



UNIDAD IZTAPALAPA

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (FISICA)**

TESIS:

**EFECTO CASIMIR EN UN ESPACIO-TIEMPO NO
CONMUTATIVO**

**PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)**

PRESENTA:

**Ing. José Manuel Silva Morales
Matricula: 2171803206
josemanuelsilvamorales34@gmail.com**

ASESOR: DR. ROMAN LINARES ROMERO

JURADO:

**PRESIDENTE: DR. ADRIAN MAURICIO ESCOBAR RUIZ
SECRETARIO: DR. ROMAN LINARES ROMERO
VOCAL: DR. OMAR PEDRAZA ORTGEA**

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO A 4 DE MAYO DE 2023

Con dedicatoria para mis padres

Agradecimientos

Agradezco principalmente, y de una manera muy especial, a mis padres, por el enorme esfuerzo que hicieron para permitirme concluir con éxito este trabajo de maestría, sin dudar en ningún momento de mí.

Agradezco especialmente la ayuda del Dr. Román Linares, él como mi asesor de tesis, realizó la sugerencia del tema de la presente y dio seguimiento desde su inicio a término. Además, por su paciencia y dedicación a la ciencia. Sin duda es una inspiración para continuar adelante en el desarrollo de la ciencia.

También quiero agradecer al Dr. Carlos Escobar, sin su ayuda este trabajo no hubiera tenido el resultado que se alcanzó, por sus largas horas de asesoría y su apoyo incondicional. Debo mencionar también al Dr. Hugo Morales (SNI III), de quien también obtuve una ayuda extraordinaria en mi desarrollo durante mi estancia de maestría, su apoyo incondicional fue también importante para la conclusión de mis estudios.

También agradezco la ayuda económica de una beca de maestría por parte de CoNaCyT y una ayudantía de la misma dependencia con el Dr. Hugo Morales. Ambos apoyos fueron decisivos para la culminación con éxito de esta tesis de maestría.

A todos los compañeros que me hicieron compañía en las largas noches de estudio y discusiones durante los períodos de clases obligatorias y optativas. Del compañero Fís. E. Rodríguez, quien desde cursos propedéuticos me impulsó a trabajar duro y resolvió todas las inquietudes que en su momento fueron decisivas para la comprensión de nuevos horizontes en cada una de las materias impartidas en maestría.

Notación

Utilizaremos la notación usual en Teoría Cuántica de Campos [1] donde se define

Unidades naturales

$$\hbar = c = 1, \quad (1)$$

Cuadrimomento

$$p^\mu = mU^\mu = m(\gamma, \gamma\vec{v}) = (\gamma m, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = (E, p_x, p_y, p_z), \quad (2)$$

D'Alambertiano

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (3)$$

invariante relativistas

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right), \quad (4)$$

Las relaciones relativistas

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{x} \cdot \vec{x} = \omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}, \quad (5)$$

Para una partícula masiva

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2, \quad (6)$$

La métrica de Minkowski en 4 dimensiones con signatura

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (7)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

Donde los índices griegos indican $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$.

En notación de Einstein, podemos escribir los vectores y cuadvectores como

$$\vec{x} = x^i = (x^1, x^2, x^3), \quad (9)$$

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (10)$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (11)$$

La convención de suma de Einstein

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_i x^i, \quad (12)$$

Utilizando la función de Heaviside $\theta(x)$ y la delta de Dirac $\delta(x)$. Si $x < 0$

$$\theta(x) = 0, \quad (13)$$

Si $x > 0$

$$\theta(x) = 1, \quad (14)$$

Donde la delta de Dirac

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (15)$$

La delta de Dirac en n dimensiones

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^n x \delta^{(n)}(\vec{x}) = 1, \quad (16)$$

Transformada de Fourier en 4 dimensiones

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} f(p), \quad (17)$$

La transformada inversa

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 x}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot x} f(x), \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x e^{ip \cdot x} = (2\pi)^3 \delta^{(4)}(p), \quad (19)$$

Resumen

El método científico contemporáneo, con una aportación importante de Galileo Galilei, ha avanzado a pasos agigantados en los últimos dos siglos. Es indudable que el desarrollo de la ciencia esté de la mano con la comprobación empírica de los hechos mediante la experimentación, la observación directa y el razonamiento lógico. Sin embargo, muchos de los fenómenos hoy bien conocidos y establecidos mediante experimentos, fueron primero descritos por teorías que permanecieron en papel, y bajo un argumento matemático, para después ser comprobados, muchas veces separados por el alcance de la tecnología del momento en que se teorizaron ciertas ideas para poder ser llevado al experimento.

Describir un fenómeno debe tener una predicción a su comportamiento, debe ser consistente matemáticamente, y además coincidir con los experimentos asociados al mismo, siendo así como tenemos una teoría válida y aceptable. Lo que corresponde a los físicos teóricos es testear la teoría para ver, sobre todo sus inconsistencias con los resultados de los experimentos. Es necesario hacer una revisión breve en la historia de la ciencia para entender como varios fenómenos importantes en la Física han tenido un desfase en el tiempo entre su postulación teórica y su comprobación experimental, por ejemplo: la antimateria fue formulada por Paul Dirac en 1928 [2], implícita en la ecuación que lleva su nombre; y fue hasta 1932 cuando Carl Anderson descubrió el positrón (antipartícula del electrón) [3] y en 1955 se encontró la evidencia del antiprotón y el antineutrón en la Universidad de Berkeley por los Físicos Emilio Gino y Owen Chamberlain [4]. Otro fenómeno descubierto mucho tiempo después de su descripción teórica es el bosón de Higgs, descrito en 1964 por Peter

Higgs [5] y descubierto experimentalmente hasta el 2012 [6]. Las ondas gravitacionales descritas teóricamente en 1916 por Albert Einstein [7] y descubiertas experimentalmente hasta 2015 [8], son solo algunos de los ejemplos en la historia de la ciencia.

El objetivo principal de esta tesis es hacer una revisión y estudio del efecto Casimir en un modelo de teoría no conmutativa, donde se hace uso de la Teoría Cuántica de Campos. Uno de los principales resultados del presente trabajo, no reportado previamente en la literatura, es el cálculo de la energía y fuerza de Casimir en el caso masivo para la teoría no conmutativa que estaremos trabajando. A su vez a partir de este resultado se analiza el límite no masivo (en el modelo no conmutativo), encontrando que reproduce los resultados previamente obtenidos en la literatura. En el presente trabajo iniciamos analizando el caso estándar (espacio-tiempo conmutativo) de la ecuación de Klein-Gordon, la cual es la versión relativista de la famosa ecuación de Schrödinger. La motivación para realizar el estudio de la fuerza de Casimir en un espacio-tiempo conmutativo es para hacer evidente como la teoría estándar está de acuerdo con los resultados experimentales. Este hecho es imprescindible para establecer un rango de validez de la teoría estándar y que esto pueda ser utilizado para someter a prueba nuevas teorías o conceptos que se encuentren más allá del denominado Modelo Estándar de partículas. En el Capítulo 2 se establecen las bases de una Teoría Cuántica de Campos realizando un breve repaso del campo escalar real masivo, la ecuación de Klein-Gordon, la fuerza del vacío que representa el efecto Casimir y su estado base de energía. En el Capítulo 3 se realiza un estudio del oscilador armónico y los campos electromagnéticos clásicos y cuánticos, con la idea de guiar la tesis desde un estudio básico del oscilador de la mecánica cuántica. El capítulo 4 concentra su desarrollo en generar una forma del campo escalar real no masivo en una teoría no conmutativa con las ideas de los estados coherentes y la relación de incertidumbre de Heisenberg. El capítulo 5 reúne todos los elementos previos estudiados y muestra el cálculo de la fuerza de Casimir en un espacio tiempo no conmutativo; primero en su forma no masiva y, posteriormente, se extiende al caso masivo. El estudio realizado es presentado a primer orden (en el parámetro

relevante de la teoría no conmutativa); sin embargo, es importante mencionar que puede generalizarse para todo orden, lo cual se está realizando en una extensión a la presente tesis. Finalmente, terminamos con un análisis de los resultados principales en la sección de conclusiones.

Índice general

Agradecimientos	II
Notación	III
Resumen	VII
1 Introducción	1
2 Efecto Casimir: Campo escalar real	5
§2.1 La fuerza del vacío	5
§2.2 Ecuación de Klein-Gordon	6
§2.3 El Campo Escalar Real masivo	7
§2.4 Energía del punto cero	10
§2.5 Presión del vacío	14
3 Campo electromagnético	16
§3.1 Oscilador armónico	16
§3.2 Campo electromagnético clásico	19
§3.3 Campo electromagnético cuántico y estado base	22
4 No conmutatividad	25
§4.1 No conmutatividad en el espacio-tiempo	26
5 Campo electromagnético no conmutativo: Efecto Casimir	35

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
§5.1 Energía del punto cero	35
§5.1.1 Caso no masivo	35
§5.1.2 Caso masivo	39
6 Conclusiones	44
7 Apéndice	47
§7.1 Estados coherentes.	47
§7.2 Partícula en una caja	50
§7.3 Solución de la Ecuación Diferencial Parcial con Límites en la Frontera . . .	54
§7.4 Función Z de Riemann	60
8 Bibliografía	63

Capítulo 1

Introducción

Una de las teorías más importantes de la física contemporánea es la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés). Dicha teoría nace como una necesidad de extender las reglas de la Mecánica Cuántica a expresiones relativistas, es decir, situaciones en la que sistemas muy pequeños se mueven a velocidades cercanas a la de la luz (299792.458km/h). Esta utiliza los conceptos de la teoría clásica de campo y trata a las partículas e interacciones como campos que se extienden por todo el universo. Junto con la Relatividad General, desarrollada por el físico alemán Albert Einstein, constituyen las teorías más precisas que actualmente tiene el ser humano. Existen modelos muy puntuales para cada interacción fundamental en el universo, asociando a cada uno un Lagrangiano y un Hamiltoniano que nos ayuda a entender su comportamiento y características, tales como: su densidad de energía, momentos, posiciones, etc. Por su sencillez el campo que se suele estudiar primero es el campo escalar real, con el cuál se dará comienzo en esta tesis, para después revisar el campo electromagnético.

Pocos fenómenos cuánticos, como el efecto Casimir, pueden percibirse a una escala macroscópica. Dicho fenómeno se asocia al estado base (o estado de vacío) que describe la mecánica cuántica ordinaria. Fue descrito teóricamente en 1948 por H. B. Casimir [9] y comprobado experimentalmente por M. J. Sparnaay en 1958 [10], y aunque podemos

discutir sobre su derivación matemática y su interpretación, su existencia experimental está fuera de duda.

El efecto Casimir tiene objetivos tanto teóricos como experimentales. Ha sido utilizado para constreñir interacciones tipo Yukawa [11, 12] y ha sido sugerido como una potencial prueba para la detección de materia oscura axiónica [13]. A su vez, la fuerza de Casimir no puede ser despreciada a pequeñas escalas en el desarrollo de sistemas micromecánicos [14]. Algunas de las extensiones teóricas en las cuales se ha estudiado el efecto Casimir incluyen: espacio-tiempos con topologías no triviales [15, 16] y espacio-tiempos no Euclideos [17, 18, 19]. Modificaciones del efecto Casimir en presencia de campos gravitacionales débiles han sido también extensivamente estudiadas [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. En este último contexto, se ha propuesto que el efecto Casimir puede proveer una pista entre una posible conexión entre las fluctuaciones del punto cero y la constante cosmológica [27, 40, 29, 30].

Dado que este es un efecto cuántico bien establecido, cualquier teoría que intente modificar la mecánica cuántica estándar debe de reproducir este fenómeno, tal es el caso de la no conmutatividad. Iniciaremos analizando dicho fenómeno utilizando el estado base del campo escalar real en la versión estándar que llamaremos conmutativa. Posteriormente estudiaremos la versión no conmutativa, en el caso de un campo electromagnético, haciendo uso de los estados coherentes y operadores de ascenso y descenso.

Aprovechando las ideas de las teorías ya existentes, se justificará el estudio del efecto Casimir a partir del análisis de la energía del punto cero del campo electromagnético en un espacio-tiempo no conmutativo.

En el capítulo 2 se estudia el efecto Casimir utilizando un campo escalar real. Se comienza con el estudio del campo escalar real masivo y de la ecuación de Klein-Gordon, para después derivar una expresión para la energía. Posteriormente, se calculará explícitamente la energía del punto cero y la denominada “presión del vacío” o fuerza de Casimir. En el capítulo 3 se revisa el oscilador armónico, el campo electromagnético clásico y su versión cuántica. También se derivará la expresión que utilizaremos para calcular la energía de

Casimir en el caso de un campo electromagnético.

