HIPÓTESIS Y MÉTODOS DE LA TERMODINÁMICA DE PROCESOS IRREVERSIBLES EN ESPACIO-TIEMPOS CURVOS.

TESIS QUE PRESENTA EL

Ing. Fís. Alfredo Sandoval Villalbazo

PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

MAESTRO EN FÍSICA.

Agosto de 1996

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

AGRADECIMIENTOS.

A MIS PADRES, POR HABERME AYUDADO A
ALCANZAR ESTA META. PUES SIN SU APOYO
ESTE TRABAJO NO HUBIERA SIDO POSIBLE.

AL COLEGIO DE PROFESORES DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD
IBEROAMERICANA. COMPAÑEROS CUYO
APOYO HA SIDO FUNDAMENTAL EN EL
TRABAJO ACADÉMICO COTIDIANO.
EN ESPECIAL A LA DIRECTORA,
MAT. GRACIELA ROJAS GONZÁLEZ POR LA AYUDA QUE
ME HA BRINDADO DURANTE ESTOS AÑOS.

A LOS DOCTORES PABLO CHAUVET ALDUCIN,
EDUARDO PIÑA GARZA, EDUARDO RAMOS
MORA, JOSÉ FRANCO LÓPEZ Y GUILLERMO
FERNÁNDEZ ANAYA, POR AUXILIARME EN
LOS ÚLTIMOS DETALLES, PERO SOBRE TODO
POR SU APOYO Y AMISTAD.

AL DOCTOR LEOPOLDO GARCÍA-COLÍN SCHERER, QUE CON
SU DIRECCIÓN, CONOCIMIENTOS Y CONSEJOS FUE
DETERMINANTE
EN LA REALIZACIÓN DE UN TRABAJO TAN INTERESANTE E
IMPORTANTE
EN MI VIDA PROFESIONAL.

Alfredo Sandoval Villalbazo

Hípotesis y métodos de la termodinámica de procesos irreversibles en espacio-tiempos curvos

Alfredo Sandoval Villalbazo

Resumen

Se sintetizan trabajos fundamentales en termostática y mecánica estadística en espacio-tiempos curvos. Se aplica por vez primera el esquema Meixner-Prigogine de la termodinámica irreversible lineal a la generación de las ecuaciones de transporte en el contexto de la relatividad general. Finalmente se analizan los resultados obtenidos.

CONTENIDO

C. Las Ecuaciones de campo y la termostática en espacio-tiempos curvos.

- La relación de las ecuaciones de campo de Einstein con las ecuaciones de estado termostáticas.
- El problema de la irreversibilidad.

3. REVISIÓN DE MÉTODOS DE LA TERMODINÁMICA DE PROCESOS IRREVERSIBLES EN ESPACIOS-TIEMPOS CURVOS.

A. El Tensor esfuerzos-energía y el cuadrivector de calor.

- Las leyes de conservación en espacio-tiempos curvos.
- El papel del cuadrivector de calor y la hipótesis de equilibrio local.

B. Ideas esenciales de la termodinámica de segundo orden de Israel.

- Leyes de conservación en la termodinámica de segundo orden de Israel.
- La Hipótesis de equilibrio local y la producción de entropía en la termodinámica de segundo orden de Israel.

4. EL ESQUEMA DE MEIXNER Y PRIGOGINE DE LA TERMODINAMICA DE PROCESOS IRREVERSIBLES EN ESPACIO-TIEMPOS CURVOS: ANÁLISIS DE FLUJO NO VISCOSO.

A. Síntesis del esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal (T.I.L): caso no relativista.

- Balance de masa.
- Balance de momentum .
- Ecuaciones en derivadas totales para los balances de masa y momentum.
- Hipótesis de equilibrio local.
- Balance de energía no relativista
- Producción de entropía para flujo no viscoso en el caso no relativista.
- Ley de Fourier.
- Ecuación de calor.

B. Esquema Meixner-Prigogine de la termodinámica irreversible lineal: espacio-tiempos curvos.

- El tensor esfuerzos-energía.
- Derivación covariante
- Ecuación fundamental de balance
- Ecuación de continuidad en espacio-tiempos curvos.
- Balance de ímpetu (ecuación de Euler relativista).
- Hipótesis de equilibrio local.
- Balance de energía relativista.
- Ecuaciones constitutivas.
- Ecuación de calor.

5. Algunas consecuencias inmediatas del esquema Meixner-Prigogine de la termodinámica irreversible lineal en espacio-tiempos curvos.

A. La ecuación de calor y los efectos de la curvatura en estado estacionario.

B. Posibles generalizaciones del esquema.

C. Consideraciones finales.

Apéndice 1.

El límite newtoniano de las ecuaciones relativistas de transporte derivadas del esquema Meixner-Prigogine de la termodinámica irreversible lineal en espacio-tiempos curvos.

Apéndice 2.

Balance de genérico de entropía en el contexto de la relatividad general

Apéndice 3.

Las ecuaciones relativistas de transporte bajo el esquema Meixner-Prigogine de la termodinámica irreversible lineal con el tensor modificado de esfuerzos-energía.

I. Introducción General.

En este trabajo de tesis se tienen dos vertientes fundamentales. En primer término se sintetizan trabajos desarrollados hasta ahora en lo concerniente a la termostática y a la mecánica estadística en equilibrio de agujeros negros, posteriormente se aplica el esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal (T.I.L) al establecimiento de un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones termodinámicas de la materia en espacios-tiempos curvos.

Los conceptos tradicionales de la termostática requieren ser cuidadosamente manejados al aplicarse al estudio de agujeros negros. En primer lugar, es indispensable mencionar los argumentos que son actualmente aceptados, y que llevan a considerar a los agujeros negros como sistemas en equilibrio mecánico, en los cuáles aparecen tres observables macroscópicos fundamentales. Bekenstein[1] propuso inicialmente introducir el concepto de entropía para agujeros negros desde el punto de vista de teoría de información. Más adelante, Hawking[2] utilizó la teoría cuántica de los campos para mostrar la existencia de radiación térmica emitida por agujeros negros, y vinculó la entropía de Bekenstein con la temperatura del sistema.

El capítulo 2 comienza con un recuento de los desarrollos que hacen plausible la suposición de equilibrio mecánico en hoyos negros, y que establecen como parámetros macroscópicos fundamentales de estos sistemas a la carga (Q), la masa (M) y el momento angular ($\vec{L}$). El capítulo continúa con la introducción del concepto de entropía por parte de Bekenstein[1] y la subsecuente evolución de esta idea. El capítulo concluye con la obtención de la entropía de información de un agujero negro tipo Kerr y una crítica a la metodología basada en una teoría de la información fundamentada en observables puramente mecánicos.

Mas adelante, el desarrollo del capítulo 2 se centra en el análisis de la radiación térmica emitida por un agujero negro. El ataque directo a este problema está basado en un esquema de cuantización canónica del campo electromagnético. Este esquema es, en principio, compatible con la curvatura del espacio asociada a campos gravitacionales intensos (de magnitudes tales que la teoría de Newton ya no es aplicable, pero sin tener la necesidad de cuantizar al campo gravitacional).[21] La existencia de modos de oscilación cuantizados para la radiación electromagnética, y las técnicas tradicionales de la teoría cuántica de los campos, permiten establecer una expresión para los ritmos de emisión y absorción de partículas por parte de un hoyo negro. Asimismo se mencionan alternativas para formular una mecánica estadística de agujeros negros, y en particular estudiar la radiación emitida por ellos. Entre éstas resaltan el uso de integrales de Feynman[4] y el empleo de supercuerdas.[5] El capítulo concluye con una crítica desde el punto de vista termodinámico a este cálculo y se analiza la posibilidad de retomar técnicas no basadas en consideraciones microscópicas para la introducción de la temperatura en el análisis de estos sistemas.

Los escenarios descritos en los primeros capítulos son altamente idealizados en comparación con aquéllos con los cuales será viable el obtener información observacional en un futuro próximo. La consideración de desviaciones respecto del equilibrio (capítulo 3), es un primer paso tendiente a enfrentar esta situación. Métodos de análisis existentes en la literatura se analizan en este capítulo, haciéndose especial énfasis en los puntos cuestionables de los mismos. Particularmente, se hace un análisis de las ideas esenciales de la termodinámica de segundo orden propuesta por Werner Israel.[18]

Como alternativa al esquema de Israel se plantea el esquema de Meixner y Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal (T.I.L). Esta línea de trabajo tiene como objetivo el construir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que en principio, permitan establecer los valores de las variables termodinámicas locales para un sistema fuera del equilibrio. El esquema Meixner-Priogogine parte de ecuaciones de balance para la materia y la energía, e incorpora la hipótesis de equilibrio local en el establecimiento de un balance de entropía. Este balance posibilita la introducción de relaciones constitutivas entre flujos y fuerzas termodinámicas. La reproducción de este esquema en el contexto relativista para flujos de materia no viscosos se incluye en el capítulo IV de esta tesis.

Este escrito finaliza con un análisis del sistema de ecuaciones hallado, su relación con los resultados mencionados en los capítulos II y III, y las líneas de trabajo existentes y futuras en el estudio de estos sistemas físicos.

II. REVISIÓN DE MÉTODOS DE LA TERMOSTÁTICA EN ESPACIOS-TIEMPOS CURVOS.

A. Entropía de Información y Termostática de Agujeros Negros.

Considerése en primer término la dinámica de una partícula en el contexto de la teoría de la relatividad general. Una partícula sin estructura seguirá una trayectoria geodésica en un espacio-tiempo curvo cuya métrica se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones de Einstein (el cual usualmente se simplifica con consideraciones de simetría pertinentes). La métrica puede involucrar una curvatura tan grande que ni siquiera las trayectorias de los rayos de luz pueden abandonar una cierta región acotada del espacio, de esta forma, dicha región se encuentra aislada del resto del universo. Tal región aislada se denomina **agujero negro.**

Un caso de especial interés es aquél en el cuál el agujero negro posee simetría esférica y cuyas propiedades geométricas son independientes del tiempo. En este caso, el elemento de línea correspondiente al espacio-tiempo curvo tiene la forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{1}$$

en donde los coeficientes $g_{\mu\nu}$ corresponden a la *métrica de Schwarzschild* escrita en forma covariante:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sen^2\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

y el cuadrivector contravariante de posición corresponde a un sistema de coordenadas esféricas :

$$x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ r \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \tag{3}$$

Una posible última etapa en la evolución de una estrella de muy alta densidad es aquella correspondiente a la formación de un agujero negro. En principio, la región interior de una estrella colapsada exhibe efectos relativistas y, por tanto, su descripción debe darse en términos de las ecuaciones de campo de Einstein.

La termostática de los agujeros negros *aparentemente* se puede establecer a partir de las siguientes ideas:

1) Existen 3 parámetros macroscópicos fundamentales que corresponden a las coordenadas termodinámicas del sistema, supuesto en equilibrio: la masa, la carga eléctrica y el momento angular.

2) La entropía de información del agujero negro puede hallarse a partir de la aplicación del principio de máxima entropía, tomando en cuenta que los observables del sistema son la masa, la carga y el momento angular. La expresión para la entropía involucra 3 parámetros indetermidados de Lagrange, introducidos al maximizarse la entropía de Shannon[8] .

3) La forma explícita de los parámetros indeterminados de Lagrange se obtiene por medio de argumentos de consistencia con expresiones para el trabajo efectuado sobre (o por) el sistema; dichas expresiones son inferibles a partir de distintas teorías establecidas de manera independiente.

4) La expresión hallada para la entropía de información corresponde con la entropía de Clausius (entropía térmica), siempre que el sistema esté en *equilibrio termodinámico.* Con ello se tiene ya un potencial termodinámico que puede explotarse para el estudio de propiedades del sistema.

En este capítulo se analizan los 4 puntos que se acaban de mencionar. Además, se prepara el terreno para vincular las ecuaciones termostáticas con las correspondientes propiedades de los campos vía mecánica estadística.

1. Parámetros Macroscópicos de los Agujeros Negros.

Existen dos motivos fundamentales por los cuáles se acepta actualmente la afirmación de que las únicas variables que caracterizan macroscópicamente a un agujero negro son la masa, la carga y el momento angular. El primero se basa en los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein[9], aplicadas al estado del campo gravitacional después del colapso gravitacional de una estrella sufucientemente densa. Estas soluciones tienen como únicos parámetros característicos la carga, la masa y el momento angular. Es importante recalcar que estas variables aparecen aquí en un contexto enteramente mecánico.

El segundo motivo se refiere al tipo de observaciones que es posible hacer a los agujeros negros. La dinámica de un cuerpo externo al agujero se puede conocer por medio de la masa, carga y momento angular del mismo; el analísis de esta dinámica constituye un método para determinar el estado de la fuente del campo. La última información asequible previa al colapso gravitacional corresponde a la dinámica de partículas externas y ésta se determina por M, Q y $\vec{L}$.

Una ecuación interesante derivada de argumentos basados en la geometría del espacio-tiempo correspondiente a un agujero negro cargado y rotante en equilibrio mecánico (métrica de Kerr) es[10]:

$$A = \frac{4\pi G}{c^4}\left[2GM^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Q^2 + 2\sqrt{G^2M^4 - \vec{L}^2C^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}GM^2Q^2}\right] \tag{4}$$

Esta ecuación corresponde al área de la superficie de un agujero negro de Kerr. Es de hacerse notar el hecho de que una variable geométrica (el área), se obtiene a partir de parámetros dinámicos (masa, carga y momento angular).

La ecuación (4) se reduce, para la métrica de Schwarzschild ($Q = 0$, $\vec{L} = \vec{0}$), a:

$$A = \frac{16\pi\, G^2\, M^2}{c^4} \tag{5}$$

Una fuente de confusión usual proviene de un desarrollo basado en la diferenciación de la ecuación (4) tomando $M, \vec{L}$ y Q como variables independientes y resolviendo para dM. La manipulación algebraica mencionada lleva a la expresión

$$dM = \lambda_1\, dA + \lambda_2\, dQ + \vec{\lambda}_3 \cdot d\vec{L} \tag{6}$$

donde,

$$\lambda_1 = \frac{\frac{c^4}{4\pi G}\left(G^2M^4 - c^2\vec{L}^2 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}M^2Q^2\right)^{1/2}}{4GM\left(G^2M^4 - c^2\vec{L}^2 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}M^2Q^2\right)^{1/2} + 4G^2M^3 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}2Q^2M} \tag{7}$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(G^2M^4 - c^2\vec{L}^2 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}M^2Q^2\right)^{1/2}2Q + \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}2M^2Q}{4GM\left(G^2M^4 - c^2\vec{L}^2 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}M^2Q^2\right)^{1/2} + 4G^2M^3 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}2Q^2M} \tag{8}$$

$$\vec{\lambda}_3 = \frac{2\,c^2\vec{L}}{4GM\left(G^2M^4 - c^2\vec{L}^2 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}M^2Q^2\right)^{1/2} + 4G^2M^3 - \frac{G}{4\pi\varepsilon_o}2Q^2M} \tag{9}$$

La ecuación (6) suele interpretarse como una ecuación de estado termodinámica al identificarse la "energía interna" del sistema con la masa por medio de la relación masa energía:

$$M = \frac{E}{c^2} \tag{10}$$

los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación (6) se asocian con el trabajo realizado por el sistema al cambiarse cuasiestáticamente la carga y/o el momento angular del agujero negro.[11] Debe quedar claro que las variables M, Q y $\vec{L}$ tienen un carácter estrictamente mecánico y no pueden, en principio, considerarse variables termodinámicas utilizándose este tipo de argumentos. El primer término del lado derecho de la ecuación (6) se discutirá más adelante.

Durante el periodo que abarcó de 1971 a 1975 fue comunmente aceptado el carácter no termodinámico de las variables carga, masa y momento angular; sin embargo, desarrollos de teoría cuántica aplicados al campo gravitacional han predicho la existencia de radiación térmica emitida por hoyos negros.[21] La temperatura característica de este fenómeno se encontró estrechamente vinculada con aquella inferible de la ecuación (6) supuesta como una ecuación de estado. Más específicamente, para un agujero negro de Schwarzschild, la relación conocida de la termostática:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_{\rho} \tag{11}$$

parecería definir una temperatura si se identificaran:

- La entropía específica s con el área del agujero negro (salvo un factor de proporcionalidad ξ).
- La energía interna E con la energía mecánica dada por la relación de Einstein (10).

