

**UNIVERSIDAD AUTONOMA
METROPOLITANA**

UNIDAD IZTAPALAPA

**Tesis para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (Ingeniería Química)**

**"ANALISIS DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE CALOR
POR CONVECCION NATURAL ENTRE UN FLUIDO Y UN
MEDIO POROSO"**

Alumno:
I.Q. Roberto Olivares Hernández

Vo. Bo.
Asesor de tesis:
Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

**UNIVERSIDAD AUTONOMA
METROPOLITANA**

UNIDAD IZTAPALAPA

**Tesis para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (Ingeniería Química)**

**"ANALISIS DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE CALOR
POR CONVECCION NATURAL ENTRE UN FLUIDO Y UN
MEDIO POROSO"**

Alumno:
I.Q. Roberto Olivares Hernández



Vc. Bo.

Asesor de tesis:
Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Agradecimientos

A todas aquellas personas que quiero. Las que en verdad me conocen saben cuanto aprecio su apoyo en todo lo que hago, y los que no me conocen del todo sepan, que en verdad estoy agradecido.

RESUMEN

Se presenta la solución numérica y el análisis del problema de transporte de calor provocado por convección natural entre un fluido y medio poroso que ocupan una cavidad rectangular cerrada. La situación es similar a la encontrada en un silo de almacenamiento de granos, en el cual las longitudes características hacen que el transporte frecuentemente se lleve a cabo en condiciones de flujo turbulento. Por ello, en el trabajo se consideran condiciones de flujo desde el régimen laminar al turbulento. El planteamiento matemático del problema incluye las ecuaciones de cantidad de movimiento, energía térmica y cuando existen condiciones de turbulencia las dos adicionales necesarias en el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$. Los números adimensionales que establecen la característica del flujo son: el número de Rayleigh, Prandtl y Darcy. El método numérico que se utiliza en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales esta basado en la formulación de un volumen de control sobre el que se integran las ecuaciones de transporte para desarrollar el sistema de ecuaciones discretizadas. Con los resultados obtenidos de la solución numérica se realizan mapas de contorno para la temperatura y las líneas de corriente que caracterizan el flujo en la cavidad cuadrada. Los resultados independientes de los parámetros numéricos del campo de temperatura y velocidad muestran el comportamiento del flujo en el régimen laminar y turbulento. Los coeficientes de película en la interregión y el número de Nusselt en las fronteras obtenidos de la solución, muestran el efecto en el transporte de calor desde las paredes del sistema, así como en la interfase, cuando se tiene un régimen turbulento. Además, se observa que el transporte de calor convectivo disminuye directamente por efecto de disminución de la permeabilidad del medio poroso.

INDICE

<u>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</u>	<u>1</u>
<u>Justificación</u>	<u>3</u>
<u>Objetivos</u>	<u>4</u>
<u>Objetivo General</u>	<u>4</u>
<u>Objetivos particulares.</u>	<u>4</u>
<u>CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES TEÓRICOS</u>	<u>5</u>
<u>2.1 Ecuaciones de flujo en medios porosos</u>	<u>5</u>
<u>2.1.1 La ecuación de Darcy</u>	<u>5</u>
<u>2.1.2 Ecuación de Brinkman</u>	<u>7</u>
<u>2.1.3 Ecuación de Forchheimer</u>	<u>8</u>
<u>2.2 El fluido homogéneo.</u>	<u>9</u>
<u>2.3 Escalas de descripción</u>	<u>10</u>
<u>2.3.1 Descripción del medio poroso.</u>	<u>10</u>
<u>2.4 Teoría de la Turbulencia.</u>	<u>13</u>
<u>2.4.1 Características del flujo turbulento.</u>	<u>13</u>
<u>2.4.2 La ecuación de Reynolds (El promedio temporal).</u>	<u>15</u>
<u>2.4.3 La teoría de longitud de mezclado.</u>	<u>20</u>
<u>2.4.4 La energía cinética turbulenta y la energía disipativa turbulenta</u>	<u>23</u>
<u>2.4.5 Las ecuaciones de transporte básicas del modelo estándar $k-\varepsilon$</u>	<u>28</u>
<u>2.4.6 Modificaciones del modelo estándar $k-\varepsilon$</u>	<u>30</u>
<u>2.4.7 Flujo Turbulento en medios porosos</u>	<u>33</u>
<u>CAPÍTULO 3. ESTADO DEL ARTE</u>	<u>38</u>
<u>3.1 Estudio de la convección natural</u>	<u>38</u>
<u>3.2 Turbulencia macroscópica en el medio poroso.</u>	<u>39</u>
<u>3.3 Condiciones de frontera entre un fluido y un medio poroso</u>	<u>40</u>
<u>CAPÍTULO 4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</u>	<u>45</u>
<u>4.1 Descripción del sistema</u>	<u>45</u>
<u>4.2 Aproximación de uno o dos dominios</u>	<u>47</u>
<u>4.3 Consideraciones del problema</u>	<u>47</u>
<u>4.4 Ecuaciones de transporte</u>	<u>48</u>
<u>4.4.1 Ecuaciones en la región fluida</u>	<u>48</u>

4.4.1-1 Ecuación de continuidad.	48
4.4.1-2 Ecuación de transferencia de cantidad de movimiento.	49
4.4.1-3 Ecuación de energía.	49
4.4.2 Ecuaciones de la región porosa	50
4.4.2-1 Ecuación de continuidad	50
4.4.2-2 Ecuación de transferencia de cantidad de movimiento.	50
4.4.2-3 Ecuación de energía	51
4.4.3 Ecuaciones de transporte turbulento	51
4.4.3-1 Ecuaciones de turbulencia en la región fluida	51
4.4.3-2 Ecuaciones de turbulencia en la región porosa	53
4.5 Condiciones de frontera.	54
4.5.1. Transporte de momentum	54
4.5.2 Transporte de energía	55
4.5.3 Condiciones de frontera para la turbulencia	56
4.6 Número de Nusselt	57
<u>CAPÍTULO 5. MÉTODO NUMÉRICO</u>	<u>63</u>
5.1 Ecuaciones adimensionales	63
5.2 Solución numérica	66
5.2.1 Algoritmo de solución.	72
5.3 Parámetros numéricos	74
<u>CAPÍTULO 6. RESULTADOS</u>	<u>76</u>
6.1 Cavity cuadrada: Fluido	76
6.2 Cavity cuadrada: fluido-medio poroso	90
6.2.1 Flujo laminar	90
6.2.2 Flujo turbulento	103
6.2.3 Número de Nusselt en las paredes.	112
6.2.4 Número de Nusselt en la interfase.	119
<u>CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES</u>	<u>126</u>
<u>BIBLIOGRAFÍA</u>	<u>129</u>
<u>NOMENCLATURA</u>	<u>136</u>
<u>APÉNDICE A</u>	
<u>APÉNDICE B</u>	
<u>APÉNDICE C</u>	

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

El transporte de momento, calor y masa en materiales porosos tiene interés práctico en distintas disciplinas. En medicina, bioquímica [Sim y col., (1996)], ingeniería civil, electroquímica. En Ingeniería Química; cromatografía, filtración, flujo en columnas empacadas, secado de materiales [Treybal, (1980)], ingeniería de reactores [Smith,(1991); Carberry,(1976)] y reactores de membrana. En ingeniería del petróleo, para el desplazamiento de aceite con agua o agua y solventes miscibles [Arreola,(1990); Cruz y Pérez (1990); Hayashi y col. (2001 a,b)]. En hidrología, para predecir el movimiento de trazas de contaminantes en mantos freáticos, recuperación de agua. En física de suelos, en el estudio del movimiento de nutrientes y contaminantes [Mayer y Miller, (1996); Thompson y col.,(1996)]. En biofísica, para los procesos orgánicos del riñón y el hígado, entre otras tantas aplicaciones. Los materiales porosos se pueden encontrar en los suelos, en rocas, materiales cerámicos, textiles, madera, etc. Un medio poroso está compuesto por una cadena de vacíos incluidos dentro de una matriz sólida y los cuales pueden estar interconectados, cerrados o aislados entre sí. Esta distribución de vacíos, tanto en su tamaño y forma, caracteriza al material poroso. Las propiedad de mayor interés es la porosidad, definida como la fracción espacial volumétrica del medio poroso ocupado por vacíos, y la permeabilidad, que es una medida de la conductancia del fluido a través del material poroso [Bear,(1972); Nield y Bejan, (1992); Katz y Thompson (1986)].

Dentro de la Ingeniería Química en aplicaciones como el estudio de la cromatografía de gases o líquidos, los reactores químicos, columnas empacadas para procesos de separación etc., se conoce que la dinámica de un fluido en movimiento (o flujo) condiciona los fenómenos de transporte asociados a estos procesos. Otra particularidad en estos procesos es la presencia de un medio poroso lo que condiciona que la característica del flujo dependa de la relación de los esfuerzos viscosos y convectivos inerciales presentes, los cuales tienen efecto sobre los mecanismos de transporte de momentum, calor y masa. La contribución de cada uno de estos esfuerzos en la dinámica del fluido establece los regímenes de flujo [Bird y col.,(2001)]. En la transferencia de calor el movimiento del fluido condiciona los mecanismos de transporte por convección natural y forzada. En la transferencia por convección natural la magnitud de los flujos, difusivo y convectivo de momentum y energía, son del mismo orden. En el caso de la

transferencia por convección forzada la aportación del flux difusivo a la transferencia global puede ser mínima [Arpaci y Larsen, (1984)].

Otro proceso de interés en la Ingeniería Química en el cual se puede observar el flujo de un fluido en presencia de un medio poroso es el almacenamiento de granos (maíz, trigo, por ejemplo). En este sistema se observa el transporte de la humedad del material y trazas de fertilizantes migrar de la estructura del grano y formar parte del medio gaseoso contenido en el almacén presentándose el transporte de calor y masa total, o por especie. Con las consideraciones apropiadas de longitudes de escala, en el almacén de granos se distinguen dos regiones, una región fluida (aire) y una región del medio poroso (granos), este último saturado del mismo fluido con el que esta en contacto. El estudio del transporte de calor y momentum en sistemas fluido-medio poroso ha requerido del desarrollo y planteamiento de las ecuaciones y condiciones de frontera que modelen de manera adecuada el sistema [Kaviany, (1994); Nield y Bejan, (1992)].

En este trabajo se analiza el procedimiento de la solución numérica al planteamiento matemático del transporte de momentum y energía en un sistema de dos regiones, fluido-medio poroso, considerando dos regímenes de flujo. Para realizar el análisis se parte del listado del programa *Natcon* y una posterior modificación, el listado *Cavpor* (ambos listados proporcionados por Prakash, Turan y Thorpe (1999b)). Con estos listados se resuelve numéricamente el problema de transferencia de calor por convección natural en una cavidad cuadrada considerando los casos cuando en el sistema se tiene solamente fluido y cuando se tiene un fluido-medio poroso. Los listados incluyen las ecuaciones de momentum y energía para el flujo laminar, y las ecuaciones de transporte del modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ para el régimen de flujo turbulento. El análisis del problema se lleva a cabo en dos dimensiones. Además de caracterizar el flujo en la cavidad se obtienen los coeficientes de película con los que se puede cuantificar la cantidad de calor transferida entre la región porosa y el fluido homogéneo.

Justificación

El flujo de un fluido en régimen turbulento es difícil de describir de forma sencilla debido a las características de la turbulencia. Para comprender y poder generar modelos de turbulencia adecuados se han propuesto distintas teorías. En particular se menciona el modelo estándar de turbulencia $k-\varepsilon$ el cual parte de la teoría de longitud de mezclado de Prandtl [Bird y col.,2001]. Con la solución numérica del modelo estándar $k-\varepsilon$ se han generado resultados satisfactorios en la predicción del flujo y el transporte de calor al aplicarse a diversos problemas en ingeniería [Rodi, 1980; Wilcox,1993]. Con los avances logrados en el modelado de la turbulencia se han derivado modificaciones a partir del modelo estándar extendiendo su aplicación en los distintos problemas que existen en ingeniería, tal es el caso de los medios porosos. Tratando de avanzar en el conocimiento del modelado del transporte de momentum y energía en medios porosos, en este trabajo se plantea la aplicación del modelo estándar $k-\varepsilon$ modificado para considerar la presencia del medio poroso y la transporte de momentum en la convección natural de calor. Se presentan las teorías sobre modelado de ecuaciones de transporte en medios porosos y las condiciones de frontera, específicamente en la inter-región fluido-medio poroso, considerando el régimen laminar y turbulento resolviendo numéricamente las ecuaciones de transporte para el transporte de calor por convección natural. Finalmente se presenta una descripción extensa del algoritmo del programa *Natcon* y *Cavpor* presentando el desarrollo y explicación de la metodología numérica con la cual se generan los resultados y que ha sido ampliamente usada en problemas de turbulencia [Patankar, 1980; Wilcox, 1993].

Objetivos

Objetivo General

Obtener los coeficientes de película (transferencia de calor) a partir de la solución numérica de las ecuaciones de transporte de calor y masa considerando del régimen laminar al régimen turbulento en una cavidad cuadrada ocupada por un fluido y un medio poroso

Objetivos particulares.

- Usar la metodología del volumen de control para resolver numéricamente las ecuaciones de transporte para una cavidad ocupada por un fluido y un medio poroso.
- Adecuar los programas *Natcon* y *Cavpor* para obtener el número de Nusselt en la inter-región fluido-medio poroso y las paredes del sistema.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES TEÓRICOS

2.1 Ecuaciones de flujo en medios porosos

Se presentan las principales teorías que se han desarrollado para modelar el movimiento de un fluido a través de un medio poroso.

2.1.1 La ecuación de Darcy

Henry Darcy, en 1856, trabajando en el área de filtros hidráulicos inicia el estudio del flujo de un fluido en un medio poroso formulando la ley empírica que lleva su nombre. Su trabajo presenta los principios a seguir y la formulación utilizada en el diseño y construcción de sistemas de distribución de aguas, filtración de aguas y manufactura de válvulas. Darcy descubrió algunos conceptos genéricos de filtración. Por medio de sus experimentos de filtración de agua en una columna empacada dedujo la siguiente relación para el flujo volumétrico de agua a través de la columna:

$$Q = \frac{kA(h_1 - h_2)}{\ell} \quad (2.1)$$

La Ecuación (2.1) establece la proporcionalidad entre el flujo volumétrico y la pérdida de presión del flujo a través de un lecho poroso de altura ℓ (ver Figura 2.1). Darcy denominó al factor de proporcionalidad k como la conductividad hidráulica. La Ecuación (2.1) es resultado de la observación experimental y es válida para el flujo isotérmico incompresible y reptante de un fluido Newtoniano a través de un medio poroso isotrópico.

Posteriormente Hazen (1893) estudió el efecto de la temperatura en el flujo. Realizando experimentos similares al de Darcy pero utilizando distintos fluidos estableció que el factor de proporcionalidad está constituido por un factor dependiente de la temperatura y es

función de las propiedades del fluido, de esta forma Hazen (1893) estableció que:

$$k = \frac{K_{\beta\omega}}{\mu_{\beta}} \quad (2.2)$$

Donde $K_{\beta\omega}$ es la permeabilidad del medio poroso y μ_{β} la viscosidad del fluido dependiente de la temperatura. Con esta modificación a la expresión de Darcy se tiene una expresión en función de la caída de presión y longitud del lecho poroso y la cual es comúnmente utilizada como la Ley de Darcy,

$$\frac{Q_{\beta}}{A} = v = \frac{K_{\beta\omega}}{\mu_{\beta}} \left(\frac{\Delta P_{\beta}}{\Delta \ell_p} \right) \quad (2.3)$$

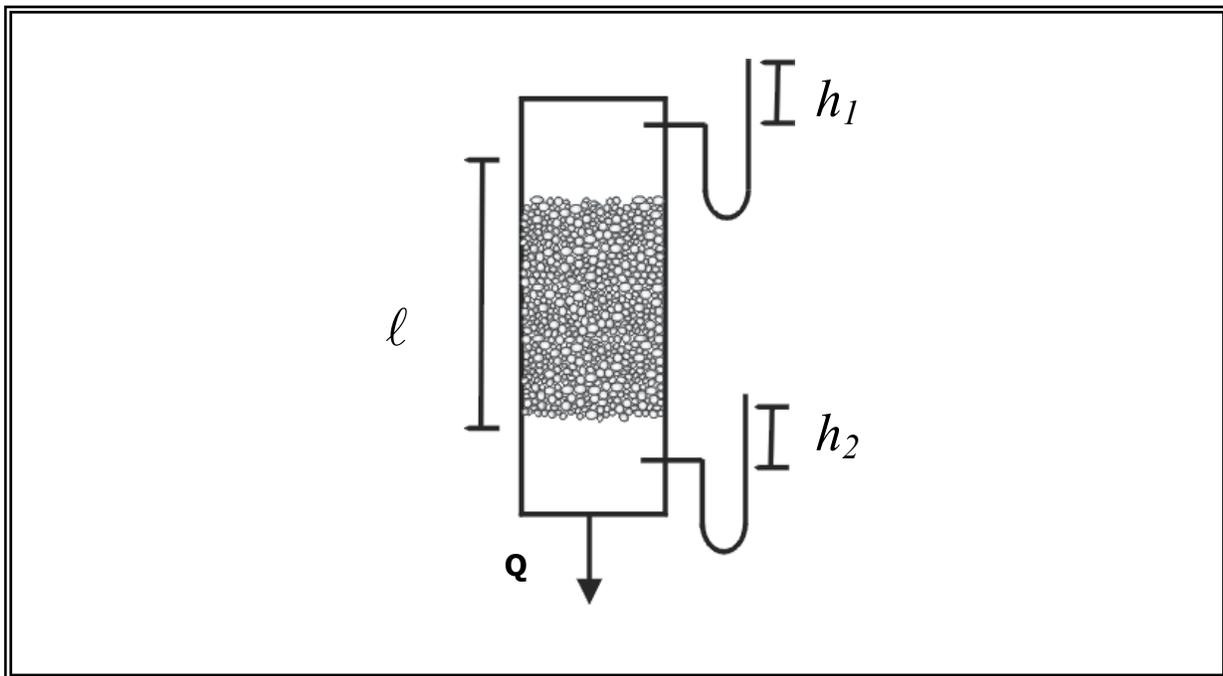


Figura 2.1. Esquema del sistema experimental de Darcy.