En el capítulo 4 se dará una breve introducción a la no conmutatividad de coordenadas espaciales y en particular al uso de estados coherentes. Se hará la deducción de cómo se introduce un factor (que llamaremos Θ y que está relacionado a una longitud asociada a la no conmutatividad) en el campo escalar real, y que servirá como punto de partida para calcular la energía de Casimir de manera similar al caso conmutativo, esto por medio de operadores de ascenso y descenso.

En el capítulo 5 se estudiará la fuerza de Casimir en la versión no conmutativa. Para esto, partiremos de las expresiones deducidas en el capítulo previo para la energía del vacío. Iniciaremos con el caso sin masa, el cual será abordado por el método de regularización que consiste en calcular la fuerza tanto al interior como al exterior de las placas. El resultado, obtenido por medio de la fórmula de Euler-Maclaurin, se expresa como una serie de potencias pares de Θ/L^2 , siendo L la distancia entre las placas. Posteriormente trabajaremos el caso masivo, para lo cual seguiremos otro camino que involucra el método de regularización dimensional, extensiones de la función Zeta de Riemann (Extended Epstein) y funciones modificadas de Bessel. Al calcular el límite $m \rightarrow 0$ recuperamos el resultado no masivo, lo cual ofrece una confirmación de ambos resultados.

Finalmente, en el capítulo 6 se realiza la discusión de las conclusiones así como posibles extensiones al presente trabajo.

En el apéndice se encuentran los cálculos y estudios realizados para la obtención de la forma de la energía del Efecto Casimir en su versión no conmutativa. En específico se presenta el estudio de los estados coherentes, la solución de la ecuación de Klein-Gordon con límites en la frontera y la deducción de la energía de una partícula cuántica confinada en un pozo de potencial.

A manera de referencia podemos mencionar algunas de las correcciones que se han obtenido en distintos modelos. Por ejemplo, en el caso de violación a la simetría de Lorentz para el sector fotónico del Modelo Estándar Extendido [38] (SME, por sus siglas en inglés)

se observa que la primera corrección es proporcional a κ^2/L^2 [39], siendo κ el parámetro asociado al rompimiento de la simetría de Lorentz y L la distancia entre las placas. Otro caso estudiado que contempla desviaciones a la simetría de Lorentz muestra que en el sector escalar del SME, la modificación en la fuerza de Casimir es un simple reescalamiento, del caso estándar, que contiene los parámetros asociados a la teoría [40]. Casos que contemplan espacios no conmutativos muestran correcciones a la fuerza de Casimir proporcionales a los términos a/L^4 y a^2/L^6 [41], siendo a un parámetro asociado a la no conmutatividad, análogo a Θ en el presente trabajo, y L la longitud entre las placas. Expresiones analíticas, aunque considerablemente complicadas, han sido obtenidas para modelos de teorías de cuerdas [42] y espacios de Kaluza-Klein [43].

En algunos modelos, por ejemplo utilizando el *heat kernel method*, [44] se puede demostrar que en algunos casos la no conmutatividad puede regularizar el comportamiento de la energía del vacío de un campo escalar. Algunos cálculos nos muestran que en modelos particulares las divergencias son suprimidas y la energía del vacío es solamente divergente logarítmicamente y en otros casos, más fuerte que en la teoría conmutativa .

Otro ejemplo conocido [45] es el efecto Casimir Dirichlet para un campo escalar complejo en un espacio $(2+1)$; 2 coordenadas espacial no conmutativas y una temporal conmutativa, el cual utiliza la condición de contorno *Dirichlet-like* en una curva contenida en un plano espacial y evalúa la energía de Casimir resultante para dos curvas diferentes: dos líneas paralelas separadas por una distancia L y un círculo de radio R .

Algunos otros ejemplos incluyen dimensiones extras, como es el caso del efecto Casimir no conmutativo Randall-Sundrum [46], el cual es tratado en un mundo brana de 5 dimensiones.

Inclusive existen trabajos que hacen uso de campos escalares complejos no conmutativos [47], donde se obtienen valores de la energía del estado base a segundo orden realizando un desarrollo en series de potencial del parámetro de no conmutatividad.

Capítulo 2

Efecto Casimir: Campo escalar real

En este capítulo revisaremos una de las distintas formas que existen en la literatura [31] para obtener la fuerza de Casimir en un espacio continuo y conmutativo. El marco teórico de la presente tesis es la teoría cuántica de campos, en la cual se cimienta el Modelo Estándar de partículas. Esta teoría fue desarrollada a mitades del siglo XX y es considerada, junto a la Relatividad General, como las teorías más exactas y que están detrás de los descubrimientos más importantes del siglo XXI, como el bosón de Higgs, las ondas gravitacionales o la reciente fotografía que dio la vuelta al mundo de un agujero negro [32]. Iniciaremos recordando la forma de la ecuación de Klein-Gordon, la cual se deriva de la densidad Lagrangiana del campo escalar al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange. También derivaremos su correspondiente densidad Hamiltoniana en términos de operadores de ascenso y descenso.

2.1. La fuerza del vacío

El efecto Casimir, propuesto por los físicos holandeses Hendrik B.G. Casimir y Dirk Polder en 1948, es un efecto que aparece cuando dos placas eléctricamente neutras y paralelas entre sí se encuentran a una cierta distancia (en el orden de $10^{-6}m$). Desde el punto de vista de la Electrodinámica clásica, las placas no interactúan entre sí, pero

experimentalmente sufren una atracción. Dicho fenómeno se asocia al estado de energía del punto cero del campo electromagnético, generando una fuerza de atracción entre las placas, la cual es proporcional a $\sim 1/d^4$, siendo d la distancia entre las placas.

2.2. Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon es una ecuación relativista proveniente de la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica ordinaria. Dicha ecuación fue propuesta inicialmente por Erwin Schrödinger pero fue descartada inmediatamente al observar que no tiene una densidad de probabilidad positiva definida.

Existen muchas maneras de deducir la ecuación de Klein-Gordon, se usará una que es rápida e intuitiva, basándose en la forma de los operadores de momento lineal y Hamiltoniano de la teoría de la mecánica cuántica ordinaria.

Una de las ideas de la mecánica cuántica no relativista es promover a operadores cantidades físicas como el momento lineal, el momento angular, la posición, entre otros. Dichos operadores son necesariamente auto-adjuntos (con valores propios reales) para poder tratarse como observables físicas. Por ejemplo, en la representación de coordenadas podemos escribir

$$\hat{p} = -i\nabla, \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

donde \hat{p} es el operador de momento lineal y $\hat{\mathcal{H}}$ el operador Hamiltoniano.

En la notación de Dirac, podemos ver la ecuación de Schrödinger como el operador Hamiltoniano aplicado a un estado cuántico $|\psi\rangle$, lo cual, visto desde el punto de vista del álgebra lineal, es un problema de autovalores que arroja los valores de la energía del estado

cuántico en cuestión. Para una partícula libre, explícitamente se tiene

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle = \frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (2.3)$$

siendo m la masa de la partícula. Si introducimos la forma de los operadores \hat{p} y $\hat{\mathcal{H}}$ dentro de la ecuación de energía relativista propuesta por Albert Einstein

$$E^2 = m^2 + p^2, \quad (2.4)$$

podemos derivar la ecuación diferencial parcial

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi - m^2\psi = 0, \quad (2.5)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden con forma de ecuación de onda con fuente. Si pensamos en que ahora el estado $|\psi\rangle$ es un campo real escalar ϕ , que depende de las posiciones y el tiempo, entonces podemos escribir la ecuación de Klein-Gordon como

$$(\square^2 + m^2)\phi(t, \vec{x}) = 0, \quad (2.6)$$

2.3. El Campo Escalar Real masivo

La ventaja de iniciar con el campo escalar real como primer alternativa para estudiar el efecto Casimir es que este campo es más simple y que algunas expresiones, como la energía de vacío, del campo electromagnético pueden reescribirse como las de un campo escalar multiplicado por un factor de dos, el cual está asociado a la polarización.

Los campos que estudiaremos deben ser cuánticos, pero primero se analizan de una manera clásica para posteriormente cuantizarlos. La densidad Lagrangiana asociada al campo de Klein-Gordon tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.7)$$

donde ϕ se interpreta como un campo clásico. El resultado de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0, \quad (2.8)$$

a la Ecu. (2.7) reproduce la ecuación de Klein-Gordon (2.6).

Ahora vamos a cuantizar esta teoría e interpretar las variables dinámicas como operadores que cumplen con ciertas relaciones de conmutación.

Como es sabido, en mecánica clásica la formulación Lagrangiana utilizada en teoría de campos está relacionada con la descripción hamiltoniana. Una de estas conexiones se logra al definir un momento conjugado $p \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ por cada variable dinámica q (coordenada generalizada).

En un sistema continuo la forma del Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \int [\pi(\vec{x})\dot{\phi}(\vec{x}) - \mathcal{L}]d^3x, \quad (2.9)$$

Donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana, $\pi(\vec{x})$ es la densidad de momento del campo y $\dot{\phi}(\vec{x})$ las derivadas respecto al tiempo (velocidades) del campo. Al utilizar el Lagrangiano del campo escalar (2.7) y la forma de su densidad de momento, podemos escribir el Hamiltoniano asociado como

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\vec{x}, t))^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(\vec{x}, t) \right], \quad (2.10)$$

Ahora, al promover a operadores el campo ϕ y su momento lineal π , en términos de los operadores de ascenso $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ y descenso $\hat{a}_{\vec{p}}$

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (2.11)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \right), \quad (2.12)$$

con las relaciones de conmutación

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.13)$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = 0, \quad (2.14)$$

podemos reescribir la densidad Hamiltoniana como

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3p \omega_p (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]), \quad (2.15)$$

siendo la relación de dispersión

$$\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (2.16)$$

Es importante mencionar que en la derivación previa, las relaciones de conmutación (2.13) y (2.14), junto con la condición de obtener una energía positiva definida, impone sobre los operadores \hat{a}_p y \hat{a}_p^\dagger las reglas de conmutación

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_{p'}^\dagger] = 0, \quad (2.17)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p - p'), \quad (2.18)$$

Notemos que el segundo término en Ecu. (2.15) es proporcional a $\delta(0)$, lo cual produce un infinito. Esto corresponde a la suma de todos los modos de energía del punto cero $\omega_p/2$, la cual es una cantidad que se espera que este presente. Afortunadamente dicho infinito no puede ser detectado experimentalmente, dado que únicamente las diferencias de energías respecto al estado base son las que se miden.

2.4. Energía del punto cero

En esta sección comenzaremos encontrando la forma del estado base del campo escalar real sujeto a las condiciones de frontera establecidas por las placas. Las condiciones del campo es que este se anula en las fronteras, es decir, donde están localizadas las placas. Si situamos una placa en $x = 0$ y la otra placa a una distancia a es decir cuando $x = a$ obtenemos las condiciones de Dirichlet

$$\phi(0, t) = \phi(a, t) = 0, \quad (2.19)$$

Se puede resolver la ecuación diferencial (2.6) mediante el método de separación de variables. Al introducir las condiciones de contorno se cuantiza el momento en la dirección perpendicular a las placas, obteniendo $p_n = \frac{\pi n}{a}$ con la solución del campo

$$\phi(x, \vec{x}_T, t) = \sin(n\pi x/a) e^{i\vec{p}_T \cdot \vec{x}_T} e^{i\omega_p t}, \quad (2.20)$$

donde x denota las posiciones paralelas a la dirección de la separación de las placas y \vec{x}_T indican las posiciones paralelas a las placas (transversales a la dirección de la separación de las placas) y el término $e^{i\vec{p}_T \cdot \vec{x}_T}$ expresa la invarianza traslacional en estas direcciones. Esto nos recuerda al problema de partícula en una caja que se estudia en mecánica cuántica ordinaria, ya que solo ciertos modos de la función de onda en ese caso se toman en cuenta. Ya obtenida la expresión (2.20) la sustituimos en la ecuación de Klein-Gordon y obtenemos

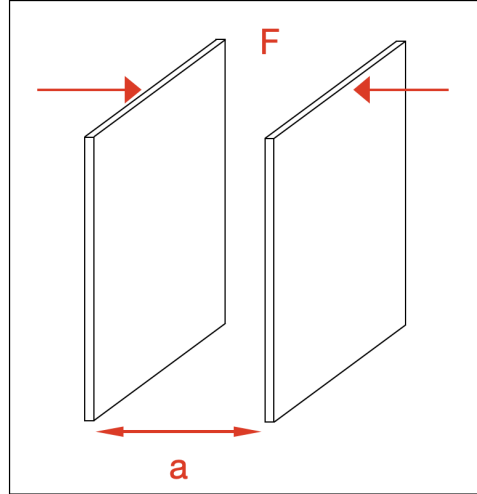


Figura 2.1: Efecto Casimir

una versión de los modos del campo podemos, que podemos escribir como

$$\omega_p = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \vec{p}_T^2 + m^2}, \quad (2.21)$$

El valor de expectación para el estado base no es más que el valor de expectación del Hamiltoniano (2.15) en el estado base

$$\mathcal{E}_o(a) = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle, \quad (2.22)$$

Para tener un panorama más amplio de la energía de Casimir, en varias dimensiones, podemos escribirla como la suma de todos los modos posibles del campo dentro de las placas

$$\mathcal{E}_o(a) = (L/2\pi)^{d-1} \int d^{d-1} \vec{p}_T \sum_n \frac{1}{2} \omega_p, \quad (2.23)$$

Es importante señalar que el factor de $(L/2\pi)^{d-1}$ hace referencia a la normalización del espacio fase y al área de las placas, por ejemplo para un análisis 4-dimensional (una temporal y tres espaciales, es decir $d = 3$), se piensa que las placas tienen una dimensión 2 y la cantidad $L^{(2)}$ representa su área.

