"INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD DE BULTO EN COSMOLOGIA. ALGUNAS SOLUCIONES EXACTAS."

TESIS QUE PRESENTA

LUZ MARIA DIAZ RIVERA

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

MAESTRO EN FISICA

Junio de 1994

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE FISICA

A MI PADRE

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. L. Octavio Pimentel Rico el haber dirigido este trabajo.

Agradezco a la Sra. María Eugenia Olascoaga R. por su apreciable ayuda en la edición de este trabajo.

Me es muy grato reconocer las diversas y muy valiosas formas de apoyo imposibles de enumerar que recibí de Antonio Rivera Urbina, Juan Angel Díaz Rivera y su familia y Rafael Díaz Rivera y su familia, sin cuyas ayudas hubiese sido imposible la realización de esta maestría.

Agradezco a Remigio Cabrera Trujillo por su invaluable apoyo.

Agradezco al Departamento de Física de la UAM-I por las facilidades prestadas para la realización de este trabajo.

INDICE

CAPITULO 1

GENERALIDADES

§ 1.1.- Introducción

Desde hace mucho tiempo se han investigado las soluciones cosmológicas en la teoría de Einstein. Naturalmente se inició el estudio haciendo una serie de consideraciones que simplificaran el problema, como es el considerar al tensor energía-momento correspondiente a un fluido perfecto. Claramente el siguiente paso fué suponer las implicaciones de la presencia de un fluido no perfecto en el que están presentes efectos disipativos, y que conduce a resultados más realistas.

Murphy [1] en 1973 construyó un modelo cosmológico para un universo homogéneo e isotrópico con un fluido con viscosidad de bulto; este modelo tiene la característica de no presentar una singularidad tipo Big-Bang en el pasado. Sin embargo, la relación que utiliza Murphy entre el coeficiente de viscosidad y la densidad de energía, no es válida para altas densidades.

Belinskii y Khalatnikov [4,5] en 1976 y 1977 hicieron un análisis cualitativo de modelos que consideran fluidos con viscosidad de bulto y viscosidad de corte. Pero obviamente el interés era obtener soluciones exactas.

Santos *et al* [2] en 1984 obtienen soluciones exactas para un modelo cosmológico homogéneo e isotrópico con viscosidad de bulto y un coeficiente de viscosidad proporcional a una potencia de la densidad de energía, pero sólo lo hacen para algunos casos simples. No obtante, ellos utilizan una teoría no causal en su ecuación constitutiva para la presión viscosa [3].

Pavón *et al* [6] en 1991, consideraron un universo espacialmente plano, homogéneo e isotrópico, con un fluido viscoso que cumple con la ley causal de Maxwell-Cattaneo y para el que el coeficiente de viscosidad de bulto es una potencia de la densidad de energía. Las soluciones que obtienen sólo excluyen un caso que fue resuelto por Chimento *et al* [7] en 1993. Estas soluciones se obtienen en forma exacta.

Hiscock *et al* [8] en 1991, realizaron un estudio que consistió en obtener soluciones numéricas de las ecuaciones para el modelo cosmológico, isotrópico, homogéneo, espacialmente plano, utilizando dos ecuaciones constitutivas para la presión viscosa: la correspondiente a la ley de Eckart y la de Israel-Stewart. Ellos concluyen que la ecuación de Eckart es inapropiada para aplicaciones cosmológicas porque conduce a una presión total negativa.

Sin embargo, Barrow [9] había encontrado ya en 1987 que una presión negativa puede tener significado físico al interpretarse como un efecto de creación de partículas; además sugiere que una solución inflacionaria necesariamente viola la condición de energía fuerte.

Davis [10] en el mismo año relacionó a una presión negativa con efectos debidos a defectos topológicos cosmológicos como las texturas.

Así pues, resulta interesante encontrar soluciones cosmológicas cuando se utiliza un fluido con viscosidad de bulto cuyo coeficiente de viscosidad tiene las características del utilizado por Santos y colaboradores, pero resolviendo para más casos que los considerados por ellos. Esto es posible particularizando en algunos valores de la potencia de la densidad de energía y utilizando una ecuación de estado específica. También resulta interesante investigar el comportamiento de las soluciones si se considera alguna otra métrica además de la de Robertson-Walker.

Por otra parte una ecuación de estado que resulta particularmente interesante es la que utiliza Davis [10] y que relaciona con defectos topológicos cosmológicos como las texturas. De modo que surge la pregunta: ¿ cuál será el comportamiento de las soluciones cosmológicas en las condiciones mencionadas si se utiliza la ecuación de estado $\mathrm{P} = -1/3\rho$?

En el presente trabajo consideraremos dos modelos cosmológicos: Homogéneo e isotrópioco (Robertson-Walker) y homogéneo y anisotrópico (Bianchi I) con un fluido viscoso con sólo viscosidad de bulto, para los cuales encontramos soluciones exactas.

Consideramos que el coeficiente de viscosidad de bulto es proporcional a una potencia de la densidad de energía: $\eta = \eta_0 \rho^n$ (η es el coeficiente de viscosidad de bulto, η_0 es una constante positiva y ρ es la densidad de energía), y una ecuación de estado dada por $\mathrm{P} = \varepsilon\rho$ (P es la presión, ρ la densidad de energía y ε una constante). Utilizamos además la teoría no causal de Eckart: $\sigma = -\eta \mathrm{U}^{\mu}{}_{;\mu}$ (donde σ es la presión viscosa, η es el coeficiente de viscosidad de bulto y η_0 es una constante positiva); e investigamos las condiciones de energía para determinar cuáles se cumplen.

En el presente trabajo se resuelven los modelos en casos muy específicos, esto es, para un fluido viscoso que puede ser polvo, radiación , "stiff matter" o cumple con la ecuación de estado $\mathrm{P} = -1/3\rho$, ($\varepsilon = 0,\ 1/3,\ 1,\ -1/3$) cuando el coeficiente de viscosidad de bulto es constante, directamente proporcional a la densidad de energía, o proporcional a la raiz cuadrada de la densidad de energía (n=0, 1, 1/2). En el modelo homogéneo e isotrópico consideramos todas las posibilidades que surgen de las combinaciones de los valores mencionados. Para el modelo homogéneo y anisotrópico aún cuando se consideran varios casos, sólo se encuentra solución para un único valor de ε y dos valores de n.

La razón para considerar específicamente estas ecuaciones de estado es que diferentes autores las han utilizado probando que corresponden a fluidos relativistas que son aplicables durante algunas etapas de la evolución del universo, al igual que los valores para el coeficiente de viscosidad de bulto.

El trabajo se presentará en el siguiente orden:

En el capítulo 1 se llevará a cabo una descripción general de los fluidos viscosos relativistas y se introducirán las condiciones de energía de Hawking-Penrose.

En el capítulo 2 se resolverá el modelo homogéneo e isotrópico para los distintos casos, se discutirá el significado de las soluciones y se investigarán las condiciones de energía.

En el capítulo 3 se resolverá el modelo para el caso homogéneo y anisotrópico, se discutirá también el significado de las soluciones y se investigarán las condiciones de energía.

En el capítulo 4 se plantearán las conclusiones que se obtienen de este trabajo, a lo largo del cual utilizamos signatura +2 y suponemos que la velocidad de la luz y la constante gravitacional valen 1.

§ 1.2.- Fluidos Imperfectos

Un fluido puede visualizarse como un contínuo, es decir, un conjunto tan grande de partículas, que no se estudia a cada una individualmente, sino que se hace una descripción del conjunto en términos de sus cantidades promedio. Para generalizar esta idea a fluidos reales, deben tomarse en cuenta los siguientes hechos:

i) Además del movimiento de bulto del fluido, es decir, como un todo, cada partícula se mueve con una velocidad azarosa.

ii) Pueden haber varias fuerzas entre las partículas que contribuyen a la energía potencial total.

El conjunto de partículas en cuestión debe de ser suficientemente grande de modo que cada partícula es muy pequeña en comparación con él, pero debe ser lo suficientemente pequeño para considerársele homogéneo; es decir, la velocidad promedio, la energía cinética y la distancia inter-partícula deben tener el mismo valor en todo el conjunto. Esto se llama un "elemento".

La aproximación de un fluido como un contínuo permite asignar a cada elemento un valor de los parámetros del fluido; matemáticamente ésto eqivale a asignar a cada punto un valor de tales parámetros.

Se define a un fluido como perfecto cuando cada punto de él tiene una velocidad **v** tal que un observador moviéndose con la misma velocidad ve al fluido como isotrópico, ésto sólo puede suceder cuando el camino libre medio entre las colisiones es muy pequeño comparado con la escala utilizada por el observador.

Sin embargo, para describir más adecuadamente a los sistemas de la naturaleza que se comportan como fluidos, deben estudiarse los fluidos imperfectos, es decir, fluidos en los cuales la presión, la densidad o la velocidad varían notablemente a lo largo de distancias del orden de una trayectoria libre media y/o durante el tiempo libre medio.

Para determinar las ecuaciones relativistas de un fluido en el que tienen lugar procesos disipativos debe especificarse el tensor de energía-momento correspondiente. El tensor energía-momento de un fluido perfecto está dado por

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)U^\alpha U^\beta, \tag{1.2.1}$$

donde p es la presión, ρ es la densidad de energía, U^β es la velocidad del fluido.

Los gradientes en el espaciotiempo de un fluido imperfecto modifican este tensor de la siguiente forma:

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)U^\alpha U^\beta + \Delta T^{\alpha\beta} \tag{1.2.2}$$

$$N^\alpha = nU^\alpha + \Delta N^\alpha \tag{1.2.3}$$

donde $\Delta T^{\alpha\beta}$ es de primer orden en los gradientes y N^α es el vector de densidad de flujo de partículas. Además p = presión, ρ = densidad de energía total, n = densidad numérica de partículas y U^α = velocidad del fluido. Estas cantidades no están definidas con precisión y para eliminar esta ambigüedad es conveniente determinar a ρ y a n desde un sistema de referencia comóvil el cual se caracteriza por $U^i \equiv 0$, $U^0 \equiv 1$. Así,

$$\rho \equiv T^{00}, \qquad n \equiv N^0. \tag{1.2.4}$$

Por su parte, p sigue siendo una función de ρ y n, como en el caso en que los gradientes son despreciables y no hay disipación.

Ahora, U^α es la velocidad de transporte de partículas, por lo tanto las componentes N^i de N^α (vector de corriente de partículas) se anulan en el sistema comóvil. Sustituyendo en (1.2.2) y (1.2.3)

$$\begin{aligned} N^0 &= nU^0 + \Delta N^0 \\ n &= n + \Delta N^0 \end{aligned}$$

de donde $\Delta N^0 = 0$ y

$$\begin{aligned} \Delta N^i &= nU^i + \Delta N^i \\ 0 &= \Delta N^i \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} T^{00} &= p\eta^{00} + (p+\rho)U^0U^0 + \Delta T^{00} \\ \rho &= -p + p + \rho + \Delta T^{00} \\ \Delta T^{00} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en un sistema de Lorentz se tiene

$$U^\alpha U^\beta \Delta T_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.2.5}$$

$$\Delta N^\alpha = 0 \tag{1.2.6}$$

Debe notarse que todos los efectos disipativos contribuyen a $\Delta T^{\alpha\beta}$. La finalidad es construir el tensor disipativo lo más general posible restringido por (1.2.5) y por la segunda ley de la termodinámica, la cual indica que la presión p, la densidad de energía ρ y el volumen por partícula (1/n), pueden expresarse como función de la temperatura T y la entropía por partícula σk de la siguiente forma:

$$kTd\sigma = pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\rho}{n}\right).$$

El movimiento del fluido produce entropía y ésta puede calcularse a partir de la ley de conservación

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0$$

contrayendo con U_α:

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.2.7}$$

En virtud de (1.2.2) se tiene que

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}[p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)U^\alpha U^\beta] = -U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Delta T^{\alpha\beta}$$

empleando la segunda ley de la termodinámica

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}[p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)U^\alpha U^\beta] = -kT\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(n\sigma U^\alpha)$$

donde T y σk son la temperatura y la entropía por partícula.

Regresando a (1.2.7) se encuentra que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(n\sigma U^\alpha) = \frac{1}{kT}U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Delta T^{\alpha\beta}$$

Definiendo $S^\alpha \equiv nk\sigma U^\alpha - T^{-1}U_\beta \Delta T^{\alpha\beta}$ se tiene

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{T}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}\Delta T^{\alpha\beta} + \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^\beta}U_\alpha \Delta T^{\alpha\beta} \tag{1.2.8}$$

Esta ecuación expresa la tasa de producción de entropía por unidad de volumen. Nótese que $S^0 = nk\sigma$ es la densidad de entropía en el sistema comóvil; así es que S^α se interpreta entonces como el cuadrivector de flujo de entropía. De (1.2.8) se encuentra que la segunda ley de la termodinámica requiere que $\Delta T^{\alpha\beta}$ sea una combinación lineal de gradientes de velocidad y temperatura tal que $\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha}$ sea siempre positiva para cualquier configuración del fluido, esta característica resulta del segundo término en la definición de S^α.

Supóngase ahora que se observa al fluido desde el sistema de referencia comóvil en un punto P del espaciotiempo; U^{i}, $\frac{\partial U^0}{\partial x^\alpha}$ y ΔT^{00} se anulan de modo que la razón de producción de energía por unidad de volumen en P será

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\left(\frac{1}{T}\dot{U}_{\mathrm{i}} + \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^{\mathrm{i}}}\right)\Delta T^{\mathrm{i}0} - \frac{1}{T}\frac{\partial U_{\mathrm{i}}}{\partial x^{\mathrm{j}}}\Delta T^{\mathrm{ij}} \tag{1.2.9}$$

Para que ésta sea positiva en cualquier configuración del fluido construyamos la combinación lineal de la forma:

$$\Delta T^{\mathrm{i}0} = -\chi\left(\frac{\partial T}{\partial x^{\mathrm{i}}} + T\dot{U}_{\mathrm{i}}\right) \tag{1.2.10}$$

$$\Delta T^{\mathrm{ij}} = -\varsigma\left(\frac{\partial U_{\mathrm{i}}}{\partial x^{\mathrm{j}}} + \frac{\partial U_{\mathrm{j}}}{\partial x^{\mathrm{i}}} - \frac{2}{3}\nabla\cdot U\delta_{\mathrm{ij}}\right) - \eta\nabla\cdot U\delta_{\mathrm{ij}} \tag{1.2.11}$$

Por lo tanto la ecuación (1.2.8) puede escribirse como

$$\frac{\partial S^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\chi}{T^2}(\nabla T + T\dot{U})^2 + \frac{\varsigma}{2T}\left(\frac{\partial U_{\mathrm{i}}}{\partial x^{\mathrm{j}}} + \frac{\partial U_{\mathrm{j}}}{\partial x^{\mathrm{i}}} - \frac{2}{3}\nabla\cdot U\delta_{\mathrm{ij}}\right)\left(\frac{\partial U_{\mathrm{i}}}{\partial x^{\mathrm{j}}} + \frac{\partial U_{\mathrm{j}}}{\partial x^{\mathrm{i}}} - \frac{2}{3}\nabla\cdot U\delta_{\mathrm{ij}}\right)$$
$$+ \frac{\eta}{T}(\nabla\cdot U)^2 \geq 0 \qquad (1.2.12)$$

Los coeficientes χ, ζ y η son positivos o iguales a cero y se identifican como los coeficientes de conducción de calor, viscosidad de corte y viscosidad de bulto respectivamente.

Recuérdese que este resultado se obtuvo en el sistema de referencia comóvil, de modo que para que sea lo más general posible debe ser válido en un sistema general de Lorentz. Con este propósito se harán las siguientes definiciones:

$$W_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial U^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \qquad (1.2.13)$$

$$Q_{\alpha} \equiv \frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} + T\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}U^{\beta} \qquad (1.2.14)$$

$$H_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} + U_{\alpha}U_{\beta} \qquad (1.2.15)$$

que son respectivamente el tensor de corte, el vector de flujo de calor y el tensor de proyección en el hiperplano normal a U^{α}.

Los resultados (1.2.10),(1.2.11) y (1.2.12) se satisfacen por el tensor

$$\Delta T^{\alpha\beta} = -\zeta H^{\alpha\gamma}H^{\beta\delta}W_{\gamma\delta} - \chi(H^{\alpha\gamma}U^{\beta} + H^{\beta\gamma}U^{\alpha})Q_{\gamma} - \eta H^{\alpha\beta}\frac{\partial U^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \qquad (1.2.16)$$

que es un invariante de Lorentz y, por lo tanto, válido tanto en el sistema de referencia comóvil como en un sistema de referencia general de Lorentz.

En base a las dimensiones se espera que los coeficientes χT, ζ y η sean del orden de la presión, de la energía térmica y proporcional al tiempo libre medio, respectivamente.

En general, los coeficientes de viscosidad y de conducción de calor dependen de la presión y de la densidad numérica de partículas y son parámetros fenomenológicos. El coeficiente de viscosidad de bulto regularmente es más pequeño que el correspondiente a la viscosidad de corte y al de conducción de calor, pero en general, no es despreciable. Por ejemplo, cuando se tiene un gas perfecto la traza del tensor energía-momento es una función de ρ (densidad de energía) y n (densidad numérica de partículas) en los extremos relativista o no relativista; para kT del orden de m (masa de las partículas que constituyen el fluido), $T^{\alpha}{}_{\alpha}$ no puede expresarse como una función de ρ y n, y la viscosidad de bulto es del orden de la viscosidad de corte.

La viscosidad de bulto además, es importante en un fluido que permita un rápido intercambio de energía entre grados de libertad traslacionales e internos, como sucede en un gas de esferas rígidas.