De manera reciente Whitaker (1986), utilizando la metodología del promedio volumétrico, derivó de manera rigurosa la ecuación de Darcy a partir de la ecuación puntual de Stokes. Con la derivación rigurosa se logra expresar la permeabilidad como una cantidad tensorial, con lo queda establecido el carácter tridimensional del flujo en medios porosos y que se reduce a una cantidad

escalar cuando se tiene un medio poroso isotrópico. Con el procedimiento del promedio Whitaker (1999) también demostró que la permeabilidad es independiente de la naturaleza del fluido, pero dependiente de la estructura del medio. Escribiendo la ley de Darcy en forma multidimensional se tiene:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{K}_{\beta\omega}}{\mu_\beta} \cdot [\nabla P_\beta - \rho_\beta \mathbf{g}] \quad (2.4)$$

La velocidad $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ es la velocidad del fluido en el medio poroso, $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ es el tensor permeabilidad y el subíndice β se utiliza para identificar que se trata de una variable o parámetro de la fase fluida.

2.1.2 Ecuación de Brinkman

Brinkman (1947) consideró que la ecuación de Darcy está limitada al no incluir los esfuerzos cortantes macroscópicos del tipo viscoso causados por el contacto del fluido con una superficie en la frontera del sistema. Brinkman realizó la distinción del diferente origen físico de los términos viscosos al realizar una analogía entre la ecuación de Stokes y la ecuación de Darcy diferenciando entre el esfuerzo viscoso cortante y el arrastre viscoso de los sólidos. También observó que el efecto del esfuerzo cortante viscoso del fluido llega a ser despreciable si se compara con el arrastre viscoso cuando la permeabilidad es pequeña, por lo que el modelo de Brinkman no es del todo correcto cuando se manejan medios porosos poco permeables. La expresión de la ecuación de momentum con la corrección de Brinkman es:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{K}_{\beta\omega}}{\mu_\beta} \cdot [\nabla P_\beta - \rho_\beta \mathbf{g}] + \mu_{eff} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.5)$$

En la expresión anterior, Brinkman, introduce la viscosidad efectiva del medio μ_{eff} . Con la expresión (2.5) se puede abordar el problema de capa límite e incluir la continuidad de los esfuerzos cortantes en la interfase.

2.1.3 Ecuación de Forchheimer

La ecuación de Darcy es válida solo en los casos cuando la velocidad toma valores lo suficientemente pequeños. Es decir, cuando el Reynolds tiene un valor característico del orden de la unidad, donde la longitud característica es el diámetro de los poros. Sin embargo, existe un efecto de la morfología del sólido sobre el flujo generándose resistencias debido a la fricción superficial entre el fluido y la matriz sólida cuando se aumenta la velocidad. El efecto que produce esta fricción es el denominado arrastre de forma. Para tomar en consideración estos efectos denominados inerciales debido al incremento en la velocidad del flujo, Forchheimer establece una modificación a la ecuación de Darcy, Resultando la ecuación Darcy- Brinkman con la corrección de Forchheimer:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{K}_{\beta\omega}}{\mu_\beta} \cdot [\nabla P_\beta - \rho_\beta \mathbf{g}] - \frac{F_\beta}{\mathbf{K}_{\beta\omega}^{1/2}} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.6)$$

F_β es el factor de corrección Forchheimer, y es una función lineal de la velocidad cuando el número de Reynolds toma valores pequeños [Whitaker,(1996)]. El comportamiento no lineal de la velocidad de filtrado al incrementar la velocidad del flujo se incluyó en el último término de la Ecuación (2.6). Con la ecuación de Forchheimer se distinguen dos regímenes de flujo en el medio poroso, el régimen de Darcy y el régimen de Forchheimer. Al diferenciar los dos regímenes de flujo se puede determinar para qué valores de Reynolds (mas adelante se puede encontrar una definición) el arrastre de forma tiene mayor importancia con respecto al arrastre viscoso. La transición entre éstos dos regímenes ocurre entre Reynolds de 1 a 10, y no existe un salto abrupto entre uno y otro [Nield and Bejan, (1992)].

A partir de los trabajos anteriores se ha tratado de obtener relaciones que describan mejor el flujo en un medio poroso. De manera general la ecuación para un fluido a través de un medio poroso isotrópico, rígido y homogéneo se escribe como:

$$\rho_\beta \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right] = -\nabla P + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \frac{\mu_\beta}{\mathbf{K}_{\beta\omega}} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \frac{F_\beta}{\mathbf{K}_{\beta\omega}^{1/2}} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.7)$$

Vafai y Tien (1981) y Kaviany (1985) argumentan que dependiendo de la velocidad del fluido el término $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ puede ser despreciable comparándolo con los otros términos.

2.2 El fluido homogéneo.

La descripción dinámica de un fluido homogéneo incompresible y viscoso se puede realizar por medio de las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes (1827). La cual expresa la condición de equilibrio entre las fuerzas de inercia, fuerzas volumétricas, y fuerzas superficiales que actúan sobre un elemento de fluido. Las fuerzas superficiales consisten en fuerzas de presión (fuerzas normales) y fuerzas de fricción (esfuerzos cortantes). Las fuerzas volumétricas son importantes en los casos donde se tienen superficies libres o cuando la distribución de la densidad no es homogénea. La ecuación de Navier Stokes se escribe como:

$$\rho_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \rho_\beta (\mathbf{v}_\beta \cdot \nabla) \mathbf{v}_\beta = -\nabla P_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \quad (2.8)$$

En la actualidad no existe un método analítico general para la integración de las ecuaciones completas (caso tridimensional) de la ecuación de Navier-Stokes. De hecho, solamente se conocen soluciones a casos particulares válidos para distintas viscosidades, por ejemplo, el flujo de Hagen-Poiseuille a través de un tubo circular o un flujo de Couette entre dos paredes planas donde una se encuentra en reposo y la otra se mueve a una velocidad constante [Bird y col., (2001); Whitaker, (1981); Schlichting, (1955)]. También con las ecuaciones de Navier-Stokes se ha podido abordar el problema de capa límite, entre otros casos. En el caso del flujo de Hagen-Poiseuille la descripción del flujo es relativamente simple debido a que cada partícula de fluido se mueve solamente bajo la influencia de fuerzas de fricción o fuerzas de presión describiendo un patrón de flujo lineal (flujo laminar), los efectos inerciales para estos casos se han igualado a cero. Sin embargo, en la mayoría de los flujos en situaciones de aplicación industrial esto no se cumple. Las partículas de flujo actúan por fuerzas inerciales, de presión y fuerzas de fricción. Por medio de sus experimentos, Reynolds (1895) estableció un número adimensional que expresa la relación entre las magnitudes de inercia y las viscosas. Este número conocido como el número de Reynolds permite establecer un intervalo en donde la

transferencia de momentum está influenciada por los efectos viscosos o inerciales [Bird y col., (2001)]. Como se mencionó anteriormente, cuando se establece un régimen laminar la descripción dinámica del sistema homogéneo puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con una posible cuantificación de las cantidades de masa y calor, no así en un régimen turbulento cuyas características del flujo difieren de las del flujo laminar [Hinze, (1975)].

2.3 Escalas de descripción

En el modelado de ecuaciones de transporte en sistemas porosos es necesario distinguir las escalas sobre las cuales se apoya la descripción de las variables de transporte, esto es, se deben plantear las magnitudes de escala a las cuales las variables de temperatura, velocidad, presión, etc., de las ecuaciones de transporte describen el sistema.

2.3.1 Descripción del medio poroso.

Para modelar un medio poroso se establecen distintos niveles de descripción dependiendo de las características del medio y el detalle del análisis requerido. Cuando se tienen materiales porosos la manera de conocer su estructura es por medio de análisis estadísticos. El manejo estadístico permite obtener datos que nos ayudan a conocer la geometría del medio como lo puede ser distribución del diámetro y volumen de poro, área superficial del material, entre otras. Este nivel de descripción del medio poroso se plantea con base a escalas “microscópicas”, en donde solo es posible la descripción estadística del medio. Sin embargo, aún con la posibilidad de conocer en detalle la geometría del medio poroso, el tratar de modelar con ecuaciones puntuales de transporte (basadas en la aproximación del continuo) el flujo de un fluido a través de la geometría porosa resulta muy complicado. Una manera de evitar los problemas derivados de la descripción del flujo a través de la compleja geometría del medio es plantear el uso de variables promedio que son válidas en un volumen representativo elemental cuya definición está basada en las restricciones de escala tomando en cuenta las longitudes características del sistema. Sobre ésta escala “macroscópica” se establecen las ecuaciones de transporte en términos de variables promedio y se logra una descripción completa del flujo a través del sistema geométrico.

En la Figura 2.2 se representan las escalas microscópica y macroscópica para describir un almacén de granos. En la escala macroscópica, la longitud característica sobre la cual se dan los

cambios y que permite describir el sistema como un sistema de dos regiones (la región fluida y la región porosa) es la longitud (L) del mismo. La escala microscópica se observa representando el volumen representativo elemental en donde se distinguen dos fases una sólida y una fluida. Sobre esta escala se da la descripción de la interconexión y tamaño de los poros o canales por donde pueda circular el fluido. Dependiendo del detalle requerido para estudiar la transferencia de energía o masa, puede existir una tercera escala en donde el modelado del transporte puede ser distinto al de las otras escalas. La tercera escala incluye la estructura interna de un grano; de maíz o trigo por ejemplo.

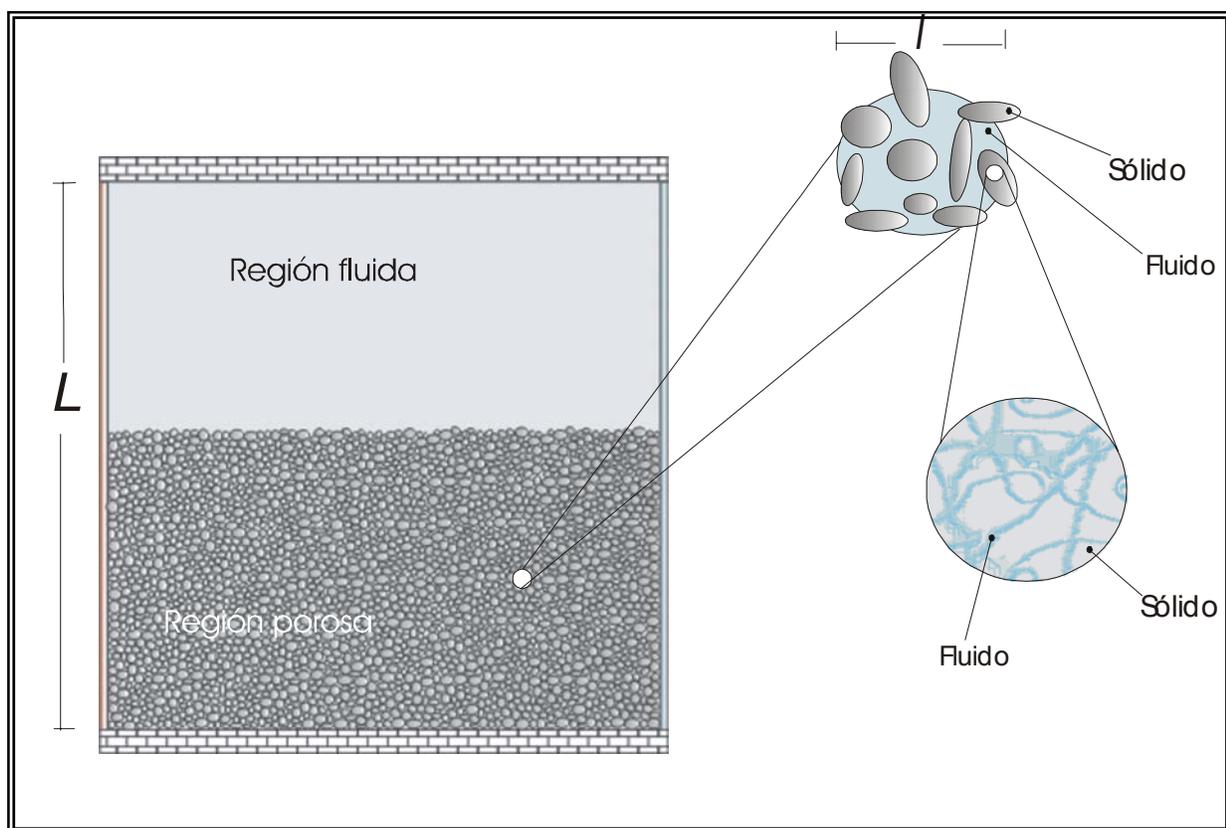


Figura 2.2. Escalas macroscópicas y microscópicas del almacén de granos

Con el estudio a escala macroscópica, las propiedades del flujo que intentan describir la matriz desde el punto de vista del fluido contenido son las denominadas propiedades de pseudo-transporte y estas son: la permeabilidad, es la conductancia del fluido; la dispersión, es el mezclado causado por el trayecto tortuoso del medio; la presión capilar, es la fuerza interfacial debida a las superficies, entre otras propiedades. Estas propiedades dependen de la estructura de

la matriz sólida y son propiedades macroscópicas y se describen utilizando solamente ecuaciones que están al mismo nivel de descripción como estas propiedades, esto es, las ecuaciones de Darcy y las extensiones a esta ecuación.

De lo anterior se puede resumir que el modelado del transporte de momentum, calor o masa en medios porosos con ecuaciones puntuales requiere de una aplicación y descripción estricta de la longitud de escala sobre el cual se están aplicando. Utilizando los resultados de Whitaker (1999) sobre el promedio espacial de las ecuaciones puntuales de transporte de momentum en un medio poroso se puede resumir que las ecuaciones de Darcy y de Forchheimer se expresan como:
La ecuación de Darcy,

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{K}_\beta}{\mu_\beta} \cdot [\nabla P_\beta - \rho_\beta \mathbf{g}] \quad (2.9)$$

La ecuación de Brinkman-Forchheimer,

$$0 = -\nabla P_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1/2} : \mathbf{F}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.10)$$

Se debe observar el carácter tensorial de la permeabilidad \mathbf{K}_β y del tensor \mathbf{F}_β de Forchheimer, de esta manera con estas expresiones se contempla el problema del flujo en tres dimensiones.

2.4 Teoría de la Turbulencia.

2.4.1 Características del flujo turbulento.

El movimiento turbulento de un fluido es una condición de flujo en el cual diversas cantidades (velocidad, presión, concentración, temperatura, etc.) presentan variaciones de forma aleatoria en el tiempo y en el espacio coordinado en el cual se describe. No obstante, se pueden discernir distintos promedios estadísticos en tiempo y espacio (Hinze,1975). También, se puede definir al flujo turbulento como un movimiento de remolinos con un amplio espectro de tamaño de remolinos

El flujo turbulento es altamente complejo en su comportamiento, sin embargo, como constante presenta las siguientes características:

- a) Irregularidad. El flujo es altamente irregular en su forma que no es posible describirlo en forma simple o económica.
- b) Tridimensional. Las fluctuaciones de las cantidades de momentum, calor o masa siempre son en tres dimensiones.
- c) Difusivo. Existe un rápido mezclado de momentum, calor y masa. Altamente difusivo.
- d) Disipativo. La energía cinética del movimiento turbulento siempre es disipada en calor debido a la influencia de la viscosidad. La energía para generar el movimiento turbulento proviene del flujo promedio a través de las interacciones de los esfuerzos cortantes y gradientes de velocidad.

La turbulencia se origina principalmente por inestabilidades en el flujo, comúnmente asociadas a altos números de Reynolds. Esto se explica debido a que la fuente de turbulencia son las inestabilidades del flujo cortante. La turbulencia generalmente es no-isotrópica, esto es varia en intensidad y dirección, pero algunos flujos tienen un limitado intervalo de escalas de remolino que se pueden idealizar como isotrópicos, o independientes de la dirección (Abbot, 1992).

Históricamente los avances en la descripción del flujo turbulento se han dado de manera inconsistente por lo que es difícil seguir los avances sobre la materia de manera continua. Mucho del trabajo sobre el conocimiento del flujo turbulento proviene del estudio de casos particulares

de flujo, desarrollándose principios generales e hipótesis acerca del movimiento turbulento. Las generalizaciones se realizan en dos formas, aquellas que postulan la existencia de similitudes entre flujos y aquellas que tratan con la naturaleza y los mecanismos del flujo turbulento. Las generalizaciones derivadas para el primer grupo no son del todo nuevas, estando implícitas en muchos de los trabajos que se han realizado sobre turbulencia en los últimos setenta años y no ahondan sobre detalles la naturaleza del origen de la turbulencia. Las del segundo tipo se basan principalmente en las suposiciones sobre la estructura y dinámica del movimiento turbulento y su éxito se basa en las aproximaciones que han logrado predecir de manera cuantitativa la turbulencia [Townsend,1976].

En el caso del flujo laminar se puede clasificar el flujo como flujos paralelos, no paralelos o cercanamente paralelos [Abbot,1992]. De manera similar el flujo turbulento se puede dividir en flujos en contacto con una pared (tuberías, canales o capa límite) y flujo libre (jet, estelas y capa de mezclado). La clasificación del flujo se debe a la diferencia en la estructura y a las propiedades de transporte presentes. La rugosidad de las paredes es un parámetro de importancia debido a las escalas más pequeñas de la turbulencia. Estos tipos de flujo turbulento reciben energía del flujo promedio a través de los remolinos con estructura característica adaptados al flujo cerca de la pared. Un tercer tipo de turbulencia es la turbulencia por convección. En éste tipo de flujos turbulentos la fuente de energía que genera el movimiento está almacenada en energía potencial, en consecuencia, el mecanismo de liberación de energía es mucho más simple y puede ser llevada a través de remolinos con una estructura simple. La forma de los perfiles de flujo promedio, de temperatura y recirculación, reflejan la eficiencia de la transferencia de calor. A números de Reynolds moderados, o su equivalente, el mezclado es tan completo que el gradiente es tan pequeño que no se puede medir en gran parte del dominio del flujo.