Ya habiendo obtenido la forma de la energía del estado base del campo escalar real con las condiciones de frontera impuestas por las placas, vamos a resolver la integral mediante varias técnicas matemáticas de aproximación por series. Una de ellas es la continuación analítica y la función Zeta de Riemann. Utilizamos la siguiente ecuación

$$\int d^d p f(p) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int p^{d-1} f(p) dp, \quad (2.24)$$

para poder expresar (2.23) como

$$\mathcal{E} = (L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{2} (p_T^2)^{(d-3)/2} d(p_T^2) \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + p_T^2 + m^2}. \quad (2.25)$$

A continuación reescribimos dicha expresión de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & (L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{2} \left[\frac{p_T^2}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2} \right]^{(d-3)/2} \times \\ & d \left[\frac{p_T^2}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2} \right] \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{p_T^2}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 \right]^{d/2}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

En dicha expresión la integral puede ser resuelta utilizando

$$\int t^r (1+t)^s dt = B(1+r, -s-r-1), \quad (2.27)$$

Donde la función Beta y Gamma tienen la relación $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, con lo cual escribimos la energía como

$$\mathcal{E} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{(d+1)/2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{a^d} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{am}{\pi}\right)^2 + n^2 \right]^{d/2} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})}, \quad (2.28)$$

Considerando el caso no masivo con $m = 0$ podemos obtener la expresión para la

energía

$$\mathcal{E} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{(d+1)/2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{a^d} \sum_{n=1}^{\infty} n^d \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})}, \quad (2.29)$$

Se muestra en la gráfica 2.2 de $\mathcal{E}(d)$ los valores de la energía en función de la dimensión d

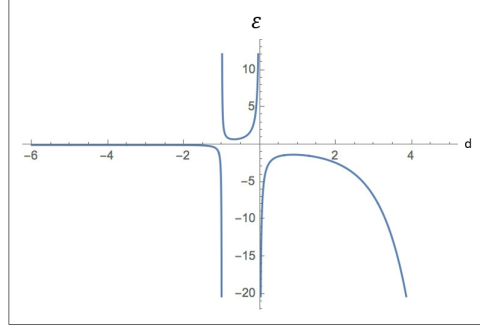


Figura 2.2: Energía en función de la dimensión d

Cabe señalar que para el valor $d = -1$, $\mathcal{E}(-1)$ tiende a $-\infty$ debido a la suma negativa sobre n

$$\mathcal{E}(-1) = -\frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}, \quad (2.30)$$

Y para el valor $d = 0$, $\mathcal{E}(0)$ tiende a ∞ por la definición de Γ evaluada en cero

$$\mathcal{E}(0) = -\sqrt{\frac{L}{8}} \frac{\Gamma(0)}{\pi^{3/2}}, \quad (2.31)$$

Finalmente utilizamos la forma de la función Zeta de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} n^d = \zeta(-d)$ con $Re(d) > 1$, para poder escribir la expresión final de la energía

$$\mathcal{E} = -\frac{L^{d-1}}{a^d} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) (4\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \zeta(1+d), \quad (2.32)$$

donde se ha utilizado la identidad reflectiva

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{(s-1)/2} \zeta(1-s), \quad (2.33)$$

La energía en (2.32) se encuentra bien definida para $d > 0$ donde las funciones Gamma y Zeta de Riemann toman valores bien conocidos.

2.5. Presión del vacío

Obtenemos la fuerza de Casimir por unidad de área entre las placas, que es siempre negativa (atractiva) mientras $d > 0$, mediante

$$-\frac{\partial(\mathcal{E}/L^{d-1})}{\partial a} = -\frac{d}{a^{d+1}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) (4\pi)^{-(d+1)/2} \zeta(d+1), \quad (2.34)$$

Existen varias formas intuitivas de imaginar qué es lo que realmente sucede con las placas y por qué, a pesar de ser placas sin ningún tipo de carga eléctrica o magnética, tienden a unirse. Una de ellas es que, aunque las energías del estado fundamental del campo son infinitas tanto dentro como fuera de las placas, la energía en el interior es menor porque ahí los modos del momento son discretos, mientras que en el exterior son continuos, por lo que contribuyen más modos a la energía de afuera. Debido a esto, hay un gradiente de energía de adentro hacia afuera, y los campos tenderían a disminuir las energías al empujar las placas. Así podemos concluir que la presión del vacío entre las placas es siempre negativa. Además, en el límite cuando $a \rightarrow \infty$, obtenemos la energía del campo en ausencia de placas. La energía por unidad de área en $d = 3$ (caso 3 + 1 dimensional) es

$$\mathcal{E} = -\frac{\pi^2}{1440} \frac{1}{a^3}, \quad (2.35)$$

mientras que la fuerza de Casimir [52] será

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{480} \frac{1}{a^4}, \quad (2.36)$$

El resultado anterior representa la fuerza de Casimir debido a un campo escalar. Para un campo electromagnético es necesario tomar en cuenta los dos estados de polarización del fotón, con lo cual basta con multiplicar el resultado anterior por un factor de 2, lo cual resultaría en

$$\mathcal{F}_\mathcal{E} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{1}{a^4}, \quad (2.37)$$

Ya que encontramos la forma de la energía de Casimir en un espacio-tiempo donde las coordenadas conmutan entre sí, estamos listos para ver qué es lo que sucede en un espacio-tiempo no conmutativo. Antes de esto, en el siguiente capítulo haremos un repaso sobre la cuantización del campo electromagnético.

Capítulo 3

Campo electromagnético

El objetivo de este capítulo es dar un breve repaso del oscilador armónico clásico, el oscilador armónico cuántico, el campo electromagnético clásico y su versión cuantizada.

3.1. Oscilador armónico

[]...*el venerado profesor de teoría de cuántica de campos Sidney Coleman dijo una vez: "La carrera de un joven físico teórico consiste en tratar el oscilador armónico en niveles de abstracción cada vez mayores..."*[]

Estudiaremos brevemente el oscilador armónico. Así como el campo escalar real puede ser tratado como una suma de osciladores armónicos, encontraremos que el campo electromagnético también puede ser estudiado de igual manera.

Comenzaremos con el estudio del oscilador armónico clásico. El Lagrangiano asociado puede escribirse como

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2 m}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (3.1)$$

Por lo tanto, mediante la transformada de Legendre, su Hamiltoniano adquiere la forma

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (3.2)$$

Donde m es la masa del oscilador, ω su frecuencia de oscilación y x y p observables canónicamente conjugados. Además, las ecuaciones de Hamilton podemos escribirlas como

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -m\omega^2 x, \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (3.4)$$

A su vez, al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad (3.5)$$

al Lagrangiano asociado (3.1), podemos encontrar la ecuación de movimiento para el oscilador armónico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.6)$$

Una solución del tipo $\alpha(t) = \alpha(0)e^{ix}$ es una cantidad compleja que puede ser observada por separado, para lo cual podemos escribir x y p como

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}[\alpha^*(t) + \alpha(t)], \quad p(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}[\alpha^*(t) - \alpha(t)], \quad (3.7)$$

Reescribiendo la solución de una manera más clara tenemos que

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{m\omega}x(t) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p(t)), \quad (3.8)$$

El estado del sistema se determina a partir de un punto en el espacio fase $(x(t), p(t))$, cada par ordenado de números puede escribirse como un número complejo. Decimos que α

es una representación compacta del estado del espacio fase del sistema y α^* existe para que x y p puedan formarse como cantidades observables reales e independientes. Invirtiendo las relaciones (3.7) podemos escribir el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \frac{\omega}{2}(\alpha^*(t)\alpha(t) + \alpha(t)\alpha^*(t)), \quad (3.9)$$

Ahora revisaremos el oscilador armónico cuántico. A diferencia del mundo clásico, donde los estados están dados por posiciones definidas en el espacio fase, en mecánica cuántica (no relativista) los estados del sistema están dados por un vector $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert. Los operadores en dicho espacio funcionan como transformaciones que mapean vectores de estado definidos en el espacio de Hilbert al mismo espacio de Hilbert. Las cantidades observables x y p son ahora operadores autoadjuntos (cumplen con la propiedad de ser hermitianos) que cumplen con el conmutador $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ teniendo cada uno su conjunto de estados propios con valores propios que representan la posición y el momento del estado en cuestión. También existe el ya muy conocido principio de incertidumbre de Heisenberg que, recordando el postulado de la medida [53], prohíbe estrictamente realizar mediciones simultáneas entre las coordenadas y los momentos. Esto significa que no se puede diagonalizar simultáneamente los dos operadores, tal relación de incertidumbre puede escribirse como

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

En esta teoría α y α^* no son reales, por lo que los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger no son hermitianos (dichos operadores son muy importantes en los primeros pasos de la teoría cuántica de campos) y su correspondiente relación de conmutación es

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.11)$$

La expresión clásica (ahora cuántica) del Hamiltoniano del oscilador armónico podemos

escribirla como

$$\mathcal{H} = \frac{\omega}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3.12)$$

Los estados definidos de energía son autoestados $|n\rangle$ solo de \mathcal{H} , de donde se obtiene

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.13)$$

Donde $n \in \{\mathbb{Z} : n \geq 0\}$, esto nos lleva a afirmar que el estado más bajo de energía es

$$E_0 = \frac{\omega}{2}, \quad (3.14)$$

3.2. Campo electromagnético clásico

Ahora vamos a estudiar el campo electromagnético clásico y posteriormente el campo electromagnético en su versión cuántica. Es bien conocido que la piedra fundamental de esta teoría son las ecuaciones de Maxwell, las cuales permiten tener una descripción completa del electromagnetismo. Las leyes de Gauss por un lado describen la configuración espacial del campo electromagnético, que en ausencia de fuentes pueden escribirse como

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.16)$$

La evolución temporal del campo magnético está dada por la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.17)$$

Mientras que la ley de Ampere en ausencia de fuentes

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.18)$$

nos brinda la evolución temporal del campo eléctrico. Lo último que necesitamos para este análisis es la ecuación de onda del campo eléctrico en el vacío, la cual es fácil de derivar con la combinación adecuada de las ecuaciones anteriores

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad (3.19)$$

La relación de dispersión en este caso está dada por

$$\omega(\vec{k}) = k, \quad (3.20)$$

Al momento de elegir un solo modo de k la ecuación de onda se puede separar en una función espacial $\vec{E}_o(\vec{r})$ y otra temporal $\alpha_k(t)$. Al introducir el simple modo en la ecuación de onda, es necesario introducir una solución similar a la del oscilador armónico

$$\alpha_{\vec{k}}(t) = \alpha_{\vec{k}}(0)e^{-ikt}, \quad (3.21)$$

de donde se sigue que \vec{E}_0 satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0, \quad (3.22)$$

En general las soluciones son complejas, por convención podemos escribir el campo eléctrico como una combinación de su parte temporal $\alpha_{\vec{k}}(t)$ y su contraparte espacial \vec{E}_0

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha_{\vec{k}}(t)\vec{E}_0(\vec{r}) + \alpha_{\vec{k}}^*(t)\vec{E}_0^*(\vec{r}), \quad (3.23)$$

Esta representación es análoga a como, en el oscilador armónico, hemos escogido a x como la parte real de α .

Ahora necesitamos aplicar una transformada de Fourier espacial del campo eléctrico, lo cuál es útil para entender como α se relaciona con su contraparte del oscilador armónico

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r, \quad (3.24)$$

Es bien conocido que la transformada de Fourier de un rotacional o divergencia de una función $f(x)$ es simplemente $i\vec{k} \times f(k)$ y $i\vec{k} \cdot f(k)$, respectivamente. Por lo tanto, la transformada de Fourier de la ley de Ampere podemos escribirla como

$$i\vec{k} \times \tilde{\vec{B}}(k) = \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}, \quad (3.25)$$

Al tomar en cuenta la transformada de Fourier del campo eléctrico en Ecu. (3.23) y combinándola con la ecuación anterior podemos obtener

$$\alpha_{\vec{k}}(t) \tilde{\vec{E}}_o(k) = \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, t) + i\vec{e}_k \times \tilde{\vec{B}}(\vec{k}, t). \quad (3.26)$$

De esta manera observamos que el campo eléctrico toma el rol de x y el campo magnético toma el rol de p del oscilador armónico.