Existe un caso de particular interés en cosmología, que tiene lugar cuando un medio material (en el que el tiempo libre medio es muy pequeño) interactúa con radiación, donde los cuantos tienen un tiempo libre medio finito (τ). En este caso, los coeficientes de conducción de calor, viscosidad de corte y viscosidad de bulto están dados por

$$\chi = \frac{4}{3} a T^3 \tau$$
$$\zeta = \frac{4}{15} a T^4 \tau$$
$$\eta = 4 a T^4 \tau \Big[\frac{1}{3} - (\frac{\partial p}{\partial \rho})_n\Big]^2$$

donde a es la constante de Stefan-Boltzmann, de modo que la densidad de energía de radiación es aT^4, p es la presión total, ρ es la densidad deenergía total. En este caso χT, ζ y η son comparables, pero si la presión y la energía térmica están dominadas por la radiación, entonces $(\frac{\partial p}{\partial \rho})_n \simeq \frac{1}{3}$, de modo que la viscosidad de bulto resulta ser muy pequeña.

Toda esta descripción se ha llevado a cabo en el marco de la relatividad especial. El tensor energía-momento en relatividad general se modifica de la siguiente forma [11]:

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = (\rho + p)\mathrm{U}_\mu \mathrm{U}_\nu + p\mathrm{g}_{\mu\nu}$$

donde la métrica ya no es la métrica de Minkowski, si no alguna en el espaciotiempo curvo.

§ 1.3.- Condiciones de Energía de Hawking-Penrose

Hawking y Ellis (1968) [12] y posteriormente Hawking y Penrose (1970) [13] en base al hecho observacional de la radiación de fondo en microondas, plantean que el universo debió haber tenido singularidades, ésto en base a suposiciones de causalidad. Este resultado se resume en un teorema conocido como teorema de Hawking-Penrose:

Un espaciotiempo M no puede ser geodésica y causalmente completo si además de satisfacer las ecuaciones de Einstein, con $\Lambda \leq 0$, no satisface las siguientes condiciones:

a) No hay curvas temporaloides cerradas en M.

b) Para cualquier vector temporaloide unitario t^{α}

$$\mathrm{T}_{\mu\nu}\mathrm{t}^{\mu}\mathrm{t}^{\nu} \geq \frac{1}{2}\mathrm{T}^{\mu}_{\mu} \qquad (1.3.1)$$

c) Cualquier geodésica causal γ contiene al menos un punto en el cual

$$\mathrm{k}_{[\mu}\mathrm{R}_{\nu]\alpha\beta[\rho}\mathrm{k}_{\sigma]}\mathrm{k}^{\alpha}\mathrm{k}^{\beta} \neq 0 \qquad (1.3.2)$$

donde k_{μ} es el vector tangente a γ en el punto en consideración.

d) M contiene al menos una de las siguientes situaciones:

1) Una superficie atrapada.

2) Un punto P tal que cualquier cono de luz del pasado desde P, converge.

3) Una hipersuperficie espacialoide compacta.

Una geodésica causal es una geodésica temporaloide o nula.

La suposición (a) equivale a afirmar que no se viola la causalidad. La suposición (b) por su parte, toma en cuenta el hecho de que el tensor energía-momento es un tensor simétrico, por lo tanto puede reducirse en cualquier punto a la forma diagonal:

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = \mathrm{Diag} \quad \|\rho, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3\| \qquad (1.3.3)$$

donde ρ es la densidad de energía total y P_1, P_2 y P_3 son los valores principales de la presión anisotrópica.

De la ecuación de Raychauduri [14], que describe la razón de cambio de la expansión (θ):

$$\xi^c\nabla_c\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{\mathrm{ab}}\sigma^{\mathrm{ab}} + \omega_{\mathrm{ab}}\omega^{\mathrm{ab}} - \mathrm{R}_{\mathrm{cd}}\xi^{\mathrm{c}}\xi^{\mathrm{d}} \qquad (1.3.4)$$

dode θ es la expansión (volumen), ω es el tensor de rotación, σ es el tensor de corte.

Y puesto que

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right]$$

entonces

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} &= 8\pi\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right]t^{\mu}t^{\nu} \\ &= 8\pi\left[T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu}\right] \\ &= 8\pi\left[T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} - \frac{1}{2}Tt^{\mu}t_{\mu}\right] \\ &= 8\pi\left[T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} - \frac{1}{2}T\right] \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

aquí $T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu}$ es la densidad de energía de la materia medida por un observador cuya cuadrivelocidad es t^{μ}; en general se supone positiva

$$T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} \geq 0 \tag{1.3.6}$$

Esta desigualdad se conoce como condición de energía débil.

Se esperaría también que la tensión debida a la materia no fuera tan grande y negativa para hacer al lado derecho de (1.3.5) negativo, así:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} - \frac{1}{2}T &\geq 0 \\ T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} &\geq \frac{1}{2}T \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Esta es la condición de energía fuerte.

Tomando en cuenta que cuando un tensor $T_{\mu\nu}$ es diagonal, toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu}U_{\nu} + P_1 x_{\mu}x_{\nu} + P_2 y_{\mu}y_{\nu} + P_3 z_{\mu}z_{\nu} \tag{1.3.8}$$

donde $\left[U^{\mu}, x^{\mu}, y^{\mu}, z^{\mu}\right]$ es una base ortonormal,
U^{μ} es temporaloide,
ρ es la densidad de energía en reposo,
P_i, $i = 1, 2, 3$ son las presiones principales.

Dada esta forma de $T_{\mu\nu}$, la condición de energía débil se cumple sí y sólo sí

$$\begin{aligned} &\rho \geq 0 \\ &\rho + P_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

mientras que la condición de energía fuerte es equivalente a

$$\begin{aligned} &\rho + \sum_{i=1}^{3} P_i \geq 0 \\ &\rho + P_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Nótese que ambas condiciones requieren que $\rho \geq 0$.
Así es que

$$T_{\mu\nu} t^{\mu} t^{\nu} \geq \frac{1}{2} T^{\mu}_{\mu}$$

es equivalente

$$\rho + \sum_{i=1}^{3} P_i \geq 0$$

y

$$\rho + P_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

La suposición (c) significa que cualquier geodésica causal pasa através de una región no vacía del espacio, o toca una región donde el vector tangente se desvía de la dirección principal determinada por el tensor de curvatura.

En cuanto a la suposición (d) puede concluirse que en el caso de un cuerpo colapsándose, se satisfacen todas las suposiciones del teorema.

Hawking y Penrose suponenen de la distribución de energía de Plank observada en la radiación de fondo, que debió haber suficiente materia en cada geodésica nula dirigida hacia el pasado desde P (donde P es la posición actual en el espaciotiempo) para hacer la profundidad óptica suficientemente grande, de modo que la radiación pudo sufrir una rápida dispersión antes de alcanzarnos.

El teorema de Hawking-Penrose, sin embargo, no proporciona ninguna información acerca de la naturaleza de la singularidad en el espaciotiempo.

En resumen, para que un fluido sea físicamente razonable [15] debe obedecer las condiciones de energía

i) Débil: $T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} \geq 0$

ii) Dominante: Un vector temporaloide t^{μ} que señala hacia el futuro, en cada evento del espaciotiempo, el vector de densidad del cuadrimomento $-T_{\mu\nu}t^{\nu}$ debe señalar hacia el futuro y ser temporaloide o nulo.

iii) Condición de energía fuerte: Para cualquier vector unitario temporaloide que señala hacia el futuro t^{μ} , en cada evento del espaciotiempo la tensión de la materia está restringida de acuerdo con $2T_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} + T \geq 0$ (T es la traza de $T_{\mu\nu}$).

La condición de energía débil es equivalente a decir que la densidad de energía del fluido, medida por cualquier observador, es positiva. La condición de energía dominante, por su parte, puede interpretarse diciendo que la rapidez del flujo de energía de la materia, es menor que la rapidez de la luz para cualquier observador. La condición de energía fuerte significa que la densidad de energía total es positiva. Sin embargo, se ha encontrado que una presión negativa puede haber tenido significado físico durante las etapas tempranas del universo [16]. De acuerdo con las investigaciones de Barrow [9], la presencia de la viscosidad de bulto genera una componente de presión negativa que viola la condición de energía débil, e interpreta a la viscosidad de bulto como un efecto debido a la creación de partículas o disipación térmica. Davis [10] investiga los defectos topológicos cosmológicos como las texturas, para lo cual requiere de una densidad de energía negativa. De modo que una densidad de energía negativa puede tener una interpretación física.

Hawking y Ellis en 1973 [17], en base a la isotropía de la radiacíon de fondo, suponen que nuestro universo es del tipo de Friedmann por lo menos durante la etapa de dispersión.

Se han construido diferentes modelos de universos homogéneos en los que invariablemente se encuentran singularidades de diferentes tipos, todas en el marco de la relatividad general, de modo que parece ser que la única manera de "escapar" del teorema de Hawking-Penrose es aceptar líneas temporaloides cerradas, como lo hacen algunas teorías, pero a cambio se viola la causalidad.

Existen algunos modelos de universos homogéneos libres de singularidades (Murphy 1973 [1], Heller et al 1973 [18], Heller-Suszycki 1974 [19]) llenos con un fluido viscoso con viscosidad de bulto, pero que violan las condiciones de energía de Hawking-Penrose. En los modelos en los que tiene lugar creación de partículas en campos gravitacionales, aparecen términos que se interpretan como presión negativa, lo cual viola la condición de energía de Hawking-Penrose. Morochnik, Elikhov y Vereshkov (1975) [20], tratan de justificar los términos de presiones negativas intoduciendo turbulencias que causan fluctuaciones en la métrica y en las variables del fluido. Estas suposiciones les conducen a un modelo de universo que evita el colapso a la singularidad.

Sin embargo, los modelos no singulares tienen poca aceptación puesto que para la etapa temprana de muy altas densidades y "pequeñas" distancias los efectos cuánticos son predominantes; pero aún no está completamente desarrollada la teoría cuántica de la gravitación.

Por otra parte, los modelos anisotrópicos presentan una variedad de posibilidades en cuanto a singularidades.

CAPITULO 2

APLICACION COSMOLOGICA AL MODELO DE ROBERTSON-WALKER

El estudio de soluciones cosmológicas en el marco de la relatividad general usualmente se realiza empleando el tensor energía-momento correspondiente a un fluido perfecto. Puesto que el propósito consiste en construir modelos cuyas soluciones se acerquen mejor a las observaciones, deben tomarse en cuenta la mayor cantidad posible de procesos que tienen lugar en el universo físico. Tal es el caso de los procesos disipativos debidos a la viscosidad presente en un fluido real.

En las teorías cosmológicas relativistas la imagen del universo es una variedad cuadridimensional en la cual la física y la geometría están completamente ligadas. Por lo tanto la suposición de homogeneidad e isotropía que propone el principio cosmológico tiene fuertes implicaciones en la geometría del espaciotiempo, que en este caso admite un grupo de movimientos que involucran seis parámetros, de modo tal que todos los puntos y direcciones en el espacio tridimensional son equivalentes.

La homogeneidad espacial implica que el espaciotiempo debe admitir un grupo de movimientos con tres generadores espacialoides independientes. Las trayectorias de este grupo definen una familia de hipersuperficies espacialoides paralelas geodésicamente, por lo tanto las ortogonales a estas hipersuperficies son temporaloides.

El elemento de línea, correspondiente tiene la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \ d\phi^2) \right] \tag{2.1}$$

donde a es una función del tiempo, $k = 0, 1, -1$; $\quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad$ y $\quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Este es el elemento de línea de Robertson-Walker que deja a la función a y al parámetro k indeterminados; para relacionarlos con la distribución de materia y radiación en el universo, se requiere de una teoría de gravitación como la de Einstein. El elemento de línea de Robertson-Walker se obtiene de la aplicación de teoría de grupos a una variedad riemanniana $3 + 1$ dimensional.

§ 2.1.- Ecuaciones de Campo de Einstein

La descripción del sistema se realizará desde el sistema de referencia comóvil, es decir, donde la cuadri-velocidad es $U_\mu = \delta^0_\mu$.

Las ecuaciones de campo de Einstein están dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2.1.1}$$

El lado izquierdo de la ecuación está definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Re \tag{2.1.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Re &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad \text{es el escalar de curvatura} && (2.1.3)\\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\lambda}\left[\Gamma^\lambda_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}\right] \quad \text{es el tensor de Riemann} && (2.1.4)\\
\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad \text{son los simbolos de Christoffel} && (2.1.5)
\end{aligned}$$

Como se observa, sólo a partir de la métrica puede determinarse el lado izquierdo de las ecuaciones de campo.

Las componentes de la métrica de Robertson-Walker (R-W) están dadas por

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1\\
g_{11} &= \frac{a^2}{1 - kr^2}\\
g_{22} &= a^2 r^2\\
g_{33} &= a^2 r^2 \mathrm{sen}^2\theta
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

de donde los símbolos de Christoffel distintos de cero son (eq. (2.1.17))

$$\begin{array}{llll}
\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} & \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma^2_{02} = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma^3_{03} = \Gamma^2_{02}\\
\Gamma^0_{22} = r^2 a\dot{a} & \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} & \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} & \Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{12}\\
\Gamma^0_{33} = r^2 a^2 \dot{a}\mathrm{sen}^2\theta & \Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2} & \Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{02} & \Gamma^3_{23} = \cos\theta\\
 & \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2) & \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} & \Gamma^3_{30} = \Gamma^3_{03}\\
 & & \Gamma^2_{33} = \mathrm{sen}\theta\cos\theta & \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13}\\
 & \Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\mathrm{sen}^2\theta & & \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23}
\end{array}$$

y las componentes del tensor de Riemann distintas de cero

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a} \\
R_{11} &= \frac{1}{1-kr^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\
R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\
R_{33} &= r^2 \mathrm{sen}^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\
\Re &= \frac{6}{a^2}(a\ddot{a}^2 + \dot{a}^2 + k)
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

donde esta última expresión corresponde al escalar de curvatura. Con estos resultados se encuentra que las componentes del lado izquierdo de las ecuaciones de campo son:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \\
G_{11} &= \frac{1}{kr^2 - 1}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\
G_{22} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\
G_{33} &= -r^2 \mathrm{sen}^2\theta(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

donde el punto indica derivada respecto del tiempo. El lado derecho de las ecuaciones (2.1.1) es el tensor energía-momento que corresponderá al de un fluido viscoso como es el propósito del presente trabajo.

El principio cosmológico impone varias restricciones al tensor $T_{\mu\nu}$; usando las ecuaciones de campo, todas las componentes de $T_{\mu\nu}$ cuando $\mu \neq \nu$ se anulan y $T_{11} = T_{22} = T_{33}$, es decir, la tensión normal es la misma en todas direcciones, mientras que la tensión tangencial y el flujo de energía se anulan. No se tendrá entonces viscosidad de corte ni conducción de calor debido a la suposición de isotropía, es decir, no habrá radiación electromagnética ni gravitacional excepto en forma difusa. Por lo tanto la viscosidad de bulto, es decir, la viscosidad del fluido como un todo, no se anula.

En base a estas consideraciones se obtiene (Weinberg 1971 [21]) la siguiente forma general del tensor energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \bar{p})U_\mu U_\nu + \bar{p}g_{\mu\nu} \tag{2.1.10}$$

donde ρ es la densidad de energía, U_μ es la cuadri-velocidad y

$$\bar{p} = p - \eta U^\mu{}_{;\mu} \tag{2.1.11}$$

es la presión total, donde p es la presión normal y η es el coeficiente de viscosidad de bulto.

Antes de igualar los correspondientes términos de la ecuación (2.1.1) deben determinarse la ecuación de estado y la forma y dependencia del coeficiente de viscosidad de bulto.

La ecuación de estado en general relaciona a la presión, la densidad de energía y la entropía. Usualmente en cosmología se supone que la entropía es un invariante, es decir, una constante en el espacio, de modo que la ecuación de estado será una relación entre la densidad y la presión. Existen varios casos de interés en cosmología en cuanto a ecuaciones de estado dadas por la ley

$$\mathrm{p} = \varepsilon \rho \qquad\qquad -1 \leq \varepsilon \leq 1 \tag{2.1.12}$$

Esta ecuación de estado es aplicable a varias clases de fluidos, tal es el caso de polvo, entendiendo como tal a una colección de partículas que se encuentran en reposo en un sistema de Lorentz. Para este caso particular la ecuación de estado correspondiente es $\mathrm{P} = 0$ ($\varepsilon = 0$), o bién cuando $\varepsilon = \frac{1}{3}$ la ecuación de estado corresponde a un gas de fotones. Otro caso de interé en cosmología surge cuando $\varepsilon = 1$, que corresponde a un gas de "stiff matter" que es un fluido relativista bajo grandes presiones.

Davis [10] utiliza una ecuación de estado con $\varepsilon = -1/3$ que resulta aplicable a "texturas". Con el propósito de investigar otras implicaciones que puede tener el considerar una ecuación de estado de este tipo, consideraremos en este trabajo éste y los valores anteriormente mencionados para ε.

Por otra parte, el coeficiente de viscosidad de bulto tendrá la forma:

$$\eta = \eta_0 \rho^n \tag{2.1.13}$$

donde η_0 es una constante distinta de cero, ρ.es la densidad de energía y n es un número real.

La ecuación (2.1.11) corresponde a la presión total: la presión normal más la presión viscosa, ésta última dada por

$$\sigma \equiv -\eta \mathrm{U}^{\mu}{}_{;\mu} \tag{2.1.14}$$

se conoce como la ecuación de Eckart. Esta ecuación presenta dos problemas importantes: predice que los pulsos viscosos se propagan con rapidez infinita y además presenta algunas inestabilidades [22,23]. Con el propósito de evitar estas dificultades se proponen otras teorías como la de Maxwell-Cattaneo quienes proponen una presión viscosa dada por

$$\tau \dot{\sigma} + \sigma = -\eta \mathrm{U}^{\mu}{}_{;\mu} \tag{2.1.15}$$

donde τ es el tiempo de relajación. Esta teoría predice una rapidez de propagación de los pulsos viscosos dados por

$$v = \left(\frac{\eta}{\rho\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{c} \tag{2.1.16}$$

Una teoría aún más completa es la teoría generalizada de Israel-Stewart de segundo orden, según la cual

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = -\eta \mathrm{U}^{\mu};_{\mu} - \frac{1}{2}\eta\sigma \mathrm{T}\rho \mathrm{U}^{\mu}\nabla_{\mu}\left(\frac{\tau}{\mathrm{T}\rho\eta}\right) \tag{2.1.17}$$

donde la incorporación de los términos no lineales se interpreta como una consecuencia debida a ecuaciones de estado no lineales. No obstante que ésta última es la ecuación más aceptada, no esta exenta de dificultades, ya que impone severas restricciones sobre la estructura del fluido, que no son físicamente claras.