Los flujos por convección natural obtienen su energía por la acción de fuerzas de flotación que convierten la energía potencial en energía cinética de movimiento, pero la transferencia puede darse de dos formas. En plumas de gas caliente, con flujos promedio casi verticales, la mayor parte de la energía es transferida por trabajo de las fuerzas de flotación sobre el fluido promedio y muy poca por acción directa sobre las fluctuaciones de velocidad. La relación entre el movimiento turbulento y el flujo promedio en estos flujos es muy similar a la que existe en flujos

cortantes ordinarios, la principal diferencia es que en la convección natural el flujo es propiciado por fuerzas de flotación en vez de gradientes de presión o inerciales. Si el flujo promedio es cero o substancialmente horizontal, muy poca energía puede ser transferida al flujo promedio y la turbulencia es influenciada por la flotación. La convección natural de calor entre planos horizontales es el mejor ejemplo, y el movimiento turbulento generado por flotación es considerablemente diferente en naturaleza a la turbulencia generada por aquella donde los esfuerzos de corte son importantes.

2.4.2 La ecuación de Reynolds (El promedio temporal).

La teoría clásica de la descripción de la turbulencia cubre desde el periodo de 1895-1970. Reynolds (1895) introduce las ecuaciones de movimiento promediadas en el tiempo. Alrededor de 1970, se introducen otras aproximaciones para la descripción de la turbulencia, definiéndose dos grandes metodologías. La primera de éstas se basa en la aplicación de la aproximación clásica de las ecuaciones promediadas en el tiempo y propone el uso de dos ecuaciones de transporte para modelar la energía cinética k y la tasa de disipación turbulenta ε ; ambas cantidades características de la turbulencia. La viscosidad turbulenta está relacionada a la fluctuación de estos parámetros Rodi (1980). La otra aproximación es el uso de ecuaciones de promedio espacial. Este es el llamado modelo de “Simulación de remolinos a gran escala” (LES, Large Eddy Simulation), una introducción al tema se encuentra en el trabajo de Ferziger (1983). Lo que se pretende con el modelo LES es simular las escalas más grandes y sencillas de resolver del movimiento mientras que se acepta que las pequeñas escala no están presentes [Leslie, (1982); Lesieur (1987)]. La introducción de estos modelos y el desarrollo de las computadoras han abierto la posibilidad de estudiar los diversos modelos que describen la turbulencia, junto con el mejoramiento en las propuestas de solución por métodos numéricos. El estudio de la dinámica de fluidos bajo el ámbito de la programación es lo que da origen al campo de estudio denominado CFD (Computational Fluid Dynamics) [Abbot,(1992)].

Debido a la alta complejidad de la turbulencia resulta muy difícil describir el flujo de manera puntual. Reynolds propone que el flujo turbulento se puede separar en dos partes de tal manera que el flujo turbulento se resuelva a escalas lo más pequeñas posibles. De esta manera en un flujo estadístico en estado estacionario como lo es el flujo turbulento, cada variable se puede

escribir como la suma de un valor promedio y las fluctuaciones alrededor de un valor [Bird y *col.*, 2001; Anderson, 1984],

$$\Phi(x_i, t) = \tilde{\Phi}(x_i, t) + \Phi'(x_i, t) \quad (2.11)$$

donde Φ puede ser cualquier variable del flujo como: velocidad, presión, temperatura o concentración. $\tilde{\Phi}$ es un valor promedio de la variable, lo que representa una escala a la cual se puede resolver el flujo de una manera económica, y Φ' son las variaciones lo que representa la escala menor de turbulencia y que requeriría de una descripción estadística. El promedio temporal está definido por:

$$\tilde{\Phi}(x_i) = \lim_{T^* \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_0+T^*} \Phi(x_i, t) dt \quad (2.12)$$

t es el tiempo y T^* es el intervalo donde se promedia. Este intervalo debe ser lo suficientemente largo comparado con la escala típica de tiempo de las fluctuaciones. Si el intervalo T^* es lo suficientemente largo, entonces la variable promedio no depende del tiempo sobre el cual se ha promediado.

Si el flujo es inestable, el tiempo promedio no se puede usar y se debe remplazar por un promedio ajustado,

$$\tilde{\Phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(x_i, t) \quad (2.13)$$

Donde N es el número de miembros de los promedios los cuales deben ser lo suficientemente largos para eliminar el efecto de las fluctuaciones.

Partiendo de la ecuación de continuidad y de momentum para un fluido incompresible, utilizando la notación de subíndices se tiene,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

En ésta última ecuación σ_{ij} representa el tensor de esfuerzos. Si el fluido es Newtoniano, este tensor se escribe como:

$$\sigma_{ij} = -P_\beta \delta_{ij} + 2\mu_\beta s_{ij} \quad (2.16)$$

La tasa de deformación s_{ij} está definida por,

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.17)$$

Cabe señalar que si se sustituye la Ecuación (2.17) en la Ecuación (2.15) se obtiene la ecuación de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial P_\beta}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.18)$$

Utilizando la descomposición de Reynolds (expresión (2.11)) las variables del transporte de momentum se escriben como:

$$u_{ij} = \widetilde{u}_{ij} + u'_{ij} \quad (2.19)$$

$$P_\beta = \widetilde{p} + p' \quad (2.20)$$

$$\sigma_{ij} = \widetilde{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2.21)$$

$$s_{ij} = \widetilde{s}_{ij} + s'_{ij} \quad (2.22)$$

Utilizando las expresiones (2.19)-(2.22) y promediando en el tiempo de acuerdo con (2.12) se tiene:

$$\widetilde{u}_j \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\widetilde{p} \delta_{ij} + 2\mu_\beta \widetilde{s}_{ij} - \overline{\rho_\beta u'_i u'_j} \right) \quad (2.23)$$

Donde se ha eliminado el término que depende del tiempo, se define,

$$\widetilde{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.24)$$

De igual manera para la ecuación de continuidad se puede obtener una expresión similar pero en función de la velocidad promedio,

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.25)$$

La expresión (2.23) es la ecuación de transporte de momentum para flujo turbulento en donde las variables están promediadas en el tiempo. El término $\overline{\rho_\beta u'_i u'_j}$ es conocido como el tensor de esfuerzos de Reynolds y es la contribución de la turbulencia al flujo promedio en la ecuación de Navier-Stokes. El tensor de Reynolds se puede representar como:

$$T_{ij} = -\rho_\beta \begin{pmatrix} \widetilde{u_1'^2} & \widetilde{u_1' u_2'} & \widetilde{u_1' u_3'} \\ \widetilde{u_2' u_1'} & \widetilde{u_2'^2} & \widetilde{u_2' u_3'} \\ \widetilde{u_3' u_1'} & \widetilde{u_3' u_2'} & \widetilde{u_3'^2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Este tensor es simétrico y los componentes de la diagonal son denominados esfuerzos normales (presión). En muchos flujos estos componentes normales tienen poca contribución al transporte de momentum promedio, y pueden ser despreciables. Los componentes fuera de la diagonal son esfuerzos cortantes y juegan un papel muy importante en la teoría de transporte de momentum promedio debido al movimiento turbulento, específicamente debido a las fluctuaciones de la velocidad.

La ecuación para una cantidad escalar, como lo es la temperatura, también se puede escribir utilizando la descomposición de Reynolds; realizando el mismo procedimiento se tiene:

$$u'_j \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho_\beta u'_i T'_\beta} \quad (2.27)$$

El término $\overline{\rho_\beta u'_i T'_\beta}$ se denomina flux escalar turbulento y de igual manera que el tensor de Reynolds debe expresarse en función de propiedades promedio.

Revisando las ecuaciones de turbulencia para el transporte de momentum promedio se observa que se tienen tres ecuaciones para el flujo promedio, provenientes de la ecuación de momentum,(2.23), junto con la Ecuación (2.25) de conservación de masa en función del flujo promedio, en total se tiene en total cuatro ecuaciones. Sin embargo, estas ecuaciones implican diez incógnitas, la presión, los tres componentes de la velocidad promedio y los seis componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds. Esta disparidad entre ecuaciones e incógnitas es lo que da origen a la búsqueda de nuevas ecuaciones que relacionen principalmente las variables promedio con las del tensor de esfuerzos de Reynolds, dando origen a lo que se conoce como problema de cerradura para la turbulencia.

Resumiendo, las ecuaciones de transporte que se deben de resolver para describir un flujo turbulento en dos dimensiones en coordenadas cartesianas son:

Ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

Ecuación de movimiento en la dirección x ,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu_\beta \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u}^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u}'\tilde{v}') \quad (2.29)$$

Ecuación de movimiento en la dirección y ,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu_\beta \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v}^2) - \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u}'\tilde{v}') \quad (2.30)$$

Donde la velocidad promedio y la velocidad de las fluctuaciones se descomponen en,

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}\hat{i} + \tilde{v}\hat{j} \quad (2.31)$$

$$u'_i = u'\hat{i} + v'\hat{j} \quad (2.32)$$

Para el caso en dos dimensiones se tienen tres ecuaciones y seis incógnitas. Unas de las aproximaciones con mayor aplicación para obtener las ecuaciones de cerradura es el denominado modelo de longitud de mezclado de Prandtl y que será utilizado también para desarrollar el modelo estándar $k-\varepsilon$.

2.4.3 La teoría de longitud de mezclado.

J. Boussinesq (1877) fue el primero en intentar relacionar el tensor de esfuerzos de Reynolds con la velocidad promedio del flujo al realizar una analogía con la ley de viscosidad de Stokes para flujo laminar, introduciendo un coeficiente de mezclado A_t para el tensor de esfuerzos de Reynolds, así se relaciona cada componente de la siguiente manera,

$$\Gamma_{xy} = -\rho_\beta \widetilde{u'v'} = A_t \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.33)$$

El coeficiente A_t tiene la desventaja de tratar de representar una viscosidad de remolino la cual no es una propiedad del fluido como lo es la viscosidad dinámica μ_β , lo que representa la mayor limitación del modelo.

Siguiendo la misma línea de pensamiento, Prandtl, basado en la idea de la viscosidad de los gases usando la teoría cinética de los gases, propone o visualiza que conforme el fluido sigue una trayectoria desde la pared hacia la zona donde existe el flujo turbulento las partículas de fluido se agrupan en un cúmulo (cluster) de partículas el cual se mueve como un todo en las dos direcciones (ver Figura 2.3).

Si se asume que el cúmulo de partículas el cual viene de una capa nivel de fluido situada en $(y_1 - \ell)$ con velocidad $\tilde{u}(y_1 - \ell)$ se desplaza sobre la distancia ℓ en la dirección y . Esta distancia ℓ es conocida como la longitud de mezclado de Prandtl. Como el cúmulo de partículas conserva su momentum, su nueva velocidad en la posición y_1 es menor que la velocidad que prevalece en esa posición. Entonces la diferencia de velocidad es:

$$\Delta\tilde{u}_1 = \tilde{u}(y_1) - \tilde{u}(y_1 - \ell) \approx \ell \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.34)$$

en donde se ha utilizado la expansión en series de Taylor para la velocidad en $(y_1 - \ell)$ despreciando todos los términos de mayor orden. De manera similar se tiene,

$$\Delta\tilde{u}_2 = \tilde{u}(y_1 + \ell) - \tilde{u}(y_1) \approx \ell \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.35)$$

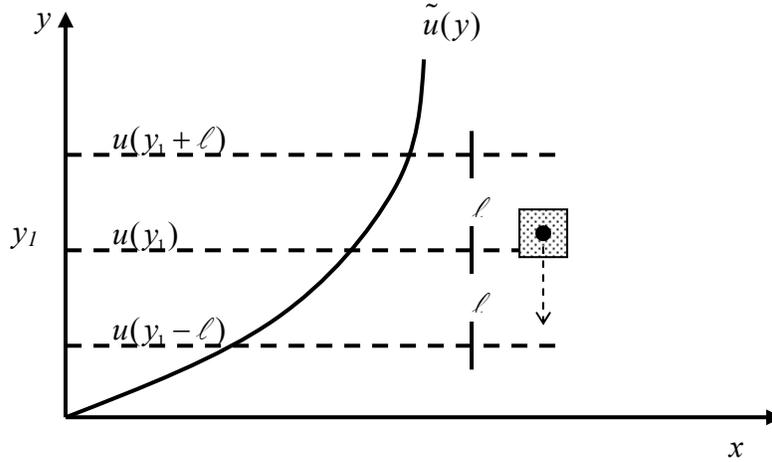


Figura 2.3. Longitud de mezclado para un cúmulo de partículas de acuerdo con la teoría de Prandtl.

Considerando el flux de momentum turbulento promedio que se da sobre el plano y_1 dado el mezclado se puede definir el transporte de momentum por unidad de área como,

$$\frac{1}{2} \rho_{\beta} \left(\overline{v'^2} \right)^{1/2} \left(\Delta \tilde{u}_1 + \Delta \tilde{u}_2 \right) \approx \rho_{\beta} \left(\overline{v'^2} \right)^{1/2} \ell \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.36)$$

en este caso se considera la velocidad de las fluctuaciones en la dirección y . $\left(\overline{v'^2} \right)^{1/2}$ representa el promedio de la velocidad de las fluctuaciones al transferirse momentum de los dos planos, esta velocidad se conoce como la raíz del promedio del cuadrado de la velocidad de las fluctuaciones (rms, por sus siglas en ingles: root-mean-square), éste valor tiene la característica de funcionar como una restricción que se debe de satisfacer para que la longitud de mezclado sea válida. Una interpretación física de la longitud de mezclado consiste en entenderla como la distancia transversal que debe ser recorrida por una aglomeración de partículas de fluido viajando con su velocidad promedio inicial con el fin de hacer que la diferencia entre su velocidad y la velocidad en su nueva posición sea igual a la fluctuación transversal promedio en el flujo turbulento.

Consecuentemente el flux de momentum promediado en el tiempo es proporcional a,

$$\rho_{\beta} v_{rms} \ell \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.37)$$

Observando esta última expresión se tiene una expresión equivalente al componente del tensor de esfuerzos cortantes, por lo que se puede escribir:

$$T_{xy} = (c_1 \rho_\beta v_{rms}) \ell \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.38)$$

c_1 es una constante de proporcionalidad para tener unidades homogéneas. De esta manera si ahora se “define” un coeficiente de transferencia o de intercambio turbulento para el momentum se tiene:

$$\nu_t = c_1 (v_{rms} \ell) \quad (2.39)$$

Entonces la Ecuación (2.38) se convierte en:

$$T_{xy} = \rho_\beta \nu_t \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (2.40)$$

Donde ahora se tiene una viscosidad de remolino la cual toma un papel similar al de la viscosidad del fluido, y mantiene una forma similar a la obtenida por el modelo de viscosidad de Newton para flujo laminar.

A ésta altura se puede observar que si v_{rms} y ℓ se definen, se puede calcular la viscosidad de remolino, ν_t ; sin embargo, si se asume un valor constante para la viscosidad de remolino en un flujo turbulento es equivalente a asumir que se tiene solo una longitud, ℓ , característica de mezclado y solo una velocidad de escala representativa, v_{rms} . Esta es la primera restricción del modelo.

Finalmente en un modelo de viscosidad de remolino, se asume que el tensor de esfuerzos de Reynolds y el flux escalar turbulento se relacionan al campo promedio por las relaciones:

$$-\overline{u'v'} \cong \nu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (2.41)$$

$$-\overline{u'_j T'_\beta} \cong \alpha_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.42)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.29) y (2.30) se tienen las ecuaciones para modelar la turbulencia en dos dimensiones:

Ecuación de movimiento en la dirección x ,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu_\beta \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \quad (2.43)$$

Ecuación de movimiento en la dirección y ,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu_\beta \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \quad (2.44)$$

2.4.4 La energía cinética turbulenta y la energía disipativa turbulenta

Con el fin de estudiar la dinámica de turbulencia se debe entender como es que la energía cinética de la turbulencia se genera y se mantiene en el flujo, por lo que se necesita una expresión para la ecuación de balance energía promedio mecánica. Si se multiplica la Ecuación (2.23) por la velocidad promedio \tilde{u}_i y después de algunas simplificaciones [Tennekes y Lumley, 1972] se tiene,

$$\tilde{u}_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\tilde{p}}{\rho_\beta} \tilde{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\nu_\beta \tilde{u}_i \tilde{s}_{ij} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_i \tilde{u}'_j \tilde{u}_i \right) + \tilde{p} \delta_{ij} \tilde{s}_{ij} - 2\nu_\beta \tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij} + \tilde{u}'_i \tilde{u}'_j \tilde{s}_{ij} \quad (2.45)$$

(0) (1) (2) (3) (3') (4) (5)

El término (0) representa el transporte de la energía cinética promedio en el flujo turbulento por unidad de masa, (1) es el trabajo del flujo. El término (3') es la deformación del flujo debido al trabajo realizado por las fuerzas de presión y puede ser despreciado. En un flujo turbulento (3) y (5) son del orden del número de Reynolds y son por lo tanto mayores a la contraparte viscosa (2) y (4), estos últimos generalmente no son tomados en cuenta.

Si en el término (3) se sustituye la definición (2.41) se tiene un término de transporte por difusión. El término (5) representa la producción de energía turbulenta y es usualmente negativo debido al producto $\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j$, por lo que éste término al tener signo negativo lo que hace es “drenar” energía del flujo promedio, esto es, de las grandes escalas hacia las escalas pequeñas.

Finalmente la ecuación el balance de energía cinética turbulenta en el flujo promedio queda como:

$$\underbrace{\widetilde{u}_j \frac{\partial (\frac{1}{2} \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i)}{\partial x_j}}_{\text{Advección de la energía cinética promedio}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\widetilde{p}}{\rho_\beta} \widetilde{u}_i \right)}_{\text{Presión o trabajo del flujo}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_j \widetilde{u}_i)}_{\text{Difusión por los esfuerzos de Reynolds}} + \underbrace{\widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_j \widetilde{s}'_{ij}}_{\text{Producción de energía turbulenta}} \quad (2.46)$$

De manera similar se multiplica ahora la ecuación de Navier-Stokes por la expresión (2.19) y se toma el promedio temporal definido en (2.12). A la expresión resultante se subtrae la Ecuación (2.45) se obtiene una ecuación de la forma,

$$\underbrace{\widetilde{u}_j \frac{\partial (\frac{1}{2} \widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_i)}{\partial x_j}}_{(0')} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (-\frac{1}{2} \widetilde{p}' \widetilde{u}'_j)}_{(1')} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu_\beta \widetilde{u}'_j \widetilde{s}'_{ij})}_{(2')} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{u}'_j \cdot \frac{1}{2} \widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_i)}_{(3')} - \underbrace{2\nu_\beta \widetilde{s}'_{ij} \widetilde{s}'_{ij}}_{(4')} - \underbrace{\widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_j \widetilde{s}'_{ij}}_{(5')} \quad (2.47)$$

Se define ahora a la energía cinética turbulenta total por unidad de masa como:

$$k \equiv \frac{1}{2} \widetilde{u}'_i \widetilde{u}'_i = \frac{1}{2} (\widetilde{u}'_1{}^2 + \widetilde{u}'_2{}^2 + \widetilde{u}'_3{}^2) \quad (2.48)$$

Para la Ecuación (2.47) el término (0') es el transporte de energía cinética turbulenta, k , por advección del flujo promedio, mientras que (1') es el trabajo del flujo debido a la fluctuación de la presión. Nuevamente los (3') y (5') son varios órdenes de magnitud mayores al término (2') para un flujo turbulento. Ahora se define el término (4'),

$$\varepsilon = -2\nu_\beta \widetilde{s}'_{ij} \widetilde{s}'_{ij} \quad (2.49)$$

Como la tasa de disipación energía viscosa la cual no se puede despreciar; y

$$\widetilde{s}'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}'_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.50)$$

Es la tasa de deformación del flujo fluctuante. Nuevamente el término (5') es clave, ya que es idéntico pero de signo contrario al que se encuentra en el balance de energía del flujo promedio, Ecuación (2.45). En el balance de energía cinética turbulenta éste término se convierte en positivo y representa la producción de turbulencia. Entonces, lo que se ha logrado es identificar el término que drena energía cinética del flujo turbulento a las escalas grandes y produce energía cinética turbulenta a escalas pequeñas.

