York.
- [23] Levich, V. G. (1962). *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [24] Lindt, J. T. (1972). On the periodic nature of the drag on a rising bubble, *Chem. Eng. Sci.*, **27**, 1775-1781.
- [25] Main, I. G. (1978). *Vibrations and Waves in Physics*, Cambridge University Press, Great Britain.

- [26] Maneri, C. C. (1995). New look at wave analogy for prediction of bubble terminal velocities, *AIChE J.*, **41**, 481-487.
- [27] McKelvey, J. P. y Grotch, H. (1980). *Física para ciencias e ingeniería Vol. I*, Harla, México, D. F.
- [28] Mendelson, H. D. (1967). The Prediction of Bubble Terminal Velocities from Wave Theory, *AIChE J.*, **13**, 250-253.
- [29] Milne-Thomson L. M. (1949). *Theoretical Hydrodynamics*, Dover Publications, New York.
- [30] Morse, P. M. y Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics Vol. I*, McGraw Hill, New York.
- [31] Ramakrishnan, R., Kumar, R. y Kuloor, N. R., (1969). Studies in bubble formation – I. Bubble formation under constant flow conditions, *Chem. Eng. Sci.*, **24**, 731-747.
- [32] Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. (1996). *Física Vol. I*, CEC SA, México, D. F.
- [33] Ryskin, G. y Leal, L. G. (1984). Numerical Solution of Free Boundary Problems in Fluid Mechanics. Part 2. Buoyancy Driven Motion of a Gas Bubble through a Quiescent Liquid, *J. Fluid Mech.*, **148**, 19-35.
- [34] Shah, Y. T., Kelkar, B. G., Godbole, S. P. y Deckwer, W. D. (1982). Design Parameters Estimations for Bubble Column Reactors, *AIChE J.*, **28**, 353-378.
- [35] Sparenberg, J. A. (1984). On the stream function in low Reynolds number flow for general curvilinear coordinates, *Mathematical Approaches in Hydrodynamics*, Chap 32, 461-472.
- [36] Sparenberg, J. A. (1989). Note on the stream function in curvilinear coordinates, *Fluid Dynamics Research*, **5**, 61-67.
- [37] Streeter, V. L. y Wylie, E. B. (1988). *Mecánica de los fluidos*, McGraw Hill, México.
- [38] Taitel, Y., Boruca, D. y Dukler, A. E. (1980). Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes, *AIChE J.*, **26**, 345-354.

- [39] Tritton, D. J. (1977). *Physical Fluid Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [40] Vázquez Rodríguez, R. (1988). *Predicción de coeficientes de transferencia de masa del lado del gas en columnas verticales con flujo ascendente líquido gas*, Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, México.
- [41] Vennard, J. K. y Street, R. L. (1986). *Elementos de Mecánica de Fluidos*, CFCSA, México.
- [42] Wallis, G. B. (1969). *One dimensional two phase flow*, McGraw Hill, New York.
- [43] Wang, C. Y. (1981). On the low Reynolds-number flow in a helical pipe, *J. Fluid Mech.*, **108**, 185-194.
- [44] Wang, J.-W. y Andrews, J. R. G. (1995). Numerical Simulation of Flow in Helical Ducts, *AIChE J.*, **41**, 1071-1080.
- [45] Wedlock, D. J. (1994). *Controlled particle, droplet and bubble formation*, Butterworth Heinemann
- [46] Wellner, M. (1991). *Elements of Physics*, Plenum Press, New York.
- [47] Wexler, C. (1962). *Analytic Geometry. A Vector Approach*, Addison Wesley, U.S.A.
- [48] Wu, B. J. C., DeLuca, R. T. y Weneger, P. P. (1974). Rise speed of spherical cap bubbles at intermediate Reynolds number, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 1307-1309.
- [49] Young, E. C. (1978). *Vector and Tensor Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York.