Sakari y Jou [24] comparan modelos cosmológicos con un fluido viscoso como fuente en la métrica de R-W, utilizando las tres ecuaciones constitutivas para la presión viscosa y resuelven algunos caso. Concluyen que los resultados dependen de la ecuación de estado utilizada, además de la ecuación constitutiva.

En este trabajo se utilizará

$$\mathrm{p} = \varepsilon\rho \tag{2.1.18}$$

como ecuación de estado,

$$\eta = \eta_0 \rho^n \tag{2.1.19}$$

como coeficiente de viscosidad de bulto y

$$\sigma = -\eta \mathrm{U}^{\mu};_{\mu} \tag{2.1.20}$$

como presión viscosa. Además se investigará que condiciones de energía cumplen las soluciones.

Establecidas estas ecuaciones puede ahora determinarse el tensor energía-momento (2.1.10) cuyas componentes son:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{00} &= \rho \\
\mathrm{T}_{11} &= \frac{a^2}{1-\mathrm{kr}^2}\left(\mathrm{p} - 3\eta\frac{\dot{a}}{a}\right) \\
\mathrm{T}_{22} &= a^2\mathrm{r}^2\left(\mathrm{p} - 3\eta\frac{\dot{a}}{a}\right) \\
\mathrm{T}_{33} &= a^2\mathrm{r}^2\mathrm{sen}^2\theta\left(\mathrm{p} - 3\eta\frac{\dot{a}}{a}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Estas componentes de $T_{\mu\nu}$ constituyen el lado derecho de la ecuación (2.1.1) de modo que igualando éstas a las correspondientes componentes dadas en (2.1.19) se obtendrán las ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi\rho a^2 + \mathrm{k} &= 0 \\ \ddot{a} + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}^2}{a} - 12\pi\eta\dot{a} + 4\pi \mathrm{p} a + \frac{\mathrm{k}}{2a} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

como se ve, estas ecuaciones pueden reducirse, para lo cual de la primera de ellas se obtiene que

$$\rho = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{3\mathrm{k}}{a^2} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \tag{2.1.23}$$

pero de la segunda ecuación se tendrá

$$\frac{\mathrm{k}}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi\left(\mathrm{p} - 3\eta\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

utilizando (2.1.18) y (2.1.19):

$$\frac{\mathrm{k}}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi\left(\varepsilon\rho - 3\eta_0\rho^n\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

Introduciendo aquí la ecuación (2.1.23) se obtendrá:

$$2a\ddot{a} + \mathrm{A}(\dot{a}^2 + \mathrm{k}) + \mathrm{B}\frac{\dot{a}a}{a^{2n}}\left(\dot{a}^2 + \mathrm{k}\right)^n = 0 \tag{2.1.24}$$

donde

$$\mathrm{A} \equiv 3\varepsilon + 1 \ , \ \mathrm{B} \equiv -(8\pi)^{1-\mathrm{n}}3^{1+\mathrm{n}}\eta_0 \tag{2.1.25}$$

Para resolver la ecuación (2.1.24) se supondrá que $\dot{a}$ es una función de a, de modo que puede definirse

$$\mathrm{y} \equiv (\dot{a}^2 + \mathrm{k})$$

como una función también de a. Así

$$a\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{da}} + \mathrm{Ay} + \mathrm{B}a^{(1-2n)}\mathrm{y}^n(\mathrm{y} - \mathrm{k})^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{2.1.26}$$

Como ya se señaló, el parámetro k puede tomar los valores $0, 1, -1$, de modo que la ecuación anterior se resolverá para estos valores de k. Otro parámetro cuyo valor no se ha determinado es n, algunos valores de éste tienen particular interés en este trabajo, específicamente nos interesaremos en $\mathrm{n} = 0, \frac{1}{2}, 1$ que respectivamente corresponderán a la época de viscosidad constante, con $\mathrm{n} = \frac{1}{2}$ la descripción se aproxima a la época cercana al Big-Bang y para $\mathrm{n} = 1$, la época de baja densidad [14]. El parámetro ε, por su parte, que está presente en la ecuación de estado tendrá también algunos valores de particular interés en este trabajo, como ya se mencionó $\varepsilon = 0$ corresponde a la ecuación de estado de un gas constituido por polvo, $\varepsilon = \frac{1}{3}$ cuando se trata de un fluido de fotones, $\varepsilon = 1$ corresponde al caso de "stiff matter" y como particular interés se estudiará el caso de $\varepsilon = -\frac{1}{3}$.

Las diferentes combinaciones de los valores mencionados para los parámetros k, n y ε que aparecen en la ecuación (2.1.25), dan lugar a un conjunto de casos que se estudiarán por separado. En primer lugar, se considerarán cada uno de los valores que puede tomar k y para cada una de ellos, los distintos valores que puede tomar n y ε. Por ejemplo, dado $\mathrm{k} = 0$ la ecuación (2.1.24) será

$$2a\ddot{a} + \mathrm{A}\dot{a}^2 + \mathrm{B}a^{(1-2n)}\dot{a}^{(2n+1)} = 0 \qquad (2.1.27)$$

ahora quedan indeterminados n y ε implícitos en A. Se dijo que n tomará los valores $0, \frac{1}{2}$ y 1, así es que en la ecuación (2.1.27) usamos el primero ($\mathrm{n} = 0$):

$$2a\ddot{a} + \mathrm{A}\dot{a}^2 + \mathrm{B}a\dot{a} = 0 \qquad (2.1.28)$$

de (2.1.25) se tiene que

$$\mathrm{A} = 3\varepsilon + 1 \ \text{y} \ \mathrm{B} = -24\pi\eta_0$$

A está en función de del parámetro ε que se dijo puede tomar los valores $0, \frac{1}{3}, 1$ y $-\frac{1}{3}$, de acuerdo con lo cual A$= 1, 2, 4$ y 0 respectivamente, lo que da lugar a cuatro posibilidades en la ecuación (2.1.28). Es decir, se tendrá:

$$\begin{aligned} 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \mathrm{B}a\dot{a} &= 0 \\ 2a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + \mathrm{B}a\dot{a} &= 0 \\ 2a\ddot{a} + 4\dot{a}^2 + \mathrm{B}a\dot{a} &= 0 \\ 2a\ddot{a} + \mathrm{B}a\dot{a} &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones corresponden respectivamente a un universo abierto, homogéneo e isotrópico lleno con un fluido cuyo coeficiente de viscosidad de bulto es constante ($\mathrm{n} = 0 \ \Rightarrow \ \eta = \eta_0$) donde el fluido consiste de polvo ($\varepsilon = 0$), radiación ($\varepsilon = \frac{1}{3}$), "stiff matt" ($\varepsilon = 1$) y texturas ($\varepsilon = -\frac{1}{3}$).

A continuación se considerará el siguiente valor para n ($\mathrm{n} = \frac{1}{2}$) que da origen a la ecuación

$$a\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{da}} + \mathrm{Ay} + \mathrm{By}^{2/3} = 0 \qquad (2.1.29)$$

donde

$$\mathrm{B} = -(8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0 \ \ \text{y} \ \ \mathrm{A} = 3\epsilon + 1$$

para la que también surgen cuatro posibilidades correspondientes a cada uno de los valores que puede tomar ε $(0, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Para n= 1 la ecuación correspondiente será

$$a\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{da}} + \mathrm{Ay} + \mathrm{B}a^{-1}\mathrm{y}^2 = 0 \tag{2.1.30}$$

con

$$\mathrm{B} = -9\eta_0 \quad y \quad \mathrm{A} = 3\epsilon + 1$$

donde los cuatro valores de ε generan otras cuatro posibilidades.

Restaría ahora considerar los otros valores que puede tomar k $(1,\ -1)$ y para cada uno de ellos las posibilidades que surgen de los valores para n y ε, como se hizo para k= 0; sin embargo, en este trabajo solo se resuelve para k= 1 y k= -1 cuando n= 0 y $\varepsilon = -\frac{1}{3}$, es decir, el caso de un universo homogéneo, isotrópico, espacialmente cerrado (k= 1) o espacialmente abierto (k= -1) que contiene a un fluido que obedece a la ecuación de estado $\mathrm{p} = -\frac{1}{3}\rho$ y cuya viscosidad de bulto es constante.

A continuación se listan las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada uno de los casos mencionados que se resolverán y estudiarán.

k= 0

n= 0

$$\epsilon = 0 \qquad 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \mathrm{B}\dot{a}a = 0 \tag{2.1.31}$$

$$\epsilon = 1/3 \qquad 2a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + \mathrm{B}\dot{a}a = 0 \tag{2.1.32}$$

$$\epsilon = 1 \qquad 2a\ddot{a} + 4\dot{a}^2 + \mathrm{B}\dot{a}a = 0 \tag{2.1.33}$$

$$\epsilon = -1/3 \qquad 2a\ddot{a} + \mathrm{B}\dot{a}a = 0 \tag{2.1.34}$$

n= 1/2

$$\epsilon = 0 \qquad 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 1 + \mathrm{B} = 0 \tag{2.1.35}$$

$$\epsilon = 1/3 \qquad 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 2 + \mathrm{B} = 0 \tag{2.1.36}$$

$$\epsilon = 1 \qquad 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 4 + \mathrm{B} = 0 \tag{2.1.37}$$

$$\epsilon = -1/3 \qquad 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 \mathrm{B} = 0 \tag{2.1.38}$$

n= 1

$$\epsilon = 0 \qquad 2a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2 + \mathrm{B}\dot{a}^3 = 0 \tag{2.1.39}$$

$$\epsilon = 1/3 \qquad 2a^2\ddot{a} + 2a\dot{a}^2 + \mathrm{B}\dot{a}^3 = 0 \tag{2.1.40}$$

$$\epsilon = 1 \qquad 2a^2\ddot{a} + 4a\dot{a}^2 + \mathrm{B}\dot{a}^3 = 0 \tag{2.1.41}$$

$$\epsilon = -1/3 \qquad 2a^2\ddot{a} + \mathrm{B}\dot{a}^3 = 0 \tag{2.1.42}$$

k= 1
n= 0

$$\epsilon = -1/3 \qquad 2a\ddot{a} + \mathrm{B}\dot{a}a = 0 \tag{2.1.43}$$

k= -1
n= 0

$$\epsilon = -1/3 \qquad 2a\ddot{a} + \mathrm{B}\dot{a}a = 0 \tag{2.1.44}$$

Claramente nuestro objetivo ahora es resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales para el factor de escala a. Regresando a la ecuación (2.1.26) puede notarse que si k=0 se tiene

$$a\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{da}}+\mathrm{Ay}+\mathrm{B}a^{(1-2n)}\mathrm{y}^{(n+1/2)}=0 \tag{2.1.45}$$

Realizando algunos cambios de variables, esta ecuación puede integrarse con relativa facilidad, dando como resultado:

$$\frac{\dot{a}}{a}=\left[\mathrm{c}'a^{-(A/2+1)(1-2n)}-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}+2}\right]^{1/(1-2n)} \quad \text{para} \quad \mathrm{n}\neq 1/2 \tag{2.1.46}$$

o bien

$$a^{1+(A+B)/2}=\left[\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})+1\right](\mathrm{c}'\mathrm{t}+\alpha) \qquad \text{si} \quad \mathrm{n}=1/2 \tag{2.1.47}$$

donde c' es una constante de integración.

El caso n=0 corresponde al grupo de ecuaciones (2.1.31)-(2.1.34) y para este valor de n apartir de (2.1.46) se tiene que

$$\frac{\dot{a}}{a}=\left[\mathrm{c}'a^{-(A/2+1)}-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}+2}\right] \tag{2.1.48}$$

donde

$$\mathrm{B}=-24\pi\eta_0 \text{ y } \mathrm{A}=3\epsilon+1$$

Puede ahora resolverse cada una de las ecuaciones (2.1.31)-(2.1.34) introduciendo el respectivo valor del parámetro ε: Cuando $\varepsilon=0$ se tiene

$$\dot{a}=\mathrm{c}'a^{-1/2}-\frac{\mathrm{B}}{3}a$$

integrando esta ecuación entre a, a_0, y t, t_0 la solución obtenida es

$$a=\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o \mathrm{t}}-\mathrm{c}_1\right]^{2/3} \tag{2.1.49}$$

donde

$$\mathrm{c}_1\equiv\frac{3\mathrm{c}'}{24\pi\eta_0}, \quad \mathrm{c}\equiv {a_0}^{3/2}+\mathrm{c}_1$$

son constantes de integración y $t_0=0$. Si ahora $\varepsilon=\frac{1}{3}$ de (2.1.48):

$$\dot{a}=\mathrm{c}'a^{-1}-\frac{\mathrm{B}}{4}a$$

integrando esta ecuación se tiene

$$a=\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_0 \mathrm{t}}-\mathrm{c}_1\right]^{1/2} \tag{2.1.50}$$

donde

$$c_1 \equiv \frac{4c'}{24\pi\eta_0}, \quad c \equiv a_0^2 + c_1 \ \ y \ \ t_0 = 0$$

cuando $\varepsilon = 1$ la correspondiente ecuación diferencial a resolver es

$$\dot{a} = c' a^{-2} - \frac{B}{6} a$$

que al integrarla se encuentra que

$$a = \left[c e^{12\pi\eta_0 t} - c_1 \right]^{1/3} \tag{2.1.51}$$

donde

$$c_1 \equiv \frac{6c'}{24\pi\eta_0}, \quad c \equiv a_0^3 + c_1 \ \ y \ \ t_0 = 0$$

Para $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ la ecuación a resolver es

$$\dot{a} = c' - \frac{B}{2} a$$

la correspondiente solución está dada por

$$a = c e^{12\pi\eta_0 t} - c_1 \tag{2.1.52}$$

donde

$$c_1 \equiv \frac{2c'}{24\pi\eta_0}, \quad c \equiv a_0 + c_1, \ \ \mathrm{y} \ \ t_0 = 0$$

También a partir de la ecuación (2.1.46) pueden resolverse los casos correspondientes a las ecuaciones (2.1.39)-(2.1.42) para los cuales n=1:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a^{(A/2+1)} - \frac{B}{A+2} \right]^{-1} \tag{2.1.53}$$

donde

$$B = -24\pi\eta_0 \ \ \mathrm{y} \ \ A = 3\varepsilon + 1$$

Nuevamente se distinguirán varios casos que dependen del valor de ε: Para $\varepsilon = 0$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a^{3/2} - \frac{B}{3} \right]^{-1}$$

La integración de esta ecuación da como resultado

$$c_1 a^{2/3} + \ln a^{8\pi\eta_0} = t + c_2 \tag{2.1.54}$$

donde

$$c_1 \equiv \frac{2}{3}c', \quad c_2 \equiv \frac{2}{3}c' a_0^{3/2} + \ln a_0^{8\pi\eta_0}, \quad t_0 = 0$$

cuando $\varepsilon = \frac{1}{3}$ la ecuación a resolver es

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a^2 - \frac{B}{4}\right]^{-1}$$

cuya solución está dada por

$$c_1 a^2 + \ln a^{9\eta_0/4} = t + c_2 \tag{2.1.55}$$

donde

$$c_1 \equiv \frac{1}{2}c', \quad c_2 \equiv \frac{c'}{2}a_0^2 + \ln a^{9\eta_0/4}, \quad t_0 = 0$$

Si ahora $\varepsilon = 1$ se tiene que

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a^3 - \frac{B}{6}\right]^{-1}$$

la solución correspondiente es

$$c_1 a^3 + \ln a^{3\eta_0/2} = t + c_2 \tag{2.1.56}$$

donde

$$c_1 \equiv \frac{1}{3}c', \quad c_2 \equiv \frac{c'}{3}a_0^3 + \ln a_0^{3\eta_0/2}, \quad t_0 = 0$$

En cuanto a $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ la correspondiente ecuación es

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a - \frac{B}{2}\right]^{-1}$$

y su solución será

$$c_1 a + \ln a^{9\eta_0/2} = t + c_2 \tag{2.1.57}$$

donde

$$c_1 = c', \quad c_2 = c a_0 + \ln a^{9\eta_0/2} \quad \text{y} \quad t_0 = 0$$

El conjunto de ecuaciones (2.1.39)-(2.1.42) corresponden al valor n= $\frac{1}{2}$, en las que también se distinguirán varios casos dependiendo del valor de ε. Para $\varepsilon = 0$ la ecuación a resolver será:

$$a\ddot{a} = \alpha \dot{a}^2$$

donde

$$\alpha \equiv 1 - \frac{1+B}{2}, \quad B \equiv -(8\pi)^{1/2} 3^{3/2} \eta_0$$

esta ecuación tiene la solución

$$
\begin{aligned}
a &= |c_1 t + c_0|^{1/\alpha} && ,\alpha \neq 0 \\
a &= c_1 e^{ct} && ,\alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.1.58}
$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{3}$ se tiene la misma ecuación diferencial y sólo difiere en el valor de la constante α.

Cuando $\varepsilon = \frac{1}{3}$ la solución está dada por

$$
\begin{aligned}
a &= |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} && ,\alpha \neq 0 \\
a &= c_1 e^{ct} && ,\alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.1.59}
$$

donde

$$\alpha = 2 - \frac{1}{2}(8\pi)^{1/2} 3^{3/2} \eta_0, \quad c_1, \quad c_0 \text{ son constantes de integracion}$$

Si $\varepsilon = 1$ la solución correspondiente es

$$
\begin{aligned}
a &= |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} && ,\alpha \neq 0 \\
a &= c_1 e^{ct} && ,\alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.1.60}
$$

donde

$$\alpha = 6 + (8\pi)^{1/2} 3^{3/2} \eta_0, \quad c_1, \quad c_0 \ c \text{ son constantes de integracion}$$

En cuanto a $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ se tiene la solución

$$
\begin{aligned}
a &= |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} && ,\alpha \neq 0 \\
a &= c_1 e^{ct} && ,\alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.1.61}
$$

donde

$$\alpha \equiv 2 - (8\pi)^{1/2} 3^{3/2} \eta_0, \quad c_1, \quad c_0 \text{ son constantes de integracion}$$

Nótese que cuando n=0 y $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ las ecuaciones diferenciales correspondientes a los casos k= ± 1 son los mismos que para el caso k=0 y claramente se tendrán las mismas soluciones.