Finalmente se tiene la ecuación para la energía cinética turbulenta, despreciando el término de la fluctuación de la presión, (1'), se tiene:

$$\underbrace{\widetilde{u}_j \frac{\partial (\frac{1}{2} \widetilde{u'_i u'_i})}{\partial x_j}}_{\text{Advección de la energía cinética turbulenta}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{u'_j \cdot \frac{1}{2} u'_i u'_i})}_{\text{Difusión de energía cinética turbulenta}} - \underbrace{2\nu_\beta \widetilde{s'_{ij} s'_{ij}}}_{\text{Disipación de energía cinética turbulenta}} - \underbrace{\widetilde{u'_i u'_i s'_{ij}}}_{\text{Producción de energía cinética turbulenta}} \quad (2.51)$$

Esta ecuación se puede abreviar en,

$$A^\tau = T^\tau + P^\tau - \varepsilon \quad (2.52)$$

Donde:

A^τ = Advección del flujo promedio de k .

T^τ = Difusión turbulenta de k .

P^τ = Producción de k .

ε = Disipación viscosa de k .

Cuando se tiene un flujo en estado estacionario donde la advección, A^τ , queda en balance con la difusión, P^τ , la tasa local de producción de turbulencia debe estar en equilibrio con la tasa de disipación ($P^\tau = \varepsilon$). Los flujos que tienen una sola longitud de mezclado característica y una sola velocidad de referencia son de éste tipo. Flujos cortantes de frontera libre y flujos cortantes con fronteras de pared son ejemplos que se pueden tratar con una viscosidad de remolino constante.

En 1924 Keller y Friedmann introdujeron la idea de utilizar ecuaciones de transporte para describir el comportamiento de las cantidades características de turbulencia. Posteriormente Kolmogorov (1942) y Prandtl (1945) sugirieron, de forma independiente cada uno, que la viscosidad de remolino se puede encontrar de la proporcionalidad,

$$\nu_t \propto \sqrt{k}L^\zeta \quad (2.53)$$

Donde, $k = \frac{1}{2}(\widetilde{u_1'^2} + \widetilde{u_2'^2} + \widetilde{u_3'^2})$ es la energía cinética turbulenta; y

L^ζ =escala de referencia de la turbulencia.

Además, propusieron que es posible determinar la distribución de $k(x_i, t)$ resolviendo una ecuación de transporte para esta cantidad [Rodi, 1980]. Tomando en cuenta ésta posibilidad se han desarrollado modelos de turbulencia los cuales se clasifican de acuerdo al número de ecuaciones de transporte usados para las cantidades turbulentas.

Cuadro 2.1. Casos para los modelos de turbulencia.

Nombre	Número de ecuaciones de transporte	Cantidades de turbulencia modeladas
Modelo de cero ecuaciones	0	ninguna
Modelos de una ecuación	1	k
Modelo de dos ecuaciones	2	k y ε
Modelos esfuerzo/flux	6	Los componentes del termino $\widetilde{u_i' u_i'}$
Modelos algebraicos	2	Se utiliza k y ε para modelar $\widetilde{u_i' u_i'}$

Entonces, del modelo de Prandtl-Kolmogorov se tiene,

$$\nu_t = C'_\mu \sqrt{k}L^\zeta \quad (2.54)$$

Donde C'_μ es un coeficiente de difusión turbulento. De un análisis dimensional [Tennekes y Lumley, 1972], la energía de disipación turbulenta está dada por,

$$\varepsilon \propto \frac{u^{\tau 3}}{L^\tau} \quad (2.55)$$

donde u^τ y L^τ es una velocidad local y longitud de mezclado local de referencia; introduciendo una constante de proporcionalidad,

$$\varepsilon = C_D \frac{u^{\tau 3}}{L^\tau} \quad (2.56)$$

si la velocidad de referencia se toma como $u^\tau = \sqrt{k}$. Sustituyendo (2.56) en (2.54) para eliminar L^τ , se tiene,

$$\nu_t = C'_\mu C_D \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.57)$$

o simplemente,

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.58)$$

Entonces se tiene que un modelo de dos ecuaciones resuelve por separado ecuaciones de transporte para $k(x_i, t)$ y $\varepsilon(x_i, t)$ usando (2.58) para encontrar $\nu_t(x_i, t)$. El uso de la viscosidad de remolino dado por la definición anterior es equivalente a suponer isotropía local en la turbulencia. También se debe tener presente que el modelo de longitud de mezclado es válido solamente para flujos donde se considera el equilibrio local, ($P^\tau = \varepsilon$).

2.4.5 Las ecuaciones de transporte básicas del modelo estándar k - ε

La ecuación de energía cinética turbulenta se debe simplificar para efectos de modelado, se tiene,

$$\underbrace{\tilde{u}_j \frac{\partial (\frac{1}{2} \tilde{u}'_i \tilde{u}'_i)}{\partial x_j}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}'_j \cdot \frac{1}{2} \tilde{u}'_i \tilde{u}'_i)} - \underbrace{2\nu \tilde{s}'_{ij} \tilde{s}'_{ij}} - \underbrace{\tilde{u}'_i \tilde{u}'_i \tilde{s}'_{ij}} \quad (2.59)$$

Advección de la energía cinética turbulenta	Difusión de energía cinética turbulenta	Disipación de energía cinética turbulenta	Producción de energía cinética turbulenta
--	--	--	--

El término de difusión turbulenta de la energía cinética se modela bajo la suposición del gradiente de la difusión [Wilcox, 1993], entonces,

$$\overline{u'_j \cdot \frac{1}{2} u'_i u'_i} \approx \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.60)$$

Donde se tiene la viscosidad turbulenta,

$$\mu_t = \rho \nu_t \quad (2.61)$$

y σ_k es un número de Prandtl turbulento cuyo valor es aproximadamente la unidad.

El término que representa la tasa de producción de la energía cinética turbulenta por el flujo promedio, esto es, una transferencia de energía cinética del flujo promedio hacia la turbulencia, se modifica utilizando la viscosidad de remolino,

$$P_k = -\overline{u'_i u'_i s_{ij}} \approx \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.62)$$

De esta manera la ecuación de energía turbulenta ha sido completada en función del flujo promedio. Las expresiones (2.60) y (2.62) son los denominados sub-modelos de turbulencia. Finalmente la ecuación para modelar la energía cinética se expresa como:

$$\tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_\beta}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (2.63)$$

La derivación para la ecuación de la energía disipativa turbulenta es menos directa [ver Tennekes y Lumley, 1972; Rodi, 1980] y se expresa como:

$$\tilde{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_\beta}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.64)$$

En este modelo la viscosidad de remolino esta expresada como:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.65)$$

El modelo estándar k - ε contiene cinco parámetros que se consideran constantes,

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.00 \quad \sigma_\varepsilon = 1.30 \quad (2.66)$$

En la Ecuación (2.64) el término de advección del lado izquierdo, está en balance con la difusión turbulenta, la producción (fuente) y disipación (perdida o sumidero). El término de advección y el de producción están acoplados al flujo promedio a través de \tilde{u}_i y los gradientes espaciales, produciendo un flujo promedio cortante. Finalmente la energía cinética es disipada a una razón de ε en la Ecuación (2.63), mientras que el término $C_{\varepsilon 2} \varepsilon^2 / k$ funciona como un término de sumidero de energía generando un balance en la Ecuación (2.64).

El conjunto de ecuaciones (2.63),(2.64) y (2.65) junto con las constantes (2.66), representan el modelo estándar de turbulencia k - ε .

2.4.6 Modificaciones del modelo estándar $k-\varepsilon$

No existe un modelo universal para todos los fluidos, el modelo $k-\varepsilon$ es solo una aproximación al modelado del flujo turbulento cuyos resultados han motivado su uso en diversos problemas en ingeniería. Sin embargo, el modelo estándar ha sido modificado para mejorar las predicciones de flujo considerando las distintas configuraciones de flujo turbulento, flujo cortante, flujo libre o turbulencia por convección, por ejemplo.

Para resolver el sistema de ecuaciones del modelo es necesario establecer condiciones de frontera. Por lo general estas son similares a las aplicadas a una ecuación escalar. Sin embargo, cerca de una pared pueden existir diferencias significativas; el principal problema que se presenta se deriva de las distintas escalas de turbulencia presentes en un flujo cerca la pared. Una posibilidad es resolver las ecuaciones a una posición por encima de la pared. La condición “natural” para la energía cinética turbulenta es que sea cero en la pared, sin embargo, ésta condición produciría una singularidad en la ecuación de transporte para la energía disipativa debido a la relación ε/k [Wilcox, 1993; Ferziger y Milovac, 1996].

Otra posibilidad es modificar el modelo. Los efectos que se deben modelar cerca de la pared provienen de los números de Reynolds pequeños de la turbulencia cerca de la pared por lo que se propone la modificación para bajos números de Reynolds del modelo estándar $k-\varepsilon$ [Jones y Launder, 1973; Chien, 1982; Yang y Shih, 1993].

Estas modificaciones consisten en adicionar a las ecuaciones un término extra,

$$\tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_\beta}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon + D \quad (2.67)$$

$$\tilde{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_\beta}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E \quad (2.68)$$

donde la viscosidad de remolino se define como:

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.69)$$

D y E se utilizan para mejorar las predicciones de la turbulencia en la zona cercana a la pared. Estos dos términos pueden tener diferentes formas de acuerdo con los diferentes autores, por ejemplo:

1) Modelo k - ε para bajos números de Reynolds propuesto por Chien (1982).

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.35 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.8 \quad \sigma_k = 1.00 \quad \sigma_\varepsilon = 1.30 \quad (2.70)$$

$$f_\mu = 1 - \exp(-0.011x^+) \quad (2.71)$$

$$f_1 = 1.0 \quad (2.72)$$

$$f_2 = 1 - \frac{2}{9} \exp\left(-\left(\frac{\text{Re}_\tau}{6}\right)^2\right) \quad (2.73)$$

$$D = -2\mu_\beta \frac{k}{x_n^2} \quad (2.74)$$

$$E = -\frac{2\mu_\beta}{x_n^2} \exp(-0.011x^+) \quad (2.75)$$

2) Modelo k - ε para bajos números de Reynolds propuesto por Jones y Launder (1973).

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.45 \quad C_{\varepsilon 2} = 2.0 \quad \sigma_k = 1.00 \quad \sigma_\varepsilon = 1.30 \quad (2.76)$$

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-2.5}{1 + \text{Re}_\tau/50}\right) \quad (2.77)$$

$$f_1 = 1.0 \quad (2.78)$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-\text{Re}_\tau^2) \quad (2.79)$$

$$D = -2\nu_\beta \left[\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (2.80)$$

$$E = -2\nu_\beta \nu_\tau \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (2.81)$$

El número de fricción de Reynolds se define como:

$$\text{Re}_\tau = \frac{u_\tau y}{\nu_\beta} \quad (2.82)$$

Con la velocidad de fricción,

$$u_\tau = \frac{\tau_w}{\rho_\beta} \quad (2.83)$$

Numéricamente y y x^+ se evalúan en el primer punto cercano a la pared, τ_w es el esfuerzo cortante en la pared,

$$\tau_w = \nu_\beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (2.84)$$

Para los modelos de Chien (1982) y Jones y Launder (1973) las condiciones para la energía cinética turbulenta, k , y la disipación viscosa turbulenta, ε , son cero. No así para el modelo estándar que mantiene las condiciones siguientes:

$$k = \frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{C_\mu} f_\mu} \quad (2.85)$$

$$\varepsilon = \frac{(u_\tau)^3}{\kappa y} \quad (2.86)$$

donde κ es la constante de Von Kármán y es igual a 0.41.

2.4.7 Flujo Turbulento en medios porosos

Diversos procesos modernos de ingeniería podrían beneficiarse de tener una mejor comprensión de la turbulencia y sus efectos en la transferencia de momentum, energía y masa, en un medio poroso.

Goeckener *y col.* (1992), por ejemplo, demostraron que la combustión dentro de un medio poroso inerte reduce de la temperatura del gas y las emisiones de NO_x . Obviamente, el espesor de la flama, la temperatura del gas, la concentración y distribución de las especies, etc., son variables afectadas por la turbulencia dentro del medio poroso.

Una característica fundamental por definir para flujos turbulentos en medios porosos es la distinción de turbulencia “microscópica” y “macroscópica”. Estas definiciones vienen en relación con las longitudes de escala que existen para describir un medio poroso y que se mencionaron anteriormente. La única evidencia experimental de turbulencia en un medio poroso tridimensional es la turbulencia microscópica al detectar turbulencia realizando pruebas puntuales dentro de los poros [Niell, (1992); Kaviany,(1994)]. La turbulencia microscópica es dependiente de la estructura geométrica de la matriz sólida del medio poroso, además de ser afectada por la porosidad. Mickley *y col.* (1965) reportaron perfiles de velocidad y parámetros de turbulencia obtenidos experimentalmente con un anemómetro de cable caliente en un lecho empacado con esferas de vidrio.

Por el otro lado, el tratamiento teórico de la turbulencia macroscópica en un medio poroso se inició con el estudio de Ahmed y Sunada (1969), definiendo la turbulencia macroscópica sobre un volumen promedio. Basados en los resultados de Lim y Mathews (1993), quienes obtuvieron mejores resultados al utilizar una forma modificada del modelo estándar $k-\varepsilon$ para modelar un flujo turbulento en un medio poroso, Antohe y Lage (1997) proponen un modelo de turbulencia basados en el modelo estándar $k-\varepsilon$ y que ha sido ampliamente usado por sus resultados en problemas de ingeniería, aunque estos mismos autores aceptan que falta mucho trabajo por realizar para terminar de comprender la aplicación del modelo y la teoría detrás de éste.

Antohe y Lage (1997), derivan el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ para un flujo incompresible en un medio poroso promediando en el tiempo la ecuación “general” (ver Ecuación. (2.7)) para un flujo en un medio poroso, esto es, la ecuación general contempla los términos inerciales, el termino de gradientes de presión, el termino de Darcy, Forchheimer y Brinkman. De ésta manera al incluir esta ecuación se contempla que, (1) la corrección al modelo $k-\varepsilon$ es consistente con las ecuaciones generales del modelo estándar; (2) se tiene un modelo matemático para simular la turbulencia macroscópica en la compleja geometría; y (3) la propiedad de un modelo general macroscópico para representar el fenómeno turbulento que existe a un nivel microscópico.