Al hacer esto se obteniene:

$$\frac{1}{T} = \xi \frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{16\pi G^2}{c^4}\left(\frac{E}{c}\right)^2\right] = \xi \frac{32\pi G^2}{c^4} M \tag{12}$$

Aceptando a M, Q y $\vec{L}$ como únicos parámetros observables del sistema, es posible aplicar elementos básicos de la teoría de información y obtener la entropía de Shannon[8] para el sistema, suponiendo que éste está en equilibrio. Un análisis desde este punto de vista se presenta en la siguiente sección del capítulo.

2. La Entropía de Información de los Agujeros Negros.

A continuación se parte de la premisa de que los observables macroscópicos en los hoyos negros son la masa (M), la carga (Q), y el momento angular $(\vec{L})$. El sistema se supone en equilibrio, de forma que los valores esperados $\langle M\rangle$, $\langle Q\rangle$ y $\left\langle \vec{L}\right\rangle$ se suponen conocidos y constantes.

El experimento a considerar aquí es la determinación de los parámetros M, Q y $\vec{L}$ del agujero negro. La entropía de información para este experimento está dada por[8] :

$$S = -k_b \sum_i \sum_j \sum_k P_{M_i\, Q_j\, L_k}\; Ln\left[P_{M_i\, Q_j\, L_k}\right], \tag{13}$$

donde $P_{M_i\, Q_j\, L_k}$ es la probabilidad de hallar al sistema con masa M_i, carga Q_j, y momento angular $\vec{L}_k$. En la ecuación (13), la distribución $P_{M_i\, Q_j\, L_k}$ deseada es aquella que maximiza la función S, sujeta a las restricciones asociadas a los observables:

$$\sum_i M_i \sum_j \sum_k P_{M_i\, Q_j\, L_k} = \langle M\rangle \tag{14}$$

$$\sum_j Q_j \sum_i \sum_k P_{M_i\, Q_j\, L_k} = \langle Q\rangle \tag{15}$$

$$\sum_k \vec{L}_k \sum_i \sum_j P_{M_i\, Q_j\, L_k} = \left\langle \vec{L}\right\rangle \tag{16}$$

y a la restricción correspondeiente al hecho de que $P_{M_i\, Q_j\, L_k}$ es una distribución de probabilidad:

$$\sum_i \sum_j \sum_k P_{M_i\, Q_j\, L_k} = 1 \tag{17}$$

La constante de Boltzmann k_b se introduce con miras a establecer un vínculo entre la entropía de información (a obtener) y la entropía de Clausius (térmica), para el caso de equilibrio termodinámico.

Para hallar la distribución deseada $P_{M_i\, Q_j\, L_k}$ se introducen los parámetros indeterminados de Lagrange η_1, η_2, $\vec{\eta}_3$, que respectivmente se multiplican en las ecuaciones (14), (15) y (16). El cuarto parámetro indeterminado se escribirá por comodidad de la forma $\delta - k_b$ y se multiplicará de ambos lados de la ecuación (17). La metodología usual de maximización por el método de multiplicadores de Lagrange lleva a las expresiones:

$$k_b \, Ln \left[P_{M_i \, Q_j \, L_k} \right] = -\eta_1 \, M_i - \eta_2 \, Q_j - \vec{\eta}_3 \cdot \vec{L}_k - \delta \tag{18}$$

o bien:

$$P_{M_i \, Q_j \, L_k} = e^{\frac{-\eta_1 \, M_i - \eta_2 \, Q_j - \vec{\eta}_3 \cdot \vec{L}_k - \delta}{k_b}} \tag{19}$$

Los parámetros indeterminados se vinculan con los observables por medio de las expresiones:

$$\sum_i M_i \sum_j \sum_k e^{\frac{-\eta_1 \, M_i - \eta_2 \, Q_j - \vec{\eta}_3 \cdot \vec{L}_k - \delta}{k_b}} = \langle M \rangle \tag{20}$$

$$\sum_j Q_j \sum_i \sum_k e^{\frac{-\eta_1 \, M_i - \eta_2 \, Q_j - \vec{\eta}_3 \cdot \vec{L}_k - \delta}{k_b}} = \langle Q \rangle \tag{21}$$

$$\sum_k \vec{L}_k \sum_i \sum_j e^{\frac{-\eta_1 \, M_i - \eta_2 \, Q_j - \vec{\eta}_3 \cdot \vec{L}_k - \delta}{k_b}} = \left\langle \vec{L} \right\rangle \tag{22}$$

Al insertarse las ecuaciones (20), (21), (22) en la expresión para la entropía de información (13), y utilizar la condición de normalización (17) se obtiene:

$$S = \eta_1 \langle M \rangle + \eta_2 \langle Q \rangle + \vec{\eta}_3 \cdot \left\langle \vec{L} \right\rangle + \delta \tag{23}$$

La ecuación (23) representa a la entropía de información del sistema, dados todos los supuestos que se han venido mencionando. Nótese sin embargo que en la ecuación (23), η_1, η_2 y $\vec{\eta}_3$ aún carecen de significado físico preciso.

3. Significado de los Parámetros Indeterminados de Lagrange.

El formalismo de máxima entropía requiere el uso de teorías externas que permitan hallar expresiones para los parámetros indeterminados de Lagrange en términos de las variables relevantes al problema en estudio. Las ecuaciones (7-9) pueden ser reescritas con este fin, utilizándose relaciones derivadas de la mecánica de agujeros negros[1 11] .

La construcción de ecuaciones de tipo hidrodinámico para un sistema de partículas con masa, carga y momento angular dado (sustentadas en ecuaciones de balance para fluidos no disipativos) llevan a una expresión que permite calcular el cambio de energía mecánica del sistema en términos de incrementos de carga, masa y/o momento angular del mismo:

$$dE = \psi\, dQ + \vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \kappa\, dA \tag{24}$$

En la ecuación (24) ψ correspnde al potencial eléctrico, $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema, κ es la gravedad superficial y A es el área de la superficie del hoyo negro.

La comparación de la ecuación (23), correspondiente a la entropía de información, con la ecuación del modelo hidrodinámico (24), sugirió a Bekenstein[1] la idea de identificar a la gravedad superficial con la temperatura en la superficie del hoyo negro, y al área del agujero negro con la entropía del mismo. Para ahondar en esta idea, es posible diferenciar la ecuación (23) y resolver para dM, obteniéndose:

$$d\langle M\rangle = \frac{1}{\eta_1} dS - \frac{\eta_2}{\eta_1} d\,\langle Q\rangle - \frac{\vec{\eta}_3}{\eta_1} \cdot d\,\left\langle \vec{L}\right\rangle \tag{25}$$

Al multilpicarse ambos lados de la ecuación (25) por el cuadrado de la velocidad de la luz c^2, y usar la relación de Einstein (10), esta ecuación adquiere la forma

$$d\langle E\rangle = \gamma_2\, d\,\langle Q\rangle + \vec{\gamma}_3 \cdot d\,\left\langle \vec{L}\right\rangle + \gamma_1 dS \tag{26}$$

De esta manera, la ecuación (26) propone relacionar los parámetros indeterminados de Lagrange con una fenomenología establecida, ecuación (24). La analogía se completa al recordarse la primera ley de la termodinámica para un sistema en equilibrio:

$$dU = dW + T\, dS \tag{27}$$

en donde los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación (26) corresponderían al término dW de la ecuación (27).

4. Una crítica a la metodología basada en la entropía de información.

Si bien el formalismo de máxima entropía se ha logrado aplicar con éxito en la descripción de sistemas termodinámicos en equilibrio local o global, es importante el cuestionar el camino hasta aquí recorrido que ha llevado a la obtención de una expresión para la entropía de un hoyo negro en términos de sus observables.

Primeramente se analizará la aplicabilidad de la hipótesis de equilibrio *termodinámico* de un agujero negro clásico (esto es, sin tomar en cuenta efectos cuánticos). Considérese la siguiente situación: un agujero negro se encuentra inmerso en un almacén térmico que se encuentra a una temperatura determinada (por ejemplo 3 K). Si el agujero negro se hallara a una temperatura superior a la temperatura del almacén, en lugar de que el agujero negro se enfriara y emitiera energía al almacén, absorbería energía del medio. Esto claramente entraría en contradicción con las leyes de la termodinámica.

La solución inmediata a este problema es la consideración de efectos cuánticos en el horizonte de eventos del sistema. Una descripción de la emisión de partículas (aplicable a radiación) por parte de un hoyo negro fue elaborada por Hawking en 1975[21] . A partir de entonces, la mayor parte de los estudios de la termodinámica de agujeros negros se han venido sustentando en ecuaciones tipo (26) junto con mecanismos de emisión de radiación térmica por parte de estos sistemas. Una revisión de estas ideas se da en la siguiente sección de esta tesis.

Obsérvese que la entropía de información hallada, ecuación (23), se refiere a variables exclusivamente mecánicas. En general, los desarrollos que dan lugar a ecuaciones termodinámicas vía teoría de la información tienen como variable macroscópica observable a la temperatura del sistema (si este está en equilibrio). En el desarrollo descrito en la sección anterior, la temperatura aparece al identificarse un coeficiente obtenido por medio de un análisis mecánico con la temperatura de que aparece en la ecuación termostática (27).

Análisis como el expuesto en el párrafo anterior dieron lugar a un fuerte cuestionamiento hacia la sugerencia de Bekenstein. Sin embargo, al predecirse la existencia de radiación emitida por agujeros negros, e involucrarse la temperatura propuesta por Bekenstein, la opinión generalizada cambió y actualmente se acepta en lo esencial la aplicabilidad de las expresiones derivadas por Bekenstein para la temperatura y entropía de hoyos negros. Los problemas conceptuales aquí mencionados, sin embargo, han permanecido sin una respuesta satisfactoria.

B. Teoría Cuántica de los Campos y Mecánica Estadística de Agujeros Negros

1. Cuantización Canónica en un Espacio-Tiempo Plano y Cálculo de las Funciones Termodinámicas.

Una manera sistemática de calcular las funciones termodinámicas de una cavidad radiante en equilibrio puede esquematizarse de acuerdo a las siguientes ideas:

- *La radiación electromagnética en el interior de la cavidad, supuesta en equilibrio con las paredes, puede modelarse en términos de una colección infinita de osciladores armónicos.* Operativamente, esto puede realizarse al construir, a partir de las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones de onda para los potenciales del campo electromagnético. Este procedimiento involucra conocimientos elementales del análisis vectorial, y se encuentra ampliamente descrito en la literatura[12] .

- *En base a la descripción del campo electromagnético en términos de osciladores armónicos, es posible construir un hamiltioniano del sistema en términos de variables canónicas conjugadas.* De esta forma es posible obtener una expresión para la función de partición de la cavidad, de la cual pueden obtenerse funciones termodinámicas que no involucran la cuantización del campo electromagnético.

- *Las variables canónicas conjugadas utilizadas en la construcción del hamiltoniano pueden cuantizarse. Esto se realiza identificándose a las mismas con operadores, y postulando las relaciones de conmutación co-*

rrespondientes. Las relaciones de conmutación tienen la forma:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = \frac{i\,h}{2\,\pi}\delta_{i\,j}\hat{1} \tag{28}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = \hat{0} \tag{29}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0} \tag{30}$$

en donde $\hat{q}_i$ representa el operador para la i-ésima coordenada generalizada, $\hat{p}_j$ corresponde al j-ésimo momentum conjugado, h es la constante de Planck e $\hat{1}$ es el operador identidad. El hamiltoniano construido con estos operadores tiene valores propios enteros, lo que lleva al concepto de cuantización de la energía[12].

- *Las funciones termodinámicas de la radiación pueden hallarse a partir de la matriz de densidad (o de la función de partición) correspondiente a la colección de osciladores armónicos en equilibrio térmico con las paredes.*

El promedio *estadístico cuántico* de cualquier cantidad física R puede ser determinado por medio de la expresión

$$\overline{\left\langle \hat{R} \right\rangle} = Tr\left(\hat{\rho}\,\hat{R}\right) \tag{31}$$

donde $\hat{\rho}$ es el operador de densidad apropiado para el problema, y el símbolo Tr corresponde a la traza de un operador.

En el caso en el cuál la radiación en la cavidad se encuentra en equilibrio térmico con las paredes, *a una temperatura T dada*, el operador de densidad en $t = 0$, correspondiente a un sólo modo de vibración, está dado por[12] :

$$\hat{\rho}(0) = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) e^{-\frac{h\nu}{kT}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}} \tag{32}$$

en donde los operadores de aniquilación y creación $\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger}$ están dados por combinaciones lineales de las coordenadas y momentums generalizados.[12] Nótese que el operador de densidad ya involucra a la temperatura desde su construcción.

La energía promedio por *modo de oscilación* (promedio cuántico) es

$$\overline{\langle h\nu\, \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} = \frac{h\nu}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{33}$$

Si ahora se considera que la densidad de modos en el intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$ está dada por[12]:

$$n(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{34}$$

el espectro deseado adquiere la conocida expresión primeramente hallada por Max Planck:

$$u_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \tag{35}$$

2. Cuantización Canónica en Espacios-Tiempos Curvos y Cálculo de las Funciones Termodinámicas.

El procedimiento seguido por Hawking en 1975[2] fue operativamente muy parecido al desarrollo mostrado en el apartado anterior. Él, sin embargo, partió de ecuaciones de onda covariantes para campos escalares A de la forma:

$$(g^{\nu\mu} A_{;\mu})_{;\nu} = 0 \tag{36}$$

en donde $g^{\nu\mu}$ corresponde al tensor métrico (alguna solución de las ecuaciones de campo de Einstein) y el punto y coma corresponde a la derivación covariante, que para cualquier tensor contravariante de segundo rango $B^{\eta\mu}$ está dada por:

$$B^{\eta\mu}_{;\nu} = \frac{\partial B^{\eta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\lambda\nu}\, B^{\lambda\mu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, B^{\eta\lambda} \tag{37}$$

La ecuación (36) se reduce a la ecuación de ondas usual para una métrica plana.

En el desarrollo de Hawking es posible, una vez más, el identificar variables canónicas conjugadas, postular relaciones de conmutación y calcular variables físicas a partir de los operadores construidos. Hawking utiliza su formalismo para calcular flujos de partículas cruzando en ambas direcciones del horizonte de eventos de un agujero negro. Ello evidentemente se vincula con procesos radiativos y se describirá en el siguiente apartado.

3. Características de la Radiación de Hawking.

El concepto de temperatura utilizado por Hawking es un punto que requiere un cuidadoso análisis. El cálculo de los flujos de partículas en base a la cuantización canónica en espacios-tiempos curvos (que involucra procesos de aniquilación y creación en el horizonte de eventos del agujero negro) es física y matemáticamente satisfactorio. En este contexto, Hawking establece que la temperatura superficial de un agujero negro de Schwarzschild es[21] :

$$T = \frac{h\,c^3}{16\,\pi^2 G M\, k_b} \tag{38}$$

la cuál concuerda con la expresión sugerida por Bekenstein, ecuación (12), y da un valor a la constante ξ de la mencionada ecuación.

Sin embargo, la interpretación de la temperatura de equilibrio del sistema en términos de una igualdad de flujos de partículas entrantes y salientes del agujero negro es cuestionable.

La ley cero de la termodinámica permite inferir la existencia de una variable termodinámica, la temperatura, que tiene la propiedad de tomar el mismo valor para fluidos en equilibrio entre sí. La temperatura puede depender de variables tales como la presión y el volumen, y necesariamente debe involucrar variables que describan *todos* los procesos posibles que intervengan en la dinámica microscópica del sistema.

En este ámbito, se tienen dos conceptos fundamentales.