§ 2.2.- Densidad de Energía

Antes de interpretar físicamente las soluciones que se han obtenido, recuérdese que la ecuación diferencial que se está resolviendo surgió de la combinación de las ecuaciones (2.1.22) por lo cual no aparece la densidad de energía ρ en la ecuación diferencial. Sin embargo es de fundamental importancia investigar el comportamiento de la densidad de energía a lo largo de la evolución del universo; con tal propósito regresamos a la ecuación (2.1.23):

$$\rho = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{3\mathrm{k}}{a^2} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]$$

Se han encontrado las expresiones de a para distintos casos determinados por los valores de los parámetros k, n y ε, de modo que para los mismos valores de estos parámetros se resolverá para ρ. Así cuando k=0

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \tag{2.2.1}$$

y para k=0,n=0,$\varepsilon = 0$ se encontró que

$$a = \left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_0 t} - \mathrm{c}_1\right]^{2/3}$$

de modo que en este caso

$$\rho = 24\pi(\eta_0\mathrm{c})^2 e^{24\pi\eta_0}\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{-2} \tag{2.2.2}$$

Análogamente para k=0,n=0,$\varepsilon = \frac{1}{3}$ se encontró que

$$a = \left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{1/2}$$

por lo tanto

$$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0\mathrm{c})^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{-2} \tag{2.2.3}$$

cuando k=0,n=0,$\varepsilon = 1$

$$a = \left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{1/3}$$

entonces

$$\rho = 6\pi(\eta_0\mathrm{c})^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{-2} \tag{2.2.4}$$

Y cuando k=0, n=0, $\varepsilon = -\frac{1}{3}$

$$a = \left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]$$

de modo que se tiene

$$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\pi\eta_o c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2} \tag{2.2.5}$$

para k=0 y n=1 los valores de a están expresados por las relaciones (2.1.54)-(2.1.57) en las que se puede observar que a no puede despejarse explícitamente. Sin embargo, puesto que ρ está dada por

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$

y de acuerdo con la ecuación (2.1.46) cuando n=1:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a^{(A/2+1)} - \frac{B}{a+2}\right]^{-1}$$

donde B$= -9\eta_0$ y A$= 3\varepsilon + 1$ Se tiene que cuando $\varepsilon = 0$, A=1,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[c' a^{3/2} + 3\eta_0\right]^{-1}$$

de modo que

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^{3/2} + 3\eta_0\right]^{-2} \tag{2.2.6}$$

que queda expresada como una función del factor de escala a y no explícitamente como función del tiempo. Análogamente para los restantes casos considerados

k=0, n=1, $\varepsilon = \frac{1}{3}$

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^2 + \frac{9}{4}\eta_0\right]^{-2} \tag{2.2.7}$$

para k=0, n=1, $\varepsilon = 1$

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^3 + \frac{3}{2}\eta_0\right]^{-2} \tag{2.2.8}$$

Cuando k=0, n=1, $\varepsilon = -\frac{1}{3}$

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a + \frac{9}{2}\eta_0\right]^{-2} \tag{2.2.9}$$

En cuanto a n$= \frac{1}{2}$ (k=0) las expresiones de a están dadas por las ecuaciones (2.1.58)-(2.1.61) en las que para cada caso se tienen dos valores de a: Para k=0, n=$\frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0$

$$a = |c_1 t + c_0|^{\frac{1}{\alpha}} \qquad , \alpha \neq 0$$
$$a = c_1 e^{ct} \qquad , \alpha = 0$$

y puesto que

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$

entonces

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{|c_0|^2} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \qquad ,\alpha = 0 \tag{2.2.10}$$

Cuando k=0, n= $\frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$

$$a = |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$a = c_1 e^{ct} \qquad ,\alpha = 0$$

Por lo tanto

$$\rho = \frac{3}{2\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \qquad ,\alpha = 0 \tag{2.2.11}$$

En cuanto a k=0, n= $\frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$

$$a = |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$a = ce^{ct} \qquad ,\alpha = 0$$

y

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{2c_1}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \qquad ,\alpha = 0 \tag{2.1.12}$$

Cuando k=0, n= $\frac{1}{2}$, $\varepsilon = -\frac{1}{3}$

$$a = |c_1 + c_0|^{2/\alpha} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$a = c_1 e^{ct} \qquad ,\alpha = 0$$

de modo que

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 |c_1 t + c_0|^{-2} \qquad ,\alpha \neq 0$$
$$\rho = \frac{3}{2\pi}c^2 \qquad ,\alpha = 0 \tag{2.2.13}$$

TABLA 2.1

k	n	ϵ	Factor de Escala	Densidad de Energía
0	0	0	$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{2/3}$	$\rho = 24\pi(\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$
0	0	1/3	$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{1/2}$	$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$
0	0	1	$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{1/3}$	$\rho = 6\pi(\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$
0	0	-1/3	$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]$	$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$
0	1/2	0	$a = \vert c_1 t + c_0\vert^{1/\alpha}, \alpha \neq 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \vert c_1 t + c_0\vert^{-2} \quad , \alpha \neq 0$
0	1/2	0	$a = c_1 e^{ct} \quad , \alpha = 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \quad , \alpha = 0, \quad \alpha = (2\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0 - 1$
0	1/2	1/3	$a = \vert c_1 t + c_0\vert^{2/\alpha}, \alpha \neq 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \vert c_1 t + c_0\vert^{-2} \quad , \alpha \neq 0$
0	1/2	1/3	$a = c_1 e^{ct} \quad , \alpha = 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \quad , \alpha = 0, \quad \alpha = 2 - \frac{1}{2}(8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$
0	1/2	1	$a = \vert c_1 t + c_0\vert^{2/\alpha}, \alpha \neq 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{2c_1}{\alpha}\right)^2 \vert c_1 t + c_0\vert^{-2} \quad , \alpha \neq 0$
0	1/2	1	$a = c_1 e^{ct} \quad , \alpha = 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \quad , \alpha = 0, \quad \alpha = 6 + (8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$
0	1/2	-1/3	$a = \vert c_1 t + c_0\vert^{2/\alpha}, \alpha \neq 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \vert c_1 t + c_0\vert^{-2} \quad , \alpha \neq 0$
0	1/2	-1/3	$a = c_1 e^{ct} \quad , \alpha = 0$	$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \quad , \alpha = 0, \quad \alpha = 2 - (8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$
0	1	0	$c' a^{3/2} + \ln a^{8\eta_0} = t + c''$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^{3/2} + 3\eta_0\right]^{-2}$
0	1	1/3	$c' a^2 + \ln a^{9\eta_0/4} = t + c''$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^2 + \frac{9}{4}\eta_0\right]^{-2}$
0	1	1	$c' a^3 + \ln a^{3\eta_0/2} = t + c''$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^3 + \frac{3}{2}\eta_0\right]^{-2}$
0	1	-1/3	$c' a + \ln a^{9\eta_0/2} = t + c''$	$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a + \frac{9}{2}\eta_0\right]^{-2}$
1	0	-1/3	$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]$	$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$
-1	0	-1/3	$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]$	$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$

§ 2.3.- Significado Físico de las Soluciones

Los resultados obtenidos hasta el momento se resumen en la tabla 2.1. El primer resultado que se lista, corresponde a un universo abierto, es decir, que se expande indefinidamente (k=0), que contiene polvo ($\varepsilon = 0$), cuyo coeficiente de viscosidad de bulto es constante (n=0). En este caso el factor de expansión es

$$a = \left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o \mathrm{t}} - \mathrm{c}_1\right]^{2/3}$$

Un parámetro importante susceptible de ser comparado con valores medidos de las observaciones es el parámetro de Hubble:

$$\mathrm{H} = \frac{\dot{a}}{a}$$

que en este caso particular tiene el valor dado por la expresión:

$$\mathrm{H} = 8\pi\eta_0 \mathrm{c} \frac{e^{12\pi\eta_o t}}{\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o \mathrm{t}} - \mathrm{c}_1\right]} \tag{2.3.1}$$

Investiguemos ahora si existen singularidades presentes en la solución obtenida. Necesariamente se presentará un estado singular cuando $a = 0$, esto ocurre en

$$\mathrm{t} = \frac{1}{12\pi\eta_o} \ln\left(\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{c}}\right) \tag{2.3.2}$$

Debe notarse, sin embargo, que el factor de escala no es un invariante y la singularidad puede ser aparente y sólo debida a las coordenadas utilizadas. Para comprobar que realmente existe una singularidad en el tiempo dado por (2.3.2), un invariante como el escalar de curvatura también debe ser singular en este tiempo. El escalar de curvatura está definido por

$$\Re = \mathrm{g}^{\mu\nu} \mathrm{R}_{\mu\nu}$$

donde $\mathrm{R}_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Riemann. En la métrica de R-W el escalar de curvatura es

$$\Re = \frac{6}{a}\ddot{a} + \frac{6}{a^2}\dot{a}^2 + \frac{6\mathrm{k}}{a^2} \tag{2.3.3}$$

y cuando k=0, n=0, y $\varepsilon = 0$

$$\Re = \frac{2}{3}(12\pi\eta_o)^2 \mathrm{c} \left[\frac{1}{\left[e^{\frac{c}{(12\pi\eta_o t)/2}} - \frac{\mathrm{c}_1}{e^{3t(12\pi\eta_o)/2}}\right]^{2/3}} + \frac{\mathrm{c}/3}{\left[\mathrm{c} + \frac{\mathrm{c}}{e^{12\pi\eta_o t}}\right]^2} \right] \tag{2.3.4}$$

Cuando el tiempo tiene el valor dado en (2.3.2), puede observarse de la ecuación anterior que el escalar de curvatura tenderá a infinito, lo cual representa una singularidad.

En cuanto a la constante de Hubble dada en (2.3.1), tiende a infinito cuando $\frac{1}{12\pi\eta_o}\ln(\frac{c_0}{c})$, es decir, presenta también una singularidad en el mismo tiempo. Por su parte, la densidad de energía se vuelve infinita también en el mismo tiempo.

Así, es posible notar que cuando el tiempo está dado por $\frac{1}{12\pi\eta_o}\ln(\frac{c_0}{c})$, que depende de las constantes c_1, c y η_0, el factor de escala, la densidad de energía, la constante de Hubble y el escalar de curvatura son singulares. Es decir, un universo homogéneo, isotrópico, abierto, que contiene polvo con viscosidad de bulto constante, evoluciona desde un estado singular donde la densidad de energía, la constante de Hubble y por lo tanto la velocidad de recesión son infinitas y el factor de escala es cero.

En un tiempo infinito, de (2.2.2) puede concluirse que la densidad de energía tiene a un valor constante

$$\rho = 24\pi{\eta_0}^2 \tag{2.3.5}$$

el factor de escala se hace infinito, mientras que la constante de Hubble alcanza un valor constante dado por

$$\mathrm{H} = 8\pi\eta_0 \tag{2.3.6}$$

de modo que la velocidad de recesión será directamente proporcional a la distancia d, *i.e.* $\mathrm{v} = 8\pi\eta_0\mathrm{d}$ y el escalar de curvatura tenderá nuevamente a un valor infinito.

En otras palabras, el universo que se está describiendo evoluciona desde una singularidad tipo Big-Bang y evoluciona hasta un estado de densidad de energía constante, pero que depende del valor del coeficiente de viscosidad de bulto y cuya velocidad de recesión es directamente proporcional a la distancia, donde la proporcionalidad depende también del coeficiente de viscosidad de bulto; sin embargo el escalar de curvatura en este estado evolucionado tiende a infinito, lo cual significa que existe una singularidad.

Analicemos ahora el caso de un universo abierto (k=0), que contiene a un fluido de radiación ($\varepsilon = \frac{1}{3}$), cuya viscosidad de bulto es constante (n=0). Se encontró que el factor de expansión en este caso está dado por

$$a = \left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{1/2}$$

y la densidad de energía es

$$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0\mathrm{c})^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[\mathrm{c}e^{12\pi\eta_o t} - \mathrm{c}_1\right]^{-2}$$

La singularidad en estos parámetros tienen lugar cuando el tiempo tiene el valor

$$\mathrm{t} = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln\left(\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{c}}\right) \tag{2.3.7}$$

esto es, en el instante dado por la ecuación (2.3.7) el factor de expansión es cero y la densidad de energía se hace infinita, mientras que el escalar de curvatura:

$$\Re = 3(12\pi\eta_o)^2 \frac{c}{c - \frac{c}{e^{12\pi\eta_o t}}} \tag{2.3.8}$$

en dicho instante tiende a infinito.

En cuanto a la contante de Hubble, dada en este caso por

$$H = 6\pi\eta_0 c \frac{e^{12\pi\eta_o t}}{\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]} \tag{2.3.9}$$

también se hace infinita, al igual que la velocidad de recesión.

Por lo tanto, se tiene una singularidad en este modelo cuando el tiempo tiende al valor dado por (2.3.7). Veamos ahora el comportamiento de estos parámetros cuando ha transcurrido un tiempo muy grande ($t \rightarrow \infty$). En este caso el factor de expansión (2.1.44) tiende a una valor infinito, pero la densidad de energía tiende a un valor que sólo depende del coeficiente de viscosidad de bulto,

$$\rho \rightarrow \frac{3}{8}\pi(12\eta_0)^2$$

La constante de Hubble, por su parte, tiende a un valor constante:

$$H = 6\pi\eta_0 \tag{2.3.10}$$

por lo tanto la velocidad de recesión no diverge en estados muy evolucionados del universo.

En cuanto al escalar de curvatura dado por (2.3.8) no presenta singularidad, si no que alcanza el valor constante:

$$\Re = 3(12\pi\eta_o)^2 \tag{2.3.11}$$

Ahora puede concluirse que un universo homogéneo, isotrópico, lleno con un fluido de radiación con viscosidad de bulto, evoluciona a partir de una singularida tipo Big-Bang, que no se evita con la presencia de viscosidad, sin embargo ésta permanece presente a lo largo de la evolución del universo. Cuando ha transcurrido un tiempo muy largo el factor de expansión tiene un comportamiento singular, pero no la densidad de energía ni el escalar de curvatura que tienden hacia un valor constante, aunque depende del valor del coeficiente de viscosidad de bulto, no representan una singularida física, (al igual que en otros parámetros como la constante de Hubble).

Consideremos ahora un universo abierto (k=0) conteniendo a un fluido de "stiff matter" ($\varepsilon = 1$) con viscosidsd de bulto constante (n=0). De acuerdo con los resultados listados en la tabla 2.1, para este tipo de universo el factor de expansión y la densidad de energía están dados respectivamente por

$$a = \left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{1/3}$$

$$\rho = 6\pi(\eta_0 c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$$

calculando la constante de Hubble se tiene que

$$H = 4\pi\eta_0 c\frac{e^{12\pi\eta_o t}}{ce^{12\pi\eta_o t} - c_1} \tag{2.3.12}$$

Todos estos parámetros se vuelven singulares cuando

$$t = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln\left(\frac{c_1}{c}\right) \tag{2.3.13}$$

es decir, el factor de expansión tiende a cero, la densidad de energía tiende a infinito y la constante de Hubble tiende a infinito, al igual que la velocidad de recesión. Si efectivamente existe una singularidad en el instante dado en (2.3.13,) el escalar de curvatura

$$\Re = (12\pi\eta_o)^2 c\frac{1}{\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^2}\left[2e^{12\pi\eta_o t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right] + \frac{c}{3}e^{12\pi\eta_o t}\right] \tag{2.3.14}$$

también debe presentar una singularidad, lo cual así acurre. De esta manera el universo evoluciona desde una singularidad tipo Big-Bang en $t = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln\frac{c_1}{c}$ hasta un estado también singular cuando el tiempo tiende a infinito. Debe notarse que análogamente a los casos anteriores el factor de expansión tiende a infinito y el escalar de curvatura tiende a $2(12\pi\eta_o)^2$ lo cual no implica un estado singular, en tanto que la densidad de energía tiende a un valor dado por $6\pi\eta_0^2$ y la constante de Hubble a $4\pi\eta_0$, valores que dependen sólo del valor del coeficiente de viscosidad de bulto η_0.

Se considerará un caso más para un universo homogéneo e isotrópico abierto, lleno con un fluido con viscosidad constante, en el que ahora el fluido es un gas cuya ecuación de estado es $P= -\frac{1}{3}\rho$.

En este muy particular caso k=0, n=0, $\varepsilon = -\frac{1}{3}$, y de acuerdo con la tabla 2.1

$$a = ce^{12\pi\eta_o t} - c_1$$

$$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\pi\eta_o c)^2 e^{24\pi\eta_0 t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]^{-2}$$

además

$$H = 12\pi\eta_o c\frac{e^{12\pi\eta_o t}}{ce^{12\pi\eta_o t} - c_1} \tag{2.3.15}$$

$$\Re = (12\pi\eta_o)^2 c \frac{1}{\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right]} \left[2e^{12\pi\eta_o t}\left[ce^{12\pi\eta_o t} - c_1\right] + \frac{c}{3}e^{12\pi\eta_o t}\right] \tag{2.3.16}$$

Inspeccionando estos resultados es posible darse cuenta que tanto el factor de escala como la densidad de energía son singulares en el instante $t = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln(\frac{c_1}{c})$ al igual que la velocidad de recesión y el escalar de curvatura que confirma que se trata de una singularidad física tipo Big-Bang.