Ahora es necesario obtener una densidad Hamiltoniana, para lo cual obtenemos la forma del campo magnético a partir de la ecuación (3.23). Introduciéndola en la ley de Faraday obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\omega(\vec{k})} (\alpha_{\vec{k}}^*(t) \nabla \times \vec{E}_0^*(\vec{r}) - \alpha_{\vec{k}}(t) \nabla \times \vec{E}_0(\vec{r})), \quad (3.27)$$

La densidad Hamiltoniana del campo electromagnético tiene la forma de

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (3.28)$$

Así, la densidad Hamiltoniana integrada en todo el espacio será

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} d^3r, \quad (3.29)$$

Escogemos la forma de E_0 teniendo la normalización utilizada en [35]

$$\int |\vec{E}_0(\vec{r})|^2 d^3r = 2\pi k, \quad (3.30)$$

Además, utilizando las ecuaciones (3.23) y (3.27) e integrando en d^3x , obtenemos la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = \frac{\omega(\vec{k})}{2} (\alpha_{\vec{k}}^* \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^*), \quad (3.31)$$

por lo cuál nos damos cuenta que tiene la misma forma que el Hamiltoniano del oscilador armónico simple.

3.3. Campo electromagnético cuántico y estado base

Recordemos que en la cuantización canónica se utilizan vectores $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert y la conversión de observables en operadores hermitianos. De esta manera, al igual que con el oscilador armónico, las variables $\alpha_{\vec{k}}$ y $\alpha_{\vec{k}}^*$ son promovidas a operadores $\hat{\alpha}_{\vec{k}}$ y $\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger$.

Así el Hamiltoniano del campo electromagnético cuántico podemos escribirlo como

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = \omega_k \left(\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.32)$$

Los operadores $\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger$ y $\hat{\alpha}_{\vec{k}}$ juegan el mismo rol que los operadores de creación y aniquilación $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\vec{k}}$ justo como lo hacen en el oscilador armónico, satisfaciendo la relación de conmutación

$$[\hat{\alpha}_{\vec{k}}, \hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger] = 1, \quad (3.33)$$

Como \vec{E} y \vec{B} dependen de $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$, los operadores de campo $\hat{E}(\vec{r})$ y $\hat{B}(\vec{r})$ cumplen que

$$[\hat{E}_i(\vec{r}), \hat{B}_j(\vec{r}')] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.34)$$

Es decir, existe una relación de incertidumbre entre dichas mediciones.

Ahora vamos a considerar diferentes modos para \vec{k} , cada uno significa un modo diferente del oscilador armónico asociado en el que se pueden agregar cualquier número de fotones $n_{\vec{k}}$. La densidad Hamiltoniana será la suma de los operadores de un modo individual. Utilizamos adicionalmente una función de un modo espacial

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \epsilon e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{e}_{\vec{k}}, \quad (3.35)$$

La condición de normalización funciona solamente en un volumen finito V , entonces se tendrá que el factor ϵ vendrá dado por $\epsilon = \sqrt{\frac{2\pi k}{V}}$. Además, existe la condición $\vec{k} \cdot \vec{e}_{\vec{k}} = 0$, debida a la ley de Gauss en ausencia de fuentes. Esto implica dos soluciones linealmente independientes que satisfacen

$$\vec{e}_{(\vec{k},i)} \cdot \vec{e}_{(\vec{k},j)} = \delta_{ij}, \quad (3.36)$$

Estos vectores unitarios describen las dos polarizaciones independientes de la luz. De esta manera los campos eléctrico y magnético dados por los modos (\vec{k}, j) son

$$\vec{E}_{(\vec{k},j)}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{L^3}}(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{(\vec{k},j)}^\dagger + e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{(\vec{k},j)})\vec{e}_{(\vec{k},j)}, \quad (3.37)$$

$$\vec{B}_{(\vec{k},j)}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{L^3}}(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{(\vec{k},j)}^\dagger + e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{(\vec{k},j)})\vec{k} \times \vec{e}_{(\vec{k},j)}, \quad (3.38)$$

Usando estas ecuaciones junto con la condición de normalización, podemos expresar el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k},j} \omega_k \left(a_{(\vec{k},j)}^\dagger a_{(\vec{k},j)} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.39)$$

Por consiguiente el estado base vendrá dado por

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \sum_{\vec{k},j} \frac{\omega_k}{2}, \quad (3.40)$$

Notemos que la suma corre sobre todos los modos descritos por el vector de onda \vec{k} y a diferencia del caso del campo escalar también corre sobre las dos polarizaciones $j = 1, 2$. Este es un resultado bien conocido, el cual muestra que la energía del estado base del campo electromagnético es el doble que la correspondiente en un campo escalar.

Capítulo 4

No conmutatividad

Es importante recordar que la no conmutatividad entre algunos observables es una de las piedras angulares que definen la mecánica cuántica ordinaria. Dicha no conmutatividad se lleva a cabo entre observables canónicamente conjugados. La relación de incertidumbre descrita por Heisenberg es una prueba de ello, ya que impide que el producto entre las desviaciones estándar de estos dos observables sea menor que cierta cantidad, por ejemplo para las posiciones y sus momentos lineales ($\hbar/2$).

La geometría no conmutativa se basa en el concepto de que puede existir una longitud fundamental en el tejido del espacio-tiempo. Dicha longitud fundamental utiliza el mismo concepto de la no conmutatividad entre observables, solo que a diferencia de la Mecánica Cuántica, dicha unidad fundamental aparece cuando imponemos que la conmutación entre coordenadas tenga una solución no trivial, es decir, no conmutan

$$[x_i, x_j] = i\Theta_{ij}, \tag{4.1}$$

donde a Θ_{ij} se le asocia con una longitud fundamental al cuadrado.

La idea es útil para describir correcciones que estén dentro de las barras de error de los resultados del experimento. Al estudiar el Efecto Casimir, dichas correcciones pueden aplicarse también considerando términos de autointeracción del propagador o introdu-

ciendo dimensiones extras. Por ahora, solo nos concentraremos en estudiar la versión no conmutativa.

4.1. No conmutatividad en el espacio-tiempo

Existen varias formulaciones de la teoría donde las coordenadas no conmutan. Una de ellas, y la cual será utilizada en este trabajo, es el uso de valores esperados de operadores entre estados coherentes.

Primero imponemos que el conmutador entre dos coordenadas espacio temporales está dado de la siguiente manera

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde $\Theta^{\mu\nu}$ debe ser un tensor antisimétrico. En una expresión D-dimensional, donde $\mu = 1, 2, \dots, D$ y x^μ cumple las relaciones de conmutación en Ecu. (4.2), $\Theta^{\mu\nu}$ puede ser reescrito, mediante una transformación, en una forma diagonal

$$\hat{\Theta}^{\mu\nu} = \text{diag}(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_{D/2}), \quad (4.3)$$

De todas las formas de $\Theta^{\mu\nu}$ solo se tomarán en cuenta cuatro componentes de la misma para el cálculo que continua

$$\hat{\Theta}^{\mu\nu} = \text{diag}(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2), \quad (4.4)$$

donde

$$\hat{\Theta}_i = \Theta_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

Ahora bien, para tener una no conmutatividad completa, se necesita trabajar en un

espacio-tiempo con un número par de dimensiones. Entonces las coordenadas $D = 2d$ pueden ser representadas por

$$\hat{x}^\mu = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{2d-1}, \hat{x}^{2d}), \quad (4.6)$$

$$\hat{x}^\mu = (\vec{\hat{x}}_1, \vec{\hat{x}}_2, \dots, \vec{\hat{x}}_d), \quad (4.7)$$

Para nuestro objetivo $D = 4$ obtenemos la expresión de las coordenadas

$$\hat{x}^\mu = (\vec{\hat{x}}_1, \vec{\hat{x}}_2), \quad (4.8)$$

Donde $\vec{\hat{x}}_1$ y $\vec{\hat{x}}_2$ generan cada uno un plano no conmutativo con coordenadas $(\hat{y}_{1i}$ y $\hat{y}_{2i})$

$$\vec{\hat{x}}_i = (\hat{y}_{1i}, \hat{y}_{2i}), \quad (4.9)$$

Cada plano no conmutativo tiene su correspondiente conmutador

$$[\hat{y}_{11}, \hat{y}_{21}] = i\Theta_1, \quad (4.10)$$

$$[\hat{y}_{12}, \hat{y}_{22}] = i\Theta_2, \quad (4.11)$$

La no conmutación implica que no existen estados propios comunes entre \hat{y}_{1i} y \hat{y}_{2i} . Al no poder trabajar en la representación de dichos operadores, se construyen operadores de ascenso y descenso para cada i-plano no conmutativo

$$\hat{a}_i^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y}_{1i} - i\hat{y}_{2i}), \quad (4.12)$$

$$\hat{a}_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y}_{1i} + i\hat{y}_{2i}), \quad (4.13)$$

Por lo tanto podemos decir que existe una representación no conmutativa de dichos operadores dada de la siguiente forma

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \Theta_i. \quad (4.14)$$

Los estados coherentes están definidos por los eigenestados de dichos operadores

$$\hat{a}_i |\alpha\rangle = \alpha_i |\alpha\rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle \alpha | \hat{a}_i^\dagger = \langle \alpha_i | \alpha^*, \quad (4.16)$$

Donde $|\alpha\rangle$ es un estado del sistema dado, α su autovalor y α^* su conjugado. La forma explícita de los estados coherentes normalizados es

$$|\alpha\rangle = \prod_i \exp \left[\frac{1}{\theta_i} (\bar{\alpha}_i \hat{a}_i - \alpha_i \hat{a}_i^\dagger) \right] |0\rangle, \quad (4.17)$$

Las coordenadas conmutativas usuales se asocian con las no conmutativas como sus valores medios sobre estados coherentes

$$\langle \alpha | \hat{y}_{1i} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \frac{\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i}{\sqrt{2}} | \alpha \rangle, \quad (4.18)$$

$$\langle \alpha | \hat{y}_{1i} | \alpha \rangle = \frac{\alpha^* + \alpha}{\sqrt{2}}, \quad (4.19)$$

$$\langle \alpha | \hat{y}_{1i} | \alpha \rangle = \text{Re}(\alpha) \equiv \vec{x}_1, \quad (4.20)$$

$$\langle \alpha | \hat{y}_{2i} | \alpha \rangle = \text{Im}(\alpha) \equiv \vec{x}_2, \quad (4.21)$$

Decimos que las coordenadas $x^\mu \doteq (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ es la posición media de una partícula en el

plano no conmutativo. Obtenemos la versión no conmutativa de onda plana $\exp(i\vec{p} \cdot \vec{q})$ calculando el valor medio de

$$\langle \alpha | \exp[i \sum_{j=1}^2 (\vec{p}_j \cdot \vec{x}_j)] | \alpha \rangle, \quad (4.22)$$

Para $d = 2$ tendremos

$$\langle \alpha | \exp[i(\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1) + i(\vec{p}_2 \cdot \vec{x}_2)] | \alpha \rangle, \quad (4.23)$$

donde los vectores de momento lineal están definidos como

$$\vec{p}_1 = (p_{11}, p_{12}), \quad (4.24)$$

$$\vec{p}_2 = (p_{21}, p_{22}), \quad (4.25)$$

A partir de (4.9), (4.23), (4.24) y (4.25) se tendrá que

$$\langle \alpha | \exp[i(p_{11}y_{11} + p_{12}y_{21} + p_{21}y_{12} + p_{22}y_{22})] | \alpha \rangle. \quad (4.26)$$

Además, de (4.12) y (4.13) obtenemos

$$\hat{y}_{1i} = \frac{\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad (4.27)$$

$$\hat{y}_{2i} = \frac{\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{2}i}, \quad (4.28)$$

Con lo anterior podemos escribir (4.23) como

$$\langle \alpha | \exp \left[i \left(\frac{p_{11} - ip_{12}}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_1 + i \left(\frac{p_{11} + ip_{12}}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_1^\dagger + i \left(\frac{p_{21} - ip_{22}}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_2 + i \left(\frac{p_{21} + ip_{22}}{\sqrt{2}} \right) \hat{a}_2^\dagger \right] | \alpha \rangle \quad (4.29)$$

A partir de definir

$$p_{1+} \equiv \frac{p_{11} + ip_{12}}{\sqrt{2}}, \quad (4.30)$$

$$p_{1-} \equiv \frac{p_{11} - ip_{12}}{\sqrt{2}}, \quad (4.31)$$

$$p_{2+} \equiv \frac{p_{21} + ip_{22}}{\sqrt{2}}, \quad (4.32)$$

$$p_{2-} \equiv \frac{p_{21} - ip_{22}}{\sqrt{2}}, \quad (4.33)$$

Obtenemos la siguiente forma

$$\langle \alpha | \exp \left[i [p_{1-} \hat{a}_1 + p_{1+} \hat{a}_1^\dagger + p_{2-} \hat{a}_2 + p_{2+} \hat{a}_2^\dagger] \right] | \alpha \rangle, \quad (4.34)$$

