Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

Propiedades de Cerradura y Operadores en Clases de Módulos

T E S I S

Que para obtener el título de

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Sergio Zamora Erazo

Director de Tesis: Dr. Carlos Signoret Poillon

México, Distrito Federal 7 de julio de 2014

Casa abierta al tiempo

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Propiedades de Cerradura y Operadores en Clases de Módulos

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Presenta

Sergio Zamora Erazo

Asesor: Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon

Jurado calificador:
Presidente: Dr. José Ríos Montes José Ríos M.
Secretario: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González R. Fernández G.
Vocal: Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon

México, D.F. a 7 de julio de 2014

A mis padres

Dagoberto y Mireya

A mi prometida

Anahi

Agradecimientos

A mis padres y hermanos, gracias por todo el apoyo y el amor que me han dado para llegar tan lejos y lo que aún me falta por recorrer. No sería nada de lo que soy sin su esfuerzo y cariño.

A mi prometida, Anahi, gracias por estar conmigo y apoyarme siempre y más en esta etapa, por la paciencia y comprensión y por esas palabras de aliento para no rendirme aunque la presión fuera enorme y por muchas cosas más.

A mi asesor, Dr. Carlos Signoret, gracias por el voto de confianza que me dio al inicio de esta tesis, por su conocimiento y tiempo que me ha brindado, por todo el apoyo que he recibido de su parte. Gracias por mostrarme este maravilloso campo de estudio de las matemáticas.

A mis sinodales, Dr. José Rios y Dr. Rogelio Fernández-Alonso, gracias por tomarse el tiempo de revisar esta tesis, por sus acertadas observaciones y sugerencias a la misma.

A mis amigos, compañeros y profesores del Posgrado en Ciencias (Matemáticas) de la UAM-I, gracias por influir, directa o indirectamente, en mi formación académica en esta etapa.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme apoyado económicamente en la realización de esta tesis con número de becario 317336.

Introducción

El estudio de la teoría de anillos a través de las clases de módulos ha sido de gran importancia. Un ejemplo de esta situación es el estudio de clases de módulos de torsión hereditaria y su relación con los filtros de Gabriel en el anillo. En [23], F. Raggi y C. Signoret estudiaron las clases de Serre y una relación que existe con ciertos filtros lineales en el anillo.

Además, el estudio por si solo de clases de módulos como grandes retículas ha tenido un gran auge en los últimos veinte años. En [2], A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos estudiaron las estructuras reticulares de las clases naturales y conaturales; en [21], F. Raggi, J. Ríos y R. Wisbauer estudiaron la estructura reticular de las clases de pretorsión hereditaria; y en [22], F. Raggi y C. Signoret estudiaron la estructura reticular de las clases de Serre.

Durante los últimos quince años, el estudio de la estructura reticular de las clases de módulos definidas mediante de propiedades de cerradura ha estado en pleno apogeo. En [1], A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos estudiaron, por medio de sus propiedades de cerradura, las retículas de clases de torsión hereditaria y pretorsión hereditaria, así como la gran retícula de clases abiertas. También incluyeron dos grandes retículas de clases de módulos que fueron estudiadas por medio de este enfoque. En [9], J. Dauns y Y. Zhou recopilaron el estudio a fondo de las clases de torsión, pretorsión y naturales por medio de sus propiedades de cerradura.

También, en los últimos años, se han estudiado cierto tipo de clases de módulos que son "generadas" a partir de clases de módulos dadas. Al proceso de obtener estas clases, lo llamaremos la *aplicación de operadores* en clases de módulos. En [6], I. Crivei y S. Crivei introdujeron ocho operadores, los cuales tienen relación directa en su mayoría con las retículas de clases naturales y conaturales. En [24], P. Smith introdujo tres operadores que tienen relación directa con las grandes retículas de clases de Serre, clases hereditarias y clases cohereditarias.

En este trabajo se estudia la estructura reticular de retículas y grandes retículas ya estudiadas por diversos investigadores, pero con el enfoque de operadores. Además, se estudia la clase de las clases aditivas y se estudia su estructura reticular. También, se introducen dos grandes retículas derivadas de la clase de clases aditivas.

En el capítulo 1 se dan los preliminares para el estudio de retículas y grandes retículas de clases de módulos conocidas y estudiadas en la literatura.

En el capítulo 2 se estudian a detalle las grandes retículas de clases abiertas, clases hereditarias y clases cohereditarias, las retículas de clases de torsión hereditaria, clases de pretorsión hereditaria y clases naturales, la gran retícula de las clases de Serre y las grandes retículas $R-sext$ y $R-qext$.

En el capítulo 3 se introducen nuevos operadores de clases de módulos y se estudian las propiedades de cerradura de algunas clases asociadas. Dichos operadores son los duales de algunos estudiados en [6] y [24] por I. Crivei, S. Crivei y P. Smith.

En el capítulo 4 se introduce la clase de clases de módulos llamada $R-ad$ y a sus elementos, *clases aditivas*, consideradas por Walker y Walker en [27]. Se estudia su estructura reticular y una relación que existe con ciertos filtros lineales. También se introducen dos clases de módulos, llamadas $R-sdfsum$ y $R-qdfsum$, derivadas de la clase de clases aditivas y se estudian sus estructuras reticulares.

Este trabajo contiene dos apéndices. En el primero se estudia cierto tipo de clases de módulos y sus propiedades de cerradura con respecto a algunos operadores. En el segundo se presenta el conjunto de filtros lineales de un anillo R y la relación que existe entre ellos y las clases de torsión hereditaria y pretorsión hereditaria.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo del trabajo, usaremos la noción de *conjunto* basada en los axiomas de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección. En la teoría de conjuntos y sus aplicaciones, una *clase* es una colección de conjuntos que puede ser definida en forma no ambigua por una o varias propiedades que satisfacen sus miembros. Formalmente, si $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ es una fórmula, llamamos a $C = \{x \mid \phi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$ la *clase* de los conjuntos que satisfacen la fórmula; es decir, $x \in C$ si y solo si $\phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ [15]. Sin embargo, manejamos las clases y los conjuntos en forma muy similar. A continuación introduciremos nociones básicas de la Teoría de Módulos y la Teoría de Retículas que serán utilizadas en este trabajo.

1.1. Teoría de Módulos

Esta sección está constituida por tres partes: módulos, homomorfismos y operaciones de módulos. De aquí en adelante, consideraremos a todo anillo R como anillo asociativo con 1.

1.1.1. Módulos, submódulos y módulos cociente

Sea R un anillo y M un grupo abeliano aditivo. Diremos que M es un $R-$*módulo izquierdo* si existe una función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : R \times M & \rightarrow & M \\ (r, m) & \overset{\varphi}{\mapsto} & rm \end{array}$$

tal que

i) $r(m + m') = rm + rm'$

ii) $(r + r')m = rm + r'm$

iii) $(rr')m = r(r'm)$

iv) $1m = m$

para toda $r, r' \in R$ y para toda $m, m' \in M$.

De aquí en adelante, entenderemos por módulo a un $R-$módulo izquierdo.

Ejemplo 1.1 Sea G un grupo abeliano. Entonces G es un $\mathbb{Z}-$módulo. $\square$

Ejemplo 1.2 Si R es un anillo, entonces R es un $R-$módulo. $\square$

Ejemplo 1.3 Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Entonces V es un $K-$módulo. $\square$

Sea M un módulo y $N \subseteq M$. Diremos que N es *submódulo* de M, que denotaremos como $N \leqslant M$, si es un subgrupo de M cerrado bajo la multiplicación por escalar de elementos en R. Si $N \neq M$, diremos que N es *submódulo propio* de M.

Si $N \leqslant M$, el *módulo cociente de* M *sobre* N es el módulo

$$M/N = \{m + N \mid m \in M\}$$

donde la operación suma es la suma usual de grupos cociente (aditivos) y la multiplicación por escalar está definida como $r(m + M') := rm + M'$ para toda $r \in R$.

Diremos que un módulo M es *finitamente generado* si existe un conjunto finito $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Si $M = Rm$ para algún $m \in M$, diremos que M es *cíclico*.

Diremos que un módulo $0 \neq M$ es *simple* si 0 y M son sus únicos submódulos. Notemos que todo módulo simple es cíclico.

1.1.2. Homomorfismos de módulos y Teoremas de Isomorfismo

Sean M, N módulos y $f : M \rightarrow N$ una función. Diremos que f es un R-*homomorfismo de módulos* si

i) $f(m + m') = f(m) + f(m')$

ii) $f(rm) = rf(m)$

para toda $m, m' \in M$ y para toda $r \in R$.

De aquí en adelante, entenderemos por homomorfismo a un $R-$homomorfismo de módulos.
Sea $f : M \rightarrow N$ un homomorfismo. Diremos que

- f es *monomorfismo* (o *mono*) si f es inyectivo
- f es *epimorfismo* (o *epi*) si f es sobreyectivo
- f es *isomorfismo* si f es mono y epi. Usaremos la notación $M \cong N$ para decir que $f : M \rightarrow N$ es un isomorfismo.

De esta manera, si $N \leqslant M$ entonces la *inclusión natural* $i : N \rightarrow M$ es mono, y la *proyección natural* $p : M \rightarrow M/N$ es epi con $Ker\ p = N$.

Sea $f : M \rightarrow N$ un homomorfismo. Entonces

- $Ker\ f = \{m \in M \mid f(m) = 0\} \leqslant M$
- $Im\ f = \{n \in N \mid\ \exists\ m \in M \text{ tal que } f(m) = n\} \leqslant N$

Observación 1.4 Si $f : M \to N$ es homomorfismo, entonces

i) f es mono si y sólo si $Ker\ f = 0$

ii) f es epi si y sólo si $Im\ f = N$ ▫

Los Teoremas de Isomorfismo de Noether tienen su equivalente en la Teoría de Módulos, y son los siguientes.

Teorema 1.5 (Primer Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $f : M \to N$ es homomorfismo, entonces

$$M/(Ker\ f) \cong Im\ f$$

Demostración:
Consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M/(Ker\ f) & \to & Im\ f \\ m + Ker\ f & \mapsto & f(m) \end{array}$$

Si $f(m) = f(m')$, entonces $f(m - m') = 0$, por lo que $m - m' \in Ker\ f$. Así, $m + Ker\ f = m' + Ker\ f$. Por lo tanto, φ es mono. Por otro lado, φ es epi pues $Im\ \varphi = Im\ f$. De esta manera, φ es un isomorfismo. ■

Teorema 1.6 (Segundo Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $N, K \leqslant M$, entonces $K \leqslant K + N$, $N \cap K \leqslant N$ y

$$N/(N \cap K) \cong (N + K)/K$$

Demostración:
Sea $p : M \to M/K$ la proyección natural y $f = p\mid_N$. Así,

$$Ker\ f = \{n + K \mid n \in K\} = N \bigcap K$$

e $$Im\ f = \{n + K \mid n \in N\} = \{n + k + K \mid n \in N, k \in K\} = (N + K)/K.$$

Por el Teorema 1.5,

$$N/(N \cap K) \cong (N + K)/K$$

Teorema 1.7 (Tercer Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $N, K \leqslant M$ tales que $K \subseteq N$, entonces $N/K \leqslant M/K$ y

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N$$

Demostración:
Sea $f : M/K \to M/N$. De esta manera,

$$Ker\ f = \{m + K \mid m \in N\} = N/K$$

Además, $Im\ f = \{m + K \mid m \in M\} = \{m + N \mid m \in M\} = M/N$ pues $K \subseteq N$. Por el Teorema 1.5,

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N$$

■

El siguiente resultado caracteriza a los módulos cíclicos.

Lema 1.8 Sea M un módulo. Entonces M es cíclico si y sólo si $M \cong R/I$ para algún ideal $I \leqslant R$. Más aún, si $M = Rm$ para algún $m \in M$, entonces

$$I = \{r \in R \mid rm = 0\}$$

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $M = Rm$ para algún $m \in M$. Definimos $f : R \to M$ como $f(r) = rm$. Entonces f es homomorfismo y además f es epi. Por el Teorema 1.5, $R/(Ker\ f) \cong Im\ f = M$, donde $Ker\ f = \{r \in R \mid rm = 0\} \leqslant R$.

($\Leftarrow$) Notemos que $R/I = R(1 + I)$ pues $1 \in R$. Supongamos que $f : R/I \to M$ es isomorfismo para algún $I \leqslant R$. Entonces existe $m \in M$ tal que $f(1 + I) = m$. De esta manera, $M = Im\ f = Rm$.

1.1.3. Sumas directas y productos directos de módulos y sucesiones exactas de módulos.

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos, donde I es un conjunto.

El *producto directo de* $\{M_i\}_{i\in I}$ es el módulo

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i) \mid m_i \in M_i\}$$

cuyas operaciones están definidas como

$$(m_i) + (n_i) = (m_i + n_i) \qquad \text{y} \qquad r(m_i) = (rm_i)$$

para toda $m_i \in M_i, n_i \in N_i, r \in R$ y para toda $i \in I$.

La *suma directa de* $\{M_i\}_{i\in I}$ es el módulo

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i) \mid m_i = 0 \text{ para casi toda } m_i \in M_i\} \leqslant \prod_{i\in I} M_i$$

Llamaremos *proyección natural del producto directo* al homomorfismo

$$p_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i \quad \text{dado por} \quad (m_i) \overset{p_i}{\mapsto} m_i$$

e *inclusión natural del producto directo* al homomorfismo

$$\lambda_i : M_i \to \prod_{i\in I} M_i \quad \text{dado por} \quad m_i \overset{\lambda_i}{\mapsto} (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{m_i}_{\text{i-ésima posición}}, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Tenemos que $p_i\lambda_i = 1_{M_i}$ para toda $i \in I$, mientras que $p_i\lambda_k = 0$ si $i \neq k$. Además, p_i, λ_i están definidas para $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ y son tales que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i p_i = 1_{\bigoplus_{i\in I} M_i}$

Teorema 1.9 Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ módulos dados y las inclusiones naturales $\lambda_i : M_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$. Entonces la pareja $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{\lambda_i\}_{i\in I})$ cumple con la siguiente

Propiedad Universal de la Suma Directa: Para todo módulo X junto con una familia de homomorfismos $f_i : M_i \to X$ existe un único homomorfismo

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} M_i \to X$$

tal que $\varphi \circ \lambda_i = f_i$ para toda $i \in I$.
Además, si existe otra pareja $(A, \{\alpha_i : M_i \to A\}_{i \in I})$ que cumple con la propiedad, entonces $A \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Demostración:
Sean $p_i : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M_i$ las proyecciones naturales. Definimos

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} M_i \to X \quad \text{como} \quad \varphi((m_i)) = \sum_{i \in I} f_i p_i((m_i))$$

Como casi todos los $p_i(m_i)$ son cero, la suma en X es finita, por lo que φ esta bien definida. Notemos que φ es homomorfismo de módulos y

$$\varphi \circ \lambda_i(m_i) = \sum_{k \in I} f_k p_k \lambda_i(m_i) = f_i(m_i),$$

por lo que φ hace conmutar el triángulo

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[r, dashed, "\exists!\ \varphi"] & X \\ M_i \arrow[u, "\lambda_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Supongamos que existe otra $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \to X$ que hace conmutar el triángulo anterior. Entonces

$$\psi((m_i)) = \psi \sum_{i \in I} \lambda_i p_i((m_i)) = \sum_{i \in I} \psi \lambda_i p_i((m_i)) = \sum_{i \in I} f_i p_i((m_i)) = \varphi((m_i))$$

lo que implica que $\psi = \varphi$.

Por otro lado, supongamos que existe otra pareja $(A, \{\alpha_i : M_i \to A\}_{i\in I})$ que cumple con la propiedad universal de la suma directa. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\exists!\ \varphi"] \arrow[rr, bend left, "1_{\oplus M_i}"] & A \arrow[r, "\exists!\ \Psi"] \arrow[rr, bend left, "1_A"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\exists!\ \varphi"] & A \\
 & & M_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[u, "\lambda_i"'] \arrow[ur, "\alpha_i"'] \arrow[ull, bend left, "\lambda_i"] &
\end{tikzcd}$$

De esta manera, tenemos que $\Psi \circ \varphi = 1_A$ y $\varphi \circ \Psi = 1_{\oplus M_i}$ y por lo tanto $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to A$ es isomorfismo. ∎

El siguiente resultado es dual al Teorema 1.9.

Teorema 1.10 Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ módulos dados y las proyecciones naturales $p_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i$. Entonces la pareja $(\prod_{i\in I} M_i, \{p_i\}_{i\in I})$ cumple con la siguiente

<u>**Propiedad Universal del Producto Directo**</u>: Para todo módulo X junto con una familia de homomorfismos $f_i : X \to M_i$ existe un único homomorfismo

$$\varphi : X \to \prod_{i\in I} M_i$$

tal que $p_i \circ \varphi = f_i$ para toda $i \in I$.
Además, si existe otra pareja $(A, \{\alpha_i : A \to M_i\}_{i\in I})$ que cumple con la propiedad, entonces $A \cong \prod_{i\in I} M_i$. ∎

Observación 1.11 Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos. Si $|I| = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

□

Sean $N, M_1, M_2 \leqslant M$. Diremos que M es *la suma directa (interna) de* M_1 *y* M_2, que denotaremos como $M = M_1 \oplus M_2$, si

$$M_1 \cap M_2 = 0 \quad \text{y} \quad M_1 + M_2 = M$$

Diremos que N es *sumando directo de* M, que denotaremos como $N \bigoplus M$, si existe $K \leqslant M$ tal que $M = N \oplus K$.

Sean f, g dos homomorfismos tales que $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$. Diremos que la sucesión es *exacta en* M si $Im\ f = Ker\ g$. En ese caso, diremos que $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es *exacta*.

Observación 1.12 Sean M, M', M'' módulos y f, g homomorfismos. Entonces

i) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ es exacta si y sólo si f es mono

ii) $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es exacta si y sólo si g es epi

iii) $0 \to M \xrightarrow{f} M' \to 0$ es exacta si y sólo si f es isomorfismo

iv) Si $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta, con f epi y g mono, entonces $M = 0$. Se concluye que si $0 \to M \to 0$ es exacta, entonces $M = 0$ □

Si $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M'' \to 0$ es exacta, tenemos que

$$Im\ i \cong M' \qquad \text{y} \qquad M/(Im\ i) \cong M/(Ker\ f) \cong Im\ f \cong M''$$

A este tipo de sucesiones les llamaremos *sucesiones exactas cortas*. A través de este enfoque, podemos reescribir el Tercer Teorema de Isomorfismo de la siguiente forma.

Teorema 1.13 (Segunda versión del Tercer Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $N, K \leqslant M$ tales que $K \subseteq N$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to N/K \to M/K \to M/N \to 0$$

Demostración:
Sea $f : M/K \to M/N$. De esta manera,

$$Ker\ f = \{m + K \mid m \in N\} = N/K$$

Además, $Im\ f = \{m + K \mid m \in M\} = \{m + N \mid m \in M\} = M/N$ pues $K \subseteq N$. Por lo tanto, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \to N/K \to M/K \xrightarrow{f} M/N \to 0$$

donde $Ker\ f = N/K$ y f es epi. ■

Sea $N \leqslant M$. Diremos que N es *esencial* en M si para cada $L \leqslant M$, $N \cap L = 0$ implica $L = 0$. Diremos que N es *superfluo* en M si para cada $L \leqslant M$, $N + L = M$ implica $L = M$. Usaremos la notación $N \trianglelefteq M$ y $N \ll M$ para decir que N es esencial en M y superfluo en M, respectivamente.

Sea $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ una sucesión exacta corta. Diremos que la sucesión exacta se *escinde* si existe $j : C \to B$ tal que $p \circ j = 1_C$.

Teorema 1.14 Sean $A, B \in R - Mod$ tales que $i : A \to B$ es mono. Entonces A es sumando directo de B si y sólo si existe $p : B \to A$ tal que $p \circ i = 1_A$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $A \bigoplus B$. Entonces $B = A \bigoplus C$ para algún $C \leqslant B$. Definimos $p : B \to A$ como la proyección de B en A y tal que $C = Ker\ p$. Es claro que $p \circ i = 1_A$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $p : B \to A$ tal que $p \circ i = 1_A$. Definimos $C = Ker\ p$, entonces para $b \in B$,

$$b = i \circ p(b) + (b - (i \circ p)(b))$$

y así $i \circ p(b) \in Im\ i$ y $b - (i \circ p)b \in Ker\ p$ ya que

$$p(b) - p \circ i \circ p(b) = p(b) - p(b) = 0.$$

Por lo tanto, $B = Im\ i + Ker\ p$ y además $Im\ i \cap Ker\ p = 0$. Por lo tanto, $B = Im\ i \oplus Ker\ p$ y así, A es sumando directo de B. ■

Corolario 1.15 Sean $A, B \in R-Mod$. Entonces $A \bigoplus B$ si y sólo si existe $C \in R-Mod$ tal que $0 \to A \to B \to C \to 0$ se escinde.

1.2. Teoría de Retículas

Sea A un conjunto no vacío. Una *relación binaria* ρ es un subconjunto de $A \times A$. Dos elementos $a, b \in A$ están *en relación* con respecto a ρ si $(a, b) \in \rho$ y lo denotaremos como $a\ \rho\ b$. De esta manera, $\rho = \{(a, b) \in A \times A \mid a\ \rho\ b\}$. Un *conjunto parcialmente ordenado* es una pareja (A, ρ) tal que ρ satisface las siguientes propiedades:

(P1) $(a, a) \in \rho$; (reflexividad)

(P2) si $(a, b) \in \rho$ y $(b, a) \in \rho$, entonces $a = b$; y (antisimetría)

(P3) si $(a, b) \in \rho$ y $(b, c) \in \rho$, entonces $(a, c) \in \rho$. (transitividad)

Si ρ satisface las propiedades (P1), (P2) y (P3), diremos que ρ es una *relación de orden parcial* y usualmente se denota como "$\leqslant$". De aquí en adelante, si $(A, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado, solamente diremos que A es un conjunto parcialmente ordenado, asumiendo que "$\leqslant$" es conocido.

Si A es una clase, diremos que A es una *clase parcialmente ordenada* si A cumple con todas las propiedades de ser un conjunto parcialmente ordenado (recordando que A es una clase, no un conjunto).

Sea $H \subseteq A$ y $a, b \in A$. Diremos que a es una *cota superior* de H si $h \leqslant a$ para toda $h \in H$. Una cota superior a de H es *la menor cota superior* (*supremo*) de H si es la única cota superior tal que $a \leqslant c$ para toda cota superior c de H; la denotaremos como $\sup H$ o $\bigvee H$.

Diremos que b es una *cota inferior* de H si $b \leqslant h$ para toda $h \in H$. Una cota inferior a de H es *la mayor cota inferior* (*ínfimo*) de H si es la única cota inferior tal que $c \leqslant b$ para toda cota superior c de H; la denotaremos como inf H o $\bigwedge H$.

Definición 1.16 Sea A un conjunto parcialmente ordenado (clase parcialmente ordenada). Diremos que A es una *retícula* (*gran retícula*) si sup $\{a, b\}$ e inf $\{a, b\}$ existen para todo $a, b \in A$. ▫

La siguiente proposición describe una condición más general del concepto de retícula y gran retícula.

Proposición 1.17 Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Entonces A es una retícula si y sólo si sup H e inf H existen para cualquier $H \subseteq A$ finito no vacío. El resultado anterior también se cumple para clases parcialmente ordenadas.

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Supongamos que A es una retícula y sea $H \subseteq A$ finito no vacío. Si $H = \{a\}$ para algún $a \in A$, es claro que sup $H =$ inf $H = a$. Supongamos que existen sup H e inf H para $H = \{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n \geqslant 1$ y $a_i \in A$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Probaremos que existen sup H' e inf H' para $H' = H \cup \{a_{n+1}\}$.

Sea $b =$ sup H y $c =$ sup $\{b, a_{n+1}\}$. Dado que $b \leqslant c$, entonces $a_i \leqslant c$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Como $a_{n+1} \leqslant c$, entonces c es una cota superior de H'. Si d es una cota superior de H', entonces $a_i \leqslant d$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Así, $b \leqslant d$ y como $a_{n+1} \leqslant d$, entonces $c \leqslant d$. Por lo tanto, $c =$ sup H'.

Por inducción sobre el número de elementos de H, concluimos que existe sup H para cualquier $H \subseteq A$ finito no vacío. Un proceso dual muestra que existe inf H para cualquier $H \subseteq A$ finito no vacío.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que sup H e inf H existen para cualquier $H \subseteq A$ finito no vacío. En particular, sup H e inf H existen para $H = \{a, b\}$ con $a, b \in A$ cualesquiera. Esto implica que A es una retícula. ■

Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Para cualesquiera $a, b \in A$, denotaremos como $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. De esta manera, podemos ver a "$\vee$" y a "$\wedge$" como operaciones binarias sobre A de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccl} \vee: & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \vee b = \sup\{a,b\} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccl} \wedge: & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \wedge b = \inf\{a,b\} \end{array}$$

Observación 1.18 Notemos que "$\vee$" y "$\wedge$" cumplen las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b, c \in A$.

(L1)	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$	(idempotencia)
(L2)	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	(conmutatividad)
(L3)	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	(asociatividad)
(L4)	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$	(identidades de absorción)

□

Definición 1.19 Sea A un conjunto (una clase) no vacío. Diremos que $(A, \wedge, \vee)$ es una *retícula* (*gran retícula*) si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias sobre A tales que ambas satisfacen las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4). □

El siguiente teorema muestra que las definiciones 1.16 y 1.19 son equivalentes.

Teorema 1.20 Sea A un conjunto no vacío.

(i) Sea $(A, \leqslant)$ una retícula. Definimos $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ y $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Entonces $(A, \wedge, \vee)$ es una retícula.

(ii) Sea $(A, \wedge, \vee)$ una retícula. Definimos $a \leqslant b$ si y sólo si $a \wedge b = a$. Entonces $(A, \leqslant)$ es una retícula.

El resultado anterior también se cumple para clases no vacías.

Demostración:
(i) Por la observación 1.18, tenemos que $(A, \wedge, \vee)$ es una retícula.

(ii) Supongamos que $(A, \wedge, \vee)$ es una retícula y definimos $a \leqslant b$ si y sólo si $a \wedge b = a$. Probaremos que "$\leqslant$" es una relación de orden parcial.

- Dado que "$\wedge$" es idempotente, entonces $a \wedge a = a$ lo que implica que $a \leqslant a$. Por lo tanto, "$\leqslant$" es reflexiva.

- Supongamos que $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$. Entonces $a \wedge b = a$ y $b \wedge a = b$. Dado que "$\wedge$" es conmutativa, entonces $a = a \wedge b = b \wedge a = b$. Por lo tanto, "$\leqslant$" es antisimétrica.

- Supongamos que $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$. Entonces $a \wedge b = a$ y $b \wedge c = b$. Así,

  $$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) \overset{(L3)}{=} (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$$

  lo que implica que $a \leqslant c$. Por lo tanto, "$\leqslant$" es transitiva.

De esta manera, "$\leqslant$" es una relación de orden parcial y $(A, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Ahora, probaremos que $(A, \leqslant)$ es una retícula. Sea $a, b \in A$ cualesquiera. Notemos que

$$(a \wedge b) \wedge a \overset{(L3)}{=} a \wedge (b \wedge a) \overset{(L2)}{=} a \wedge (a \wedge b) \overset{(L3)}{=} (a \wedge a) \wedge b \overset{(L1)}{=} a \wedge b$$

lo que implica que $a \wedge b \leqslant a$. Similarmente, $a \wedge b \leqslant b$. De esta manera, $a \wedge b$ es cota inferior de $\{a, b\}$.

Si c es una cota inferior de $\{a, b\}$, entonces $c \leqslant a$ y $c \leqslant b$, lo que implica que $c \wedge a = c$ y $c \wedge b = c$. De esta manera,

$$c \wedge (a \wedge b) \overset{(L3)}{=} (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c,$$

lo que implica que $c \leqslant a \wedge b$. Por lo tanto, $a \wedge b = \inf \{a, b\}$.

Por otro lado, notemos que

$$a \overset{(L4)}{=} a \wedge (a \vee b) \qquad \text{y} \qquad b \overset{(L4)}{=} b \wedge (b \vee a) \overset{(L2)}{=} b \wedge (a \vee b)$$

lo que implica que $a \leqslant a \vee b$ y $b \leqslant a \vee b$, respectivamente. Así, $a \vee b$ es cota superior de $\{a, b\}$. Si c es una cota superior de $\{a, b\}$, entonces $a \leqslant c$ y $b \leqslant c$, lo que implica que $a \wedge c = a$ y $b \wedge c = b$. Notemos que

$$a \vee c = (a \wedge c) \vee c \overset{(L2)}{=} c \vee (a \wedge c) \overset{(L2)}{=} c \vee (c \wedge a) \overset{(L4)}{=} c \; ;$$

similarmente $b \vee c = c$. De esta manera, tenemos que

$$(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee (b \vee c)) \overset{(L3)}{=} (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee c) \overset{(L4)}{=} a \vee b$$

lo que implica que $a \vee b \leqslant c$. Por lo tanto, $a \vee b = \sup \{a, b\}$.

Concluimos que $(A, \leqslant)$ es una retícula. ■

Existen retículas que cumplen con una generalización del resultado de la proposición 1.17 tomando subconjuntos no vacíos arbitrarios. Éstas son descritas en la siguiente

Definición 1.21 Sea A una retícula (gran retícula). Diremos que A es *completa* si $\bigvee H$ y $\bigwedge H$ existen para cualquier $H \subseteq A$ no vacío. □

Proposición 1.22 Sea A un conjunto parcialmente ordenado tal que existe $\bigwedge H$ para todo $H \subseteq A$ no vacío. Entonces A es una retícula completa. El resultado anterior también se cumple para clases parcialmente ordenadas.

Demostración:
Sea A un conjunto parcialmente ordenado y $H \subseteq A$ no vacío. Probaremos que existe $\bigvee H$. Sea K el conjunto de cotas superiores de H. Por hipótesis, $\bigwedge K$ existe, digamos a. Si $h \in H$, entonces $h \leqslant k$ para toda $k \in K$, lo que implica que h es cota inferior de K y así, $h \leqslant a$. De aquí se sigue que $a \in K$, por lo que a es el elemento menor en K. Por lo tanto, $a = \bigvee H$. Se concluye que A es una retícula completa. ■

1.2.1. Modularidad y distributividad en retículas

Proposición 1.23 Sea A una retícula y $a, b, c \in A$. Entonces

(*i*) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$

(*ii*) $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Demostración:
(*i*) Como $a \wedge b \leqslant a$ y $a \wedge c \leqslant a$, tenemos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a$. Además,

$$a \wedge b \leqslant b \leqslant b \vee c \quad \text{y} \quad a \wedge c \leqslant c \leqslant b \vee c$$

Por lo tanto, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$.

(*ii*) Como $a \leqslant a \vee b$ y $a \leqslant a \vee c$, tenemos que $a \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Además,

$$b \wedge c \leqslant b \leqslant a \vee b \quad \text{y} \quad b \wedge c \leqslant c \leqslant a \vee c$$

Por lo tanto, $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. ■

Proposición 1.24 Sea A una retícula y $a, b, c \in A$. Las siguientes igualdades son equivalentes:

(*i*) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$

(*ii*) $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$

Demostración:
Supongamos que se cumple (*i*) para cualesquiera $a, b, c \in A$. Sea $x, y, z \in A$. Usando (*i*) con $a = x \vee y$, $b = x$ y $c = z$, tenemos que

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) = x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) = (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) \\ &= x \vee (z \wedge y) \end{aligned}$$

Un proceso dual nos muestra que si se cumple (*ii*) para cualesquiera $x, y, z \in A$, entonces $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$. ■

Definición 1.25 Sea A una retícula (gran retícula). Diremos que A es *distributiva* si

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$

para cualesquiera $a, b, c \in A$. □

Definición 1.26 Sea A una retícula (gran retícula). Diremos que A es *marco* (*gran marco*) si

$$a \wedge \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \right) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (a \wedge b_\beta)$$

para cualquier $a \in A$ y cualquier familia $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de A. □

Proposición 1.27 Sea A una retícula y $a, b, c \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$

(*ii*) $(c \leqslant a) \Rightarrow [(a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)]$

Demostración:
Supongamos que se cumple (i) para cualesquiera $a, b, c \in A$. Si $c \leqslant a$, entonces $c = c \wedge a$. Por lo tanto,

$$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee c).$$

Por otro lado, supongamos que se cumple (ii) para cualesquiera $a, b, c \in A$ tales que $c \leqslant a$. Dado que $a \wedge c \leqslant a$, tenemos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$.■

Definición 1.28 Sea A una retícula (gran retícula). Diremos que A es *modular* si para cualesquiera $a, b, c \in A$ tales que $c \leqslant a$, entonces

$$(a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$$ □

1.2.2. Complementos y pseudocomplementos en retículas

Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Un *cero* de A es un elemento 0 tal que $0 \leqslant a$ para toda $a \in A$. Un *uno* de A es un elemento 1 tal que $a \leqslant 1$ para toda $a \in A$. Estos no necesariamente existen en A; sin embargo, son únicos si existen. Diremos que A es *acotado* si existen un cero y un uno en A.

Sea A una retícula acotada y $a \in A$. Diremos que a es un *complemento* de $b \in A$ si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. Notemos que si existe el complemento de un elemento de A, no necesariamente es único. Sin embargo, existen retículas donde si un elemento tiene complemento, entonces es único.

Proposición 1.29 Sea A una retícula distributiva y $a \in A$. Si $b \in A$ es un complemento de a, entonces b es único.

Demostración:
Sea $a \in A$. Si b_0 y b_1 son complementos de a, entonces

$$b_0 = b_0 \wedge 1 = b_0 \wedge (b_1 \vee a) = (b_0 \wedge b_1) \vee (b_0 \wedge a) = (b_0 \wedge b_1) \vee 0 = b_0 \wedge b_1$$

lo que implica que $b_0 \leqslant b_1$. Dualmente, se muestra que $b_1 \leqslant b_0$. Por lo tanto, $b_0 = b_1$. ■

Sea A una retícula acotada. Diremos que A es *complementada* si cada elemento de A tiene complemento. Diremos que A es *Booleana* si es una retícula distributiva complementada. Notemos que en una retícula distributiva acotada, si b es un complemento de a, entonces b es máximo en A tal que $a \wedge b = 0$.

Definición 1.30 Sea A una retícula (gran retícula) con cero y $a \in A$. Diremos que b es un *pseudocomplemento* de a en A si $a \wedge b = 0$ y es máximo en A con esa propiedad. □

Referencia bibliográfica del capítulo:

Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics **13**, 2nd Ed., Springer-Verlag New York, 1992.

Grätzer, G., *Lattice theory: first concepts and distributive lattices*, Dover ed., 2009.

Capítulo 2

Clases de módulos

En este capítulo mostraremos algunas clases de módulos conocidas y estudiaremos sus propiedades de cerradura, además de enunciar ciertas operaciones y definir operadores de clases de módulos.

Definición 2.1 Sea R un anillo. Llamaremos *clase abstracta de $R-$módulos* a cualquier colección $\mathcal{X}$ de $R-$módulos tal que $0 \in \mathcal{X}$ y que sea cerrada bajo isomorfismos, es decir, si $M \in \mathcal{X}$ y $M \cong N$, entonces $N \in \mathcal{X}$. $\square$

De aquí en adelante, entenderemos por clase de módulos a una clase abstracta de $R-$módulos.

Ejemplo 2.2 Los siguientes son ejemplos de clases de módulos.

- $R - Mod$ y la clase $0 := \{K \in R - Mod \mid K \cong 0\}$.
- Las clases

  $$\mathcal{L} = \{M \in R{-}Mod \mid Z(M) = M\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}' = \{M \in R{-}Mod \mid Z(M) = 0\}$$

  de todos los módulos *singulares* y *no singulares*, respectivamente, donde $Z(M) = \{m \in M \mid (0 : m) \trianglelefteq R\} \leqslant M$.
- Las clases $R - simp \cup \{0\}$ y $R - ssimp$ de todos los módulos *simples* y *semisimples*, respectivamente.

- Las clases

$$\mathcal{J} = \{M \in R - Mod \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } N \trianglelefteq K\} \qquad \text{y}$$

$$\mathcal{J}' = \{M \in R - Mod \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } K \leqslant N \text{ y } N/K \ll M/K\}$$

 de todos los módulos *extensores* y *elevadores*, respectivamente.

- Las clases **A** y **N** de todos los módulos *artinianos* y *noetherianos*, respectivamente.

- Las clases

$$\mathscr{T}_\tau = \{M \in R - Mod \mid M \text{ es de } \tau\text{-torsión}\}$$

 y

$$\mathscr{F}_\tau = \{M \in R - Mod \mid M \text{ es libre de } \tau\text{-torsión}\}$$

 de todos los módulos de τ-torsión y libres de τ-torsión, respectivamente, donde τ es una teoría de torsión. □

De aquí en adelante, para cada $M \in R - Mod$ denotaremos como $\{M\}$ a la clase de módulos $\{M' \in R - Mod \mid M' \cong M\} \cup \{0\}$.

A lo largo del trabajo, consideraremos ciertas propiedades de cerradura para una clase de módulos, las cuales se muestran en la siguiente

Definición 2.3 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Diremos que

- $\mathcal{X}$ es *cerrada bajo submódulos* si $(M \in \mathcal{X}, N \leqslant M \Rightarrow N \in \mathcal{X})$
- $\mathcal{X}$ es *cerrada bajo cocientes* si $(M \in \mathcal{X}, N \leqslant M \Rightarrow M/N \in \mathcal{X})$
- $\mathcal{X}$ es *cerrada bajo extensiones exactas* si $(\forall\ 0 \to N \to M \to L \to 0;\ N, L \in \mathcal{X} \Rightarrow M \in \mathcal{X})$
- $\mathcal{X}$ es *cerrada bajo sumas directas arbitrarias* si $(\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{X}, I \text{ conjunto} \Rightarrow \bigoplus_I M_i \in \mathcal{X})$
- $\mathcal{X}$ es *cerrada bajo sumas directas finitas* si $(\{M_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \in \mathcal{X})$ □

2.1. Operaciones entre clases de módulos

Además de definir clases de módulos por medio de propiedades de cerradura, también se pueden operar entre ellas. Específicamente, se definen el producto finito de clases y la suma finita de clases (a través de sucesiones exactas cortas y sumas directas, respectivamente).