- La temperatura posee un significado independiente de procesos individuales tales como flujos de partículas entrando y saliendo de un sistema dado.
- Involucrar un sólo proceso electrodinámico (como la creación y aniquilación de partículas), en la definición de una temperatura es, en el mejor de los casos, una aproximación.

4. Métodos Alternativos en la Mecánica Estadística de Hoyos Negros : Sistemas en Equilibrio.

La obtención de un operador de densidad útil en la obtención de promedios estadísticos de magnitudes físicas, ecuación (31), puede darse en diferentes contextos. En particular, técnicas de la mecánica cuántica tales como las integrales de trayectoria[24], pueden ser utilizadas con este fin. Las ideas fundamentales en este contexto son las siguientes:

- En la descripción de la dinámica de la partícula, vía la mecánica cuántica, existe una ecuación diferencial básica, denominada la *ecuación de Schrödinger.* Esta es una ecuación de tipo difusivo en la cuál el conocimiento de la amplitud de probabilidad ψ, permite extraer la máxima información posible de la dinámica del sistema.

- La formulación de Schrödinger de la mecánica cuántica, vía la ecuación diferencial, es equivalente a una formulación integral desarrollada por Feynman en la cuál se asocia una amplitud de probabilidad dada a cualquier posible trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo. La suma sobre todas las posibles trayectorias permite hallar la amplitud de probabilidad total correspondiente a un evento dinámico dado.

- El operador estadístico de densidad ρ obedece a una ecuación diferencial *análoga* a la ecuación de Schrödinger, en la cuál la temperatura de equilibrio del sistema termodinámico es proporcional a un tiempo imaginario.

- La analogía mencionada en el punto anterior permite aplicar los métodos de integrales de Feynman en el cálculo de la matriz de densidad.

Hawking[4] fue capaz de aplicar los métodos de integrales de Feynman en el cálculo de funciones de partición (y por tanto de matrices de densidad) en espacios tiempos curvos. En base a ello logró una vez más calcular los flujos de partículas descritos en los dos apartados anteriores. Ello vino a confirmar la consistencia de sus ideas en el contexto de la mecánica estadística de sistemas en equilibrio.

5. Una Crítica desde el Punto de Vista Termodinámico.

Los desarrollos presentados en este capítulo pueden aplicarse, a lo más, localmente. La vecindad de un agujero negro es un escenario altamente fuera del equilibrio. De esta manera, implícitamente se ha supuesto que el horizonte de eventos se encuentra en equilibrio local y por tanto tiene sentido calcular las funciones de partición y los operadores de densidad.

Por otro lado, proponer ecuaciones de estado que se apliquen a todo el interior de un agujero negro o a toda una región exterior del mismo es, desde el punto de vista termodinámico, una tarea irrealizable. Esto es debido a que las variaciones con respecto del equilibrio termodinámico son demasiado grandes para ser ignoradas.

A pesar de ello, es común el referirse a ecuaciones de estado en relatividad general debido a las características de las ecuaciones de campo de Einstein. La siguiente sección de este trabajo se avoca al análisis de los métodos e ideas en este contexto.

C. Las Ecuaciones de Campo y la Termostática en Espacios-Tiempos Curvos.

1. La Relación de las Ecuaciones de Campo de Einstein con las Ecuaciones de Estado Termostáticas.

- Las variables hidrodinámicas locales correspondientes a fenómenos de transporte en espacios-tiempos curvos están relacionadas con las propiedades geométricas del espacio-tiempo por medio de la ecuación de campo de Einstein:

$$G^{ab} = \kappa T^{ab} \tag{39}$$

  en donde G^{ab} es el tensor de Einstein, T^{ab} corresponde al tensor esfuerzos energía definido para una región determinada del espacio, y κ es un escalar denominado constante de acoplamiento.

En esta ecuación se encuentran implícitas las siguientes definiciones:

a) El tensor de curvatura de Riemann:

$$R^r_{msq} = \Gamma^r_{mq,s} - \Gamma^r_{ms,q} + \Gamma^r_{ns}\Gamma^n_{mq} - \Gamma^r_{nq}\Gamma^n_{ms} \tag{40}$$

donde los símbolos de Christoffel de segunda especie para una métrica g_{ab} están dados por:

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}g^{ab}\left(\frac{\partial\, g_{bm}}{\partial\, x^n} + \frac{\partial\, g_{bn}}{\partial\, x^m} - \frac{\partial\, g_{mn}}{\partial\, x^b}\right) \tag{41}$$

donde el operador de diferenciación parcial es:

$$()_{,k} = \frac{\partial}{\partial\, x^k} \tag{42}$$

y en este capítulo todos los índices varían del cero al tres.

b) El tensor de Ricci escrito de forma covariante:

$$R_{mq} = R^a_{maq} = -R^a_{mqa} \tag{43}$$

que también puede ser escrito en forma mixta,

$$R^a_q = g^{am} R_{mq} \tag{44}$$

o en forma contravariante,

$$R^{ab} = g^{bq} g^{am} R_{mq} \tag{45}$$

c) El escalar de curvatura:

$$R = R^a_a \tag{46}$$

que en términos de los símbolos de Christoffel de segunda especie adquiere la forma:

$$R = g^{am}\left[\Gamma^\ell_{ma,\ell} - \Gamma^\ell_{m\ell,a} + \Gamma^\ell_{n\,\ell}\,\Gamma^n_{m\,a} - \Gamma^\ell_{n\,a}\,\Gamma^n_{m\,\ell}\right] \tag{47}$$

d) El tensor de Einstein:

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}R\, g^{ab} \tag{48}$$

e) Alguna forma del tensor esfuerzos-energía, como puede ser[15]:

$$T^{ab} = \rho_{(o)} v^a v^b - p_{(o)}\, g^{ab} \tag{49}$$

- De acuerdo a lo anterior, la ecuación (39) en forma desarrollada es:

$$g^{bq}g^{am}\left[\Gamma^{s}_{ma,s}-\Gamma^{s}_{ms,q}+\Gamma^{s}_{ns}\Gamma^{n}_{mq}-\Gamma^{s}_{nq}\Gamma^{n}_{ms}\right]-$$
$$\tfrac{1}{2}g^{ab}g^{pm}\left[\Gamma^{\ell}_{mp,\ell}-\Gamma^{\ell}_{m\ell,p}+\Gamma^{\ell}_{n\ell}\Gamma^{n}_{mp}-\Gamma^{\ell}_{np}\Gamma^{n}_{m\ell}\right]=\kappa\left(\rho_{(o)}v^{a}v^{b}-p_{(o)}\,g^{ab}\right) \tag{50}$$

- La solución de la ecuación (50) es en general un problema de muy alto grado de dificultad. Existen distintas alternativas para abordar su solución,

(i) Suponer una métrica *fija* g_{ab} y calcular las variables locales que conforman el tensor esfuerzos-energía por medio de la ecuación de conservación:

$$T^{ab}_{;b}=0 \tag{51}$$

y las consideraciones termodinámicas pertinentes.

En la ecuación (51) la divergencia covariante de cualquier tensor contavariante de segundo rango $B^{ab}_{;b}$ está dada por:

$$B^{ab}_{;b}=\frac{\partial B^{ab}}{\partial x^{b}}+\Gamma^{a}_{\ell b}\,B^{\lambda\ell}+\Gamma^{b}_{\ell b}\,B^{a\ell}\quad , \tag{52}$$

por lo que resulta evidente que es necesario un conocimiento del tensor métrico para efectuar los cálculos con la ecuación de conservación (51).

Este enfoque puede resultar aplicable, por ejemplo, para regiones circundantes a agujeros negros muy masivos. En este caso, la solución exterior de las ecuaciones de campo pueden obtenerse mediante la ecuación[20]:

$$R_{ab}=0 \tag{53}$$

que puede llevar, para el caso de agujeros negros, a métricas tipo Kerr.

Ahora bien, si la cantidad de materia que circunda al agujero negro es muy inferior a la masa del mismo, la técnica basada en la suposición de una métrica fija resulta aceptable para el análisis de las variables hidrodinámicas locales. Este enfoque se aplica en el capítulo 4 de esta tesis, en donde además se analizan las consideraciones termodinámicas pertinentes para el problema.

(ii) Es también posible suponer una forma para el tensor T^{ab} y resolver las ecuaciones de campo en términos de este tensor, junto con la ecuación de conservación (51).

Esta metodología suele aplicarse al interior de agujeros negros tipo Schwarszchild,[20] en donde se propone una forma genérica del tensor métrico asociado a simetría esférica, y se calcula una solución que al mismo tiempo genera una "ecuación de estado" (una relación entre la presión y la densidad).

La técnica es restringida y usualmente presupone la ausencia de corrientes en el interior del agujero negro ($v^a = 0$). Inclusive estos métodos no han podido desarrollarse analíticamente para métricas de Kerr. En general, las hipótesis que reducen el número de incógnitas en la ecuación (50) vienen a substituir consideraciones de tipo termodinámico y tienden a sobresimplificar el problema.

2. El Problema de la Irreversibilidad.

Un problema de gran interés físico es aquél correspondiente a la obtención de los valores de las variables termodinámicas locales en espacios-tiempos curvos. En situaciones realistas es necesario considerar efectos disipativos para este tipo de fenómenos, y es por ello que debe plantearse el cuestionamiento sobre cómo deben incorporarse los efectos disipativos en una descripción física de las funciones termodinámicas locales en el contexto de la teoría general de la relatividad.

Como se mencionó en la parte final del apartado anterior, la solución de la ecuación básica (50) puede hacerse resolviendo la ecuación de balance (51) *con las consideraciones termodinámicas pertinentes*, utilizando una métrica fija, con lo cuál se obtiene una forma del tensor esfuerzos-energía para insertarse en (51) (ello en principio permite hallar una nueva métrica, con lo cuál el proceso puede repetirse, con la esperanza de que el procedimiento sea convergente).

Las "consideraciones termodinámicas pertinentes" en la introducción de efectos disipativos en el problema de transporte de masa-energía en espacios tiempos curvos llevan al planteamiento de posibles formalismos matemáticos de una termodinámica de procesos irreversibles en para geometrías de este tipo. El capítulo 3 de esta tesis se ocupa de la revisión de las ideas convencionales en torno de estos problemas. El cuarto capítulo emplea una técnica ortodoxa que no ha sido previamente utilizada y que permite obtener en forma directa un sistema de ecuaciones de transporte, útil en la obtención de las funciones termodinámicas locales en el ámbito de la teoría de la relatividad.

III. REVISIÓN DE MÉTODOS DE LA TERMODINÁMICA DE PROCESOS IRREVERSIBLES EN ESPACIOS-TIEMP0S CURVOS.

A. El Tensor Esfuerzos-Energía y el Cuadrivector de Calor.

1. Las Leyes de Conservación en Espacios-Tiempos Curvos.

De acuerdo con la ecuación de campo:

$$G^{ab} = \kappa T^{ab} \tag{54}$$

y las identidades de Bianchi para el tensor de curvatura de Riemann (40),

$$R_{amis;q} + R_{am\,qi;s} + R_{am\,sq;i} = 0 \tag{55}$$

es directo[20] establecer la ecuación de conservación:

$$T^{ab}_{;b} = 0 \tag{56}$$

La ecuación (56) contiene 4 componentes. De acuerdo a la convención que se ha venido siguiendo en este trabajo, la componente cero corresponde a la conservación de la masa energía relativista, mientras que las tres componentes restantes se encuentran asociadas a la conservación del ímpetu.

En la física no relativista el tensor de esfuerzos puede escribirse de la forma:

$$N^{ab} = \begin{bmatrix} \rho & \rho\, v^1 & \rho\, v^2 & \rho\, v^3 \\ \rho\, v^1 & \rho\, v^1 v^1 + p & \rho\, v^1 v^2 & \rho\, v^1 v^3 \\ \rho\, v^2 & \rho\, v^2 v^1 & \rho\, v^2 v^2 + p & \rho\, v^2 v^3 \\ \rho\, v^3 & \rho\, v^3 v^1 & \rho\, v^3 v^2 & \rho\, v^3 v^3 + p \end{bmatrix} \tag{57}$$

que conduce a las leyes de conservación de masa e ímpetu no relativistas, en donde:

- ρ representa la densidad local correspondiente al elemento de volumen dado.
- v^i es la cuadrivelocidad del elemento de fluido, medida desde un sistema inercial cualquiera.

- p es la presión local del elemento.

El flujo de calor no aparece en el tensor de esfuerzos en la física no relativista, pero ello no implica que el utilizar la forma (57) como punto de partida en el establecimiento de las ecuaciones de transporte necesariamente implique el desarrollo subsecuente excluya efectos disipativos. El formalismo de Meixner y Prigogine de la termodinámica de procesos irreversibles [14 16] permite dar cuenta de los fenómenos de transferencia de calor sin incorporar al vector de flujo de calor en la ecuación de balance de energía mecánica

$$N^{o\,i}_{;o} = 0 \tag{58}$$

Los cálculos correspondientes se detallan en el capítulo 4 de este trabajo.

Se plantea entonces la cuestión de cómo incorporar el cuadriflujo de calor en las ecuaciones de balance de la física relativista. En el siguiente apartado se analizan las ideas pertinentes al respecto.

2. El papel del Cuadrivector de Calor y la Hipótesis de Equilibrio Local.

Einstein[15] propone como generalización relativista del tensor clásico N^{ab} de la ecuación (57) al tensor

$$T^{ab} = \rho_{(o)}\, v^a v^b - p_{(o)}\, g^{ab} \tag{59}$$

en donde $\rho_{(o)}$ es la densidad medida en el sistema comóvil al elemento de masa, $p_{(o)}$ es la presión local también medida en el sistema comóvil, v^a es la cuadrivelocidad del elemento y g^{ab} es el tensor métrico. De forma tal que las leyes de conservación para la energía *mecánica* y el ímpetu están contenidas en la ecuación:

$$T^{ab}_{;b} = 0 \tag{60}$$

Ahora bien, en este punto entra la cuestión de cómo dar cuenta de los procesos de transferencia de calor en el balance de energía *total,* considerando al flujo de calor como responsable de todo transporte de energía no mecánica.

Misner, Thorne y Wheeler[9] plantean incorporar los efectos disipativos en el tensor de esfuerzos proponiendo como base de las ecuaciones de transporte para flujo no viscoso al tensor:

$$T^{ab} = \rho_{(o)}\, v^a v^b + (g^{ab} + \frac{v^a v^b}{c^2})\, p_{(o)} + q^a v^b + q^b v^a \tag{61}$$

en donde q^a representa el cuadriflujo de calor por unidad de área del que atraviesa la superficie del elemento de volumen de fluido.

El término $\frac{v^a v^b}{c^2}$ no aparece en el tensor propuesto por Einstein[15], pero tal y como se verá en el apéndice 3, este término no influye en las consideraciones termodinámicas del problema. Por otro lado, el tensor (61) involucra, en sus dos últimos términos, contribuciones al ímpetu lineal del sistema debidas al flujo de calor. Ello implica necesariamente una interpretación del flujo de calor como una forma mecánica de energía.

En el esquema no relativista mencionado al principio de esta sección se excluye al flujo de calor del tensor básico, con miras a dar al calor una interpretación que incorpore todas las formas de energía *no mecánica*, y por ello valdría la pena preguntarse si acaso es posible plantear un desarrollo relativista en los mismos términos.

Una motivación para ello es el hecho de que casi todos los formalismos planteados con tensores del tipo (61) llevan a ecuaciones de transporte con problemas de causalidad, involucrando propagación de energía a velocidades superiores a la de la luz[25 26 27] .

Werner Israel[18] utilizó tensores que involucran al flujo de calor desde su construcción y evadió el problema de la causalidad en las ecuaciones de transporte al involucrar términos de segundo orden en la producción de entropía del sistema. En la siguiente sección de este capítulo se revisan las principales ideas de ese desarrollo. En el capítulo 4 se desarrolla un formalismo diferente que lleva a ecuaciones de transporte libres de interpretaciones mecánicas para el cuadriflujo de calor y que lleva a ecuaciones de transporte de tipo hiperbólico. Posteriormente se establece una comparación de ambos esquemas.