La cual podemos escribir como

$$\langle \alpha | \exp \left[i \sum_{j=1}^2 (p_{j-} \hat{a}_j + p_{j+} \hat{a}_j^\dagger) \right] | \alpha \rangle, \quad (4.35)$$

y haciendo uso de la formula de Backer-Hausdorff

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad (4.36)$$

donde A y B son conmutadores

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \quad (4.37)$$

obtenemos la forma de onda plana

$$\langle \alpha | \exp \left\{ i \sum_{i=1}^d (\vec{p} \cdot \vec{x}) \right\} | \alpha \rangle = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^d \left[\frac{\Theta_i}{4} (p_{1i}^2 + p_{2i}^2) + i(\vec{p} \cdot \vec{x})_i \right] \right\}, \quad (4.38)$$

Dicha expresión para $d = 2$ podemos escribirla como

$$\langle \alpha | \exp \left\{ i \sum_{i=1}^d (\vec{p} \cdot \vec{x}) \right\} | \alpha \rangle = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^d \frac{\Theta}{4} [(p_{11}^2 + p_{21}^2) + (p_{12}^2 + p_{22}^2)] \right\} \exp \{-i(\vec{p} \cdot \vec{x})_1 - i(\vec{p} \cdot \vec{x})_2\}, \quad (4.39)$$

Finalmente, haciendo uso de la definición del producto punto en un espacio no conmutativo y de los momentos conjugados p_{ij} , con $i, j = 1, 2$, obtenemos la forma de la onda plana que se utilizará para el cálculo que prosigue

$$\langle \alpha | \exp \left\{ i \sum_{i=1}^d (\vec{p} \cdot \vec{x}) \right\} | \alpha \rangle = \exp \left\{ \frac{\Theta}{4} (\omega^2 + p^2) \right\} \exp \{ip \cdot x\}, \quad (4.40)$$

Notemos que esto nos da una pista de cómo el término de la no conmutatividad Θ_i se introduce en una teoría ya conocida y respeta todas las reglas de la misma. Es claro ver que cuando el valor de Θ tiende a cero, recuperamos la forma de la onda plana donde las coordenadas conmutan. Nos damos cuenta que el factor que multiplica a Θ_i son los momentos canónicamente conjugados. Dicho factor genera factores de amortiguamiento proporcionales a Θ_i .

Con esta idea en mente podemos expresar el campo escalar real en un espacio-tiempo de Minkowski no conmutativo cuadrimensional en términos de los modos del campo como

$$u_{NC}(t, \vec{x}) = \frac{e^{-\frac{\Theta}{4}(\omega^2 + p^2)} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\omega t}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}}, \quad (4.41)$$

donde $\omega = -p_0$, $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ y $p = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$. Notemos el hecho de que el factor de Θ_i es positivo y proporcional a la medida de p^2 .

De esta manera el operador de campo en su forma no conmutativa toma la forma

$$\hat{\phi}(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} \left[\hat{b}_{\vec{p}} e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{-ip \cdot x} \right], \quad (4.42)$$

Para obtener la evolución temporal de $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ hacemos uso de la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = [\phi, H], \quad (4.43)$$

Dicho cálculo produce

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \left[\phi(\vec{x}, t), \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \left\{ \frac{1}{2} \phi^2(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\vec{x}', t))^2 \right\} \right], \quad (4.44)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' (i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \pi(\vec{x}', t)), \quad (4.45)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = i\pi(\vec{x}, t), \quad (4.46)$$

A partir de lo anterior y retomando la Ecu. (2.12), la densidad de momentos resulta en

$$\hat{\pi}(x, t) = \int \frac{d^3p(-i\omega)}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} \left[\hat{b}_{\vec{p}} e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{ip \cdot x} \right], \quad (4.47)$$

Para obtener la densidad Hamiltoniana debemos introducir estas nuevas definiciones del campo (4.42) y su momento conjugado (4.47) en la densidad Hamiltoniana (2.10)

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\hat{\pi}^2(\vec{x}, t) + (\nabla \phi(\vec{x}, t))^2), \quad (4.48)$$

para lo cual requerimos las expresiones de $\hat{\pi}^2(\vec{x}, t)$ y $\nabla \phi(\vec{x}, t)^2$, las cuales se calculan directamente mediante

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^2(x, t) = & \int \frac{d^3 p(-i\omega)}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left[\hat{b}_{\vec{p}} e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{ip \cdot x} \right] \times \\ & \int \frac{d^3 p'(-i\omega')}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega'}} \left[\hat{b}_{\vec{p}'} e^{-(\Theta/4)(\omega'^2+p'^2)} e^{-ip' \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega'^2+p'^2)} e^{ip' \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

A su vez, mediante

$$\nabla \hat{\phi}(x, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ip}{\sqrt{2\omega}} \left[-\hat{b}_{\vec{p}} e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{-ip \cdot x} \right], \quad (4.50)$$

obtenemos la forma de $(\nabla \hat{\phi})^2$ como

$$\begin{aligned} (\nabla \hat{\phi}(x, t))^2 = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ip}{\sqrt{2\omega}} \left[-\hat{b}_{\vec{p}} e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega^2+p^2)} e^{-ip \cdot x} \right] \times \\ & \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{ip'}{\sqrt{2\omega'}} \left[-\hat{b}_{\vec{p}'} e^{-(\Theta/4)(\omega'^2+p'^2)} e^{ip' \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger e^{-(\Theta/4)(\omega'^2+p'^2)} e^{-ip' \cdot x} \right], \end{aligned} \quad (4.51)$$

Realizando los cálculos correspondientes podemos obtener que la densidad Hamiltoniana resulta en

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p \left[\hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} e^{2i\omega_p t} - \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger e^{-2i\omega_p t} \right] e^{-\frac{\Theta}{2}(\omega_p^2+p^2)} \\ & + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p \left[\hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-2i\omega_p t} + \hat{b}_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger e^{2i\omega_p t} \right] e^{-\frac{\Theta}{2}(\omega_p^2+p^2)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Llevando a cabo algunas simplificaciones, obtenemos finalmente la forma de la densidad Hamiltoniana

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p e^{-\Theta \omega^2} \left(\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.53)$$

Donde, si Θ tiende a 0 obtenemos directamente la forma ya bien conocida del Hamiltoniano del campo escalar real sin masa. De esta manera la energía del punto cero, en el caso 3 + 1-dimensional, será

$$\langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2} e^{-\Theta\omega^2} \omega(p), \quad (4.54)$$

Como vemos los efectos de “volumen” debidos a un espacio-tiempo no conmutativo se ven reflejados en la energía por medio de un factor exponencial que incluye el parámetro Θ . Ocuparemos dicha expresión para calcular la fuerza de Casimir en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Campo electromagnético no conmutativo: Efecto Casimir

Ahora vamos a revisar el efecto Casimir en un espacio-tiempo no conmutativo, utilizando el campo electromagnético en su versión no conmutativa.

5.1. Energía del punto cero

5.1.1. Caso no masivo

Partimos de la ecuación (4.54) que es la forma de la energía del punto cero en su versión no conmutativa. Al asumir las condiciones de Dirichlet, implica que el momento a lo largo de x (perpendicular a las placas) está cuantizado como

$$p_x = \frac{\pi n}{L}, \quad (5.1)$$

Al introducir la forma de la frecuencia del campo electromagnético como campo escalar sin masa obtenemos

$$\omega_n(k) = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + k^2}, \quad (5.2)$$

donde $\vec{k} = (p_y, p_z)$ es paralelo a las placas tomando valores continuos y $\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2$. Podemos reescribir la densidad de energía de (4.54), y multiplicarla por dos (factor de polarización), para obtener

$$\mathcal{E}_{0_{in}} = \frac{A}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk e^{-\Theta \omega_n^2(k)} \omega_n(k), \quad (5.3)$$

Si cambiamos la variable de integración k a ω , la densidad de energía resulta en

$$\mathcal{E}_{0_{in}} = \frac{A}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi n}{L}}^{\infty} d\omega e^{-\Theta \omega_n^2(k)} \omega^2, \quad (5.4)$$

La energía fuera de las placas se obtiene observando que el momento a lo largo de x toma valores continuos

$$\mathcal{E}_{0_{out}} = \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} dn \int_{\frac{\pi n}{L}}^{\infty} d\omega e^{-\Theta \omega_n^2(k)} \omega^2, \quad (5.5)$$

Después de integrar y tomando en cuenta la longitud fundamental $\Theta = l^2$ la fuerza neta se obtiene mediante

$$\mathcal{F}_{net} = \mathcal{F}_{in} - \mathcal{F}_{out} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{in}}{\partial L} + \frac{\partial \mathcal{E}_{out}}{\partial L}, \quad (5.6)$$

Es decir

$$\mathcal{F}_{net} = -\frac{A\pi^2}{2L^4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-\frac{l^2}{L^2} \pi^2 n^2} - \int_0^{\infty} dn n^3 e^{-\frac{l^2}{L^2} \pi^2 n^2} \right]. \quad (5.7)$$

Podemos continuar haciendo uso de la fórmula de Euler-Maclaurin

$$\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N dn f(n) = \frac{f(0) - f(N)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{2k-1}(N) - f^{2k-1}(0)], \quad (5.8)$$

donde B_{2k} son los números de Bernoulli y usando el hecho de que

$$f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} f^{2k-1}(N) = 0, \quad (5.9)$$

Dentro de la formula de Euler-Maclaurin únicamente los términos que provienen de $f^{2k-1}(0)$ contarán. Al realizar la expansión solo algunas derivadas serán no nulas al evaluarlas en cero; en particular $k = 2$ y $k = 3$ producen los términos de orden cero y cuadráticos en l . Una vez hecho esto, la expresión para la fuerza de Casimir resulta en

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{F}_{net}}{A}, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \left[1 + \frac{10\pi^2}{21} \left(\frac{l}{L} \right)^2 + \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{l}{L} \right)^4 + \dots \right], \quad (5.11)$$

El factor \mathcal{F}_0 representa el resultado original de la Fuerza de Casimir en Ecu. (2.37) y el corchete representa la modificación, en términos de potencias de l/L , debida al comportamiento no conmutativo del espacio-tiempo. Para una separación de placas $L \sim 10l$ las correcciones de volumen son del orden del 5% y decrece rápidamente a cero para valores grandes de L . De acuerdo a recientes mediciones experimentales [34], en el rango de 0.1 a 0.9 μm de separación entre las placas, la precisión en la medición de la fuerza de Casimir es del 1%. Tomando una separación de 0.9 μm entre las placas y el término cuadrático en la Ecu. (5.11) como término dominante, podemos establecer una cota superior para la longitud mínima l de

$$l \leq 10^{-8} m, \quad (5.12)$$

Por supuesto que este valor se encuentra muy por encima de los valores a los cuales se espera que se manifiesten los efectos no conmutativos del espacio tiempo. Vale la pena mencionar que el valor al cual se especula que puede tomar relevancia es del orden de 10^{-35}m , es decir, la longitud de Planck; sin embargo, hay que recordar que hay que mantener una actitud abierta respecto a este valor. Diferentes cotas, tentativamente mejores, pueden intentar obtenerse mediante el estudio del efecto Casimir en medios materiales, tales como dieléctricos, o bien, en diferentes geometrías, tales como la esfera o el caso cilíndrico.

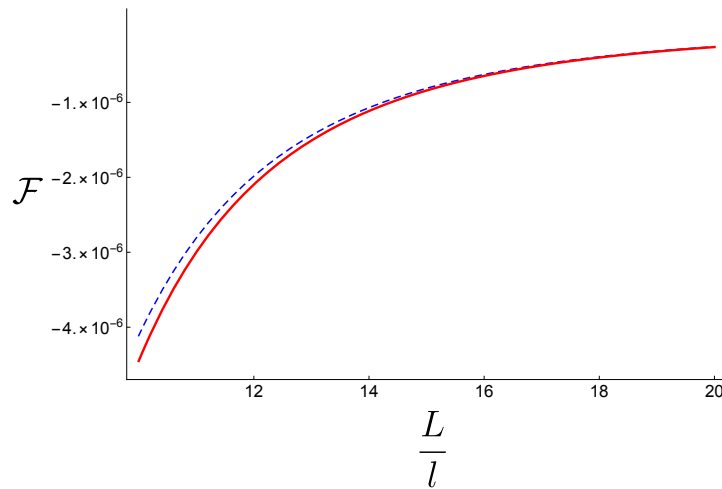


Figura 5.1: La línea punteada azul representa el comportamiento de la fuerza de Casimir en el caso estándar (conmutativo), mientras que la línea continua roja representa el caso no conmutativo en unidades de Θ^{-4} en función de la separación L entre las placas (en unidades $l = \sqrt{\Theta}$).