Definición 2.4 Sea n un entero positivo y $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ clases de $R-$módulos. Definimos

- *el producto de clases* $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ como

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \{M \in R - Mod \mid N \in \mathcal{X}, \quad M/N \in \mathcal{Y} \quad \text{para algún } N \leqslant M\}$$

- *el producto finito de clases* $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$ como

$$\prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}_i \right) (\mathcal{X}_n)$$

- *la suma finita de clases* $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_1$ como

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i = \left\{ M \in R - Mod \;\middle|\; M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i, \quad M_i \in \mathcal{X}_i \right\}$$

□

En particular, si $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, denotaremos a $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 \cdots \mathcal{X}_n$ como $\mathcal{X}^n$ y a $\mathcal{X}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathcal{X}_n$ como $\mathcal{X}^{(n)}$.

Proposición 2.5 Sea $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de $R-$módulos. Entonces

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \left\{ M \in R - Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \; 0 \to X \to M \to Y \to 0 \text{ una sucesión exacta corta} \\ \text{tal que } X \in \mathcal{X} \text{ y } Y \in \mathcal{Y} \end{array} \right\}$$

Demostración:
Sea

$$T = \left\{ M \in R-Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ 0 \to X \to M \to Y \to 0 \text{ una sucesión} \\ \text{exacta corta tal que } X \in \mathcal{X} \text{ y } Y \in \mathcal{Y} \end{array} \right\}$$

Probaremos que $\mathcal{X}\mathcal{Y} = T$.

Sea $M \in \mathcal{X}\mathcal{Y}$. Entonces existe $N \leqslant M$ tal que $N \in \mathcal{X}$ y $M/N \in \mathcal{Y}$. Así, la sucesión

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

es exacta corta, de donde se sigue que $M \in T$. Por lo tanto, $\mathcal{X}\mathcal{Y} \subseteq T$.

Sea $M \in T$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to X \to M \to Y \to 0$$

tal que $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. De esta manera, existe $N \leqslant M$ tal que $X \cong N$ y $Y \cong M/X \cong M/N$. Entonces , $N \in \mathcal{X}$ y $M/N \in \mathcal{Y}$, y así, $M \in \mathcal{X}\mathcal{Y}$. Por lo tanto, $T \subseteq \mathcal{X}\mathcal{Y}$. ■

Corolario 2.6 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^2$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Si $M \in \mathcal{X}$, entonces la sucesión $0 \to M \to M \to 0 \to 0$ es exacta corta, lo que implica que $M \in \mathcal{X}^2$. por lo tanto, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^2$. ■

Corolario 2.7 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas si y sólo si $\mathcal{X} = \mathcal{X}^2$

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas. Por el corolario 2.6, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^2$. Si $M \in \mathcal{X}^2$, por la proposición 2.5 existe una sucesión exacta corta

$$0 \to N \to M \to L \to 0$$

tal que $N, L \in \mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, entonces $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}$ y así, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^2$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{X} = \mathcal{X}^2$. Sea $0 \to N \to M \to L \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $N, L \in \mathcal{X}$. Por la proposición 2.5, $M \in \mathcal{X}^2 = X$. Por lo tanto, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas. ■

En [1], los autores definen $E(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ como la igualdad en la proposición 2.5. La siguiente proposición es un resultado que obtuvieron usando la notación $E(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y que reescribimos para el producto de clases $\mathcal{X}\mathcal{Y}$.

Proposición 2.8 $\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) = (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$ para cualesquiera $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ clases de módulos.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$. Entonces existe $0 \to N \to M \to L \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $N \in \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Como $L \in \mathcal{Y}\mathcal{Z}$, entonces existe

$$0 \to L' \to L \to L'' \to 0$$

una sucesión exacta corta tal que $L' \in \mathcal{Y}$ y $L'' \in \mathcal{Z}$. Como $L \cong M/N$, entonces $L' \cong K/N$ para algún $K \in R - Mod$ tal que existe $0 \to N \to K$ y existe $0 \to K \to M$. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M/K \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & M/K \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como $N \in \mathcal{X}$ y $K/N \cong L' \in \mathcal{Y}$, entonces $K \in \mathcal{X}\mathcal{Y}$. Como $M/K \cong L'' \in \mathcal{Z}$, se tiene que $M \in (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$.

Por otro lado, sea $M \in (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$. Entonces existe $0 \to N \to M \to L \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $N \in \mathcal{X}\mathcal{Y}$ y $L \in \mathcal{Z}$. Como $N \in \mathcal{X}\mathcal{Y}$, entonces existe

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

una sucesión exacta corta tal que $N' \in \mathcal{X}$ y $N'' \in \mathcal{Y}$. Tenemos que $L \cong M/N$ y $N'' \cong N/N'$. Como existe $0 \to N \to M$, entonces existe $0 \to N/N' \to M/N'$. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N' \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & N' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N/N' \arrow[r] \arrow[d] & M/N' \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $N/N' \cong N'' \in \mathcal{Y}$ y $M/N \cong L \in \mathcal{Z}$, entonces $M/N' \in \mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Como $N' \in \mathcal{X}$, se tiene que $M \in \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$. Por lo tanto, $(\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$. ■

Observación 2.9 Notemos que

- $(\mathcal{X}\bigoplus\mathcal{Y})\bigoplus\mathcal{Z} = \mathcal{X}\bigoplus(\mathcal{Y}\bigoplus\mathcal{Z})$;
- $\mathcal{X}\bigoplus\mathcal{Y} = \mathcal{Y}\bigoplus\mathcal{X}$; y
- $\mathcal{X}\bigoplus 0 = 0 \bigoplus\mathcal{X} = \mathcal{X}$
- $\mathcal{X}0 = 0\mathcal{X} = \mathcal{X}$

para cualesquiera $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ clases de módulos. □

Proposición 2.10 Para cualesquiera $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ clases de módulos, se tiene que

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}\bigoplus\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}\mathcal{Y}$$

Demostración:
La contención $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ es clara.

Sea $M \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Si $M \in \mathcal{X}$, entonces $M \cong M \oplus 0$ donde $0 \in \mathcal{Y}$. Si $M \in \mathcal{Y}$, entonces $M \cong 0 \bigoplus M$ donde $0 \in \mathcal{X}$. De esta manera, $M \in \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y}$. Así, $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y}$.

Si $M \in \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y}$, entonces $M = N \bigoplus L$ donde $N \in \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{Y}$. Así, existe

$$0 \to N \to M \to L \to 0$$

una sucesión exacta corta, de donde se sigue que $M \in \mathcal{X}\mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}\mathcal{Y}$. ■

La proposición anterior se puede generalizar de manera finita, como se describe en el siguiente

Corolario 2.11 Sea $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ clases de $R-$módulos, donde $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i.$$

2.2. Operadores sobre clases de módulos

En [24], P. Smith estudia las propiedades de cerradura de las clases $H(\mathcal{X})$, $E(\mathcal{X})$ y $D(\mathcal{X})$ (ver definición 2.12), principalmente, y en [6], I. Crivei y S. Crivei estudian las propiedades de cerradura de las clases

$$F'(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid N \leqslant M, N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = 0\}$$

y $$T'(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid N \leqslant M, M/N \in \mathcal{X} \Rightarrow M/N = 0\},$$

principalmente, a partir de una clase de módulos $\mathcal{X}$ cualquiera. A este tipo de clases les llamaremos *operadores* de clases de módulos.

Sin embargo, estos operadores de clases han estado presentes de manera no explícita en la literatura. A continuación se muestra una lista de algunos operadores importantes y resultados que involucran propiedades de cerradura y operaciones entre clases de módulos.

Definición 2.12 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $H(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid M/N \in \mathcal{X} \ \text{ para todo } N \leqslant M\}$
- $E(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid M/N \in \mathcal{X} \ \text{ para todo } N \trianglelefteq M\}$
- $D(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } N \leqslant K,\ K/N \in \mathcal{X}\}$

□

Proposición 2.13 $H(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $M \in H(\mathcal{X})$. Entonces $M/N \in \mathcal{X}$ para todo $N \leqslant M$. En particular, $M \cong M/0 \in \mathcal{X}$, de donde se sigue que $H(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. ■

Proposición 2.14 $H(\mathcal{X}) \subseteq D(\mathcal{X}) \subseteq E(\mathcal{X})$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $M \in H(\mathcal{X})$. Entonces $M/N \in \mathcal{X}$ para todo $N \leqslant M$. En particular, tenemos que $M \bigoplus M$ y, por hipótesis, $M/N \in \mathcal{X}$. Esto implica que, $M \in D(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $H(\mathcal{X}) \subseteq D(\mathcal{X})$.

Ahora, sea $M \in D(\mathcal{X})$ y $N \trianglelefteq M$. Por hipótesis, existe $K \bigoplus M$ tal que $K/N \in \mathcal{X}$. Si $K' \leqslant M$ es tal que $M = K \bigoplus K'$, entonces $K \cap K' = 0$ implica $N \cap K' = 0$, de donde se sigue que $K' = 0$. De esta manera tenemos que $M = K + K' = K + 0 = K$. Así, $M/N \cong K/N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $D(\mathcal{X}) \subseteq E(\mathcal{X})$. ■

Proposición 2.15 Sea R un anillo, $M \in R-Mod$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $K \leqslant M$ tal que K es máximo con respecto a $N \bigcap K = 0$ y además, $N \oplus K \trianglelefteq M$. Usualmente se llama a K un $M-$*complemento* de N en M.

Demostración:
Sea $M \in R - Mod$ y $N \leqslant M$. Tomemos $\Omega = \{N' \leqslant M \mid N \cap N' = 0\}$. Notemos que $\Omega \neq \emptyset$ pues $0 \in \Omega$. Así, sea $T \subseteq \Omega$ una cadena de elementos de Ω. Tomemos $L = \bigcup_{N' \in T} N'$. Notemos que $L \leqslant M$ pues T es una cadena. Además, $L \in \Omega$ pues

$$N \cap L = N \cap \left(\bigcup_{N' \in T} N' \right) = \bigcup_{N' \in T} (N \cap N') = \bigcup_{N' \in T} 0 = 0.$$

Debemos probar que $L \neq M$. Supogamos que $L = M$. Entonces

$$N = N \cap M = N \cap L = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $L \neq M$ y L es una cota superior para T. Por el lema de Zorn, Ω tiene al menos un elemento máximo, digamos K, y es tal que $N \cap K = 0$.

Ahora, probaremos que $N \oplus K \trianglelefteq M$. Sea $L \leqslant M$ tal que $(N \oplus K) \cap L = 0$. Supongamos que $L \neq 0$. Sea $t \in N \cap (K + L)$, entonces $t = n = k + l$ lo que implica que $l = n - k \in (N \oplus K) \cap L = 0$. De aquí se sigue que $t = 0$ y así, $N \cap (K + L) = 0$, lo cual es una contradicción con respecto a que K es el máximo elemento en M con esa propiedad. Por lo tanto, $L = 0$ y así, $N \oplus K \trianglelefteq M$. ■

Proposición 2.16 Si $\mathcal{X}$ es una clase cerrada bajo submódulos y bajo extensiones exactas, entonces

$$\mathcal{X} \cap E(\mathcal{X}) = H(\mathcal{X})$$

Demostración:
Por la proposición 2.13 y la proposición 2.14, tenemos que $H(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \cap E(\mathcal{X})$.

Por otro lado, sea $M \in \mathcal{X} \cap E(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Por la proposición 2.15, existe $K \leqslant M$ tal que $N \cap K = 0$ y $N \oplus K \trianglelefteq M$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, tenemos que $K \in \mathcal{X}$. Ahora, como $M \in E(\mathcal{X})$, entonces $M/(N \oplus K) \in \mathcal{X}$, por lo que la sucesión

$$0 \to K \to M/N \to M/(N \oplus K) \to 0$$

es exacta pues $K \cong (N \oplus K)/N$. Esto implica que $M/N \in \mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas. Por lo tanto, $M \in H(\mathcal{X})$ y así $\mathcal{X} \cap E(\mathcal{X}) \subseteq H(\mathcal{X})$. ■

Proposición 2.17 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces

(i) $H(\mathcal{X}), E(\mathcal{X})$ y $D(\mathcal{X})$ son cerradas bajo cocientes; y

(ii) si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, entonces $H(\mathcal{X})$ y $E(\mathcal{X})$ son cerradas bajo submódulos.

Demostración:
(i)(1) Sea $M \in H(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $L/N \leqslant M/N$. Como $M \in H(\mathcal{X})$, tenemos que $(M/N)/(L/N) \cong M/L \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M/N \in H(\mathcal{X})$.

(2) Sea $M \in E(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $L/N \trianglelefteqslant M/N$. Supongamos que $L \cap K = 0$, con $K \leqslant M$. Entonces $N \cap K = 0$, lo que implica que $K \cong K/N \leqslant M/N$. De esta manera, $L/N \cap K = 0$. Como $L/N \trianglelefteqslant M/N$, tenemos que $K = 0$ y así, $L \trianglelefteqslant M$. Como $M \in E(\mathcal{X})$, tenemos que $(M/N)/(L/N) \cong M/L \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M/N \in E(\mathcal{X})$.

(3) Sea $M \in D(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $L/N \leqslant M/N$. Como $M \in D(\mathcal{X})$, entonces existe $L' \oplus M$ tal que $L'/L \in \mathcal{X}$. Esto implica que $L'/N \oplus M/N$. Además, $(L'/N)/(L/N) \cong L'/L \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M/N \in D(\mathcal{X})$.

(ii) Supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos.
(1) Sea $M \in H(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \leqslant N$. Entonces $N/K \leqslant M/K$. Como $M \in H(\mathcal{X})$, tenemos que $M/K \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, concluimos que $N/K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $N \in H(\mathcal{X})$.

(2) Sea $M \in E(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \trianglelefteqslant N$. Por la proposición 2.15, existe $L \leqslant M$ tal que $K \cap L = 0$ y $K \bigoplus L \trianglelefteqslant M$. Notemos que

$$K \cap (N \cap L) = (K \cap L) \cap N = 0 \cap N = 0$$

Como $K \trianglelefteqslant N$, tenemos que $N \cap L = 0$ y así, $N/K \cong (N \bigoplus L)/(K \bigoplus L)$. Como $M \in E(\mathcal{X})$, entonces $M/(K \bigoplus L) \in \mathcal{X}$. De esta manera, $N/K \leqslant M/(K \bigoplus L)$.

Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, concluimos que $N/K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $N \in E(\mathcal{X})$. ■

Corolario 2.18 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces $\mathcal{X}$ cerrada bajo cocientes si y sólo si $H(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo cocientes. Por la proposición 2.13, $H(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo cocientes, entonces $M/N \in \mathcal{X}$ para todo $N \leqslant M$. Esto implica que $M \in H(\mathcal{X})$, de donde se sigue que $\mathcal{X} \subseteq H(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $H(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Ahora, si $H(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, por la proposición 2.17 (i) $\mathcal{X}$ es cerrada bajo cocientes. ■

Proposición 2.19 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos cerrada bajo extensiones exactas. Entonces

(i) $H(\mathcal{X})\bigoplus H(\mathcal{X}) = (H(\mathcal{X}))^2 = H(\mathcal{X})$

(ii) $E(\mathcal{X})\bigoplus E(\mathcal{X}) = (E(\mathcal{X}))(H(\mathcal{X})) = E(\mathcal{X})$

(iii) $H(\mathcal{X})\bigoplus D(\mathcal{X}) = D(\mathcal{X})$

Demostración:
(i) Por la proposición 2.10, tenemos que

$$H(\mathcal{X}) \subseteq H(\mathcal{X})\bigoplus H(\mathcal{X}) \subseteq (H(\mathcal{X}))^2$$

Así, debemos probar que $(H(\mathcal{X}))^2 \subseteq H(\mathcal{X})$. Sea $M \in (H(\mathcal{X}))^2$ y $K \leqslant M$. Entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ donde $N, M/N \in H(\mathcal{X})$. De esta manera,

$$(N + K)/K \cong N/(N \cap K) \in \mathcal{X} \qquad \text{y} \qquad M/(N + K) \in \mathcal{X}$$

Así, tenemos que

$$0 \to (N + K)/K \to M/K \to M/(N + K) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $M/K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in H(\mathcal{X})$. Hemos probado que

$$H(\mathcal{X})\bigoplus H(\mathcal{X}) = (H(\mathcal{X}))^2 = H(\mathcal{X})$$

(ii) Por las proposiciones 2.10 y 2.14, tenemos las siguientes contenciones

$$E(\mathcal{X}) \subseteq E(\mathcal{X})\bigoplus H(\mathcal{X}) \subseteq (E(\mathcal{X}))(H(\mathcal{X}))$$

Así, debemos probar la contención $(E(\mathcal{X}))(H(\mathcal{X})) \subseteq E(\mathcal{X})$. Sea $M \in (E(\mathcal{X}))(H(\mathcal{X}))$ y $K \trianglelefteq M$. Entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ donde $N \in E(\mathcal{X})$ y $M/N \in H(\mathcal{X})$. Dado que $K \trianglelefteq M$, tenemos que $N \cap K \trianglelefteq N$ y así, $(N+K)/N \cong N/(N \cap K) \in \mathcal{X}$. Además, $M/(N+K) \in \mathcal{X}$ pues $M/N \in H(\mathcal{X})$. De esta manera, tenemos que

$$0 \to (N+K)/K \to M/K \to M/(N+K) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $M/K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in E(\mathcal{X})$ y así, $E(\mathcal{X}) = (E(\mathcal{X}))(H(\mathcal{X}))$.

Por otro lado, la proposición 2.10 nos asegura que

$$E(\mathcal{X}) \subseteq E(\mathcal{X}) \oplus E(\mathcal{X})$$

Así, debemos probar la contención $E(\mathcal{X}) \oplus E(\mathcal{X}) \subseteq E(\mathcal{X})$. Sea $M \in E(\mathcal{X})\bigoplus E(\mathcal{X})$ y $K \trianglelefteq M$. Entonces existen $M_1, M_2 \in E(\mathcal{X})$ tales que $M = M_1\bigoplus M_2$. Dado que $K \trianglelefteq M$, tenemos que $M_1 \cap K \trianglelefteq M_1$ y así, $(M_1+K)/K \cong M_1/(M_1 \cap K) \in \mathcal{X}$. Notemos que

$$M_1 + K = M \cap (M_1 + K) = (M_1\bigoplus M_2) \cap (M_1 + K) = M_1\bigoplus(M_2 \cap (M_1 + K))$$

Tenemos que $(M_1+K)\cap M_2 \trianglelefteq M_2$, pues si $L \leqslant M_2$ tal que $((M_1+K)\cap M_2)\cap L = 0$,

entonces
$$0 = ((M_1 + K) \cap M_2) \cap L = (M_1 + K) \cap L = K \cap L$$
lo que implica que $L = 0$. De esta manera, tenemos que
$$M/(M_1 + K) = (M_1 \bigoplus M_2)/(M_1 \bigoplus (M_2 \cap (M_1 + K))) \cong M_2/(M_2 \cap (M_1 + K)) \in \mathcal{X}$$
pues $M_2 \in E(\mathcal{X})$. De esta manera, tenemos que
$$0 \to (M_1 + K)/K \to M/K \to M/(M_1 + K) \to 0$$
es una sucesión exacta corta y como por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $M/K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in E(\mathcal{X})$ y así,
$E(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}) \oplus E(\mathcal{X})$.
Hemos probado que $E(\mathcal{X}) \bigoplus E(\mathcal{X}) = (E(\mathcal{X}))(H(\mathcal{X})) = E(\mathcal{X})$.

(iii) Por las proposiciones 2.10 y 2.14, tenemos las siguientes contenciones
$$D(\mathcal{X}) \subseteq H(\mathcal{X}) \bigoplus D(\mathcal{X}).$$
Así, debemos probar la contención $H(\mathcal{X}) \bigoplus D(\mathcal{X}) \subseteq D(\mathcal{X})$. Sea $M \in H(\mathcal{X}) \bigoplus D(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Existen $M_1 \in H(\mathcal{X})$ y $M_2 \in D(\mathcal{X})$ tales que $M = M_1 \bigoplus M_2$. Así,
$$(M_1 + N)/N = M_1/(M_1 \cap N) \in \mathcal{X}$$
pues $M_1 \in H(\mathcal{X})$. Notemos que $M_1 + N = M_1 \bigoplus (M_2 \cap (M_1 + N))$. Como $M_2 \in D(\mathcal{X})$, existe $K \oplus M_2$ tal que $K/(M_2 \cap (M_1 + N)) \in \mathcal{X}$. De esta manera, $M_2 = K \bigoplus K'$ para algún $K' \in M_2$ y así, $M = M_1 \bigoplus M_2 = (M_1 \bigoplus K) \bigoplus K'$, por lo que $(M_1 \bigoplus K) \oplus M$. Además,
$$N \leqslant M_1 + N = M_1 \bigoplus (M_2 \cap (M_1 + N)) \leqslant M_1 \bigoplus K$$

de donde se sigue que

$$(M_1 \bigoplus K)/(M_1 + N) = (M_1 \bigoplus K)/(M_1 \bigoplus (M_2 \cap (M_1 + N))) \cong K/(M_2 \cap (M_1 + N)) \in \mathcal{X}$$

De esta manera, tenemos que

$$0 \to (M_1 + N)/N \to (M_1 \bigoplus K)/N \to (M_1 \bigoplus K)/(M_1 + N) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $(M_1 \bigoplus K)/N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in D(\mathcal{X})$. Hemos probado que $H(\mathcal{X}) \bigoplus D(\mathcal{X}) = D(\mathcal{X})$. ■

Corolario 2.20 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, entonces $H(\mathcal{X})$ también lo es.

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas. Por la proposición 2.19, $H(\mathcal{X})^2 = H(\mathcal{X})$. Por el corolario 2.7, $H(\mathcal{X})$ es cerrada bajo extensiones exactas. ■

A continuación, se muestran ciertos operadores que ya han sido descritos y estudiados anteriormente, como clases generadas por ciertas clases, por diversos autores en [1], [9], [13], [20], [24] y [27], por mencionar algunos.

Definición 2.21 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $sub(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid \text{existe } 0 \to M \to K, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}$
- $quot(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid \text{existe } K \to M \to 0, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}$
- $subquot(\mathcal{X}) = sub(quot(\mathcal{X}))$ □

Proposición 2.22 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces

$$subquot(\mathcal{X}) = quot(sub(\mathcal{X}))$$

Demostración:
Sea $M \in subquot(\mathcal{X})$. Entonces, existen $0 \to M \xrightarrow{f} K$ y $L \xrightarrow{g} K \to 0$, donde $K \in quot(\mathcal{X})$ y $L \in \mathcal{X}$. Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ & M \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r, "g"] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sea P_b el producto fibrado de L y M. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ P_b \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r, "g"] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notemos que f' es mono y g' es epi. Como $L \in \mathcal{X}$, entonces $P_b \in sub(\mathcal{X})$, por lo que $M \in quot(sub(\mathcal{X}))$. Por lo tanto, $subquot(\mathcal{X}) \subseteq quot(sub(\mathcal{X}))$.

Ahora, sea $M \in quot(sub(\mathcal{X}))$. Entonces, existen $K \xrightarrow{f} M \to 0$ y $0 \to K \xrightarrow{g} L$, donde $K \in sub(\mathcal{X})$ y $L \in \mathcal{X}$. Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & & \\ K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] & 0 \\ L & & \end{tikzcd}$$

Sea P_o la suma fibrada de L y M. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & & \\ K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\ L \arrow[r, "f'"] & P_o & \end{tikzcd}$$

Notemos que g' es mono y f' es epi. Como $L \in \mathcal{X}$, entonces $P_o \in quot(\mathcal{X})$, por lo que $M \in sub(quot(\mathcal{X}))$. Por lo tanto, $quot(sub(\mathcal{X})) \subseteq subquot(\mathcal{X})$. ■

Los siguientes operadores son estudiados en [1] y [22] como clases generadas por ciertas clases. Cabe señalar que a través del análisis de operadores, se puede apreciar el papel importante que juegan los anteriores operadores y operaciones descritas. De aquí en adelante, consideraremos a $\mathbb{N}$ como los números naturales junto con el cero.

Definición 2.23 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $ext(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n$
- $sext(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (sub(\mathcal{X}))^n$
- $qext(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (quot(\mathcal{X}))^n$
- $serre(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (subquot(\mathcal{X}))^n$ □

Observación 2.24 Notemos que

- $sext(\mathcal{X}) = ext(sub(\mathcal{X}))$
- $qext(\mathcal{X}) = ext(quot(\mathcal{X}))$
- $serre(\mathcal{X}) = ext(subquot(\mathcal{X}))$ □

Los siguientes operadores, hasta donde sabemos, no han sido estudiados o contemplados por alguien. En este trabajo se ha profundizado su estudio para obtener propiedades interesantes que ayuden a describir la clase a la que pertenecen (capítulo 4). Además, muestran cierta relación con otros operadores ya conocidos, como son las clases de Serre o las clases de pretorsión hereditaria generadas por una clase cualquiera.

Definición 2.25 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $dfsum(\mathcal{X}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}$
- $subdfsum(\mathcal{X}) = sub\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$
- $quotdfsum(\mathcal{X}) = quot\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$
- $ad(\mathcal{X}) = subquot\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$ □

Observación 2.26 Notemos que

- $subdfsum(\mathcal{X}) = sub(dfsum(\mathcal{X}))$
- $quotdfsum(\mathcal{X}) = quot(dfsum(\mathcal{X}))$
- $ad(\mathcal{X}) = subquot(dfsum(\mathcal{X}))$ □

Definición 2.27 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $dsum(\mathcal{X}) = \left\{ \bigoplus_{i \in I} K_i \;\middle|\; I \text{ conjunto arbitrario y } K_i \in \mathcal{X} \text{ para toda } i \in I \right\}$
- $\sigma(\mathcal{X}) = \bigcup_{M \in \mathcal{X}} subquot(dsum(M))$
- $cdsum(\mathcal{X}) = \left\{ \bigoplus_{i \in I} M_i \;\middle|\; \begin{array}{c} I \text{ conjunto arbitrario y } M_i \cong M \\ \text{para algún } M \in \mathcal{X} \text{ y para toda } i \in I \end{array} \right\}$
- $adco(\mathcal{X}) = subquot(dfsum(cdsum(cyc(\mathcal{X}))))$ □

2.3. Retículas y grandes retículas de clases de módulos

En [1], [2], [12], [13], [20], [21] y [22] se ha estudiado la estructura reticular de clases de clases de módulos. En esta sección estudiaremos algunas grandes retículas de clases de módulos y algunas propiedades que cumplen.

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Diremos que

- $\mathcal{X}$ *cumple* $\leqslant$ si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos.
- $\mathcal{X}$ *cumple* $\twoheadrightarrow$ si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo cocientes.
- $\mathcal{X}$ *cumple ext* si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas.
- $\mathcal{X}$ *cumple* $\bigoplus$ si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas.
- $\mathcal{X}$ *cumple* $\bigoplus^n$ si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas finitas.

De aquí en adelante, entenderemos como conjunto de propiedades de cerradura al conjunto $\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \bigoplus, \bigoplus^n\}$. Sea A un subconjunto de propiedades de cerradura. Denotaremos por L_A a la clase de clases de módulos $\mathcal{X}$ tales que $\mathcal{X}$ cumple p para todo $p \in A$.

De esta manera, $L_{\{\leqslant\}}$ denota la clase de todas las clases hereditarias en $R-Mod$ (ver sección 2.3.1), $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}$ denota la clase de las clases de Serre (ver sección 2.3.2), etc. Notemos que $R-Mod$ es el elemento más grande en L_A para cualquier subconjunto A de propiedades de cerradura.

Proposición 2.28 $L_{\{ext\}} \subseteq L_{\{\bigoplus^n\}}$

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_{\{ext\}}$ y $\{M_i\}_{i=1}^n$ una familia de elementos en $\mathcal{X}$. Si $n = 1$, claramente $M_1 \in \mathcal{X}$. Si $n = 2$, sea

$$0 \to M_1 \to M_1 \bigoplus M_2 \to M_2 \to 0$$

una sucesión exacta corta. Como $M_1, M_2 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \in L_{\{ext\}}$, entonces $M_1 \bigoplus M_2 \in \mathcal{X}$. Supongamos que $\bigoplus_{i=1}^{k} M_i \in \mathcal{X}$ para alguna $1 < k$ natural. Sea

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{k} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{k+1} M_i \to M_{k+1} \to 0$$

una sucesión exacta corta. Como por hipótesis, $\bigoplus_{i=1}^{k} M_i \in \mathcal{X}$, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{k+1} M_i \in \mathcal{X}$.

Por el Principio de Inducción, se concluye que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{X}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\mathcal{X} \in L_{\{\bigoplus^n\}}$. ■

Definición 2.29 Sea A un subconjunto de propiedades de cerradura y $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Diremos que $\mathcal{Y}$ es la *clase generada por* $\mathcal{X}$ *en* L_A si $\mathcal{Y}$ es la menor clase de módulos en L_A que contiene a $\mathcal{X}$. □

Más adelante se mostrarán las clases generadas para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$ en cada clase de clases de módulos que estudiamos en este trabajo.

Definición 2.30 Sea $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in L_A$. Diremos que $\mathcal{X}$ es un *pseudocomplemento para* $\mathcal{Y}$ *en* L_A si $\mathcal{X}$ es máximo tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{0\}$. Diremos que $\mathcal{X}$ es un *pseudocomplemento fuerte de* $\mathcal{Y}$ si $\mathcal{X}$ es el mayor elemento en L_A tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{0\}$. □

Denotaremos como $\mathcal{X}^{\perp_A}$ al pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$ en L_A, si existe. Denotaremos como $Skel(L_A)$ a la clase de pseudocomplementos en L_A. En algunas retículas, es fácil describir los pseudocomplementos.

Ejemplo 2.31 Sea $L_{\{\leqslant\}}$ la gran retícula completa de clases hereditarias en $R-Mod$ (ver sección 2.3.1). Probaremos que

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = \{M \in R-Mod \mid N \leqslant M, N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = 0\}$$

para cualquier $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant\}}$.

Consideremos $W = \{M \in R-Mod \mid N \leqslant M, N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = 0\}$.

- Sea $M \in W$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \leqslant N$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Como $K \leqslant N \leqslant M$ y $M \in W$, entonces $K = 0$. Así, $N \in W$. Por lo tanto, $W \in L_{\{\leqslant\}}$.

- Sea $M \in \mathcal{X} \cap W$. Dado que $M \leqslant M$ y $M \in \mathcal{X}$, entonces $M = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \cap W = \{0\}$.

- Sea $\mathcal{Y} \in L_{\{\leqslant\}}$ tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{0\}$ y $M \in \mathcal{Y}$. Si $N \leqslant M$ tal que $N \in \mathcal{X}$, entonces $N = 0$ pues $N \in \mathcal{Y}$, lo que implica que $M \in W$. Así, $\mathcal{Y} \subseteq W$. Por lo tanto, W es la mayor clase en $L_{\{\leqslant\}}$ tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$

Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = W$. □

Observemos que $F'(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$, según la notación de I. Crivei y S. Crivei en [6].

Ejemplo 2.32 Sea $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ la gran retícula completa de clases cohereditarias (cerradas bajo cocientes) en $R - Mod$ (ver sección 2.3.1). Probaremos que

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{M \in R - Mod \mid N \leqslant M, M/N \in \mathcal{X} \Rightarrow M/N = 0\}$$

para cualquier $\mathcal{X} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

Consideremos $W = \{M \in R - Mod \mid N \leqslant M, M/N \in \mathcal{X} \Rightarrow M/N = 0\}$.

- Sea $M \in W$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K/N \leqslant M/N$ tal que $M/K \in \mathcal{X}$. Como $N \leqslant K \leqslant M$ y $M \in W$, entonces $M/K = 0$. Así, $M/N \in W$. Por lo tanto, $W \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

- Sea $M \in \mathcal{X} \cap W$. Dado que $M = M/0$ y $M \in \mathcal{X}$, entonces $M = M/0 = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \cap W = \{0\}$.

- Sea $\mathcal{Y} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{0\}$ y $M \in \mathcal{Y}$. Si $N \leqslant M$ tal que $M/N \in \mathcal{X}$, entonces $M/N = 0$ pues $M/N \in \mathcal{Y}$, lo que implica que $M \in W$. Así, $\mathcal{Y} \subseteq W$. Por lo tanto, W es la mayor clase en $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathcal{X} \cap W = \{0\}$.

Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = W$. □

Observemos que $T'(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$, según la notación de I. Crivei y S. Crivei en [6].

Definición 2.33 Sea L_A una gran retícula. Diremos que L_A es *fuertemente pseudocomplementada* si cada $\mathcal{X} \in L_A$ tiene un pseudocomplemento fuerte $\mathcal{X}^{\perp_A} \in L_A$.□

Ejemplo 2.34 Las siguientes son ejemplos de grandes retículas fuertemente pseudocomplementadas:

- El marco de todas las teorías de torsión hereditaria, $R - tors$ (ver sección 2.3.3)
- La retícula de todas las clases naturales, $R - nat$ (ver sección 2.3.6)
- El marco de todas las clases de Serre, $R - ss$ (ver sección 2.3.2)
- El marco de todas las clases abiertas, $R - op$ (ver sección 2.3.1) □

Lema 2.35 Si L_A es fuertemente pseudocomplementada, entonces $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A}$.

Demostración:
Sea L_A una gran retícula fuertemente pseudocomplementada y $\mathcal{X} \in L_A$. Entonces existe $\mathcal{X}^{\perp_A} \in L_A$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$. Por otro lado, para $\mathcal{X}^{\perp_A}$ existe $(\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A} \in L_A$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}^{\perp_A}$. Como $\mathcal{X}^{\perp_A} \cap \mathcal{X} = 0$ y $(\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A}$ es el mayor elemento en L_A que intersecta a $\mathcal{X}^{\perp_A}$ en 0, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A}$. ■

Notemos que si P y Q son subconjuntos de propiedades de cerradura tales que $P \subseteq Q$, entonces $L_Q \subseteq L_P$.

Lema 2.36 Si L_A es fuertemente pseudocomplementada, entonces

$$\mathcal{X}^{\perp_A} = ((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A}$$

Demostración:
Por el lema 2.35 tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_A} \subseteq ((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A}$. Ahora, como $((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A}$ es el pseudocomplemento fuerte de $(\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A}$, entonces $((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A} \cap (\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A} = 0$. Por el lema 2.35, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A}$ de donde se sigue que $((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A} \cap \mathcal{X} = 0$. Como $\mathcal{X}^{\perp_A}$ es el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$, entonces $((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_A}$. De esta manera, $\mathcal{X}^{\perp_A} = ((\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A})^{\perp_A}$. ■

Teorema 2.37 Sean P y Q subconjuntos de propiedades de cerradura. Supongamos que L_P y L_Q son grandes retículas fuertemente pseudocomplementadas. Si $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces $Skel(L_Q) = Skel(L_P)$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_Q$ y $\mathcal{X}^{\perp_Q} \in Skel(L_Q)$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$. Probaremos que $\mathcal{X}^{\perp_Q} \in Skel(L_P)$.
Dado que $L_Q \subseteq L_P$, se tiene que $\mathcal{X} \in L_P$ y así, existe $\mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_P)$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$. Como $Skel(L_Q) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces $\mathcal{X}^{\perp_Q} \in L_P$, por lo que $\mathcal{X}^{\perp_Q} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_P}$. Ahora, como $Skel(L_P) \subseteq L_Q$ tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_P} \in L_Q$. Esto implica que $\mathcal{X}^{\perp_P} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_Q}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\perp_Q} = \mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_P)$.

Por otro lado, sea $\mathcal{X} \in L_P$ y $\mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_P)$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$. Probaremos que $\mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_Q)$.
Por el lema 2.36, tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_P} = ((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P}$. Dado que $Skel(L_P) \subseteq L_Q$, entonces $\mathcal{X}^{\perp_P}, (\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P} \in L_Q$. De esta manera, existe $((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q}$ el pseudocomplemento fuerte de $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P}$ en L_Q. Ya que $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P} \cap \mathcal{X}^{\perp_P} = 0$, tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_P} \subseteq ((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q}$.Como $L_Q \subseteq L_P$ y $((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P}$ es el pseudocomplemento fuerte de $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P}$ en L_P, tenemos que

$$((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q} \subseteq ((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P} = \mathcal{X}^{\perp_P}$$

de donde se sigue que $\mathcal{X}^{\perp_P} = ((\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q}$. Esto implica que $\mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_Q)$.

Por lo tanto, $Skel(L_Q) = Skel(L_P)$. ■

Corolario 2.38 Suponiendo las hipótesis del teorema 2.37, si $\mathcal{X} \in L_Q$, entonces $\mathcal{X}^{\perp_Q} = \mathcal{X}^{\perp_P}$

Demostración:
Supongamos que $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, donde L_P y L_Q son fuertemente pseudocomplementadas. Por el teorema 2.37, $Skel(L_Q) = Skel(L_P)$.

Sea $\mathcal{X} \in L_Q$. De esta manera, $\mathcal{X}^{\perp_Q} \in Skel(L_Q) = Skel(L_P)$ lo que implica que $\mathcal{X}^{\perp_Q} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_P}$. Como $L_Q \subseteq L_P$, tenemos que $\mathcal{X} \in L_P$ y así,

$\mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_P) = Skel(L_Q)$. De aquí se sigue que $\mathcal{X}^{\perp_P} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_Q}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\perp_Q} = \mathcal{X}^{\perp_P}$. ■

Lema 2.39 Sea L_A una gran retícula fuertemente pseudocomplementada. Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, entonces $(\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A} \subseteq (\mathcal{Y}^{\perp_A})^{\perp_A}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X}^{\perp_A}$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}^{\perp_A}$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}^{\perp_A} = 0$, se sigue que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}^{\perp_A} = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{Y}^{\perp_A} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_A}$.

Ahora, sea $(\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A}$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}^{\perp_A}$ y $(\mathcal{Y}^{\perp_A})^{\perp_A}$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{Y}^{\perp_A}$. Como $\mathcal{X}^{\perp_A} \cap (\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A} = 0$, se sigue que $\mathcal{Y}^{\perp_A} \cap (\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A} = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{X}^{\perp_A})^{\perp_A} \subseteq (\mathcal{Y}^{\perp_A})^{\perp_A}$. ■

Teorema 2.40 Sean P y Q subconjuntos de propiedades de cerradura. Si $Skel(L_P) = L_Q$, donde L_P y L_Q son fuertemente pseudocomplementadas, entonces $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P}$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en L_Q para cada $\mathcal{X} \in L_P$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_P$ y $\mathcal{W}$ la clase generada por $\mathcal{X}$ en L_Q. Como $\mathcal{X} \in L_P$, tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_P} \in Skel(L_P) = L_Q$. Por el corolario 2.38, $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P} = (\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_Q} \in L_Q$. Por el lema 2.35, $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P}$ de donde se sigue que $\mathcal{W} \subseteq (\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P}$.