Suponiendo un medio poroso rígido e isotrópico, y utilizando la descomposición de Reynolds (2.11) se tiene, utilizando la notación de subíndices,

Ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial(\tilde{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.87)$$

Ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\tilde{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial(\tilde{p}_i + p'_i)}{\partial x_i} + \nu_\beta \frac{\partial^2(\tilde{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} - \phi \frac{\nu_\beta}{K_{\beta\omega}} (\tilde{u}_i + u'_i) \\ & - \phi^2 \frac{c_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} [(\tilde{u}_j + u'_j) + (\tilde{u}_j + u'_j)]^{1/2} (\tilde{u}_i + u'_i) - \delta_{i3} [1 - \lambda_\beta (\tilde{T}_\beta + T'_\beta - T_0)] g \end{aligned} \quad (2.88)$$

Ecuación de energía,

$$\phi \rho_\beta C_{p\beta} (\tilde{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\tilde{T}_\beta + T'_\beta)}{\partial x_j} = k_\omega \frac{\partial^2(\tilde{T}_\beta + T'_\beta)}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.89)$$

Donde ϕ es la porosidad del medio, c_F es el coeficiente de Forchheimer, K es la permeabilidad del medio poroso. El último término de la Ecuación (2.88) es el término de flotación para considerar flujos convectivos naturales. Con el fin de facilitar el manejo del proceso del promedio temporal en la ecuación de movimiento el término de Forchheimer se expande de la forma,

$$\left[(\tilde{u}_j + u'_j) + (\tilde{u}_j + u'_j) \right]^{1/2} (\tilde{u}_i + u'_i) = Q\tilde{u}_i + Qu'_i + \frac{\tilde{u}_j \tilde{u}_i}{Q} u'_j \quad (2.90)$$

Donde,

$$Q = (\tilde{u}_m \tilde{u}_m)^{1/2} \quad (2.91)$$

Donde el subíndice $m=1\dots n$, el número de componentes. De la expansión (2.90), solo se conservan los términos de menor orden. Finalmente las ecuaciones promedio temporal son,

Ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.92)$$

Ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial x_i} + \nu_\beta \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \phi \frac{\nu_\beta}{K_{\beta\omega}} \tilde{u}_i - \delta_{i3} \left[1 - \beta (\tilde{T} + T' - T_0) \right] g \\ & - \phi^2 \frac{c_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} Q \tilde{u}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}'_j) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ecuación de energía,

$$\phi \rho_\beta C_{p\beta} \tilde{u}_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = k_\omega \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_j \partial x_j} - \phi \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}'_j T') \quad (2.94)$$

Empleando el concepto de viscosidad de remolino, se obtiene para el tensor de esfuerzo de Reynolds,

$$\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j = -\nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.95)$$

Se introduce una ecuación similar para la segunda correlación entre las fluctuaciones turbulenta de la velocidad y la temperatura, usando la difusividad turbulenta [Hinze,(1975)],

$$\tilde{u}'_j \tilde{T}'_\beta = -\alpha_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.96)$$

Introduciendo las dos últimas expresiones en las ecuaciones (2.93) y (2.94) se tiene,

Ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_j \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial x_i} + \nu_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left[(\nu_\beta + \nu_t) \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \phi \frac{\nu}{K_{\beta\omega}} \widetilde{u}_i - \delta_{i3} \left[1 - \lambda (\widetilde{T}_\beta - T_0) \right] g \\ & - \phi^2 \frac{c_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} Q \widetilde{u}_i - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Ecuación de energía,

$$\phi \widetilde{u}_j \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial x_j} = \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial x_j} \left[(\alpha_\omega + \phi \alpha_t) \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial x_j} \right] \quad (2.98)$$

donde,

$$\alpha_\omega = \frac{k_\omega}{\rho_\beta C_{p\beta}} \quad (2.99)$$

Para encontrar las ecuaciones de k y ε se parte nuevamente de la ecuación de momentum de las fluctuaciones, restando (2.88) a (2.97),

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{u}_j \widetilde{u}_i - \widetilde{u}'_j u'_i) = & -\frac{1}{\rho_\beta} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu_\beta \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \delta_{j3} \lambda_\beta T'_\beta g - \phi \frac{\nu_\beta}{K_{\beta\omega}} u'_i \\ & - \phi^2 \frac{c_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} \left(Q u'_i + \frac{\widetilde{u}_j \widetilde{u}_i}{Q} u'_j \right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Multiplicando ésta última expresión por u'_i , y promediando en el tiempo, el campo de gravedad está en la dirección $i=3$,

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\rho_\beta} \widetilde{p}' u'_j + \frac{1}{2} \widetilde{u}'_i u'_i u'_j \right] - \widetilde{u}'_j u'_i \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \nu_\beta \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} + \delta_{j3} \lambda_\beta \widetilde{T}'_\beta u'_3 g - 2\phi \frac{\nu_\beta}{K_{\beta\omega}} k \\ & - \phi^2 \frac{c_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} \left(2Qk + \frac{\widetilde{u}_j \widetilde{u}_i}{Q} u'_j u'_i \right) - \varepsilon \end{aligned} \quad (2.101)$$

Nuevamente se tiene la hipótesis del transporte del gradiente,

$$\frac{1}{\rho_\beta} \widetilde{p}' u'_j + \frac{1}{2} \widetilde{u}'_i u'_i u'_j \approx -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.102)$$

y,

$$\varepsilon \approx \nu_\beta \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}} \quad (2.103)$$

Introduciendo las expresiones anteriores en (2.101) se tiene la ecuación para la energía cinética turbulenta,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu_\beta + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda_\beta g \alpha_\beta \frac{\partial \tilde{T}_\beta}{\partial x_3} - \varepsilon - 2\phi \frac{\nu_\beta}{K_{\beta\omega}} k \\ - \phi^2 \frac{c_F}{K_\beta^{1/2}} \left(\frac{8}{3} Qk - 2\nu_t \frac{\tilde{u}_j \tilde{u}_i}{Q} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Los dos últimos términos de la Ecuación (2.104) son las contribuciones de Darcy y Forchheimer, respectivamente. La contribución de Darcy disminuye la presencia de la turbulencia para cualquier valor diferente de cero, $k \neq 0$, e incrementa su participación cuando disminuye la permeabilidad. Finalmente, Jones y Launder (1997) proponen que la ecuación para la energía disipativa se expresa como:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu_\beta + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon 3} \lambda_\beta g \frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \tilde{T}_\beta}{\partial x_3} - 2\phi \frac{\nu_\beta}{K_{\beta\omega}} \varepsilon \\ - \phi^2 \frac{c_F}{K_\beta^{1/2}} \left[\frac{4}{3} Q\varepsilon + \frac{5\nu}{6} \frac{\partial k}{\partial x_r} \frac{\partial Q}{\partial x_r} - \nu_\beta \nu_t \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\tilde{u}_j \tilde{u}_i}{Q} \right) \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_i \partial x_r} \right) - \frac{1}{2} \nu_\beta \nu_t \left(\frac{\partial^3 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_r \partial x_r} + \frac{\partial^3 \tilde{u}_j}{\partial x_i \partial x_r \partial x_r} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.105)$$

Se observa nuevamente que en la expresión anterior se tienen las contribuciones de Darcy y Forchheimer. Ambas ecuaciones, (2.104) y (2.105), se reducen a las ecuaciones del modelo estándar k - ε cuando ϕ es igual a cero.

CAPÍTULO 3. ESTADO DEL ARTE

3.1 Estudio de la convección natural

El estudio de la transferencia de calor por convección natural es motivado por los fenómenos observados en el comportamiento de solidificación de metales fundidos. En el proceso de enfriamiento de las aleaciones metálicas el intervalo de temperaturas presente en la mezcla fundida genera zonas turbias consistentes de una fina malla de dendritas que crece dentro de la mezcla fundida. Fisher (1981) modeló esta zona considerando convección natural en un medio poroso observando el efecto del flujo entre la zona turbia que altera significativamente la temperatura y las concentraciones en esta región, y eventualmente, la homogeneidad química y la estructura del grano.

Nishimura (1985 y 1986) investigó experimentalmente la convección natural en una cavidad rectangular con paredes verticales a distintas temperaturas sus resultados los compara con la solución analítica de la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de Darcy corregida con el término de Brinkman acoplado el sistema haciendo uso de condiciones de continuidad en los fluxes en la inter-región.

Beckerman (1987 y 1988) realizó un análisis de la solución numérica de la ecuación de Darcy corregida con los términos de Brinkman y Forchheimer acoplado la ecuación de Navier-Stokes por medio de las condiciones de continuidad. El sistema consiste en una región rectangular y varía los parámetros adimensionales simulando distintos medios porosos. Los resultados numéricos son comparables con los experimentales.

Singh *y col.* (1993) tomaron una cavidad cuadrada parcialmente ocupada por un medio poroso y realizaron un estudio numérico considerando las tres dimensiones. Utilizaron como modelo para la capa fluida la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de Darcy-Brinkman considerando efectos inerciales (incluyeron los términos convectivos en la ecuación de Darcy Brinkman).

En todos los trabajos anteriores, los autores utilizaron condiciones de continuidad en los fluxes y las velocidades para resolver los modelos propuestos. Utilizando un modelo de Darcy para el medio poroso y la ecuación de Navier-Stokes y comparando sus resultados con los de Singh y *col.* (1993), Valencia y Ochoa (2001) resolvieron el sistema utilizando las condiciones de Beavers y Joseph (1967). Haciendo un análisis de la transferencia de calor en el sistema establecieron que no se puede concluir respecto a la forma adecuada del modelo y plantearon la necesidad de extender el análisis y su comparación por medio de datos experimentales.

3.2 Turbulencia macroscópica en el medio poroso.

El trabajo de referencia donde se consideró, teóricamente, la presencia de la turbulencia en un medio permeable fue el de Ahmed y Sunada (1969). Estos autores comenzaron su análisis promediando en el tiempo la ecuación de Navier-Stokes modelando el flujo en el interior de los poros e integrando la ecuación resultante sobre un volumen elemental representativo. Considerando analogías entre esta ecuación macroscópica y la ecuación microscópica sus resultados fueron finalmente despreciar la turbulencia en el medio poroso.

Sin embargo, Lim y Mathews (1993) en un trabajo sobre combustión obtuvieron mejor concordancias entre los resultados numéricos y los experimentales cuando tomaron en cuenta los efectos de la turbulencia en un medio poroso. Ellos, propusieron un modelo de turbulencia $k-\varepsilon$, sin tomar en cuenta los efectos de arrastre (viscosos y de forma) impuestos por la matriz porosa al flujo.

Prescott e Incropera (1995) estudiaron la solidificación de una aleación binaria proponiendo un modelo $k-\varepsilon$ para simular el transporte de momentum dentro de la zona turbia y añadiendo un término de apagado en la ecuación de la energía turbulenta. Lo que hace este término es que artificialmente cancela la turbulencia en la zona porosa, sus resultados tuvieron concordancia con los experimentales. Sin embargo, Lage (1996) planteó que el modelo de Prescott e Incropera (1995) está incompleto ya que no toma en cuenta los efectos de flotación y algunos otros efectos de fricción en el medio poroso.

Antohe y Lage (1997) derivaron las ecuaciones del modelo macroscópico de turbulencia para un flujo incompresible en un medio poroso. El modelo de turbulencia se derivó por el promedio temporal de las ecuaciones para medios porosos incluyendo todos los términos: de cambio en el tiempo, convectivo inercial, gradiente de presión, esfuerzos cortantes viscosos, arrastre viscoso y arrastre de forma. De este modelo lo que se concluyó fue que el efecto de arrastre viscoso de la estructura porosa causa un decaimiento adicional a la energía cinética turbulenta.

El proponer ecuaciones de turbulencia para medios porosos es un tópico actual y que sigue generando algunas controversias tal como lo planteó Pedras y de Lemos (2000). Estos autores propusieron el procedimiento de doble descomposición con el cual tratan de demostrar que el orden en promediar en el tiempo o en el espacio para obtener ecuaciones promedio de turbulencia es indistinto.

3.3 Condiciones de frontera entre un fluido y un medio poroso

Cuando se tiene en contacto un fluido en movimiento y un cuerpo sólido impermeable la interfase queda delimitada por la superficie de contacto entre las dos fases. El problema de resolver que tipo de fenómenos ocurren en esta superficie y poder establecer condiciones de frontera para un fluido en movimiento en contacto con un cuerpo sólido tuvo considerable dificultad por un largo tiempo [Goldstein, (1965)]. En la actualidad se acepta que una capa de fluido cercana a la superficie de un cuerpo sólido no tiene una velocidad relativa al sólido. Esto debido al efecto de adherencia de las moléculas de fluido a la superficie del sólido. El no considerar deslizamiento de las moléculas ha permitido establecer condiciones apropiadas de la componente tangencial de la velocidad con las que se han podido modelar distintos casos de flujos (esto es, flujo de Stokes, Couette, etc.). La condición de no-deslizamiento en la interfase tiene validez cuando el sólido se considera impermeable al fluido con el que está en contacto pero la situación cambia cuando el sólido ya no es impermeable, por ejemplo un sólido poroso.

Los primeros autores en estudiar el efecto en un fluido en movimiento que está en contacto con un sólido permeable (medio poroso) fueron Beavers y Joseph (1967). Por medio de

un sistema experimental donde se tiene un flujo de Poiseuille por encima de un bloque sólido permeable analizaron el efecto en el flujo tangencial en la frontera del medio permeable. Con el arreglo experimental se puede modelar el flujo en el sistema por medio de la ecuación de Navier-Stokes que se satisface en la región fluida y la ecuación de la Ley de Darcy que se satisface en la región porosa pero no necesariamente en la región de la frontera. Un esquema de las condiciones experimentales se observa en la Figura 3.1.

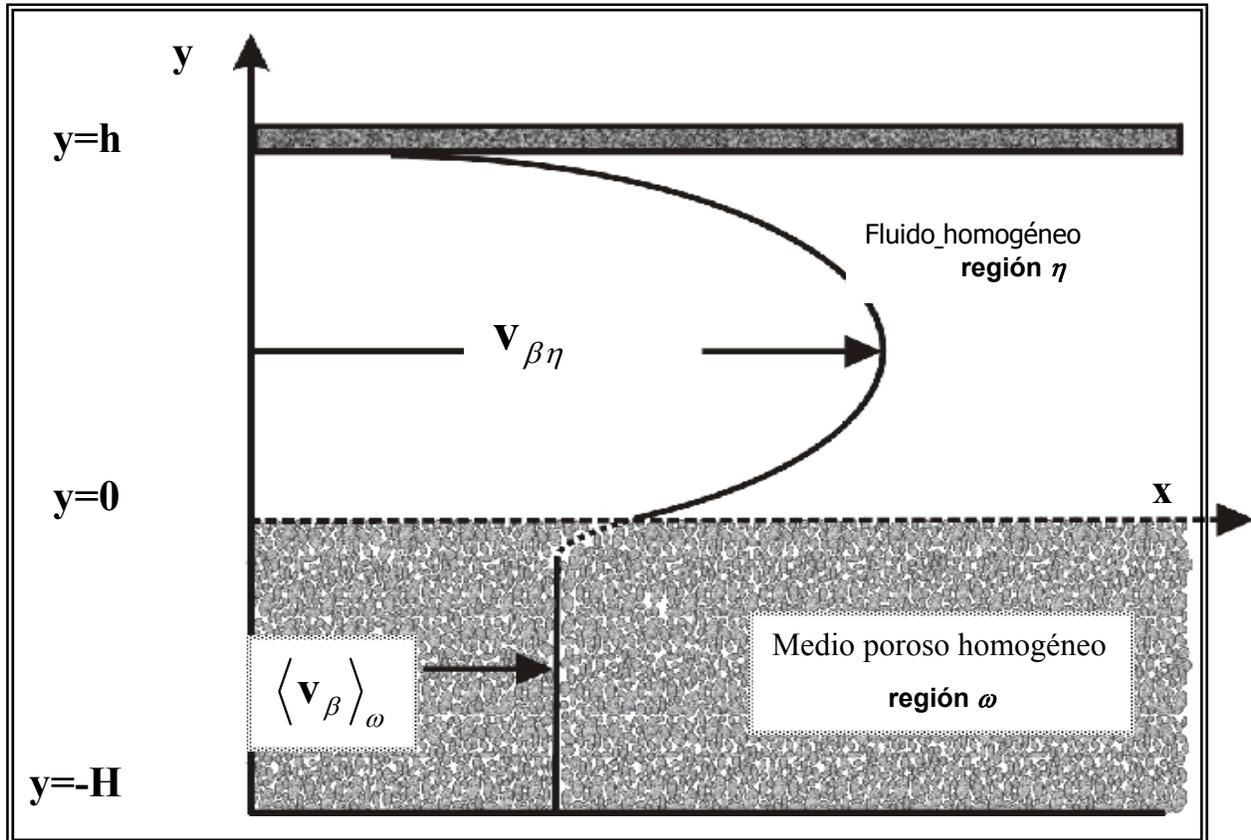


Figura 3.1. Flujo unidimensional sobre un canal parcialmente ocupado por un medio poroso

Beavers y Joseph (1967) consideraron que para llevar a cabo el análisis era necesario primero definir una frontera entre el material permeable y el fluido homogéneo. La frontera “nominal” se fija al asumir que los perímetros externos del material sólido permeable conforman una superficie suave (Figura 3.2) la cual se considera como la interfase del sistema.

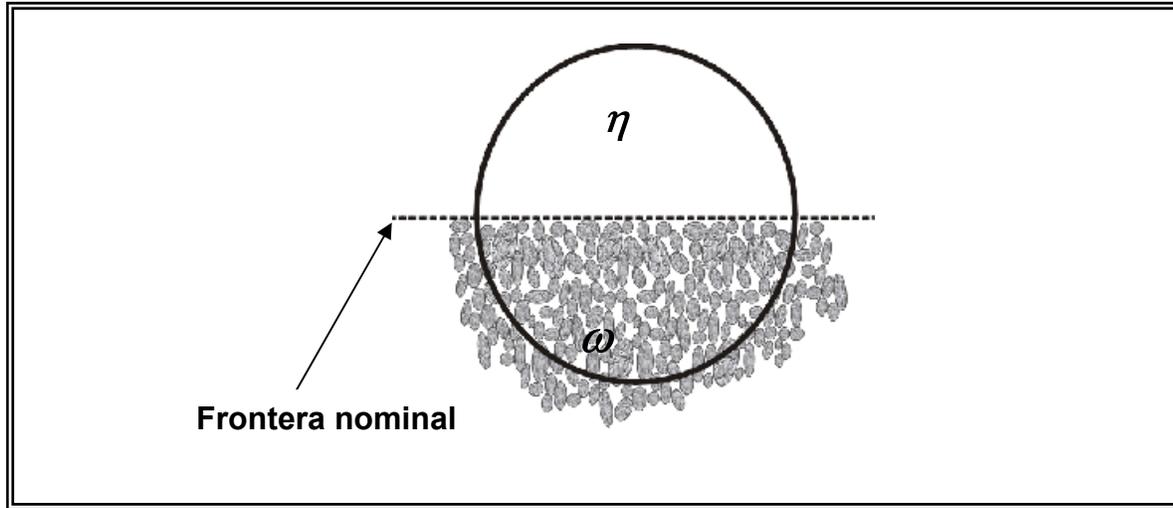


Figura 3.2. Frontera nominal en la inter-región

Los autores postularon que existe una velocidad de deslizamiento en la interfase permeable, distinta a la velocidad promedio dentro del medio poroso y que el efecto cortante es transmitido dentro del cuerpo del material a través de una región próxima a la interfase, la inter-región. A través de esta inter-región la velocidad cambia rápidamente desde un valor en la frontera nominal a un valor de la velocidad dada por la ecuación de Darcy. Los autores asumieron entonces que la velocidad de deslizamiento para el fluido libre es proporcional a la tasa de corte en la frontera permeable usando la expresión siguiente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega) \right) \Big|_{y=-H} = \frac{\alpha}{\sqrt{\mathbf{K}_{\beta\omega}}} \mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \Big|_{y=-H} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \Big|_{y=0+} \right) \quad (3.1)$$

$\mathbf{t}_{\omega\eta}$ es el vector tangencial unitario a la superficie divisoria de las dos regiones, $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \Big|_{y=-H}$ es la velocidad medida a una cierta distancia en el interior del material poroso donde se cumple la ley de Darcy, $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \Big|_{y=0+}$ la velocidad en el fluido inmediatamente encima de la frontera nominal en la región fluida y α es una constante empírica y su valor es ajustado por los resultados experimentales. Este parámetro es independiente de la viscosidad, pero depende la permeabilidad y la naturaleza del material poroso en la inter-región. Saffman (1971) le dio un soporte teórico a la relación empírica del parámetro α .