En la Fig. 5.1.1 se muestra la gráfica de la fuerza de Casimir para el caso conmutativo (línea azul punteada) y el caso no conmutativo (línea roja continua). Tal como se observa de la expresión (5.11) en el caso no conmutativo se tiene un incremento (en valor absoluto), respecto al caso estándar, de la fuerza de Casimir. Las correcciones debidas al comportamiento no conmutativo no modifican el signo de la fuerza de Casimir, siendo esta siempre repulsiva.

De la Fig. 5.1.1 podemos concluir que la diferencia porcentual entre el valor estándar (espacio-tiempo conmutativo) y el obtenido para un espacio-tiempo no conmutativo rápi-

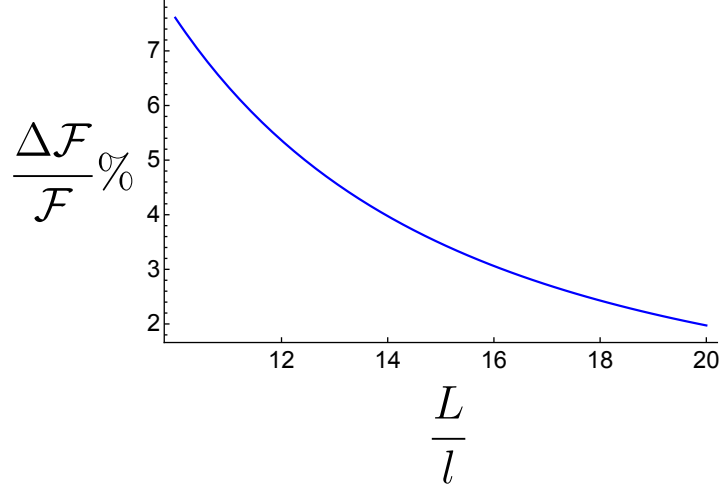


Figura 5.2: Diferencia porcentual entre las fuerzas de Casimir en función de L/l incluyendo solo los efectos de volumen.

damente decae a cero. Para un valor de $L = 20l$ vemos que dicho porcentaje ronda el 2% y para $L = 40l$ decae al 0.5%, aproximadamente. Cabe mencionar que las longitudes en las cuales se trabaja el efecto Casimir en placas paralelas es del orden de micras (10^{-6}m), lo cual para este caso particular ($L = 20l$) da un valor de l bastante alejado del que se espera (tentativamente).

5.1.2. Caso masivo

Para abordar este caso partimos de la Ecu.(4.54) y calculamos, para mayor simplicidad, la energía de Casimir, iniciando con un campo escalar. La evaluación de dicha expresión es complicada por el factor exponencial que aparece dentro del integrando; sin embargo, un tratamiento perturbativo puede llevarse a cabo. Para ello basaremos el procedimiento en una regularización dimensional, tal como el empleado en Ecu. (2.25). En esta ocasión la energía de Casimir estará dada por

$$\mathcal{E} = (L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{2} (k_T^2)^{(d-3)/2} e^{-\Theta \omega_n^2(k)} d(k_T^2) \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \vec{k}_T^2 + m^2}, \quad (5.13)$$

donde a corresponde a la separación de las placas y L^{d-1} al área de las placas. Considerando que $\Theta \ll 1$, expandimos a primer orden el término exponencial para obtener

$$\Delta\mathcal{E} = -\Theta(L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{2} (k_T^2)^{(d-3)/2} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + k_T^2 + m^2 \right] d(k_T^2) \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + k_T^2 + m^2} + \dots, \quad (5.14)$$

donde $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ y \mathcal{E}_0 corresponde a la energía de Casimir en el caso estándar y que proviene del 1 en la expansión de la exponencial. Reescribimos $\Delta\mathcal{E}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= -\Theta(L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{2} (k_T^2)^{(d-3)/2} \left[k_T^2 \right] d(k_T^2) \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + k_T^2 + m^2}, \\ &\quad -\Theta(L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{2} (k_T^2)^{(d-3)/2} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right] d(k_T^2) \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + k_T^2 + m^2}, \end{aligned}$$

Haciendo uso del cambio de variable

$$x = \frac{k^2}{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2}, \quad dx = \frac{dk^2}{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2}, \quad (5.15)$$

podemos obtener

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= -\Theta(L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{\frac{d+2}{2}} \left(\int_0^{\infty} x^{\frac{d-1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \right), \\ &\quad -\Theta(L/2\pi)^{d-1} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{\frac{d+2}{2}} \left(\int_0^{\infty} x^{\frac{d-3}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \right). \end{aligned}$$

Las integrales pueden llevarse a cabo de manera inmediata utilizando la definición de la función Beta en Ecu. (2.27). La sumatoria infinita puede ser reescrita en términos de funciones de Bessel modificadas mediante la definición de las funciones Zeta generalizadas (Extended Epstein) como [49]

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} [an^2 + q]^{-s} = q^{-s} + \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} q^{1/2-s} + \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} a^{-1/4-s/2} q^{1/4-s/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n \sqrt{\frac{q}{a}}), \quad (5.16)$$

Dado lo anterior, la expresión final para $\Delta\mathcal{E}$ resulta en

$$\Delta\mathcal{E} = -\Theta \frac{L^{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \frac{1}{8} \left[\frac{-\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(-1/2)} \right] \times \quad (5.17)$$

$$\left[\frac{a}{\sqrt{\pi}} m^{d+3} \frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right) \zeta(d+4)}{\zeta(-(d+3))} \pi^{-\frac{2d+7}{2}} + 4\pi^{-\frac{d+2}{2}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d+1}{2}} m^{\frac{d+3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{d+3}{2}} K_{-\frac{d+3}{2}}(2mna) \right],$$

donde hemos ocupado que

$$\frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{\Gamma(-\frac{d+2}{2})} = -\frac{d}{2} - 1, \quad (5.18)$$

junto con la propiedad reflectiva en Ecu. (2.33) para realizar simplificaciones y tener bien definidas las funciones Gamma. Asimismo, se omitieron términos independientes de a que no producen contribuciones a la fuerza de Casimir, que es la cantidad que se mide experimentalmente. Para finalizar, es necesario considerar la energía que se encuentra fuera de las placas. Considerando dos placas auxiliares, una en $z = L_2$ (del lado derecho de las placas) y otra en $z = L_1 - a$ (del lado izquierdo de las placas), tendremos que la energía total del sistema será

$$\Delta\mathcal{E}_T(a) = \Delta\mathcal{E}(a) + \Delta\mathcal{E}(L_1 - a) + \Delta\mathcal{E}(L_2), \quad (5.19)$$

El último término no contribuye al ser constante. Y al tomar el límite $L_1 \rightarrow -\infty$, tendremos que la energía final regularizada será

$$\Delta\mathcal{E}_T = -\frac{3}{2}\Theta \frac{L^{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\pi^{-3/2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \times \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d+1}{2}} m^{\frac{d+3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{d+3}{2}} K_{-\frac{d+3}{2}}(2mna) \right]. \quad (5.20)$$

Dado el tratamiento perturbativo que hemos empleado, se deriva de inmediato que en el límite $\Theta \rightarrow 0$, se recupera el caso estándar para la energía de Casimir, dado que $\Delta\mathcal{E}_T = 0$, y lo cual implica $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. El caso 3+1 dimensional está bien definido y se obtiene directamente de la expresión (5.20) haciendo $d = 3$. El caso $m \ll 1$ puede empatarse con el resultado obtenido para $m = 0$, para ello se expande la función modificada de Bessel

$$\begin{aligned} m^{\frac{d+3}{2}} n^{-\frac{d+3}{2}} K_{-\frac{d+3}{2}}(2mna) &\approx -\frac{a^2 m^2 n^{-\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right) (an)^{-\frac{d+3}{2}}}{d+1} + \frac{1}{2} m^{d+3} n^{-\frac{d+3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}(-d-3)\right) (an)^{\frac{d+3}{2}} \\ &+ \frac{1}{2} n^{-\frac{d+3}{2}} \Gamma\left(\frac{d+3}{2}\right) (an)^{-\frac{d+3}{2}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

El término en el segundo renglón es el que contará para el caso $m \ll 1$, el cual es independiente de la masa. La sumatoria infinita que aparece en la Ecu. (5.20) se puede realizar inmediatamente con la definición de la función Zeta, que para el caso $d = 3$, notamos que resulta en $\zeta(6)$. Este resultado, que es proporcional a Θ/a^5 , se deriva respecto a a para obtener el negativo de la fuerza de Casimir. Dicho resultado, al multiplicarlo por 2 para considerar un campo electromagnético (que es el que se presenta en la subsección anterior), coincide exactamente con el obtenido en Ecu. (5.11) a primer orden en Θ (o bien l^2), donde recordemos que \mathcal{F}_0 es igual a

$$\mathcal{F}_0 = -\frac{\pi^2}{240} \frac{1}{a^4}, \quad (5.22)$$

y la separación de las placas en dicha Ecu. (5.11) es expresada con L , y en la expresión (5.17) hemos usado a . Lo anterior generaliza y confirma los resultados obtenidos previamente, ya que por medio de dos procedimientos diferentes, y en el límite adecuado, hemos

llegado al mismo resultado. La primera corrección para la energía de Casimir en el caso $m \ll 1$ vendrá del primer término del lado derecho de Ecu. (5.21), el cual es proporcional a m^2/a , el cual dará una contribución a la fuerza de Casimir proporcional a $(\frac{ml}{a})^2$. De lo anterior se deriva que las correcciones en el caso $m \ll 1$ estarán dominadas por los términos independientes de la masa, los cuales son proporcionales a $(\frac{l}{a})^2$ (ver Ecu. (5.11) con $L = a$). Esto finaliza el análisis del caso masivo. En la siguiente sección presentamos las conclusiones y posibles extensiones al presente trabajo.

Capítulo 6

Conclusiones

El efecto Casimir es uno de los candidatos ideales para probar la teoría no conmutativa desde el punto de vista de los estados coherentes. También nos permite demostrar cómo un experimento macroscópico puede mostrar los efectos cuánticos y en especial los efectos del estado base de energía de un campo. La idea es imaginar primero el espacio-tiempo donde no existen placas y en el cual la energía del estado base del campo electromagnético es infinito. Lo interesante es entender qué sucede con ese campo cuando se incluyen las placas en el vacío y se describe, sobre todo, la energía que existe entre las placas (ayudándonos con el entendimiento de la teoría de una partícula confinada en un pozo de potencial infinito de la mecánica cuántica ordinaria).

El estado base de un campo electromagnético, en su versión no conmutativa, predice el efecto Casimir, con correcciones respecto al resultado estándar. Dichas correcciones, para el caso no masivo, están en potencias de l/L , siendo L la separación de las placas y l la longitud mínima asociada a la naturaleza de un espacio-tiempo no conmutativo, donde recordemos que $l = \sqrt{\Theta}$. Lo anterior está explícitamente establecido en Ecu. (5.11). Cabe resaltar que, usando los datos experimentales, se puede obtener una cota superior para la longitud mínima de $l \leq 10^{-8}m$. Así, el efecto Casimir, si bien es susceptible de modificaciones debidas al modelo no conmutativo, no es apropiado para establecer una

cota competitiva sobre la longitud mínima l . Como referencia, podemos mencionar que a partir de mediciones gravitacionales (redshifts, deflection and time delay) es posible establecer una cota de $\tilde{l} < 10^{-19}\text{m}$ [36]. El caso masivo fue analizado por medio del método de regularización dimensional, lo cual nos da un resultado con correcciones debidas al parámetro Θ y la masa. En el límite $m \ll 1$ es recuperado el caso no masivo, lo cual confirma los resultados derivados. Al considerar simultáneamente correcciones debidas a la masa y el parámetro Θ , cuando $m \ll 1$, se observa que aquellas que son independientes de la masa son las que predominan.

Es importante mencionar que la derivación de la fuerza de Casimir en Ecu.(5.11) y (5.17) corresponde solo a una aproximación, debido a que no se han tomado en cuenta los efectos de frontera de manera rigurosa. Recordemos que en un espacio-tiempo no conmutativo no tiene sentido el hablar de la posición de una frontera en una locación exacta. En principio, en un espacio-tiempo no conmutativo, la posición de una frontera debe tomarse con una incertidumbre no menor a la escala o longitud mínima asociada al espacio en el cual se trabaja, y cuyo valor no es conocido a priori. En Ref. [33] se hace una discusión en la que se estima que dichos efectos de frontera deben de ser del mismo orden de los expresados en Ecu. (5.11). El tratamiento de geometrías no conmutativas con fronteras es un problema abierto de gran interés teórico, pero a su vez muy complejo, por lo cual queda fuera del objetivo del presente trabajo.