Para estados muy avanzados de evolución ($t \to \infty$) puede notarse que el factor de expansión y el escalar de curvatura se vuelven singulares, en tanto que la constante de Hubble y la densidad de energía tienden a los valores

$$H \to 12\pi\eta_o$$
$$\rho \to \frac{3}{8}\pi(12\eta_0)^2$$

respectivamente

Hasta este momento se ha analizado el comportamiento de modelos que representan a un universo homogéneo, isotrópico, abierto, que contiene a un fluido relativista con viscosidad de bulto constante y que puede ser polvo, radiación, "stiff matter" y cuando $P = -1/3\rho$, como se ha estudiado por separado. Se ha encontrado que en los cuatro casos el modelo evoluciona desde una singularidad tipo Big-Bang que tiene lugar en el mismo instante de tiempo para cada caso, sin embargo difieren notablemente en estados muy evolucionados.

Analicemos ahora el caso de un universo isotrópico, homogéneo, abierto, lleno de un fluido cuya viscosidad de bulto depende ahora de la raiz cuadrada de la densidad de energía $n = \frac{1}{2}$

$$\eta = \eta_0\rho^{1/2}$$

Como ocurre en estados tempranos de evolución, cercanos al Big-Bang. En la tabla 2.1 se listan los valores del factor de expansión y la densidad de bulto para cada uno de los fluidos que se están considerande. De acuerdo con ésto, el factor de expansión cambia con el tiempo en la forma

$$a = |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} \qquad \alpha \neq 0$$
$$a = c_1 e^{ct} \qquad \alpha = 0$$

donde

$$\alpha = (2\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0 - 1$$

Por su parte la densidad de energía está dada por

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{|c_1 t + c_0|} \qquad \alpha \neq 0$$
$$\rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \qquad \alpha = 0$$

En el instante $t = -(\frac{c_0}{c})$ el factor de expansión tiende a cero y la densidad de energía tiende a infinito cuando $\alpha \neq 0$, es decir, se tiene una singularidad. No así cuando $\alpha = 0$, en este caso el factor de expansión crece exponencialmente con el tiempo y diverge sólo cuando $t \to \infty$. Por su parte la densidad de energía es independiente del tiempo para $\alpha = 0$. Así se tiene un comportamiento singular en a y en ρ en el instante $t = -(\frac{c_0}{c_1})$ cuando $\alpha \neq 0$; en cuanto al escalar de curvatura

$$\Re = \frac{6c_1^2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)\frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \tag{2.3.17}$$

tiende a infinito en el mismo instante. Por lo tanto se presenta una singularidad física en $t = -(\frac{c_0}{c_1})$ para $\alpha \neq 0$. El escalar de curvatura para $\alpha = 0$ resulta ser

$$\Re = 12c^2 \tag{2.3.18}$$

que al igual que la densidad de energía no depende del tiempo, si no sólo de la constante de integración c.

La constante de Hubble, por su parte, tiene el valor dado por

$$H = \frac{c_1}{\alpha}\frac{1}{|c_1 t + c_0|} \qquad , \alpha \neq 0 \tag{2.3.19}$$

$$H = c \qquad , \alpha = 0 \tag{2.3.20}$$

Nótese que cuando $t = -\frac{c_0}{c_1}$, H crece hasta el infinito cuando $\alpha \neq 0$.

Investiguemos ahora el comportamiento de los parámetros de este universo cuando ha transcurrido un tiempo muy largo. En esta situación el factor de expansión se hace infinito y la densidad de energía se hace cero, el escalar de curvatura por su parte tiende a cero al igual que la constante de Hubble, por lo tanto la velocidad de recesión v=Hd se anula también, todo esto cuando

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow$$
$$\eta_0 \neq (2\pi)^{-1/2}3^{-3/2}$$

Así un universo homogéneo e isotrópico, abierto lleno con polvo cuya viscosidad de bulto depende de la raiz cuadrada de la densidad de energía, evoluciona desde una singulariadad tipo Big-Bang que tiene lugar en el instante $t = \frac{c_0}{c_1}$ (cuyo valor específico está determinado por las condiciones iniciales), hasta un estado estático (H=0) sin densidad de energía.

Considérese ahora el mismo modelo de universo, es decir, homogéneo, isotrópico, abierto con viscosidad de bulto dada por $\eta = \eta_0 \rho^{\frac{1}{2}}$, excepto que ahora estará lleno con un fluido de radiación ($\varepsilon = \frac{1}{3}$). Para este caso en la tabla 2.1 se da el valor del factor de expanción:

$$a = |c_1 t - c_0|^{1/\alpha} \qquad , \alpha = 2 - \frac{1}{2}(8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$$
$$a = c_1 e^{ct} \qquad , \alpha = 0$$

y la densidad de energía

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \qquad \text{, para } \alpha \neq 0$$

$$\rho = \frac{3}{8\pi} c^2 \qquad \text{, para } \alpha = 0$$

En este caso también se presenta una singularidad en el instante $t = -\frac{c_0}{c_1}$ tanto en a como en ρ y en el escalar de curvatura sólo cuando $\alpha \neq 0$, como puede verse de:

$$\Re = \frac{12c_1^2}{\alpha}\left(\frac{4}{\alpha} - 1\right)\frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \qquad \text{para } \alpha \neq 0 \tag{2.3.21}$$

$$\Re = 12c^2 \qquad \text{para } \alpha = 0 \tag{2.3.22}$$

Cuando $\alpha = 0$ puede notarse que ni la densidad de energía, ni el escalar de curvatura divergen en algún tiempo y el factor de expansión sólo lo hace cuando t tiende a menos infinito. Por otra parte, la constante de Hubble está dada por

$$H = \frac{2c_1}{\alpha}\frac{1}{|c_1 t + c_0|} \qquad \text{para } \alpha \neq 0 \tag{2.3.23}$$

$$H = c \qquad \text{para } \alpha = 0 \tag{2.3.24}$$

también diverge cuando $t = -\frac{c_0}{c_1}$ para $\alpha \neq 0$. Es decir, en este instante el factor de expansión se hace cero, la densidad de energía se hace infinita, la velocidad de recesión se hace infinita y el escalar de curvatura se hace infinito; esto representa una singularidad del tipo Big-Bang la cual cuando el tiempo evoluciona al infinito, la densidad de energía y la velocidad de recesión se hacen cero, es decir, se detiene la expansión. Este es exactamente el mismo comportamiento asintótico que el del modelo de universo que contiene polvo.

Se considerará ahora el mismo modelo excepto que ahora contiene un fluido de "stiff matter". Para este caso

$$a = |c_1 t + c_0|^{2/\alpha} \qquad \text{para } \alpha \neq 0 \text{ y } a = c_1 e^{ct} \qquad \text{para } \alpha = 0$$

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{2c_1}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \quad \text{para } \alpha \neq 0 \text{ y } \rho = \frac{3}{8\pi}c^2 \quad \text{para } \alpha = 0$$

El escalar de curvatura y la constante de Hubble están dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \Re &= \frac{12c_1^2}{\alpha}\left(\frac{4}{\alpha} - 1\right)\frac{1}{|c_1 t + c_0|^2} \qquad \text{para } \alpha \neq 0 \\ \Re &= 12c^2 \qquad \text{para } \alpha = 0 \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{2c_1}{\alpha} \mid c_1 t + c_0 \mid^{-1} && \text{para } \alpha \neq 0 \\
H &= c && \text{para } \alpha = 0
\end{aligned} \tag{2.3.26}
$$

Cuando $t = -\frac{c_0}{c_1}$, el factor de expansión se hace cero, la densidad de energía se hace infinita, la constante de Hubble, y por lo tanto la velocidad de recesión se hacen infinitas, todo esto significa que se tiene una singularidad, lo cual se confirma cuando el escalar de curvatura toma un valor infinito en el instante de tiempo mencionado. Al transcurrir el tiempo hasta valores muy grandes, el factor de expansión diverge en el infinito y la densidad de energía se anula, al igual que el escalar de curvatura y la velociadad de recesión, es decir, se llega a un estado estacionario sin densidad de energía en un tiempo muy grande, como sucede cuando se considera un fluido de polvo y de radiación.

En el orden en que se están considerando los resultados, corresponde ahora al mismo universo homogéneo, isotrópico, abierto, cuya viscosidad de bulto está dada por $\eta = \eta_0 \rho^{\frac{1}{2}}$, pero ahora se trata de un fluido cuya ecuación de estado es $P = -\frac{1}{3}\rho$. Para este caso nuevamente se tienen dos soluciones:

$$
\begin{aligned}
a &= \mid c_1 t + c_0 \mid^{2/\alpha} && \text{para } \alpha \neq 0 \\
a &= c_1 e^{ct} && \text{para } \alpha = 2 - (8\pi)^{1/2} 3^{3/2} \eta_0 \\
\rho &= (3/2\pi)(c_1/\alpha)^2 \mid c_1 t + c_0 \mid^{-2} && \text{para } \alpha \neq 0 \\
\rho &= (3/8\pi) c^2 && \text{para } \alpha = 0
\end{aligned}
$$

$$H = (2c_1/\alpha) \mid c_1 t + c_0 \mid^{-1} \qquad \text{para } \alpha \neq 0 \tag{2.3.27}$$

$$H = c \qquad \text{para } \alpha = 0 \tag{2.3.28}$$

$$\Re = (12c_1^2/\alpha)[(4/\alpha) - 1] \mid c_1 t + c_0 \mid^{-2} \qquad \text{para } \alpha \neq 0 \tag{2.3.29}$$

$$\Re = 12c^2 \qquad \text{para } \alpha = 0 \tag{2.3.30}$$

En este caso también cuando $\alpha \neq 0$ se presenta una singularidad en el instante $t = -\frac{c_0}{c_1}$, cuando el factor de expansión tiende a cero y la densidad de energía se hace infinita, la velocidad de recesión tiende a infinito ($H \to \infty$) y el escalar de curvatura también. No así cuando $\alpha = 0$; en este caso ni la densidad de energía , ni la velocidad de recesión ni el escalar de curvatura dependen del tiempo, si no sólo de la constante de integración c, cuyo valor lo determinan las condiciones iniciales.

Para un estado avanzado de evolución el factor de escala tiende a infinito, mientras que la densidad de energía, la velocidad de recesión y el escalar de curvatura se anulan.

Así, el modelo evoluciona desde una singularidad tipo Big-Bang hasta un estado estático sin densidad de energía, como los casos en que se consideró polvo o radiación.

Otro modelo de interés es el que corresponde a un universo homogéneo, isotrópico, abierto, con viscosidad de bulto cuyos valores están dados através de la relación $\eta = \eta_0 \rho$.

Considérese el caso de polvo ($\varepsilon = 0$) para el cual el factor de expansión está dado por (2.1.54):

$$c_1 a^{2/3} + \ln a^{8\pi\eta_0} = t + c_2$$

de donde no se puede expresar explícitamente a como función del tiempo, ni tampoco la densidad de energía (2.2.6):

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^{3/2} + 3\eta_0\right]^{-2} \tag{2.2.6}$$

De (2.3.31) puede notarse que a es cero cuando el tiempo tiende al valor menos infinito. Puesto que $a = 0$ se sugeriría la existencia de una singularidad, y se esperaría que la densidad de energía tuviera un comportamiento singular cuando $t \to -\infty$, es decir, cuando $a = 0$, sin embargo de (2.2.6) puede verse que este no es el caso, la densidad de energía toma el valor

$$\rho = \frac{3}{8\pi}(3\eta_0)^{-2}$$

que evidentemente no representa un comportamiento singular. Es de suponerse que el escalar de curvatura, que aunque no puede expresarse explísitamente en función del tiempo

$$\Re = 6\left[c' a^{3/2} + 3\eta_0\right]^{-2}\left[1 - \frac{3}{2}c' a^{1/2}\dot{a}\right] + \frac{27}{2}c'^2 a\dot{a}^2\left[c' a^{3/2} + 3\eta_0\right] \tag{2.3.31}$$

no tenga un comportamiento singular cuando $a = 0$, en efecto, tiene el valor

$$\Re = 6(3\eta_0)^{-2} \tag{2.3.32}$$

La constante de Hubble, por su parte queda expresada en función de a en la siguiente forma:

$$\mathrm{H} = -\frac{3}{2}c'\mathrm{a}^{1/2}\dot{\mathrm{a}}\left[c'\mathrm{a}^{3/2} + 3\eta_0\right]^{-2} \tag{2.3.33}$$

la cual se anula cuando a lo hace, de modo que la velocidad de recesión es cero cuando $a = 0$.

Así es que de acuerdo con este modelo, un universo homogéneo, isotrópico, abierto, que sólo contiene polvo, cuya viscosidad de bulto es $\eta = \eta_0 \rho$, no presenta singularidades ni en el pasado ni hacia el futuro.

Considérese el mismo tipo de universo para un fluido de radiación ($\varepsilon = \frac{1}{3}$). Aquí

$$c_1 a^2 + \ln a^{9\eta_0/4} = t + c_2$$

$a = 0$, es decir, tiene un comportamiento singular cuando el tiempo tiende a menos infinito, pero la densidad de energía

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[c' a^2 + \frac{9}{4}\eta_0\right]^{-2}$$

tiende al valor

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[\frac{9}{4}\eta_0\right]^{-2} \qquad (2.3.34)$$

que no representa singularidades. Análogamente al caso de polvo el escalar de curvatura no muestra comportamiento singular y la velocidad de recesión se anula. lo mismo ocurre para un fluido de "stiff matter" ($\varepsilon = 1$) cuando

$$c_1 a^3 + \ln a^{3\eta_0/2} = t + c_2$$

y

$$\rho = \frac{2}{8\pi}\left[c' a^3 + \frac{3}{2}\eta_0\right]^{-2}$$

donde a se hace cero sólo para un tiempo infinito en el pasado, pero la densidad de energía no es singular en el mismo tiempo, ni tampoco el escalar de curvatura. Exactamente el mismo comportamiento muestra el modelo cuando se estudia el caso de un fluido para el cual $P = -\frac{1}{3}\rho$.

De acuerdo con los anteriores resultados el presente modelo describe a un universo que evoluciona en el tiempo sin presentar comportamientos singulares cuando se tiene una densidad de energía baja cuya viscosidad de bulto se comporta como $\eta = \eta_0\rho$, ya sea que se trate de un fluido constituido por polvo, radiación, "stiff matter", o bién que obedesca a la ecuación de estado $P = -\frac{1}{3}\rho$. Cuando el universo homogéneo e isotrópico se expande indefinidamente con velocidad terminal finita (k=-1) u oscila (k=1), sólo resolvemos el modelo cuando la viscosidad de bulto es constante $\eta = \eta_0$ y cuando se trata de un fluido con ecuación de estado $P = -\frac{1}{3}\rho$.

En este caso es interesante notar que el modelo tiene exactamente la misma solución que cuando se trata de un universo abierto, es decir

$$a = c e^{12\pi\eta_0 t} - c_1$$

$$\rho = \frac{24\pi(\eta_0 c)^2}{\left[c - \frac{c_1}{e^{12\pi\eta_0 t}}\right]^2}$$

que son singulares ambos parámetros cuando

$$t = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln\left(\frac{c_1}{c}\right)$$

cuando también el escalar de curvatura es infinito y por lo tanto singular al igual que la constante de Hubble y por lo tanto la velocidad de recesión. Para estados muy avanzados de evolución cuando se trata del modelo para un universo cerrado el escalar de curvatura y la constante de Hubble tienen respectivamente los valores

$$\begin{aligned} \Re &= 6(12\pi\eta_o)^2 \\ \mathrm{H} &= 12\pi\eta_o \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

no presentan comportamientos singulares, es decir, el universo se expande con velocidad de recesión

$$\mathrm{v} = 12\pi\eta_o \mathrm{d}$$

y densidad de energía

$$\rho = \frac{3}{8}\pi(12\eta_0)^2$$

Se ha encontrado que para un universo isotrópico, homogéneo, abierto, lleno con un fluido con viscosidad de bulto constante $\eta = \eta_0$, cuando el fluido es polvo, radiación, stiff matte o cumple con la ecuación de estado $\mathrm{P} = -\frac{1}{3}\rho$, se presenta una singularidad tipo Big-Bang en el instante $\mathrm{t} = [\ln(\mathrm{c}_0/\mathrm{c}_1)]/12\pi\eta_o$. Para un estado muy evolucionado cuando se tiene un fluido de polvo o para el cual $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ el comportamiento es esencialmente el mismo, es decir, existe una singularidad física que se manifiesta en el escalar de curvatura, pero la densidad de energía alcanza un valor constante, al igual que el parámetro de Hubble, no obstante que el universo se expande indefinidamente con una velocidad terminal finita.

Para radiación y "stiff matter", por su parte, no existe singularidad cuando el tiempo se hace infinito, la densidad de energía permanece constante al igual que la velocidad de recesión.

Cuando la viscosidad del fluido se toma como $\eta = \eta_0 \rho^{\frac{1}{2}}$, que es el comportamiento adecuado para la viscosidad en estados muy tempranos de evolución del universo, conteniendo polvo, radiación, "stiff matter" o un fluido para el que $\mathrm{P} = -\frac{1}{3}\rho$, el modelo presenta una singularidad tipo Big-Bang en el tiempo $\mathrm{t} = -\frac{\mathrm{c}_0}{\mathrm{c}_1}$, desde la que evoluciona hasta que en un tiempo infinito cuando el fluido es polvo, radiación o que cumple con la ecuación de estado $\mathrm{P} = -\frac{1}{3}\rho$, se llega a otro estado singular en el que la densidad de energía se anula al igual que la velocidad de recesión.

Cuando el universo contiene un fluido de "stiff matter" no existe singularidad en un tiempo infinito cuando la densidad de energía y la constante de Hubble alcanzan un valor constante.

En cambio, para baja densidad la viscosidad de bulto está dada por $\eta = \eta_0\rho$. Tanto para polvo, radiación, "stiff matter" o cundo $\varepsilon = -\frac{1}{3}$, el modelo presenta el mismo comportamiento, esto es, en un tiempo infinito en el pasado existe una singularidad en el factor de expansión, pero no en el escalar de curvatura, ni en la densidad de energía que alcanza un valor constante y la velocidad de recesión se anula.