A partir del estudio de Beavers y Joseph (1967) numerosos investigadores se han dedicado a estudiar los efectos sobre el flujo tangencial en la inter-región. Neale y Nader (1974) argumentaron que no existe discontinuidad en la velocidad como lo propusieron Beavers y Joseph (1967), introduciendo el término de Brinkman en la ecuación de momentum válida en el medio poroso Neale y Nader (1974) propusieron continuidad en la velocidad tangencial y el gradiente de la velocidad tangencial en la inter-región. Sus resultados obtenidos fueron similares a los de Beavers y Joseph (1967) cuando,

$$\alpha^2 = \frac{\mu_{eff}}{\mu_\beta} \quad (3.2)$$

La condición de continuidad se escribe como,

$$-\left(\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega)\right) \quad (3.3)$$

$$-\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega = \mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \quad (3.4)$$

Vafai y Kim (1990) presentaron una solución exacta para el flujo de un fluido en la inter-región entre un medio poroso y un fluido incluyendo los efectos inerciales y de frontera. En este estudio propusieron que los esfuerzos cortantes en la región fluida son iguales a los del medio poroso en la región inter-facial.

$$-\mu_\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta)\right) = \mu_{eff} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega)\right) \quad (3.5)$$

Estas dos condiciones han sido probadas en distintos estudios hidrodinámicos, sin embargo, no incluye mayor información de lo que sucede en la inter-región como por ejemplo, los cambios en la porosidad y permeabilidad los cuales influyen en la transferencia de momentum. Ochoa y Whitaker (1995a,b y 1997) promediando las ecuaciones de transporte para modelar los medios porosos, derivaron las condiciones de salto para un sistema similar al que estudiaron Beavers y Joseph (1967). Con el promedio de las ecuaciones de Darcy-Brinkman y Stokes obtuvieron una condición de salto para la inter-región entre el fluido y el medio poroso la cual expresa que la diferencia en los gradientes de la velocidad tangencial del medio poroso y el

medio fluido son una función de un parámetro ajustable β de orden uno. Ochoa y Whitaker (1997) posteriormente desarrollaron las condiciones de salto tomando en cuenta los efectos inerciales. Del desarrollo la condición de salto, incluyendo los efectos inerciales, resultan dos parámetros ajustables β_1 y β_2 , también de orden de uno.

Condición de salto [Ochoa & Whitaker (1995 a,b)]:

$$\phi_{\beta}^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \right) = \frac{\beta}{\sqrt{\mathbf{K}_{\beta\omega}}} \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \right) \quad (3.6)$$

Condición de salto considerando efectos inerciales [Ochoa y Whitaker (1997)]:

$$\phi_{\beta}^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \right) = \frac{\beta_1}{\sqrt{\mathbf{K}_{\beta\omega}}} \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \right) + \frac{\rho_{\beta}}{\mu_{\beta}} \beta_2 \left(\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \right)^2 \quad (3.7)$$

En lo que respecta a la transferencia de calor también se han estudiado las condiciones de frontera en la inter-región. Neale y Nader (1974), Vafai y Thiyagaraja (1987), Sahraoui y Kaviany (1993 y 1994), utilizaron la condición de continuidad de los fluxes y la temperatura en la inter-región, las condiciones de continuidad para la temperatura son:

$$k_{eff} \left(\mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \nabla \langle T \rangle_{\omega} \right) = k_{\beta} \left(\mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \nabla T_{\eta} \right) \quad (3.8)$$

$$T_{\omega} = T_{\eta} \quad (3.9)$$

$\mathbf{n}_{\omega\eta}$ es el vector normal a la superficie de la interfase.

Con el promedio volumétrico de la ecuación de energía térmica para el medio poroso, Ochoa y Whitaker (1998b) desarrollaron una condición de salto para el flujo de energía con un término adicional que representa la acumulación, la conducción y la convección del exceso de energía térmica en la superficie, la expresión se escribe como:

$$\mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \mathbf{K}_{\omega}^* \cdot \nabla \langle T \rangle_{\omega} = \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot k_{\beta} \nabla T_{\eta} + \Phi_s \quad (3.10)$$

Φ_s , es el término en exceso y \mathbf{K}_{ω}^* es el tensor de dispersión térmica total en el medio poroso.

CAPÍTULO 4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presentan las expresiones matemáticas que modelan el transporte de calor y masa total entre el medio poroso y el fluido y que son parte del listado *Natcon* y *Cavpor*. Se consideran las ecuaciones para flujo en régimen laminar y el régimen turbulento. Para el régimen turbulento además de la ecuación de transporte de calor y momentum se resuelven dos ecuaciones de transporte extras provenientes del modelo de turbulencia $k-\varepsilon$. El conjunto de ecuaciones se resuelven acopladas por las condiciones de frontera del sistema y las condiciones en la interfase fluido-medio poroso. También, se presenta la definición del número de Nusselt local y promedio en las paredes del sistema y la interfase.

4.1 Descripción del sistema

Se considera una cavidad cuadrada donde se distinguen dos regiones en la escala macroscópica, una región fluida η (constituida por el fluido homogéneo) y una región porosa ω (un medio poroso). A una escala microscópica la región porosa la constituye un material granuloso (maíz o trigo, fase σ) y un fluido (aire, fase β). El sistema es cerrado y el fluido, en este caso aire, inunda todo el sistema. Las paredes verticales del sistema se encuentran a distintas temperaturas (T_C y T_F), mientras que las paredes horizontales están aisladas. El fluido confinado en la cavidad cuadrada presenta gradientes de densidad debido a variaciones en la temperatura del sistema. Con los cambios en la densidad se generan fuerzas de flotación que ocasionan el movimiento del fluido, estableciéndose un mecanismo de transporte de calor por convección natural. Debido a la permeabilidad de la región porosa existirá flujo en el interior. Los números adimensionales que caracterizan el transporte son: el número de Rayleigh (Ra), el número de Prandtl (Pr), el número de Darcy (Da), este último dependiente de la permeabilidad. Un esquema de la cavidad se presenta en la Figura 4.1, y el análisis considera que los efectos en la dirección perpendicular al diagrama bidimensional son despreciables, las paredes del sistema se encuentran lo suficientemente lejos.

La posición de la interfase entre el fluido y el medio poroso se establece utilizando el concepto de la frontera nominal de Beavers y Joseph descrita en el capítulo anterior. La posición de la frontera nominal corresponderá a la altura de la matriz porosa.

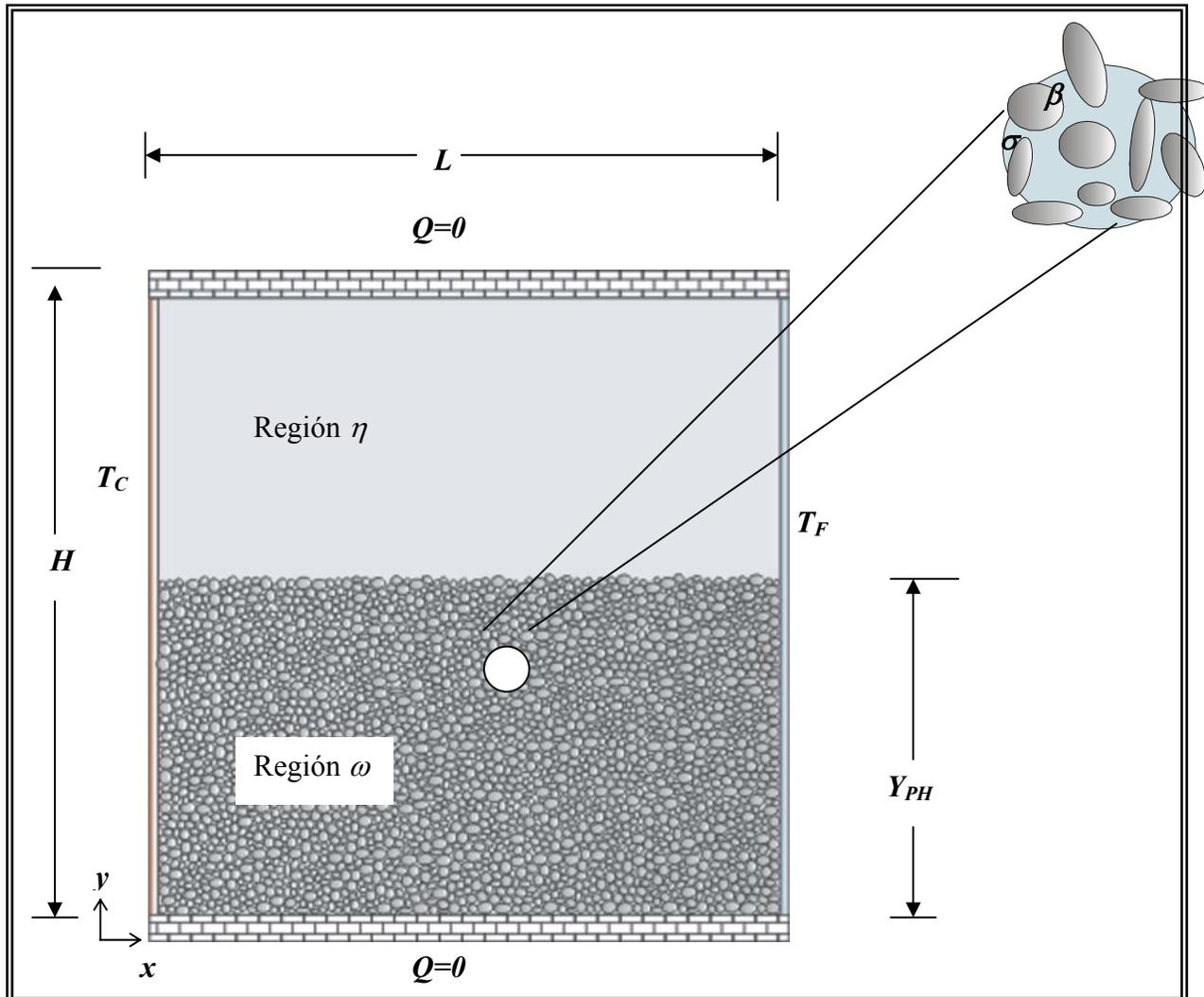


Figura 4.1. Esquema del sistema bidimensional que contiene un fluido y un medio poroso. Sistema de dos regiones

4.2 Aproximación de uno o dos dominios

El planteamiento de solución de las ecuaciones de transporte que se utiliza para resolver el problema de transporte en un sistema de dos regiones se basa en dos aproximaciones. La primera aproximación es modelar el sistema como dos dominios independientes, se plantean las ecuaciones de transporte para cada región y posteriormente se acoplan utilizando las condiciones de frontera en la interfase. Por ejemplo, se puede modelar el flujo utilizando la Ley de Darcy [Ecuación. (2.4)] para el medio poroso y la ecuación de Stokes para el medio fluido acoplando las ecuaciones con una condición de frontera interfacial como lo son, la expresión de Beavers y Joseph (1967) [Ec. (3.1)], la condición de salto [Ecs. (3.5) y (3.6)], o una modelo de porosidad variable [Ochoa y Whitaker (1995 a,b)]. La otra aproximación considera al sistema como un solo dominio, el medio poroso se considera como un “pseudo-fluido”. Esto es, se propone un modelo único para todo el dominio ajustando la ecuación de transporte del fluido con parámetros propios del medio poroso tales como la permeabilidad y otras propiedades de medio efectivo. Por ejemplo, se introduce el término de Darcy en la ecuación de Navier-Stokes que es válida solo en el medio poroso y se omite cuando se modela el fluido. En este caso las condiciones de frontera apropiadas son las de continuidad en los flux de calor y continuidad de los esfuerzos cortantes momentum [Ecs. (3.3) y (3.5)].

4.3 Consideraciones del problema

Para obtener el modelo correspondiente del sistema de estudio en cuestión se han realizado las siguientes suposiciones:

- El medio poroso es considerado macroscópicamente homogéneo e isotrópico
- El medio poroso también se considera rígido con una distribución de tamaños monodispersa y granos de geometría esférica.
- La cavidad está conformada por fronteras rígidas e impermeables por lo que no se presenta deslizamiento.
- El fluido es incompresible. Las variaciones de densidad debido a la temperatura se consideran utilizando la aproximación de Boussinesq.

- Además de los cambios mencionados en la densidad todas las demás propiedades termodinámicas y de transporte del fluido son constantes y se evalúan a una temperatura promedio.
- Como se mencionó anteriormente, el problema se considera en dos dimensiones al suponer que la dirección en z es mucho más grande que las direcciones x, y .
- La turbulencia se considera homogénea e isotrópica.
- En las ecuaciones de transporte se representa la dependencia del tiempo, sin embargo, los resultados se obtienen de considerar el estado estacionario.

4.4 Ecuaciones de transporte

Siguiendo el análisis de la solución numérica de los autores del programa *Natcon* y *Cavpor* se presentan las ecuaciones de transporte utilizando la aproximación de un solo dominio.

4.4.1 Ecuaciones en la región fluida

Como lo establecieron Ochoa y Whitaker (1995a), las ecuaciones de transporte promedio obtenidas por el método del promedio volumétrico para la región fluida tienen la misma forma que las ecuaciones de transporte puntuales cuando se satisfacen las restricciones de escala establecidas por el sistema. Las ecuaciones se escriben haciendo distinción del uso de variables promedio.

4.4.1-1 Ecuación de continuidad.

Del balance de masa, se tiene para un fluido la expresión:

$$\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta) = 0 \quad (4.1)$$

Al considerar un fluido incompresible la variación temporal de la densidad se desprecia. Como se mencionó anteriormente los cambios de densidad se consideran en la ecuación de movimiento y son función de la temperatura.

4.4.1-2 Ecuación de transferencia de cantidad de movimiento.

Los cambios de densidad se consideran utilizando la aproximación de Boussinesq (1877) para los cambios de temperatura. A partir de la expresión,

$$\lambda_\beta = -\frac{1}{\rho_\beta} \left(\frac{\partial \rho_\beta}{\partial T_\beta} \right) \quad (4.2)$$

Se encuentra la dependencia lineal de la densidad con respecto a la temperatura, λ_β es el coeficiente de expansión térmica. Considerando la expresión anterior en la ecuación de Navier-Stokes se tiene:

$$\rho_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \right) = -\nabla P_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta + \mathbf{g} \left[\rho_\beta \lambda_\beta \left(\langle T_\beta \rangle_\eta - T_{ref} \right) \right] \quad (4.3)$$

El último término de la Ecuación (4.3) es el término de flotación en el que se incluye la aproximación de Boussinesq para contemplar los cambio en la densidad considerando la componente de la velocidad en la dirección a la fuerza de gravedad, la cual actúa en la dirección y . En la Ecuación (4.3) el coeficiente de expansión térmica λ_β es una constante evaluada en el estado de referencia escogido para la aproximación.

4.4.1-3 Ecuación de energía.

La ecuación de energía es:

$$\rho_\beta C_{p\beta} \left[\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \cdot \nabla \langle T_\beta \rangle_\eta \right] = k_\eta \nabla^2 \langle T_\beta \rangle_\eta \quad (4.4)$$

La ecuación de energía se escribe en función de variables promedio de la temperatura.

4.4.2 Ecuaciones de la región porosa

Con la aproximación de un solo dominio las ecuaciones que modelan el flujo en la región porosa (ω) son similares a las de la región fluida (η), excepto por los términos que se incluyen

para describir el medio poroso como lo son, los términos de Darcy y Forchheimer. Queda implícito que las ecuaciones están en función de variables promedio. Se sigue la nomenclatura para las ecuaciones de transporte utilizada por Whitaker (1999).

4.4.2-1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es similar a la expresión (4.1) para la región fluida. Para un fluido incompresible se tiene:

$$\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega) = 0 \quad (4.5)$$

4.4.2-2 Ecuación de transferencia de cantidad de movimiento.

Como se mencionó anteriormente se puede modelar el transporte de momentum en medios poroso utilizando la Ley Darcy, o alguna de sus extensiones [Nield y Bejan (1992)]. De manera general se escribe la ecuación de Darcy extendida por las correcciones Forchheimer y Brinkman incluyendo los términos convectivos. De esta manera la ecuación es similar a la de la región fluida. El incluir los términos convectivos en la ecuación de movimiento para un región porosa resulta un tópico de discusión [Nield y Bejan (1992);Kaviany(1994)] .

$$\underbrace{\rho_\beta \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega) \right]}_{\text{convectivos}} = \underbrace{-\nabla P_\beta + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega}_{\text{Brinkman}} + \rho_\beta \lambda_\beta (\langle T_\beta \rangle_\omega - T_{\text{ref}}) \mathbf{g} - \underbrace{-\mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega}_{\text{Darcy}} - \underbrace{\mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\beta\omega} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega}_{\text{Forchheimer}} \quad (4.6)$$

El subíndice $\beta\omega$ se refiere a la propiedad del fluido en la región porosa. En la Ecuación (4.6) se presenta el término de Darcy y el término de Forchheimer, en esta expresión se incluyen los términos convectivos. Considerando la propuesta de Whitaker (1986,1996), en la Ecuación (4.6) se presenta el tensor de corrección de Forchheimer, que es función del número de Reynolds, y la permeabilidad.

4.4.2-3 Ecuación de energía

La ecuación de energía es similar al modelo de una ecuación propuesto por Ochoa y Whitaker (1998b) al considerar equilibrio térmico entre la fase sólida y el fluido.

$$\rho_{\beta} C_{p\beta} \left[\frac{\partial \langle T_{\beta} \rangle_{\omega}}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \cdot \nabla \langle T_{\beta} \rangle_{\omega} \right] = k_{\omega} \nabla^2 \langle T_{\beta} \rangle_{\omega} \quad (4.7)$$

4.4.3 Ecuaciones de transporte turbulento

Las ecuaciones (4.1)-(4.7) modelan el flujo en régimen laminar en el sistema. Para considerar el régimen turbulento se está utilizando el modelo $k - \varepsilon$ [Rodi,(1980)]. Este modelo parte del promedio temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes. Al obtener las ecuaciones promedio temporal, el tensor de esfuerzos resultante se modela proponiendo dos ecuaciones de transporte para dos cantidades características de la turbulencia: la energía cinética turbulenta, k , y la disipación viscosa, ε ; ambas son cantidades escalares. Junto con estas dos ecuaciones se resuelven las ecuaciones (4.1)-(4.7) para describir la turbulencia. En las ecuaciones de momentum se incluyen el efecto de la turbulencia separando la viscosidad en dos contribuciones, una contribución laminar y una turbulenta. El modelo de turbulencia es una aproximación y hace uso de un conjunto de constantes empíricas las cuales son adecuadas para ciertos tipos de flujos. En este caso el modelo de turbulencia está definido como un modelo $k - \varepsilon$ para flujos con número de Reynolds pequeños [Henkes y col.,(1991); Prakash y col., (2000)].