B. Ideas Esenciales de la Termodinámica de Segundo Orden de Israel.

1. Leyes de Conservación en la Termodinámica de Segundo Orden de Israel.

Después de subrayar los distintos problemas conceptuales que se presentan al intentar definir una velocidad hidrodinámica para un elemento de volumen de fluido, Israel propone distintas alternativas para el tensor de esfuerzos-energía, a los cuales siempre se les exigirá que satisfagan la ecuación de conservación:

$$T^{ab}_{;b} = 0 \tag{62}$$

Dichas alternativas se fundamentan en el supuesto (utilizado por Israel) de que, para sistemas fuera del equilibrio, no es posible asignar una velocidad hidrodinámica única para el elemento de fluido. Israel propone la existencia de dos velocidades posibles para incorporar en el tensor de esfuerzos-energía:

a) Una velocidad paralela al flujo de partículas u^{μ}_{N}.

b) Una velocidad paralela al eigenvector del tensor T^{ab}, que se denominará u^{μ}_{E}.

Se propone que la relación entre ambos cuadrivectores de velocidad es, para ligeras desviaciones del equilibrio[18]:

$$u^{\mu}_{E} = u^{\mu}_{N} + \frac{1}{\rho\, c^2 + p}\, q^{\mu} + O_2 \tag{63}$$

en donde ρ y p son la densidad y presión medidas en el sistema local, q^{μ} es el cuadrivector de flujo de calor, y O_2 representa términos especificados de segundo orden en las desviaciones con respecto al equilibrio local.

Ahora bien, en el límite no relativista, es posible el definir una velocidad hidrodinámica única, y no queda claro de la ecuación (63) el cómo coinciden las definiciones u^{μ}_{N} y u^{μ}_{E} en el límite de bajas velocidades.

El tensor de esfuerzos-energía que utiliza Israel se ubica entonces en dos contextos:

- En el sistema de flujo de partículas (en ausencia de viscosidad y de esfuerzos cortantes):

$$T^{\alpha\beta} = \rho\, u_N^\alpha\, u_N^\beta + p\,\Delta_N^{\alpha\beta} + q^\alpha u_N^\beta + q^\beta u_N^\alpha \tag{64}$$

  en donde $\Delta_N^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{u_N^\alpha\, u_N^\beta}{c^2}$.

- En el sistema de energía:

$$T^{\alpha\beta} = \rho\, u_E^\alpha\, u_E^\beta + p\,\Delta_E^{\alpha\beta} + q^\alpha u_N^\beta + q^\beta u_N^\alpha \tag{65}$$

en donde $\Delta_E^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{u_E^\alpha\, u_E^\beta}{c^2}$

Es de hacerse notar que, en ambos casos, se involucra a variables termodinámicas locales en la construcción inicial del tensor de esfuerzos-energía. Ello lleva necesariamente a la inclusión del cuadrivector de calor en el balance energía *mecánica* e implica interpretaciones mecánicas del flujo de calor.

2. La Hipótesis de Equilibrio Local y La Producción de Entropía en la Termodinámica de Segundo Orden de Israel.

Israel[18] explicita un par de ecuaciones en donde se hace ver, de acuerdo a los dos posibles formalismos mencionados en la sección anterior, a la entropía local como una funcional, independiente del tiempo, de la densidad y de la energía interna locales:

$$S_E = S_{eq}(\rho_E, n_E) \tag{66}$$

$$S_N = S_{eq}(\rho_N, n_N) \tag{67}$$

En este contexto, Israel no sigue un procedimiento ortodoxo[14] en el cuál se separen las formas mecánicas y no mecánicas de energía para establecer las ecuaciones de transporte. Esta alternativa se analiza en siguiente capítulo de la tesis.

En lugar de ello, Israel propone:

a) Una ecuación constitutiva para el flujo de calor en términos de la temperatura, T, la aceleración local y la derivada del flujo de calor. A saber:

$$q^\alpha = -\kappa T\, \Delta_N^{\alpha\beta} \left(\frac{T_{;\beta}}{T} + \dot{u}_\beta + \bar{\beta}_1 \dot{q}_\beta \right) \tag{68}$$

en donde κ corresponde a la conductividad térmica del sistema, y $\bar{\beta}_1$ es una constante de proporcionalidad.

b) Un flujo de entropía dado por:

$$S^\mu = u_N\, S_N + \frac{q_N^\mu}{T} - Q_N^\mu \tag{69}$$

en donde Q_N^μ representa contribuciones de segundo orden al flujo de entropía.

c) Una producción de entropía dada por

$$S^\mu_{;\mu} = \frac{q^\mu q_\mu}{k T^2} \tag{70}$$

que se obtiene a partir las ecuación fenomenológica (68) y del flujo de entropía[18] (69).

El formalismo de Israel conduce a un sistema de ecuaciones de transporte en el cuál no aparecen problemas de causalidad en los fenómenos de transferencia de calor y de transporte de masa. Este sistema es complejo y tiene la desventaja de incluir parámetros ajustables en la teoría.

El procedimiento ortodoxo[14 16] conlleva un orden y una lógica diferentes. Esto se hace ver en el siguiente capítulo.

IV. EL ESQUEMA MEIXNER-PRIGOGINE DE LA TERMODINÁMICA DE PROCESOS IRREVERSIBLES EN ESPACIOS-TIEMPOS CURVOS: ANÁLISIS DE FLUJO NO VISCOSO.

En este capítulo se plantea una alternativa conceptualmente simple que permite establecer las ecuaciones de transporte en espacios-tiempos curvos. Estas ecuaciones pueden, en principio, determinar las funciones termodinámicas de un elemento de fluido. Este objetivo se ha perseguido utilizando otras metodologías, algunas de las cuales se han estudiado en capítulos anteriores; sin embargo, esta es la primera vez que el esquema de Meixner y Prigogine se aplica al estudio de este tipo de problemas. Los resultados obtenidos, como se verá, resultan satisfactorios.

A. Síntesis del Esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal No Relativista.

1. Ecuaciones No Relativistas de Balance de Masa y Momentum y Principio de Equilibrio Local.

Un punto de partida posible en el desarrollo no relativista correspondiente al fluido isotrópico no viscoso es el tensor (escrito aquí en coordenadas cartesianas):

$$N^{ab} = \begin{bmatrix} \rho & \rho u^1 & \rho u^2 & \rho u^3 \\ \rho u^1 & \rho u^1 u^1 + p & \rho u^1 u^2 & \rho u^1 u^3 \\ \rho u^2 & \rho u^2 u^1 & \rho u^2 u^2 + p & \rho u^2 u^3 \\ \rho u^3 & \rho u^3 u^1 & \rho u^3 u^2 & \rho u^3 u^3 + p \end{bmatrix} \tag{71}$$

en donde:

- ρ representa la densidad local correspondiente al elemento de volumen dado.

- u^i es la velocidad local del elemento de fluido, medida desde un sistema inercial cualquiera.
- p es la presión local del elemento.

En el desarrollo no relativista no es necesario considerar efectos en la densidad y la presión asociados a la velocidad del elemento, o a la curvatura del espacio en el cuál éste se encuentre.

Para el caso *no relativista* es posible definir el operador

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \tag{72}$$

donde el índice griego α adquiere valores de cero a tres.

De esta forma, los balances de masa y momentum lineal están ambos contenidos en la expresión (válida en ausencia de fuerzas externas):

$$\frac{\partial N^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0 \tag{73}$$

2. Balance de Masa.

El balance de masa se obtiene de la ecuación (73) haciendo $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\rho u^k\right)}{\partial x^k} \tag{74}$$

donde los índices latinos varían del uno al tres.

3. Balance de Ímpetu .

El balance de ímpetu se obtiene de la ecuación (73) tomando $\alpha = j$:

$$\frac{\partial \left(\rho u^j\right)}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\rho u^j u^k + p \delta^{jk}\right)}{\partial x^k} \tag{75}$$

La ecuación (75) aparece en los textos de la mecánica de los fluidos elemental, aunque generalmente suele deducirse con argumentos de tipo geométrico.

4. Ecuaciones en Derivadas Totales para los Balances de Masa e Ímpetu.

Al considerarse el operador de derivada total no relativista:

$$\frac{d}{dt} = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad , \tag{76}$$

las ecuaciones (74,75) pueden respectivamente escribirse, en términos de derivadas totales como:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \tag{77}$$

y

$$\rho \frac{d u^k}{dt} = -\delta^{k\ell} \frac{\partial p}{\partial x^\ell} \tag{78}$$

Para el caso del fluido isotrópico no viscoso, la ecuación de movimiento (77) se conoce como la ecuación de Euler. La ecuación de continuidad (78) será de utilidad en la construcción de los balances de energía interna y entropía locales del sistema.

5. Hipótesis de Equilibrio Local.

De acuerdo al principio de equilibrio local, la entropía específica s es una funcional independiente del tiempo de las variables intensivas ρ y e_{int} (energía interna):

$$s = s(\rho, e_{int}) \tag{79}$$

de forma que la derivada total de la entropía local con respecto del tiempo es:

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_{e_{int}} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial e_{int}}\right)_{\rho} \frac{d e_{int}}{dt} \tag{80}$$

Recuérdese que en las ecuaciones (79-80) las variables están medidas en con respecto a un sistema inercial cualquiera. No se se consideran efectos de la velocidad o la curvatura sobre las variables termodinámicas locales.

En el esquema Meixner-Prigogine de la T.I.L. se busca una ecuación de balance de entropía de la forma:

$$\rho \frac{d\, s}{d\, t} + \frac{\partial\, J_{[s]}^{k}}{\partial\, x^{k}} = \sigma \tag{81}$$

en donde $J_{[s]}^{k}$ representa un flujo de entropía, y σ es una expresión semipositiva definida denominada producción de entropía.

Para establecer una ecuación del tipo (81) es necesario reemplazar (77) en (80), y además encontrar una forma de escribir a la derivada total de la energía interna respecto al tiempo, para insertarla en el último término de la ecuación (81).

6. Balance de energía no relativista

La densidad de energía cinética no relativista tiene la forma.

$$e_{cin} = \frac{1}{2} \rho\, u^{2} \tag{82}$$

En ausencia de fuezas externas, la densidad de energía cinética corresponde a la densidad de energía mecánica total.

La ecuación de balance puede obtenerse a partir de la ecuación de Euler (78), que al multiplicarse escalarmente por el vector de velocidad u_k adquiere la forma:

$$\rho\, u_{k} \frac{d\, u^{k}}{d t} = -u_{k}\, \delta^{k\ell} \frac{\partial\, p}{\partial\, x^{\ell}} \tag{83}$$

o bien:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\, u^{2}}{d t} = -\frac{\partial \left(p\, u^{k} \right)}{\partial\, x^{k}} + p \frac{\partial\, u^{k}}{\partial\, x^{k}} \tag{84}$$

Con ayuda de la ecuación de continuidad y del operador de derivada total (76) el balance de energía mecánica adquiere la forma:

$$\frac{\partial}{\partial\, t} \left(\frac{\rho}{2} u^{2} \right) + \frac{\partial}{\partial\, x^{k}} \left(u^{k} \frac{\rho}{2} u^{2} + p\, u_{k} \right) = p \frac{\partial\, u^{k}}{\partial\, x^{k}} \tag{85}$$

El término del lado derecho de la ecuación (85) se denomina *término de Raleigh*, y su no anulación es fundamental para la obtención de las ecuaciones de transporte conocidas de la física no relativista.

La energía interna del elemento de volumen y el *flujo de calor* aparecen por vez primera al postularse la conservación de la energía total en los siguientes términos:

- El flujo de energía total está dado por tres términos: un flujo de energía mecánica, un flujo de energía interna y un flujo de calor:

$$J_{[T]}^{k} = u_k \frac{\rho}{2} u^2 + \rho u^k e_{int} + J_{[Q]}^{k} \tag{86}$$

- La densidad de energía total consta de dos términos: uno corresponde a la densidad de energía cinética, y el otro es la densidad de energía interna.

$$\rho\, e_{tot} = \frac{1}{2} \rho\, u^2 + \rho\, e_{int} \tag{87}$$

- De esta forma, combinando la expresión de balance de energía total :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\, e_{tot}) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(J_{[T]}^{k} \right) = 0 \tag{88}$$

  y la ecuación (85), se obtiene la ecuación para la energía interna:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\, e_{int}) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\rho u^k e_{int} + J_{[Q]}^{k} \right) = -p \frac{\partial\, u^k}{\partial\, x^k} \tag{89}$$

Para finalizar este apartado se reescribe la ecuación (89) en términos de la derivada total respecto del tiempo con ayuda del operador (76):

$$\rho \frac{d\, e_{int}}{d\, t} = - \frac{\partial\, J_{[Q]}^{k}}{\partial\, x^k} - p \frac{\partial\, u^k}{\partial\, x^k} \tag{90}$$

7. Producción de Entropía para Flujo No Viscoso en el Caso No Relativista.

Es posible ahora retornar a la ecuación (80). Reemplazando en ella las ecuaciones (77) y (101), se obtiene:

$$\rho \frac{d s}{d t} = -\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_{e_{int}} \rho^2 \frac{\partial u^k}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial s}{\partial e_{int}}\right)_{\rho} \left(\frac{\partial J^k_{[Q]}}{\partial x^k} + p \frac{\partial u^k}{\partial x^k}\right) \tag{91}$$

Ahora bien, a continuación se hace uso de las relaciones de la termostática:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial e_{int}}\right)_{\rho} = \frac{1}{\Theta} \tag{92}$$

y

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_{e_{int}} = -\frac{p}{\rho^2 \Theta} \tag{93}$$

donde Θ es la temperatura definida por la ley cero de la termodinámica en el sistema inercial dado.

Así, la ecuación (91) adquiere la forma:

$$\rho \frac{d s}{d t} = -\left(\frac{1}{\Theta}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(J^k_{[Q]}\right) \tag{94}$$

que después de un álgebra mínima conduce a la ecuación de balance de entropía:

$$\rho \frac{d s}{d t} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{J^k_{[Q]}}{\Theta}\right) = -\left(\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial x^k}}{\Theta^2}\right) \left(J^k_{[Q]}\right) \tag{95}$$

De esta manera se obtienen expresiones para el flujo de entropía:

$$J^k_{[S]} = \frac{J^k_{[Q]}}{\Theta} \tag{96}$$

y para la producción de entropía:

$$\sigma = -\left(\frac{1}{\Theta^2}\right) \frac{\partial \Theta}{\partial x^k} \left(J^k_{[Q]}\right) \tag{97}$$

8. Ley de Fourier.

La producción de entropía (97) debe ser semipositiva definida. La forma más simple de asegurar que esto se cumpla es por medio de la ecuación constitutiva (ley de Fourier):

$$J^k_{[Q]} = -k'\delta^{k\ell}\left(\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,x^\ell}\right) \tag{98}$$

en donde k' es una constante positiva, en términos de la cual puede definirse la conductividad térmica del sistema k como,

$$k = \frac{k'}{\Theta^2} \tag{99}$$

La producción de entropía adquiere entonces la forma semidefinida positiva:

$$\sigma = k\left(\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,x^k}\right)^2 \tag{100}$$

9. Ecuación de Calor.

La distribución de temperaturas del sistema queda en principio determinada por la ecuación diferencial parcial obtenible del balance de energía interna (101):

$$\rho\frac{d\,e_{int}}{d\,t} = -\frac{\partial\,J^k_{[Q]}}{\partial\,x^k} - p\frac{\partial\,u^k}{\partial\,x^k} \tag{101}$$

en donde la relación constitutiva (98) puede insertarse en el primer término del lado derecho de la ecuación (101), y el lado izquierdo puede ser reescrito como:

$$\rho\frac{d\,e_{int}}{d\,t} = \rho\left[\left(\frac{\partial\,e_{int}}{\partial\,\rho}\right)_\Theta\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial\,e_{int}}{\partial\,\Theta}\right)_{e_{int}}\frac{d\Theta}{dt}\right] \tag{102}$$

Las derivadas parciales en la ecuación (102) son conocidas de la termostática:

$$\left(\frac{\partial\,e_{int}}{\partial\,\rho}\right)_\Theta = \left(\frac{\beta}{\kappa_\Theta}\right)\frac{\Theta}{\rho^2} - \frac{p}{\rho^2} \tag{103}$$

y

$$\left(\frac{\partial e_{int}}{\partial \Theta}\right)_{e_{int}} = c_p \tag{104}$$

de manera tal que la ecuacion de calor en ausencia de viscosidad se escribe como:

$$\left(-\frac{\beta}{\kappa_\Theta}\frac{\Theta}{\rho} + \frac{p}{\rho}\right)\frac{d\rho}{dt} + \rho\, c_p \frac{d\Theta}{dt} = -\delta^{\ell k}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(-k\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x^\ell}\right)\right) - p\frac{\partial u^k}{\partial x^k} \tag{105}$$

o bien, usando la ecuación de continuidad (77):

$$\frac{\beta}{\kappa_\Theta}\frac{\Theta}{\rho}\frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \rho\, c_p \frac{d\Theta}{dt} = \delta^{\ell k}\frac{\partial}{\partial x^\ell}\left[-k\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x^k}\right)\right] \tag{106}$$

Esta última ecuación, para el caso en que la conductividad térmica sea constante y $u_k = 0$, se reduce a la conocida ecuación elemental.

$$\rho\, c_p \frac{\partial \Theta}{\partial t} = k\,\nabla^2 \Theta \tag{107}$$

La ecuación (107) es una ecuación tipo difusión que, como es bien sabido, tiene problemas de causalidad al admitir propagación de señales a velocidades mayores que la velocidad de la luz. Es de esperarse que en el desarrollo relativista del esquema de Meixner y Prigogine de la T.I.L. , esta dificultad quede superada.