Por otro lado, dado que $\mathcal{W} \in L_Q = Skel(L_P)$, entonces existe $\mathcal{Y} \in L_P$ tal que $\mathcal{W} = \mathcal{Y}^{\perp_P}$. Por el lema 2.39, se sigue que

$$\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P} \subseteq (\mathcal{W}^{\perp_P})^{\perp_P} = ((\mathcal{Y}^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P} = \mathcal{Y}^{\perp_P} = \mathcal{W}$$

Así, $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P} \subseteq \mathcal{W}$. Por lo tanto, $(\mathcal{X}^{\perp_P})^{\perp_P} = \mathcal{W}$. ■

Observación 2.41 Sea A un subconjunto de propiedades de cerradura. Supongamos que λ es un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ una familia de elementos en L_A. Entonces

$$\bigcap_{\alpha\in\lambda} \mathcal{X}_\alpha \in L_A$$

Proposición 2.42 Sea A un subconjunto de propiedades de cerradura y L_A parcialmente ordenada por la inclusión. Supongamos que λ es un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ una familia de elementos en L_A. Entonces

$$\bigwedge_{\alpha\in\lambda}\mathcal{X}_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\lambda}\mathcal{X}_\alpha$$

Demostración:
Por la observación 2.41, $\bigcap\limits_{\alpha\in\lambda}\mathcal{X}_\alpha \in L_A$. Es claro que $\bigcap\limits_{\alpha\in\lambda}\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{X}_\alpha$ para toda $\alpha \in \lambda$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in L_A$ tal que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}_\alpha$ para toda $\alpha \in \lambda$. Entonces $\mathcal{Y} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in\lambda}\mathcal{X}_\alpha$. Concluimos que $\bigwedge\limits_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$. ■

Corolario 2.43 Sea A un subconjunto de propiedades de cerradura y L_A parcialmente ordenada por la inclusión. Entonces L_A es una gran retícula completa.

Demostración:
Sea $H \neq \varnothing$ cualquier subclase de L_A. Por la proposición 2.42, $\bigwedge H = \bigcap H$. Por la proposición 1.22, L_A es una gran retícula completa. ■

De esta manera, cualquier clase de clases de módulos L_A es una gran retícula completa. Sin embargo, describir el supremo para cualquier subclase de L_A no es sencillo. En las siguientes secciones describiremos el supremo de cada clase que estudiamos en este trabajo.

2.3.1. Las clases $R-sub, R-quot$ y $R-op$

Primero, estudiaremos la clase de todas las clases de módulos cerradas bajo submódulos, $R-sub$.

Definición 2.44 Una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *hereditaria* si es cerrada bajo submódulos. Llamaremos $R-sub$ a la clase de todas las clases hereditarias. □

Notemos que $R-sub = L_{\{\leqslant\}}$ y $R-sub$ está parcialmente ordenada por la inclusión. La clase $R-sub$ ha sido estudiada por A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos en [2]. Los siguientes son resultados que describen su estructura reticular.

Proposición 2.45 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos en $R-sub$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha \in R-sub \qquad y \qquad \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha \in R-sub.$$

Demostración:
(i) Se sigue de la observación 2.41.

(ii) Sea $M \in \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$ y $N \leqslant M$. Entonces existe α_0 tal que $M \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$. Como $\mathcal{X}_{\alpha_0}$ es cerrada bajo submódulos, entonces $N \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$. Esto implica que $N \in \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$ es cerrada bajo submódulos. ■

Recordemos que $sub(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid \text{existe } 0 \to M \to K, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, por la definición 2.21. Si $\mathcal{X} = \{M\}$ entonces

$$sub(\mathcal{X}) = sub(M) = \{N \in R-Mod \mid \text{existe } 0 \to N \to M\}$$

de donde se sigue que $sub(M) \subseteq sub(\mathcal{X})$ para cada $M \in \mathcal{X}$.

Lema 2.46 $sub(\mathcal{X}) \in R-sub$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $M \in sub(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existe una sucesión exacta $0 \to M \to K$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Como $N \leqslant M$, entonces existe una sucesión exacta $0 \to N \to K$, lo que implica que $N \in sub(\mathcal{X})$. ■

Proposición 2.47 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $sub(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R-sub$.

Demostración:
Sea $\mathcal{H} \in R-sub$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$. Si $M \in sub(\mathcal{X})$, entonces existe una sucesión exacta $0 \to M \to K$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Como $K \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \in R-sub$, tenemos que $M \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, $sub(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{H}$ para toda $\mathcal{H} \in R-sub$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$. ■

Teorema 2.48 $R-sub$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - sub$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - sub$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.49 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos en $R-sub$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$$

Demostración:
Por la proposición 2.45, $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - sub$. Es claro que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - sub$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \leqslant \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$. ■

Teorema 2.50 $R - sub$ es gran marco.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R-sub$ y $\{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cualquier familia de elementos de $R-sub$. Probaremos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{Y}_\alpha \right) = \bigvee_{\alpha \in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

Notemos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{Y}_\alpha \right) = \mathcal{X} \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{Y}_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

de donde se concluye que $R - sub$ es gran marco. ■

Del ejemplo 2.31, tenemos que para cada $\mathcal{X} \in R - sub$,

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = \{M \in R - Mod \mid N \leqslant M, N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = 0\}.$$

De aquí, concluimos el siguiente

Corolario 2.51 $R - sub$ es fuertemente pseudocomplementada, donde el pseudocomplemento en $R - sub$ de $\mathcal{H}$ está dado por

$$\mathcal{H}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = \{M \in R - Mod \mid sub(M) \cap \mathcal{H} = \{0\}\}$$ ∎

Ahora, estudiaremos la clase de todas las clases de módulos cerradas bajo cocientes, $R - quot$.

Definición 2.52 Una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *cohereditaria* si es cerrada bajo cocientes. Llamaremos $R - quot$ a la clase de todas las clases cohereditarias. □

Notemos que $R - quot = L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $R - quot$ está parcialmente ordenada por la inclusión. La clase $R - quot$ ha sido estudiada por A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos en [2]. Los siguientes son resultados que describen su estructura reticular.

Proposición 2.53 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos en $R - quot$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - quot \qquad y \qquad \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - quot.$$

Demostración:
(i) Se sigue de la observación 2.41.

(ii) Sea $M \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$ y $N \leqslant M$. Entonces existe α_0 tal que $M \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$. Como $\mathcal{X}_{\alpha_0}$ es cerrada bajo cocientes, entonces $M/N \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$. Esto implica que $M/N \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$ es cerrada bajo cocientes. ∎

Recordemos que $quot(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid \text{existe } K \to M \to 0, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, por la definición 2.21. Si $\mathcal{X} = \{M\}$ entonces

$$quot(\mathcal{X}) = quot(M) = \{N \in R - Mod \mid \text{existe } M \to N \to 0\}$$

de donde se sigue que $quot(M) \subseteq quot(\mathcal{X})$ para cada $M \in \mathcal{X}$.

Lema 2.54 $quot(\mathcal{X}) \in R - quot$ para cualquier clase $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $M \in quot(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existe una sucesión exacta $K \to M \to 0$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Como existe una sucesión exacta $M \to M/N \to 0$, entonces existe una sucesión excacta $K \to M/N \to 0$, lo que implica que $M/N \in quot(\mathcal{X})$. ■

Proposición 2.55 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $quot(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - quot$.

Demostración:
Sea $\mathcal{Q} \in R - quot$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Q}$. Si $M \in quot(\mathcal{X})$, entonces existe una sucesión exacta $K \to M \to 0$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Como $K \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \in R - quot$, tenemos que $M \in \mathcal{Q}$. Por lo tanto, $quot(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Q}$ para toda $\mathcal{Q} \in R - quot$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Q}$.■

Teorema 2.56 $R - quot$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\twoheadrightarrow\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - quot$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - quot$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.57 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos en $R - quot$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$$

Demostración:
Por la proposición 2.53, $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - quot$. Es claro que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - quot$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Pero esto implica que $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$. ■

Teorema 2.58 $R - quot$ es gran marco.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R\text{−}quot$ y $\{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cualquier familia de elementos de $R\text{−}quot$. Probaremos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

Notemos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \mathcal{X} \cap \left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

de donde se concluye que $R - quot$ es gran marco. ■

Del ejemplo 2.32, tenemos que para cada $\mathcal{X} \in R - quot$,

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{M \in R - Mod \mid N \leqslant M, M/N \in \mathcal{X} \Rightarrow M/N = 0\}.$$

De aquí, concluimos el siguiente

Corolario 2.59 *$R - quot$ es fuertemente pseudocomplementada, donde el pseudocomplemento en $R - quot$ de $\mathcal{Q}$ está dado por*

$$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = \{M \in R - Mod \mid quot(M) \cap \mathcal{Q} = \{0\}\}$$ ■

Para finalizar esta sección, estudiaremos la clase de todas las clases de módulos cerradas bajo submódulos y cocientes, $R - op$. Esta clase de clases de módulos fue introducida por F. Raggi, H. Rincón y C. Signoret en [20].

Definición 2.60 Una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *abierta* si es cerrada bajo submódulos y cocientes. Llamaremos $R - op$ a la clase de todas las clases abiertas. □

Notemos que $R - op = L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}$ y $R - op$ está parcialmente ordenada por la inclusión. Los siguientes son resultados que describen su estructura reticular.

Proposición 2.61 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos en $R - op$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - op \qquad y \qquad \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - op.$$

Demostración:
Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq R-op$. Como $\mathcal{X}_\alpha$ es cerrada bajo submódulos y cocientes para cada $\alpha \in A$, por las proposiciones 2.45 y 2.53, tenemos que $\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$ y $\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$ son cerradas bajo submódulos y cocientes. ■

Proposición 2.62 $\mathcal{O}^n \in R-op$ para cualquier clase $\mathcal{O} \in R-op$ y para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{O} \in R-op$. Probaremos por inducción que $\mathcal{O}^n \in R-op$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Para $n = 1$, $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O} \in R-op$. Supongamos que $\mathcal{O}^k \in R-op$ para $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 1$. Sea $M \in \mathcal{O}^{k+1}$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M' \in \mathcal{O}^k$ y $M'' \in \mathcal{O}$. Como $N \leqslant M$, sean

$$0 \to M'\cap N \to N \to (M'+N)/M' \to 0$$

y

$$0 \to (M'+N)/N \to M/N \to M/(M'+N) \to 0$$

sucesiones exactas cortas, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (M'+N)/N \arrow[r] & M/N \arrow[r] & M/(M'+N) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u, two heads] & M \arrow[r] \arrow[u, two heads] & M'' \arrow[r] \arrow[u, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'\cap N \arrow[r] \arrow[u, hook] & N \arrow[r] \arrow[u, hook] & (M'+N)/M' \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{O}, \mathcal{O}^k \in R-op$ por hipótesis, tenemos que $M'\cap N \in \mathcal{O}^k$, $(M'+N)/N \in \mathcal{O}^k, (M'+N)/M' \in \mathcal{O}$ y $M/(M'+N) \in \mathcal{O}$, lo que implica que $N \in \mathcal{O}^{k+1}$ y $M/N \in \mathcal{O}^{k+1}$. Por lo tanto, $\mathcal{O}^{k+1} \in R-op$.

Por el principio de inducción, tenemos que $\mathcal{O}^n \in R-op$ para toda $n \in \mathbb{N}$. ■

Recordemos que, para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, por la definición 2.21,

$$
\begin{aligned}
subquot(\mathcal{X}) &= sub(quot(\mathcal{X})) \\
&= \{M \in R-Mod \mid \text{existen } 0 \to M \to K, \text{ donde } K \in quot(\mathcal{X})\} \\
&= \left\{ M \in R-Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existe } 0 \to M \to K \text{ y} \\ L \to K \to 0, \text{ donde } L \in \mathcal{X} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

y por la proposición 2.22,

$$
\begin{aligned}
subquot(\mathcal{X}) &= quot(sub(\mathcal{X})) \\
&= \{M \in R-Mod \mid \text{existen } K \to M \to 0, \text{ donde } K \in sub(\mathcal{X})\} \\
&= \left\{ M \in R-Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existe } K \to M \to 0 \text{ y} \\ 0 \to K \to L, \text{ donde } L \in \mathcal{X} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Si $\mathcal{X} = \{M\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
subquot(\mathcal{X}) &= subquot(M) \\
&= \left\{ N \in R-Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existen } 0 \to N \to K \text{ y} \\ M \to K \to 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ N \in R-Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existen } K \to N \to 0 \text{ y} \\ 0 \to K \to M \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

De lo anterior se sigue que $subquot(M) \subseteq subquot(\mathcal{X})$ para cada $M \in \mathcal{X}$.

Proposición 2.63 $subquot(\mathcal{X}) \in R-op$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
(i) Sea $M \in subquot(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existen $0 \to M \to L$ y $K \to L \to 0$, donde $K \in \mathcal{X}$. Como $N \leqslant M$, entonces existe $0 \to N \to M$ y así, existen $0 \to N \to L$ y $K \to L \to 0$. Por lo tanto, $N \in subquot(\mathcal{X})$.

(ii) Sea $M \in subquot(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existen $L \to M \to 0$ y $0 \to L \to K$, donde $K \in \mathcal{X}$. Como $N \leqslant M$, entonces existe $M \to M/N \to 0$ y así, existen $L \to M/N \to 0$ y $0 \to L \to K$. Por lo tanto, $M/N \in subquot(\mathcal{X})$. ■

Proposición 2.64 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $subquot(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - op$.

Demostración:
Sea $\mathcal{O} \in R - op$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}$. Si $M \in subquot(\mathcal{X})$, entonces existe

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ & M \arrow[d] & \\ K \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $K \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O} \in R - op$, tenemos que $M \in \mathcal{O}$. Por lo tanto, $subquot(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{O}$ para toda $\mathcal{O} \in R - op$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}$. ■

Teorema 2.65 $R - op$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - op$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - op$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.66 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos en $R - op$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$$

Demostración:
Por la proposición 2.61, $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - op$. Es claro que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - op$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$. ■

Teorema 2.67 $R - op$ es gran marco.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R-op$ y $\{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cualquier familia de elementos de $R-op$. Probaremos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

Notemos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \mathcal{X} \cap \left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

de donde se concluye que $R-op$ es gran marco. ∎

Proposición 2.68 $R-op$ es fuertemente pseudocomplementada, donde el pseudocomplemento en $R-op$ de $\mathcal{O}$ está dado por

$$\mathcal{O}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}} = \{M \in R-Mod \mid subquot(M) \bigcap \mathcal{O} = \{0\}\}$$

Demostración:
Sea $W = \{M \in R-Mod \mid subquot(M) \bigcap \mathcal{O} = 0\}$.

- Sea $M \in W$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \in subquot(N)$ y $L \in subquot(M/N)$ tales que $K, L \in \mathcal{O}$.
  Como $subquot(N) \subseteq subquot(M)$, $subquout(M/N) \subseteq subquot(M)$ y $M \in W$, entonces $K = L = 0$, lo que implica que $N, M/N \in W$. Por lo tanto, $W \in R-op$.

- Sea $M \in \mathcal{O} \bigcap W$. Dado que $M \in subquot(M)$, entonces $M = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{O} \bigcap W = 0$.

- Sea $\mathcal{Y} \in R-op$ tal que $\mathcal{O} \bigcap \mathcal{Y} = 0$ y $M \in \mathcal{Y}$. Si $N \in subquot(M)$ tal que $N \in \mathcal{O}$, entonces $N = 0$ pues $N \in \mathcal{Y}$, lo que implica que $M \in W$. Así, $\mathcal{Y} \subseteq W$. Por lo tanto, W es la mayor clase en $R-op$ tal que $\mathcal{O} \bigcap W = 0$.

Por lo tanto, $\mathcal{O}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}} = W$. ∎

2.3.2. La clase $R - ss$

Definición 2.69 Una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *clase de Serre* si es cerrada bajo submódulos, cocientes y extensiones exactas. Llamaremos $R - ss$ a la clase de todas las clases de Serre. □

Ejemplo 2.70 Las siguientes clases son clases de Serre en $R - Mod$:

1. La clase **A** de todos los módulos artinianos es una clase de Serre.

2. La clase **N** de todos los módulos noetherianos es una clase de Serre. □

Notemos que $R - ss = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}}$ y $R - ss$ está parcialmente ordenada por la inclusión. La clase $R - ss$ fue estudiada por F. Raggi y C. Signoret en [22] y [23], entre otros. Los siguientes son resultados que describen su estructura reticular.

Proposición 2.71 Sea λ un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ una familia de elementos en $R - ss$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in \lambda} \mathcal{X}_\alpha \in R - ss.$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}$, por la observación 2.41 tenemos que $\bigcap_{\alpha \in \lambda} \mathcal{X}_\alpha \in R - ss$. ■

Recordemos que

$$ext(\mathcal{X}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^n \qquad \text{y} \qquad serre(\mathcal{X}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (subquot(\mathcal{X}))^n$$

para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, por la definición 2.23.

Lema 2.72 $ext(\mathcal{X})$ es cerrada bajo extensiones exactas para cualquier clase $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $0 \to K \to M \to L \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $K \in \mathcal{X}^i$ y $L \in \mathcal{X}^j$ para algunas $i, j \in \mathbb{N}$. Probaremos que $M \in \mathcal{X}^{i+j}$.
Sea $j \in \mathbb{N}$ fijo. Para $i = 1$, $K \in \mathcal{X}^1 = \mathcal{X}$ lo que implica que $M \in \mathcal{X}^{1+j}$. Supongamos

que $K \in \mathcal{X}^n$ implica $M \in \mathcal{X}^{n+j}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Si $K \in \mathcal{X}^{n+1}$, entonces existe

$$0 \to K' \to K \to K/K' \to 0$$

una sucesión exacta corta tal que $K' \in \mathcal{X}$ y $K/K' \in \mathcal{X}^n$. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K/K' \arrow[r] \arrow[d] & M/K' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $K/K' \in \mathcal{X}^n$ y $L \in \mathcal{X}^j$, por hipótesis tenemos que $M/K' \in \mathcal{X}^{n+j}$. Como $K' \in \mathcal{X}$, concluimos que $M \in \mathcal{X}^{n+1+j}$.

Por el principio de inducción, tenemos que $M \in \mathcal{X}^{i+j}$ para toda $i, j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ y así, $ext(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ es cerrada bajo extensiones exactas. ■

Lema 2.73 *$ext(\mathcal{O}) \in R-ss$ para cualquier clase $\mathcal{O} \in R-op$.*

Demostración:
Sea $\mathcal{O} \in R-op$. Por la proposición 2.62, tenemos que $\mathcal{O}^n \in R-op$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición 2.61, $ext(\mathcal{O}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}^n \in R-op$. Por el lema 2.72, $ext(\mathcal{O})$ es cerrada bajo extensiones exactas. Por lo tanto, $ext(\mathcal{O}) \in R-ss$. ■

Proposición 2.74 Si $\mathcal{O} \in R-op$ tal que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{X} \in R-ss$, entonces $ext(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{X}$.

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{O} \in R-op$ y es tal que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{X} \in R-ss$. Probaremos que $\mathcal{O}^n \subseteq \mathcal{X}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, tenemos que $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O} \subseteq \mathcal{X}$ por hipótesis. Supongamos que $\mathcal{O}^n \subseteq \mathcal{X}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Si $M \in \mathcal{O}^{n+1}$, entonces existe

$$0 \to K \to M \to L \to 0$$

una sucesión exacta corta tal que $K \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{O}^n \subseteq \mathcal{X}$ por hipótesis. Como $\mathcal{X} \in R - ss$, entonces $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{O}^{n+1} \subseteq \mathcal{X}$.
Por el principio de inducción, tenemos que $\mathcal{O}^n \subseteq \mathcal{X}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, si $M \in ext(\mathcal{O})$, entonces $M \in \mathcal{O}^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Pero $\mathcal{O}^k \subseteq \mathcal{X}$, por lo que se concluye que $ext(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{X}$. ■

Corolario 2.75 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $serre(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - ss$.

Demostración:
Por el lema 2.73, tenemos que $serre(\mathcal{X}) \in R - ss$. Como $\mathcal{X} \subseteq subquot(\mathcal{X})$, por la proposición 2.64 tenemos que $\mathcal{X} \subseteq serre(\mathcal{X})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - ss$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. De esta manera $subquot(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$ y por la proposición 2.74, tenemos que $serre(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $serre(\mathcal{X})$ es la menor clase en $R - ss$ que contiene a $\mathcal{X}$. ■

Teorema 2.76 $R - ss$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - ss$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - ss$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.77 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia no vacía de elementos en $R - ss$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = serre\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:
Por el corolario 2.75, tenemos que $serre\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)\in R-ss$. Es claro que $X_\alpha\subseteq serre\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha\in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y}\in R-ss$ tal que $\mathcal{X}_\alpha\subseteq\mathcal{Y}$ para toda $\alpha\in A$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\subseteq\mathcal{Y}$ y por el corolario 2.75, tenemos que $serre\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)\subseteq\mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = serre\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)$. ■

Teorema 2.78 $R-ss$ es gran marco.

Demostración:
Sea $\mathcal{X}\in R-ss$ y $\{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cualquier familia de elementos de $R-ss$. Probaremos que

$$\mathcal{X}\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)=\bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\alpha)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha &= serre\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(subquot\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)\right)^n\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)^n = ext\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)\end{aligned}$$

y

$$\bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\alpha)=serre\left(\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\right)=ext\left(\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\right)$$

por la porposición 2.61.
($\subseteq$) Sea $M\in\mathcal{X}\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)$. Entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $M\in\mathcal{X}\cap\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)^n$
Si $n=1$, entonces $M\in\mathcal{X}\cap\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha$. Así, $M\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\beta$ para alguna $\beta\in A$. Por lo tanto,

$$M\in(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\beta)\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\subseteq ext\left(\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\right)=\bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\alpha)$$

Supongamos que $M \in ext\left(\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\right)$ siempre que $M \in \mathcal{X}\cap\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)^k$ para alguna $k > 0$. Si $M \in \mathcal{X}\cap\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)^{k+1}$, entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ tal que $M' \in \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha$ y $M'' \in \left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)^k$. Como $\mathcal{X} \in R-op$, $M', M'' \in \mathcal{X}$. Por hipótesis, $M', M'' \in ext\left(\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\right)$ lo que implica que $M \in ext\left(\bigcup_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}_\alpha)\right)$. Por el principio de inducción, tenemos que $M \in \bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\alpha)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, $\mathcal{X}\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right) \subseteq \bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\alpha)$.

($\supseteq$) Dado que $\mathcal{Y}_\beta \subseteq \left(\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)$ para toda $\beta \in A$, tenemos que
$\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\beta \subseteq \mathcal{X}\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)$ para toda $\beta \in A$. De esta manera,
$\bigvee_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}_\alpha) \subseteq \mathcal{X}\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right)$. ■

Corolario 2.79 $R-ss$ es una gran retícula distributiva. ■

Proposición 2.80 $R-ss$ es fuertemente pseudocomplementada, donde cada $\mathcal{S} \in R-ss$ tiene un único pseudocomplemento en $R-ss$ que está dado por

$$\mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}} = \{M \in R-Mod \mid serre(M)\cap\mathcal{S} = 0\}.$$

Demostración:
Sea $W = \{M \in R-Mod \mid serre(M)\cap\mathcal{S} = 0\}$.

- Sea $M \in \mathcal{S}\cap W$. Dado que $M \in serre(M)$, entonces $M = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{S}\cap W = 0$.

- Sea $M \in W$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \in serre(N)$ y $L \in serre(M/N)$ tales que $K, L \in \mathcal{S}$. Como $serre(N) \subseteq serre(M)$, $serre(M/N) \subseteq serre(M)$ y $M \in W$, entonces $K = L = 0$, lo que implica que $N, M/N \in W$.

Por otro lado, sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M', M'' \in W$. Supongamos que $M \notin W$. Entonces existe $0 \neq N \in serre(M)$ tal que $N \in \mathcal{S}$. Como $\mathcal{S} \in R - ss \subseteq R - op$, tenemos que $N \bigcap M' \in serre(M) \bigcap \mathcal{S}$ de donde se sigue que $N \bigcap M' = 0$, pues $M' \in W$. Así, notemos que $N = N/(N \bigcap M') \cong (N + M')/M' \leqslant M'' \in W$. Entonces $N \in W$, pero $N \in \mathcal{S}$, por lo que $N \in W \bigcap \mathcal{S}$. Esto implica que $N = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $N \neq 0$. Por lo tanto, $M \in W$. De esta manera, $W \in R - ss$.

- Sea $\mathcal{X} \in R - ss$ tal que $\mathcal{S} \bigcap \mathcal{X} = 0$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Si $N \in serre(M)$ tal que $N \in \mathcal{S}$, entonces $N = 0$ pues $N \in \mathcal{X}$, lo que implica que $M \in W$. Así, $\mathcal{X} \subseteq W$. Por lo tanto, W es la mayor clase en $R - ss$ tal que $\mathcal{S} \cap W = 0$.

Por lo tanto, $\mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}}} = W$. ■

En la siguiente sección veremos que a la descripción del pseudocomplemento fuerte de cada $\mathcal{S} \in R - ss$ se le pueden pedir menos condiciones (Corolario 2.109).

2.3.3. El conjunto $R - tors$

Definición 2.81 Sea $\mathcal{T}, \mathcal{F}$ clases de $R-$módulos. Llamaremos *teoría de torsión* a la pareja $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ que cumple las siguientes propiedades:

- $Hom_R(T, F) = 0$ para toda $T \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}$;
- Si $Hom_R(T, F) = 0$ para toda $T \in \mathcal{T}$, entonces $F \in \mathcal{F}$;
- Si $Hom_R(T, F) = 0$ para toda $F \in \mathcal{F}$, entonces $T \in \mathcal{T}$. □

Definición 2.82 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $l(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid Hom_R(M, X) = 0 \;\; \forall\; X \in \mathcal{X}\}$, y
- $r(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid Hom_R(X, M) = 0 \;\; \forall\; X \in \mathcal{X}\}$. □

Proposición 2.83 $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión si y sólo si

$$r(\mathcal{T}) = \mathcal{F} \qquad \text{y} \qquad l(\mathcal{F}) = \mathcal{T}.$$

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que τ es una teoría de torsión.
Sea $M \in r(\mathcal{T})$. Entonces $Hom_R(T, M) = 0$ para cada $T \in \mathcal{T}$. Por hipótesis, tenemos que $M \in \mathcal{F}$. Por otro lado, si $M \in \mathcal{F}$, por hipótesis
$Hom_R(T, M) = 0$ para toda $T \in \mathcal{T}$, lo que implica que $M \in r(T)$.
Sea $M \in l(\mathcal{F})$. Entonces $Hom_R(M, F) = 0$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Por hipótesis, tenemos que $M \in \mathcal{T}$. Por otro lado, si $M \in \mathcal{T}$, por hipótesis
$Hom_R(M, F) = 0$ para toda $F \in \mathcal{F}$, lo que implica que $M \in l(F)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $r(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$ y $l(\mathcal{F}) = \mathcal{T}$.

- Sea $T \in \mathcal{T}$ y $F \in \mathcal{F}$. Por hipótesis, tenemos que $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$ y $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
- Si $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, entonces $F \in r(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$.
- Si $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $T \in l(\mathcal{F}) = \mathcal{T}$.

Por lo tanto, $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión. ■

Proposición 2.84 Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, entonces $\mathcal{T} \in L_{\{\twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$.

Demostración:
Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión. Probaremos que $\mathcal{T} \in R - quot$.
Sea $M \in \mathcal{T}$ y $N \leqslant M$. Tomemos $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ una sucesión exacta corta. Aplicando el funtor $Hom_R(\_\_, F)$, donde $F \in \mathcal{F}$, tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(M/N, F) \to Hom_R(M, F) \to Hom_R(N, F)$$

es exacta. Por hipótesis, $Hom_R(M, F) = 0$, por lo que $Hom_R(M/N, F) = 0$.
Por lo tanto, $\mathcal{T} \in R - quot$.

Ahora, probaremos que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias.
Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos en $\mathcal{T}$. Entonces

$$Hom_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, F\right) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, F) = 0$$

para toda $F \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}$.

Probaremos que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones exactas.
Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M', M'' \in \mathcal{T}$.
Aplicando el funtor $Hom_R(\_\_, F)$, donde $F \in \mathcal{F}$, tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(M'', F) \to Hom_R(M, F) \to Hom_R(M', F)$$

es exacta. Por hipótesis, $Hom_R(M', F) = Hom_R(M'', F) = 0$, por lo que $Hom_R(M, F) = 0$.

Concluimos que $\mathcal{T} \in L_{\{\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$. ■

Definición 2.85 Sea $\mathcal{X} \in L_{\{\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$ y $M \in R-Mod$. Llamaremos *submódulo de $\mathcal{X}-$torsión de M* al módulo

$$t_{\mathcal{X}}(M) = \sum_{i\in I}\{N_i \leqslant M \mid N_i \in \mathcal{X}\} \leqslant M.$$

Si $t_{\mathcal{X}}(M) = M$, diremos que M es de *$\mathcal{X}-$torsión* y si $t_{\mathcal{X}}(M) = 0$, diremos que M es *libre de $\mathcal{X}-$torsión.* □

Es fácil ver que $t_{\mathcal{X}}(M)$ es el submódulo más grande de $\mathcal{X}-$torsión de M, para cada $M \in R-Mod$.

Lema 2.86 Sea $\mathcal{X} \in L_{\{\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$. Entonces $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$ para toda $M \in R-Mod$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_{\{\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas, tenemos que

$\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} \in R - quot$,

$$t_{\mathcal{X}}(M) = \sum_{i\in I}\{N_i \leqslant M \mid N_i \in \mathcal{X}\} \cong \left(\bigoplus_{i\in I} N_i \Big/ L\right) \in \mathcal{X}$$

donde $L \leqslant \bigoplus_{i\in I} Rn$. Por lo tanto, $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$ para toda $M \in R - Mod$. ■

Lema 2.87 Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión y $M \in R - Mod$. Entonces

$$t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T} \qquad \text{y} \qquad M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}.$$

Demostración:
Por la proposición 2.84, podemos considerar $t_{\mathcal{T}}(M)$. Por el lema 2.86,$t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$ para toda $M \in R - Mod$.

Por otro lado, supongamos que $M/t_{\mathcal{T}}(M) \notin \mathcal{F}$. Entonces existe $K \in \mathcal{T}$ tal que $Hom_R(K, M/t_{\mathcal{T}}(M)) \neq 0$. Así, tomemos $0 \neq f \in Hom_R(K, M/t_{\mathcal{T}}(M))$. Entonces $Im\ f = L/t_{\mathcal{T}}(M)$ para algún $L \leqslant M$ tal que $t_{\mathcal{T}}(M) \leqslant L$. Como $\mathcal{T} \in R - quot$, entonces $K/(Ker\ f) \cong Im\ f \in \mathcal{T}$. Sea la sucesión exacta corta

$$0 \to t_{\mathcal{T}}(M) \to L \to L/t_{\mathcal{T}}(M) \to 0$$

tal que $t_{\mathcal{T}}(M), L/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones exactas, entonces $L \in \mathcal{T}$. De esta manera, $L \leqslant t_{\mathcal{T}}(M)$ lo que implica que $L = t_{\mathcal{T}}(M)$ y $Im\ f = L/t_{\mathcal{T}}(M) = 0$. Por lo tanto, $f = 0$ lo cual es una contradicción pues $f \neq 0$. Por lo tanto, $M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}$ para toda $M \in R - Mod$. ■

Proposición 2.88 Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión. Entonces

(i) $M \in \mathcal{T}$ si y sólo si M es de $\mathcal{T}-$torsión; y

(ii) $M \in \mathcal{F}$ si y sólo si M es libre de $\mathcal{T}-$torsión.

Demostración:
(i) $(\Rightarrow)$ Sea $M \in \mathcal{T}$. Como $t_{\mathcal{T}}(M)$ es el submódulo más grande de $\mathcal{T}-$torsión de M, entonces $t_{\mathcal{T}}(M) = M$.

$(\Leftarrow)$ Sea $t_{\mathcal{T}}(M) = M$. Por el lema 2.87, tenemos que $M = t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$.

(ii) $(\Rightarrow)$ Sea $M \in \mathcal{F}$. Dado que la sucesión $0 \to t_{\mathcal{T}}(M) \to M$ es exacta, aplicando el funtor $Hom_R(t_{\mathcal{T}}(M), \_\_)$ tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(t_{\mathcal{T}}(M), t_{\mathcal{T}}(M)) \to Hom_R(t_{\mathcal{T}}(M), M)$$

es exacta. Por el lema 2.87 y por hipótesis, tenemos que $Hom_R(t_{\mathcal{T}}(M), M) = 0$, lo que implica que $Hom_R(t_{\mathcal{T}}(M), t_{\mathcal{T}}(M)) = 0$. Así, $t_{\mathcal{T}}(M) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Sea $t_{\mathcal{T}}(M) = 0$. Por el lema 2.87, tenemos que $M = M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}$. ■

Definición 2.89 Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión. Diremos que τ es una *teoría de torsión hereditaria* si $\mathcal{T} \in L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$. □

Ejemplo 2.90 Sea I un ideal idempotente. Entonces

$$T = \{M \in R - Mod \mid IM = 0\}$$

es una clase de torsión hereditaria. □

Observemos que toda teoría de torsión hereditaria es una teoría de torsión, sin embargo no toda teoría de torsión es hereditaria.

Corolario 2.91 Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria y $M \in R - Mod$. Entonces

$$t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T} \qquad \text{y} \qquad M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}.$$

Demostración:
Por la definición 2.89, podemos considerar $t_{\mathcal{T}}(M)$. Como toda teoría de torsión hereditaria es teoría de torsión, por el lema 2.87, $t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T}$ y $M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}$. ■

Proposición 2.92 Sea $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$. Entonces

$$t_{\mathcal{X}}(M) = \{m \in M \mid Rm \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{X}$$

para toda $M \in R-Mod$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$. Por el lema 2.86, $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$ para toda $M \in R-Mod$.

Por otro lado, Sea $K = \{m \in M \mid Rm \in \mathcal{X}\}$. Entonces $Rn \in \mathcal{X}$ para toda $n \in K$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas, tenemos que $\bigoplus_{n\in K} Rn \in \mathcal{X}$. Esto implica que

$$K = \sum_{n\in K} Rn \cong \left(\bigoplus_{n\in K} Rn \middle/ L \right) \in \mathcal{X}$$

donde $L \leqslant \bigoplus_{n\in K} Rn$. Por lo tanto, $K \in \mathcal{X}$

Ahora, como $K \in \mathcal{X}$, entonces $K \leqslant t_{\mathcal{X}}(M)$. Como $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \in R-sub$, tenemos que $Rm \in \mathcal{X}$ para cada $m \in t_{\mathcal{X}}(M)$, lo que implica que $t_{\mathcal{X}}(M) \leqslant K$. Por lo tanto, $t_{\mathcal{X}}(M) = \{m \in M \mid Rm \in \mathcal{X}\}$. ■

Proposición 2.93 Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión. Entonces τ es hereditaria si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que τ es una teoría de torsión hereditaria. Sea $M \in \mathcal{F}$. Entonces $t_{\mathcal{T}}(M) = 0$ por la proposición 2.88. Además, $t_{\mathcal{T}}(E(M)) \in \mathcal{T}$ por la proposición 2.92. Entonces $t_{\mathcal{T}}(E(M)) \cap M \in \mathcal{T}$ pues $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos. Dado que $t_{\mathcal{T}}(E(M)) \cap M \leqslant M$, se sigue que $t_{\mathcal{T}}(E(M)) \cap M \subseteq t_{\mathcal{T}}(M)$, pero $t_{\mathcal{T}}(M) = 0$ lo que implica que $t_{\mathcal{T}}(E(M)) \cap M = 0$. Como $M \trianglelefteqslant E(M)$, se sigue que $t_{\mathcal{T}}(E(M)) = 0$. Por la proposición 2.88, se concluye que $E(M) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $M \in \mathcal{T}$ y $N \leqslant M$. Tomemos la sucesión exacta corta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to Hom_R(M, E(N/t_{\mathcal{T}}(N))) \quad \to Hom_R(N, E(N/t_{\mathcal{T}}(N))) \\ \to Ext^1_R(M/N, E(N/t_{\mathcal{T}}(N))) \to \cdots$$

donde $N/t_{\mathcal{T}}(N) \in \mathcal{F}$ por el corolario 2.91 y por hipótesis, $E(N/t_{\mathcal{T}}(N)) \in \mathcal{F}$. De esta manera, $Hom_R(M, E(N/t_{\mathcal{T}}(N))) = 0$ por hipótesis y $Ext^1_R(M/N, E(N/t_{\mathcal{T}}(N))) = 0$ pues $E(N/t_{\mathcal{T}}(N))$ es inyectivo. Por lo tanto, $Hom_R(N, E(N/t_{\mathcal{T}}(N))) = 0$, lo que implica que $N = t_{\mathcal{T}}(N) \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $\mathcal{T} \in R - sub$ y así, τ es hereditaria. ■

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $lh(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid Hom_R(M, E(X)) = 0 \ \ \forall\ X \in \mathcal{X}\}$, y
- $rh(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid Hom_R(X, E(M)) = 0 \ \ \forall\ X \in \mathcal{X}\}$.

donde $E(X)$ y $E(M)$ son las cápsulas inyectivas de X y M, respectivamente.

Proposición 2.94 Sea $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión. Entonces τ es hereditaria si y sólo si

$$rh(\mathcal{T}) = \mathcal{F} \qquad \text{y} \qquad lh(\mathcal{F}) = \mathcal{T}.$$

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que τ es una teoría de torsión hereditaria. Sea $M \in rh(\mathcal{T})$. Entonces $Hom_R(T, E(M)) = 0$ para cada $T \in \mathcal{T}$. Dado que la sucesión $0 \to M \to E(M)$ es exacta, aplicándole el funtor $Hom_R(T, \_\_)$, donde $T \in \mathcal{T}$, tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(T, M) \to Hom_R(T, E(M))$$

es exacta. Como $Hom_R(T, E(M)) = 0$, entonces $Hom_R(T, M) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{F}$.
Por otro lado, si $M \in \mathcal{F}$, por la proposición 2.93 tenemos que $E(M) \in \mathcal{F}$. Esto implica que $Hom_R(T, E(M)) = 0$ para toda $T \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $M \in rh(\mathcal{T})$.