4.4.3-1 Ecuaciones de turbulencia en la región fluida

Ecuación de energía cinética k ,

$$\rho_{\beta} \left[\frac{\partial \langle k \rangle_{\eta}}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \cdot \nabla \langle k \rangle_{\eta} \right] = \nabla \cdot \left[\left(\mu_{\beta} + \frac{\mu_{\tau}}{\sigma_k} \right) \nabla \langle k \rangle_{\eta} \right] + P_k + G_k - \rho \langle \varepsilon \rangle_{\eta} + D \quad (4.8)$$

Ecuación de la tasa de energía disipativa ε ,

$$\rho_{\beta} \left[\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_{\eta}}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \cdot \nabla \langle \varepsilon \rangle_{\eta} \right] = \nabla \cdot \left[\left(\mu_{\beta} + \frac{\mu_{\tau}}{\sigma_k} \right) \nabla \langle \varepsilon \rangle_{\eta} \right] +$$

$$+ \left[c_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + c_{\varepsilon 2} G_k) - \rho c_{\varepsilon 2} f_2 \langle \varepsilon \rangle_{\eta} \right] \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_{\eta}}{\langle k \rangle_{\eta}} \right) + E \quad (4.9)$$

La velocidad y la temperatura incluidas en las ecuaciones (4.8) y (4.9) son cantidades promediadas en el tiempo para el caso de turbulencia. Los términos E y D son específicos para un modelo de turbulencia con números de Reynolds pequeños. Utilizando la aproximación de Jones y Launder (1972) estos valores son cero (ver Capítulo 2).

De las ecuaciones anteriores la producción de energía cinética en el modelo de turbulencia está definida por:

$$P_k = \mu_{\tau} \left\{ 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \cdot \mathbf{i}) \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial}{\partial y} (\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \cdot \mathbf{j}) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \cdot \mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \cdot \mathbf{j}) \right]^2 \right\} \quad (4.10)$$

Para flujos por convección natural se incluye un término de flotación que se escribe como:

$$G_k = - \frac{\mu_{\tau}}{\sigma_T} g \lambda_{\beta} (\mathbf{j} \cdot \nabla \langle T_{\beta} \rangle_{\eta}) \quad (4.11)$$

La viscosidad turbulenta μ_t que aparece en las ecuaciones de transporte se obtiene por medio del análisis dimensional [Launder y Spalding, (1974)] y de la relación de Kolmogorov-Prandtl.

En el modelo $k - \varepsilon$ la viscosidad turbulenta está definida en función de la energía cinética y la energía disipativa,

$$\mu_{\tau} = \rho_{\beta} c_{\mu} f_{\mu} \frac{\langle k \rangle_{\eta}^2}{\langle \varepsilon \rangle_{\eta}} \quad (4.12)$$

Las constantes empíricas, c_{μ} , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_T , σ_k , σ_{ε} , f_{μ} , f_1 , f_2 de las ecuaciones (4.8) y (4.9) tienen expresiones distintas y son propuestas dentro del modelo $k - \varepsilon$.

4.4.3-2 Ecuaciones de turbulencia en la región porosa

Matsouka y Takatsu (1996) proponen un modelo de turbulencia para un medio poroso promediando las ecuaciones del modelo $k - \varepsilon$. La otra alternativa la propone Antohe y Lage (1997), la cual consiste en promediar en el tiempo las ecuaciones que describen el flujo en medios porosos. Ambas aproximaciones conducen a modelos distintos de turbulencia. En el presente caso de estudio se está considerando la aproximación de Antohe y Lage (1997) obteniendo un modelo de turbulencia donde están incluidos los términos de Forchheimer y el término de Darcy (ver Capítulo 2). Nuevamente, con la aproximación de un solo dominio las ecuaciones de turbulencia son análogas a las de la región fluida, excepto por los términos propios del medio poroso. Nuevamente queda implícito que las variables están promediadas espacial y temporalmente. Las ecuaciones de turbulencia son,

$$\rho_\beta \left[\frac{\partial \langle k \rangle_\omega}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \cdot \nabla \langle k \rangle_\omega \right] = \nabla \cdot \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \nabla \langle k \rangle_\omega \right] + P_k + G_k - \rho \langle \varepsilon \rangle_\omega - \underbrace{-2 \frac{\phi \mu_\beta}{K_{\beta\omega}} \langle k \rangle_\omega}_{\text{Darcy}} - \underbrace{\frac{8}{3} \frac{\phi \rho_\beta C_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \langle k \rangle_\omega}_{\text{Forchheimer}} \quad (4.13)$$

De igual manera se tiene para la energía cinética,

$$\rho_\beta \left[\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\omega}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \cdot \nabla \langle \varepsilon \rangle_\omega \right] = \nabla \cdot \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \nabla \langle \varepsilon \rangle_\omega \right] + \left[c_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + c_{\varepsilon 2} G_k) - \rho c_{\varepsilon 2} f_2 \langle \varepsilon \rangle_\omega \right] \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_\omega}{\langle k \rangle_\omega} \right) + \underbrace{-2 \frac{\phi \mu_\beta}{K_{\beta\omega}} \langle \varepsilon \rangle_\omega}_{\text{Darcy}} - \underbrace{\frac{8}{3} \phi \frac{C_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \langle \varepsilon \rangle_\omega}_{\text{Forchheimer}} \quad (4.14)$$

4.5 Condiciones de frontera.

4.5.1. Transporte de momentum

Las condiciones en la interfase son las de continuidad en los esfuerzos cortantes junto con la continuidad en el componente de la velocidad y los fluxes de calor. Estas condiciones son la principal distinción entre la aproximación de un solo dominio y la aproximación de dos dominios. La condición de continuidad reduce el sistema de ecuaciones para cada dominio, a la aproximación de una ecuación válida en todo el sistema con factores que se activan dependiendo en que región del sistema se está resolviendo.

Las condiciones para la velocidad son: la de continuidad en los esfuerzos cortantes en la interfase,

$$-\mu_{\beta} \mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta}) = \mu_{eff} \mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega}) \quad (4.15)$$

Continuidad en las velocidades en la inter-región,

$$-\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} = \mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} \quad (4.16)$$

$$-\mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} = \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\omega} \quad (4.17)$$

También se considera que no hay deslizamiento y las paredes del sistema son impermeables,

$$-\mathbf{t}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} = 0 \quad (4.18)$$

$$-\mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle_{\eta} = 0 \quad (4.19)$$

Para la condición (4.15) es necesario establecer cuánto vale la relación μ_{β}/μ_{eff} . Beckerman *y col.* (1988) proponen que esta relación puede valer uno para el caso un sistema fluido–medio poroso en una cavidad cuadrada donde exista flujo por convección natural.

4.5.2 Transporte de energía

Con la suposición de equilibrio térmico local se puede establecer continuidad en los componentes normales del flux. Y con el equilibrio térmico en la interfase se puede establecer una sola nomenclatura para la temperatura en todo el sistema.

Condición de equilibrio térmico,

$$\langle T_\beta \rangle_\eta = \langle T_\beta \rangle_\omega = \langle T_\beta \rangle \quad (4.20)$$

Continuidad en los fluxes,

$$-\mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot k_\eta \nabla \langle T_\beta \rangle_\eta = \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot k_\omega \nabla \langle T_\beta \rangle_\omega \quad (4.21)$$

Para las paredes verticales se establecen las condiciones de temperatura constante y para las paredes horizontales, de pared adiabática.

Condiciones de pared isotérmica,

$$\text{En } x = 0 \quad \langle T_\beta \rangle = T_H \quad \text{para } 0 \leq y \leq H \quad (4.22)$$

$$\text{En } x = L \quad \langle T_\beta \rangle = T_C \quad \text{para } 0 \leq y \leq H \quad (4.23)$$

Condiciones de pared adiabática,

$$\text{En } y = 0 \quad -\mathbf{n}_w \cdot \nabla \langle T_\beta \rangle = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (4.24)$$

$$\text{En } y = L \quad \mathbf{n}_w \cdot \nabla \langle T_\beta \rangle = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (4.25)$$

4.5.3 Condiciones de frontera para la turbulencia

Las condiciones apropiadas en la pared de acuerdo con la física del problema serían,

$$\langle k \rangle_\eta = \langle k \rangle_\omega = 0 \quad (4.26)$$

$$\langle \varepsilon \rangle_\eta = \langle \varepsilon \rangle_\omega = 0 \quad (4.27)$$

Sin embargo, al utilizar condiciones de este tipo la solución puede no converger o presentarse algunas singularidades al resolver el modelo cerca de la pared. La otra alternativa es considerar los efectos de pared del flujo dentro de la capa límite proponiendo funciones de pared [Henkes y col. (1991)]. Se tiene entonces para k y ε .

$$\langle k \rangle = \left(\frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{c_\mu} f_\mu} \right) \quad (4.28)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{(u_\tau)^2}{\kappa y^\tau} \quad (4.29)$$

Estas ecuaciones son válidas sobre la pared donde se define la velocidad cercana a la pared como:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_\beta}} \quad (4.30)$$

τ_w es el esfuerzo cortante en la pared y viene dado por:

$$\tau_w = -\frac{\mu_\beta}{\rho_\beta} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{n}_w \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_w) \right) \quad (4.31)$$

κ es la constante de von Kármán.

4.6 Número de Nusselt

Para efectos prácticos del estudio de la transferencia de calor se realiza el cálculo del número de Nusselt (Nu). La definición del número de Nusselt se obtiene utilizando la Figura 4.2 donde se observa un esquema de la pared caliente de la cavidad del sistema (en $X=0$); se distinguen la región porosa y la región fluida. Utilizando la ley de enfriamiento de Newton el flux de calor que se transfiere en la dirección x hacia la región fluida se define como:

$$q_w = h(T_C - T_F) \quad (4.32)$$

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor, $(T_C - T_F)$ es la diferencia entre la temperatura de la pared caliente y fría. El flux de calor q_w también se puede definir utilizando la ley de Fourier:

$$q_w = -k_\eta \left(\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=0} \quad (4.33)$$

k_η es la constante de conductividad térmica de la región fluida y el gradiente se evalúa en la pared. Igualando las ecuaciones (4.32) y (4.33),

$$-k_\eta \left(\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=0} = h(T_C - T_F) \quad (4.34)$$

Definiendo una longitud característica, l_η , en donde ocurre la transferencia de calor en el dominio de la región fluida, se tiene la expresión de número de Nusselt:

$$\text{Nu}(y) = \frac{hl_\eta}{k_\eta} = - \left(\frac{l_\eta}{T_C - T_F} \right) \frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial x} \Bigg|_{x=0} \quad (4.35)$$

La expresión anterior implica que la transferencia de calor a través de la pared está relacionada con la evaluación del gradiente de la temperatura en la pared. El Nusselt es un número adimensional que relaciona el transporte de calor por convección (hl_η) y el transporte de

calor por conducción (k_η), pudiendo establecer con este parámetro cuál es el mecanismo de transporte calor dominante. Utilizando las variables adimensionales (Apéndice A) en la expresión (4.35) se tiene:

$$\text{Nu}(Y) = \frac{hl_\eta}{k_\eta} = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \Big|_{X=0} \quad (4.36)$$

La expresión anterior define al Nusselt local en la pared caliente en función de la posición Y para la región fluida.

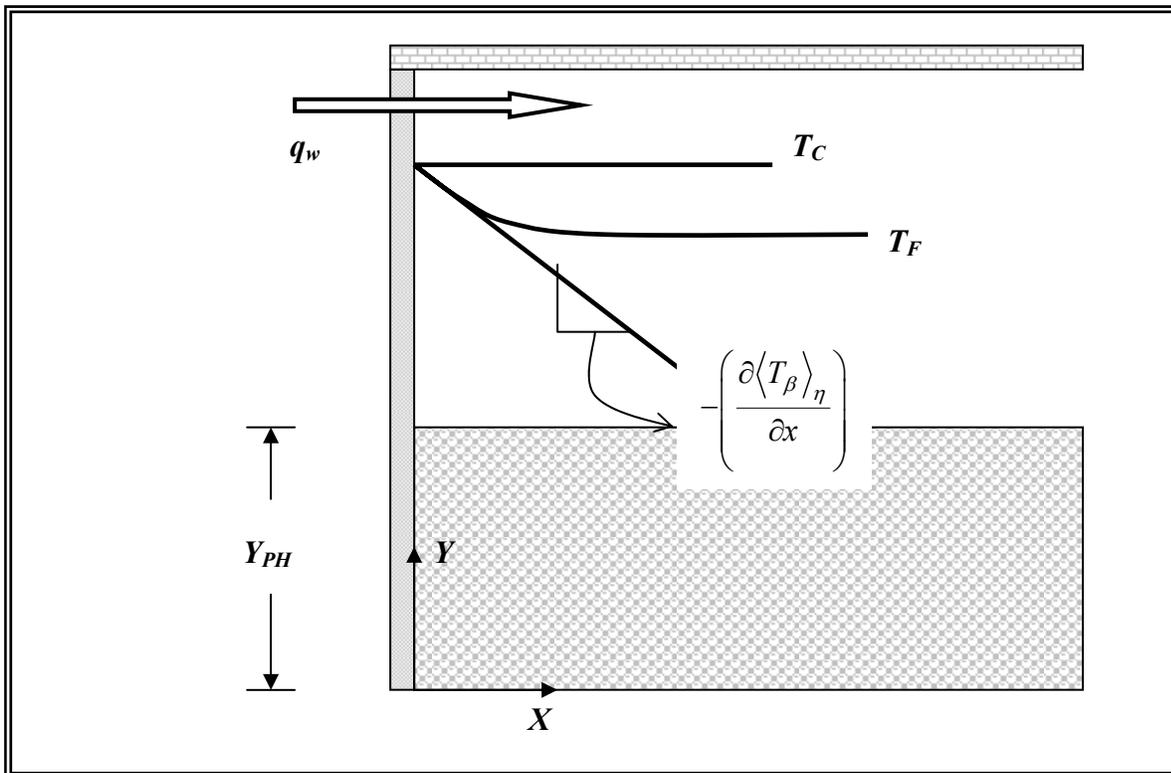


Figura 4.2. Región de la pared caliente, en $X=0$

De igual manera se tiene para la región porosa la expresión de la igualdad de los fluxes:

$$-k_\omega \left(\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\omega}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = h(T_C - T_F) \quad (4.37)$$

k_ω es la constante de la conductividad térmica de la región porosa. Dividiendo (4.37) entre k_η :

$$-\frac{k_{\omega}}{k_{\eta}} \left(\frac{\partial \langle T_{\beta} \rangle_{\omega}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{h}{k_{\eta}} (T_C - T_F) \quad (4.38)$$

Introduciendo una longitud característica de transferencia para la región porosa:

$$\text{Nu} = \frac{hl_{\omega}}{k_{\eta}} = - \left(\frac{k_{\omega}}{k_{\eta}} \right) \left(\frac{l_{\omega}}{T_C - T_F} \right) \frac{\partial \langle T_{\beta} \rangle_{\eta}}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (4.39)$$

Introduciendo las variables adimensionales se tiene el Nusselt local para la región porosa:

$$\text{Nu}(Y) = \frac{hl_{\omega}}{k_{\eta}} = -K_{\omega\eta}^* \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \Big|_{X=0} \quad (4.40)$$

$K_{\omega\eta}^*$, es la relación de las constantes de conductividad térmica de la región porosa y la región fluida. La expresión anterior define al Nusselt local en la pared caliente en función de la posición Y para la región porosa. El Nusselt local en la pared caliente o en la pared fría se obtiene de las expresiones siguientes:

$$\text{Nu}(Y) \Big|_{X=0,1} = \frac{hl_{\omega}}{k_{\eta}} = \begin{cases} -K_{\omega\eta}^* \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) & 0 \leq Y < Y_{PH} \\ - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) - K_{\omega\eta}^* \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) & Y = Y_{PH} \\ - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) & Y_{PH} < Y \leq 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

A partir de las expresiones anteriores se puede conocer el Nusselt promedio en las paredes utilizando la expresión:

$$\overline{\text{Nu}}(Y) \Big|_{X=0,1} = \frac{\int_0^{Z^*} \int_0^1 \text{Nu}(Y) \Big|_{X=0,1} dY dZ}{\int_0^{Z^*} \int_0^1 dY dZ} = \int_0^1 \text{Nu}(Y) \Big|_{X=0,1} dY \quad (4.42)$$

Z^* es la distancia de la pared en la dirección z . Como se mencionó en esta dirección se desprecian los efectos de transporte y se considera sólo el caso bidimensional. El Nusselt definido por (4.42) tendrá como longitud característica la altura de la pared sobre la cual se realiza el promedio, H o L .