B. El Esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal Relativista.

1. El Tensor Esfuerzos-Energía.

En el desarrollo relativista del esquema Meixner-Prigogine de la T.I.L.[29] para un fluido isotrópico no viscoso, un punto de partida posible es el tensor esfuerzos-energía dado por[15] :

$$T^{\mu\nu} = \rho_{(o)}\, v^\mu v^\nu - p_{(o)}\, g^{\mu\nu} \tag{108}$$

En el tensor definido en (108) las variables $\rho_{(o)}$ y $p_{(o)}$ representan respectivamente a la densidad y la presión del elemento de fluido medidos en el sistema comóvil al elemento. Estas cantidades son escalares (invariantes) y al ser muiltiplicadas por tensores de segundo rango (en el primer término con el producto directo de los cuadrivectores de velocidad v^μ y v^ν, y en el segundo por el tensor métrico $g^{\mu\nu}$), forman a su vez un tensor de segundo rango.

Otra manera de comenzar el desarrollo es el tensor esfuerzos-energía propuesto, entre otros, por Misner, Thorne y Wheeler[9],

$$T^{\mu\nu} = \rho_{(o)}\, v^\mu v^\nu - p_{(o)}\, g^{\mu\nu} + \frac{p_{(o)}}{c^2}\, v^\mu v^\nu \tag{109}$$

En el apéndice tres de esta tesis se muestra que las expresiones para las relaciones termodinámicas inferibles del esquema son iguales, ya sea usando el tensor (108), o el tensor (109). Einstein[15] , justifica ampliamente el uso del tensor (108) para su desarrollo de la mecánica de medios continuos en relatividad general, y será este mismo tensor el que se utilice en lo que resta de este trabajo.

2. Métricas a Utilizar.

Para un espacio-tiempo de Minkowsky, en coordenadas cartesianas, el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ se reduce a:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{110}$$

La solución de Schwarszchild de las ecuaciones de campo de Einstein (métrica independiente del tiempo con simetría esférica) se empleará más adelante en este trabajo y está dada por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{111}$$

3. Derivación Covariante

En el caso relativista es conveniente definir la operación de derivación covariante que, para fines de este trabajo, bastará ser definida para tensores contravariantes de primero y segundo rango.

Dicha operación es, para un tensor contravariante de primer rango A^{μ}:

$$A^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\,\nu}\, A^{\lambda} \tag{112}$$

y para un tensor contravariante de segundo rango $B^{\eta\,\mu}$:

$$B^{\eta\,\mu}_{;\nu} = \frac{\partial B^{\eta\,\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\lambda\,\nu}\, B^{\lambda\,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\,\nu}\, B^{\eta\,\lambda} \tag{113}$$

en donde los objetos $\Gamma^{\mu}_{\lambda\,\nu}$ son los símbolos de Christoffel de segunda especie correspondientes a una métrica dada.

Una vez más los índices griegos corren del cero al tres, correspondiendo el índice cero a la componente temporal del objeto. Para el caso de una métrica plana, en coordenadas cartesianas, el operador de derivación estará dado por:

$$()_{,\nu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \tag{114}$$

4. Ecuación Fundamental de Balance

En ausencia de fuerzas externas, los balances de energía e ímpetu están contenidos en la ecuación (que es a su vez compatible con las ecuaciones de campo de Einstein):

$$T^{\mu\,\nu}_{;\nu} = 0 \tag{115}$$

Es importante hacer notar que el balance de energía, incluyendo flujos de calor puede realizarse sin introducir el flujo de calor en el tensor energía-momentum, tal y como ocurre en el caso no relativista. Este punto se comentará ampliamente más adelante.

5. Ecuación de Continuidad en Espacios-Tiempos Curvos.

El desarrollo de la cuadridivergencia (115) lleva directamente a la expresión

$$\rho_{(o)}\, v^{\mu} v^{\nu}_{;\nu} + v^{\nu}\left(\rho_{(o)}\, v^{\mu}\right)_{;\nu} - p^{;\mu}_{(o)} = 0 \tag{116}$$

al tomarse el producto escalar con el cuadrivector covariante de velocidad v_{μ}, se tiene la ecuación:

$$\rho_{(o)}\, v_{\mu}\, v^{\mu} v^{\nu}_{;\nu} + v_{\mu}\, v^{\nu}\left(\rho_{(o)}\, v^{\mu}\right)_{;\nu} - v_{\mu}\, p^{;\mu}_{(o)} = 0 \tag{117}$$

Ahora bien, al considerarse la identidad:

$$v_{\mu}\, v^{\mu} = c^2 \tag{118}$$

y el operador de derivada total *con respecto al tiempo propio:*

$$\frac{d}{d\tau} = v^{\nu}\, ()_{;\nu} \tag{119}$$

el álgebra directa conduce a las expresiones equivalentes de la ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} = -\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\tau} \tag{120}$$

y

$$\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} = +\frac{1}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\tau} \tag{121}$$

Estas ecuaciones pueden hallarse en referencias clásicas sobre la mecánica relativista de medios continuos[15]. El límite no relativista de la ecuación (120) puede hallarse en el apéndice 1 de este trabajo.

6. Balance de Impetu (Ecuación de Euler Relativista).

Para hallar la ecuación de movimiento del elemento de fluido isotrópico no viscoso se parte de la ecuación:

$$\rho_{(o)}\, v^{\nu} v^{\mu}_{;\nu} + \rho_{(o)} v^{\mu}\, v^{\nu}_{;\nu} + v^{\mu} \rho_{(o);\nu}\, v^{\nu} = p^{;\mu}_{(o)} \tag{122}$$

que se obtiene al tomar la cuadridivergencia del tensor esfuerzos-energía (115).

Utilizando el operador (119) se tiene que:

$$\rho_{(o)}\frac{d\,v^{\mu}}{d\,\tau}+v^{\mu}\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau}+\rho_{(o)}v^{\mu}\,v^{\nu}_{;\nu}=p^{;\mu}_{(o)} \tag{123}$$

Si ahora se combinan la ecuación (123) con la ecuación de continuidad (120), multiplicada por la cuadrivelocidad v^{μ}:

$$v^{\mu}\left(\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau}+\rho_{(o)}v^{\nu}_{;\nu}\right)=v^{\mu}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\,\tau}\right) \tag{124}$$

se obtiene la *ecuación de Euler relativista*:

$$\rho_{(o)}\frac{d\,v^{\mu}}{d\,\tau}=p^{;\mu}_{(o)}-\frac{v^{\mu}}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\,\tau} \tag{125}$$

El límite no relativista de esta ecuación se estudia en el apéndice 1 de la tesis, en donde se hace ver que las componentes espaciales dan lugar a la ecuación de Euler (78), mientras que la componente temporal lleva directamente a la ecuación de balance de energía cinética no relativista (84).

7. Hipótesis de Equilibrio Local.

Al igual que en el desarrollo del esquema de Meixner y Prigogine de la T.I.L. no relativista, se supondrá que la entropía específica local $s_{(o)}$, medida en el sistema comóvil, es una funcional de las variables $\rho_{(o)}$ y $e_{int(o)}$:

$$s_{(o)}=s_{(o)}\left(\rho_{(o)}\left(x^{\mu}\right),e_{int(o)}\left(x^{\mu}\right)\right) \tag{126}$$

Ahora bien, de acuerdo al prinicipio de equivalencia, la derivada total de la entropía local debe tomarse con respecto al tiempo propio τ:

$$\frac{d\,s_{(o)}}{d\,\tau}=\left(\frac{\partial\,s_{(o)}}{\partial\,\rho}\right)_{e_{int}}\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau}+\left(\frac{\partial\,s_{(o)}}{\partial\,e_{int}}\right)_{\rho}\frac{d\,e_{int(o)}}{d\,\tau} \tag{127}$$

La ecuación genérica del balance de entropía es:

$$J^{\nu}_{[ST]\,;\nu}=\sigma \tag{128}$$

en donde $J^{\nu}_{[ST]}$ representa un cuadriflujo de entropía, y σ es una expresión semipositiva definida que corresponde a la producción de entropía.

El cuadriflujo de entropía total, al igual que en el caso no relativista consta de un término convectivo y otro asociado a formas de energía tales como el calor:

$$J^{\nu}_{[ST]} = \rho_{(o)}\, s_{(o)}\, v^{\nu} + J^{\nu}_{[s]}$$

Al hacer uso del operador (119) se obtiene la ecuación de balance en términos de la derivada total respecto del tiempo propio:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, s_{(o)}}{d\,\tau} + J^{\nu}_{[s]\,;\nu} + \left(\frac{d\, \rho_{(o)}}{d\,\tau} + \rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} \right) s_{(o)} = \sigma \tag{129}$$

Los detalles del cálculo, así como la comparación explícita con la expresión no relativista pueden hallarse en el apéndice 2 de este escrito.

Ahora bien, al insertarse la ecuación de continuidad relativista (120) en la ecuación (129), se obtiene la expresión útil:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, s_{(o)}}{d\,\tau} + \left(\frac{1}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\,\tau} \right) s_{(o)} + J^{\nu}_{[s]\,;\nu} = \sigma \tag{130}$$

Al igual que en el caso no relativista, para establecer una ecuación del tipo (130) es necesario reemplazar (120) en (127), para así una forma de escribir a la derivada total de la energía interna respecto al tiempo propio. Esta expresión se insertar en el último término de la ecuación (127), lo cuál posibilita la deducción de expresiones para el flujo y la producción de entropía.

8. Balance de Energía Relativista.

El punto de partida para el balance de energía es la ecuación de Euler relativista:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, v^{\mu}}{d\,\tau} = p^{;\mu}_{(o)} - \frac{v^{\mu}}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\,\tau} \tag{131}$$

En el apéndice 2 se muestra el cálculo explícito mediante el cuál se hace ver que, en el límite no relativista, la ecuación (131) se reduce a la ecuación de balance para la energía cinética newtoniana (83).

Al tomarse la componente cero de esta ecuación, multiplicarse ambos lados por la velocidad de la luz c, y utilizrse la definición del cuadrivector de velocidad (válida para métricas diagonales),

$$v^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} c \\ \gamma\, u^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{g_{oo}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{u^k}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \tag{132}$$

se tiene la igualdad:

$$\rho_{(o)} \frac{d}{d\tau}(v^o) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(p_{(o)}\right) = p_{(o)}^{;o} \tag{133}$$

El uso del operador de derivada total (119) lleva a la relación:

$$\rho_{(o)}\, v^{\nu}\,(v^o)_{;\nu} = p_{(o)}^{;o} - \frac{v^o}{c^2} v^{\nu}\left(p_{(o)}\right)_{;\nu} \tag{134}$$

Es de observarse que de esta última expresión puede generarse una ecuación de balance al reescribirla de la forma:

$$\left(\rho_{(o)}\, c^2\, v^{\nu} \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\right)_{;\nu} - c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} = c\, p_{(o)}^{;o} - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\, p_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} + p_{(o)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \tag{135}$$

Al combinarse esta última expresión con la ecuación de continuidad (162) y realizar manipulaciones algebraicas menores se obtiene la ecuación de balance de energía mecánica:

$$\left(\rho_{(o)}\, c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} v^{\nu} - p_{(o)}\, c\, g^{o\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} p_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} = p_{(o)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} - \frac{\gamma\, c^2}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \tag{136}$$

De esta manera puede definirse el flujo de energía mecánica de la forma:

$$J^{\nu}_{[M]} = \rho_{(o)}\, c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\, v^{\nu} - c p_{(o)} g^{o\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} p_{(o)}\, v^{\nu} \tag{137}$$

de manera que

$$J^{\nu}_{[M];\nu} = p_{(o)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} - c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \tag{138}$$

La energía interna del elemento de volumen y el *flujo de calor* aparecen en este contexto al postularse la conservación de la energía total de acuerdo a las siguientes ideas:

- El cuadriflujo de energía total está dado por cinco términos: los tres primeros representan un flujo de energía mecánica, el cuarto, un flujo de energía interna y el último un flujo de calor:

$$J^{\nu}_{[T]} = \rho_{(o)}\, c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} v^{\nu} - c p_{(o)} g^{o\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} p_{(o)}\, v^{\nu} + \rho_{(o)} v^{\nu} e_{int(o)} + J^{\nu}_{[Q]} \quad (139)$$

- De esta forma, combinando la expresión de balance de energía total :

$$\left(J^{\nu}_{[T]}\right)_{;\nu} = 0 \quad (140)$$

y la ecuación (137), se obtiene la expresión de balance para la energía interna:

$$\left(\rho_{(o)}\, e_{int(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} = -J^{\nu}_{[Q];\nu} - p_{(o)} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} v^{\nu}\right)_{;\nu} + c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} \left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \quad (141)$$

Para finalizar esta sección se reescribe la ecuación (141) en términos de la derivada total respecto del *tiempo propio* con ayuda del operador (119) y la ecuación de continuidad (120):

$$\rho_{(o)} \frac{d\, e_{int(o)}}{d\,\tau} = -\frac{e_{int(o)}}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\,\tau} - J^{\nu}_{[Q];\nu} - p_{(o)} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} v^{\nu}\right)_{;\nu} + c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} \left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \quad (142)$$

9. Producción de Entropía para un Flujo No Viscoso en Relatividad General.

Es posible ahora retornar a la ecuación (127). Reemplazando en esta expresión las ecuaciones (120) y (154), se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_{(o)} \frac{d\, s_{(o)}}{d\,\tau} = \rho_{(o)} \left(\frac{\partial\, s_{(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}}\right)_{e_{int\,(o)}} \left(-\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\,\tau}\right) + \left(\frac{\partial\, s}{\partial\, e_{int(o)}}\right)_{\rho} \times \\ \left(-\frac{e_{int(o)}}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\,\tau} - J^{\nu}_{[Q];\nu} - p_{(o)} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} v^{\nu}\right)_{;\nu} + c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} \left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu}\right) \end{aligned} \quad (143)$$

Ahora bien, al hacerse uso de las relaciones de la termostática (válidas en el sistema comóvil por el principio de equivalencia):

$$\left(\frac{\partial\, s_{(o)}}{\partial\, e_{int(o)}}\right)_{\rho_{(o)}} = \frac{1}{\Theta_{(o)}} \tag{144}$$

y

$$\left(\frac{\partial\, s_{(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}}\right)_{e_{int\,(o)}} = -\frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}^2 \Theta_{(o)}} \tag{145}$$

con ayuda de la ecuación de continuidad (120), la ecuación (143) adquiere la forma (apéndice2):

$$\rho_{(o)} \frac{d\, s_{(o)}}{d\, \tau} + \frac{1}{c^2} \frac{d\, p}{d\, \tau} \left(\frac{e_{int(o)}}{\Theta_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}\Theta_{(o)}} + \frac{c^2 \gamma}{\sqrt{g_{oo}}\Theta_{(o)}}\right) s_{(o)} +$$
$$\left[\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right) \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}\,\Theta_{(o)}} v^\nu + \frac{J^\nu_{[Q]}}{\Theta_{(o)}}\right]_{;\nu} = -\left(\frac{\Theta_{;\nu}}{\Theta^2}\right) J^\nu_{[Q]} - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right) v^\nu \left(\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}\right)_{;\nu} \tag{146}$$

De esta manera se obtienen:

– Una expresión para el flujo de entropía:

$$J^\nu_{[S]} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right) \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}} v^\nu + \frac{J^\nu_{[Q]}}{\Theta_{(o)}} \tag{147}$$

– Una relación para le entropía específica en el sistema comóvil:

$$s_{(o)} = \frac{e_{int(o)}}{\Theta_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}\Theta_{(o)}} + \frac{c^2\,\gamma}{\sqrt{g_{oo}}\Theta_{(o)}} \tag{148}$$

– La producción de entropía:

$$\sigma = -\left(\frac{\Theta_{;\nu}}{\Theta^2}\right) J^\nu_{[Q]} - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right) v^\nu \left(\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}\right)_{;\nu} \tag{149}$$

10. Ecuaciones Constitutivas:

La producción de entropía (149) debe ser semipositiva definida. La forma más simple de asegurar que esto se cumpla es por medio de las ecuaciones constitutivas

$$J^{\mu}_{[Q]} = -k' g^{\mu\nu}\Theta_{;\nu} \tag{150}$$

y

$$\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right) v^{\mu} = -\varsigma\, g^{\mu\nu} \left(\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}\right)_{;\nu} \tag{151}$$

en donde k' permite definir a la conductividad térmica k del sistema:

$$k = \frac{k'}{\Theta^2} \tag{152}$$

y ς representa una constante de tipo difusivo.