Ahora, sea $M \in lh(\mathcal{F})$. Entonces $Hom_R(M, E(F)) = 0$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Dado que la sucesión $0 \to F \to E(F)$ es exacta, aplicándole el funtor $Hom_R(M, \_\_)$ tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(M, F) \to Hom_R(M, E(F))$$

es exacta. Como $Hom_R(M, E(F)) = 0$, entonces $Hom_R(M, F) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{T}$.
Por otro lado, si $M \in \mathcal{T}$, entonces $Hom_R(M, F) = 0$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Por la proposición 2.93 tenemos que $E(F) \in \mathcal{F}$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Esto implica que $Hom_R(M, E(F)) = 0$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $M \in lh(\mathcal{F})$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $rh(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$ y $lh(\mathcal{F}) = \mathcal{T}$.

- Sea $T \in \mathcal{T}$ y $F \in \mathcal{F}$. Por hipótesis, tenemos que $Hom_R(T, E(F)) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$ y $Hom_R(T, E(F)) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Dado que la sucesión $0 \to F \to E(F)$ es exacta, aplicándole el funtor $Hom_R(T, \_\_)$, donde $T \in \mathcal{T}$, tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(T, F) \to Hom_R(T, E(F))$$

  es exacta. Como $Hom_R(T, E(F)) = 0$, entonces $Hom_R(T, F) = 0$ para toda $T \in \mathcal{T}$ y para toda $F \in \mathcal{F}$.

- Si $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Supongamos que $Hom_R(T, E(F)) \neq 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$. De esta manera, tomemos $0 \neq f \in Hom_R(T, E(F))$ y así, $Im\ f \leqslant E(F)$. Como $F \trianglelefteq E(F)$, entonces $0 \neq Im\ f \cap F = Im\ f|_F$. Por lo tanto, $0 \neq f|_F \in Hom_R(T, F)$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $Hom_R(T, E(F)) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, lo que implica que $F \in rh(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$.

- Si $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Supongamos que $Hom_R(T, E(F)) \neq 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$. De esta manera, tomemos $0 \neq f \in Hom_R(T, E(F))$ y así, $Im\ f \leqslant E(F)$. Como $F \trianglelefteq E(F)$, entonces $0 \neq Im\ f \cap F = Im\ f|_F$. Por lo tanto, $0 \neq f|_F \in Hom_R(T, F)$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $Hom_R(T, E(F)) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, lo que implica que $T \in lh(\mathcal{F}) = \mathcal{T}$.

Por lo tanto, $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Ahora, por la proposición 2.84, $\mathcal{T} \in L_{\{\twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$. Sea $M \in \mathcal{T}$ y $N \leqslant M$. Entonces $Hom_R(M, E(F)) = 0$ para toda $F \in \mathcal{F}$. Tomemos la sucesión exacta corta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to Hom_R(M, E(F)) \to Hom_R(N, E(F)) \to Ext^1_R(M/N, E(F)) \to \cdots$$

donde $F \in \mathcal{F}$. De esta manera, $Hom_R(M, E(F)) = 0$ por hipótesis y $Ext^1_R(M/N, E(F)) = 0$ pues $E(F)$ es inyectivo. Por lo tanto,$Hom_R(N, E(F)) = 0$, lo que implica que $N \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $\mathcal{T} \in R-sub$ y así, τ es hereditaria. ■

Proposición 2.95 $\mathcal{X} = htors(\mathcal{X})$ para cada $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$.

Demostración:
($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{X}$. Si $F \in rh(\mathcal{X})$, entonces $Hom_R(K, E(F)) = 0$ para toda $K \in \mathcal{X}$. En particular, $Hom_R(M, E(F)) = 0$. Por lo tanto, $M \in htors(\mathcal{X})$.

($\supseteq$) Sea $M \in htors(\mathcal{X})$. Entonces $Hom_R(M, E(F)) = 0$ para cada $F \in rh(\mathcal{X})$. Sea $t_{\mathcal{X}}(M) \leqslant M$. Por el lema 2.86, $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$. Probaremos que $M/t_{\mathcal{X}}(M) \in rh(\mathcal{X})$. Supongamos lo contrario, es decir, $M/t_{\mathcal{X}}(M) \notin rh(\mathcal{X})$. Entonces existe $K \in \mathcal{X}$ tal que $Hom_R(K, E(M/t_{\mathcal{X}}(M))) \neq 0$. De esta manera, tomemos $0 \neq f \in Hom_R(K, E(M/t_{\mathcal{X}}(M)))$. Haciendo $\widehat{f} = f|_{M/t_{\mathcal{X}}(M)}$, tenemos que $0 \neq \widehat{f} \in Hom_R(K, M/t_{\mathcal{X}}(M))$. Así, $Im\ \widehat{f} = L/t_{\mathcal{X}}(M)$ para algún $L \leqslant M$ tal que $t_{\mathcal{X}}(M) \leqslant L$. Como $\mathcal{X} \in R-quot$, entonces $K/(Ker\ \widehat{f}) \cong Im\ \widehat{f} \in \mathcal{X}$. Sea la sucesión exacta corta

$$0 \to t_{\mathcal{X}}(M) \to L \to L/t_{\mathcal{X}}(M) \to 0$$

y es tal que $t_{\mathcal{X}}(M), L/t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, $L \in \mathcal{X}$, lo que contradice la maximalidad de $t_{\mathcal{X}}(M)$. Por lo tanto, $M/t_{\mathcal{X}}(M) \in rh(\mathcal{X})$ de donde se sigue que $Hom_R(M, E(M/t_{\mathcal{X}}(M))) = 0$. Dado que la sucesión $0 \to M/t_{\mathcal{X}}(M) \to E(M/t_{\mathcal{X}}(M))$ es exacta, aplicándole el funtor $Hom_R(M, \_\_)$ tenemos que la sucesión

$$0 \to Hom_R(M, M/t_{\mathcal{X}}(M)) \to Hom_R(M, E(M/t_{\mathcal{X}}(M)))$$

es exacta. Como $Hom_R(M, E(M/t_{\mathcal{X}}(M))) = 0$, entonces $Hom_R(M, M/t_{\mathcal{X}}(M)) = 0$. De esta manera, $M = t_{\mathcal{X}}(M)$ lo que implica que $M \in \mathcal{X}$. ■

Corolario 2.96 Para cada $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$ existe una teoría de torsión hereditaria $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{T}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$. Por la proposición 2.95, tenemos que $\mathcal{X} = htors(\mathcal{X})$. Por la proposición 2.94, tenemos que $\tau = (\mathcal{X}, rh(\mathcal{X}))$ es una teoría de torsión hereditaria. ■

De esta manera, una teoría de torsión hereditaria está únicamente determinada por una clase de módulos $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$. Una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *clase de torsión hereditaria* si es cerrada bajo submódulos, cocientes, extensiones exactas y sumas directas. Llamaremos $R - tors$ a la clase de todas las clases de torsión hereditaria.

Observación 2.97 Por el teorema B.7, tenemos que $R - tors$ es un conjunto. □

Notemos que $R - tors = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}$ y $R - tors$ está parcialmente ordenada por la inclusión. Los siguientes resultados describen su estructura reticular.

Proposición 2.98 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - tors$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - tors.$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}$, por la observación 2.41, tenemos que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - tors$. ■

Para una clase de módulos $\mathcal{X}$ cualquiera, definimos

$$htors(\mathcal{X}) = lh(rh(\mathcal{X}))$$

Proposición 2.99 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos. Entonces $htors(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - tors$.

Demostración:
Sea $\mathcal{Y} \in R-tors$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos. Si $F \in rh(\mathcal{X})$, entonces $Hom_R(K, E(F)) = 0$ para toda $K \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Esto implica que $F \in rh(\mathcal{Y})$. De esta manera, si $M \in htors(\mathcal{X})$, entonces $Hom_R(M, E(F)) = 0$ para toda $F \in rh(\mathcal{X}) \subseteq rh(\mathcal{Y})$. Por lo tanto, $M \in lh(rh(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y}$ por la proposición 2.95. Por lo tanto, $htors(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\mathcal{Y} \in R-tors$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. ■

Teorema 2.100 $R-tors$ es una retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R-tors$ es una retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R-tors$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.101 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos en $R-tors$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:
Por la proposición 2.99, $htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \in R-tors$. Dado que $X_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha$ para cada $\alpha \in A$, se sigue que $X_\alpha \subseteq htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R-tors$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ y por la proposición 2.99, se sigue que $htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$. ■

Teorema 2.102 $R-tors$ es marco.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R{-}tors$ y $\{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cualquier familia de elementos de $R{-}tors$. Probaremos que

$$\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha\in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$$

($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$ y hagamos $\mathcal{Z} = \bigvee_{\alpha\in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$. Supongamos que $M \notin \mathcal{Z}$. Tomando $N = t_{\mathcal{Z}}(M)$, tenemos que $N \in \mathcal{Z}$ y $M/N \in rh(\mathcal{Z})$, por los corolarios 2.91 y 2.96. Como $\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$ es cerrada bajo cocientes, $M/N \in \mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$.

Por otro lado, si $t_{\mathcal{Y}_\alpha}(M/N) = 0$ para toda $\alpha \in A$, entonces $M/N \in rh(\mathcal{Y}_\alpha)$ para toda $\alpha \in A$ por la proposición 2.88 y el corolario 2.96. De esta manera, $M/N \in rh\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$. Dado que $\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha = htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$, tenemos que $M/N \in \left[rh\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)\right] \bigcap \left[htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)\right]$ lo que implica que $M/N = 0$. Por lo tanto, $M = N \in \mathcal{Z}$ lo que es una contradicción con el hecho de que $M \notin \mathcal{Z}$.

De esta manera, existe $\beta \in A$ tal que $t_{\mathcal{Y}_\beta}(M/N) \neq 0$. Hagamos $N'/N = t_{\mathcal{Y}_\beta}(M/N)$. Entonces $N'/N \in \mathcal{Y}_\beta$ por el corolario 2.91. Además, como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, $N'/N \in \mathcal{X}$ pues $N'/N \leqslant M/N$. Así, $N'/N \in \mathcal{X} \bigcap \mathcal{Y}_\beta \subseteq \mathcal{Z}$. Como $M/N \in rh(\mathcal{Z})$, entonces $N'/N \in rh(\mathcal{Z})$. Pero $N'/N \in \mathcal{Z}$, lo que implica que $N'/N = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $t_{\mathcal{Y}_\beta}(M/N) \neq 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{Z} = \bigvee_{\alpha\in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$. De esta manera, $\mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right) \subseteq \bigvee_{\alpha\in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha)$.

($\supseteq$) Dado que $\mathcal{Y}_\beta \subseteq \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$ para toda $\beta \in A$, tenemos que

$\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\beta \subseteq \mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$ para toda $\beta \in A$. De esta manera,

$\bigvee_{\alpha\in A} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}_\alpha) \subseteq \mathcal{X} \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{Y}_\alpha\right)$. ∎

Corolario 2.103 $R - tors$ es una retícula distributiva.
Demostración:
Tomemos A un conjunto con dos elementos y apliquemos el Teorema 2.102. ■

Proposición 2.104 $R - tors$ es fuertemente pseudocomplementada, donde el pseudocomplemento en $R - tors$ de $\mathcal{T}$ está dado por

$$\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}} = \{M \in R - Mod \mid htors(M) \cap \mathcal{T} = 0\}.$$

Demostración:
Sea $W = \{M \in R - Mod \mid htors(M) \cap \mathcal{T} = 0\}$.

- Sea $M \in \mathcal{T} \cap W$. Dado que $M \in htors(M)$, entonces $M = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{T} \cap W = 0$.

- Sea $M \in W$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \in htors(N)$ y $L \in htors(M/N)$ tales que $K, L \in \mathcal{T}$. Como $htors(N) \subseteq htors(M)$, $htors(M/N) \subseteq htors(M)$ y $M \in W$, entonces $K = L = 0$, lo que implica que $N, M/N \in W$.

  Por otro lado, sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M', M'' \in W$. Supongamos que $M \notin W$. Entonces existe $0 \neq N \in htors(M)$ tal que $N \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T} \in R-tors \subseteq R-op$, tenemos que $N \cap M' \in htors(M) \cap \mathcal{T}$ de donde se sigue que $N \cap M' = 0$, pues $M' \in W$. Así, notemos que $N = N/(N \cap M') \cong (N + M')/M' \leqslant M'' \in W$. Entonces $N \in W$, pero $N \in \mathcal{T}$, por lo que $N \in W \cap \mathcal{T}$. Esto implica que $N = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $N \neq 0$. Por lo tanto, $M \in W$.

  Ahora, sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en W y supongamos que $\bigoplus_{i \in I} M_i \notin W$. Entonces existe $0 \neq N \in htors\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)$ tal que $N \in \mathcal{T}$. De esta manera, $N \in htors\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$ donde $J \subseteq I$ finito. Como $W \in L_{\{\oplus^n\}}$ por el resultado previo y por la proposición 2.28, tenemos que $\bigoplus_{j \in J} M_j \in W$, lo que implica que $N \in W$. Pero $N \in \mathcal{T}$, por lo que $N \in W \cap \mathcal{Y}$. Entonces $N = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $N \neq 0$. Por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} M_i \in W$. De esta manera, $W \in R - tors$

- Sea $\mathcal{X} \in R - tors$ tal que $\mathcal{T} \cap \mathcal{X} = 0$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Si $N \in htors(M)$ tal que $N \in \mathcal{T}$, entonces $N = 0$ pues $N \in \mathcal{X}$. Pero eso implica que $M \in W$. Así, $\mathcal{X} \subseteq W$. Por lo tanto, W es mayor clase en $R - tors$ tal que $\mathcal{T} \cap W = 0$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}} = W$. ■

Una aplicación directa del teorema 2.37 nos muestra que los esqueletos de $R - tors, R - ss$ y $R - op$ son iguales. La única condición que debemos verificar para que se cumpla el teorema 2.37 es que toda clase $\mathcal{X} \in Skel(R-op)$ es cerrada bajo extensiones exactas y sumas directas.

Lema 2.105 Cada $\mathcal{X} \in Skel(R-op)$ es cerrada bajo extensiones exactas y sumas directas.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in Skel(R-op)$. Entonces existe $\mathcal{Y} \in R-op$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow\}}}$. Probaremos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas.
Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M', M'' \in \mathcal{X}$. Supongamos que $M \notin \mathcal{X}$. Entonces existe $0 \neq N \in subquot(M)$ tal que $N \in \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y} \in R - op$, tenemos que $N \cap M' \in subquot(M) \cap \mathcal{Y}$ de donde se sigue que $N \cap M' = 0$, pues $M' \in \mathcal{X}$. Así, notemos que

$$N = N/(N \cap M') \cong (N + M')/M' \leqslant M'' \in \mathcal{X}.$$

Entonces $N \in \mathcal{X}$, pero $N \in \mathcal{Y}$, por lo que $N \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Esto implica que $N = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $N \neq 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{X}$.

Ahora, probaremos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas.
Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en $\mathcal{X}$. Supongamos que $\bigoplus_{i \in I} M_i \notin \mathcal{X}$. Entonces existe $0 \neq N \in subquot\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)$ tal que $N \in \mathcal{Y}$. De esta manera, $N \in subquot\left(\bigoplus_{j \in J} M_j\right)$ donde $J \subseteq I$ finito. Como $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus^n\}}$ por el resultado previo y por la proposición 2.28, tenemos que $\bigoplus_{j \in J} M_j \in \mathcal{X}$, lo que implica que

$N \in \mathcal{X}$. Pero $N \in \mathcal{Y}$, por lo que $N \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces $N = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $N \neq 0$. Por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{X}$. ■

Corolario 2.106 $Skel(R - op) = Skel(R - tors) = Skel(R - ss)$.

Demostración:
Por el lema 2.105, tenemos que

$$Skel(R - op) \subseteq R - tors \subseteq R - ss \subseteq R - op.$$

Aplicando el teorema 2.37, concluímos que
$Skel(R - op) = Skel(R - tors) = Skel(R - ss)$. ■

Corolario 2.107 Sea $\mathcal{T} \in R - tors$. Entonces

$$\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}} = \{M \in R - Mod \mid subquot(M) \cap \mathcal{T} = \{0\}\}$$

Demostración:
Por el corolario 2.38, se sigue que $\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}} = \mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow\}}}$. ■

Corolario 2.108 Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria, entonces

$$\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}}} = \{M \in R - Mod \mid subquot(M) \cap \mathbb{T}_\tau = \{0\}\}$$

Demostración:
Consecuencia de los corolarios 2.96 y 2.107. ■

Corolario 2.109 Sea $\mathcal{S} \in R - ss$. Entonces

$$\mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}}} = \{M \in R - Mod \mid subquot(M) \cap \mathcal{S} = 0\}$$

Demostración:
Por el corolario 2.38, se sigue que $\mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}}} = \mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow\}}}$. ■

2.3.4. El conjunto $R - pretors$

Definición 2.110 Una clase de módulos $\mathcal{X}$ *clase de pretorsión hereditaria* si es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas arbitrarias. Llamaremos $R - pretors$ a la clase de todas las clases de pretorsión hereditaria. □

Notemos que $R - pretors = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus\}}$ y $R - pretors$ está parcialmente ordenada por la inclusión.

Proposición 2.111 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - pretors$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - pretors$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus\}$, por la proposición 2.41 tenemos que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - pretors$. ■

Para describir el supremo de un conjunto arbitrario de elementos en $R - pretors$, necesitamos describir un "nuevo" operador de clases.

Definición 2.112 Sea M un módulo. Un módulo N es *(finitamente) generado por M* si existe un epimorfismo

$$M^{(A)} \to N \to 0$$

para algún conjunto (finito) A. □

Definición 2.113 Sea M un módulo. Un módulo N es *subgenerado por M* si existe un monomorfismo $0 \to N \to K$, donde K es generado por M. Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, denotaremos como $\sigma(\mathcal{X})$ a la clase de todos los módulos subgenerados por algún $M \in \mathcal{X}$. De igual manera, denotaremos como $\sigma(M)$ a la clase de todos los $R-$módulos subgenerados por M. □

Así,

$$\sigma(\mathcal{X}) = \left\{ N \in R - Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existen} \quad M^{(A)} \to K \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to N \to K \\ \text{donde } A \text{ es un conjunto, } K \in R - Mod \text{ y } M \in \mathcal{X} \end{array} \right\}$$

y $$\sigma(M) = \left\{ N \in R - Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existen} \quad M^{(A)} \to K \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to N \to K \\ \text{donde } A \text{ es un conjunto y } K \in R - Mod \end{array} \right\}$$

Observación 2.114 Notemos que la definición de $\sigma(M)$ coincide con la definición de $\sigma[M]$, la subcategoría completa de $R - Mod$ de los módulos subgenerados por M (ver [28], §15). Sin embargo, en este trabajo trataremos de distinta manera a $\sigma(M)$ y a $\sigma[M]$. ▫

Proposición 2.115 ([28], Subsección 15.3) Para cualquier $R-m$ódulo M, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\sigma[M] = R - Mod$;

(ii) existe un mono $0 \to R \to M^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$((i) \Rightarrow (ii))$ Supongamos que $\sigma[M] = R - Mod$. Tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M^{(A)} \arrow[r, "\psi"] & L \arrow[r] & 0 \\ & R \arrow[u, "\varphi"'] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Como R es proyectivo, existe $\gamma : R \to M^{(A)}$ tal que $\psi \circ \gamma = \varphi$. Sea $r \in R$ y supongamos que $\varphi(r) = 0$. Entonces $\varphi(r) = \psi(\gamma(r)) = \Psi(0) = 0$, y como φ es monomorfismo, tenemos que $r = 0$. Por lo tanto, γ es monomorfismo. Esto implica que $\gamma(1) \in M^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $\gamma(R) \leqslant M^k$.

$((ii) \Rightarrow (i))$ Supongamos que existe un mono $0 \to R \to M^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por definición, $\sigma[M] \subseteq R - Mod$. Sea $N \in R - Mod$. Como $0 \to R \to M^k$ es mono y N es generado por R, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^{|N|} \arrow[r] \arrow[d] & (M^k)^{|N|} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ & 0 & 0 \end{tikzcd}$$

donde K es el pushout de L y $(M^k)^{|N|}$. De aquí se sigue que $N \in \sigma[M]$. Por lo tanto, $R - Mod \subseteq \sigma[M]$, y así, $\sigma[M] = R - Mod$. ■

El siguiente resultado se sigue directo de la proposición anterior.

Corolario 2.116 $\sigma[R] = R - Mod$. De igual manera, $\sigma(R) = R - Mod$ (como clases de $R-$módulos). ■

Proposición 2.117 $\sigma(M) \in R - pretors$ para cada módulo M.

Demostración:
Sea M un módulo.

- Sea $K \in \sigma(M)$ y $N \leqslant K$. Entonces existen $\bigoplus_{\alpha\in A} M \to T \to 0$ y $0 \to K \to T$, con $T \in R - Mod$. Como $N \leqslant K$, entonces existe un mono $0 \to N \to T$ lo que implica que $N \in \sigma(M)$. Por otro lado, para K/N tenemos que existen $0 \to K/N \to T/N$ y $\bigoplus_{\alpha\in A} M \to T/N \to 0$ lo que implica que $K/N \in \sigma(M)$. Por lo tanto, $\sigma(M) \in R - op$.

- Sea $\{K_\beta\}_{\beta\in B}$ una familia de elementos de $\sigma(M)$. Entonces para cada $\beta \in B$ existen $\bigoplus_{\alpha\in A} M \to T_\beta \to 0$ y $0 \to K_\beta \to T_\beta$, con $T_\beta \in R-Mod$. Por lo tanto, existen $\bigoplus_{\beta\in B}\bigoplus_{\alpha\in A} M \to \bigoplus_{\beta\in B} T_\beta \to 0$ y $0 \to \bigoplus_{\beta\in B} K_\beta \to \bigoplus_{\beta\in B} T_\beta$, lo que implica que $\bigoplus_{\beta\in B} K_\beta \in \sigma(M)$. Por lo tanto, $\sigma(M) \in L_{\{\oplus\}}$. ■

Proposición 2.118 Sean $K, L \in R - Mod$. Entonces $\sigma(K) \subseteq \sigma(L)$ si y sólo si $K \in \sigma(L)$.

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\sigma(K) \subseteq \sigma(L)$. Es claro que $K \in \sigma(K) \subseteq \sigma(L)$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $K \in \sigma(L)$. Si $T \in \sigma(K)$, entonces existen $\bigoplus_{\alpha\in A} K \to M \to 0$ y $0 \to T \to M$, con $M \in R - Mod$. Como $K \in \sigma(L)$, entonces $\bigoplus_{\alpha\in A} K \in \sigma(L)$ y así $M \in \sigma(L)$. De esta manera, $T \in \sigma(L)$. Por lo tanto, $\sigma(K) \subseteq \sigma(L)$. ■

Definición 2.119 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $M \in R - Mod$.

(i) Llamaremos $R - cyc$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos.

(ii) Denotaremos como $cyc(\mathcal{X}) = \{K_j \mid j \in J\}$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de submódulos cíclicos de todos los módulos $K \in \mathcal{X}$. Notemos que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq R - cyc$.

(iii) Denotaremos como $cyc(M) = \{M_i \mid i \in I\}$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de submódulos cíclicos de M. Notemos que $cyc(M) \subseteq cyc(\mathcal{X})$ si $M \in \mathcal{X}$. □

Proposición 2.120 $\sigma(M)$ es la clase de pretorsión hereditaria más pequeña que contiene a M.

Demostración:
Supongamos que existe $\mathcal{X} \in R - pretors$ tal que $M \in \mathcal{X}$. Si $N \in \sigma(M)$, entonces existen $\bigoplus_{\alpha \in A} M \to K \to 0$ y $0 \to N \to K$, con $K \in R - Mod$. Como $M \in \mathcal{X}$, entonces $\bigoplus_{\alpha \in A} M \in \mathcal{X}$, lo que implica que $K \in \mathcal{X}$. De esta manera, $N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\sigma(M) \subseteq \mathcal{X}$ para toda $\mathcal{X} \in R - pretors$ tal que $M \in \mathcal{X}$. ■

Definición 2.121 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Para $cyc(\mathcal{X}) = \{K_j \mid j \in J\}$ definimos $M_{\mathcal{X}}$ como la suma directa de todos los elementos de $cyc(\mathcal{X})$, es decir,

$$M_{\mathcal{X}} = \bigoplus_{j \in J} K_j.$$

Notemos que $M_{\mathcal{X}}$ es único salvo isomorfismo. □

Proposición 2.122 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos. Entonces

(i) $\sigma(M_{\mathcal{X}})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - pretors$

(ii) $\mathcal{X} \in R - pretors$ si y sólo si $\sigma(M_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$

Demostración:
(i) Por la proposición 2.117, tenemos que $\sigma(M_{\mathcal{X}}) \in R - pretors$.
Ahora, sea $N \in \mathcal{X}$. Notemos que $Rn \in \sigma(M_{\mathcal{X}})$ para cada $n \in N$ por la proposición

2.120. Por lo tanto, $N = \sum_{n \in N} Rn \in \sigma(M_{\mathcal{X}})$ y así, $\mathcal{X} \subseteq \sigma(M_{\mathcal{X}})$.
Por otro lado, supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - pretors$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Si $N \in \sigma(M_{\mathcal{X}})$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} M_{\mathcal{X}}^{(A)} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & N & & \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Como cada sumando de $M_{\mathcal{X}}$ está en $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, entonces $M_{\mathcal{X}} \in \mathcal{Y}$. De aquí se sigue que $N \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\sigma(M_{\mathcal{X}}) \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\mathcal{Y} \in R - pretors$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$.

$(ii)(\Rightarrow)$ Si $\mathcal{X} \in R - pretors$, del resultado anterior se sigue que $\sigma(M_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\sigma(M_{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}$. Es claro que $\mathcal{X} \in R - pretors$. ■

Proposición 2.123 Si $\mathcal{X} = \sigma(K)$ y $\mathcal{Y} = \sigma(L)$, para algunos $K, L \in R - Mod$, entonces

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = \sigma(K \oplus L).$$

Demostración:
Sean $K, L \in R - Mod$ tales que $\mathcal{X} = \sigma(K)$ y $\mathcal{Y} = \sigma(L)$. Probaremos que $\mathcal{X} \subseteq \sigma(K \oplus L)$ y $\mathcal{Y} \subseteq \sigma(K \oplus L)$.
Si $M \in \mathcal{X} = \sigma(K)$, entonces existen $\bigoplus_{\alpha \in A} K \to T \to 0$ y $0 \to M \to T$, con $T \in R - Mod$. Dado que existe $\bigoplus_{\alpha \in A}(K \oplus L) \to \bigoplus_{\alpha \in A} K \to 0$, tenemos que existe $\bigoplus_{\alpha \in A}(K \oplus L) \to T \to 0$, lo que implica que $M \in \sigma(K \oplus L)$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \subseteq \sigma(K \oplus L)$. Similarmente se prueba que $\mathcal{Y} \subseteq \sigma(K \oplus L)$.

Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Z} = \sigma(N) \in R - pretors$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$.
Probaremos que $\sigma(K \oplus L) \leqslant \mathcal{Z}$.
Como $K \in \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{Y}$, entonces $K, L \in \sigma(N)$ y así $K \oplus L \in \sigma(N)$. Por la proposición 2.118, tenemos que $\sigma(K \oplus L) \subseteq \sigma(N) = \mathcal{Z}$.
Concluimos que $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = \sigma(K \oplus L)$. ■

Teorema 2.124 $R - pretors$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - pretors$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - pretors$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.125 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos en $R - pretors$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha\right)$$

donde $\mathcal{X}_\alpha = \sigma(M_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X}_\alpha = \sigma(M_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$. Por la proposición 2.122, tenemos que $\sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha\right) \in R - pretors$. Probaremos que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \sigma(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$. Si $M \in \mathcal{X}_{\alpha_0} = \sigma(M_{\alpha_0})$ para algún $\alpha_0 \in A$, entonces existen $\bigoplus_{\beta \in B} M_{\alpha_0} \to T_{\alpha_0} \to 0$ y $0 \to M \to T_{\alpha_0}$, con $T_{\alpha_0} \in R - Mod$. Dado que existe $\bigoplus_{\beta \in B}(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha) \to \bigoplus_{\beta \in B} M_{\alpha_0} \to 0$, tenemos que existe $\bigoplus_{\beta \in B}(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha) \to T_{\alpha_0} \to 0$, lo que implica que $M \in \sigma(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$. Por lo tanto, $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \sigma(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$.

Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Y} = \sigma(N) \in R - pretors$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $M_\alpha \in \sigma(N)$ para cada $\alpha \in A$ y así $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \in \sigma(N)$. Por la proposición 2.118, $\sigma(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha) \subseteq \sigma(N) = \mathcal{Y}$.
Concluimos que $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha\right)$ ■

Una pregunta natural que surge es si $R - pretors$ es distributiva, la cual es respondida negativamente por la correspondecia biyectiva entre $R - pretors$ y $R - fil$, el conjunto de todos los filtros lineales (Ver Apéndice B), y el hecho de que $R - fil$ no es distributiva (ver [12]). Sin embargo, $R - pretors$ sí es modular. Para probar la modularidad de $R - pretors$ necesitamos el siguiente resultado:

Lema 2.126 Sea $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos en $R - pretors$. Entonces

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \left\{ I \leqslant R \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \ \{I_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha} \text{ con } I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha} \quad \forall \ \alpha \in A \\ \text{tal que } \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \text{ es finita y } \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq I \end{array} \right\}$$

donde $\mathcal{X} = \bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$.

Demostración:
Sea

$$\mathfrak{L} = \left\{ I \leqslant R \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \ \{I_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha} \text{ con } I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha} \quad \forall \ \alpha \in A \\ \text{tal que } \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \text{ es finita y } \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq I \end{array} \right\}$$

Demostraremos que $\mathfrak{L} \in R - fil$.

(i) Sean $J_1, J_2 \in \mathfrak{L}$. Entonces existen unas familias $\{I_{1_\alpha}\}_{\alpha \in A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ y $\{I_{2_\alpha}\}_{\alpha \in A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ con $I_{1_\alpha}, I_{2_\alpha} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para toda $\alpha \in A$, tales que $\bigcap_{\alpha \in A} I_{1_\alpha}$ y $\bigcap_{\alpha \in A} I_{2_\alpha}$ son finitas y $\bigcap_{\alpha \in A} I_{1_\alpha} \subseteq I$ y $\bigcap_{\alpha \in A} I_{2_\alpha} \subseteq I$.

Tomemos $K_\alpha = I_{1_\alpha} \cap I_{2_\alpha}$ para cada $\alpha \in A$. Notemos que $K_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para toda $\alpha \in A$. Además,

$$\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (I_{1_\alpha} \cap I_{2_\alpha}) = \left(\bigcap_{\alpha \in A} I_{1_\alpha} \right) \bigcap \left(\bigcap_{\alpha \in A} I_{2_\alpha} \right) \subseteq J_1 \bigcap J_2$$

y es finita. Por lo tanto, $J_1 \bigcap J_2 \in \mathfrak{L}$.

(ii) Sea $I, J \in R$ tal que $I \subseteq J$ e $I \in \mathfrak{L}$. Entonces existe una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ con $I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para toda $\alpha \in A$, tal que $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ es finita y $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq I$. Como $I \subseteq J$, entonces $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq J$, lo que implica que $J \in \mathfrak{L}$.

(*iii*) Sea $I \in \mathfrak{L}$ y $(I : r) \leqslant R$ para algún $r \in R$. Entonces existe una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ con $I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para toda $\alpha \in A$, tal que $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ es finita y $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq I$. Como $I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para cada $\alpha \in A$, entonces $(I_\alpha : r) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para cada $\alpha \in A$.

Dado que $I_\alpha = R$ para casi toda $\alpha \in A$, pues $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ es finita, se sigue que $\bigcap_{\alpha\in A}(I_\alpha : r)$ es finita. Ahora, si $s \in \bigcap_{\alpha\in A}(I_\alpha : r)$, entonces $sr \in I_\alpha$ para toda $\alpha \in A$, lo que implica que $sr \in I$. De esta manera, $s \in (I : r)$ por lo que $\bigcap_{\alpha\in A}(I_\alpha : r) \subseteq (I : r)$. Por lo tanto, $(I : r) \in \mathfrak{L}$.

De esta manera, se concluye que $\mathfrak{L} \in R - fil$. Ahora, probaremos que $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

($\supseteq$) Sea $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_{\alpha_0}}$. Sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ una familia tal que $I_\alpha = R$ para toda $\alpha \in A - \{\alpha_0\}$ e $I_{\alpha_0} = I$. Entonces $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha = I$, por lo que $I \in \mathfrak{L}$. Así, $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha} \subseteq \mathfrak{L}$ para toda $\alpha \in A$. Como existe una correspondencia biyectiva entre $R - pretors$ y $R - fil$, entonces $\mathfrak{F}_{\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}_{\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha} \subseteq \mathfrak{L}$.

($\subseteq$) Sea $I \in \mathfrak{L}$. Entonces existe una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ con $I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_\alpha}$ para toda $\alpha \in A$, tal que $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ es finita y $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq I$. Como $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$ es finita, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in A$ tales que $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}_{\beta_i}}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. De esta manera, $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha}$ lo que implica que $I \in \mathfrak{F}_{\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha}$. Por lo tanto, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}_{\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha}$.

Así, concluimos que $\mathfrak{F}_{\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha} = \mathfrak{L}$. ■

Teorema 2.127 $R - pretors$ es una retícula modular.

Demostración:
Sea $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in R - pretors$ tales que $\mathcal{X} \leqslant \mathcal{Y}$. Probaremos que

$$\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = \mathcal{Y} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z})$$

($\subseteq$) Es claro que $\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Y} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z})$.

($\supseteq$) Como existe una correspondencia biyectiva entre $R - pretors$ y $R - fil$, entonces basta con probar que $\mathfrak{F}_{\mathcal{Y} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z})} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})}$. De esta manera, sea $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Y} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z})}$. Así, $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$ e $I \in \mathfrak{F}_{(\mathcal{X} \vee \mathcal{Z})}$. Por el lema 2.126, tenemos que existen $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ y $K \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}$ tales que $J \cap K \subseteq I$. Como $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$, entonces $I \cap J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$ lo que implica que $(I \cap J) + K \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$ pues $\mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$ es cerrado bajo super ideales. En el mismo sentido, $(I \cap J) + K \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}$ pues $K \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Z}}$. Así, tenemos que $(I \cap J) + K \in \mathfrak{F}_{\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}}$. Por lo tanto,

$$J \cap ((I \cap J) + K) = (J \cap (I \cap J)) + (J \cap K) = (J \cap I) + (J \cap K) \subseteq I + I = I$$

lo que implica que $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})}$. Así, $\mathcal{Y} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. ∎

Al igual que $R - tors$, cada $\mathcal{X} \in R - pretors$ tiene un pseudocomplemento único, lo que hace que $R - pretors$ sea fuertemente pseudocomplementada. Para poder describir los pseudocomplementos, necesitamos definir el *suplemento derecho* de $\mathcal{X} \in R - pretors$.

Sea $M \in R - Mod$. De la definición 2.85, diremos que $t_{\mathcal{X}}(M)$ es el *submódulo de pretorsión de* M si $\mathcal{X} \in R - pretors$. Diremos que M es un *módulo de pretorsión* si $t_{\mathcal{X}}(M) = M$ y que M es un *módulo libre de pretorsión* si $t_{\mathcal{X}}(M) = 0$.

De la proposición 2.92, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.128 $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$ para todo módulo $M \in R - Mod$ y para toda clase $\mathcal{X} \in R - pretors$.

Proposición 2.129 Sea $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in R - pretors$. Entonces $\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \in R - pretors$ y es tal que

$$t_{(\mathcal{X}_1 : \mathcal{X}_2)}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M) = t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M))$$

Demostración:
Recordemos que, de la proposición 2.5, tenemos que

$$\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 = \left\{ M \in R-Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ 0 \to X_1 \to M \to X_2 \to 0 \text{ sucesión exacta corta} \\ \text{tal que } X_1 \in \mathcal{X}_1 \text{ y } X_2 \in \mathcal{X}_2 \end{array} \right\}$$

Probaremos que $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 \in R-pretors$.

Sea $M \in \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M' \in \mathcal{X}_1$ y $M/M' \cong M'' \in \mathcal{X}_2$. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M'\cap N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & (M'+N)/M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M'+N)/N \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & M/(M'+N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $M'\cap N, (M'+N)/N \in \mathcal{X}_1$ y $(M'+N)/M', M/(M'+N) \in \mathcal{X}_2$. Esto implica que $N, M/N \in \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 \in R-op$.
Ahora, si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$, entonces existen sucesiones exactas cortas $0 \to M_i' \to M_i \to M_i'' \to 0$ para cada $i \in I$, con $M_i' \in \mathcal{X}_1$ y $M_i'' \in \mathcal{X}_2$. De esta manera, $\bigoplus_{i\in I} M_i' \in \mathcal{X}_1$ y $\bigoplus_{i\in I} M_i'' \in \mathcal{X}_2$ pues $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in R-pretors$, y así, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} M_i' \to \bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i'' \to 0$$

Esto implica que $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ es cerrado bajo sumas directas arbitrarias. Se concluye que $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 \in R-pretors$.

Ahora, probaremos que $t_{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M) = t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M))$.

($\subseteq$) Sea $m + t_{\mathcal{X}_1}(M) \in t_{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M)$, donde $Rm \in \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$. Entonces existe $K' \leqslant Rm$ tal que $K' \in \mathcal{X}_1$ y $Rm/K' \in \mathcal{X}_2$. Si $k' \in K'$, entonces $Rk' \leqslant K' \in \mathcal{X}_1$ lo que implica que $k' \in t_{\mathcal{X}_1}(M)$, pues $k' \in K' \leqslant Rm \leqslant M$. De esta manera, $K' \subseteq t_{\mathcal{X}_1}(M)$ y así, $Rm + t_{\mathcal{X}_1}(M) \leqslant Rm + K' \in \mathcal{X}_2$. Esto implica que $m + t_{\mathcal{X}_1}(M) \in t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M))$. Por lo tanto, $t_{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M) \subseteq t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M))$.