Por otro lado, es necesario entender el enfoque de estados coherentes para la no conmutatividad incluido en la presente tesis, dicho enfoque de estados coherentes ha sido ya utilizado en otros trabajos [37] y los resultados no dependen de la autointeracción del campo. La no conmutatividad del espacio-tiempo incluye dentro de las ondas planas un factor gaussiano, el cual modifica la densidad de energía calculada en el vacío. Es importante recalcar el hecho de que cuando el factor Θ es igual a cero se recupera el resultado conmutativo, en particular de la forma de la densidad Hamiltoniana. Los términos que incluyen el factor Θ tienen el mismo signo de la fuerza de Casimir estándar, con lo cual

producen un aumento en dicha fuerza (atractiva) que experimentan las dos placas.

Por tanto, la teoría no conmutativa aplicada en la Teoría Cuántica es válida, siempre y cuando el factor de Θ (o bien l) tenga los valores indicados para que los resultados estén dentro de las barras de error aceptadas para describir el fenómeno.

Como ha sido previamente mencionado, el efecto Casimir ofrece una valiosa oportunidad de someter a prueba teorías más allá del Modelo Estándar o física no convencional. Dicho efecto ha sido utilizado para imponer cotas sobre los parámetros libres que ofrecen las distintas teorías. En general, y como hemos visto en el presente trabajo, las modificaciones incluyen dos tipos de parámetros relevantes. Los primeros son aquellos que son particulares a la teoría (en este caso la longitud mínima l , o bien Θ) y el segundo es la longitud entre las placas paralelas L . Las modificaciones incluirán un juego de estos dos tipos de parámetros que determinarán la cota que se podrá imponer para los parámetros particulares de la teoría, dado que L puede ser fijado en el experimento (en el orden de micras). Dicha combinación de parámetros no es conocida a priori ni tampoco trivial. En este caso observamos que las modificaciones incluyen potencias positivas de l/L (caso no masivo), con lo cual las correcciones serán cada vez más despreciables a medida que se incrementa el orden de la corrección. La primera y más importante corrección es proporcional a $\frac{1}{L^4} \left(\frac{l}{L}\right)^2$.

Una posible extensión teórica que complementa el presente estudio puede comprender el cálculo de la fuerza de Casimir considerando efectos de temperatura finita, diferentes geometrías (cilíndrica y esférica) y medios materiales. En particular, para una generalización uno debe considerar la energía de Casimir en una teoría electromagnética en presencia de dieléctricos. Estos estudios se han vuelto de considerable interés en física de partículas debido a que hay algunas similitudes entre el electromagnetismo de medios continuos y una teoría fenomenológica de modelos de bag. Una suposición que se hace es el de modelar el vacío estándar de QCD como un medio con permeabilidad infinita [48]. Estudios en esta dirección se han realizado en Refs. [50, 51].

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Estados coherentes.

En este apartado revisaremos brevemente cómo son introducidos los estados coherentes vistos desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica ordinaria.

Un estado coherente es una superposición de eigenestados de energía de un oscilador armónico cuántico. Fueron derivados por primera vez en 1926 por Erwin Schrödinger en uno de sus muchos esfuerzos de encontrar soluciones a la Ecuación de Schrödinger que satisficieran el principio de correspondencia. Estos tienen gran importancia en el desarrollo de Óptica Cuántica ya que refiere a un estado del campo electromagnético cuantizado que describe una máxima “especie de coherencia” y un comportamiento clásico.

Los estados coherentes tienen la peculiaridad de ser un vector propio del operador \hat{a} y \hat{a}^\dagger , es decir

$$\hat{a}|\psi\rangle = c|\psi\rangle, \tag{7.1}$$

donde $|\psi\rangle$ es un estado coherente.

El hecho de que \hat{a} no es un operador hermitiano, implica que $\hat{a} \neq \hat{a}^\dagger$. El objetivo

en esta sección será expresar los estados coherentes como una combinación lineal de los eigenestados de energía. Para ello partimos de un estado $|\alpha\rangle$ como una superposición de estados $|n\rangle$ de un oscilador armónico

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (7.2)$$

Sabemos que al aplicar un operador de descenso al estado $|n\rangle$ se tendrá

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (7.3)$$

Entonces, al aplicar el operador de descenso al estado coherente obtenemos

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (7.4)$$

junto con

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (7.5)$$

Con lo cual, igualando las últimas dos expresiones se tendrá

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (7.6)$$

Renombramos $n-1 = m$ y podemos reescribir la ecuación del lado izquierdo como

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} c_{m+1} |m\rangle, \quad (7.7)$$

Ahora, al renombrar con $m = n$ y retomando la Ecu. (7.6) tendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} c_{n+1} |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (7.8)$$

de lo cual podemos concluir que

$$\sqrt{n+1}c_{n+1} = \alpha c_n, \quad (7.9)$$

Dicha relación de recurrencia nos permite derivar que

$$c_n = \frac{\alpha^n c_0}{\sqrt{n!}}, \quad (7.10)$$

Así, podemos escribir el estado coherente como

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n c_0}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (7.11)$$

Determinamos la constante c_0 haciendo uso de la condición de normalización, $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, con el bra correspondiente

$$\langle\alpha| = c_0 * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n|, \quad (7.12)$$

Realizando la operación del bra con el ket respectivo, obtenemos que

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{n!}} \langle n|n\rangle, \quad (7.13)$$

Y siendo que los estado de energía están normalizados, $\langle n|n\rangle = 1$, tendremos que

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1, \quad (7.14)$$

Esto determina c_0 , dejando como expresión final de $|\alpha\rangle$ lo siguiente

$$|\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (7.15)$$

7.2. Partícula en una caja

En este apéndice abordaremos el problema de una partícula en una caja en una escala cuántica, es decir, a una escala muy pequeña. Este problema es fundamental para conocer la naturaleza de algunos fenómenos cuánticos, como lo es en este caso, el efecto Casimir. Este problema suele abordarse en los primeros cursos de introducción a la Mecánica Cuántica. Iniciaremos la discusión describiendo el movimiento de traslación de una partícula confinada en un pozo de profundidad infinita del cual no puede escapar. La solución arroja posibles valores de la energía E .

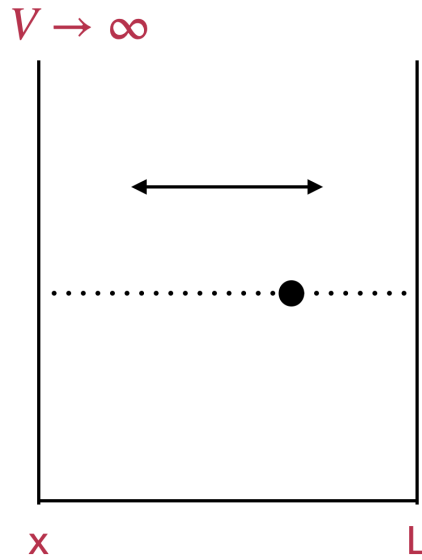


Figura 7.1: La figura muestra que el movimiento de la partícula solo puede ser en la coordenada x entre $x = 0$ y $x = L$.

Utilizaremos la ecuación estacionaria unidimensional de Schrödinger independiente del tiempo, la cual tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi(x), \quad (7.16)$$

Siendo $\psi(x)$ la función de onda asociada al sistema, V es la energía potencial, \hbar la constante reducida de Planck y E la energía. Una de las condiciones importantes del

sistema es que dentro de la caja $V = 0$, por lo tanto la ecuación de Schrödinger se puede escribir como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad (7.17)$$

La solución general puede escribirse como

$$\psi(x) = A\text{sen}(kx) + B\text{cos}(kx), \quad (7.18)$$

donde A , B y k son constantes reales.

Ahora procedemos a encontrar la función de onda tomando en cuenta las condiciones de frontera, las cuales describen que la probabilidad de encontrar una partícula en $x = 0$ o $x = L$ es cero. De esta manera podemos escribir la función de onda como

$$\psi(0) = A\text{sen}(0) + B\text{cos}(0), \quad (7.19)$$

de lo cual obtenemos que $B = 0$. Así la función de onda puede escribirse solamente como

$$\psi(x) = A\text{sen}(kx), \quad (7.20)$$

Para encontrar el valor de k notemos que

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = kA\text{cos}(kx), \quad (7.21)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 A\text{sen}(kx), \quad (7.22)$$

Es decir

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x), \quad (7.23)$$

Introduciendo esta información en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, obtenemos

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2\psi(x) = E\psi(x), \quad (7.24)$$

O bien

$$k^2 = \frac{8\pi^2mE}{h^2}, \quad (7.25)$$

Introduciendo el valor de k en la ecuación de onda obtenemos

$$\psi(x) = A\text{sen}\left(\sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}x\right), \quad (7.26)$$

Ahora, al aplicar la condición de frontera en $x = L$, que nos dice que $\psi(L) = 0$, obtenemos

$$\psi(L) = A\text{sen}\left(\sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}L\right) = 0, \quad (7.27)$$

Para que la ecuación sea igual a cero, el argumento del seno debe ser $n\pi$, es decir

$$\sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}L = n\pi, \quad (7.28)$$

De esta manera, podemos escribir la función de onda con el nuevo argumento como

$$\psi(x) = A\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (7.29)$$

El valor de A lo determinamos normalizando la función de onda. Recordemos que la probabilidad de encontrar una partícula dentro de la caja es igual a uno, es decir

$$\int_0^L \psi^*\psi dx = 1, \quad (7.30)$$

Que implica que

$$\int_0^L (A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)) A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1 \quad (7.31)$$

Al realizar la integral obtenemos el valor de A resultando en

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}, \quad (7.32)$$

De esta manera la solución final es

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (7.33)$$

Introduciendo la solución en la ecuación de Schrödinger (7.17), podemos encontrar el valor de E , resultando en

$$E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad (7.34)$$

donde n es un número entero positivo. De lo anterior concluimos que la energía de la partícula está cuantizada. Además, todos los valores posibles de energía son diferentes de cero (el caso $n = 0$ se excluye porque $\psi(x) = 0$, indicando que la partícula no está en la caja).

7.3. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial con Límites en la Frontera

Una vez obtenida la ecuación de Klein-Gordon, resolveremos esta ecuación diferencial parcial de segundo orden para el caso particular del efecto Casimir, esta incluye límites en la frontera, es decir, se imponen condiciones que se establecen por la presencia de las placas en dicho fenómeno. La ecuación de Klein-Gordon está dada por

$$(\square^2 + m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0, \quad (7.35)$$

Donde el D'Alembertiano tiene la forma

$$\square = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}. \quad (7.36)$$

Las condiciones de frontera establecen que la solución del campo de Klein-Gordon es igual a cero cuando $x = 0$ y $x = L$, siendo L la distancia de separación entre las placas.

Partiendo de la Ecuación Diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial z^2} + m^2 \phi(\vec{x}, t) = 0, \quad (7.37)$$

Se propone una solución de la forma

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(t), \quad (7.38)$$

Así, la ecuación de Klein-Gordon resulta en

$$(\square^2 + m^2)\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(t) = 0, \quad (7.39)$$

Es decir, una función que depende de cuatro variables, puede ser vista como el producto de cuatro funciones que únicamente dependen de cada una de las variables de la función

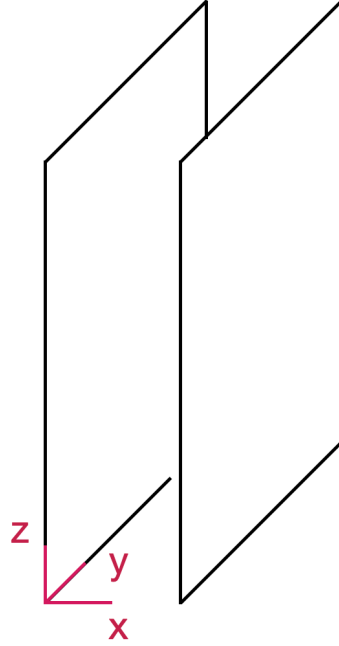


Figura 7.2: Dos placas neutras y paralelas a una distancia L . La coordenada x es ortogonal al área de las placas.

inicial.

Introduciendo dicha solución en la ecuación de Klein-Gordon obtendremos

$$\phi(x)\phi(y)\phi(z)\frac{\partial^2\phi(t)}{\partial t^2} - \phi(y)\phi(z)\phi(t)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} - \phi(x)\phi(z)\phi(t)\frac{\partial^2\phi(y)}{\partial y^2} - \phi(x)\phi(y)\phi(t)\frac{\partial^2\phi(z)}{\partial z^2} + m^2\phi(\vec{x}, t) = 0, \quad (7.40)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre la solución propuesta, obtenemos

$$\frac{1}{\phi(x)}\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\phi(y)}\frac{\partial^2\phi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{\phi(z)}\frac{\partial^2\phi(z)}{\partial z^2} - m^2 = \frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial^2\phi(t)}{\partial t^2}, \quad (7.41)$$

Dicha expresión del lado derecho solo depende de t , mientras que el lado izquierdo de (x, y, z) . Esto solo es posible si ambos lados son constantes, con lo cual, al igualar a una constante, que por conveniencia se toma como

$$\frac{1}{\phi(t)} \frac{\partial^2 \phi(t)}{\partial t^2} = -\lambda^2, \quad (7.42)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden dependiente del tiempo

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \lambda^2 \phi(t) = 0, \quad (7.43)$$

Una propuesta de solución a esta ecuación diferencial es

$$\phi(t) = \phi_t(0)e^{-i\lambda t}, \quad (7.44)$$

Al introducir dicha propuesta de solución en la ecuación diferencial se puede ver que sí la satisface.