La producción de entropía adquiere entonces la forma semidefinida positiva:

$$\sigma = k' \left(\frac{\Theta^{;\nu}\,\Theta_{;\nu}}{\Theta^2}\right) + \varsigma \left(\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}\right)^{;\nu} \left(\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}\right)_{;\nu} \tag{153}$$

11. Ecuación de Calor.

La distribución de temperaturas del sistema queda en principio determinada por la ecuación diferencial parcial obtenible del balance de energía interna (154):

$$\rho_{(o)} \frac{d\, e_{int(o)}}{d\,\tau} = -\frac{e_{int(o)}}{c^2}\frac{d\, p_{(o)}}{d\,\tau} - J^{\nu}_{[Q];\nu} - p_{(o)} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} - c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} \left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \tag{154}$$

en donde la relación constitutiva (150) puede insertarse en el segundo término del lado derecho de la ecuación (154), y el lado izquierdo puede ser reescrito como:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, e_{int(o)}}{d\,\tau} = \rho_{(o)} \left[\left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}}\right)_{\Theta_{(o)}} \frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} + \left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \Theta_{(o)}}\right)_{\rho} \frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} \right] \tag{155}$$

Las derivadas parciales en la ecuación (155) son conocidas de la termostática (en donde se vuelve a aplicar el principio de equivalencia en el sistema comóvil):

$$\left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}}\right)_{\Theta} = -\left(\frac{\beta}{\kappa\Theta}\right)\frac{\Theta_{(o)}}{\rho_{(o)}^{2}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}^{2}} \tag{156}$$

y

$$\left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \Theta_{(o)}}\right)_{\rho} = c_p \tag{157}$$

de manera tal que la ecuacion de calor en ausencia de viscosidad se escribe como:

$$\begin{gathered}\left(-\left(\frac{\beta}{\kappa\Theta}\right)\frac{\Theta_{(o)}}{\rho_{(o)}^{2}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}^{2}}\right)\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau} + \rho_{(o)}\, c_p \frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} = \\ -\frac{e_{int(o)}}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\,\tau} - J^{\nu}_{[Q];\nu} - p_{(o)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\,v^{\nu}\right)_{;\nu} - c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\,v^{\nu}\right)_{;\nu}\end{gathered} \tag{158}$$

o bien, usando la ecuación de continuidad (117) y la relación constitutiva (150):

$$\begin{gathered}\left(-\left(\frac{\beta}{\kappa\Theta}\right)\frac{\Theta_{(o)}}{\rho_{(o)}^{2}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}^{2}}\right)\left(-\rho_{(o)}v^{\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\,\tau}\right) + \rho_{(o)}\, c_p \frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} = \\ -\frac{e_{int(o)}}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\,\tau} + k\,\left(g^{\mu\nu}\Theta_{;\nu}\right)_{;\mu} - p_{(o)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\,v^{\nu}\right)_{;\nu} - c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\,v^{\nu}\right)_{;\nu}\end{gathered} \tag{159}$$

Esta última ecuación, para el caso en que la conductividad térmica sea constante, la velocidad del elemento sea cero $\left(u^k = 0\right)$, y la presión no dependa explícitamente del tiempo, se reduce al análogo de la conocida ecuación de calor (107):

$$\rho_{(o)}\, c_p\, c\,\Theta_{;o} = k\,\left(g^{\mu\nu}\Theta_{;\nu}\right)_{;\mu} \tag{160}$$

La ecuación (160) es una ecuación tipo "telégrafo" que, como es bien sabido, *no* tiene problemas de causalidad, puesto que no admite propagación de señales a velocidades mayores que la velocidad de la luz. Para hacer ver esto más claramente se explicita a continuación la ecuación (160) para la métrica de Minkowsky (110), y el operador válido en relatividad especial (114):

$$\rho_{(o)}\, c_p \frac{\partial\,\Theta}{\partial\, t} = k\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\, t^2} + \nabla^2\Theta\right) \tag{161}$$

Para finalizar este capítulo se escribirán explícitamente las ecuaciones de transporte obtenidas, con ayuda de las relaciones constitutivas halladas (150-151).

C. Sistema de Ecuaciones de Transporte para Flujo no Viscoso.

El formalismo anteririor permite finalmente escribir un sistema de ecuaciones de transporte, compatible con la Teoría General de la Relatividad y con el esquema de Meixner y Prigogine de la Termodinámica de Procesos Irreversibles. Las incógnitas en este sistema de ecuaciones son la densidad medida en el sistema comóvil (ρ_o), la velocidad del elemento medida en un sistema cualquiera (v^μ), la presión medida en el sistema comóvil ($p_{(o)}$), y la temperatura del elemento de fluido medida en el sistema comóvil ($\Theta_{(o)}$). El sistema completo consiste en las siguientes expresiones:

- Ecuación de Continuidad.

$$\frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} = -\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\tau} \tag{162}$$

- Ecuación de Movimiento (Euler):

$$\rho_{(o)}\frac{d\,v^\mu}{d\tau} = p_{(o)}^{;\mu} - \frac{v^\mu}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\tau} \tag{163}$$

- Ecuaciones Constitutivas:

$$J^{\nu}_{[Q]} = -k'\,\Theta_{;\nu} \tag{164}$$

y

$$\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right) v^\mu = -\varsigma\, g^{\mu\nu}\left(\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}\right)_{;\nu} \tag{165}$$

- Ecuación de Calor:

$$\begin{gathered}\left(-\left(\frac{\beta}{\kappa_\Theta}\right)\frac{\Theta_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho^2_{(o)}}\right)\left(-\rho_{(o)}v^{\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\tau}\right) + \rho_{(o)}\,c_p\frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} = \\ -\frac{e_{int(o)}}{c^2}\frac{d\,p_{(o)}}{d\tau} + k\,\left(g^{\mu\nu}\Theta_{;\nu}\right)_{;\mu} - p_{(o)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\,v^\nu\right)_{;\nu} - c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\,v^\nu\right)_{;\nu}\end{gathered} \tag{166}$$

V. Algunas Consecuencias del Esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal (T.I.L) en Espacios-Tiempos Curvos.

A. Una Solución de la Ecuación de Calor Obtenida Aplicable a la Teoría de la Relatividad Especial (Caso Unidimensional).

Se parte de la ecuación de calor obtenida del esquema (161), para el caso unidimensional:

$$\rho_{(o)}\, c_p \frac{\partial\, \Theta}{\partial\, t} = k\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\, \Theta}{\partial\, t^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial\, x^2}\right) \tag{167}$$

con las condiciones iniciales y de frontera:

$$\Theta\,(x, 0) = 0 \tag{168}$$

$$\frac{\partial\, \Theta}{\partial\, t}\,(x, 0) = 0 \tag{169}$$

$$q\,(0, t) = -k\frac{\partial\, \Theta}{\partial\, x}\,(0, t) = F_o \tag{170}$$

Al aplicarse la transformada de Laplace sobre el tiempo a la ecuación (167), suponiéndose $\rho_{(o)}$ y c_p constantes, se obtiene la expresión:

$$k\frac{d^2\tilde{\Theta}\,(x, s)}{dx^2} = \left(\rho_{(o)}\, c_p\, s + \frac{k\, s^2}{c^2}\right)\tilde{\Theta}\,(x, s) \tag{171}$$

en donde $\tilde{\Theta}\,(x, s)$ corresponde a la tranformada de Laplace de la función $\Theta\,(x, t)$.

La solución acotada de la ecuación (171) es:

$$\tilde{\Theta}\,(x, s) = c_1\, e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s\left(s + \frac{\rho_{(o)}\, c_p\, c^2}{k}\right)}} \tag{172}$$

Para determinar la constante de integración c_1 se toma la transformada de Laplace de la ecuación (170), de donde se obtiene:

$$k\frac{d\tilde{\Theta}(0,s)}{dx} = -\frac{F_o}{s} \tag{173}$$

Al combinarse la ecuación (173) con la derivada con respecto de x, evaluada en cero, de la expresión (172) se halla que:

$$c_1 = \frac{F_o\, c}{k\, s\sqrt{s\left(s + \frac{\rho_{(o)}\, c_p\, c^2}{k}\right)}} \tag{174}$$

La transformada de Laplace de la solución de la ecuación diferencial puede escribirse como:

$$\frac{\tilde{\Theta}(x,s)}{F_o\frac{c}{k}} = \frac{1}{s\sqrt{s\left(s + \frac{\rho_{(o)}\, c_p\, c^2}{k}\right)}}\, e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s\left(s+\frac{\rho_{(o)}\, c_p\, c^2}{k}\right)}} \tag{175}$$

La transformada inversa de la expresión (175) corresponde a la solución buscada:

$$\frac{\Theta(x,t)}{F_o\frac{c}{k}} = \int_o^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_{(o)}\, c_p\, c^2}{k}\right)u}\, I_o\left[\frac{1}{2}\frac{\rho_{(o)}\, c_p\, c^2}{k}\sqrt{u^2 + \frac{x^2}{c^2}}\right] H\left(u - \frac{x}{c}\right) \tag{176}$$

en donde I_o corresponde a la función modificada de Bessel de orden cero, y H es la función de Heavyside.

Es evidente de la expresión (176), que no existen problemas de transmisión de energía a velocidades mayores que la velocidad de la luz.

B. La Ecuación de Calor y los Efectos de la Curvatura en el Estado Estacionario.

Si se asume simetría radial, la ecuación de calor (160) para el caso de la métrica de Schwarzschild adquiere la forma:

$$\rho_{(o)}\, c_p \frac{\partial\,\Theta}{\partial\, t} = \frac{k}{c^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\, t^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\, r}\right)\right] \tag{177}$$

Para estado estacionario y simetría esférica, la ecuación (177) se reduce a:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\frac{d\Theta}{dr}\right]=0 \tag{178}$$

Esta última ecuación puede resolverse fácilmente, obtenéniendose:

$$\Theta(r)=\frac{\alpha_1 c^2}{2GM}\ln\left(\alpha_2\frac{r-\frac{2GM}{c^2}}{r}\right) \tag{179}$$

en donde las constantes α_1 y α_2 se pueden, en principio, obtener con condiciones a la frontera apropiadas. Un cambio de sistema coordenado, dentro de la métrica de Scharzschild puede eliminar la indeterminación en el horizonte de eventos:

$$r_s=\frac{2GM}{c^2} \tag{180}$$

En un espacio plano, $M=0$, y la ecuación (178) se reduce a:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Theta}{dr}\right)=0 \quad ,$$

que es la ecuación de calor conocida para estado estacionario con simetría esférica.

C. Posibles Generalizaciones del Esquema.

Las generalizaciones inmediatas son las siguientes:

- *Flujo viscoso.* En este caso una manera de proceder es el agregar un término nuevo al tensor de esfuerzos-energía que de cuenta de los efectos de la viscosidad.

- *Sistemas multicomponentes con y sin reacciones.* Es posible tener más de una especie en el elemento local de volumen. Las reacciones químicas modificarán las ecuaciones de balance.

- *Métricas más generales.* Los efectos de curvatura dependen fuertemente de la métrica. La generalización más natural es a métricas tipo Kerr, que al no ser diagonal, de lugar a una alteración de la definición del cuadrivector de velocidad en espacios tiempos-curvos (132).

D. Consideraciones Finales.

El presente trabajo muestra una construcción lógicamente clara y ortodoxa de la construcción de las ecuaciones de transporte aplicadas a un fluido relativista. El medio para lograr establecer el sistema de ecuaciones fue el esquema de Meixner y Prigogine de la T.I.L.

Existen numerosos intentos de construcción de formalismos que den lugar a expresiones para las variables termodinámicas, en un contexto relativista. la mayor parte de este tipo de trabajos se puede clasificar de la siguente manera:

- *Formalismos fuera del equilibrio en los cuales el flujo de calor se introduce,* a priori, *en el tensor energía-momentum.* Este tipo de desarrollos es el más usual. En el texto de Misner, Thorne y Wheeler,[9] el flujo de calor se incluye en el tensor esfuerzos-energía como un recurso gracias al cual la energía total se conserva. Surgen dos problemas en torno a este enfoque. En primer término, el flujo de calor posee características muy similares a las de los flujos de energía mecánica convencional . Esto parece contradecir la esencia misma del concepto de flujo de calor. Segundo, la hipótesis de equilibrio local no se utiliza, puesto que se ignora por completo a la derivada total de la energía interna local, con respecto del tiempo propio. La forma de ataque al problema expuesta en esta tesis parece ajustarse mucho mejor a los conceptos fundamentales de la termodinámica de procesos irreversibles.

- *Formalismos fuera del equilibrio en los cuales el flujo de calor no se introduce,* a priori, *en el tensor esfuerzos-energía, pero en los cuales no se aprovecha completamente la hipótesis de equilibrio local.* Este tipo de trabajo es ampliamente aceptado. Inicialmente fue Werner Israel quien realizó los primeros desarrollos en esta dirección.[18] Posteriormente esta línea ha sido seguida por Zhang y muchos otros.[20] Si bien el formalismo seguido en los artículos recién citados es elegante y matemáticamente preciso, el flujo de entropía no se obtiene de una manera directa a partir del principio de equilibrio local. Esto es, no se utilizan argumentos que involucran a la derivada total de la entropía específica con respecto del tiempo propio. En lugar de ello, se dan argumentos motivados matemáticamente para la construcción de flujo y producción de entropía. Por otro lado la línea de razonamiento de Israel conduce una vez más a propiedades mecánicas del calor como las mencionadas en el párrafo precedente.

- *Formalismos basados en la teoría cinética de la materia.* Este es un enfoque conceptualmente diferente al aquí analizado. El trabajo en esta dirección se fundamenta en versiones relativistas de la ecuación de Boltzmann.[17] Los formalismos conducen a leyes de conservación para el flujo de partículas,
$$N^{\mu}_{;\mu} = 0 \tag{181}$$
en donde N^{μ} representa el cuadrivector de flujos de partículas. No es usual encontar desarrollos para medios continuos debido a los efectos relativistas sobre la masa. Trabajo en esta dirección se realizará en el futuro, de forma que los desarrollos fenomenológicos presentados en esta tesis puedan contrastarse con formalismos de teoría cinética.