($\supseteq$) Sea $m + t_{\mathcal{X}_1}(M) \in t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M))$, donde $Rm + t_{\mathcal{X}_1}(M) \in \mathcal{X}_2$. Entonces la sucesión $0 \to t_{\mathcal{X}_1}(M) \to Rm \to Rm/t_{\mathcal{X}_1}(M) \to 0$ es exacta, con $Rm/t_{\mathcal{X}_1}(M) \in \mathcal{X}_2$. Por la proposición 2.128, tenemos que $t_{\mathcal{X}_1}(M) \in \mathcal{X}_1$. De esta manera, $Rm \in \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ por lo que $m \in t_{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}(M)$. Se sigue que $m + t_{\mathcal{X}_1}(M) \in t_{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M)$. Por lo tanto, $t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M)) \subseteq t_{\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M)$. ■

Definición 2.130 Sea $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in R - pretors$. Denotaremos como $(\mathcal{X}_1 : \mathcal{X}_2)$ al elemento en $R - pretors$ tal que

$$t_{(\mathcal{X}_1:\mathcal{X}_2)}(M)/t_{\mathcal{X}_1}(M) = t_{\mathcal{X}_2}(M/t_{\mathcal{X}_1}(M))$$ □

Por la proposición 2.129 y la definición 2.130, tenemos que $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 = (\mathcal{X}_1 : \mathcal{X}_2)$.

Definición 2.131 Sea $\mathcal{X} \in R - pretors$. Diremos que $\mathcal{Y} \in R - pretors$ es el *suplemento derecho de* $\mathcal{X}$ si $\mathcal{Y}$ es el menor elemento en $R - pretors$ tal que

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = R - Mod$$ □

Lema 2.132 Si $\mathcal{X} \in R - pretors$ y si $\{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un conjunto de elementos de $R - pretors$, entonces

$$\mathcal{X}\left(\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\mathcal{Y}_\alpha)$$

Demostración:
Dado que existe una correspondencia biyectiva, que preserva orden, entre $R - pretors$ y $R - fil$, el resultado se obtiene por la proposicón B.12. ■

Proposición 2.133 Para cada $\mathcal{X} \in R - pretors$, siempre existe su suplemento derecho.

Demostración:
Sea $T = \{\mathcal{Y}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ la familia de todas las clases de pretorsión hereditaria tales que $\mathcal{X}\mathcal{Y}_\alpha = R - Mod$. Notemos que $T \neq \varnothing$, pues $R - Mod \in T$. Tomemos $\mathcal{Y} = \bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha$. Por el lema 2.132 tenemos que

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \mathcal{X}(\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{Y}_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A}(\mathcal{X}\mathcal{Y}_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} R - Mod = R - Mod.$$

Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ es el suplemento derecho de $\mathcal{X}$. ■

Denotaremos como $\mathcal{X}^{(1)}$ al suplemento derecho de $\mathcal{X}$.

Teorema 2.134 Sea $\mathcal{X} \in R - pretors$. Las siguientes clases son iguales:

(i) $\mathcal{X}^{(1)}$

(ii) $\sigma(\{M/t_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in R - Mod\})$

(iii) $\{M/M' \mid M \in R - Mod \text{ y } t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'\}$

(iv) $\sigma(R/t_{\mathcal{X}}(R))$

Demostración:
$(i) \subseteq (ii)$ Notemos que

$$t_{\mathcal{X}\mathcal{X}^{(1)}}(M) = \{m \in M \mid Rm \in \mathcal{X}\mathcal{X}^{(1)}\} = \{m \in M \mid Rm \in R - Mod\} = M$$

para toda $M \in R - Mod$, lo que implica que $M/t_{\mathcal{X}}(M) = t_{\mathcal{X}^{(1)}}(M/t_{\mathcal{X}}(M))$ para todo $M \in R - Mod$. Sea $\mathcal{Z} = \sigma(\{M/t_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in R - Mod\})$. Si $M \in R - Mod$, entonces $M/t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{Z}$. Por el corolario 2.128, tenemos que $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$. De esta manera, $M \in \mathcal{X}\mathcal{Z}$ lo que implica que $R - Mod \subseteq \mathcal{X}\mathcal{Z}$. Entonces $\mathcal{X}\mathcal{Z} = R - Mod$ de donde se sigue que $\mathcal{X}^{(1)} \subseteq \mathcal{Z} = \sigma(\{M/t_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in R - Mod\})$.

$(ii) \subseteq (iii)$ Sea $\mathcal{Y} = \sigma(\{M/t_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in R - Mod\})$ y
$\mathcal{Z} = \{M/M' \mid M \in R - Mod \text{ y } t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'\}$. Probaremos que $\mathcal{Z} \in R - pretors$.

- Sea $M/M' \in \mathcal{Z}$. Entonces $t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'$. Si $N/M' \leqslant M/M'$, tenemos que $t_{\mathcal{X}}(N) \subseteq t_{\mathcal{X}}(M)$, por lo que $t_{\mathcal{X}}(N) \subseteq M'$. Así, $N/M' \in \mathcal{Z}$.
  Además, notemos que $t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M' \subseteq N$, por lo que
  $M/N \cong (M/M')/(N/M') \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, $\mathcal{Z} \in R - op$.

- Si $\{M_\alpha/M'_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de elementos de $\mathcal{Z}$, entonces $t_{\mathcal{X}}(M_\alpha) \subseteq M'_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. De aquí se sigue que
$$t_{\mathcal{X}}\left(\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in A} t_{\mathcal{X}}(M_\alpha) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in A} M'_\alpha$$
  lo que implica que $\bigoplus_{\alpha\in A}(M_\alpha/M'_\alpha) \cong (\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha)/(\bigoplus_{\alpha\in A} M'_\alpha) \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, $\mathcal{Z}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias.

De esta manera, $\mathcal{Z} \in R - pretors$. Sea $N \in \mathcal{Y}$. Entonces existen
$$\bigoplus_{\alpha\in A} M/t_{\mathcal{X}}(M) \to K \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to N \to K,$$
para algún $M \in R - Mod$ y $K \in R - Mod$. Notemos que $M/t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{Z}$. Como $\mathcal{Z} \in R - pretors$, tenemos que $\bigoplus_{\alpha\in A} M/t_{\mathcal{X}}(M), K \in \mathcal{Z}$, lo que implica que $N \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$.

(iii) $\subseteq$ *(iv)* Sea $\mathcal{Y} = \{M/M' \mid M \in R - Mod \text{ y } t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'\}$ y $\mathcal{Z} = \sigma(R/t_{\mathcal{X}}(R))$. Sea $M/M' \in \mathcal{Y}$. Entonces $t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'$. Por el corolario 2.116, tenemos que $M \in \sigma(R)$ y entonces existen $\bigoplus_{\alpha\in A} R \to K \to 0$ y $0 \to M \to K$, donde
$K \in R - Mod$. De esta manera, tenemos que existen $\bigoplus_{\alpha\in A} t_{\mathcal{X}}(R) \to t_{\mathcal{X}}(K) \to 0$ y $0 \to t_{\mathcal{X}}(M) \to t_{\mathcal{X}}(K)$. Entonces tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{\alpha\in A} t_{\mathcal{X}}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\alpha\in A} R \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\alpha\in A}(R/t_{\mathcal{X}}(R)) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"] & 0 \\
0 \arrow[r] & t_{\mathcal{X}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K/t_{\mathcal{X}}(K) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t_{\mathcal{X}}(K) \arrow[r] & K \arrow[r] & K/t_{\mathcal{X}}(K) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & t_{\mathcal{X}}(M) \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & M/t_{\mathcal{X}}(M) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\exists"'] & 0 \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior, tenemos que $M/t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{Z}$. Como $t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'$, la sucesión $0 \to M'/t_{\mathcal{X}}(M) \to M/t_{\mathcal{X}}(M) \to M/M' \to 0$ es exacta corta y así, $M/M' \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$.

$(iv) \subseteq (i)$. Sea $\mathcal{Y} = \sigma(R/t_{\mathcal{X}}(R))$ y $M \in \mathcal{Y}$. Entonces existen

$$\bigoplus_{\alpha \in A} R/t_{\mathcal{X}}(R) \to K \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to M \to K,$$

donde $K \in R - Mod$. Como $\mathcal{X}\mathcal{X}^{(1)} = R - Mod$, entonces $R/t_{\mathcal{X}}(R) = t_{\mathcal{X}^{(1)}}(R/t_{\mathcal{X}}(R)) \in \mathcal{X}^{(1)}$. Esto implica que $\bigoplus_{\alpha \in A} R/t_{\mathcal{X}}(R), K \in \mathcal{X}^{(1)}$ y así, $M \in \mathcal{X}^{(1)}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$. ■

Corolario 2.135 Sea $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - pretors$. Entonces $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq t_{\mathcal{Y}}(R)$ si y sólo si $\mathcal{Y}^{(1)} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$.

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq t_{\mathcal{Y}}(R)$. Por el Teroema 2.134, tenemos que $\mathcal{Y}^{(1)} = \sigma(R/t_{\mathcal{Y}}(R))$ y $\mathcal{X}^{(1)} = \sigma(R/t_{\mathcal{X}}(R))$. Si $M \in \mathcal{Y}^{(1)}$, entonces existen

$$\bigoplus_{\alpha \in A} R/t_{\mathcal{Y}}(R) \to K \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to M \to K,$$

donde $K \in R - Mod$. Como por hipótesis $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq t_{\mathcal{Y}}(R)$, entonces existe un epimorfismo $R/t_{\mathcal{X}}(R) \to R/t_{\mathcal{Y}}(R) \to 0$, lo que implica que existe $\bigoplus_{\alpha \in A} R/t_{\mathcal{X}}(R) \to K \to 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{X}^{(1)}$, y así tenemos que $\mathcal{Y}^{(1)} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\mathcal{Y}^{(1)} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$. Por el Teorema 2.134, tenemos que

$$\mathcal{Y}^{(1)} = \{M/M' \mid M \in R - Mod \text{ y } t_{\mathcal{Y}}(M) \subseteq M'\}$$

y $$\mathcal{X}^{(1)} = \{M/M' \mid M \in R-Mod \text{ y } t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'\}.$$

Notemos que $R/t_{\mathcal{Y}}(R) \in \mathcal{Y}^{(1)}$, por lo que $R/t_{\mathcal{Y}}(R) \in \mathcal{X}^{(1)}$ por hipótesis. De esta manera, tenemos que $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq t_{\mathcal{Y}}(R)$. ■

Definición 2.136 Sea $\mathfrak{F} \in R-fil$ y $\mathcal{X} \in R-pretors$. Diremos que $\mathcal{X}$ es *Jansiano* si $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es Jansiano (ver definición B.3). □

Corolario 2.137 $\mathcal{X}^{(1)}$ es Jansiano para cada $\mathcal{X} \in R-pretors$. Más aún,

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}} = \{I \leqslant R \mid t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq I\}.$$

Demostración:
Recordemos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}} = \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{X}^{(1)}\}$. Sea $\mathfrak{G} = \{I \leqslant R \mid t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq I\}$. Probaremos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}} = \mathfrak{G}$.
($\subseteq$) Sea $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}}$. Entonces $R/I \in \mathcal{X}^{(1)}$. Por el Teorema 2.134, tenemos que

$$\mathcal{X}^{(1)} = \{M/M' \mid M \in R-Mod \text{ y } t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'\}$$

Entonces $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq I$. Por lo tanto, $I \in \mathfrak{G}$ y así, $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}} \subseteq \mathfrak{G}$.

($\supseteq$) Sea $I \in \mathfrak{G}$. Entonces $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq I$. Por el Teorema 2.134, tenemos que

$$\mathcal{X}^{(1)} = \{M/M' \mid M \in R-Mod \text{ y } t_{\mathcal{X}}(M) \subseteq M'\}$$

Entonces $R/I \in \mathcal{X}^{(1)}$. Por lo tanto, $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}}$ y así, $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}}$.

De aquí se concluye que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}} = \{I \leqslant R \mid t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq I\}$. Ahora, si $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de elementos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}}$, entonces $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq I_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Por lo tanto, $t_{\mathcal{X}}(R) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$. De esta manera, $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}}$. Se concluye que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}^{(1)}}$ es Jansiano y por la definición 2.136, $\mathcal{X}^{(1)}$ es Jansiano. ■

Definición 2.138 Definimos $\varphi : R-pretors \to R-tors$ como

$$\varphi(\mathcal{X}) = tor(\mathcal{X}),$$

donde $tor(\mathcal{X}) = \{M \in R-Mod \mid t_{\varepsilon(\mathcal{X})}(M) = M\}$. □

En [14], el autor menciona que $tor(\mathcal{X})$ coincide con la clase de torsión hereditaria generada por $\mathcal{X} \in R - pretors$. En ([25], VI.2.5, VI.3.3) se describe $tor(\mathcal{X})$ como

$$tor(\mathcal{X}) = \{M \in R{-}Mod \mid \exists\, 0 \neq N \in sub(M') \cap \mathcal{X} \text{ para cada } 0 \neq M' \in quot(M)\}.$$

Corolario 2.139 Sea $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - pretors$. Entonces

$$\varphi(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \varphi(\mathcal{X}) \cap \varphi(\mathcal{Y}).$$

Demostración:
Dado que $\varphi(\mathcal{X}) = tor(\mathcal{X})$, tenemos que $\varphi(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \subseteq \varphi(\mathcal{X}) \cap \varphi(\mathcal{Y})$.

Ahora, sea $M \in \varphi(\mathcal{X}) \cap \varphi(\mathcal{Y})$ y $0 \neq M' \in quot(M)$. Como $M \in \varphi(\mathcal{X})$, existe $0 \neq K \leqslant M'$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Como $M \in \varphi(\mathcal{Y})$ y en particular $\varphi(\mathcal{Y}) = tor(\mathcal{Y}) \in R{-}tors$, entonces $K \in \varphi(\mathcal{Y})$. Esto implica que existe $0 \neq K' \leqslant K$ tal que $K' \in \mathcal{Y}$, donde $K \in quot(K)$. Como $\mathcal{X} \in R - pretors$, entonces $K' \in \mathcal{X}$. Así, $K' \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y además, $K' \leqslant M'$. Por lo tanto, $M \in \varphi(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$. ∎

Corolario 2.140 Para cualquier $\mathcal{X} \in R - pretors$, $\varphi(\mathcal{X})^{\perp}$ es el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}$ en $R - pretors$.

Demostración:
Como $\varphi(\mathcal{X}) \cap \varphi(\mathcal{X})^{\perp} = 0$ y $\mathcal{X} \subseteq \varphi(\mathcal{X})$, tenemos que $\mathcal{X} \cap \varphi(\mathcal{X})^{\perp} = 0$. De esta manera, si existe $\mathcal{Y} \in R - pretors$ tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, entonces aplicando φ y por el corolario 2.139, tenemos que $\varphi(\mathcal{X}) \cap \varphi(\mathcal{Y}) = 0$. De esta manera, $\varphi(\mathcal{Y}) \subseteq \varphi(\mathcal{X})^{\perp}$ pues $R - tors$ es fuertemente pseudocomplementada. Por lo tanto, $\mathcal{Y} \subseteq \varphi(\mathcal{X})^{\perp}$, de donde se sigue que $\mathcal{X}^{\perp} = \varphi(\mathcal{X})^{\perp}$. ∎

El corolario anterior nos dice que $R - pretors$ es fuertemente pseudocomplementada. De esta manera, al no ser distributiva, es lo que $R - pretors$ hereda de $R - tors$. Para finalizar, tenemos una relación entre el pseudocomplemento y el suplemento derecho de una clase $\mathcal{X} \in R - pretors$.

Proposición 2.141 $\mathcal{X}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$ para cualquier clase $\mathcal{X} \in R - pretors$.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{X}^{\perp}$ y la sucesión exacta corta

$$0 \to t_{\mathcal{X}}(M) \to M \to M/t_{\mathcal{X}}(M) \to 0.$$

Notemos que $M/t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}^{(1)}$. Tenemos que $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}^{\perp}$. Como $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}$, entonces $t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}^{\perp} \wedge \mathcal{X} = 0$, por lo que $t_{\mathcal{X}}(M) = 0$. Así,
$M \cong M/0 \cong M/t_{\mathcal{X}}(M) \in \mathcal{X}^{(1)}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}^{(1)}$. ■

2.3.5. La clase $R - sext$

Definición 2.142 Llamaremos $R - sext$ a la clase de todas las clases de módulos cerradas bajo submódulos y extensiones exactas. □

Notemos que $R - sext = L_{\{\leqslant, ext\}}$ y $R - sext$ está parcialmente ordenada por la inclusión. La clase $R - sext$ fue introducida y estudiada por A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos en [1]. Los siguientes son resultados que describen su estructura reticular.

Proposición 2.143 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - sext$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - sext$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, ext\}$, por la observación 2.41 tenemos que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - sext$. ■

Definición 2.144 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos. Definimos

(i) $\mathcal{X}^0 = \{0\}$

(ii) $\mathcal{X}^1 = \mathcal{X}$

(iii) $\mathcal{X}^{n+1} = (\mathcal{X}^n)\mathcal{X}$ □

Teorema 2.145 Si $\mathcal{X} \in R - sub$, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n \in R - sext.$$

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - sub$. Probaremos que $\mathcal{X}^n \in R - sub\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$, $\mathcal{X}^0 = \{0\} \in R - sub$ trivialmente. Para $n = 1$, $\mathcal{X}^1 = \mathcal{X} \in R - sub$. Supongamos que $\mathcal{X}^k \in R - sub$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 1$. Sea $M \in \mathcal{X}^{k+1}$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M' \in \mathcal{X}$ y $M'' \in \mathcal{X}^k$. Como $N \leqslant M$, sea

$$0 \to M' \cap N \to N \to (M' + N)/M' \to 0$$

una sucesión exacta corta, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \cap N \arrow[r] \arrow[u, hook] & N \arrow[r] \arrow[u, hook] & (M'+N)/M' \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{X}, \mathcal{X}^k \in R - sub$ por hipótesis, tenemos que $L \cap N \in \mathcal{X}$ y $(L + N)/L \in \mathcal{X}^k$, lo que implica que $N \in \mathcal{X}^{k+1}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}^{k+1} \in R - sub$. Por el principio de inducción, tenemos que $\mathcal{X}^n \in R - sub$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la proposición 2.45, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n \in R - sub$. Por el lema 2.72, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ es cerrada bajo extensiones exactas. ■

Proposición 2.146 Si $\mathcal{H} \in R - sub$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X} \in R - sext$, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n \subseteq \mathcal{X}$$

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{H} \in R - sub$ y es tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$.
Probaremos que $\mathcal{H}^n \subseteq \mathcal{X}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.
Para $n = 0$, tenemos que $\mathcal{H}^0 = \{0\} \subseteq \mathcal{X}$. Para $n = 1$, tenemos que $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ por hipótesis. Supongamos que $\mathcal{H}^n \subseteq \mathcal{X}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Si $M \in \mathcal{H}^{n+1}$, entonces existe

$$0 \to K \to M \to L \to 0$$

una sucesión exacta corta tal que $K \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ y $L \in \mathcal{H}^n \subseteq \mathcal{X}$ por hipótesis. Como $\mathcal{X} \in R - sext$, entonces $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{H}^{n+1} \subseteq \mathcal{X}$. Por el principio de inducción, tenemos que $\mathcal{H}^n \subseteq \mathcal{X}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Si $M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n$, entonces $M \in \mathcal{H}^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Pero $\mathcal{H}^k \subseteq \mathcal{X}$, por lo que $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n \subseteq \mathcal{X}$. ■

Recordemos que
$$sext(\mathcal{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (sub(\mathcal{X}))^n$$
para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Corolario 2.147 Si $\mathcal{X}$ es una clase de $R-$módulos, entonces $sext(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - sext$.

Demostración:
Por el teorema 2.145, tenemos que $sext(\mathcal{X}) \in R-sext$. Es claro que $\mathcal{X} \subseteq sext(\mathcal{X})$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - sext$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Por la proposicón 2.47, $sub(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$. Así, de la proposición 2.146 se sigue que $sext(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$. ■

Teorema 2.148 $R - sext$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, ext\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R-sext$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - sext$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.149 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos en $R-sext$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = sext\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:
Por el corolario 2.147, $sext\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)\in R-sext$. Es claro que $X_\alpha \subseteq sext\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha\in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y}\in R-sext$ tal que $\mathcal{X}_\alpha\subseteq\mathcal{Y}$ para toda $\alpha\in A$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\subseteq\mathcal{Y}$ y por el corolario 2.147, tenemos que $sext\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)\subseteq\mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = sext\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha\right)$. ■

Teorema 2.150 $R-sext$ es fuertemente pseudocomplementada, donde cada $\mathcal{X}\in R-sext$ tiene un único pseudocomplemento en $R-sext$ que está dado por

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant,ext\}}} = \{M\in R-Mod \mid sub(M)\cap\mathcal{X} = \{0\}\}$$

Demostración:
Sea $\mathcal{W} = \{M\in R-Mod \mid sub(M)\cap\mathcal{X} = \{0\}\}$.

- Sea $M\in\mathcal{W}$ y $N\leqslant M$. Así, tenemos que $sub(N)\subseteq sub(M)$. De esta manera, $(sub(N)\cap\mathcal{X})\subseteq(sub(M)\cap\mathcal{X}) = \{0\}$. Por lo tanto, $N\in\mathcal{W}$.
  Por otro lado, supongamos que

  $$0\to K\to M\overset{\rho}{\to} L\to 0$$

  es una sucesión exacta corta tal que $K, L\in\mathcal{W}$. Supongamos que $M\notin\mathcal{W}$. Entonces existe $0\neq N\leqslant M$ tal que $N\in\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}\in R-sext$, tenemos que $N\cap K\in\mathcal{X}$. Además, $N\cap K\in sub(K)$, por lo que
  $N\cap K\in(sub(K)\cap\mathcal{X}) = \{0\}$. Como $L\cong M/K$, se sigue que $\rho|_N : N\to L$ es mono. De esta manera, $N\in sub(L)$ pero $N\in\mathcal{X}$, por lo que
  $N\in sub(L)\cap\mathcal{X} = \{0\}$. Entonces $N = 0$, lo cual es una contradicción, pues $N\neq 0$. Por lo tanto, $M\in\mathcal{W}$. Se concluye que $\mathcal{W}\in R-sext$.

- Sea $M \in \mathcal{X} \cap \mathcal{W}$. Dado que $M \in sub(M)$, entonces $M = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \cap \mathcal{W} = \{0\}$.
- Sea $\mathcal{Y} \in R - sext$ tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{0\}$. Sea $M \in \mathcal{Y}$. Dado que $M \in sub(M)$, se tiene que $M \in \mathcal{Y}$. De esta manera, $sub(M) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{X} = \{0\}$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{W}$ de donde se sigue que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{W}$. Por lo tanto, W es la mayor clase en $R - sext$ tal que $\mathcal{X} \cap W = 0$.

Por lo tanto, $\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant, ext\}}} = \mathcal{W}$. ■

2.3.6. El conjunto $R - nat$

En [7], J. Dauns introdujo las clases naturales como *clases saturadas*, sin embargo S. Page y Y. Zhou en [19] les llaman clases naturales. En esta sección, estudiaremos su estructura reticular.

Definición 2.151 Una clase de módulos es *clase natural* si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. Llamaremos $R - nat$ a la clase de todas las clases naturales. □

Notemos que $R - nat = L_{\{\leqslant, \oplus, E(\ )\}}$ y $R - nat$ está parcialmente ordenada por la inclusión. En [29], Y. Zhou se muestra el siguiente resultado importante acerca de la relación entre las clases naturales y los ideales del anillo.

Proposición 2.152 Existe una correspondencia inyectiva de $R - nat$ al conjunto potencia de la retícula de ideales de R.

Corolario 2.153 $R - nat$ es un conjunto.

Nuestro objetivo es describir a la retícula $R - nat$. Para ello, ocupamos cierta información.

Proposición 2.154 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - nat$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - nat.$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \oplus, E(\ )\}$, por la observación 2.41 tenemos que $\bigcap_{\alpha \in \lambda} \mathcal{X}_\alpha \in R - nat$. ■

Definición 2.155 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos. Definimos

$$nat(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid \exists\ 0 \neq N \in sub(M') \cap sub(\mathcal{X})\ \ \forall\ 0 \neq M' \in sub(M)\}.$$

Proposición 2.156 $nat(\mathcal{X}) \in R - nat$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $M \in nat(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $0 \neq K \leqslant N$. Como $M \in nat(\mathcal{X})$ y $K \in sub(M)$, entonces existe $0 \neq L \leqslant K$ tal que $L \in sub(\mathcal{X})$. Esto implica que $N \in nat(\mathcal{X})$.

Sea $\{M_i\}_{i \in I} \in nat(\mathcal{X})$ una familia de elementos de $nat(\mathcal{X})$, donde I es conjunto. Tomemos $0 \neq K \leqslant \bigoplus_{i \in I} M_i$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $K \cap M_{i_0} \neq 0$. Como $M_{i_0} \in nat(\mathcal{X})$ y $K \cap M_{i_0} \in sub(M)$, entonces existe $0 \neq L \leqslant K \cap M_{i_0}$ tal que $L \in sub(\mathcal{X})$. Esto implica que $\bigoplus_{i \in I} M_i \in nat(\mathcal{X})$.

Sea $M \in nat(\mathcal{X})$ y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Tomemos$0 \neq K \leqslant E(M)$. Como $M \trianglelefteq E(M)$, entonces $M \cap K \neq 0$. Como $M \in nat(\mathcal{X})$ y $M \cap K \in sub(M)$, entonces existe $0 \neq L \leqslant M \cap K$ tal que $L \in sub(\mathcal{X})$. Esto implica que
$E(M) \in nat(\mathcal{X})$. ■

Proposición 2.157 Si $\mathcal{X}$ es una clase de $R-$módulos, entonces $nat(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - nat$.

Demostración:
Por la proposición 2.156, tenemos que $nat(\mathcal{X}) \in R - nat$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Si $M = 0$, trivialmente $M \in nat(\mathcal{X})$. Si $M \neq 0$, entonces $M \in sub(M) \cap sub(\mathcal{X})$. Esto implica que $M \in nat(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \subseteq nat(\mathcal{X})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - nat$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Sea $0 \neq M \in nat(\mathcal{X})$. Entonces existe $0 \neq K \leqslant M$ tal que $K \in sub(\mathcal{X})$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, entonces $K \in sub(\mathcal{Y})$. De aquí se sigue que $M \in nat(\mathcal{Y})$. Por lo tanto, $nat(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$, de donde se sigue que$nat(\mathcal{X})$ es la menor clase de $R - nat$ que contiene a $\mathcal{X}$. ■

Corolario 2.158 Sea $\mathcal{X} \in R-nat$. Entonces $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas.

Demostración:

Sea $0 \to K \to M \to L \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $K, L \in \mathcal{X}$. Supongamos que $M \notin \mathcal{X}$. Entonces existe $0 \neq M' \in sub(M)$ tal que $sub(M') \cap sub(\mathcal{X}) = 0$. De esta manera, $M' \cap K = 0$ pues $K \in \mathcal{X} \subseteq sub(\mathcal{X})$. Así, tenemos que

$$0 \neq M' \cong M'/(M' \cap K) \cong (M'+K)/K \leqslant M/K \cong L \in sub(\mathcal{X}).$$

Esto implica que $L \notin \mathcal{X}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $M \in \mathcal{X}$. ■

Teorema 2.159 $R-nat$ es una retícula completa.

Demostración:

Si $A = \{\leqslant, \oplus, E(\ )\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R-ss$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R-nat$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 2.160 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia no vacía de elementos en $R-nat$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = nat\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:

Por la proposición 2.157, tenemos que

$$nat\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \in R-nat$$

Es claro que $X_\alpha \subseteq nat\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R-nat$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ y por la proposición 2.157, tenemos que $nat\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = nat\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$.■

Existe una relación entre clases naturales y pseudocomplementos fuertes de clases hereditarias. Para demostrar dicha relación, necesitamos los siguientes resultados.

Teorema 2.161 Sea $\mathcal{X} \in R-sub$. Entonces $\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} \in R-nat$

Demostración:
Por el ejemplo 2.31, $\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} \in R-sub$.

Ahora, tomemos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$. Probaremos que $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$.
Sea $K \leqslant \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Supongamos que $K \neq 0$. Para $0 \neq k \in K$, tomemos el menor entero n tal que $k = m_{\alpha_1} + m_{\alpha_2} + \cdots + m_{\alpha_n}$. Por la elección de k, notemos que

$$(0 : m_{\alpha_1}) = (0 : m_{\alpha_2}) = \cdots = (0 : m_{\alpha_1})$$

lo que implica que, en particular $(0 : k) = (0 : m_{\alpha_1})$. Entonces

$$Rk \cong R/(0 : k) = R/(0 : m_{\alpha_1}) \cong Rm_{\alpha_1} \leqslant M_{\alpha_1} \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$$

pero $Rk \in \mathcal{X}$, por lo que $Rk = 0$. Esto implica que $k = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $K = 0$ y así, $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$.

Ahora, tomemos $M \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$. Probaremos que $E(M) \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$.
Sea $K \leqslant E(M)$ tal que $K \in \mathcal{X}$. Entonces $K \cap M \in \mathcal{X}$. Como $M \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$, entonces $K \cap M = 0$. Como $M \trianglelefteq E(M)$, tenemos que $K = 0$. Por lo tanto, $E(M) \in \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$.■

Proposición 2.162 Sea $\mathcal{N} \in R-nat$. Entonces $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^{\perp_{\{\leqslant\}}})^{\perp_{\{\leqslant\}}}$

Demostración:
Sea $M \in (\mathcal{N}^{\perp_{\{\leqslant\}}})^{\perp_{\{\leqslant\}}}$. Entonces, para cada $0 \neq K \leqslant M$ existe $0 \neq L \leqslant K$ tal que $L \in \mathcal{N}$. Consideremos $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ la familia de todos los sumbódulos de M tales que $L_\alpha \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N} \in R-nat$, entonces $\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha \in \mathcal{N}$. Probaremos que $\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha \trianglelefteq M$.
Sea $T \leqslant M$ tal que $T \neq 0$. Entonces existe $0 \neq T' \leqslant T$ tal que $T' \in \mathcal{N}$. Por lo

tanto, $\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha \cap T \neq 0$. Así, $\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha \trianglelefteq M$ lo que implica que

$$E(M) = E\left(\bigoplus_{\alpha\in A} L_\alpha\right) \in \mathcal{N}$$

Por lo tanto, $M \in \mathcal{N}$. De esta manera, $(\mathcal{N}^{\perp_{\{\leqslant\}}})^{\perp_{\{\leqslant\}}} \subseteq \mathcal{N}$.

Por otro lado, como $R - sub$ es fuertemente pseudocomplementada, por el lema 2.35 se sigue que $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{N}^{\perp_{\{\leqslant\}}})^{\perp_{\{\leqslant\}}}$. ■

Teorema 2.163 $Skel(R - sub) = R - nat$

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - nat$. Por la proposición 2.162, $\mathcal{X} \in Skel(R - sub)$. Ahora, tomemos $\mathcal{X} \in R - sub$. Entones $\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} \in Skel(R - sub)$. Por el teorema 2.161, tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} \in R - nat$. ■

Gracias a un resultado previo que relaciona cierto tipo de clases con su esqueleto, obtenemos el siguiente

Teorema 2.164 $Skel(R - sext) = R - nat$

Demostración:
Por el corolario 2.158, tenemos que $R - nat \subseteq R - sext$. Por el teorema 2.163,

$$Skel(R - sub) = R - nat \subseteq R - sext \subseteq R - sub.$$

Por el teorema 2.37, tenemos que $Skel(R - sext) = Skel(R - sub) = R - nat$. ■

Corolario 2.165 Si $\mathcal{X} \in R - sext$, entonces $\mathcal{X}^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = nat(\mathcal{X})$. En particular, si $\mathcal{N} \in R - nat$, entonces $\mathcal{N}^{\perp_{sext}\perp_{sext}} = \mathcal{N}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - sext$. Por el teorema 2.164, tenemos que
$Skel(R - sext) = R - nat$. Por el teorema 2.40 concluimos que
$(\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant, ext\}}})^{\perp_{\{\leqslant, ext\}}} = nat(\mathcal{X})$. En particular, por el corolario 2.158, tenemos que $R - nat \subseteq R - sext$. Así, para $\mathcal{N} \in R - nat$, por el teorema 2.40 concluimos que $(\mathcal{N}^{\perp_{\{\leqslant, ext\}}})^{\perp_{\{\leqslant, ext\}}} = nat(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. ■

2.3.7. La clase $R - qext$

Definición 2.166 Llamaremos $R-qext$ a la clase de todas las clases de $R-$módulos cerradas bajo cocientes y extensiones exactas. $\square$

Notemos que $R - qext = L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}$ y $R - qext$ está parcialmente ordenada por la inclusión. La clase $R - qext$ fue introducida y estudiada por A. Alvarado, H. Rincón y J. Ríos en [1]. Los siguientes resultados son duales a los teoremas 2.145, 2.148 y 2.150 y al corolario 2.147; por ello sólo los enunciaremos.

Teorema 2.167 Si $\mathcal{X} \in R - quot$, entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{X}^n \in R - qext.$$

Corolario 2.168 Si $\mathcal{X}$ es una clase de $R-$módulos, entonces $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (quot(\mathcal{X}))^n$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - qext$.

Para cada clase $\mathcal{X}$ de $R-$módulos, denotaremos a $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (quot(\mathcal{X}))^n$ como $qext(\mathcal{X})$.

Teorema 2.169 $R - qext$ es una gran retícula completa, donde

$$\bigwedge_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \quad \text{y} \quad \bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = qext\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

para cualquier conjunto A y cualquier familia $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de elementos de $R - qext$.

Teorema 2.170 $R - qext$ es fuertemente pseudocomplementada, donde cada $\mathcal{Q} \in R - qext$ tiene un único pseudocomplemento en $R - qext$ que está dado por

$$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}} = \{M \in R - Mod \mid quot(M) \cap \mathcal{Q} = \{0\}\}$$

2.3.8. La clase $R - conat$

Definición 2.171 Definimos la clase $R - conat$ como el esqueleto de $R - quot$. Es decir, $R - conat = Skel(R - quot)$. A los elementos de $R - conat$ se les llamará *clases conaturales.* $\square$

Proposición 2.172 $\mathcal{Q} \in R - quot$ es conatural si y sólo si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{Q} \in R - quot$. Por el corolario 2.59 tenemos que

$$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{M \in R - Mod \mid quot(M) \cap \mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{0\}\}.$$

Por el lema 2.35 tenemos que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$. Por otro lado, como por hipótesis $\mathcal{Q} \in R - conat$, entonces existe $\mathcal{X} \in R - quot$ tal que $\mathcal{Q} = \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$. De esta manera, notemos que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$ implica $\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$.

Como $\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$ es el pseudocomplemento fuerte de $\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$, entonces

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} \cap \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = 0.$$

Dado que $\mathcal{X} \leqslant \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$ por el lema 2.35, tenemos que $\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} \cap \mathcal{X} = 0$ lo que implica que

$$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} \leqslant \mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \mathcal{Q}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}}$ con $\mathcal{Q} \in R - quot$. Como
$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} \in Skel(R - quot)$, entonces $\mathcal{Q}$ es el pseudocomplemento fuerte de
$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} \in R - quot$, es decir, $\mathcal{Q} \in R - conat$. $\blacksquare$

Proposición 2.173 $R - conat \subseteq R - qext$.

Demostración:
Dado que $R - conat = Skel(R - quot)$, sólo basta probar que si $\mathcal{X} \in R - conat$, entonces $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas.

Sea $\mathcal{X} \in R - conat$. Entonces existe $\mathcal{Q} \in R - quot$ tal que $\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \mathcal{X}$. Sea $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $M', M/M' \in \mathcal{X}$. Supongamos que $M \notin \mathcal{X}$. Entonces existe $0 \neq M/K \in quot(M)$ tal que $M/K \in \mathcal{Q}$. Como $\mathcal{Q} \in R - quot$, tenemos que $M/(K + M') \in quot(M) \cap \mathcal{Q}$ de donde se sigue que $M/(K + M') = 0$, pues $M/M' \in \mathcal{X}$. Así, $M = K + M'$, de donde se sigue que $M/K = (K + M')/K \cong M'/(K \cap M') \in quot(M') \in \mathcal{X}$. Entonces $M/K \in \mathcal{X}$, pero $K \in \mathcal{Q}$, por lo que $M/K \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Q}$. Esto implica que $M/K = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $M/K \neq 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{X}$. ■

Teorema 2.174 $R - conat = Skel(R - qext)$.

Demostración:
Por la proposición 2.173, tenemos que $R - conat \subseteq R - qext$. Por lo tanto,

$$Skel(R - quot) = R - conat \subseteq R - qext \subseteq R - quot.$$

Por el teorema 2.37, tenemos que $Skel(R - qext) = Skel(R - quot) = R - conat$. ■

Corolario 2.175 Si $\mathcal{X} \in R - qext$, entonces $\mathcal{X}^{\perp_{qext} \perp_{qext}} = conat(\mathcal{X})$, donde $conat(\mathcal{X})$ es la clase conatural más pequeña que contiene a $\mathcal{X}$. En particular, si $\mathcal{Q} \in R - conat$, entonces $\mathcal{Q}^{\perp_{qext} \perp_{qext}} = \mathcal{Q}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - qext$. Por el teorema 2.174, tenemos que
$Skel(R - qext) = R - conat$. Por el teorema 2.40 concluimos que
$(\mathcal{X}^{\perp_{qext}})^{\perp_{qext}} = conat(\mathcal{X})$. En particular, por la proposición 2.173, tenemos que $R - conat \subseteq R - qext$. Así, para $\mathcal{N} \in R - conat$, por el teorema 2.40 concluimos que $(\mathcal{N}^{\perp_{qext}})^{\perp_{qext}} = nat(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. ■

Referencia bibliográfica del capítulo:

Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J., *On Big Lattices of Classes of $R-$modules Defined by Closure Properties*, Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics (2010), p. 19-36.

Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J., *On the lattices of natural and conatural classes in $R - Mod$*, Comm. Algebra, **29**(2) (2001), p. 541-556.

Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics **13**, 2nd Ed., Springer-Verlag New York, 1992.

Crivei, I., Crivei, S., *Associated classes of modules*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, **54**(2) (2009), p. 23-32.

Dauns, J., *Direct Sums and Subdirect Products*, Methods in Module Theory, Pure and Applied Mathematics **140**, Marcel Dekker, 1992.

Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, 1994.

Dauns, J., Zhou, Y., *Classes of modules*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

Dickson, S., *A torsion theory for abelian categories*, Transactions of the American Mathematical Society **121**(1) (1966), p. 223-235.

Golan, J. S., *Linear topologies on a ring: an overwiev*, Pitman Research Notes in Mathematics **159**, Longman Scientific & Technical, 1877.

Golan, J. S., *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **29**, Longman Scientific and Technical, 1986.

Golan, J. S., *Localization of Noncommutative Rings*, Pure and Applied Mathematics **30**, Marcel Dekker, 1975.

Kashu, A. I., *Closed Classes of left A-Modules and Closed Sets of left Ideals of Ring A*, Matematicheskie Zametki, **5**(3) (1969), p. 381-390.

Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics **189**, Springer-Verlag New York, 1999.

Page, S., Zhou, Y., *On Direct Sums of Injective Modules and Chain Conditions*, Can. J. Math. **46**(3) (1994), p. 634-647.

Raggi, F., Rincón, H., Signoret, C., *On some classes of $R-$modules and congruences in $R-tors$*, Comm. Algebra, **27**(2) (1999), p. 889-901.

Raggi, F., Ríos, J., Wisbauer, R.,*The lattice structure of hereditary pretorsion classes*, Comm. Algebra, **29**(1) (2001), p. 131-140.

Raggi, F., Signoret, C., *Serre Subcategories of R-Mod*, Comm. Algebra, **24**(9) (1996), p. 2877-2886.

Raggi, F., Signoret, C., *Serre Subcategories and Linear Filters*, Kyungpook Mathematical Journal, **38**(2) (1998), p. 411-419.

Smith, P. F., *Modules with many direct summands*, Osaka J. Math. **27** (1990), p. 253-264.

Stenström, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.

Zhou, Y., *The lattice of natural classes of modules*, Comm. Algebra, **24**(5) (1996), p.1637-1648.

Capítulo 3

Algunos operadores duales de clases de módulos

En [24], P. Smith introdujo los operadores $H(\mathcal{X}), E(\mathcal{X})$ y $D(\mathcal{X})$. En la sección 2.2 describimos algunas propiedades sobre ellos. Como un aporte propio al tema de operadores de clases de módulos, en este capítulo consideraremos las definiciones y algunas propiedades *duales* de los operadores antes mencionados.

Definición 3.1 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos. Definimos

(i) $h(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid sub(M) \subseteq \mathcal{X}\}$

(ii) $e(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid N \in \mathcal{X} \text{ para todo } N \ll M\}$

(iii) $d(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } K \leqslant N, \quad N/K \in \mathcal{X}\}$

□

Lema 3.2 $h(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $M \in h(\mathcal{X})$. Entonces $N \in \mathcal{X}$ para todo $N \leqslant M$. En particular, $M \in \mathcal{X}$, por lo que $h(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. ■

Proposición 3.3 $h(\mathcal{X}) \subseteq d(\mathcal{X}) \subseteq e(\mathcal{X})$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

Demostración:
Sea $M \in h(\mathcal{X})$. Entonces $N \in \mathcal{X}$ para todo $N \leqslant M$. En particular, notemos que $0 \bigoplus M \in h(\mathcal{X})$ y $0 \leqslant N$. Dado que $N/0 \cong N \in \mathcal{X}$, tenemos que $M \in d(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $h(\mathcal{X}) \subseteq d(\mathcal{X})$.

Ahora, sea $M \in d(\mathcal{X})$ y $N \ll M$. Por hipótesis, existe $K \bigoplus M$ tal que $N/K \in \mathcal{X}$. Si $K' \leqslant M$ es tal que $M = K \oplus K'$, entonces $K \cap K' = 0$ y $K + K' = M$. De esta manera, $N + K' = M$ de donde se sigue que $K' = M$. Esto implica que $0 = K \cap K' = K \cap M = K$. Así, $N \cong N/0 = N/K \in \mathcal{X}$. De esta manera, $M \in e(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $d(\mathcal{X}) \subseteq e(\mathcal{X})$. ■

Para dualizar la proposición 2.16, necesitamos los siguientes resultados.

Definición 3.4 Sea $M \in R - Mod$ y $N \leqslant M$. Diremos que $L \leqslant M$ es un *suplemento de* N *en* M si L es mínimo con respecto a la propiedad $N + L = M$. □

A diferencia de que todo submódulo N de un módulo M tiene un M-complemento en M (como se mostró en el lema 2.15), no todo submódulo de M tiene un suplemento en M.

Proposición 3.5 Sea $M \in R - Mod$ y $N \leqslant M$. Entonces $L \leqslant M$ es un suplemento de N si y sólo si

$$N + L = M \text{ y } N \cap L \ll L$$

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que L es un suplemento de N. Sea $K \leqslant L$ tal que $K + (L \cap N) = L$. Entonces

$$M = L + N = K + (L \cap N) + N = K + N$$

pero L es el mínimo con la propiedad $M = N + L$, por lo que $L = K$. De esta manera, $N \cap L \ll L$.

($\Leftarrow$) Supogamos que $N + L = M$ y $N \cap L \ll L$. Sea $K \subseteq L$ tal que $K + N = M$. Entonces

$$L = M \cap L = (K + N) \cap L \overset{*}{=} K + (N \cap L),$$

donde la igualdad (*) está dada por la ley modular. Pero $N \cap L \ll L$, por lo que $K = L$. De esta manera, L es mínimo con la propiedad $L + N = M$ y así, L es un suplemento de N. ■

Proposición 3.6 Si $L \leqslant M$ es un suplemento de N entonces $N \cap L \ll M$.

Demostración:
Supongamos que L es un suplemento de N. Por la proposición anterior, $N \cap L \ll L$. Sea $K \leqslant M$ tal que $K + (N \cap L) = M$. Entonces

$$L = M \cap L = (K + (N \cap L)) \cap L \overset{*}{=} (K \cap L) + (N \cap L),$$

donde la igualdad (*) está dada por la ley modular. Pero $N \cap L \ll L$, por lo que $L = K \cap L$ y así, $L \leqslant K$. Como $(N \cap L) \leqslant L$, entonces $(N \cap L) \leqslant K$. De esta manera, $M = K + (N \cap L) = K$ y por lo tanto, $N \cap L \ll M$. ■

Definición 3.7 Sea $M \in R-Mod$. Diremos que M es *suplementado* si todos sus submódulos tienen un suplemento en M. Llamaremos **Sup** a la clase de todos los módulos suplementados. □

La siguiente es la equivalente dual de la proposición 2.16.

Proposición 3.8 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos tal que $\mathcal{X} \subseteq$ **Sup**. Si $\mathcal{X} \in R - qext$, entonces

$$\mathcal{X} \cap e(\mathcal{X}) = h(\mathcal{X})$$

Demostración:
($\supseteq$) Por el lema 3.2 y la proposición 3.3, tenemos que $h(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \cap e(\mathcal{X})$.

($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \cap e(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$ cualquiera. Probaremos que $N \in \mathcal{X}$.
Como $\mathcal{X} \subseteq$ **Sup**, entonces N tiene un suplemento en M, es decir, existe $L \leqslant M$ tal que $L + N = M$ y $N \cap L \ll M$. Como $\mathcal{X} \in R-quot$, entonces $M/L \in \mathcal{X}$. Como $M \in e(\mathcal{X})$, entonces $N \cap L \in \mathcal{X}$. De esta manera, la sucesión

$$0 \to N \cap L \to N \to M/L \to 0$$

es una sucesión exacta corta, pues $N/(N \cap L) \cong (L+N)/L = M/L$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, tenemos que $N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in h(\mathcal{X})$, y así $\mathcal{X} \cap e(\mathcal{X}) \subseteq h(\mathcal{X})$. ■

Para dualizar la proposición 2.17, necesitamos los siguientes resultados.

Definición 3.9 Sea $M \in R-Mod$. Diremos que M es *superfluo* si es superfluo en algún módulo $K \in R-Mod$. Denotaremos como $\mathcal{S}_{\ll}$ a la clase de todos los $R-$módulos superfluos. □

Lema 3.10 Sean $M, N, K \in R-Mod$ tales que $N \leqslant M \leqslant K$.
Si $N \ll M$, entonces $N \ll K$.

Demostración:

Sean $M, N, K \in R-Mod$ tales que $N \leqslant M \leqslant K$ y supongamos que $N \ll M$. Sea $L \leqslant K$ tal que $N + L = K$. Entonces

$$M = M \cap K = M \cap (N+L) = N + (M \cap L)$$

por modularidad. Como $N \ll M$, entonces $M = M \cap L$ lo que implica que $M \subseteq L$. De esta manera, tenemos que

$$K = N + L = (N \cap M) + L = (N+L) \cap (M+L) = K \cap (M+L) = K \cap L$$

lo que implica que $K \leqslant L$. Así, $K = L$ y por lo tanto, $N \ll K$. ■

Lema 3.11 Sea $N \leqslant M \in R-Mod$ tal que $N \ll M$. Si $N \leqslant K$ con $K \bigoplus M$, entonces $N \ll K$.

Demostración:

Sea $N \leqslant M \in R-Mod$ tal que $N \ll M$. Supongamos que $N \leqslant K$ con $K \bigoplus M$. Sea $L \leqslant K$ tal que $N + L = K$. Notemos que

$$K = K \cap M = (N+L) \cap M = N + (M \cap L)$$

por modularidad. Como $K \bigoplus M$, entonces existe $K' \leqslant M$ tal que $M = K + K'$ y $K \cap K' = 0$. De esta manera,

$$M = K + K' = (N + (M \cap L)) + K' = N + ((M \cap L) + K')$$

y como $N \ll M$, tenemos que

$$M = (M \cap L) + K' = M \cap (L + K')$$

lo que implica que $M \leqslant (L + K')$. Por lo tanto, $M = L + K'$ y dado que $0 = K \cap K' = L \cap K'$, tenemos que

$$M = L \oplus K' = K \oplus K'.$$

Esto implica que $L = K$ y por lo tanto, $N \ll K$. ■

Teorema 3.12 Sea $M \in R - mod$. Entonces M es superfluo si y sólo si M es superfluo en su cápsula inyectiva.

Demostración:

($\Leftarrow$) Por definición, $M \in \mathcal{S}_{\ll}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $M \in \mathcal{S}_{\ll}$. Entonces existe K tal que $M \ll K$. Notemos que $M \ll K \leqslant E(K)$. Por el lema 3.10, tenemos que $M \ll E(K)$. Como $E(M)$ es inyectivo y $E(M) \leqslant E(K)$, entonces $E(M) \bigoplus E(K)$. Por el lema 3.11, tenemos que $M \ll E(M)$. ■

Lema 3.13 Sean $M, M_1, M_2 \in R - Mod$.

(i) Si $N, K \leqslant M$ tales que $N, K \ll M$, entonces $N + K \ll M$

(ii) Sean $K_1 \leqslant M_1 \leqslant (M_1 \bigoplus M_2)$ y $K_2 \leqslant M_2 \leqslant (M_1 \bigoplus M_2)$. Si $K_1 \ll M_1$ y $K_2 \ll M_2$, entonces $(K_1 \oplus K_2) \ll (M_1 \oplus M_2)$

Demostración:

(i) Sean $N, K \leqslant M$ y supongamos que $N \ll M$ y $K \ll M$. Sea $L \leqslant M$ tal que $(N + K) + L = M$. Notemos que

$$M = (N + K) + L = N + (K + L)$$

Como $N \ll M$, entonces $K + L = M$. Como $K \ll M$, entonces $L = M$. Por lo tanto, $(N + K) \ll M$.

(*ii*) Sean $K_1 \leqslant M_1 \leqslant (M_1 \bigoplus M_2)$ y $K_2 \leqslant M_2 \leqslant (M_1 \bigoplus M_2)$. Supongamos que $K_1 \ll M_1$ y $K_2 \ll M_2$. Por el lema 3.10, tenemos que $K_1 \ll (M_1 \oplus M_2)$ y $K_2 \ll (M_1 \oplus M_2)$. Por (*i*), concluímos que $(K_1 \oplus K_2) \ll (M_1 \oplus M_2)$. ■

Teorema 3.14 $\mathcal{S}_{\ll} \in L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{S}_{\ll}$ y $N \leqslant M$. Probaremos que $N \in \mathcal{S}_{\ll}$. Sea $L \leqslant E(M)$ tal que $N + L = E(M)$. Notemos que

$$E(M) = N + L \subseteq M + L \subseteq E(M)$$

por lo que $E(M) = M + L$ y como $M \ll E(M)$, entonces $L = E(M)$. Por lo tanto, $N \ll E(M)$.

Sea $M \in \mathcal{S}_{\ll}$ y $N \leqslant M$. Probaremos que $M/N \in \mathcal{S}_{\ll}$. Sea $L/N \leqslant E(M)/N$ tal que $M/N + L/N = E(M)/N$. Notemos que

$$E(M)/N = M/N + L/N \subseteq (M + L)/N \subseteq E(M)/N,$$

por lo que $E(M)/N = (M + L)/N$, lo que implica que

$$E(M) = E(M) + N = (M + L) + N = M + L.$$

Como $M \ll E(M)$, entonces $L = E(M)$ y así $L/N = E(M)/N$. Por lo tanto, $M/N \ll E(M)/N$.

Sea $M_1, M_2 \in \mathcal{S}_{\ll}$. Probaremos que $M_1 \oplus M_2 \in \mathcal{S}_{\ll}$. Por el teorema 3.12, tenemos que $M_1 \ll E(M_1)$ y $M_2 \ll E(M_2)$. Por el lema 3.13, concluimos que
$(M_1 \bigoplus M_2) \ll (E(M_1) \bigoplus E(M_2))$. ■

La siguiente es la equivalente dual de la proposición 2.17.

Proposición 3.15 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces

(*i*) $h(\mathcal{X}), e(\mathcal{X}), d(\mathcal{X}) \in R - sub$

(ii) si $\mathcal{X} \in R - quot$ entonces $h(\mathcal{X}) \in R - quot$

Demostración:
$(i)(1)$ Sea $M \in h(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Como $N \leqslant M$, entonces $sub(N) \subseteq sub(M) \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto, $N \in h(\mathcal{X})$.

(2) Sea $M \in e(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Sea $K \leqslant N$ tal que $K \ll N$. Por el lema 3.10, tenemos que $K \ll M$. Como $M \in e(\mathcal{X})$, entonces $K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $N \in e(\mathcal{X})$.

(3) Sea $M \in d(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \leqslant N$. Como $M \in d(\mathcal{X})$, entonces existe $L \bigoplus M$ tal que $L \leqslant K$ y $K/L \in \mathcal{X}$. De esta manera, existe $L' \leqslant M$ tal que $L + L' = M$ y $L \bigcap L' = 0$. Notemos que

$$K = M \bigcap K = (L + L') \bigcap K = L + (L' \bigcap K)$$

y
$$L \bigcap (L' \bigcap K) = (L \bigcap L') \bigcap K = 0 \bigcap K = 0$$

Se sigue que $L \bigoplus K$. Un proceso similar nos muestra que $L \bigoplus N$. Por lo tanto, $K \in d(\mathcal{X})$.

(ii) Supongamos que $\mathcal{X} \in R - quot$. Sea $M \in h(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Tomemos $K \leqslant M$ tal que $K/N \leqslant M/N$. Como $M \in h(\mathcal{X})$, tenemos que $K \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} \in R - quot$, concluimos que $K/N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M/N \in h(\mathcal{X})$. ■

La siguiente es la correspondiente dual de la proposición 2.18.

Proposición 3.16 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces $\mathcal{X} \in R - sub$ si y sólo si $h(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\mathcal{X} \in R - sub$.

- $(\subseteq)$ Sea $M \in h(\mathcal{X})$. Como $M \leqslant M$ y $M \in h(\mathcal{X})$, entonces $M \in \mathcal{X}$.
- $(\supseteq)$ Sea $M \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} \in R - sub$, entonces $sub(M) \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in h(\mathcal{X})$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $h(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Por la proposición 3.15, $\mathcal{X} \in R - sub$. ■

La siguiente es la equivalente dual de la proposición 2.19.

Proposición 3.17 Sea $\mathcal{X}$ una clase de $R-$módulos cerrada bajo extensiones exactas. Entonces

(*i*) $h(\mathcal{X})\bigoplus h(\mathcal{X}) = (h(\mathcal{X}))^2 = h(\mathcal{X})$

(*ii*) $e(\mathcal{X})\bigoplus e(\mathcal{X}) = (h(\mathcal{X}))(e(\mathcal{X})) = e(\mathcal{X})$

(*iii*) $h(\mathcal{X})\bigoplus d(\mathcal{X}) = d(\mathcal{X})$

Demostración:
(*i*) Por la proposición 2.10, tenemos las siguientes contenciones

$$h(\mathcal{X}) \subseteq h(\mathcal{X})\bigoplus h(\mathcal{X}) \subseteq (h(\mathcal{X}))^2.$$

Así, debemos probar que $(h(\mathcal{X}))^2 \subseteq h(\mathcal{X})$. Sea $M \in (h(\mathcal{X}))^2$. Entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ donde $N, M/N \in h(\mathcal{X})$. Sea $K \leqslant M$. Entonces $K \cap N \in \mathcal{X}$ y $K/(K \cap N) \cong (K + N)/N \in \mathcal{X}$. Así, tenemos que

$$0 \to N \cap K \to K \to K/(K \cap N) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in h(\mathcal{X})$. Hemos probado que

$$h(\mathcal{X})\bigoplus h(\mathcal{X}) = (h(\mathcal{X}))^2 = h(\mathcal{X})$$

(*ii*) Por las proposiciones 2.10 y 3.3, tenemos las siguientes contenciones

$$e(\mathcal{X}) \subseteq h(\mathcal{X})\bigoplus e(\mathcal{X}) \subseteq (h(\mathcal{X}))(e(\mathcal{X})).$$

Así, debemos probar $(h(\mathcal{X}))(e(\mathcal{X})) \subseteq e(\mathcal{X})$. Sea $M \in (h(\mathcal{X}))(e(\mathcal{X}))$ y $K \ll M$. Entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ donde $N \in h(\mathcal{X})$ y $M/N \in e(\mathcal{X})$. Notemos que $N \cap K \in \mathcal{X}$. Además,

$K/(N \cap K) \cong (N+K)/N \ll M/N$, pues si $L/N \leqslant M/N$ tal que $(N+K)/N + L/N = M/N$, entonces

$$M/N = (N+K)/N + L/N \subseteq ((N+K)+L)/N \subseteq M/N$$

lo que implica que $M = (N+K)+L$ y como $K \ll M$, entonces $M = N + L = L$. Por lo tanto, $K/(N \cap K) \in \mathcal{X}$ y así, tenemos que

$$0 \to N \bigcap K \to K \to K/(N \bigcap K) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in e(\mathcal{X})$.

Por otro lado, por la proposición 2.10, tenemos que

$$e(\mathcal{X}) \subseteq e(\mathcal{X}) \oplus e(\mathcal{X}).$$

Así, debemos probar que $e(\mathcal{X}) \oplus e(\mathcal{X}) \subseteq e(\mathcal{X})$. Sea $M \in e(\mathcal{X}) \bigoplus e(\mathcal{X})$ y $K \ll M$. Entonces existen $M_1, M_2 \in e(\mathcal{X})$ tales que $M = M_1 \bigoplus M_2$. Dado que $K \ll M$, tenemos que

$$(M_1 + K)/M_1 \ll M/M_1 \cong M_2$$

lo que implica que $K/(M_1 \bigcap K) \cong (M_1 + K)/M_1 \in \mathcal{X}$.

Notemos que $M_1 \bigcap K \ll M$ pues si $L \leqslant M$ tal que $(M_1 \bigcap K) + L = M$, entonces

$$M = (M_1 \bigcap K) + L \leqslant K + L \leqslant M$$

lo que implica que $M = K + L$ y como $K \ll M$, entonces $L = M$. Por el lema 3.11, $M_1 \bigcap K \ll M_1$ y así, $M_1 \bigcap K \in \mathcal{X}$. De esta manera, tenemos que

$$0 \to M_1 \bigcap K \to K \to K/(M_1 \bigcap K) \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in e(\mathcal{X})$ y así, $e(\mathcal{X}) = e(\mathcal{X}) \bigoplus e(\mathcal{X})$.

Hemos probado que

$$e(\mathcal{X})\bigoplus e(\mathcal{X}) = (h(\mathcal{X}))(e(\mathcal{X})) = e(\mathcal{X})$$

(iii) Por las proposiciones 2.10 y 3.3, tenemos las siguientes contenciones

$$d(\mathcal{X}) \subseteq h(\mathcal{X})\bigoplus d(\mathcal{X}).$$

Así, debemos probar que $h(\mathcal{X})\bigoplus d(\mathcal{X}) \subseteq d(\mathcal{X})$. Sea $M \in h(\mathcal{X})\bigoplus d(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Existen $M_1 \in h(\mathcal{X})$ y $M_2 \in d(\mathcal{X})$ tales que $M = M_1 \bigoplus M_2$. De esta manera,

$$N = (N \cap M_1)\bigoplus(N \cap M_2)$$

Así, $N \cap M_1 \in \mathcal{X}$ pues $M_1 \in h(\mathcal{X})$. Como $M_2 \in d(\mathcal{X})$, existe $K \oplus M_2$ tal que $(N \cap M_2)/K \in \mathcal{X}$. De esta manera, tenemos que

$$0 \to (N \cap M_2)/K \to N/K \to N \cap M_1 \to 0$$

es una sucesión exacta corta y como por hipótesis, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, se concluye que $N/K \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in d(\mathcal{X})$. ■

Corolario 3.18 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas, entonces $h(\mathcal{X})$ también lo es.

Demostración:

Supongamos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones exactas. Por la proposición 3.17, $h(\mathcal{X})^2 = h(\mathcal{X})$. Por el corolario 2.7, $h(\mathcal{X})$ es cerrada bajo extensiones exactas. ■

Referencia bibliográfica del capítulo:

Amini, A., Amini, B., *On Strongly Superfluous Submodules*, Comm. Algebra, **40**(8) (2012), p. 2906-2919.

Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics **13**, 2nd Ed., Springer-Verlag New York, 1992.

Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, 1994.

Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics **189**, Springer-Verlag New York, 1999.

Leonard, W. W., *Small modules*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), p. 527-531.

Smith, P. F., *Modules with many direct summands*, Osaka J. Math. **27** (1990), p. 253-264.

Stenström, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.

Capítulo 4

La gran retícula completa $R - ad$

En [27], C. Walker y E. Walker introdujeron el concepto de *clase aditiva* para estudiar la relación entre ciertas clases de Serre y algunos conjuntos de ideales del anillo. De esta manera, los autores utilizaron las clases aditivas como una puerta para describir clases de torsión hereditaria, sin estudiar la clase de todas las clases aditivas a fondo. Como un aporte propio al tema de las clases aditivas, en este capítulo estudiaremos la estructura reticular de la clase de todas las clases aditivas y algunas relaciones entre ella y el conjunto $R - fil$.

4.1. La clase $R - ad$

Definición 4.1 Una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *clase aditiva* si es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas finitas. Llamaremos $R - ad$ a la clase de todas las clases aditivas. ▫

Ejemplo 4.2 Consideremos la clase $\mathcal{S}_{\ll}$ como en la definición 3.9. Por el teorema 3.14, tenemos que $\mathcal{S}_{\ll} \in R - ad$.
Un anillo R es *max izquierdo* si cada $R-$módulo $M \neq 0$ tiene un submódulo máximo. En [3], A. Amini y B. Amini prueban que R es anillo max izquierdo si y sólo si $\mathcal{S}_{\ll}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias. De esta manera, si R no es anillo max izquierdo, entonces $\mathcal{S}_{\ll}$ no es una clase de pretorsión hereditaria. Notemos que $\mathbb{Z} \ll \mathbb{Q}$, y como $\mathbb{Z}$ no es max izquierdo, tenemos que la clase $\mathcal{S}_{\ll}$ de

todos los $\mathbb{Z}-$módulos superfluos no es una clase de pretorsión hereditaria.
Un anillo R es *hereditario izquierdo* si cada ideal izquierdo de R es proyectivo. En [18], W. W. Leonard prueba que si R es hereditario izquierdo, entonces $\mathcal{S}_{\ll}$ es una clase de Serre. $\square$

Ejemplo 4.3 Sea

$$R - fgssimp = \{M \in R - Mod \mid M \in R - ssimp \text{ y } M \text{ es finitamente generado}\}$$

la clase de todos los módulos semisimples finitamente generados. Es fácil ver que $R - fgssimp \in R - op$. Dado que los módulos en $R - fgssimp$ son sumas finitas de simples, se tiene que $R - fgssimp \in R - ad$.
Notemos que $R - fgssimp$ no es cerrado bajo sumas directas arbitrarias, pues $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})} \notin R - fgssimp$.
Por otro lado, consideremos la sucesión

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Tenemos que es una sucesión exacta corta. Notemos que $\mathbb{Z}_4 \notin R - fgssimp$ pero $\mathbb{Z}_2 \in R - fgssimp$. $\square$

Notemos que, en general,

$$R - ss \subsetneq R - ad \subsetneq R - op$$

Además, $R - ad = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$ y $R - ad$ está parcialmente ordenada por la inclusión. Dado que $R - ss$ y $R - op$ tienen estructura reticular, lo más natural es preguntarse si $R - ad$ también tiene estructura reticular.

Lema 4.4 $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas finitas para cada $\mathcal{X} \in R - ad$.

Demostración:
Sea $M_1, M_2 \in \mathcal{X}$. Entonces $M_1 \oplus M_2 \in \mathcal{X}$. De esta manera,

$$M_1 + M_2 = \left((M_1 \bigoplus M_2)/L\right) \in \mathcal{X}$$

para algun $L \leqslant M_1 \oplus M_2$. Por lo tanto, $M_1 + M_2 \in \mathcal{X}$. ■

Proposición 4.5 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - ad$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - ad.$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus^n\}$, por la observación 2.41 tenemos que $\bigcap\limits_{\alpha \in \lambda} \mathcal{X}_\alpha \in R - ad$. ■

De aquí en adelante, para probar que una clase $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas finitas, solamente haremos la prueba para el caso con dos sumandos. Esto debido a que la prueba para el caso con n sumandos se hace por inducción.

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Recordemos que, de la definición 2.25, tenemos que

$$ad(\mathcal{X}) = subquot(dfsum(\mathcal{X})) = subquot\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$$

Teorema 4.6 $ad(\mathcal{X}) \in R - ad$ para cualquier clase $\mathcal{X}$.

Demostración:
(i) Por definición, $ad(\mathcal{X}) \in R - op$.

(ii) Sea $M_1, M_2 \in ad(\mathcal{X})$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que existen epimorfismos

$$\bigoplus_{i=1}^{n_1} K_{1i} \to L_1 \to 0 \quad \text{y} \quad \bigoplus_{j=1}^{n_2} K_{2j} \to L_2 \to 0$$

y monomorfismos

$$0 \to M_1 \to L_1 \quad \text{y} \quad 0 \to M_2 \to L_2,$$

respectivamente, donde $K_{1i}, K_{2j} \in \mathcal{X}$ para toda $i = 1, \ldots, n_1$ y para toda $j = 1, \ldots, n_2$. De esta manera, existe un monomorfismo $0 \to M_1 \bigoplus M_2 \to L_1 \bigoplus L_2$ y un epimorfismo

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} K_{1i}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} K_{2j}\right) \to L_1 \bigoplus L_2 \to 0.$$

Por lo tanto, $M_1 \bigoplus M_2 \in ad(\mathcal{X})$. ■

Para $M \in R - Mod$ definimos

$$ad(M) = subquot(dfsum(M))$$

Notemos que $ad(M) \subseteq ad(\mathcal{X})$ si $M \in \mathcal{X}$.

Proposición 4.7 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $ad(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - ad$.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{X}$. Notemos que, para $n = 1$, existen $\bigoplus_{i=1}^n M \to M \to 0$ y $0 \to M \to M$, lo que implica que $M \in ad(\mathcal{X})$. De esta manera, $\mathcal{X} \subseteq ad(\mathcal{X})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{A} \in R - ad$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. Si $M \in ad(\mathcal{X})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existen $\bigoplus_{i=1}^n N_i \to K \to 0$ y $0 \to M \to K$, donde $N_i \in \mathcal{X}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \in R - ad$, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^n N_i \in \mathcal{A}$, lo que implica que $K \in \mathcal{A}$. De esta manera, tenemos que $M \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $ad(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A}$ para toda $\mathcal{A} \in R - ad$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$. ■

Teorema 4.8 $R - ad$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus^n\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - ad$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - ad$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 4.9 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia no vacía de elementos en $R - ad$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = ad\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:
Por el teorema 4.6, tenemos que $ad\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \in R - ad$. Es claro que

$\mathcal{X}_\alpha \subseteq ad\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - ad$ tal que

$\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ y por la proposición 4.7, tenemos que $ad\left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = ad\left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$. ■

Hasta el momento, no se ha podido probar que $R - ad$ es distributiva, así como no se ha dado un ejemplo que diga lo contrario.

A continuación, mostramos algunos resultados relacionados con el operador $dfsum$.

Proposición 4.10 Si $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus^n\}}$ y $\mathcal{Y}$ es una clase de módulos cualquiera, entonces

$$dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$$

Demostración:
Sea $M \in dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$, donde $M_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
Esto implica que $M \in dfsum(\mathcal{X}) \cap dfsum(\mathcal{Y})$. Dado que $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus^n\}}$, entonces $dfsum(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ de donde se sigue que $M \in \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$. ■

Corolario 4.11 Si $\mathcal{X} \in R - ad$ y $\mathcal{Y}$ es una clase de módulos cualquiera, entonces

$$dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$$

Demostración:
$(\subseteq)$ Dado que $R - ad \subseteq L_{\{\oplus^n\}}$, se sigue de la proposición 4.10.

$(\supseteq)$ Sea $M \in \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$. Entonces $M \in \mathcal{X}$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$, donde $M_i \in \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \in R - op$, tenemos que $M_i \in \mathcal{X}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. De esta manera, $M_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, lo que implica que $M \in dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$. ■

Proposición 4.12 Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in L_{\{\oplus^n\}}$, entonces

$$dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$$

Demostración:
($\subseteq$) Tenemos que $dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^{(n)}$, donde $(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$. De esta manera, sea $M \in dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \left(\bigoplus_{j=1}^{l_1} M_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{l_2} M_k \right)$$

donde $M_j \in \mathcal{X}$ para toda $j = 1, \ldots, l_1$, $M_k \in \mathcal{Y}$ para toda $k = 1, \ldots, l_2$, $0 \leqslant l_1 \leqslant n$ y $0 \leqslant l_2 \leqslant n$ tales que $l_1 + l_2 = n$. Como $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in L_{\{\oplus^n\}}$, tenemos que $\bigoplus_{j=1}^{l_1} M_j \in \mathcal{X}$ y $\bigoplus_{k=1}^{l_2} M_k \in \mathcal{Y}$. Esto implica que $M \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. Entonces $M = M_1 \oplus M_2$ donde $M_1 \in \mathcal{X}$ y $M_2 \in \mathcal{Y}$. Entonces $M_1, M_2 \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, por lo que $M \in dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$. ■

La siguiente proposición muestra otra equivalencia del supremo de dos clases aditivas.

Lema 4.13 Si $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus^n\}}$, entonces $\mathcal{X}^{(n)} = \mathcal{X}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:
($\subseteq$) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $M \in \mathcal{X}^{(n)}$. Entonces $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, donde $M_i \in \mathcal{X}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus^n\}}$, entonces $M \in \mathcal{X}$.

($\supseteq$) Se sigue del corolario 2.11. ■

Proposición 4.14 Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - ad$, entonces

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$$

Demostración:
Por la proposición 4.12, tenemos que

$$subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) = subquot(dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})) = ad(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \in R - ad$$

Notemos que, por la proposición 2.10,

$$\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \subseteq subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$$

y así, $\mathcal{X} \subseteq subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$ y $\mathcal{Y} \subseteq subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Z} \in R - ad$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$. Entonces, por el lema 4.13, se tiene que $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}$. Por la proposición 2.64, tenemos que $subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Z}$. Concluimos que $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = subquot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. ∎

4.2. La clase $R - quotdfsum$

Recordemos que de la definición 2.21, tenemos

$$quot(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid \text{existe } K \to M \to 0, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}.$$

Definición 4.15 Llamaremos $R - quotdfsum$ a la clase de todas las clases de módulos cerradas bajo cocientes y sumas directas finitas. □

Notemos que

$$R - ad \subseteq R - quotdfsum \subseteq R - quot$$

Además, $R - quotdfsum = L_{\{\twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$ y $R - quotdfsum$ está parcialmente ordenada por la inclusión. Dado que $R - ad$ y $R - quot$ tienen estructura reticular, lo más natural es preguntarse si $R - quotdfsum$ también tiene estructura reticular.

Proposición 4.16 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - quotdfsum$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - quotdfsum.$$

Demostración:
Si $A = \{\twoheadrightarrow, \oplus^n\}$, por la observación 2.41 tenemos que $\bigcap_{\alpha \in \lambda} \mathcal{X}_\alpha \in R - quotdfsum$. ∎

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Recordemos que, de la definición 2.25, tenemos que

$$quotdfsum(\mathcal{X}) = quot(dfsum(\mathcal{X})) = quot\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$$

Además, si $M \in \mathcal{X}$, entonces $quot(M) \subseteq quot(\mathcal{X})$.

Teorema 4.17 $quotdfsum(\mathcal{X}) \in R - quotdfsum$ para cualquier clase $\mathcal{X}$.

Demostración:
(i) Por definición, $quotdfsum(\mathcal{X}) \in R - quot$.

(ii) Sea $M_1, M_2 \in quotdfsum(\mathcal{X})$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que existen epimorfismos

$$\bigoplus_{i=1}^{n_1} K_i \to M_1 \to 0 \quad \text{y} \quad \bigoplus_{j=1}^{n_2} L_j \to M_2 \to 0,$$

donde $K_i, L_j \in \mathcal{X}$ para toda $i = 1, \ldots, n_1$ y para toda $j = 1, \ldots, n_2$. De esta manera, existe un epimorfismo

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} K_i\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} L_j\right) \to M_1 \bigoplus M_2 \to 0$$

Por lo tanto, $M_1 \bigoplus M_2 \in quotdfsum(\mathcal{X})$. ■

Para $M \in R - Mod$ definimos

$$quotdfsum(M) = quot(dfsum(M))$$

Notemos que $quotdfsum(M) \subseteq quotdfsum(\mathcal{X})$ si $M \in \mathcal{X}$.

Proposición 4.18 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $quotdfsum(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - quotdfsum$.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{X}$. Notemos que, para $n = 1$, existe $\bigoplus_{i=1}^{n} M \to M \to 0$, lo que implica que $M \in quotdfsum(\mathcal{X})$. De esta manera, $\mathcal{X} \subseteq quotdfsum(\mathcal{X})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Q} \in R - quotdfsum$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Q}$. Si $M \in quotdfsum(\mathcal{X})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i \to M \to 0$, donde $K_i \in \mathcal{X}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \in R - quotdfsum$, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{Q}$, lo que implica que $M \in \mathcal{Q}$. Por lo tanto, $quotdfsum(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Q}$ para toda $\mathcal{Q} \in R - quotdfsum$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Q}$. ■

Teorema 4.19 $R - quotdfsum$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\twoheadrightarrow, \oplus^n\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - quotdfsum$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - quotdfsum$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 4.20 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia no vacía de elementos en $R - quotdfsum$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = quotdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:
Por la proposición 4.18, tenemos que $quotdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \in R - quotdfsum$. Es claro que $X_\alpha \subseteq quotdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - quotdfsum$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ y por la proposición 4.18, tenemos que $quotdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = quotdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ ■

Hasta el momento, no se ha podido probar que $R - quotdfsum$ es distributiva, así como no se ha dado un ejemplo que diga lo contrario.

A continuación, mostraremos algunos resultados relacionados con el operador $quotdfsum$.

Proposición 4.21 Si $\mathcal{X} \in R - quotdfsum$ y $\mathcal{Y}$ es una clase de módulos cualquiera, entonces

$$dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$$

Demostración:
($\subseteq$) Se sigue de la proposición 4.10.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$. Entonces $M \in \mathcal{X}$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, donde $M_i \in \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \in R - quot$, tenemos que $M_i \in \mathcal{X}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. De esta manera, $M_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, lo que implica que $M \in dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$. ■

Proposición 4.22 Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - quotdfsum$, entonces

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = quot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$$

Demostración:
Por la proposición 4.12, tenemos que

$$quot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) = quot(dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})) = quotdfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \in R - quotdfsum$$

Notemos que, por la proposición 2.10,

$$\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \subseteq quot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$$

y así, $\mathcal{X} \subseteq quot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$ y $\mathcal{Y} \subseteq quot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Z} \in R - quotdfsum$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$. Entonces, por el lema 4.13, se tiene que $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}$. Por la proposición 2.55, tenemos que $quot(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Z}$. Concluimos que $\mathcal{X} \bigvee \mathcal{Y} = quot(\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y})$. ■

4.3. La clase $R - subdfsum$

Definición 4.23 Llamaremos $R - subdfsum$ a la clase de todas las clases de $R-$módulos cerrada bajo submódulos y sumas directas finitas. □

Notemos que

$$R - ad \subseteq R - subdfsum \subseteq R - her$$

Además, $R - subdfsum = L_{\{\leqslant, \oplus^n\}}$ y $R - subdfsum$ está parcialmente ordenada por la inclusión. Dado que $R - ad$ tiene estructura reticular, lo más natural es preguntare si $R - subdfsum$ también tiene estructura reticular.

Proposición 4.24 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - subdfsum$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \in R - subdfsum.$$

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \oplus^n\}$, por la observación 2.41 tenemos que $\bigcap_{\alpha \in \lambda} \mathcal{X}_\alpha \in R - subdfsum.$ ■

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Recordemos que, de la definición 2.25, tenemos que

$$subdfsum(\mathcal{X}) = sub(dfsum(\mathcal{X})) = sub\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$$

Además, si $M \in \mathcal{X}$, entonces $sub(M) \subseteq sub(\mathcal{X})$.

Teorema 4.25 $subdfsum(\mathcal{X}) \in R - subdfsum$ para cualquier clase $\mathcal{X}$.

Demostración:
(i) Por definición, $subdfsum(\mathcal{X}) \in R - sub$.