Ahora, de la ecuación (9) tenemos

$$\frac{1}{\phi(y)} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} - m^2 = -\frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}, \quad (7.45)$$

Con lo cual, nuevamente igualando el lado derecho de la ecuación a una constante de la forma k_r^2

$$-\frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = k_r^2, \quad (7.46)$$

nos permite derivar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + k_r^2 \phi(x) = 0, \quad (7.47)$$

La propuesta de solución para $\phi(x)$ es

$$\phi(x) = A \cos(k_r x) + B \sin(k_r x), \quad (7.48)$$

Siendo A y B constantes ($A, B \in \mathbb{R}$). Identificamos que es la variable x donde existen las condiciones de frontera establecidas por el efecto Casimir. Una de esas condiciones es cuando $x = 0$, entonces $\phi(x = 0) = 0$, así

$$\phi(0) = A = 0, \quad (7.49)$$

De esta manera la solución para $\phi(x)$ es

$$\phi(x) = B \operatorname{sen}(k_r x), \quad (7.50)$$

Ahora, una segunda condición de frontera del efecto Casimir es cuando $x = L$, entonces $\phi(x = L) = 0$. Aquí realizamos un paréntesis y sugerimos revisar el apéndice 7.2, del cual obtenemos una solución de la ecuación diferencial como sigue

$$\phi(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (7.51)$$

Al introducir esta solución en la ecuación diferencial (7.47), observamos que efectivamente la satisface.

Ahora para $\phi(y)$ tenemos que

$$\frac{1}{\phi(y)} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} - \frac{1}{\phi(z)} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = -k_r^2 + m^2 - \lambda^2 = 0, \quad (7.52)$$

$$\frac{1}{\phi(z)} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} + k_r^2 - m^2 + \lambda^2 = -\frac{1}{\phi(y)} \frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} = k_y^2, \quad (7.53)$$

Podemos escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{\partial^2 \phi(y)}{\partial y^2} + k_y^2 \phi(y) = 0, \quad (7.54)$$

La propuesta de solución es

$$\phi(y) = \phi_y(0)e^{-ik_y y}, \quad (7.55)$$

Para $\phi(z)$ resta la ecuación

$$\frac{1}{\phi(z)} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} + k_r^2 - m^2 + \lambda^2 - k_y^2 = 0, \quad (7.56)$$

$$\frac{1}{\phi(z)} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = -k_r^2 + m^2 - \lambda^2 + k_y^2 = -k_z^2, \quad (7.57)$$

Así, podemos escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} + k_z^2 \phi(z) = 0. \quad (7.58)$$

Su correspondiente solución será

$$\phi(z) = \phi_z(0)e^{-ik_z z}, \quad (7.59)$$

De acuerdo con lo anterior, la solución total a la ecuación de Klein-Gordon, con las condiciones de frontera adecuadas, podemos escribirla como

$$\phi(t, x, y, z) = \phi_t(0)e^{-i\lambda t} B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \phi_y(0)e^{-ik_y y} \phi_z(0)e^{-ik_z z}, \quad (7.60)$$

O bien,

$$\phi(t, x, y, z) = \phi_t(0)\phi_y(0)\phi_z(0)B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-i(\lambda t + k_y y + k_z z)}, \quad (7.61)$$

Identificando las variables y y z como coordenadas transversales con respecto al área de las placas, nombramos los vectores de la siguiente manera

$$(y, z) = \vec{x}_T, \quad (7.62)$$

$$(k_y, k_z) = \vec{k}_T, \quad (7.63)$$

Ahora, nombrando a λ como $\lambda = \omega_p$, y tomando por el momento $\phi_t(0)e^{-i\lambda t}B = 1$ (ya que B es un parámetro libre), podemos escribir la solución final de la forma

$$\phi(t, x, y, z) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{i\omega_p t}e^{-i\vec{k}_T \cdot \vec{x}_T}, \quad (7.64)$$

Se puede verificar directamente que al introducir esta solución en la ecuación diferencial (7.37), esta se satisface y cumple con las condiciones de frontera adecuadas.

7.4. Función Z de Riemann

(George Friedrich) Bernhard Riemann (1826-1866), nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, cerca de Hannover. Hijo de un pastor luterano que se ocupó personalmente de la educación de su hijo durante los primeros años y lo instruyó en materias como aritmética, geometría e historia. [a]

La función zeta de Riemann es una función con una enorme importancia en teoría números, física, teoría de probabilidad, estadística, etc, la cual tiene una relación importante con la distribución de números primos.

La función zeta de Riemann $\zeta(s)$ está definida por la suma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (7.65)$$

Donde $s \in C | \operatorname{Re}(s) > 1$, la serie converge y define una función que es analítica en toda la región. La función zeta de Riemann puede extenderse de manera única por continuación analítica a una función meromorfa en todo el plano complejo con un único polo en $s=1$.

Existe además una relación entre esta función y los números primos, que tiene la siguiente forma

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \sum_{k \geq 0} (p^{-s})^k, \quad (7.66)$$

$$\prod_p \sum_{k \geq 0} (p^{-s})^k = (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots)(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \dots) \dots (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots) \dots \quad (7.67)$$

Para cada número primo p , $\sum_{k \geq 0} (p^{-s})^k$ es una serie geométrica y converge en cualquier número complejo s con $\operatorname{Re}(s) > 1$ a

$$\sum_{k \geq 0} (p^{-s})^k = \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (7.68)$$

Y se obtiene que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p(\text{pertenece})P} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (7.69)$$

Donde el producto infinito es sobre todos los números primos y s es un número complejo con $\text{Re}(s) > 1$. la ecuación está formada por dos resultados simples: ecuación para las series geométricas y el teorema fundamental de la aritmética.

Existe una ecuación cerrada para $\zeta(2k)$ cuando k es un entero positivo

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad (7.70)$$

Donde

$$B_{2k}$$

son los números de Bernoulli. De esta ecuación se obtiene que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (7.71)$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad (7.72)$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad (7.73)$$

Siendo solo los primeros valores para $k = 1, 2, 3$. Para números impares no se conoce una solución general. Para valores negativos, si $k \geq 1$, entonces

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}, \quad (7.74)$$

Y se puede ver que para números pares negativos, la función zeta de Riemann se anula, denominándose estos como ceros triviales. Algunos valores para función zeta de Riemann

$$\zeta(-k) = -\frac{1}{12}, \quad (7.75)$$

Serie armónica

$$\zeta(-k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty, \quad (7.76)$$

Constante de Apéry

$$\zeta(-k) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \quad (7.77)$$

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] M. Peskin, An Introduction To Quantum Field Theory, (1995) xix-xxii.
- [2] P. A. M Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A. 117:778, 610-624 (1928).
- [3] Carl D. Anderson, Phys. Rev. **43**, 491 (1933).
- [4] Owen Chamberlain, Emilio Segre, Clyde Wiegand, and Thomas Ypsilantis, Phys. Rev. **100**, 947 (1955).
- [5] P. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 16 (1964) 508-509.
- [6] ATLAS Collaboration, Phys. Lett. B Vol. **716**, 1 (2012) 1-29.
- [7] A. Einstein, Annalen der Physik, **49** (1916)769-822.
- [8] B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [9] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [10] M. J. Sparnaay, Physica (Amsterdam) **24**, 751 (1958).
- [11] V. Mostepanenko and I. Sokolov, Phys. Rev. D **47**, (1993) 2882-2891.
- [12] G. Klimchitskaya and V. Mostepanenko, Grav. Cosmol. **21**, 1 (2015) 1-12.
- [13] C. Cao and A. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **96**, 015013 (2017).

- [14] M. Bordag, G. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, Vol. 145, Oxford University Press, (2009).
- [15] B. S. DeWitt, Phys. Rept. **19**, (1975) 295-357.
- [16] L. Ford, Phys. Rev. D **11**, (1975) 3370-3377.
- [17] J. Dowker and R. Banach, J. Phys. A **11**, (1978).
- [18] A. Aliev, Phys. Rev. D **55**, (1997) 3903-3904.
- [19] W. H. Huang, Annals Phys. **254**, (1997) 69-82.
- [20] F. Sorge, Class. Quant. Grav. **22**, (2005) 5109-5119.
- [21] F. Sorge, Class. Quant. Grav. **26** (2009) 235002.
- [22] V. B. Bezerra, H. F. Mota and C. R. Muniz, Phys. Rev. D **89**, 024015 (2014).
- [23] M. Setare, Class. Quant. Grav. **18**, (2001) 2097-2104.
- [24] E. Calloni, L. Di Fiore, G. Esposito, L. Milano and L. Rosa, Phys. Lett. A **297**, (2002) 328-333.
- [25] G. Esposito, G. M. Napolitano and L. Rosa, Phys. Rev. D **77**, 105011 (2008).
- [26] B. Nazari, Eur. Phys. J. C **75**, 10 (2015) 501.
- [27] R. Caldwell, arXiv:astro-ph/0209312.
- [28] G. Mahajan, S. Sarkar and T. Padmanabhan, Phys. Lett. B **641** (2006) 6-10.
- [29] W. Godlowski, M. Szydlowski and Z.-H. Zhu, Grav. Cosmol. **14**, 17 (2008).
- [30] M. Szydlowski and W. Godlowski, Int. J. Mod. Phys. D **17**, (2008) 343-366.
- [31] K. A. Milton, *The Casimir Effect* (World Scientific, 2001).

- [32] The Event Horizon Telescope Collaboration, *The Astrophysical Journal Letters*, **875**, L1 (2019).
- [33] R. Casadio, A. Gruppuso, B. Harms and O. Micu, *Phys. Rev. D* **76**, 025016 (2007).
- [34] U. Mohideen and A. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549 (1998).
- [35] Peter W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, (1994).
- [36] M. Karimabadi, S. A. Alavi and D. Mahdavian, *Class. Quantum Grav.* **37**, 085009 (2020).
- [37] A. Smailagic and E. Spallucci, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** L467, (2003).
- [38] Don Colladay and V. Alan Kostelecký, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [39] A. Martín-Ruiz and C. A. Escobar, *Phys. Rev. D* **95**, 036011 (2017).
- [40] C.A. Escobar, A. Martín-Ruiz, O. J. Franca and Marcos A. G. Garcia, *Phys. Lett. B* **807**, 135567 (2020).
- [41] E. Harikumar, Suman Kumar Panja and Vishnu Rajagopal, *Nucl. Phys. B* **950**, 114842 (2020).
- [42] A. Kehagias and H. Partouche, *IJMP A* **34**, 1950049 (2019).
- [43] L. P. Teo, *Nucl. Phys. B* **819**, (2009) 431-452.
- [44] Vacuum energy from noncommutative models S. Mignemina, A. Samsarovc, 244:247, 2017.
- [45] Casimir effect in $(2 + 1)$ -dimensional noncommutative theories, C.D. Fosco, G.A. Moreno, 901:905, 2007.

- [46] Casimir force in noncommutative Randall-Sundrum models, K. Nouicer and Y. Sabri **80**, 086013 (2009).
- [47] Noncommutative Complex Scalar Field and Casimir Effect, F.Khelili, 1:7, 2012.
- [48] T. D. Lee, Phys. Rev. D **19**, 1802 (1979).
- [49] E. Elizalde, J. Comp. and Appl. Math. **118** (2000) 125–142.
- [50] L. E. Oxman, N. F. Svaiter, and R. L. P. G. Amaral, Phys. Rev. D **72**, 125007 (2005).
- [51] I. Zaheda, Ulf-G.Meissner and A. Wirzbaed, Phys. Lett. B **145**, (1984) 117-122.
- [52] J.Ambjorn, S.Wolfram, Propierties of the vacuum, (1981).
- [53] P. Venkataram, Electromagnetic Field Quantization and Aplications to the Casimir Effect, (2013)



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No 00128

Matricula: 2171803206

Efecto Casimir en un espacio-tiempo no conmutativo.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 17:00 horas del día 4 del mes de mayo del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ADRIAN MAURICIO ESCOBAR RUIZ
DR. OMAR PEDRAZA ORTEGA
DR. ROMAN LINARES ROMERO



JOSE MANUEL SILVA MORALES
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: JOSE MANUEL SILVA MORALES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. ADRIAN MAURICIO ESCOBAR RUIZ

VOCAL

DR. OMAR PEDRAZA ORTEGA

SECRETARIO

DR. ROMAN LINARES ROMERO