Apéndice 1.
El Límite Newtoniano de las Ecuaciones Relativistas de Conservación en el Esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal para Espacios-Tiempos Curvos.

El sistema de ecuaciones de transporte obtenido en base al esquema relativista de Meixner y Prigogine necesariamente debe reducirse, para espacios planos y velocidades del elemento mucho menores que la velocidad de la luz, al sistema no relativista usual para flujo no viscoso.[16]

A continuación se presenta una forma simple de recobrar los resultados usuales de la teoría de transporte no relativista.

Límite no Relativista de la Ecuación de Continuidad.

La ecuación de continuidad deducida en el texto principal es:

$$\frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} = -\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2}\frac{d p_{(o)}}{d\tau} \qquad (A.1.1)$$

En espacios planos y en el límite de bajas velocidades del elemento de fluido, cada término de la ecuación (A.1.1) adquiere respectivamente la forma:

$$\frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} \qquad (A.1.2)$$

$$\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} \rightarrow \rho \nabla \cdot \vec{u} \qquad (A.1.3)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{d p_{(o)}}{d\tau} \rightarrow 0 \qquad (A.1.4)$$

obteniéndose la ecuación no relativista de continuidad :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \qquad (A.1.5)$$

En la ecuación (A.1.2) la densidad ρ no involucra efectos relativistas y corresponde a la dendidad ρ_o medida en el sistema comóvil. Asimismo, en el límite de espacio plano y bajas velocidades, es depricialble la diferencia entre el tiempo propio τ, y el tiempo t medido en cualquier sistema de referencia.

En la ecuación (A.1.3) la cuadrivelocidad v^ν se relaciona con el vector de velocidad $\vec{u}$ por medio de la relación:

$$v^\nu = \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \qquad (A.1.6)$$

por lo que en el límite $\frac{u}{c} \rightarrow 0$, la divergencia del cuadrivector de velocidad se reduce a la divergencia simple del trivector de velocidad.

Límite no Relativista del Balance de Ímpetu.

La ecuación de movimiento obtenida en el texto principal es:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, v^\mu}{d\, \tau} = p_{(o)}^{;\mu} - \frac{v^\mu}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\, \tau} \qquad (A.1.7)$$

en el límite no relativista, cada término *de las componentes espaciales* puede escribirse de la forma:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, v^k}{d\, \tau} \rightarrow \rho \frac{d\, u^k}{d\, t} \qquad (A.1.8)$$

$$p_{(o)}^{;k} \rightarrow -\nabla\, p \qquad (A.1.9)$$

$$\frac{v^\mu}{c^2} \frac{d\, p_{(o)}}{d\, \tau} \rightarrow 0 \qquad (A.1.10)$$

de donde finalmente se obtiene la ecuación de Euler no relativista:

$$\rho \frac{d\, u^k}{d\, t} = -\nabla\, p \qquad (A.1.11)$$

En la escritura de la ecuación (A.1.8) se ha hecho uso de la ecuación (A.1.6).

Límite no Relativista del Balance de Energía Mecánica.

El límite no relativista para el balance de energía mecánica se obtiene al considerar la componente temporal de la ecuación (A.1.7), multiplicada por la velocidad de la luz c:

$$\rho_{(o)}\, c \frac{d v^o}{d\tau} = c\, p^{;o}_{(o)} - \frac{v^o}{c} \frac{d p_{(o)}}{d\tau} \qquad (A.1.12)\,,$$

El lado izquierdo de la ecuación (A.1.12) puede aproximarse como:

$$\rho_{(o)}\, c \frac{d v^o}{d\tau} = \rho_{(o)} \frac{d}{d\tau} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{1}{2} \rho \frac{d u^2}{d t} \qquad (A.1.13)$$

en donde se utilizó la aproximación binomial:

$$(1 - x)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} x \qquad (A.1.14)$$

El lado derecho de la ecuación (A.1.12) puede desarrollarse para adquirir la forma:

$$c\, p^{;o}_{(o)} - \frac{v^o}{c} \frac{d p_{(o)}}{d\tau} = \frac{\partial p_{(o)}}{\partial t} - \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\partial p_{(o)}}{\partial t} - \frac{u^k}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\partial p_{(o)}}{\partial x^k} \qquad (A.1.15)$$

al tomarse la consideración de que $\frac{u^2}{c^2} \rightarrow 0$, la ecuación (1.15) se puede escribir, en forma aproximada, como:

$$c\, p^{;o}_{(o)} - \frac{v^o}{c} \frac{d p_{(o)}}{d\tau} \simeq u^k \frac{\partial p_{(o)}}{\partial x^k} \qquad (A.1.16)$$

Ahora es posible reescribir el límite no relativista de la ecuación (A.1.12), obteniéndose:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d u^2}{d t} = u^k \frac{\partial p_{(o)}}{\partial x^k} \qquad (A.1.17)\,,$$

que tras una manipulación simple es la ecuación no relativista (84):

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\, u^2}{d t} = -\frac{\partial\, (p\, u_k)}{\partial x^k} + p \frac{\partial\, u_k}{\partial x^k} \qquad (A.1.28)$$

Límite no Relativista del Flujo de Energía Mecánica.

El flujo de energía mecánica obtenido en el texto principal está dado por la ecuación (137)

$$J^{\nu}_{[M]} = \rho_{(o)}\, c^2 \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} v^{\nu} - c p_{(o)} g^{o\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} p_{(o)}\, v^{\nu} \qquad (A.1.29)\,,$$

donde

$$g^{o\nu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (A.1.30)$$

En el límite no relativista, se aplican las aproximaciones:

$$\gamma \rightarrow 1 \qquad (A.1.31)$$

$$\sqrt{g_{oo}} \rightarrow 1 \qquad (A.1.32)$$

y

$$v^{\nu} = \begin{bmatrix} c \\ \vec{u} \end{bmatrix} \qquad (A.1.33)$$

de manera tal si $\frac{u}{c} \rightarrow 0$, en la componente cero de la ecuación (A.1.29) las presiones de eliminan y se tiene, usando la aproximación (A.1.14):

$$\rho\, e_{mec} = \rho_o c^2 + \frac{1}{2} \rho_o\, u^2 \qquad (A.1.34)\,,$$

que corresponde a la densidad de energía cinética clásica mas un término correspondiente a la densidad de energía en reposo.

Para las componentes espaciales de la ecuación (A.1.29) el flujo de energía obtenido es:

$$\rho\, e_{mec}\, u^k = p_{(o)}\; u^k + \rho_o c^2\, u^k + \frac{1}{2} \rho_o\, u^2\, u^k \qquad (A.1.35)\,,$$

que salvo el término de flujo de la energía relativista en reposo del elemento $\rho_o c^2\, \vec{u}$, coincide con el flujo de energía no relativista que aparece dentro de la divergencia de la ecuación (85).

Apéndice 2.
Balance de Genérico de Entropía en el Contexto de la Relatividad General

El formalismo empleado en el capítulo 4 de esta tesis depende fuertemente de la posibilidad de construir una expresión para el balance local de entropía, en términos de derivadas totales con respecto al tiempo propio del elemento.

Para ello se parte de la expresión básica para el flujo de entropía total:

$$J^{\nu}_{[ST];\nu} = \sigma \qquad (A.2.1)$$

en donde representa el $J^{\nu}_{[ST]}$ es el flujo de entropía total y σ es la producción de entropía local en el elemento de volumen..

Ahora, el flujo de entropía total puede dividirse en dos partes:

$$J^{\nu}_{[ST]} = \rho_{(o)}\, s_{(o)}\, v^{\nu} + J^{\nu}_{[S]} \qquad (A.2.2)$$

en donde $s_{(o)}$ corresponde a la entropía específica local del elemento de volumen.

Al reemplazar (A.2.2), en la ecuación (A.2.1), y con ayuda de la derivada lagrangiana, se obtienen las expresiones equivalentes:

$$J^{\nu}_{[ST];\nu} = \rho_{(o)}\, s_{(o)}\, v^{\nu}_{;\nu} + v^{\nu}\left(\rho_{(o)}\, s_{(o)}\right)_{;\nu} + J^{\nu}_{[S];\nu} \qquad (A.2.3)$$

$$J^{\nu}_{[ST];\nu} = \rho_{(o)}\, s_{(o)}\, v^{\nu}_{;\nu} + v^{\nu}\rho_{(o)}\, s_{(o);\nu} + s_{(o)}v^{\nu}\rho_{(o);\nu} + J^{\nu}_{[S];\nu} \qquad (A.2.4)$$

$$J^{\nu}_{[ST];\nu} = \rho_{(o)}\, s_{(o)}\, v^{\nu}_{;\nu} + \rho_{(o)}\frac{ds_{(o)}}{d\tau} + s_{(o)}\frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} + J^{\nu}_{[S];\nu} \qquad (A.2.5)$$

$$J^{\nu}_{[ST];\nu} = s_{(o)}\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}_{;\nu} + \frac{d\rho_{(o)}}{d\tau}\right) + \rho_{(o)}\frac{ds_{(o)}}{d\tau} + J^{\nu}_{[S];\nu} \qquad (A.2.6)$$

El término entre paréntesis que está factorizando la entropía específica del lado derecho de la ecuación (A.2.6) corresponde a la ecuación de continuidad (120). De forma que el balance genérico derivado del tensor (108), útil para el desarrollo del esquema de Meixner y Prigogine toma la forma:

$$\rho_{(o)}\frac{ds_{(o)}}{d\tau}+J^{\nu}_{[S];\nu}+\frac{1}{c^2}\frac{dp_{(o)}}{d\tau}s_{(o)}=\sigma \qquad (A.2.7)$$

Apéndice 3.
Las Ecuaciones Relativistas de Transporte bajo el Esquema Meixner-Prigogine de la Termodinámica Irreversible Lineal (T.I.L) con el Tensor Modificado de Esfuerzos-Energía.

El Tensor de Esfuerzos-Energía.

En este desarrollo alternativo del esquema relativista de Meixner y Prigogine de la T.I.L. para un fluido isotrópico no viscoso, un punto de partida posible es el tensor esfuezros-energía dado por[9]:

$$T^{\mu\nu} = \rho_{(o)}\, v^{\mu} v^{\nu} - p_{(o)}\, g^{\mu\nu} + \frac{p_{(o)}}{c^2}\, v^{\mu} v^{\nu} \qquad (A.3.1)$$

En el tensor definido en (A.3.1) las variables $\rho_{(o)}$ y $p_{(o)}$ representan respectivamente a la densidad y la presión del elemento de fluido medidos en el sistema comóvil al elemento. Estas cantidades son invariantes (en un sentido similar al de la masa en reposo), y al ser multiplicadas por tensores de segundo rango (en el primer término con el producto directo de los cuadrivectores de velocidad v^{μ} y v^{ν}, y en el segundo por el tensor métrico $g^{\mu\nu}$), forman a su vez un tensor de segundo rango.

Ecuación Fundamental de Balance.

En ausencia de fuerzas externas, los balances de energía e ímpetu están contenidos en la ecuación (que es a su vez compatible con las ecuaciones de campo de Einstein):

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \qquad (A.3.2)$$

Ecuación de Continuidad en Espacio-Tiempos Curvos.

El desarrollo de la cuadridivergencia (A.3.2) lleva directamente a la expresión

$$\rho_{(o)}\, v^{\mu} v^{\nu}_{;\nu} + v^{\nu} \left(\rho_{(o)}\, v^{\mu}\right)_{;\nu} - p_{(o)\,;\nu}\, g^{\mu\,\nu} + \frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\mu} v^{\nu}_{;\,\nu} + v^{\nu} \left(\frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\mu}\right)_{;\nu} = 0 \qquad (A.3.3)$$

al tomarse el producto escalar con el cuadrivector covariante de velocidad v_{μ}, se tiene la ecuación:

$$\rho_{(o)}\, v_{\mu}\, v^{\mu} v^{\nu}_{;\nu} + v_{\mu}\, v^{\nu} \left(\rho_{(o)}\, v^{\mu}\right)_{;\nu} - v_{\mu}\; p_{(o)\,;\nu}\, g^{\mu\,\nu} + \frac{p_{(o)}}{c^2} v_{\mu}\, v^{\mu} v^{\nu}_{;\,\nu} = -v_{\mu}\, v^{\nu} \left(\frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\mu}\right)_{;\nu} \qquad (A.3.4)$$

Ahora bien, al considerarse la identidad:

$$v_{\mu}\, v^{\mu} = c^2 \qquad (A.3.5)$$

y el operador de derivada total *con respecto al tiempo propio:*

$$\frac{d}{d\,\tau} = v^{\nu}\; ()_{;\nu} \qquad (A.3.6)$$

el álgebra directa conduce a las expresiones equivalentes de la ecuación de continuidad:

$$\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau} = -\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} - \frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\nu}_{;\,\nu} \qquad (A.3.7)$$

y

$$\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} = -\frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\nu}_{;\,\nu} \qquad (A.3.8)$$

Estas ecuaciones no coinciden con las expresiones (120) y (162) del texto principal debido a la existencia del último término del tensor esfuerzos-energía usado.

Balance de Impetu (Ecuación de Euler Relativista).

Para hallar la ecuación de movimiento del elemento de fluido isotrópico no viscoso se parte de la ecuación:

$$\rho_{(o)}\, v^{\mu} v^{\nu}_{;\nu} + v^{\nu} \left(\rho_{(o)}\, v^{\mu}\right)_{;\nu} - p_{(o)\,;\nu}\, g^{\mu\,\nu} + \frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\mu} v^{\nu}_{;\,\nu} + v^{\nu} \left(\frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\mu}\right)_{;\nu} = 0 \qquad (A.3.9)$$

que se obtiene al tomar la cuadridivergencia del tensor esfuerzos-energía (A.3.1).

Utilizando el operador para la derivada lagrangiana se tiene que:

$$\rho_{(o)}\frac{d\,v^{\mu}}{d\,\tau}+v^{\mu}\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau}+\rho_{(o)}v^{\mu}\,v^{\nu}_{;\nu}+\frac{p_{(o)}}{c^{2}}v^{\mu}v^{\nu}_{;\nu}+\frac{1}{c^{2}}\frac{d}{d\,\tau}\left(p_{(o)}\,v^{\mu}\right)=p^{;\mu}_{(o)} \qquad (A.3.10)$$

Si ahora se combina la ecuación (A.3.10) con la ecuación de continuidad (A.3.7), multiplicada por la cuadrivelocidad v^{μ}:

$$v^{\mu}\left(\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau}+\rho_{(o)}v^{\nu}_{;\nu}\right)=-v^{\mu}\left(\frac{p_{(o)}}{c^{2}}v^{\nu}_{;\nu}\right) \qquad (A.3.11)$$

se obtiene la *ecuación de Euler relativista*:

$$\left(\rho_{(o)}+\frac{p_{(o)}}{c^{2}}\right)\frac{d\,v^{\mu}}{d\,\tau}=p^{;\mu}_{(o)}-\frac{v^{\mu}}{c^{2}}\frac{d\,p_{(o)}}{d\,\tau} \qquad (A.3.12)$$

Hipótesis de Equilibrio Local.

El manejo de la hipótesis de equilibrio local es independiente del la forma explícita del tensor esfuerzos-energía. Al igual que en el desarrollo del esquema de Meixner y Prigogine de la T.I.L. no relativista, se supondrá que la entropía específica local $s_{(o)}$, medida en el sistema comóvil, es una funcional independiente del tiempo de las variables $\rho_{(o)}$ y $e_{int(o)}$:

$$s_{(o)}=s_{(o)}\left(\rho_{(o)}\left(x^{\mu}\right),e_{int(o)}\left(x^{\mu}\right)\right) \qquad (A.3.13)$$

Ahora bien, de acuerdo al prinicipio de equivalencia, la derivada total de la entropía local debe tomarse con respecto al tiempo propio τ:

$$\frac{d\,s_{(o)}}{d\,\tau}=\rho_{(o)}\left(\frac{\partial\,s_{(o)}}{\partial\,\rho}\right)_{e_{int}}\frac{d\,\rho_{(o)}}{d\,\tau}+\left(\frac{\partial\,s_{(o)}}{\partial\,e_{int}}\right)_{\rho}\frac{d\,e_{int(o)}}{d\,\tau} \qquad (A.3.14)$$

La ecuación genérica del balance de entropía es:

$$J^{\nu}_{[ST]\,;\nu}=\sigma \qquad (A.3.15)$$

en donde $J^{\nu}_{[ST]}$ representa un cuadriflujo de entropía, y σ es una expresión semipositiva definida que corresponde a la producción de entropía.