(ii) Sea $M_1, M_2 \in subdfsum(\mathcal{X})$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que existen monomorfismos

$$0 \to M_1 \to \bigoplus_{i=1}^{n_1} K_i \quad \text{y} \quad 0 \to M_1 \to \bigoplus_{j=1}^{n_2} L_j,$$

donde $K_i, L_j \in \mathcal{X}$ para toda $i = 1, \ldots, n_1$ y para toda $j = 1, \ldots, n_2$. De esta manera, existe un monomorfismo

$$0 \to M_1 \bigoplus M_2 \to \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} K_i\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} L_j\right)$$

Por lo tanto, $M_1 \bigoplus M_2 \in subdfsum(\mathcal{X})$. ■

Para $M \in R - Mod$ definimos

$$subdfsum(M) = sub(dfsum(M))$$

Notemos que $subdfsum(M) \subseteq subdfsum(\mathcal{X})$ si $M \in \mathcal{X}$.

Proposición 4.26 Si $\mathcal{X}$ es una clase de módulos, entonces $subdfsum(\mathcal{X})$ es la clase generada por $\mathcal{X}$ en $R - subdfsum$.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{X}$. Notemos que, para $n = 1$, existe $0 \to M \to \bigoplus_{i=1}^{n} M$, lo que implica que $M \in subdfsum(\mathcal{X})$. De esta manera, $\mathcal{X} \subseteq subdfsum(\mathcal{X})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{S} \in R - subdfsum$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$. Si $M \in subdfsum(\mathcal{X})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $0 \to M \to \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$, donde $K_i \in \mathcal{X}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \in R - subdfsum$, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{S}$, lo que implica que $M \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, $subdfsum(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{S}$ para toda $\mathcal{S} \in R - subdfsum$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$. ■

Teorema 4.27 $R - subdfsum$ es una gran retícula completa.

Demostración:
Si $A = \{\leqslant, \oplus^n\}$, por el corolario 2.43 se concluye que $R - subdfsum$ es una gran retícula completa. ■

Por el teorema anterior, debe existir el supremo para cada familia no vacía de elementos en $R - subdfsum$. El siguiente teorema describe dicho supremo.

Teorema 4.28 Sea A un conjunto y $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia no vacía de elementos en $R - subdfsum$. Entonces

$$\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = subdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$$

Demostración:
Por la proposición 4.26, tenemos que $subdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \in R - subdfsum$. Es claro que $X_\alpha \subseteq subdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe

$\mathcal{Y} \in R - subdfsum$ tal que $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $\alpha \in A$. Entonces $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathcal{Y}$ y por la proposición 4.26, tenemos que $subdfsum\left(\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right) \subseteq \mathcal{Y}$. Concluimos que $\bigvee\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = subdfsum\left(\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$ ∎

Hasta el momento, no se ha podido probar que $R - subdfsum$ es distributiva, así como no se ha dado un ejemplo que diga lo contrario.

A continuación, mostraremos algunos resultados relacionados con el operador $subdfsum$.

Proposición 4.29 Si $\mathcal{X} \in R - subdfsum$ y $\mathcal{Y}$ es una clase de módulos cualquiera, entonces

$$dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$$

Demostración:
($\subseteq$) Se sigue de la proposición 4.10.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \cap dfsum(\mathcal{Y})$. Entonces $M \in \mathcal{X}$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$, donde $M_i \in \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{X} \in R - sub$, tenemos que $M_i \in \mathcal{X}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. De esta manera, $M_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, lo que implica que $M \in dfsum(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$. ∎

Proposición 4.30 Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - subdfsum$, entonces

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$$

Demostración:
Por la proposición 4.12, tenemos que

$$sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) = sub(dfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})) = subdfsum(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \in R - subdfsum$$

Notemos que, por la proposición 2.10,

$$\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \subseteq sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$$

y así, $\mathcal{X} \subseteq sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$ y $\mathcal{Y} \subseteq sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{Z} \in R - subdfsum$ tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$. Entonces, por el lema 4.13, se tiene que $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}$. Por la proposición 2.47, tenemos que $sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Z}$. Concluimos que $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = sub(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. ■

4.4. Relaciones entre $R - ad$ y $R - fil$

Como vimos en la sección 2.3.4, y en detalle en el Apéndice B, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de pretorsión hereditaria, $R - pretors$, y el conjunto de todos los filtros lineales, $R - fil$.

Dado que $R - pretors \subseteq R - ad$, es natural preguntarse si existe una correspondencia entre la clase de las clases aditivas y el conjunto de todos los filtros lineales. En esta sección, daremos respuesta a dicha pregunta.

Proposición 4.31 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{X}\}$$

es un filtro lineal.

Demostración:

(*i*) Probaremos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es cerrado bajo intersecciones. Sea $I_1, I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. Entonces $R/I_1, R/I_2 \in \mathcal{X}$. Es fácil ver que $R/(I_1 \cap I_2) \leqslant R/I_1 \oplus R/I_2$. Dado que $\mathcal{X}$ es una clase aditiva, entonces $R/I_1 \oplus R/I_2 \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $R/(I_1 \cap I_2) \in \mathcal{X}$ lo que implica que $I_1 \cap I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

(*ii*) Probaremos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es cerrado bajo super ideales. Sea $I, J \leqslant R$ ideales tales que $I \leqslant J$ e $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. Entonces $R/I \in \mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{X}$ es una clase aditiva, entonces $(R/I)/(J/I) \in \mathcal{X}$. Como $R/J \cong (R/I)/(J/I)$, se sigue que $R/J \in \mathcal{X}$ lo que implica que $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

(*iii*) Probaremos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es cerrado bajo trasladados. Sea $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ y $r \in R$. Entonces $R/I \in \mathcal{X}$. Notemos que

$$R/(I : r) = R/(0 : (r + I)) \cong R(r + I) = (Rr + I)/I \leqslant R/I.$$

De esto se sigue que $R/(I : r) \in \mathcal{X}$ lo que implica que $(I : r) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ para cada $r \in R$. ■

Sea $R - fil$ el conjunto de todos los filtros lineales (izquierdos) de R. De esta manera, definimos la correspondencia

$$\begin{array}{rccl} \phi : & R - ad & \to & R - fil \\ & \mathcal{X} & \mapsto & \mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{X}\} \end{array}$$

Observación 4.32 Notemos que ϕ es creciente. En efecto, si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, entonces

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{X}\} \subseteq \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{Y}\} = \mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$$

lo que implica que $\phi(\mathcal{X}) \subseteq \phi(\mathcal{Y})$. □

Además, en [27] Walker y Walker definen la correspondencia

$$\begin{array}{rccl} \psi : & R - fil & \to & R - ad \\ & \mathfrak{F} & \mapsto & \mathcal{X}_{\mathfrak{F}} = \{M \in R - Mod \mid (0 : m) \in \mathfrak{F} \text{ para toda } m \in M\} \end{array}$$

y obtienen que $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}}$ es una clase de pretorsión hereditaria. Por lo tanto, $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}}$ es una clase aditiva.

Por el teorema B.5, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las clases de pretorsión hereditaria y el conjunto de todos los filtros lineales de ideales izquierdos de R. Por lo tanto, ϕ es sobre pues $R - pretors \subseteq R - ad$. Debido a esto, en general puede haber muchas clases aditivas que, bajo ϕ, tienen como imagen el mismo filtro lineal.

Definición 4.33 Sea $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - ad$. Diremos que $\mathcal{X}$ *está relacionado con* $\mathcal{Y}$ *respecto a* ϕ si y sólo si $\phi(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y})$.
Denotaremos a dicha relación como $\mathcal{X} \sim_{\phi} \mathcal{Y}$. □

Notemos que $\sim_{\phi}$ es una relación de equivalencia. Denotaremos a la clase de equivalencia de $\mathcal{X} \in R - ad$ respecto a $\sim_{\phi}$ como $[\mathcal{X}]_{\sim_{\phi}}$.

Lema 4.34 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces $A(\mathcal{X}) \in R - ad$, donde

$$A(\mathcal{X}) = \{M \in \mathcal{X} \mid \exists\ K \in \mathcal{X} \text{ tal que } M \leqslant K \text{ y } K \text{ es finitamente generado}\}$$

Demostración:

(i) Probaremos que $A(\mathcal{X})$ es cerrada bajo submódulos. Sea $M \in A(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $K \in \mathcal{X}$ tal que $M \leqslant K$ y K es finitamente generado. Como $N \leqslant M$, entonces $N \leqslant K$. Esto implica que $N \in A(\mathcal{X})$.

(ii) Probaremos que $A(\mathcal{X})$ es cerrada bajo cocientes. Sea $M \in A(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $K \in \mathcal{X}$ tal que $M \leqslant K$ y K es finitamente generado. Así, $M/N \leqslant K/N$, $K/N \in \mathcal{X}$ y K/N es finitamente generado. Por lo tanto, $M/N \in A(\mathcal{X})$.

(iii) Probaremos que $A(\mathcal{X})$ es cerrada bajo sumas directas finitas. Sean $M_1, M_2 \in A(\mathcal{X})$. Entonces existen $K_1, K_2 \in \mathcal{X}$ tales que $M_1 \leqslant K_1$ y $M_2 \leqslant K_2$ donde K_1 y K_2 son finitamente generados. Si denotamos $K = K_1 \oplus K_2$, entonces $M_1 \oplus M_2 \leqslant K$, $K \in \mathcal{X}$ y K es finitamente generado. Por lo tanto, $M_1 \oplus M_2 \in A(\mathcal{X})$. ■

Lema 4.35 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces $C(\mathcal{X}) \in R - ad$, donde

$$C(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid Rm \in \mathcal{X} \text{ para toda } m \in M\}$$

Demostración:

(i) Probarmeos que $C(\mathcal{X})$ es cerrada bajo submódulos. Sea $M \in C(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces $Rn \in \mathcal{X}$ pues $n \in N \leqslant M$. Esto implica que $N \in C(\mathcal{X})$.

(ii) Probaremos que $C(\mathcal{X})$ es cerrada bajo cocientes. Sea $M \in C(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Como $Rm \in \mathcal{X}$ para toda $m \in M$, entonces

$$R(m + N) = Rm + N/N \cong Rm/(Rm \cap N) \in \mathcal{X}$$

para toda $m \in M$. Así, $R(m + N) \in \mathcal{X}$ para toda $m + N \in M/N$. Por lo tanto, $M/N \in C(\mathcal{X})$.

(iii) Probaremos que $C(\mathcal{X})$ es cerrada bajo sumas directas finitas. Sea $M_1, M_2 \in C(\mathcal{X})$. Como $Rm_1, Rm_2 \in \mathcal{X}$ para toda $m_1 \in M_1$ y para toda $m_2 \in M_2$, entonces

$$R((m_1, m_2)) \leqslant Rm_1 \oplus Rm_2 \in \mathcal{X}$$

para toda $m_1 \in M_1$ y para toda $m_2 \in M_2$. Así, $R((m_1, m_2)) \in \mathcal{X}$ para toda $(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2$. Por lo tanto, $M_1 \oplus M_2 \in C(\mathcal{X})$. ■

Proposición 4.36 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces $A(\mathcal{X}) \in [X]_{\sim_\phi}$ y $C(\mathcal{X}) \in [X]_{\sim_\phi}$.

Demostración:

(i) Por el lema 4.34, podemos considerar $\phi(A(\mathcal{X}))$. Probaremos que

$$\phi(A(\mathcal{X})) = \phi(\mathcal{X})$$

Si $M \in A(\mathcal{X})$, entonces existe $K \in \mathcal{X}$ tal que $M \leqslant K$ y K es finitamente generado. Como $\mathcal{X} \in R-ad$, entonces $M \in \mathcal{X}$, lo que implica que $A(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. Por la observación 4.32, tenemos que $\phi(A(\mathcal{X})) \subseteq \phi(\mathcal{X})$.

Por otro lado, si $I \in \phi(\mathcal{X})$, entonces $R/I \in \mathcal{X}$. Como R/I es cíclico, entonces R/I es finitamente generado, por lo que $R/I \in A(\mathcal{X})$. Entonces $I \in \phi(A(\mathcal{X}))$. Por lo tanto, $\phi(\mathcal{X}) \subseteq \phi(A(\mathcal{X}))$.

(ii) Por el lema 4.35, podemos considerar $\phi(C(\mathcal{X}))$. Probaremos que

$$\phi(C(\mathcal{X})) = \phi(\mathcal{X})$$

Si $M \in \mathcal{X}$, entonces $Rm \in \mathcal{X}$ para toda $m \in M$, por lo que $M \in C(\mathcal{X})$. Así, $\mathcal{X} \subseteq C(\mathcal{X})$. Por la observación 4.32, tenemos que $\phi(\mathcal{X}) \subseteq \phi(C(\mathcal{X}))$.

Por otro lado, si $I \in \phi(C(\mathcal{X}))$, entonces $R/I \in C(\mathcal{X})$. De esta manera, $R(r + I) \in \mathcal{X}$ para todo $r + I \in R/I$. Como R/I es finitamente generado, entonces existen $r_1 + I, r_2 + I, \ldots, r_k + I \in R/I$ tales que $R/I = \sum_{i=1}^{k} R(r_i + I)$. Como $\mathcal{X} \in R - ad$, entonces $R/I \in \mathcal{X}$, lo que implica que $I \in \phi(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $\phi(C(\mathcal{X})) \subseteq \phi(\mathcal{X})$. ■

Teorema 4.37 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces

$$[\mathcal{X}]_{\sim_\phi} = \{\mathcal{Y} \in R - ad \mid A(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq C(\mathcal{X})\} = [A(\mathcal{X}), C(\mathcal{X})]$$

donde

$$A(\mathcal{X}) = \{M \in \mathcal{X} \mid \exists\ K \in \mathcal{X} \text{ tal que } M \leqslant K \text{ y } K \text{ es finitamente generado}\}$$

y

$$C(\mathcal{X}) = \{M \in R - Mod \mid Rm \in \mathcal{X} \text{ para toda } m \in M\}$$

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Probaremos que $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi} \subseteq [A(\mathcal{X}), C(\mathcal{X})]$.

Sea $\mathcal{Y} \in R - ad$ tal que $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$. Consideremos $M \in A(\mathcal{X})$. Entonces existe $K \in \mathcal{X}$ tal que $M \leqslant K$ donde K es finitamente generado. Entonces K tiene n generadores, digamos $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ donde $k_j \in K$ para toda $j = 1, 2, \ldots$ De esta manera, $K = \sum_{j=1}^{n} Rk_j$. Como todo módulo cíclico se puede ver como cociente del anillo con un ideal, entonces $K \cong \sum_{j=1}^{n} R/(I_j)$. Como $K \in \mathcal{X}$, entonces $R/(I_j) \in \mathcal{X}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, lo que implica que $I_j \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \phi(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y}) = \mathfrak{F}_{\mathcal{Y}}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, $R/(I_j) \in \mathcal{Y}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, y como $\mathcal{Y} \in R - ad$, entonces $K \cong \sum_{j=1}^{n} R/(I_j) \in \mathcal{Y}$. Así, $M \in A(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $A(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$.

Por otro lado, si $N \in \mathcal{Y}$, entonces $Rn \in \mathcal{Y}$ para toda $n \in N$. Entonces $N \in C(\mathcal{Y})$, lo que implica que $\mathcal{Y} \subseteq C(\mathcal{Y})$. Como $\phi(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y})$, tenemos que

$$\begin{aligned} C(\mathcal{Y}) &= \{N \in R - Mod \mid Rn \in \mathcal{Y} \text{ para toda } n \in N\} \\ &= \{N \in R - Mod \mid R/(0:n) \in \mathcal{Y} \text{ para toda } n \in N\} \\ &= \{N \in R - Mod \mid (0:n) \in \phi(\mathcal{Y}) \text{ para toda } n \in N\} \\ &= \{N \in R - Mod \mid (0:n) \in \phi(\mathcal{X}) \text{ para toda } n \in N\} \\ &= \{N \in R - Mod \mid Rn \in \mathcal{X} \text{ para toda } n \in N\} \\ &= C(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{Y} \subseteq C(\mathcal{X})$. Concluimos que $A(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq C(\mathcal{X})$ para cualquier $\mathcal{Y} \in R - ad$ tal que $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$.

Ahora, probaremos que $[A(\mathcal{X}), C(\mathcal{X})] \subseteq [\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$.

Sea $\mathcal{Y} \in [A(\mathcal{X}), C(\mathcal{X})]$. Por la observación 4.32, tenemos que

$$\phi(A(\mathcal{X})) \subseteq \phi(\mathcal{Y}) \subseteq \phi(C(\mathcal{X}))$$

Sólo debemos probar que $\phi(C(\mathcal{X})) \subseteq \phi(A(\mathcal{X}))$. Por la proposición 4.36, tenemos que

$$\phi(\mathcal{X}) = \phi(C(\mathcal{X})) \subseteq \phi(A(\mathcal{X})) = \phi(\mathcal{X})$$

lo que implica que $\phi(A(\mathcal{X})) = \phi(C(\mathcal{X}))$, es decir, $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]_{\sim}$. Concluimos que $[A(\mathcal{X}), C(\mathcal{X})] \subseteq [\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$ ■

El teorema anterior detalla la composición de cada clase de equivalencia de clases aditivas (que llamaremos *fibra*) relacionada con cada filtro lineal. De esta manera, la correspondencia entre el conjunto de todos los filtros lineales y la clase de las clases aditivas, no es biyectiva pero si sobreyectiva, pues a cada filtro lineal le corresponde una fibra de clases aditivas.

4.5. Clases aditivas completas y aditivas acotadas

Como anteriormente vimos, $R - pretors \subseteq R - ad$. En esta sección, definiremos unas clases aditivas particulares que nos darán una correspondencia directa con la retícula de $R - pretors$.

Definición 4.38 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Diremos que $\mathcal{X}$ es *completa* si para cualquier $M \in \mathcal{X}$ y cualquier conjunto I tal que $M_i \cong M$ para toda $i \in I$, entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{X}$. Denotaremos como *R-adco* a la clase de todas las clases aditivas completas. ◻

Proposición 4.39 Si R es conmutativo, entonces $\mathcal{X} \in R - ad$ es completa si y sólo si $K \otimes M \in \mathcal{X}$ para todo $K \in R - mod$ y para todo $M \in \mathcal{X}$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{X} \in R - ad$ es completa con R conmutativo. Notemos que si I es un conjunto, $M \in \mathcal{X}$ y $R_i \cong R$ para todo $i \in I$, entonces

$$\left(\bigoplus_{i \in I} R_i \right) \otimes M \cong \bigoplus_{i \in I} (R_i \otimes M) \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{X}$$

donde $M_i \cong M \otimes R_i \cong M \otimes R \cong M$. Como todo módulo es cociente de un libre, entonces para cualquier $K \in R - Mod$, $K \otimes M$ es cociente de $(\bigoplus_{i \in I} R_i) \otimes M \in \mathcal{X}$ para algún conjunto I. Como $\mathcal{X} \in R - ad$, tenemos que $K \otimes M \in \mathcal{X}$ para toda $K \in R - Mod$ y para toda $M \in \mathcal{X}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $K \otimes M \in \mathcal{X}$ para todo $K \in R - Mod$ y para todo $M \in \mathcal{X}$, con R conmutativo. Si $M \in \mathcal{X}$ y J es un conjunto tal que $M_j \cong M$ y $R_j \cong R$, entonces $\bigoplus_{j \in J} M_j \cong \bigoplus_{j \in J} (R \otimes M_j) \cong (\bigoplus_{j \in J} R_j) \otimes M \in \mathcal{X}$ por hipótesis. Esto implica que $\bigoplus_{j \in J} M_j \in \mathcal{X}$, de donde se sigue que $\mathcal{X}$ es completa. ■

Proposición 4.40 $R - pretors \subseteq R - adco$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - pretors$. Entonces $\mathcal{X} \in R - ad$. Sea $M \in \mathcal{X}$ e I un conjunto tal que $M_i \cong M$. Como $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus\}}$, entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{X}$ por lo tanto, $\mathcal{X} \in R - adco$. ■

Por la proposición 4.40, tenemos que $R - pretors \subseteq R - adco \subseteq R - ad$.

Definición 4.41 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

$$adco(\mathcal{X}) = subquot(dfsum(cdsum(cyc(\mathcal{X}))))$$

Notemos que

$adco(\mathcal{X})$

$$= \left\{ N \in R - Mod \;\middle|\; \exists \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\bigoplus_{J_i} M_i^h\right) & \longrightarrow K \longrightarrow 0 \\ & \uparrow \\ & N \\ & \uparrow \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{donde } M_i \in cyc(\mathcal{X}), \\ M_i^h \cong M_i \ \forall\ h \in J_i, \\ J_i \text{ conjunto}, \\ n \in \mathbb{N} \\ i = 1, \ldots, n. \end{array} \right\}$$

Lema 4.42 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces $cyc(\mathcal{X}) = cyc(adco(\mathcal{X}))$ y $adco(\mathcal{X}) \in R - adco$.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Es claro que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(adco(\mathcal{X}))$.
Probaremos que $adco(\mathcal{X}) \in R - adco$. Por definición, $adco(\mathcal{X}) \in R - op$.
Ahora, consideremos $N_1, N_2 \in adco(\mathcal{X})$. De esta manera, tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{s_1}\left(\bigoplus_{J_i} M_i^h\right) & \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0 \\ & \uparrow \\ & N_1 \\ & \uparrow \\ & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{l=1}^{s_2}\left(\bigoplus_{\lambda_l} M_l^t\right) & \longrightarrow K_2 \longrightarrow 0 \\ & \uparrow \\ & N_2 \\ & \uparrow \\ & 0 \end{array}$$

donde $M_i^h \cong M_i \ \forall \ h \in J_i$, $M_l^t \cong M_l \ \forall \ t \in \lambda_l$, $M_i, M_l \in cyc(\mathcal{X})$, J_i y λ_l conjuntos, $i = 1, \ldots, s_1$ y $l = 1, \ldots, s_2$. Por lo tanto, existe $0 \to N_1 \oplus N_2 \to K_1 \oplus K_2$ y así, por la Propiedad Universal del Producto Directo, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \left(\bigoplus_{i=1}^{s_1}\left(\bigoplus_{J_i} M_i^h\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{l=1}^{s_2}\left(\bigoplus_{\lambda_l} M_l^t\right)\right) \arrow[dl] \arrow[d, "\exists!\ \varphi"] \arrow[dr] & \\ K_1 & K_1 \oplus K_2 \arrow[l] \arrow[r] & K_2 \end{tikzcd}$$

donde φ es epimorfismo. Por lo tanto, $N_1 \oplus N_2 \in adco(\mathcal{X})$.
Por otro lado, si $N \in adco(\mathcal{X})$ y A es un conjunto tal que $N_\alpha \cong N$ para toda $\alpha \in A$, entonces tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r] & K_\alpha \arrow[r] & 0 \\ & N_\alpha \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $M_\alpha \cong \bigoplus_{i=1}^{s}\left(\bigoplus_{J_i} M_i^h\right)$, $M_i^h \cong M_i \ \forall \ h \in J_i$, $M_i \in cyc(\mathcal{X})$, J_i conjunto y $i = 1, \ldots, s$. Dado que

$$\bigoplus_{a\in A} M_\alpha = \bigoplus_{a\in A}\left(\bigoplus_{i=1}^{s}\left(\bigoplus_{J_i} M_i^h\right)\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{s}\left(\bigoplus_{a\in A}\left(\bigoplus_{J_i} M_i^h\right)\right)$$

entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{a\in A} M_\alpha \arrow[r] & \bigoplus_{a\in A} K_\alpha \arrow[r] & 0 \\ & \bigoplus_{a\in A} N_\alpha \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $K_\alpha \cong K$ para cada $\alpha \in A$. Del diagrama anterior, se sigue que
$\bigoplus_{\alpha \in A} N \in adco(\mathcal{X})$. ■

El operador *adco* aplicado a una clase $\mathcal{X}$ no siempre contiene a $\mathcal{X}$. La siguiente proposición muestra que la clase $R - fgssimp$ está contenida en $adco(R - fgssimp)$.

Proposición 4.43 $R - fgssimp \subseteq adco(R - fgssimp)$ para cualquier anillo R.

Demostración:
Sea $N \in R - fgssimp$. Entonces N es semisimple y finitamente generado. De esta manera, N tiene k generadores, digamos $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ donde $n_i \in N$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k$. Por lo tanto, $N = \sum_{i=1}^{k} Rn_i$ donde
$Rn_i \in cyc(R - fgssimp) = cyc(adco(R - fgssimp))$ por el lema 4.42.
Entonces $Rn_i \in adco(R - fgssimp)$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k$.
De esta manera, $N = \sum_{i=1}^{k} Rn \in adco(R - fgssimp)$. ■

Definición 4.44 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Diremos que $\mathcal{X}$ es *acotada* si para toda $\mathcal{Y} \in R - ad$ tal que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$, entonces $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Denotaremos como *R-adac* a la clase de todas las clases aditivas acotadas. □

En [27], Walker y Walker definen una *clase aditiva acotada* como la clase aditiva completa que está contenida en cada clase aditiva completa con los mismos módulos cíclicos. Sin embargo, nosotros decidimos definir una clase aditiva acotada como en la definición 4.44. Más adelante, mostraremos la diferencia entre ambas definiciones.

Proposición 4.45 Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - adac$ tales que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R - adac$ tales que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. Por la definición 4.44, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. ■

Definición 4.46 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

$$adac(\mathcal{X}) = subquot(dfsum(cyc(\mathcal{X}))) \qquad \square$$

Notemos que

$$adac(\mathcal{X}) = \left\{ N \in R - Mod \;\middle|\; \exists \begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\ & N \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad \begin{array}{c} \text{donde } M_i \in cyc(\mathcal{X}), \\ n \in \mathbb{N}, \\ \forall\ i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

Lema 4.47 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces $cyc(\mathcal{X}) = cyc(adac(\mathcal{X}))$ y $adac(\mathcal{X}) \in R - adac$.

Demostración:

Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Es claro que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(adac(\mathcal{X}))$.

Probaremos que $adac(\mathcal{X}) \in R - adac$. Por definición, $adac(\mathcal{X}) \in R - op$.

Ahora, consideremos $N_1, N_2 \in adac(\mathcal{X})$. De esta manera, tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^{n_1} M_i \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & 0 \\ & N_1 \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bigoplus_{j=1}^{n_2} M_j \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & 0 \\ & N_2 \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $M_i, M_j \in cyc(\mathcal{X})$ para toda $i = 1, 2, \dots, n_1$ y para toda $j = 1, 2, \dots, n_2$. Por lo tanto, existe $0 \to N_1 \oplus N_2 \to K_1 \oplus K_2$ y así, por la Propiedad Universal del Producto Directo, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} M_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} M_j\right) \arrow[dl] \arrow[d, "\exists!\ \varphi"] \arrow[dr] & \\ K_1 & K_1 \oplus K_2 \arrow[l] \arrow[r] & K_2 \end{tikzcd}$$

donde φ es epimorfismo. Por lo tanto, $N_1 \oplus N_2 \in adac(\mathcal{X})$.
Por otro lado, supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R - ad$ tal que $cyc(adac(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{Y})$.
Si $N \in adac(\mathcal{X})$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\ & N \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $M_i \in cyc(\mathcal{X})$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Como

$$cyc(\mathcal{X}) = cyc(adac(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{Y})$$

entonces $M_i \in \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y} \in R - ad$, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{Y}$, de donde se sigue que $N \in \mathcal{Y}$. ■

Notemos que, por la definición 4.44 y el lema 4.47, $adac(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ para cualquier clase $\mathcal{X} \in R - ad$. La siguiente proposición muestra una clase aditiva para la cual se cumple la igualdad.

Proposición 4.48 $R - fgssimp = adac(R - fgssimp)$ para cualquier anillo R.

Demostración:
Dado que $adac(R-fgssimp) \subseteq R-fgssimp$, sólo basta probar la otra contención. Sea $N \in R - fgssimp$. Entonces N es semisimple y finitamente generado. De esta manera, N tiene k generadores, digamos $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ donde $n_i \in N$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k$. Por lo tanto, $N = \sum_{i=1}^{k} Rn_i$ donde
$Rn_i \in cyc(R - fgssimp) = cyc(adac(R - fgssimp))$ por el lema 4.47.
Entonces $Rn_i \in adac(R - fgssimp)$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k$.
De esta manera, $N = \sum_{i=1}^{k} Rn_i \in adac(R - fgssimp)$. ■

Definición 4.49 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

$$strong(\mathcal{X}) = \left\{ N \in R - Mod \;\middle|\; \exists \bigoplus_{i \in I} M_i \to N \to 0 \text{ donde } M_i \in cyc(\mathcal{X}) \right\}$$

Proposición 4.50 Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Entonces $cyc(strong(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{X})$ y $strong(\mathcal{X}) \in R - pretors$.

Demostración:

Sea $\mathcal{X} \in R - ad$. Es claro que $cyc(strong(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{X})$.

Probaremos que $strong(\mathcal{X}) \in R - pretors$. Por definición, $strong(\mathcal{X}) \in R - quot$. Sean J conjunto y $N_j \in strong(\mathcal{X})$ para toda $j \in J$. Entonces existen epimorfismos

$$\bigoplus_{i \in I_j} M_i^j \to N_j \to 0$$

donde $M_i^j \in cyc(\mathcal{X})$. De esta manera,

$$\bigoplus_{j \in J} \left(\bigoplus_{i \in I_j} M_i^j \right) \to \bigoplus_{j \in J} N_j \to 0$$

es un epimorfismo, lo que implica que $\bigoplus_{j \in J} N_j \in strong(\mathcal{X})$.

Sea $N \in strong(\mathcal{X})$ y $K \leqslant N$. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i \in I} M_i & \twoheadrightarrow & N & \twoheadrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & K & & \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Considerando el producto fibrado de K y $\bigoplus_{i \in I} M_i$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i \in I} M_i & & & & \\ \uparrow & & & & \\ L & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

Pero $L \cong \bigoplus_{j\in J} M_j$ donde $M_j \in cyc(\mathcal{X})$ y $J \subseteq I$. Por lo tanto, $K \in strong(\mathcal{X})$. ■

Proposición 4.51 Existe una inyección de $R - adac$ en $R - pretors$.

Demostración:
Sea

$$\begin{aligned} \theta : R - adac &\rightarrow R - pretors \\ \mathcal{X} &\mapsto \theta(\mathcal{X}) = strong(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Supongamos que $strong(\mathcal{X}) = strong(\mathcal{Y})$. Entonces

$$cyc(\mathcal{X}) = cyc(strong(\mathcal{X})) = cyc(strong(\mathcal{Y})) = cyc(\mathcal{Y})$$

Por la proposición 4.45, se sigue que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. ■

Corolario 4.52 $R - adac$ es conjunto.

Bajo la definición de Walker y Walker, existe una inyección de $R - adac \cap R - adco$ en $R - pretors$ y así, $R - adac \cap R - adco$ es conjunto.

El siguiente diagrama ilustra las contenciones entre las clases de módulos consideradas en este trabajo. La flecha $A \rightarrow B$ indica A está contenido en B.

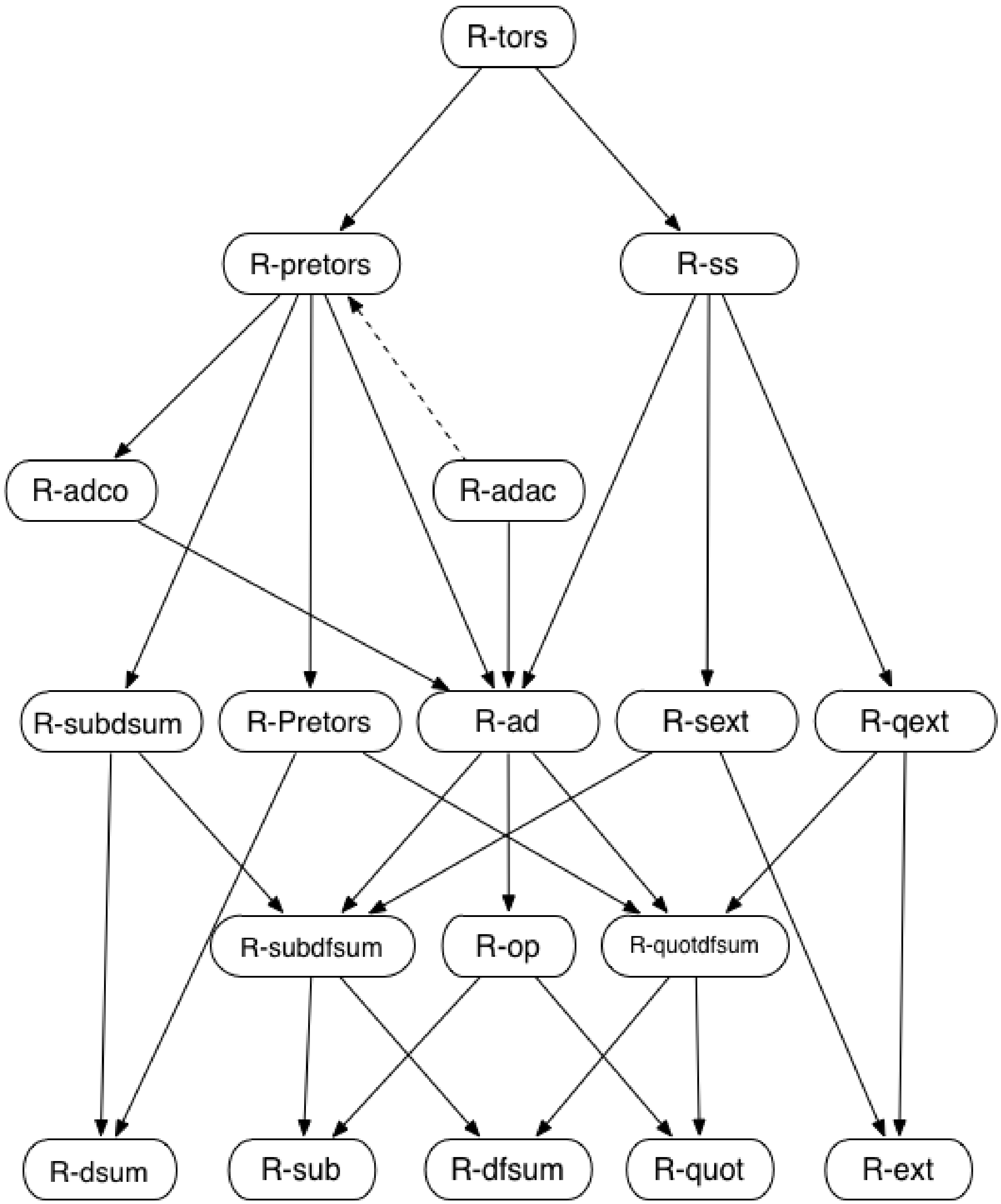

Figura 4.1: Diagrama de grandes retículas de clases de módulos definidas por cerraduras.

Referencia bibliográfica del capítulo:

Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics **13**, 2nd Ed., Springer-Verlag New York, 1992.

Golan, J. S., *Linear topologies on a ring: an overwiev*, Pitman Research Notes in Mathematics **159**, Longman Scientific & Technical, 1987.

Walker, C., Walker, E., *Quotient Categories and Rings of Quotients*, Rocky Mountain Journal of Math. **2**(4) (1972), p. 513-555.

Apéndice A

Algunas clases de módulos específicas

A.1. La clase de módulos extensores

Definición A.1 Sea R un anillo. Diremos que $M \in R - Mod$ es *extensor* si todo submódulo de M es esencial en un sumando directo de M. $\square$

Denotaremos como $\mathcal{J}$ a la clase de todos los $R-$módulos extensores. Así,

$$\mathcal{J} = \{M \in R - Mod \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } N \trianglelefteq K\}.$$

Lema A.2 Supongamos que $K_1 \leqslant M_1 \leqslant M$,
$K_2 \leqslant M_2 \leqslant M$ y $M = M_1 \bigoplus M_2$. Entonces

(i) $K_1 \bigoplus K_2 \ll M_1 \bigoplus M_2$ si y sólo si $K_1 \ll M_1$ y $K_2 \ll M_2$; y

(ii) $K_1 \bigoplus K_2 \trianglelefteq M_1 \bigoplus M_2$ si y sólo si $K_1 \trianglelefteq M_1$ y $K_2 \trianglelefteq M_2$.

Lema A.3 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces

(i) $\mathcal{J} \bigcap E(\mathcal{X}) \subseteq D(\mathcal{X})$

(ii) Si $\mathcal{X} \in R - sub$, entonces $D(\mathcal{X}) \bigcap \mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} \subseteq \mathcal{J}$

Demostración:
(i) Sea $M \in \mathcal{J} \cap E(\mathcal{X})$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $K \oplus M$ tal que $N \trianglelefteq K$. Así, existe $K' \leqslant M$ tal que $K \bigoplus K' = M$. Por el lema A.2, tenemos que $N \bigoplus K' \trianglelefteq K \bigoplus K' = M$. Como $M \in E(\mathcal{X})$, entonces

$$K/N \cong (K \bigoplus K')/(N \bigoplus K') = M/(N \bigoplus K') \in \mathcal{X}.$$

Por lo tanto, $M \in D(\mathcal{X})$

(ii) Sea $M \in D(\mathcal{X})$ tal que $sub(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}$ y tomemos $N \leqslant M$. Entonces existe $K \oplus M$ tal que $K/N \in \mathcal{X}$. Supongamos que $N \cap L = 0$ para algún $L \leqslant K$. Notemos que

$$L = L/(N \cap L) \cong (N + L)/N \leqslant K/N \in \mathcal{X}.$$

Como $\mathcal{X} \in R - sub$, entonces $L \in \mathcal{X}$, lo que implica $L = 0$ por hipótesis. Por lo tanto, $N \trianglelefteq K$ y así, $M \in \mathcal{J}$. ■

A.2. Las clases de módulos singulares y no singulares

Definición A.4 Sea R un anillo. Diremos que $M \in R - Mod$ es *singular* si

$$Z(M) = \{m \in M \mid (0 : m) \trianglelefteq R\} = M.$$

Diremos que M es *no singular* si $Z(M) = 0$. □

Denotaremos como $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ a la clase de todos los $R-$módulos singulares y no singulares, respectivamente. Así,

$$\mathcal{L} = \{M \in R - Mod \mid Z(M) = M\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}' = \{M \in R - Mod \mid Z(M) = 0\}$$

Proposición A.5 $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in R - sub$ para cualquier anillo R.