Cuando se trata de un universo homogéneo, isotrópico, abierto, con velocidad terminal finita, o cerrado ($k = \pm 1$), para un fluido que obedece $P = -\frac{1}{3}\rho$ con viscosidad de bulto constante, se encuentra la misma solución que para el modelo de universo cuando $k=0$.

Después de haber analizado diferentes casos para el modelo que se presenta en este trabajo, surge la cuestión de cuándo es aplicable, es decir, cómo se comparan nuestros resultados con las observaciones o con el modelo más conocido, el modelo estándar.

Con este propósito consideramos un parámetro físico, como la densidad de energía en términos de una cantidad medible, como la constante de Hubble.

De acuerdo con la discusión anterior para un tiempo muy grande y para una etapa de viscosidad constante, se encontró:

$$H = \alpha\pi\eta_0 \tag{2.3.36}$$

y

$$\rho = \beta\pi{\eta_0}^2 \tag{2.3.37}$$

donde α y β son constantes cuyos valores surgen al especificar qué tipo de fluido se considera. De (2.3.36) puede obtenerse

$$\eta_0 = \frac{H}{\alpha\pi}$$

De modo que la densidad de energía puede expresarse en términos de la constante de Hubble:

$$\rho = \frac{\beta}{\alpha^2\pi}H^2 \tag{2.3.38}$$

De acuerdo con las observaciones el universo actualmente se encuentra en una etapa dominada por la materia, de modo que para poder comparar el resultado (2.3.38) con algún valor medido observacionalmente, debe considerarse el caso de un fluido constituido por polvo. Para este fluido $P = 0$, se encontró que $H = 8\pi\eta_0$ y $\rho = 24\pi\eta_0^2$ para tiempos muy grandes, es decir, que $\alpha = 8$ y $\beta = 24$ en la ecuación (2.3.38):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{24}{64\pi}H^2 \\ &= \frac{3}{8\pi}H^2 \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

El modelo estándar predice una densidad crítica de

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi}H_0^2 \tag{2.3.40}$$

donde H_0 es el valor de la constante de Hubble en el estado actual del universo.

Así es que si se considera que $H = H_0$ en la ecuación (2.3.39) puede notarse que el modelo que se etá presentando en este trabajo conduce a la densidad crítica predicha por el modelo estándar, en un estado muy evolucionado; sólo que nuestro modelo requiere que la viscosidad de bulto sea constante. Sin embargo, en la etapa actual, la densidad de energía es baja [14], y se espera que el coeficiente de viscosidad de bulto se comporte actualmente como $\eta = \eta_0 \rho$ y no como $\eta = \eta_0$.

§ 2.4.- Condiciones de Energía

Si se cumple la condición de energía fuerte

$$T_{ab}u^a u^b \geq \frac{1}{2}T \tag{2.4.1}$$

y se satifacen las ecuaciones de Einstein, entonces se satisface también

$$R_{cd}U^c U^d > 0 \tag{2.4.2}$$

Puesto que se está considerando un sistema de referencia comóvil, se tiene $U^\mu = \delta_0^\mu$, entonces:

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = R_{\mu\nu}\delta_0^\mu \delta_0^\nu = R_{00} \tag{2.4.3}$$

de modo que

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu > 0 \Rightarrow R_{00} > 0 \tag{2.4.4}$$

De acuerdo con los resultados (2.1.8)

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

por lo tanto

$$\frac{\ddot{a}}{a} < 0 \tag{2.4.5}$$

Se han determinado las expresiones de a correspondientes a los diferentes casos que esencialmente dependen de los valores de k, n y ε como se lista en la tabla 2.1. Utilizando estos resultados y de acuerdo con la ecuación (2.4.5), se obtienen las condiciones de energía para cada caso y se listan en la tabla 2.2.

Como puede observarse en los resultados de la tabla 2.2, las condiciones de energía se reducen a condiciones sobre las constantes de integración que deben determinarse de las condiciones iniciales, también dependen del valor de la constante η_0 que debe ser positivo y distinto de cero.

En los valores listados en dicha tabla, puede notarse que para valores grandes de η_0 (valores grandes de la viscosidad de bulto), se viola la condición de energía fuerte.

En particular, la solución es inflacionaria cuando n=0, es decir, cuando la viscosidad es constante. Para la etapa cercana al Big-Bang (n=1/2) la condición de energía fuerte sólo se cumple si η_0 es mayor que un número específico y cuando el fluido consiste de polvo o "stiff matter"; sin embargo cuando el fluido es radiación o cumple con la ecuación de estado $P=1/3\rho$, se requiere que η_0 sea negativo para que se cumpla la condición de energía fuerte.

TABLA 2.2

k	n	ε	Requisitos para que se cumpla la condición de energía fuerte
0	0	0	(1) $e^{12\pi\eta_o t} < \frac{c_1}{c}$ y $c_1 \neq 0$ (2) $\frac{3c_1}{c} < e^{12\pi\eta_o t} < \frac{c_1}{c}$ y $c_1 \neq 0$ (3) $\frac{c_1}{c} < e^{12\pi\eta_o t} < \frac{3c_1}{2c}$ y $c_1 \neq 0$
0	0	1/3	(1) $\frac{c_1}{c} < e^{12\pi\eta_o t} < \frac{2c_1}{c}$ y $c_1 \neq 0$ (2) $e^{12\pi\eta_o t} < \frac{2c_1}{c}$ y $c_1 \neq 0$
0	0	1	(1) $\frac{c_1}{c} < e^{12\pi\eta_o t} < \frac{3c_1}{c}$ y $c_1 \neq 0$ (2) $e^{12\pi\eta_o t} < \frac{3c_1}{c}$ y $c_1 \neq 0$
0	0	$-1/3$	$e^{12\pi\eta_o t} < \frac{c_1}{c}$
0	1/2	0	$\eta_0 > \frac{2}{(2\pi)^{1/2}3^{3/2}}$ y $c_0 \neq -c_1 t$, $\alpha \neq 0$ No se cumple cuando $\alpha = 0$ donde $\alpha = (2\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0 - 1$
0	1/2	1/3	$\eta_0 < 0$ y $c_0 \neq -c_1 t$ $\alpha \neq 0$ No se cumple cuando $\alpha = 0$ donde $\alpha = 2 - \frac{1}{2}(8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$
0	1/2	1	$\eta_0 > \frac{-4}{(8\pi)^{1/2}3^{3/2}}$ y $c_0 \neq -c_1 t$ $\alpha \neq 0$ No se cumple cuando $\alpha = 0$ donde $\alpha = 6 + (8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$
0	1/2	$-1/3$	$\eta_0 < 0$ y $c_0 \neq -c_1 t$ $\alpha \neq 0$ No se cumple cuando $\alpha = 0$ donde $\alpha = 2 - (8\pi)^{1/2}3^{3/2}\eta_0$
0	1	0	$c' \neq \frac{-8\pi\eta_0}{a^{3/2}}$ y $c' > \frac{2}{3}\frac{1}{\dot{a}a^{1/2}}$
0	1	1/3	$c' \neq \frac{-9\eta_0}{4a^2}$ y $c' > \frac{1}{2}\frac{1}{\dot{a}a}$
0	1	1	$c' \neq \frac{-3\eta_0}{2a^2}$ y $c' > \frac{1}{3}\frac{1}{\dot{a}a^2}$
0	1	$-1/3$	$c' \neq \frac{-9\eta_0}{2a}$ y $c' > \frac{1}{\dot{a}}$

CAPITULO 3

APLICACION COSMOLOGICA AL MODELO INHOMOGENEO DE BIANCHI I

En el capítulo anterior se consideró el modelo de un universo que obedece el principio cosmológico y las implicaciones geométricas sobre el espaciotiempo que resultan de este hecho. Puesto que se observa homogeneidad e isotropía a grandes escalas e inhomogeneidad a "menores" escalas, el modelo de un universo anisotrópico y homogéneo a grandes escalas parece artificial, sin embargo se encuentra una aplicación importante de un espaciotiempo homogéneo y anisotrópico cuando se toman en cuenta los efectos de la viscosidad, debida a neutrinos.

En la teoría de grupos contínuos de movimiento se hace una importante simplificación en el estudio de modelos cosmológicos, teniendo secciones de espacios homogéneas. Si hay un grupo de tres parámetros que son simplemente transitivos en las variedades homogéneas, entonces las ecuaciones de campo de Einstein pueden reducirse a ecuaciones diferenciales que tienen al tiempo como variable independiente. Las líneas de tiempo se definen como las ortogonales a las variedades homogéneas y son geodésicas. Dichas ecuaciones diferenciales involucran las constantes de estructura del grupo, sin embargo pueden ser solamente nueve no equivalentes conjuntos de constantes de estructura para esos grupos llamados los grupos de Bianchi. Cuando el grupo es abeliano (grupo de tres traslaciones independientes), el espaciotiempo correspondiente se llama espaciotiempo tipo Bianchi I cuya métrica está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)dy^2 + C^2(t)dz^2 \tag{3.1}$$

donde A, B y C son funciones que dependen sólo del tiempo.

§ 3.1.- Ecuaciones de Campo de Einstein

Supóngase un espaciotiempo descrito por la métrica de Bianchi I (3.1) que contiene un fluido viscoso. En un universo homogéneo y anisotrópico el coeficiente de viscosidad debe incluir un coeficiente de viscosidad de corte y el correspondiente a la viscosidad de bulto. En este trabajo se considerará una viscosidad de corte nula, mientras que la viscosidad de bulto está dada por la función $\eta = \eta_0 \rho^n$, donde como hasta ahora η_0 es una constante positiva, ρ la densidad de energía y n tomará los valores 0, 1 y 1/2 como en los modelos estudiados en el capítulo anterior.

Considérese un observador en un sistema de referencia comóvil desde el que se describirá el comportamiento del universo. Para este observador la cuadrivelocidad será $v_\mu = \delta^0_\mu$. Las ecuaciones de Einstein están dadas por

$$\mathrm{G}_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

donde

$$\mathrm{G}_{\mu\nu} = \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{g}_{\mu\nu}\Re$$

Para calcular éstas se requiere de las componentes de la métrica

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{00} &= -1 \\ \mathrm{g}_{11} &= A^2(t) \\ \mathrm{g}_{22} &= B^2(t) \\ \mathrm{g}_{33} &= C^2(t) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= A\dot{A} \qquad & \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \dot{A}/A \\ \Gamma^0_{22} &= B\dot{B} \qquad & \Gamma^2_{02} &= \Gamma^2_{20} = \dot{B}/B \\ \Gamma^0_{33} &= C\dot{C} \qquad & \Gamma^3_{03} &= \Gamma^3_{30} = \dot{C}/C \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

y las componentes del tensor de Riemann distintas de cero:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{00} &= -\frac{1}{ABC}\left[BC\ddot{A} + AC\ddot{B} + AB\ddot{C}\right] \\ \mathrm{R}_{11} &= \frac{A}{BC}\left[BC\ddot{A} + C\dot{A}\dot{B} + B\dot{A}\dot{C}\right] \\ \mathrm{R}_{22} &= \frac{B}{AC}\left[AC\ddot{B} + C\dot{A}\dot{B} + A\dot{B}\dot{C}\right] \\ \mathrm{R}_{33} &= \frac{C}{AB}\left[AB\ddot{C} + B\dot{A}\dot{B} + A\dot{B}\dot{C}\right] \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\Re = \frac{2}{ABC}\left[AB\ddot{C} + B\dot{C}\dot{A} + A\dot{C}\dot{B} + BC\ddot{A} + C\dot{A}\dot{B} + AC\ddot{B}\right] \tag{2.1.4}$$

donde la última expresión es el escalar de curvatura. Así es que el lado izquierdo de las ecuaciones de campo tienen las componentes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{00} &= \frac{1}{ABC}\left[A\dot{C}\dot{B} + B\dot{C}\dot{A} + C\dot{A}\dot{B}\right] \\
\mathrm{G}_{11} &= -\frac{A^2}{BC}\left[C\ddot{B} + B\ddot{C} + \dot{C}\dot{B}\right] \\
\mathrm{G}_{22} &= -\frac{B^2}{AC}\left[C\ddot{A} + A\ddot{C} + \dot{C}\dot{A}\right] \\
\mathrm{G}_{33} &= -\frac{C^2}{AB}\left[B\ddot{A} + A\ddot{B} + \dot{A}\dot{B}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Por su parte, el lado derecho de las ecuaciones de campo está dado por

$$T_{\mu\nu} = (g + \overline{p})U_\mu U_\nu + \overline{p}g_{\mu\nu}$$

que es el tensor energía momento para el fluido viscoso que se está considerando, para el cual

$$\overline{p} = p - \eta \mathrm{U}^\mu{}_{;\mu}$$

Como en el capítulo anterior se utilizarán las ecuaciones de estado: $P = \varepsilon\rho$ con diferentes valores de ε, como $\varepsilon = 0$ cuando el fluido en consideración es polvo, $\varepsilon = \frac{1}{3}$ que corresponde a un gas de fotones, $\varepsilon = 1$ es un gas de Stiff matter o $\varepsilon = -\frac{1}{3}$ son los casos que se considerarán aquí.

El coeficiente de viscosidad de bulto que es el único que se considerará en este modelo, como en el capítulo anterior está dado por

$$\eta = \eta_0 \rho^n$$

donde η_0 es una constante distinta de cero, ρ la densidad de energía y n un número real para el que se considerarán los valores 0 y 1.

Nótese que en la ecuación de la presión total se incluyen las contribuciones de la presión normal y la presión viscosa: $\overline{p} = p - \eta \mathrm{U}^\mu{}_{;\mu}$, donde la expresión para la presión viscosa la da la teoría de Eckart, que como se mencionó en el capítulo anterior, es una teoría no causal que presenta algunas dificultades. Sin embargo se continuará utilizando esta ecuación en el presente modelo y se investigará al final qué condiciones de energía cumplen las soluciones.

Establecidas estas ecuaciones pueden ahora determinarse las componentes del tensor energía-momento:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{00} &= \rho \\
\mathrm{T}_{11} &= A^2\Big[p-\eta\Big(\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}+\frac{\dot C}{C}\Big)\Big] \\
\mathrm{T}_{22} &= B^2\Big[p-\eta\Big(\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}+\frac{\dot C}{C}\Big)\Big] \\
\mathrm{T}_{33} &= C^2\Big[p-\eta\Big(\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}+\frac{\dot C}{C}\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.1.6}
$$

De (3.1.5) y (3.1.6) se establecen las ecuaciones de campo:

$$A\dot C\dot B + B\dot C\dot A + C\dot A\dot B = 8\pi ABC\rho \tag{3.1.7}$$

$$C\ddot B + B\ddot C + \dot C\dot B = 8\pi BC\Big[\eta_0\rho^n\Big(\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}+\frac{\dot C}{C}\Big)-\varepsilon\rho\Big] \tag{3.1.8}$$

$$C\ddot A + A\ddot C + \dot C\dot A = 8\pi AC\Big[\eta_0\rho^n\Big(\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}+\frac{\dot C}{C}\Big)-\varepsilon\rho\Big] \tag{3.1.9}$$

$$B\ddot A + A\ddot B + \dot A\dot B = 8\pi AB\Big[\eta_0\rho^n\Big(\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}+\frac{\dot C}{C}\Big)-\varepsilon\rho\Big] \tag{3.1.10}$$

De la ecuació n (3.1.7) se encuentra que

$$\rho = \frac{1}{8\pi ABC}\Big[A\dot C\dot B + B\dot C\dot A + C\dot A\dot B\Big]$$

que al incluirse en las ecuaciones (3.1.8)−(3.1.10) el conjunto de las ecuaciones de campo se reduce a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta_0}{(8\pi)^{n-1}}\frac{BC}{(ABC)^{n+1}}\Big(A\dot C\dot B + B\dot C\dot A + C\dot A\dot B\Big)^n\Big(BC\dot A + AC\dot B + AB\dot C\Big)- \\
&\qquad \dot C\dot B(1+\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{A}\Big(B\dot C\dot A + C\dot A\dot B\Big) - C\ddot B - B\ddot C = 0
\end{aligned}
\tag{3.1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta_0}{(8\pi)^{n-1}}\frac{AC}{(ABC)^{n+1}}\Big(A\dot C\dot B + B\dot C\dot A + C\dot A\dot B\Big)^n\Big(BC\dot A + AC\dot B + AB\dot C\Big)- \\
&\qquad \dot C\dot A(1+\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{B}\Big(A\dot C\dot B + C\dot A\dot B\Big) - C\ddot A - A\ddot C = 0
\end{aligned}
\tag{3.1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta_0}{(8\pi)^{n-1}}\frac{AB}{(ABC)^{n+1}}\Big(A\dot C\dot B + B\dot C\dot A + C\dot A\dot B\Big)^n\Big(BC\dot A + AC\dot B + AB\dot C\Big)- \\
&\qquad \dot A\dot B(1+\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{C}\Big(A\dot C\dot B + B\dot C\dot A\Big) - B\ddot A - A\ddot B = 0
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

Como puede notarse este conjunto de ecuaciones cuyas variables son las funciones dependientes del tiempo A, B y C están en términos de los parámetros n, ε y η_0. El coeficiente η_0 se supondrá que es una constante positiva y diferente de cero; se considerarán todos los casos que resultan de las combinaciones de los valores $n = 0,\ 1$ y $\varepsilon = 0,\ 1/3,\ 1,\ -1/3$ como se realizó en el modelo presentado en el capítulo anterior.