El cuadriflujo de entropía total, igual que en el caso no relativista, consta de un término convectivo y otro asociado a formas de energía tales como el calor:

$$J^{\nu}_{[ST]} = \rho_{(o)}\, s_{(o)}\, v^{\nu} + J^{\nu}_{[s]} \qquad (A.3.16)$$

Al hacer uso del operador para la derivada lagrangiana se obtiene la ecuación de balance en derivada total respecto del tiempo propio:

$$\rho_o \frac{ds_o}{d\tau} + s_o \left(\frac{d\rho_o}{d\tau} + \rho_o v^{\nu}_{;\nu} \right) + J^{\nu}_{[s]\,;\nu} = \sigma \qquad (A.3.17)$$

Ahora bien, al insertarse la ecuación de continuidad relativista (A.3.7) en la ecuación (A.3.17), se obtiene la expresión útil:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, s_{(o)}}{d\, \tau} - \left(\frac{p_{(o)}}{c^2} v^{\nu}_{;\nu} \right) s_{(o)} + J^{\nu}_{[s]\,;\nu} = \sigma \qquad (A.3.18)$$

por lo que la forma del balance genérico también difiere del correspondiente al texto prinicipal.

Al igual que en el caso no relativista, es necesario insertar las expresiones para la derivada total de la densidad y la energía interna en la ecuación para la derivada total de la entropía con respecto al tiempo propio. A continuación se halla la forma apropiada para la derivada de la energía interna.

Balance de Energía Relativista.

El punto de partida para el balance de energía es la ecuación de Euler relativista, escrita aquí de forma ligeramente distinta:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, v^{\mu}}{d\, \tau} + \frac{1}{c^2} \frac{d\, \left(p_{(o)}\, v^{\mu} \right)}{d\, \tau} = p_{(o)}^{;\,\mu} \qquad (A.3.19)$$

Al tomarse la componente cero de esta ecuación, y utilizando la definición del cuadrivector de velocidad (válida para métricas diagonales),

$$v^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} c \\ \gamma\, u^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{g_{oo}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{u^k}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \qquad (A.3.20)$$

se tiene la igualdad:

$$\rho_{(o)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\gamma c}{\sqrt{g_{oo}}}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\gamma c}{\sqrt{g_{oo}}}p_{(o)}\right)=\left(p_{(o)}g^{o\nu}\right)_{;\nu} \qquad (A.3.21)$$

Es de observarse que de esta última expresión puede generarse una ecuación de balance al reescribirla de la forma:

$$\left(\rho_{(o)}\,c^2\,\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}v^\nu+\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\,p_{(o)}\;v^\nu\;-cp_{(o)}g^{o\nu}\right)_{;\nu}=-\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}p_{(o)}\,v^\nu_{;\nu}+c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\,v^\nu\right)_{;\nu} \quad (A.3.20)$$

De esta manera puede definirse el flujo de energía mecánica de la forma:

$$J^\nu_{[M]}=\rho_{(o)}\,c^2\,\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}v^\nu+\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\,p_{(o)}\;v^\nu\;-cp_{(o)}g^{o\nu} \qquad (A.3.21)$$

de manera que

$$J^\nu_{[M]\,;\nu}=-\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}p\,v^\nu_{;\nu}+c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\,v^\nu\right)_{;\nu} \qquad (A.3.22)$$

La energía interna del elemento de volumen y el *flujo de calor* aparecen en este contexto al postularse la conservación de la energía total de acuerdo a las siguientes ideas:

- El cuadriflujo de energía total está dado por cinco términos: los tres primeros representan un flujo de energía mecánica, el cuarto, un flujo de energía interna y el último un flujo de calor:

$$J^\nu_{[T]}=\rho_{(o)}\,c^2\,\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}v^\nu+\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\,p_{(o)}\;v^\nu\;-cp_{(o)}g^{o\nu}\;+\rho_{(o)}v^\nu e_{int(o)}+J^\nu_{[Q]} \qquad (A.3.23)$$

- De esta forma, combinando la expresión de balance de energía total :

$$\left(J^\nu_{[T]}\right)_{;\nu}=0 \qquad (A.3.24)$$

  y la ecuación (A.3.20), se obtiene la expresión de balance para la energía interna:

$$\left(\rho_{(o)}\,e_{int(o)}\,v^\nu\right)_{;\nu}=-J^\nu_{[Q];\nu}-\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}p_{(o)}\,v^\nu_{;\nu}+c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\,v^\nu\right)_{;\nu} \qquad (A.3.25)$$

Para finalizar esta sección se reescribe la ecuación (A.3.24) en términos de la derivada total respecto del tiempo propio con ayuda del operador de derivada lagrangiana y la ecuación de continuidad (A.3.7):

$$\rho_{(o)}\frac{d\, e_{int(o)}}{d\,\tau}-\frac{e_{int(o)}\, p_{(o)}}{c^2}\, v^{\nu}_{;\nu} = -J^{\nu}_{[Q];\nu}+\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}p_{(o)}\, v^{\nu}_{;\nu}-c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu} \quad (A.3.26)$$

Producción de Entropía para un Flujo No Viscoso en Relatividad General.

Es posible ahora retornar a la ecuación (A.3.14). Reemplazando en esta expresión las ecuaciones (A.3.7) y (A.3.26), se obtiene:

$$\rho_{(o)}\frac{d\, s_{(o)}}{d\,\tau} = \left(\frac{\partial\, s_{(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}}\right)_{e_{int\,(o)}}\left(-\rho_{(o)}v^{\nu}_{;\nu} - \frac{p_{(o)}}{c^2}v^{\nu}_{;\nu}\right) +$$
$$\left(\frac{\partial\, s}{\partial\, e_{int(o)}}\right)_{\rho}\left(-\frac{e_{int(o)}\, p_{(o)}}{c^2}\, v^{\nu}_{;\nu} - J^{\nu}_{[Q];\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}p_{(o)}\, v^{\nu}_{;\nu} - c^2\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}}\left(\rho_{(o)}\, v^{\nu}\right)_{;\nu}\right) \quad (A.3.27)$$

Ahora bien, al hacerse uso de las relaciones de la termostática (válidas en el sistema comóvil por el principio de equivalencia):

$$\left(\frac{\partial\, s_{(o)}}{\partial\, e_{int(o)}}\right)_{\rho_{(o)}} = \frac{1}{\Theta_{(o)}} \qquad (A.3.28)$$

y

$$\left(\frac{\partial\, s_{(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}}\right)_{e_{int\,(o)}} = -\frac{p_{(o)}}{\rho^2_{(o)}\Theta_{(o)}} \qquad (A.3.29)$$

la ecuación (A.3.27) adquiere la forma:

$$\rho_{(o)}\frac{d\, s_{(o)}}{d\,\tau} + \left(\frac{e_{int(o)}}{\Theta_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}\Theta_{(o)}} - \frac{c^2\gamma}{\sqrt{g_{oo}}\Theta_{(o)}}\right)\frac{p_{(o)}}{c^2}v^{\nu}_{;\nu} + \left(\frac{J^{\nu}_{[Q]}}{\Theta_{(o)}}\right)_{;\nu}$$
$$= -\left(\frac{J^{\nu}_{[Q];\nu}}{\Theta_{(o)}}\right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right)\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}}v^{\nu}_{;\nu} \quad (A.3.30)$$

De esta manera se obtienen:

– Una expresión para el flujo de entropía:

$$J^{\nu}_{[S]} = \frac{J^{\nu}_{[Q]}}{\Theta_{(o)}} \qquad (A.3.31)$$

– Una relación para le entropía específica en el sistema comóvil:

$$s_{(o)} = \frac{e_{int(o)}}{\Theta_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}\Theta_{(o)}} - \frac{c^2\gamma}{\sqrt{g_{oo}}\Theta_{(o)}} \qquad (A.3.32)$$

- La producción de entropía:

$$\sigma = -\left(\frac{J^{\nu}_{[Q];\nu}}{\Theta_{(o)}}\right) + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{g_{oo}}} - 1\right)\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}} v^{\nu}_{;\nu} \qquad (A.3.33)$$

1. Ecuaciones Constitutivas:

La producción de entropía (A.3.33) debe ser semipositiva definida. La forma más simple de asegurar que esto se cumpla es por medio de las ecuaciones constitutivas, que coinciden con las texto principal:

$$J^{\mu}_{[Q]} = -k' g^{\mu\nu}\Theta_{;\nu} \qquad (A.3.34)$$

y

$$\frac{p_{(o)}}{\Theta_{(o)}} = -\varsigma_1 \; (v^{\nu})_{;\nu} \qquad (A.3.35)$$

en donde k' permite definir a la conductividad térmica k del sistema:

$$k = \frac{k'}{\Theta^2} \qquad (A.3.36)$$

y ς_1 representa una constante de tipo difusivo.

La producción de entropía adquiere entonces la forma semidefinida positiva:

$$\sigma = k\,(\Theta^{;\nu}\,\Theta_{;\nu}) + \varsigma_1 \left(v^{\nu}_{;\nu}\right)^2 \qquad (A.3.37)$$

2. Ecuación de Calor.

La distribución de temperaturas del sistema queda en principio determinada por la ecuación diferencial parcial obtenible del balance de energía interna (A.3.26):

$$\rho_{(o)} \frac{d\, e_{int(o)}}{d\,\tau} = \frac{e_{int(o)}\, p_{(o)}}{c^2}\, v^{\nu}_{;\,\nu} - J^{\nu}_{[Q];\nu} \qquad (A.3.38)$$

en donde la relación constitutiva (A.3.34) puede insertarse en el segundo término del lado derecho de la ecuación (A.3.32), y el lado izquierdo puede ser reescrito como:

$$\rho_{(o)} \frac{d\, e_{int(o)}}{d\,\tau} = \rho_{(o)} \left[\left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \rho_{(o)}} \right)_{\Theta_{(o)}} \frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} + \left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \Theta_{(o)}} \right)_{\rho} \frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} \right] \qquad (A.3.39)$$

Las derivadas parciales en la ecuación (A.3.39) son conocidas de la termostática (en donde se vuelve a aplicar el principio de equivalencia en el sistema comóvil):

$$\left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\ \rho_{(o)}} \right)_{\Theta} = - \left(\frac{\beta}{\kappa_{\Theta}} \right) \frac{\Theta_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} \qquad (A.3.40)$$

y

$$\left(\frac{\partial\, e_{int(o)}}{\partial\, \Theta_{(o)}} \right)_{\rho} = c_p \qquad (A.3.41)$$

de manera tal que la ecuacion de calor en ausencia de viscosidad se escribe como:

$$\left(- \left(\frac{\beta}{\kappa_{\Theta}} \right) \frac{\Theta_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} + \frac{p_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} \right) \frac{d\, \rho_{(o)}}{d\,\tau} + \rho_{(o)}\, c_p \frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} = \frac{e_{int(o)}\, p_{(o)}}{c^2}\, v^{\nu}_{;\,\nu} - J^{\nu}_{[Q];\nu} \qquad (A.3.42)$$

o bien, usando la ecuación de continuidad (A.3.7) y la relación constitutiva (A.3.34):

$$\left(- \left(\tfrac{\beta}{\kappa_{\Theta}} \right) \tfrac{\Theta_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} + \tfrac{p_{(o)}}{\rho^2_{(o)}} \right) \left(-\rho_{(o)} v^{\nu}_{;\nu} - \tfrac{p_{(o)}}{c^2} v^{\nu}_{;\nu} \right) + \ \rho_{(o)}\, c_p \tfrac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} =$$
$$+ \tfrac{e_{int(o)}}{c^2} \tfrac{p_{(o)}}{c^2} v^{\nu}_{;\nu} + k\ \left(g^{\mu\nu} \Theta_{;\nu} \right)_{;\,\mu}$$

Esta última ecuación, para el caso en que la conductividad térmica sea constante y *sin* requerir que la velocidad del elemento sea cero se reduce al análogo de la conocida ecuación de calor (107):

$$\rho_{(o)}\ c_p\ \Theta_{;o} \doteq k\ (g^{\mu\nu}\Theta_{;\nu})_{;\mu}$$

en la obtención de esta ecuación no es necesario suponer que la presión no dependa explícitamente del tiempo, tal y como ocurre con el tensor propuesto por Einstein (10).

References

[1]J. Bekenstein, Black Holes and Entropy, Phys. Rev. D 7, 2333 (1973).

[2]S.W.Hawking, Black Holes and Thermodynamics, Phys. Rev. D 13, 191 (1976).

[3]S.W.Hawking, Particle Creation by BlackHoles, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).

[4]G.W. Gibbons and S.W.Hawking, Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity, Phys. Rev. D 15, 2752 (1977).

[5]Susskind L. and Uglum G, Black Hole Entropy in Canonical Quantum Gravity and Superstring Theory. Phys. Rev. D 50, 2700 (1994).

[6]Chandrasekhar, S., *The Principles of Stellar Dynamics,* Dover, U.S.A.1960.

[7]Reif F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics,* McGraw-Hill, U.S.A. 1965

[8]Katz A. *Principles of Statistical Mechanics,* W.H Freeman and Co., U.S.A. 1966.

[9]C.W Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation,* Freeman, U.S.A. 1973

[10]Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes,* Oxford U. Press, U.K.1992.

[11]J.M. Bardeen, N. Carter and S.W. Hawking, Commun. Math. Phys.31, 161 (1973).

[12]Louisell, W.H. *Quantum Statistical Properties of Radiation.* John Wiley & Sons, Inc, 1990.

[13]Heitler, W. *The Quantum Theory of Radiation 3rd Ed.* Oxford University Press, U.K. 1954.

[14]García-Colín L.S. *Termodinámica de Procesos Irreversibles*, Colección C.B.I., U.A.M-I , México, 1989.

[15]Einstein A. "The Meaning of Relativity". Princeton University Press, 1969.

[16]S.R. de Groot and P. Mazur, "*Non-Equilibrium Thermodynamics*", Dover Publications, 1984.

[17]S.R. de Groot, W.A: van Leeuwen and Ch.G. van Weert. "Relativistic Kinetic Theory", North Holland 1980, and references therein.

[18]Israel W. "Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory". Annals of Physics **100**, 310-331 (1976), and references therein.

[19]Israel W. "Relativistic Thermodynamics, Thermofield Statistics and Superfluids". J. Non-Equilib. Thermodyn. Physics **11**, 295-316 (1986).

[20]Zhang, Z. "Physics of Black Holes: Classical, Quantum and Astrophysical" in *Black Hole Physics,* edited by Venzo De Sabbata an Zhenjiu Zhang. NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[21]G.W. Gibbons and S.W. Hawking. Eds. "Euclidean Quantum Gravity" World Scientific 1993.

[20]H. Stephani, "General Relativity" 2nd. Ed. Cambridge University Press. 1994.

[23]L Landau and E.M. Lifshitz, "Classical Field Theory". Addison Wesley, Reading, Mass., 1958.

[24]R.P. Feynman, "Statisitical Mechanics: A Set of Lectures", Eleventh printing, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A. 1988.

[25]C. Cattaneo, C.R. *Acad. Sci (Paris)* **247** (1958), 431.

[26]N.G. Van Kampen, *Physica* **46** (1970), 315.

[27]M. Kranyš, *Nuovo Cimento* **42B** (1966), 51.

[28]D.C. Kelly, *American Journal of Physics,* **36** (1968), 585.

[29]A. Sandoval-Villalbazo & L.S. García-Colín; Physica A (Submitted and accepted for publication).