Demostración:
(i) Sea $M \in \mathcal{L}$ y $N \leqslant M$. Entonces $Z(M) = \{m \in M \mid (0:m) \trianglelefteq R\} = M$. Como $N \leqslant M$, entonces $(0:n) \trianglelefteq R$ para toda $n \in N$. Por lo tanto, $Z(N) = N$, lo que implica que $N \in \mathcal{L}$.

(ii) Sea $M \in \mathcal{L}'$ y $N \leqslant M$. Entonces $Z(M) = \{m \in M \mid (0:m) \trianglelefteq R\} = 0$. Como $N \leqslant M$, entonces $n \in N \leqslant M$ tal que $(0:n) \trianglelefteq R$ implica $n = 0$. Por lo tanto, $Z(N) = 0$, lo que implica que $N \in \mathcal{L}'$. ■

Proposición A.6 $\mathcal{L}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = \mathcal{L}'$ para cualquier anillo R.

Demostración:
$(\subseteq)$ Sea $M \in \mathcal{L}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$. Entonces $sub(M) \bigcap \mathcal{L} = \{0\}$. Sea $Z(M) \leqslant M$. Notemos que

$$Z(Z(M)) = \{m \in Z(M) \mid (0:m) \trianglelefteq R\} = Z(M)$$

por lo que $Z(M) \in \mathcal{L}$ y así, $Z(M) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{L}'$.

$(\supseteq)$ Sea $M \in \mathcal{L}'$. Entonces $Z(M) = 0$. Sea $N \leqslant M$ tal que $N \in \mathcal{L}$. Entonces $Z(N) = N$ pero $\mathcal{L}' \in R - sub$ por la proposición A.5, por lo que $N = Z(N) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{L}^{\perp_{\{\leqslant\}}}$. ■

Lema A.7 Sea R un anillo cualquiera. Si $N \trianglelefteq M$ entonces $M/N \in \mathcal{L}$.

Demostración:
Sea $m + N \in M/N$ y supongamos que $(0 : m+N) \bigcap I = 0$ donde $I \leqslant R$. Si $m = 0$, entonces $(0:N) = R$ lo que implica que $I \subseteq (0:N)$. De esto se sigue que $I = 0$. Ahora, supongamos que $m \neq 0$. Notemos que $Im \leqslant M$. Si $n \in N \bigcap Im$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $n = i_0 m$. De esta manera, tenemos que $i_0 \in (N:m) \bigcap I = 0$, por lo que $i_0 = 0$. Así, $n = i_0 m = 0$ lo que implica que $N \bigcap Im = 0$. Como $N \trianglelefteq M$ tenemos que $Im = 0$. Dado que $m \neq 0$, concluimos que $I = 0$.
Por lo tanto, $(N : m) \trianglelefteq R$ para toda $m + N \in M/N$ lo que implica que $Z(M/N) = M/N$. De esta manera, $M/N \in \mathcal{L}$. ■

Proposición A.8 Sea R un anillo cualquiera. Entonces

(i) $\mathcal{J} \subseteq D(\mathcal{L})$

(ii) $\mathcal{L}' \cap D(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{J}$

Demostración:
(i) Sea $M \in \mathcal{J}$ y $N \leqslant M$. Entonces existe $K \oplus M$ tal que $N \trianglelefteq K$. Por el lema A.7, tenemos que $K/N \in \mathcal{L}$. Pero esto implica que $M \in D(\mathcal{L})$.

(ii) Por la proposición A.6, tenemos que $\mathcal{L}^{\perp\{\trianglelefteq\}} = \mathcal{L}'$. Por la proposición A.5 y el lema A.3, concluimos que $\mathcal{L}' \cap D(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{J}$. ■

A.3. La clase de módulos semisimples

Definición A.9 Sea R un anillo. Diremos que $M \in R-Mod$ es *semisimple* si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ donde $M_i \leqslant M$ y $M_i \in R-simp$ para todo $i \in I$, con I conjunto. ▫

Denotaremos como $R-ssimp$ a la clase de todos los módulos semisimples.

Definición A.10 Sea M un módulo. Definimos el *zoclo de M* como la suma de todos los submódulos simples de M, y lo denotaremos como $Zoc(M)$. ▫

Lema A.11 Sea $M \in R-Mod$. Entonces $Zoc(M) = \bigcap\{N \leqslant M \mid N \trianglelefteq M\}$. Además, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $M \in R-ssimp$

(ii) Cada submódulo de M es sumando directo de M

(iii) M es el único submódulo esencial de M

Proposición A.12 Para cualquier anillo R y cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que

$$D(0) = E(0) = R-ssimp \subseteq D(\mathcal{X})$$

Demostración:
Probaremos que $D(0) = E(0) = \mathcal{C}$.
$(D(0) \subseteq E(0))$: Sea $M \in D(0)$. Entonces para todo $N \leqslant M$ existe $K \oplus M$ tal que

$K/N \cong 0$. Esto implica que $K = N$ y así, $N \bigoplus M$ para todo $N \leqslant M$. Por el lema A.11, M es el único submódulo esencial de M y es tal que $M/M \cong 0 \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in E(0)$.

($E(0) \subseteq R - ssimp$): Sea $M \in E(0)$. Entonces $M/N \cong 0$ para todo $N \trianglelefteq M$. Esto implica que $N = M$ para todo $N \trianglelefteq M$ y así, M es el único submódulo esencial de M. Por el lema A.11, $M \in R - ssimp$.

($R - ssimp \subseteq D(0)$): Sea $M \in R - ssimp$ y $N \leqslant M$. Por el lema A.11, $N \bigoplus M$. Además, tenemos que $N/N \cong 0 \in \mathcal{X}$. Esto implica que $M \in D(0)$.

Notemos que $D(0) \subseteq D(\mathcal{X})$ para cualquier clase $\mathcal{X}$. ■

Proposición A.13 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces

(*i*) $R - ssimp \bigoplus E(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X})$

(*ii*) $R - ssimp \bigoplus D(\mathcal{X}) = D(\mathcal{X})$

(*iii*) $R - ssimp \bigoplus H(\mathcal{X}) \subseteq D(\mathcal{X})$

Demostración:
$(i)(\subseteq)$ Sea $M \in R - ssimp \bigoplus E(\mathcal{X})$. Entonces $M = M_1 \bigoplus M_2$ donde $M_1 \in R - ssimp$ y $M_2 \in E(\mathcal{X})$. Sea $N \trianglelefteq M$. Como $M_1 \in R - ssimp$, tenemos que $M_1 \leqslant N$. Así, $N = M_1 \bigoplus (M_2 \cap N)$ y

$$M/N = (M_1 \bigoplus M_2)/(M_1 \bigoplus (M_2 \cap N)) \cong M_2/(M_2 \cap N).$$

Como $N \trianglelefteq M$, por el lema A.2 tenemos que $M_2 \cap N \trianglelefteq M_2$. Dado que $M_2 \in E(\mathcal{X})$, tenemos que $M/N \cong M_2/(M_2 \cap N) \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in E(\mathcal{X})$.

$(\supseteq)$ Sea $M \in E(\mathcal{X})$. Entonces $M \cong 0 \bigoplus M \in R - ssimp \bigoplus E(\mathcal{X})$.

$(ii)(\subseteq)$ Sea $M \in R - ssimp \bigoplus D(\mathcal{X})$. Entonces $M = M_1 \bigoplus M_2$ donde $M_1 \in R - ssimp$ y $M_2 \in D(\mathcal{X})$. Sea $N \leqslant M$. Notemos que

$$\begin{aligned} M_2 + N &= M_2 + (M \bigcap N) = M \bigcap (M_2 + N) \\ &= (M_1 \bigoplus M_2) \bigcap (M_2 + N) = ((N + M_2) \bigcap M_1) \bigoplus M_2 \end{aligned}$$

por lo que $((N + M_2) \bigcap M_1) \oplus M_1$ pues $M \in R - ssimp$. Ahora, dado que $M_2 \in D(\mathcal{X})$, existe $K \oplus M_2$ tal que $K/(M_2 \bigcap N) \in \mathcal{X}$. Notemos que $N \bigcap M_2 = (N \bigcap M_2) \bigcap K = N \bigcap (M_2 \bigcap K) = N \bigcap K$, lo que implica que

$$(K + N)/N \cong K/(N \bigcap K) = K/(N \bigcap M_2) \in \mathcal{X}$$

Notemos que $(K + N) \oplus (M_2 + N)$ pues $K \oplus M_2$. Como $(M_2 + N) \oplus M$, tenemos que $(K + N) \oplus M$ y $(K + N)/N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in D(\mathcal{X})$.

$(\supseteq)$ Sea $M \in D(\mathcal{X})$. Entonces $M \cong 0 \bigoplus M \in R - ssimp \bigoplus D(\mathcal{X})$.

(iii) Tenemos $R - ssimp \bigoplus H(\mathcal{X}) \subseteq R - ssimp \bigoplus D(\mathcal{X}) = D(\mathcal{X})$. ■

Corolario A.14 Sea $\mathcal{X} \in L_{ext}$. Entonces

$$E(\mathcal{X}) = (R - ssimp \bigoplus (E(\mathcal{X}))^{(n)})(H(\mathcal{X}))$$

para cualquier n entero positivo.

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in L_{\{ext\}}$. Entonces

$$(R - ssimp \bigoplus (E(\mathcal{X}))^{(n)})(H(\mathcal{X})) = (\mathcal{C} \bigoplus E(\mathcal{X}) \bigoplus (E(\mathcal{X}))^{(n-1)})(H(\mathcal{X}))$$

Por la proposición A.13, tenemos que

$$\begin{aligned} (R - ssimp \bigoplus E(\mathcal{X}) \bigoplus (E(\mathcal{X}))^{(n-1)})(H(\mathcal{X})) &= (E(\mathcal{X}) \bigoplus (E(\mathcal{X}))^{(n-1)})(H(\mathcal{X})) \\ &= (E(\mathcal{X})^{(n)})(H(\mathcal{X})) \end{aligned}$$

Por la proposición 2.19, tenemos que

$$(R - ssimp \bigoplus (E(\mathcal{X}))^{(n)})(H(\mathcal{X})) = (E(\mathcal{X})^{(n)})(H(\mathcal{X})) = E(\mathcal{X})$$

que es lo que queríamos probar. ■

Proposición A.15 Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos.
Entonces $(R - ssimp)(H(\mathcal{X})) \subseteq E(\mathcal{X})$.

Demostración:
Sea $M \in (R - ssimp)(H(\mathcal{X}))$. Entonces existe $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ sucesión exacta corta tal que $N \in R - ssimp$ y $M/N \in H(\mathcal{X})$. Sea $K \trianglelefteq M$. Entonces $(K \cap N) \trianglelefteq N$ y como $N \in R - ssimp$, tenemos que $N \leqslant K$. De esta manera, $(M/N)/(K/N) \cong M/K \in \mathcal{X}$, lo que implica que $M \in E(\mathcal{X})$. ■

Proposición A.16 $D(R - ssimp) \subseteq \mathcal{J}$ para cualquier anillo R. Más aún, $D(R - ssimp) = \mathcal{J} \cap E(R - ssimp)$.

Demostración:
Probaremos que $D(R - ssimp) \subseteq \mathcal{J}$. Sea $M \in D(R - ssimp)$ y $0 \neq N \leqslant M$. Por el Lema de Zorn, podemos tomar $K \leqslant M$ tal que es máximo con respecto a $N \trianglelefteq K$. Probaremos que $K \oplus M$.

Entonces existe $L \bigoplus M$ tal que $K < L$ y $L/K \in R - ssimp$. Así, existe un conjunto A y $\{L_\alpha/K \leqslant L/K\}_{\alpha \in A}$ tales que $L/K = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} L_\alpha/K$, $K \leqslant L_\alpha$ para cada $\alpha \in A$ y L_α/K es simple para cada $\alpha \in A$. Notemos que $L = \sum_{\alpha \in A} L_\alpha$.

Ahora, si $K \trianglelefteq L_\alpha$ para alguna $\alpha \in A$, entonces $N \trianglelefteq L_\alpha$ lo que implicaría que $K = L_\alpha$ y así, 0 sería simple. De esta manera, $L_\alpha/K = 0$ para toda $\alpha \in A$ y así, $L/K = 0$ de donde se sigue que $L = K$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $K \ntrianglelefteq L_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Entonces existe $0 \neq V_\alpha \leqslant L_\alpha$ tal que $K \cap V_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in A$. De esta manera, $V_\alpha = V_\alpha/(K \cap V_\alpha) \cong (K + V_\alpha)/K \leqslant L_\alpha/K$, por lo que $V_\alpha = L_\alpha/K$ pues L_α/K es simple para toda $\alpha \in A$. Por lo tanto, existen $V_\alpha \leqslant M$ tales que $L_\alpha = K \oplus V_\alpha$ y V_α es simple para cada $\alpha \in A$.

Si $V = \sum_{\alpha \in A} V_\alpha$, entonces $L = K + V$ y V es semisimple. Por el lema A.11, $(K \cap V) \oplus V$, es decir, existe $W \leqslant V$ tal que $V = (K \cap V) \oplus W$. Notemos que

$$0 = (K \cap V) \cap W = V \cap (K \cap W) = K \cap W$$

y

$$V = (K \cap V) + W = (K + W) \cap (V + W) = (K + W) \cap V$$

lo que implica que $V \subseteq K + W$. Y así,

$$L = K + V \subseteq K + (K + W) = K + W \subseteq K + V = L$$

por lo que $L = K + W$ y entonces $K \oplus L$. Se concluye que $K \oplus M$ y esto prueba que $M \in \mathcal{J}$.

Por otro lado, tenemos que $D(R - ssimp) \subseteq \mathcal{J}$ y $D(R - ssimp) \subseteq E(R - ssimp)$ lo que implica que $D(R - ssimp) \subseteq \mathcal{J} \cap E(R - ssimp)$. Además, por el lema A.3 tenemos que $\mathcal{J} \cap E(R - ssimp) \subseteq D(R - ssimp)$.
Por lo tanto, $D(R - ssimp) = \mathcal{J} \cap E(R - ssimp)$. ■

Corolario A.17 Si R es un anillo tal que ${}_R R \in D(R - ssimp)$, entonces $M \in \mathcal{J}$ para todo módulo cíclico M.

A.4. La clase de módulos con dimensión uniforme finita

Definición A.18 Sea R un anillo. Un $R-$módulo M tiene *dimensión uniforme finita*, o también llamada *dimensión de Goldie*, si M no tiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero. □

Denotaremos como $\mathcal{U}$ a la clase de todos los módulos con dimensión uniforme finita.

Definición A.19 Sea M un módulo. Diremos que M es *uniforme* si todo submódulo distinto de cero de M es esencial en M. □

Lema A.20 Sea M un módulo con dimensión uniforme finita. Entonces todo submódulo $0 \neq N \leqslant M$ contiene un submódulo uniforme.

Demostración:
Por contradicción, supongamos que existe $0 \neq N \leqslant M$ tal que N no tiene submódulos uniformes. De esta manera, tomemos $A_0 \leqslant N$ tal que A_0 no sea uniforme. Tomemos $A_1, B_1 \in A_0$ tales que $0 \neq A_1, 0 \neq B_1$ y $A_1 \bigoplus B_1 \leqslant A_0$. Entonces A_1, B_1 no son uniformes. Así, tomemos $A_2, B_2 \in A_1$ tales que $0 \neq A_2$, $0 \neq B_2$ y $A_2 \bigoplus B_2 \leqslant A_1$. Entonces $A_2 \bigoplus B_2 \bigoplus B_1 \leqslant A_1 \bigoplus B_1 \leqslant N$ y A_2, B_2 no son uniformes. Continuando con este proceso, tendríamos una suma directa infinita $B_1 \bigoplus B_2 \bigoplus \cdots \leqslant M$, lo cual contradice que M tiene dimensión uniforme finita. Por lo tanto, todo submódulo de M distinto de cero tiene un submódulo uniforme. ■

Lema A.21 Si existen $n \in \mathbb{Z}^+$ y submódulos uniformes $U_i \leqslant M$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \trianglelefteq M$, entonces cualquier suma directa $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$, con $N_i \leqslant M$, tiene $k \leqslant n$ sumandos.

Demostración:
Sea $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \trianglelefteq M$. Tomemos $N_i' = N_i \cap U \neq 0$. De esta manera, $N_1' \oplus N_2' \oplus \cdots N_k' \leqslant U$. Sea $\hat{N} = N_2 \oplus N_3 \oplus \cdots \oplus N_k$. Entonces existe $0 < j \leqslant k$ tal que $\hat{N} \cap U_j = 0$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $j = 1$. Entonces $\hat{N} \leqslant (U/U_1)$ y así, $dim(\hat{N}) = k - 1 \leqslant n - 1 = dim(U/U_1)$. Por lo tanto, $k \leqslant n$ y N tiene $k \leqslant n$ sumandos. ■

Proposición A.22 M tiene dimensión uniforme finita si y sólo si existen $n \in \mathbb{Z}^+$ y submódulos uniformes $U_i \leqslant M$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \trianglelefteq M.$$

En este caso, n es un invariante del módulo y es llamado *la dimensión uniforme de M*.

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que M tiene dimensión uniforme finita. Entonces M no tiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero. Por el lema A.20, existe

$U_1 \leqslant M$ tal que U_1 es uniforme. Si $U_1 \trianglelefteq M$, entonces acabaríamos la demostración. Si $U_1 \ntrianglelefteq M$, entonces tomemos $U_2 \leqslant M$ tal que U_2 es uniforme y $U_1 \oplus U_2 \leqslant M$. Si $U_1 \oplus U_2 \trianglelefteq M$, entonces acabaríamos la demostración. Si $U_1 \oplus U_2 \ntrianglelefteq M$, entonces tomemos $U_3 \leqslant M$ tal que U_3 es uniforme y $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \leqslant M$. Continuando con este proceso, tendríamos una suma infinita $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus \cdots \leqslant M$, pero por hipótesis no existen sumas infinitas. Por lo tanto, existe $n > 0$ positivo tal que $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \trianglelefteq M$ con U_i uniforme.

($\Leftarrow$) Supongamos que existen $n \in \mathbb{Z}^+$ y submódulos uniformes $U_i \leqslant M$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \trianglelefteq M$. Supongamos que M tiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero. Por el lema A.21, no existe una suma directa finita $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ de submódulos uniformes tales que $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \trianglelefteq M$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, M no tiene una suma directa infinita y M tiene dimensión uniforme finita. ■

Proposición A.23 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$ para cualquier anillo R.

Demostración:
($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$. Entonces $M = M_1 \oplus M_2$ tal que M_1 y M_2 tienen dimensión uniforme finita. Entonces existen $n_1, n_2 > 0$ y $U_1, \ldots, U_{n_1} \leqslant M_1$
y $V_1, \ldots, V_{n_2} \leqslant M_2$ uniformes tales que
$(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots U_{n_1}) \trianglelefteq M_1$ y $(V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_{n_2}) \trianglelefteq M_2$. Por el lema A.2, tenemos que

$$(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots U_{n_1}) \oplus (V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_{n_2}) \trianglelefteq M_1 \oplus M_2 = M.$$

Por lo tanto, $M \in \mathcal{U}$.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{U}$. Como $0 \in \mathcal{U}$, tenemos que $M = M \oplus 0 \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$. ■

Proposición A.24 $\mathcal{U} \in R - sext$.

Demostración:
Sea $M \in \mathcal{U}$ y $N \leqslant M$. Supongamos que $N \notin \mathcal{U}$. Entonces N contiene una suma directa infinita de submódulos no cero, lo que implica que M contiene una suma directa finita de submódulos no cero, lo cual contradice que $M \in \mathcal{U}$. Por lo tanto,

$N \in \mathcal{U}$. Por otro lado, por el corolario 2.7, sólo debemos probar que $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$. La contención $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^2$ es clara. Supongamos que $M \in \mathcal{U}^2$. Entonces existe $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ tal que $N, K \in \mathcal{U}$. Por el lema 2.15, existe $K \leqslant M$ tal que $N \cap K = 0$ y $N \oplus K \trianglelefteq M$. Así, $K \leqslant M/N \in \mathcal{U}$ lo que implica que $K \in \mathcal{U}$. Además, notemos que $N \oplus K \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ y por la proposición A.23, $N \oplus K \in \mathcal{U}$. Entonces existen $n > 0$ y $U_i \leqslant N \oplus K$ uniformes tales que $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \bigoplus U_n \trianglelefteq N \oplus K \trianglelefteq M$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{U}$. ■

Apéndice B

El conjunto de filtros lineales $R - fil$

Definición B.1 Sea $\mathfrak{F} = \{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una familia de ideales de un anillo R y consideremos las siguientes condiciones:

$(L1)$ Si $I, J \in \mathfrak{F}$, entonces $I \cap J \in \mathfrak{F}$

$(L2)$ Si $I \in \mathfrak{F}$ e $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathfrak{F}$

$(L3)$ Si $I \in \mathfrak{F}$ y $r \in R$, entonces $(I : r) \in \mathfrak{F}$

Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *filtro lineal* de R si satisface las condiciones $(L1), (L2)$ y $(L3)$. Denotaremos como $R - fil$ al conjunto de todos los filtros lineales de R. ▫

Ejemplo B.2 Sea $\zeta = \{I \leqslant R \mid I \trianglelefteq R\} \subseteq R$. Entonces ζ es un filtro lineal. ▫

Definición B.3 Sea $\mathfrak{F} \in R - fil$. Diremos que $\mathfrak{F}$ es *Jansiano* si es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. ▫

Definición B.4 Sea $\mathfrak{F} \in R - fil$. Diremos que $M \in R - Mod$ es de $\mathfrak{F}-$*torsión* si $(0 : m) \in \mathfrak{F}$ para cada $m \in M$, y denotaremos como $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$ a la clase de todos los módulos de $\mathfrak{F}-$torsión. ▫

Teorema B.5 Existe una correspondencia biyectiva entre $R-pretors$ y los filtros lineales de ideales izquierdos de R.

Demostración:
Sea $\mathfrak{F} \in R - fil$. Probaremos que $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}} \in R - pretors$. Sea $M \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$.

(i) Si $N \leqslant M$, como $(0 : m) \in \mathfrak{F}$ para toda $m \in M$, entonces $(0 : n) \in \mathfrak{F}$, por lo que $N \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$.

$ii)$ Si $N \leqslant M$, notemos que $(0 : m) \subseteq (0 : m + N)$, por lo que $(0 : m + N) \in \mathfrak{F}$ y así, $M/N \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$.

(iii) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos en $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$ y $m' = (m_\alpha)_{\alpha \in A} \in \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. De esta manera, existe $B \subseteq A$ finito tal que $m_\beta \neq 0$ para cada $\beta \in B$ y $(m_\beta)_{\beta \in B} = (m_\alpha)_{\alpha \in A} = m'$. Por lo tanto, $(0 : m_\beta) \in \mathfrak{F}$ para cada $\beta \in B$ y $(0 : m') = \bigcap\{(0 : m_\beta) \mid \beta \in B\} \in \mathfrak{F}$ pues $\mathfrak{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Por lo tanto, $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$.

Por otro lado, sea $\mathcal{X} \in R - pretors$. Probaremos que existe un único $\mathfrak{F} \in R - fil$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$. Sea $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{X}\}$.

(i) Sea $I_1, I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. Entonces $R/I_1, R/I_2 \in \mathcal{X}$. Notemos que $R/(I_1 \cap I_2) \cong N \leqslant R/I_1 \oplus R/I_2$. Dado que $\mathcal{X} \in R - pretors$, tenemos que $R/I_1 \oplus R/I_2 \in \mathcal{X}$ y así $N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $R/(I_1 \cap I_2) \in \mathcal{X}$ lo que implica que $I_1 \cap I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

(ii) Sea $I, J \leqslant R$ ideales tales que $I \leqslant J$ e $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. Entonces $R/I \in \mathcal{X}$. Notemos que $R/J \cong (R/I)/(J/I)$. Dado que $\mathcal{X} \in R - pretors$, entonces $(R/I)/(J/I) \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $R/J \in \mathcal{X}$ lo que implica que $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

(iii) Sea $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ y $r \in R$. Entonces $R/I \in \mathcal{X}$. Notemos que

$$R/(I : r) = R/(0 : (r + I)) \cong R(r + I) = (Rr + I)/I \leqslant R/I.$$

Dado que $\mathcal{X} \in R - pretors$, entonces $R(r+I) \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $R/(I : r) \in \mathcal{X}$ lo que implica que $(I : r) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ para cada $r \in R$.

Concluimos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}} \in R - fil$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}} &= \{M \in R - Mod \mid (0:m) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}} \ \forall\ m \in M\} \\
&= \{M \in R - Mod \mid R/(0:m) \in \mathcal{X} \ \forall\ m \in M\} \\
&= \{M \in R - Mod \mid Rm \in \mathcal{X} \ \forall\ m \in M\} \\
&= \left\{ M \in R - Mod \ \middle|\ M = \sum_{m \in M} Rm \in \mathcal{X} \right\} \\
&= \mathcal{X}
\end{aligned}$$

■

Definición B.6 Sea $\mathfrak{F} \in R - fil$. Diremos que $\mathfrak{F}$ es *filtro de Gabriel* si satisface la siguiente condición:

$(L4)$ Si $I \leqslant R$ y $J \in \mathfrak{F}$ tal que $(I : j) \in \mathfrak{F}$ para cada $j \in J$, entonces $I \in \mathfrak{F}$ □

Teorema B.7 Existe una correspondencia biyectiva entre $R - tors$ y los filtros de Gabriel de ideales izquierdos de R.

Notemos que $R - fil$ está parcialmente ordenado por la inclusión.

Proposición B.8 Sea A un conjunto y $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de elementos de $R - fil$. Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha \in R - fil.$$

Demostración:
(i) Sea $I, J \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$ e $I \subseteq J$. Entonces $I, J \in \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Como $\mathfrak{F}_\alpha$ es cerrada bajo intersecciones para cada $\alpha \in A$, entonces $I \cap J \in \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Esto implica que $I \cap J \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$ es cerrada bajo intersecciones.

(ii) Sea $I, J \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$ e $I \subseteq J$. Entonces $I, J \in \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Como $\mathfrak{F}_\alpha$ es cerrada bajo super ideales para cada $\alpha \in A$, entonces $J \in \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Esto implica que $J \in \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{F}_\alpha$ es cerrada bajo super ideales.

(iii) Sea $I \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha$ y $r \in R$. Entonces $I \in \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Como $\mathfrak{F}_\alpha$ es cerrada bajo trasladados para cada $\alpha \in A$, entonces $(I : r) \in \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Esto implica que $(I : r) \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha$ es cerrada bajo trasladados.

Esto prueba que $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha \in R - fil$. ■

Corolario B.9 Sea A un conjunto y $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de elementos de $R - fil$. Entonces

$$\bigcap \{\mathfrak{G} \in R - fil \mid \mathfrak{F}_\alpha \subseteq \mathfrak{G} \ \forall \ \alpha \in A\} \in R - fil.$$

Teorema B.10 $R - fil$ es una retícula completa.

Demostración:

Por los resultados anteriores, tenemos que

$$\bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha \in R - fil \qquad \text{y} \qquad \bigcap \{\mathfrak{G} \in R - fil \mid \mathfrak{F}_\alpha \subseteq \mathfrak{G} \ \forall \ \alpha \in A\} \in R - fil$$

para cualquier conjunto A y cualquier familia $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de elementos de $R - fil$. Probaremos que

$$\bigwedge_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha \quad \text{y} \quad \bigvee_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha = \bigcap \{\mathfrak{G} \in R - fil \mid \mathfrak{F}_\alpha \subseteq \mathfrak{G} \ \forall \ \alpha \in A\}$$

(i) Es claro que $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha \leqslant \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathfrak{G} \in R - fil$ tal que $\mathfrak{G} \leqslant \mathfrak{F}_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Pero esto implica que $\mathfrak{G} \leqslant \bigcap\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha$. Concluimos que $\bigwedge\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha$.

(ii) Sea $\mathfrak{F}' = \bigcap \{\mathfrak{G} \in R - fil \mid \mathfrak{F}_\alpha \subseteq \mathfrak{G} \ \forall \ \alpha \in A\}$. Notemos que $\mathfrak{F}_\alpha \leqslant \mathfrak{F}'$ para toda $\alpha \in A$. Supongamos que existe $\mathfrak{G} \in R - fil$ tal que $\mathfrak{F}_\alpha \leqslant \mathfrak{G}$ para toda $\alpha \in A$. Pero esto implica que $\mathfrak{F}' \leqslant \mathfrak{G}$. Concluimos que $\bigvee\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{F}' = \bigcap \{\mathfrak{G} \in R - fil \mid \mathfrak{F}_\alpha \subseteq \mathfrak{G} \ \forall \ \alpha \in A\}$. ■

La retícula completa $R - fil$ tiene como menor elemento a $\eta[R] = \{I \leqslant R \mid R \leqslant I\} = \{R\}$ y como mayor elemento a $\eta[0] = \{I \leqslant R \mid 0 \leqslant I\}$.

Definición B.11 Sea $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in R - fil$. Definimos *el producto de* $\mathfrak{F}$ *por* $\mathfrak{G}$ como

$$\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{I \leqslant R \mid \exists\ J \in \mathfrak{G} \text{ tal que } I \leqslant J \text{ y } J/I \text{ es de } \mathfrak{F}\text{−torsión}\}.$$

Notemos que J/I es de $\mathfrak{F}$−torsión si $(I : a) \in \mathfrak{F}$ para toda $a \in J$.

Proposición B.12 Si $\mathfrak{F} \in R - fil$ y $\varnothing \neq \mathcal{X} \subseteq R - fil$, entonces $\mathfrak{F}(\bigcap_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} \mathfrak{G}) = \bigcap\{\mathfrak{F}\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \in \mathcal{X}\}$.

Demostración:
Sea $\mathfrak{F}' = \bigcap\{\mathfrak{F}\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \in \mathcal{X}\}$.

($\subseteq$) Supongamos que $I \in \mathfrak{F}(\bigcap_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} \mathfrak{G})$. Entonces existe $J \in (\bigcap_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} \mathfrak{G})$ tal que $(I : a) \in \mathfrak{F}$ para toda $a \in J$. Como $J \in (\bigcap_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} \mathfrak{G})$, entonces $J \in \mathfrak{G}$ para toda $\mathfrak{G} \in \mathcal{X}$. De esta manera, $I \in \mathfrak{F}\mathfrak{G}$ para toda $\mathfrak{G} \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $I \in \mathfrak{F}'$.

($\supseteq$) Supongamos que $I \in \mathfrak{F}'$. Entonces, para cada $\mathfrak{G} \in \mathcal{X}$ existe $J_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{G}$ tal que $I \leqslant J_{\mathfrak{G}}$ y $(I : a) \in \mathfrak{F}$ para toda $a \in J_{\mathfrak{G}}$. Entonces $J = \sum_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} J_{\mathfrak{G}} \in (\bigcap_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} \mathfrak{G})$. De esta manera, $I \leqslant J$ y $(I : a) \in \mathfrak{F}$ para toda $a \in J$. Por lo tanto, $I \in \mathfrak{F}(\bigcap_{\mathfrak{G}\in\mathcal{X}} \mathfrak{G})$.

Glosario de retículas y grandes retículas definidas por cerraduras

$R-tors$

Retícula de todas las clases de torsión hereditaria.

$R-tors = L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus,ext\}}$

Ejemplo: La clase $\{M \in R-Mod \mid IM = 0\}$ con I ideal idempotente.

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = htors\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R-tors$ es distributiva.

$R-tors$ es marco.

$R-tors$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}} = \{M \in R-Mod \mid subquot(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R-ss$

Gran retícula de todas las clases de Serre.

$R-ss = L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}$

Ejemplo: La clase $\mathbf{A}$ de todos los módulos artinianos.

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha = serre\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R-ss$ es distributiva.

$R-ss$ es gran marco.

$R-ss$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}} = \{M \in R-Mod \mid subquot(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R - pretors$

Retícula de todas las clases de pretorsión hereditaria.

$R - pretors = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus\}}$

Ejemplo: La clase $R - ssimp$ de todos los módulos semisimples.

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = \sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha\right)$

$R - pretors$ es modular.

$R - pretors$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus\}}} = \varphi(\mathcal{X})^{\perp_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus, ext\}}}$$

$R - sext$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo submódulos y extensiones exactas.

$R - sext = L_{\{\leqslant, ext\}}$

Ejemplo: La clase de todos los módulos con dimensión uniforme finita.

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = sext\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R - sext$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant, ext\}}} = \{M \in R - Mod \mid sub(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R - qext$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo cocientes y extensiones exactas.

$R - qext = L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}$

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = qext\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R - qext$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}} = \{M \in R - Mod \mid quot(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R - subdsum$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo submódulos y sumas directas.

$R - subdsum = L_{\{\leqslant, \oplus\}}$

$R - Pretors$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo cocientes y sumas directas.

$R - Pretors = L_{\{\twoheadrightarrow, \oplus\}}$

$R - ad$

Gran retícula de todas las clases aditivas.

$R - ad = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$

Ejemplos: La clase $\mathcal{S}_{\ll}$ de todos los módulos superfluos. La clase $R - fgssimp$ de todos los módulos semisimples finitamente generados.

Supremo arbitrario: $\displaystyle\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = ad\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R - subdfsum$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo submódulos y sumas directas finitas.

$R - subdfsum = L_{\{\leqslant, \oplus^n\}}$

Supremo arbitrario: $\displaystyle\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = subdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R - quotdfsum$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo cocientes y sumas directas finitas.

$R - quotdfsum = L_{\{\twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$

Supremo arbitrario: $\displaystyle\bigvee_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha = quotdfsum\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha\right)$

$R-op$

Gran retícula de todas las clases abiertas.

$R-op = L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}$

Ejemplo: La clase $R-simp$ de todos los módulos simples.

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$

$R-ss$ es distributiva.

$R-ss$ es gran marco.

$R-ss$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}} = \{M \in R-Mod \mid subquot(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R-sub$

Gran retícula de todas las clases hereditarias.

$R-sub = L_{\{\leqslant\}}$

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$

$R-sub$ es distributiva.

$R-sub$ es marco.

$R-sub$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\leqslant\}}} = \{M \in R-Mod \mid sub(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R-quot$

Gran retícula de todas las clases cohereditarias.

$R-quot = L_{\{\twoheadrightarrow\}}$

Supremo arbitrario: $\bigvee_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{X}_\alpha$

$R-quot$ es distributiva.

$R-quot$ es marco.

$R-quot$ es fuertemente pseudocomplementada:

$$\mathcal{X}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} = \{M \in R-Mod \mid quot(M) \cap \mathcal{X} = \{0\}\}$$

$R - dfsum$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo sumas directas finitas.

$R - dfsum = L_{\{\oplus^n\}}$

$R - dsum$

Gran retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo sumas directas.

$R - dsum = L_{\{\oplus\}}$

$R - ext$

Retícula de todas las clases de módulos cerradas bajo extensiones exactas.

$R - ext = L_{\{ext\}}$

$R - adco$

Clase de todas las clases aditivas completas.

$R - pretors \subseteq R - adco \subseteq R - ad$

$R - adac$

Conjunto de todas las clases aditivas acotadas.

Ejemplo: La clase $R-fgssimp$ de todos los módulos semisimples finitamente generados.

$R - adac \subset R - ad$

Bibliografía

[1] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J., *On Big Lattices of Classes of* $R-$*modules Defined by Closure Properties*, Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics (2010), p. 19-36.

[2] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J., *On the lattices of natural and conatural classes in* $R-Mod$, Comm. Algebra, **29**(2) (2001), p. 541-556.

[3] Amini, A., Amini, B., *On Strongly Superfluous Submodules*, Comm. Algebra, **40**(8) (2012), p. 2906-2919.

[4] Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics **13**, 2nd Ed., Springer-Verlag New York, 1992.

[5] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[6] Crivei, I., Crivei, S., *Associated classes of modules*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, **54**(2) (2009), p. 23-32.

[7] Dauns, J., *Direct Sums and Subdirect Products*, Methods in Module Theory, Pure and Applied Mathematics **140**, Marcel Dekker, 1992.

[8] Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, 1994.

[9] Dauns, J., Zhou, Y., *Classes of modules*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[10] Dickson, S., *A torsion theory for abelian categories*, Transactions of the American Mathematical Society **121**(1) (1966), p. 223-235.

[11] Grätzer, G., *Lattice theory: first concepts and distributive lattices*, Dover ed., 2009.

[12] Golan, J. S., *Linear topologies on a ring: an overwiev*, Pitman Research Notes in Mathematics **159**, Longman Scientific & Technical, 1987.

[13] Golan, J. S., *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **29**, Longman Scientific and Technical, 1986.

[14] Golan, J. S., *Localization of Noncommutative Rings*, Pure and Applied Mathematics **30**, Marcel Dekker, 1975.

[15] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006.

[16] Kashu, A. I., *Closed Classes of left A-Modules and Closed Sets of left Ideals of Ring A*, Matematicheskie Zametki, **5**(3) (1969), p. 381-390.

[17] Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics **189**, Springer-Verlag New York, 1999.

[18] Leonard, W. W., *Small modules*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), p. 527-531.

[19] Page, S., Zhou, Y., *On Direct Sums of Injective Modules and Chain Conditions*, Can. J. Math. **46**(3) (1994), p. 634-647.

[20] Raggi, F., Rincón, H., Signoret, C., *On some classes of $R-$modules and congruences in $R-tors$*, Comm. Algebra, **27**(2) (1999), p. 889-901.

[21] Raggi, F., Ríos, J., Wisbauer, R.,*The lattice structure of hereditary pretorsion classes*, Comm. Algebra, **29**(1) (2001), p. 131-140.

[22] Raggi, F., Signoret, C., *Serre Subcategories of R-Mod*, Comm. Algebra, **24**(9) (1996), p. 2877-2886.

[23] Raggi, F., Signoret, C., *Serre Subcategories and Linear Filters*, Kyungpook Mathematical Journal, **38**(2) (1998), p. 411-419.

[24] Smith, P. F., *Modules with many direct summands*, Osaka J. Math. **27** (1990), p. 253-264.

[25] Stenström, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

[26] Van Huynh, D., Dân, P., *On rings with restricted minimum condition*, Archiv der Mathematik **51**(4) (1988), pp 313-326.

[27] Walker, C., Walker, E., *Quotient Categories and Rings of Quotients*, Rocky Mountain Journal of Math. **2**(4) (1972), p. 513-555.

[28] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.

[29] Zhou, Y., *The lattice of natural classes of modules*, Comm. Algebra, **24**(5) (1996), p.1637-1648.