Considérese primero el valor $n = 0$, el conjunto de ecuaciones (3.1.11) - (3.1.13) se reduce a

$$C\ddot{B} + B\ddot{C} + \varepsilon\frac{B}{A}\dot{C}\dot{A} + \varepsilon\frac{C}{A}\dot{A}\dot{B} + (1+\varepsilon)\dot{C}\dot{B} - 8\pi\eta_0\Big(BC\frac{\dot{A}}{A} + C\dot{B} + B\dot{C}\Big) = 0 \quad (3.1.14)$$

$$C\ddot{A} + A\ddot{C} + \varepsilon\frac{C}{B}\dot{A}\dot{B} + \varepsilon\frac{A}{B}\dot{C}\dot{B} + (1+\varepsilon)\dot{C}\dot{A} - 8\pi\eta_0\Big(C\dot{A} + AC\frac{\dot{B}}{B} + A\dot{C}\Big) = 0 \quad (3.1.15)$$

$$B\ddot{A} + A\ddot{B} + \varepsilon\frac{A}{C}\dot{C}\dot{B} + \varepsilon\frac{B}{C}\dot{C}\dot{A} + (1+\varepsilon)\dot{A}\dot{B} - 8\pi\eta_0\Big(B\dot{A} + A\dot{B} + AB\frac{\dot{C}}{C}\Big) = 0 \quad (3.1.16)$$

Para $n = 1$ las ecuaciones de campo son

$$\eta_0\frac{1}{A^2BC}\Big[3ABC\dot{A}\dot{B}\dot{C} + B^2C\dot{C}\dot{A}^2 + C^2B\dot{B}\dot{A}^2 + A^2C\dot{C}\dot{B}^2 + C^2A\dot{A}\dot{B}^2 + A^2B\dot{B}\dot{C}^2 + B^2A\dot{A}\dot{C}^2\Big] - C\ddot{B} - B\ddot{C} - \frac{\varepsilon}{A}\Big(B\dot{C}\dot{A} + C\dot{A}\dot{B}\Big) - \dot{C}\dot{B}(1+\varepsilon) = 0 \quad (3.1.17)$$

$$\eta_0\frac{1}{ACB^2}\Big[3ABC\dot{A}\dot{B}\dot{C} + B^2C\dot{C}\dot{A}^2 + C^2B\dot{B}\dot{A}^2 + A^2C\dot{C}\dot{B}^2 + C^2A\dot{A}\dot{B}^2 + A^2B\dot{B}\dot{C}^2 + B^2A\dot{A}\dot{C}^2\Big] - C\ddot{A} - A\ddot{C} - \frac{\varepsilon}{B}\Big(A\dot{C}\dot{B} + C\dot{A}\dot{B}\Big) - \dot{C}\dot{A}(1+\varepsilon) = 0 \quad (3.1.18)$$

$$\eta_0\frac{1}{ABC^2}\Big[3ABC\dot{A}\dot{B}\dot{C} + B^2C\dot{C}\dot{A}^2 + C^2B\dot{B}\dot{A}^2 + A^2C\dot{C}\dot{B}^2 + C^2A\dot{A}\dot{B}^2 + A^2B\dot{B}\dot{C}^2 + B^2A\dot{A}\dot{C}^2\Big] - B\ddot{A} - A\ddot{B} - \frac{\varepsilon}{C}\Big(A\dot{C}\dot{B} + B\dot{C}\dot{A}\Big) - \dot{A}\dot{B}(1+\varepsilon) = 0 \quad (3.1.19)$$

Claramente el propósito es ahora resolver estos conjuntos de ecuaciones diferenciales para las variables A, B y C. Considérese primero el caso n = 0:

$$AC\ddot{B} + AB\ddot{C} + \varepsilon B\dot{C}\dot{A} + \varepsilon C\dot{A}\dot{B} + (1+\varepsilon)A\dot{C}\dot{B} - 8\pi\eta_0\Big(BC\dot{A} + AC\dot{B} + AB\dot{C}\Big) = 0 \quad (3.1.20)$$

$$BC\ddot{A} + AB\ddot{C} + \varepsilon C\dot{A}\dot{B} + \varepsilon A\dot{C}\dot{B} + (1+\varepsilon)B\dot{C}\dot{A} - 8\pi\eta_0\Big(BC\dot{A} + AC\dot{B} + AB\dot{C}\Big) = 0 \quad (3.1.21)$$

$$BC\ddot{A} + AC\ddot{B} + \varepsilon A\dot{C}\dot{B} + \varepsilon B\dot{C}\dot{A} + (1+\varepsilon)C\dot{A}\dot{B} - 8\pi\eta_0\Big(BC\dot{A} + AC\dot{B} + AB\dot{C}\Big) = 0 \quad (3.1.22)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se propone la solución

$$A = A_0 e^{P_1 t} \tag{3.1.23}$$

$$B = B_0 e^{P_2 t} \tag{3.1.24}$$

$$C = C_0 e^{P_3 t} \tag{3.1.25}$$

Donde A_0, B_0, C_0 son constantes y P_1, P_2, P_3 son constantes que deben determinarse para que se cumplan simultáneamente las tres ecuaciones diferenciales que constituyen el sistema.

Sustituyendo la solución propuesta (3.1.23) - (3.1.25) en las ecuaciones (3.1.20) - (3.1.22) se encuentra que deben satisfacerse las siguientes ecuaciones:

$$P_2{}^2 + P_3{}^2 + P_2P_3 + \varepsilon(P_3P_1 + P_1P_2 + P_2P_3) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \tag{3.1.26}$$

$$P_1{}^2 + P_3{}^2 + P_3P_1 + \varepsilon(P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \tag{3.1.27}$$

$$P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_1P_2 + \varepsilon(P_3P_2 + P_3P_1 + P_1P_2) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \tag{3.1.28}$$

Este sistema de ecuaciones ahora algebráicas implican un conjunto de condiciones sobre los valores de las constantes P_1, P_2, y P_3 que al determinarse, las soluciones (3.1.23) - (3.1.25) cumplirá con las ecuaciones de campo.

De este modo deben resolverse ahora las ecuaciones (3.1.26) - (3.1.28) para P_1, P_2 y P_3; antes de lo cual nótese que aparece la constante ε que como se mencionó anteriormente son de interés en el presente trabajo algunos valores específicos para ésta, a saber $\varepsilon = 0,\ 1/3,\ 1,\ -1/3$ que al introducirse en las ecuaciones se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones a resolver. Para $\varepsilon = 0$ se encuentra que

$$\begin{aligned}
&(a) \quad P_2{}^2 + P_3{}^2 + P_2P_3 - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(b) \quad P_1{}^2 + P_3{}^2 + P_3P_1 - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(c) \quad P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_1P_2 - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Cuando $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned}
&(a) \quad (P_2 + P_3)^2 + P_1(P_3 + P_2) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(b) \quad (P_1 + P_3)^2 + P_2(P_1 + P_3) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(c) \quad (P_1 + P_2)^2 + P_3(P_2 + P_1) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Para $\varepsilon = 1/3$ se tiene

$$\begin{aligned}
&(a) \quad P_2{}^2 + P_3{}^2 + \frac{4}{3}P_2P_3 + \frac{1}{3}P_1(P_3 + P_2) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(b) \quad P_1{}^2 + P_3{}^2 + \frac{4}{3}P_1P_3 + \frac{1}{3}P_2(P_1 + P_3) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(c) \quad P_1{}^2 + P_2{}^2 + \frac{4}{3}P_1P_2 + \frac{1}{3}P_3(P_2 + P_1) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Cuando $\varepsilon = -1/3$

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad P_2{}^2 + P_3{}^2 + \frac{2}{3}P_2P_3 - \frac{1}{3}P_1(P_3 + P_2) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \\
&(b) \quad P_1{}^2 + P_3{}^2 + \frac{2}{3}P_1P_3 - \frac{1}{3}P_2(P_1 + P_3) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0 \qquad (3.1.32) \\
&(c) \quad P_1{}^2 + P_2{}^2 + \frac{2}{3}P_1P_2 - \frac{1}{3}P_3(P_1 + P_2) - 8\pi\eta_0(P_1 + P_2 + P_3) = 0
\end{aligned}
$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (3.1.29) se encuentran una serie de condiciones sobre las P's. Del conjunto de condiciones ninguna tendrá relevancia, ya que algunas implican isotropía y puesto que se está considerando un universo homogéneo pero anisotrópico ésta no tienen interés. Otras de estas condiciones requieren que la viscosidad de bulto se anule o bién implican soluciones imaginarias. De este modo, podemos concluir que no hay soluciones del tipo mostrado en las ecuaciónes (3.1.23)-(3.1.25) para este caso, de acuerdo con el modelo que se está presentando.

Resolviendo ahora el sistema (3.1.30) se encuentra el siguiente conjunto de condiciones:

$$P_1 = -P_2 - P_3, \qquad \text{donde } P_2 \quad \text{y} \quad P_3 \qquad \text{son arbitrarios}$$

Considérese ahora el sistema de ecuaciones (3.1.31), al resolverlo se encuentra que las condiciones implican o bién soluciones complejas, o bién requieren isotropía o que se anule la viscosidad. Por lo tanto tampoco habrá soluciones en este caso de acuerdo con el presente modelo.

Resta ahora por resolver el sistema de ecuaciones (3.1.32), al hacerlo nuevamente se encuentra que éstas requieren soluciones isotrópicas, o bién que el fluido no sea viscoso, o que tenga soluciones complejas, lo cual no tiene significado. Así es que tampoco habrá soluciones en este caso.

Antes de interpretar físicamente las soluciones que implican las condiciones que se han encontrado, considérese el caso $n = 1$ y los distintos valores del parámetro ε que se han tomado en cuenta en este trabajo, de modo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&\eta_0\Big[3P_1P_2P_3 + P_3P_1{}^2 + P_2P_1{}^2 + P_3P_2{}^2 + P_1P_2{}^2 + P_2P_3{}^2 + P_1P_3{}^2\Big] - \\
&\qquad\qquad \varepsilon(P_3P_1 + P_1P_2 + P_2P_3) - (P_2{}^2 + P_3{}^2 + P_2P_3) = 0 \\
&\eta_0\Big[3P_1P_2P_3 + P_3P_1{}^2 + P_2P_1{}^2 + P_3P_2{}^2 + P_1P_2{}^2 + P_2P_3{}^2 + P_1P_3{}^2\Big] - \\
&\qquad\qquad \varepsilon(P_3P_2 + P_1P_2 + P_3P_1) - (P_1{}^2 + P_3{}^2 + P_3P_1) = 0 \\
&\eta_0\Big[3P_1P_2P_3 + P_3P_1{}^2 + P_2P_1{}^2 + P_3P_2{}^2 + P_1P_2{}^2 + P_2P_3{}^2 + P_1P_3{}^2\Big] - \\
&\qquad\qquad \varepsilon(P_3P_2 + P_3P_1 + P_1P_2) - (P_1{}^2 + P_2{}^2 + P_1P_2) = 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para cualquier ε se tiene el siguiente conjunto de condiciones para P_1, P_2 y P_3:

$$\varepsilon = 1, \qquad \eta_0 \neq 0 \qquad P_1 = -P_2 - P_3, \qquad \text{donde } P_2 \quad \text{y} \quad P_3 \qquad \text{son arbitrarios}$$

de donde se han descartado todas las condiciones que generan soluciones complejas o requieren que se anule la viscosidad así como las que implican isotropía.

§ 3.2.- Densidad de Energía

Antes de interpretar físicamente los resultados que se han obtenido, regresemos a la ecuación (3.1.7):

$$A\dot{C}\dot{B} + B\dot{C}\dot{B} + C\dot{A}\dot{B} = 8\pi ABC\rho$$

que es una expresión para la densidad de energía en términos de A, B y C. Si se utiliza la solución que se han propuesto

$$A = A_0 e^{P_1 t}$$
$$B = B_0 e^{P_2 t}$$
$$C = C_0 e^{P_3 t}$$

y se sustituye en (3.1.7), se encuentra que

$$\rho = \frac{1}{8\pi}[P_3P_2 + P_3P_1 + P_1P_2] \tag{3.2.1}$$

Como puede notarse, la densidad de energía es independiente del tiempo y sólo depende de los valores de P_1, P_2 y P_3; por lo tanto habrá tantos valores para ρ como valores haya para el grupo de P_1, P_2 y P_3.

En la siguiente tabla se resumen los valores que P_1, P_2 y P_3 deben tener para que la solución propuesta satisfaga las ecuaciones de campo para un universo homogéneo y anisotrópico descrito por la métrica de Bianchi I, así como la densidad de energía correspondiente para los diferentes valores de P_1, P_2 y P_3.

TABLA 3.1

n	ε	P_1	P_2	P_3	ρ
0	1	$P_1 = -P_2 - P_3$	Cualquier P_2	Cualquier P_3	$-\frac{1}{8\pi}({P_3}^2 + {P_2}^2 + P_2P_3)$
1	1	$P_1 = -P_2 - P_3$	Cualquier P_2	Cualquier P_3	$-\frac{1}{8\pi}({P_3}^2 + {P_2}^2 + P_2P_3)$

§ 3.3.- Significado Físico de las Soluciones

Se está considerando un universo homogéneo y anisotrópico lleno con un fluido viscoso cuyo coeficiente de viscosidad de bulto es el preponderante. Se establecieron las ecuaciones de campo y se propuso la solución.

$$A = A_0 e^{P_1 t} \qquad B = B_0 e^{P_2 t} \qquad C = C_0 e^{P_3 t}$$

Para que esta solución satisfaga las ecuaciones de campo, deben cumplirse una serie de condiciones sobre los valores que pueden tomar P_1, P_2 y P_3, mismos que ya se determinaron. Ahora se interpretará el significado físico de estas condiciones y de las soluciones que ellas implican, así como sus implicaciones cosmológicas.

Nótese en primer lugar que se han obtenido independientemente los casos particulares para $n = 0$ y $n = 1$ que se derivan de las ecuaciones (3.1.11)..(3.1.13). El valor $n = 1/2$ que se incluyó en el modelo del capítulo anterior no se considera aquí debido a la complejidad de las ecuaciones que resultan. En cuanto al valor de ε, que es la constante de proporcionalidad entre la presión y la densidad de energía en la ecuación de estado, se consideró que puede tomar los valores 0, 1/3, 1, $-1/3$. Así se han resuelto todos los casos que se crean de las combinaciones de los valores de n y ε que se están considerando.

De todas las condiciones que deben cumplir P_1, P_2 y P_3 en cada uno de los casos mencionados se descartan (como también ya se hizo notar) los valores complejos, ya que originan expresiones complejas para las variables, así como también los casos en que P_1, P_2 y P_3 deban ser iguales, ya que ésto implica isotropía y puesto que nuestro interés es estudiar el comportamiento de un universo homogéneo y anisotrópico, dichas soluciones no proporcionan información al respecto. Se descartan también las condiciones que requieren que el coeficiente η_0 se anule ya que de ser así, implicaría la existencia de un fluido no viscoso.

Para los casos en que la solución propuesta satisface las ecuaciones de compo bajo las condiciones que establecimos para el fluido viscoso (ecuación de estado y coeficiente de viscosidad), se listan en la tabla 3.1 los valores de P_1, P_2 y P_3, así como el correspondiente valor de la densidad de energía .

El primer caso listado en la tabla 3.1 corresponde a un universo homogéneo y anisotrópico que contiene un fluido de stiff mater ($\varepsilon = 1$) cuya viscosidad de bulto es constante ($\eta = \eta_0$). La solución correspondiente es

$$A = A_0 e^{-(P_2+P_3)t} \qquad B = B_0 e^{P_2 t} \qquad C = C_0 e^{P_3 t}$$

donde P_2 y P_3 deben tener valores reales arbitrarios. Se presenta un estado singular en un pasado infinito cuando si $P_2 > 0$ y $P_3 > 0$, $A \to \infty$, $B \to 0$ y $C \to 0$ o bien, si $P_2 < 0$ y $P_3 < 0$, $A \to 0$, $B \to \infty$ y $C \to \infty$. Cualquiera de las dos posibilidades representa un estado de expansión infinita o anulación total en alguna de las dimensiones espaciales, que es precisamente un estado singular. La densidad de energía, por su parte, está dada en este caso por

$$\rho = \frac{-1}{8\pi}(P_3^2 + P_2^2 + P_2 P_3)$$

cuyo valor permanece constante en cualquier instante de tiempo. Debe notarse que la densidad de energía es negativa siempre y su valor específico depende de los correspondientes valores de P_2 y P_3.

Así pues, en este modelo homogéneo y anistrópico que contiene a un fluido viscoso de stiff mater, se presenta un estado singular en un pasado infinito en las dimensiones espaciales y una densidad de energía constante a lo largo de toda la evolución hasta un tiempo infinito, cuando

$$A \to 0 \qquad B \to \infty \qquad \text{si} \qquad P_2 > 0 \quad P_3 > 0$$

es decir, en una dimensión espacial el universo se colapsa hasta anularse, mientras que las otras dos crecen monótonamente.

$$A = A_0 \qquad B = B_0 \qquad C = C_0 \qquad \text{si} \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 0$$

lo que significa que en un futuro infinito se alcanza un valor constante en las variables de la métrica. O bien

$$A \to \infty \qquad B \to 0 \qquad C \to 0 \qquad \text{si} \qquad P_3 < 0 \qquad P_2 < 0$$

lo cual significa que una dimensión se expande indefinidamente mientras que las otras dos se colapsan hasta anularse.

Regresando nuevamente a la tabla 3.1 puede notarse que corresponde ahora al caso de un universo homogéneo y anisotrópico que contiene un fluido viscoso de Stiff mater cuya viscosidad de bulto es proporcional a la densidad de energía: $\eta = \eta_0 \rho \qquad (n = 1)$. Para este caso surgen también una familia de posibilidades:

$$A = A_0 e^{-(P_2+P_3)t} \qquad B = B_0 e^{P_2 t} \qquad C = C_0 e^{P_3 t}$$

donde P_2 yP_3 son valores reales arbitrarios. Puede observarse que se presenta un estado singular en un pasado infinito: $A \to \infty$, $B \to 0$, $C \to 0$ cuando $P_2 > 0$ y $P_3 > 0$ o bién $A \to 0$, $B \to \infty$, $C \to \infty$ cuando $P_2 > -P_3$, al evolucionar las dimensiones espaciales hasta un futuro infinito sucede que $A \to 0$, $B \to \infty$, $C \to \infty$ cuando $P_2 > 0$ y $P_3 > 0$ ó $A \to \infty$, $B \to 0$, $C \to 0$ cuando $P_2 < -P_3$

Nuevamente en este caso el comportamiento del universo, de acuerdo con este modelo, es tal que las variables de la métrica evolucionan monótonamente a medida que el tiempo transcurre, pero siempre la densidad de energía

$$\rho = -\frac{1}{8\pi}\left[{P_3}^2 + {P_2}^2 + P_2 P_3\right]$$

permanece constante y con valor negativo durante todo el proceso de evolución.

Nótese de las condiciones listadas en la tabla 3.1, que para este caso homogéneo y anisotrópico cuando el fluido en consideración es polvo ($\varepsilon = 0$), radiación ($\varepsilon = 1/3$), o que obedece a la ecuación de estado $\mathrm{P} = -\frac{1}{3}\rho$, no existen soluciones del tipo que se propone en este trabajo.

Así, de acuerdo con este modelo, sólo habrá soluciones del tipo que proponemos, para un univers homogéneo y anisotrópico con un fluido con viscosidad de bulto, cuando el fluido consiste en "stiff matter".

Cuando se considera que el coeficiente de viscosidad de bulto es una función de una potencia de la densidad de energía, como por ejemplo $\eta = \eta_0 \rho^{1/2}$, que se consideró en el capítulo anterior, se encuentra que las ecuaciones correspondientes se complican considerablemente, aún cuando se pase del conjunto de ecuaciones diferenciales al conjunto de ecuaciones algebráicas; así es que este caso no se resolvió en este trabajo.

§ 3.4.- Condiciones de Energía

Si se cumple la condición de energía fuerte

$$\mathrm{T}_{\mu\nu}\mathrm{U}^{\mu}\mathrm{U}^{\nu} \geq \frac{1}{2}\mathrm{T} \tag{3.4.1}$$

y se satisfacen las ecuaciones de Einstein, entonces se satisface también

$$\mathrm{R}_{\mu\nu}\mathrm{U}^{\mu}\mathrm{U}^{\nu} > 0 \tag{3.4.2}$$

En la métrica de Bianchi I, ecuación (3.1), se encuentra que la única componente de $\mathrm{R}_{\mu\nu}\mathrm{U}^{\mu}\mathrm{U}^{\nu}$ es

$$\mathrm{R}_{00} = -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} \tag{3.4.3}$$

puesto que $\mathrm{U}_{\mu} = \delta^{0}_{\mu}$ para el observador en el sistema de referencia comóvil desde el que se está haciendo la descripción. De acuerdo con la condición de energía fuerte (3.4.2)

$$\mathrm{R}_{00} > 0$$

de modo que

$$-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} > 0$$

o bién

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} < 0 \tag{3.4.4}$$

La solución propuesta es

$$A = A_0 \mathrm{e}^{P_1 t} \quad B = B_0 \mathrm{e}^{P_2 t} \quad C = C_0 \mathrm{e}^{P_3 t}$$

con cada uno de los valores para P_1, P_2 y P_3 listados en la tabla 3.1 y discutidos en la sección anterior.

Así es que la ecuación (3.4.4) impliaca que

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 < 0 \tag{3.4.5}$$

Como puede verse en la tabla 3.1, cualquiera de los casos en los que encontramos solución se requiere que $P_1 = -P_2 - P_3$, de modo que sustituyendo ésto en la ecuación (3.4.5) se tiene que

$$P_2^2 + P_3^2 + P_2 P_3 < 0 \tag{3.4.6}$$

Como puede notarse inspeccionando esta última ecuación, el lado izquierdo nunca puede ser negativo como se requiere en (3.4.6), de modo que se viola la condición de energía fuerte.

Otra forma de comprobar que no se cumple la condición de energía fuerte es, como se dijo en el capítulo 1, expresando la condición de energía fuerte de la siguiente manera:

$$\rho + 3\bar{\mathrm{p}} > 0 \tag{3.4.7}$$

donde $\bar{\mathrm{p}} = \mathrm{p} - \eta \mathrm{U}^{\mu}{}_{;\mu}$ es la presión total que contiene las contribuciones de la presión normal y de la presión viscosa. Para el presente modelo la presión total está dada por

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{p}} &= \varepsilon\rho - \eta_0 \rho^n \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \\ &= \varepsilon\rho + \eta_0 \rho^n (P_1 + P_2 + P_3) \end{aligned}$$

Pero en la tabla 3.1 puede notarse que las soluciones que encontramos requieren que $P_1 = -P_2 - P_3$, cuando $\varepsilon = 1$, de modo que sustituyendo ésto en la última ecuación se tiene que

$$\bar{\mathrm{p}} = \rho$$

es decir, la presión viscosa no contribuye a la presión total.

Regresando a la ecuación (3.4.7) se tiene que la condición de energía fuerte requiere que

$$4\rho > 0$$

lo cual implica que ρ debe ser positiva para que se cumpla la condición de energía fuerte, pero como puede verse en la tabla 3.1, la densidad de energía siempre es negativa, de modo es que la condición de energía fuerte no se cumple en ninguno de los casos para los que encontramos solución.

Puesto que la densidad de energía es negativa, tampoco se cumplen las condiciones de energía débil y dominante.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES

En la primer parte de este trabajo se ha estudiado el modelo de un universo homogéneo e isotrópico que contiene a un fluido viscoso. Se ha considerado que el fluido en custión puede ser polvo, radiación, "stiff matter" o uno para el cual $P = -\frac{1}{3}\rho$; cuya viscosidad se reduce a la viscosidad de bulto expresada como una función de la densidad de energía: $\eta = \eta_0 \rho^n$, donde se han considerado los valores para n de 0, 1, 1/2. Este estudio se ha hecho considerando la ecuación constitutiva para la presión viscosa de Eckart, que es una teoría no causal.

Bajo estas consideraciones surgen varios casos, uno de ellos es el de un universo homogéneo, isotrópico, abierto, que contiene polvo (n = 0). Cuando la viscosidad es una constante el universo presenta una singularidad tipo Big-Bang en el tiempo $t = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln\left(\frac{c_1}{c}\right)$, es decir que en dicho instante el factor de escala se anula, la densidad de e-ne rgía es infinita y la velocidad de recesión es infinita. Desde este estado singular evoluciona hasta que en un futuro infinito se alcanza una densidad de energía constante y una velocidad de recesión de $v = 8\pi\eta_0 d$, pero existe una singularidad en este instante puesto que el escalar de curvatura se hace infinito. Cuando en lugar de polvo se considera un fluido de fotones ($\varepsilon = 1/3$) también con viscosidad constante, se encuentra que se presenta una singularidad tipo Big-Bang en el mismo instante que en el caso anterior, pero para un estado muy avanzado de evolución, contrariamente al caso de polvo, el escalar de curvatura no presenta singularidad, tampoco lo hace la densidad de energía, aunque sí el factor de escala. De este modo puede decirse que se parte de una singularidad tipo Big-Bang y la evolución tiende hacia un estado no singular con densidad de energía constante. Para el caso de "stiff matter" como el fluido viscoso, el comportamiento del modelo es completamente similar al caso de radiación, es decir, se presenta una singularidad tipo Big-Bang cuando $t = \frac{1}{12\pi\eta_o}\ln\left(\frac{c_1}{c}\right)$ desde la que evoluciona hasta que en un futuro infinito se alcanza una densidad de energía constante. Aunque el factor de escala alcanza un valor infinito, no se trata de una singularidad física puesto que el escalar de curvatura que es un invariante tiende a un valor constante. En el caso particularmente interesante de un fluido viscoso relativista cuya ecuación de estado es $P = -\frac{1}{3}\rho$, también existe una singularidad tipo Big-Bang en el mismo instante que en los casos anteriores, pero la evolución hacia el futuro concluye en un estado también singular de densidad de energía constante, análogamente al comportamiento del modelo cuando se resuelve para un fluido de polvo.

Cuando la viscosidad ya no es una constante sino que depende directamente de la densidad de energía ($\eta = \eta_0\rho$), para un fluido de polvo ya no se presenta la singularidad tipo Big-Bang que ocurría para el caso de viscosidad constante, tampoco alcanza un estado singular en el futuro infinito, sólo parte de un valor nulo para el factor de escala y la velocidad de recesión y un valor constante para la densidad de energía. Exactamente el mismo comportamiento presenta el modelo cuando el universo se supone lleno de radiación, "stiff matter" o para el cual $P = -\frac{1}{3}\rho$. De estos últimos resultados puede concluirse que cuando el coeficiente de viscosidad es directamente proporcional a la densidad de energía, ya sea que el fluido en consideración sea polvo, radiación, "stiff matter", o para el que $P = -\frac{1}{3}\rho$, el universo evoluciona en el tiempo sin presentar singularidades, de acuerdo con las soluciones que proponemos para este modelo. Sin embargo, de la solución obtenida para estos casos, puede notarse que se tiene los dos tipos de comportamiento inflacionario: exponencial para tiempos pequeños y como potencias para tiempos muy grandes, es decir, contiene a la vieja inflación y a la inflación extendida. Aún falta investigar las consecuencias astrofísicas de esta solución.

Se estudió también el caso en que el coeficiente de viscosidad de bulto es directamente proporcional a la raiz cuadrada de la densidad de energía: $\eta = \eta_0 \rho^{1/2}$. Cuando el fluido es polvo se encuentran dos resultados, es decir, dos posibles comportamientos para un mismo universo, que esencialmente depende de algunas restricciones sobre el valor que puede tomar la constante de proporcionalidad η_0. Uno de los dos posibles comportamientos conduce a un resultado singular tipo Big-Bang en el instante $t = -c_0/c_1$ c on la única restricción de que η_0 debe ser diferente al valor $(54\pi)^{-1/2}$. Al evolucionar hacia un futuro infinito se llega también a un estado singular estático (H=0) sin densidad de energía. En el caso en que $\eta_0 = (54\pi)^{-1/2}$ se presenta un estado singular sólo en el factor de escala en un tiempo infinito en el pasado, pero no en la densidad de energía, y el valor del escalar de curvatura sugiere que no habrá singularidad en ningún momento durante la evolución. Si ahora el fluido es radiación se obtienen también dos posibilidades, una cuando $\eta_0 = 4(216\pi)^{-1/2}$ y otra cuando $\eta_0 \neq 4(216\pi)^{-1/2}$ exactamente igual que en el caso de polvo, excepto en la restricción sobre el valor de η_0. Es decir, se tendrá una singularidad tipo Big-Bang que concluye en un estado también singular en un futuro infinito. Un comportamiento completamente análogo se presenta cuando se trata de un fluido consistente en "stiff matter". Cuando el fluido viscoso cumple con la ecuación de estado $P = -\frac{1}{3}\rho$ se presentan nuevamente dos alternativas de evolución según este modelo; una para $\eta_0 = 2(216\pi)^{-1/2}$ y otra para $\eta_0 \neq 2(216\pi)^{-1/2}$. Análogamente al caso de polvo y de radiación se presenta una singularidad tipo Big-Bang en $t = -c_0/c$ cuando $\eta_0 \neq 2(216\pi)^{-1/2}$ y evoluciona hacia el futuro hasta alcanzar un estado singular, estático, sin densidad de energía. Así es que cuando el coeficiente de viscosidad de bulto es directamente proporcional a la raiz cuadrada de la densidad de energía, el modelo muestra que el universo presenta una singularidad tipo Big-Bang en un instante determinado, cuando el fluido es de polvo, radiación, "stiff matter" o cumple con la ecuación de estado $P = -\frac{1}{3}\rho$, casos en que la constante de proporcionalidad η_0 está restringida en sus valores. Cuando el universo hamogéneo e isotrópico es abierto con velocidad terminal finita (k=-1) o cerrado (k=1) y contiene a un fluido viscoso para el que $P = -\frac{1}{3}\rho$, el universo presenta exactamente la misma solución y por lo tanto el mismo comportamiento que cuando se trata de un universo abierto conteniendo el mismo tipo de fluido y con viscosidad de bulto constante, *i. e.* no se distingue curvatura cuando se emplea la ecuación de estado P $= -1/3\rho$. Este mismo efecto lo obtiene Davis [10] cuando relaciona esta ecuación de estado con texturas.

En cuanto a las condiciones de energía, en la tabla 2.2 se listan las condiciones que deben cumplirse para que se satisfaga la condición de energía fuerte. Esencialmente dichas condiciones se reducen a condiciones sobre las constantes de integración o sobre los valores que puede tomar la constante η_0. Podemos notar en esta tabla que cuando el valor de η_0 es suficientemente grande, no se satisface la condición de energía fuerte.

Cuando comparamos nuestro modelo con el modelo estándar através de la densidad de energía en términos de un parámetro medible como lo es la constante de Hubble, encontramos que cuando consideramos viscosidad constante (n=0) nuestro modelo predice el mismo valor para la densidad crítica que el que predice el modelo estándar, sólo que la densidad crítica de éste último es aplicable para bajas densidades (n=1).

Este último resultado demuestra que el modelo que estudiamos en este trabajo para un universo homogéneo e isotrópico, no es aplicable en la época actual.

En la segunda parte se ha estudiado el modelo de un universo homogéneo y anisotrópico que contiene un fluido viscoso, que aunque la vioscosidad de corte y la conducción de calor pueden existir, se considera en este modelo que la viscosidad de bulto es preponderante. Se considera además que la viscosidad de bulto es constante o directamente proporcional a la densidad de energía. El fluido viscoso que se supone puede ser polvo, radiación, "stiff matter" o cumple con la ecuación de estado $P = -\frac{1}{3}\rho$ como se hizo para el modelo del universo hamogéneo e isotrópico. Para un universo homogéneo y anisotrópico sólo se encontró solución cuando el fluido es de "stiff matter" y la viscosidad es constante ($\eta = \eta_0$) o proporcional a la densidad de energía ($\eta = \eta_0\rho$). En ambos casos se encontró una familia de soluciones donde por lo menos una dimensión espacial es nula en un pasado infinito y dos son infinitamente grandes; y al transcurrir el tiempo hasta un futuro infinito, la dimensión nula crece indefinidamente y las dimensiones expandidas se contráen hasta anularse, es decir, el comportamiento de las variables de la métrica es monótono. Este modelo presenta la peculiaridad de que el volúmen se mantiene constante. Otra característica de este modelo, en los casos para los que se resolvió, es que la densidad de energía siempre es negativa, de modo que se violan las condiciones de energía débil y dominante; en cuanto a la condición de energía fuerte, también se viola pero no hay inflación puesto que el volumen permanece constante durante toda la evolución.

En ambos casos para los que obtuvimos soluciones: de viscosidad constante o proporcional a la densidad de energía, con un fluido de "stiff matter" el comportamiento de las soluciones es completamente similar, como puede notarse de nuestras soluciones para estos modelos resumidas en la tabla 3.1.

Para los otros tipos de fluidos que se han considerado a lo largo de este trabajo, no encontramos soluciones del tipo que estamos proponiendo, ya que el suponerlas implicaba soluciones complejas o bién se requería como restricción que se anulara la viscosidad o bién debía existeir isotropía. De modo es que el modelo que estamos presentando sólo es aplicable cuando el fluido consiste de "stiff matter".

Estos resultados muestran que el modelo que se propone en este trabajo para un universo homogéneo y anisotrópico es un caso muy particular, probablemente resultado de no haber considerado las contribuciones de la viscosidad de corte y de flujo de calor, que pueden tener importancia en casos como éste. Sin embargo, el considerar estas contribuciones a la viscosidad, así como utilizar una teoría causal, marca el siguiente paso a seguir en la investigación iniciada en este trabajo.

REFERENCIAS

[1] .- G.L. Murphy, Phys. Rev. D **8** (1973) 4231

[2] .- N.O. Santos, R.S. Dias y A. Banerjee, J. Math. Phys. **26** (1985) 878

[3] .- M. Zakari, D. Jou, Phys. Rev. D **48** (1993) 1597

[4] .- V.A. Belinskii,I.M. Khalatnikov, Sov. Phys JETP **42** (1976) 205

[5] .- V.A. Belinskii,I.M. Khalatnikov, Sov. Phys JETP **45** (1977) 1

[6] .- D. Pavón, J. Bafalvy y D. jou, Class. Quantum Grav. **8** (1991) 347

[7] .- L.P. Chimento,A.S. Jakubi, Class. Quantim Grav. **10** (1993) 2047

[8] .- W.A. Hiscock, J. Salmonson, Phys. Rev. D **43** (1991) 3249

[9] .- J.D. Barrow, Phys. Lett. B **183** (1987) 285

[10] .- R.L. Davis, Phys. Rev. D **35** (1987) 3705

[11] .- S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons, N.Y.. (1972)

[12] .- S. Hawking, W. Ellis, Astrophys. J. **152** (1968) 25

[13] .- S. Hawking, R. Penrose, Proc. R. Soc. **A314** (1970) 529

[14] .- K.A. Raychauduri, Theoretical Cosmology, Oxford Press (1979)

[15] .- C.A. Kalossis, N.O. Santos y D. Tsoubelis, Class. Quantum Grav. **5** (1985) 2329

[16] .- C. Wolf, Nuovo Chimento B **287** (1992)

[17] .- S. Hawking, W. Ellis, Large Scale Structure of Spacetime. Cambridge U. Press (1973)

[18] .- M. Heller, Z. Klimek, L. Suszycki, Astrophys. Space Sci. **20** (1973) 205

[19] .- M. Heller, L. Suszycki, Acta Phys. Pol. **B5** (1974) 345

[20] .- Marochnik, Elikhov y Vereshkov, Astrophys. Space Sci. **34** (1975a) 249

[21] .- S. Weinberg, Astrophys. J. **168** (1971) 175

[22] .- W.A. Hiscock, L. Lindblom, Ann. Phys. **151** (1983) 466

[23] .- R. Geroch, L. Lindblom, Ann. Phys. **207** (1991) 394

[24] .- M. Zakari, D. Jou, Phys. Rev. D **48** (1993) 1597

[25] .- W.H. Huang, Phys. Lett. A **129** (1988) 429

[26] .- W.H. Huang, Phys. Lett. A **31** (1990) 1456

[27] .- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, W.h. Fee and Co. N.Y. (1973)