Para calcular el coeficiente de transferencia en la interfase entre la región porosa y la región fluida se incluye la temperatura en la interfase. Observando la Figura 4.3 y utilizando la aproximación anterior, se define el flux de calor en la interfase utilizando la ley de enfriamiento de Newton y la ley de Fourier,

$$q_w = h(T_I - T^*) \quad (4.43)$$

$$q_w = k_\eta \left(\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_{PH}} \quad (4.44)$$

A diferencia de la Ecuación (4.32) en donde se define la diferencia entre la temperatura de la pared caliente y temperatura de la pared fría, ahora se define la diferencia entre la temperatura en la interfase T_I y una temperatura característica T^* en el interior de la región, fluida o porosa según sea el caso, igualando (4.43) y (4.44),

$$k_\eta \left(\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_{PH}} = h(T_I - T^*) \quad (4.45)$$

Introduciendo la longitud característica para el plano interfacial,

$$\text{Nu}(X) \Big|_{Y=Y_{PH}}^\eta = \frac{hl_I}{k_\eta} = \left(\frac{l_I}{(T_I - T^*)} \right) \left(\frac{\partial \langle T_\beta \rangle_\eta}{\partial y} \right) \Big|_{Y=Y_{PH}} \quad (4.46)$$

Definiendo en variables adimensionales se tiene el Nusselt local en la interfase,

$$\text{Nu}(X) \Big|_{Y=Y_{PH}}^\eta = \frac{hl_I}{k_\eta} = - \left(\frac{l_I}{H} \right) \left(\frac{(T_C - T_F)}{(T_I - T^*)} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=Y_{PH}} \quad (4.47)$$

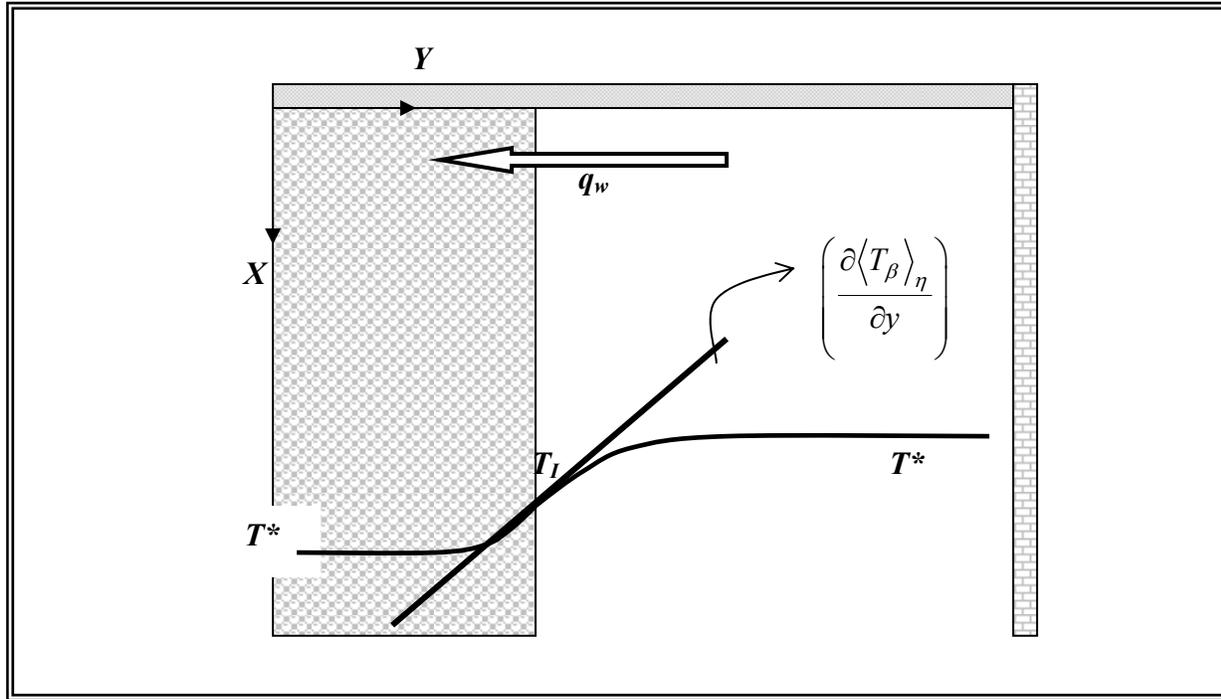


Figura 4.3 Perfil de temperatura en la interfase, $Y=Y_{PH}$

Finalmente definiendo el Nusselt promedio en la interfase,

$$\overline{\text{Nu}}(X) \Big|_{Y=Y_{PH}}^\eta = \frac{\int_0^{Z^* L/H} \int_0^{L/H} \text{Nu}(X) \Big|_{Y=Y_{PH}}^\eta dXdZ}{\int_0^{Z^* L/H} \int_0^{L/H} dXdZ} = \frac{H}{L} \int_0^{L/H} \text{Nu}(X) \Big|_{Y=Y_{PH}}^\eta dX \quad (4.48)$$

Nuevamente se hace uso de la distancia en la dirección Z . Con la Ecuación (4.46) se está suponiendo que el flux calor se transfiere de la región porosa hacia la región fluida. Desarrollando una expresión análoga a la Ecuación (4.46) para la evaluación del Nusselt en la región porosa se tiene,

$$\text{Nu}(X) \Big|_{Y=Y_{PH}}^\omega = \frac{hL}{k_\eta} = -K_{\omega\eta}^* \left(\frac{L}{H} \right) \left(\frac{(T_C - T_F)}{(T_I - T_P)} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=Y_{PH}} \quad (4.49)$$

El perfil de temperaturas mostrado en la ecuación considera un efecto convectivo en la zona de la inter-región, dentro del medio poroso. De manera análoga el $\overline{\text{Nu}}$ promedio en la interfase dentro del medio poroso,

$$\overline{\text{Nu}}(X)\Big|_{Y=Y_{PH}}^{\omega} = \frac{\int_0^{Z^* L/H} \int_0^{L/H} \text{Nu}(X)\Big|_{Y=Y_{PH}}^{\omega} dXdZ}{\int_0^{Z^* L/H} \int_0^{L/H} dXdZ} = \frac{H}{L} \int_0^{L/H} \text{Nu}(X)\Big|_{Y=Y_{PH}}^{\omega} dX \quad (4.50)$$

CAPÍTULO 5. MÉTODO NUMÉRICO

5.1 Ecuaciones adimensionales

Al llevar a cabo el procedimiento de adimensionalización de las ecuaciones de transporte se reducen el número de parámetros requeridos para la solución de las ecuaciones. En el Apéndice A se encuentra en detalle la obtención de las ecuaciones adimensionales. Las ecuaciones contienen tres números adimensionales los cuales caracterizan el comportamiento del flujo en el sistema, estos números son: el número de Prandtl (Pr), y el número de Rayleigh (Ra) y el número de Darcy (Da),

$$\text{Ra} = \frac{g \lambda_{\beta} (T_H - T_C) H^3}{\nu_{\beta} \alpha_{\beta}} \quad (5.1)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu_{\beta}}{\alpha_{\beta}} = \frac{\mu_{\beta}}{\rho_{\beta} \alpha_{\beta}} \quad (5.2)$$

$$\alpha_{\beta} = \frac{k_{\eta}}{\rho_{\beta} C_{p\beta}} \quad (5.3)$$

$$\text{Da} = \frac{K_{\beta\omega}}{H^2} \quad (5.4)$$

Considerando lo anterior, el estudio de la convección natural en la región cuadrada para dos regímenes de flujo se modela resolviendo el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales elípticas,

Ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial Y} = 0 \quad (5.5)$$

Ecuación de momentum

Para la velocidad en x ,

$$\begin{aligned} \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \mu \phi U - \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \rho \phi C_F Q^* U \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para la velocidad en y ,

$$\begin{aligned} \rho U \frac{\partial V}{\partial X} + \rho V \frac{\partial V}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \rho \Theta - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \mu \phi V - \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \rho \phi C_F Q^* V \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ecuación de energía,

$$\begin{aligned} \rho U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = & \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau \text{Pr}}{\sigma_\tau} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau \text{Pr}}{\sigma_\tau} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ecuación de energía cinética turbulenta

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial k}{\partial Y} = & \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + \\ & + [P_k + G_k - \rho \varepsilon] - 2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \phi \mu k - 6 \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \rho \phi C_F Q^* k \end{aligned} \quad (5.9)$$

Whitaker (1996) propone que el tensor $\mathbf{F}_{\omega\eta}$ es del orden del número de Reynolds, para contemplar este parámetro en las ecuaciones (5.6),(5.7),(5.9), y (5.12) se utiliza un término Q^* , el cual es función de la velocidad, y un término de corrección C_F , el cual es constante y tiene distintos valores dependiendo del medio poroso que se trate (Nield y Bejan,1992).

El tensor de Forchheimer $\mathbf{F}_{\omega\eta}$ para el medio poroso isotrópico se reduce a,

$$\mathbf{F}_{\omega\eta} = C_F K_{\beta\omega}^{1/2} Q^* \quad (5.10)$$

Donde Q^* está definida como [Prakash y col, (1999)]:

$$Q^* = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5.11)$$

Ecuación de energía de disipación turbulenta,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = & \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \\ & + [C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + C_{\varepsilon 2} G_k) - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} - 2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \phi \mu \varepsilon - \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \phi \rho C_F Q^* \varepsilon \end{aligned} \quad (5.12)$$

con:

$$P_k = \mu_\tau \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right) \quad (5.13)$$

$$G_k = - \frac{1}{\sqrt{\text{PrRa}}} \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \quad (5.14)$$

$$\mu_\tau = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.15)$$

5.2 Solución numérica

El método numérico se basa en la formulación del volumen de control. Este método está basado en las ideas planteadas por Patankar (1980). El procedimiento de solución se inicia discretizando las ecuaciones de transporte por integración de cada uno de sus términos sobre un área de control (en el caso de dos dimensiones) que circunscribe un punto de la malla numérica (Figura 5.1). Para lograr esto, Patankar (1980) propone que la ecuación de transporte puede agruparse en tres términos, un término transitorio, un término de flux y un término fuente. Al agrupar los términos las expresiones se integran sobre el volumen de control las ecuaciones de transporte.

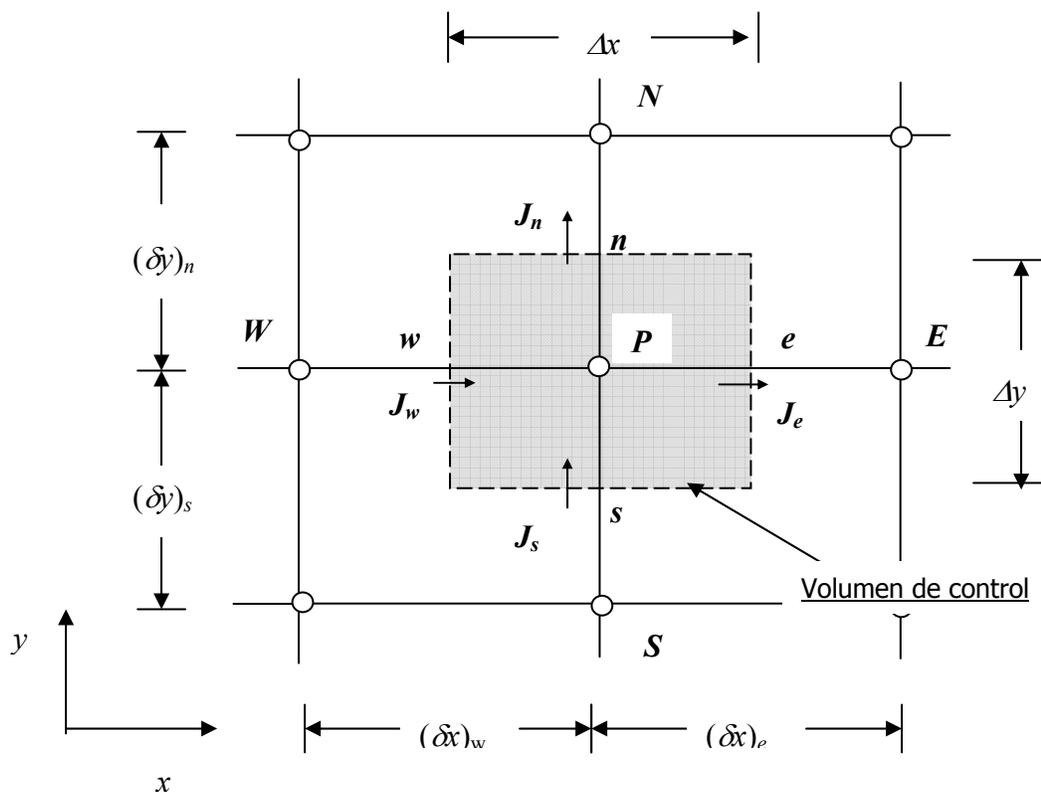


Figura 5.1 Volumen de control.

Con este procedimiento de integración se tiene que el número de ecuaciones discretizadas obtenidas es igual al número de ecuaciones de transporte para cada variable mas una ecuación

para la presión que se derivada del algoritmo de solución. Se presenta el procedimiento de discretización para la velocidad horizontal, el procedimiento es análogo para cada una de las variables. Partiendo de la ecuación de momentum en la dirección x ,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ & + \underbrace{\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right]}_{M_A} - \underbrace{\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \mu \phi U - \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \rho \phi C_F Q_U}_{M_C} \quad (5.16) \end{aligned}$$

El término M_A tiene incluida la ecuación de continuidad por lo que su valor es cero. Sin embargo, al conservar M_A en la expresión se tiene mayor estabilidad numérica y funciona como un factor de corrección. El término de Darcy y la corrección de Forchheimer se agrupa en el termino M_C .

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho U U)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho V U)}{\partial Y} = & -\frac{\partial P_x}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] \\ & + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + M_C \quad (5.17) \end{aligned}$$

Después, agrupando los términos difusivos y convectivos,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \left\{ \frac{\partial(\rho U U)}{\partial X} - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] \right\} + \left\{ \frac{\partial(\rho V U)}{\partial Y} - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \right\} = \\ = -\frac{\partial P_x}{\partial X} + M_C \quad (5.18) \end{aligned}$$

Definiendo el flux como:

$$J_x = \rho_\beta U U - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} (\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \quad (5.19)$$

$$J_y = \rho_\beta V U - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} (\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (5.20)$$

Al definir de esta manera el flux, los términos no homogéneos de la ecuación quedan incluidos en el término fuente S . Por lo que la ecuación queda de la siguiente manera,

$$\rho_\beta \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial J_x}{\partial X} + \frac{\partial J_y}{\partial Y} = S \quad (5.21)$$

S es un término fuente que requiere de un tratamiento especial, al definir de manera adecuada esta fuente se logra mayor estabilidad en la solución numérica. La particularidad del método al definir un término fuente es la de incluir todos los términos no lineales de la ecuación diferencial homogénea. En el presente caso se agrupan los términos de Forchheimer y de Darcy, junto con el gradiente de presiones, las fuerzas de volumen, y si existe, una fuente de generación de energía para la ecuación de calor.

Integrando la ecuación sobre el volumen y para un intervalo de tiempo,

$$\int_s^e \int_w^n \int_t^{t+\Delta t} \rho_\beta \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau dX dY + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial J_x}{\partial X} dX dY d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^n \int_s^e \frac{\partial J_y}{\partial Y} dY dX d\tau = \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \int_s^n S dY dX d\tau \quad (5.22)$$

Realizando la primer integración en cada término,

$$\left(\rho_{\beta,p} U_p - \rho_{\beta,p}^0 U_p^0 \right) \Delta X \Delta Y + \int_s^n (J_e - J_w) dY \Delta \tau + \int_e^w (J_n - J_s) dX \Delta \tau = \bar{S} \Delta X \Delta Y \Delta \tau \quad (5.23)$$

Los subíndices indican en donde se encuentran evaluadas las variables, ya sea sobre los puntos de la malla principal ($P, E, W, S, o N$) o sobre las caras del volumen de control (w, e, n, s).

Al integrar el término fuente se obtiene una variable promedio el volumen de control. La primera aproximación para definir ésta variable promedio es una función lineal de la fuente. Considerando que el flux es homogéneo a lo largo de la cara perpendicular sobre la cual se está calculando se tiene la ecuación integrada en el volumen como:

$$\left(\rho_{\beta,P}U_P - \rho_{\beta,P}^0U_P^0\right)\frac{\Delta X\Delta Y}{\Delta\tau} + J_e - J_w + J_n - J_s = S_c\Delta X\Delta Y + S_PU_P\Delta X\Delta Y \quad (5.24)$$

Para poder continuar con el proceso de discretización es necesario hacer uso de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial\rho_\beta}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_\beta U)}{\partial X} + \frac{\partial(\rho_\beta V)}{\partial Y} = 0 \quad (5.25)$$

$$\int_s^e \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial\rho_\beta}{\partial\tau} d\tau dXdY + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial(\rho_\beta U)}{\partial X} dXdYd\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^e \frac{\partial(\rho_\beta V)}{\partial Y} dYdXd\tau = 0 \quad (5.26)$$

Realizando la operación de integración,

$$\left(\rho_{\beta,P} - \rho_{\beta,P}^0\right)\Delta X\Delta Y + \int_s^e \left((\rho_\beta U)|_e - (\rho_\beta U)|_w\right) dy\Delta t + \int_w^e \left((\rho_\beta V)|_n - (\rho_\beta V)|_s\right) dx\Delta t = 0 \quad (5.27)$$

$$\left(\rho_{\beta,P} - \rho_{\beta,P}^0\right)\frac{\Delta X\Delta Y}{\Delta t} + (\rho_\beta U)|_e - (\rho_\beta U)|_w + (\rho_\beta V)|_n - (\rho_\beta V)|_s = 0 \quad (5.28)$$

multiplicando por U_P , la velocidad evaluada en el punto de malla P ,

$$\left(\rho_{\beta,P}U_P - \rho_{\beta,P}^0U_P^0\right)\frac{\Delta X\Delta Y}{\Delta t} + F_eU_P - F_wU_P + F_nU_P - F_sU_P = 0 \quad (5.29)$$

Restando las expresiones (5.24) y (5.29) se obtiene,

$$\begin{aligned} (U_P - U_P^0)\rho_{\beta,P}^0\frac{\Delta X\Delta Y}{\Delta\tau} + (J_e - F_eU_P) - (J_w - F_wU_P) + (J_n - F_nU_P) - (J_s - F_sU_P) = \\ = S_c\Delta X\Delta Y + U_P S_P\Delta X\Delta Y \end{aligned} \quad (5.30)$$

Introduciendo los coeficientes discretizados,

$$(U_P - U_P^0)\rho_{\beta,P}^0\frac{\Delta X\Delta Y}{\Delta\tau} + a_E(U_P - U_E) - a_W(U_P - U_E) + a_N(U_P - U_E) - a_S(U_P - U_E) =$$

$$= S_c \Delta X \Delta Y + U_p S_p \Delta X \Delta Y \quad (5.31)$$

donde se define,

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \quad (5.32)$$

$$a_W = D_e A(|Pe_w|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \quad (5.33)$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \quad (5.34)$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \quad (5.35)$$

El símbolo $\llbracket \ \rrbracket$ representa el valor más grande contenido dentro de este. Con esto se asegura que los coeficientes a_P , a_E , a_W , a_S , a_N , sean positivos, el cual es un requisito del método numérico.

Los coeficientes convectivos están definidos como:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad (5.36)$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad (5.37)$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x \quad (5.38)$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad (5.39)$$

El coeficiente difusivo se representa por,

$$D_e = \frac{\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} (\mu_\beta + \mu_t) \Delta Y}{(\delta X)_e} \quad (5.40)$$

$$D_w = \frac{\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} (\mu_\beta + \mu_t) \Delta Y}{(\delta X)_w} \quad (5.41)$$

$$D_n = \frac{\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} (\mu_\beta + \mu_t) \Delta X}{(\delta Y)_n} \quad (5.42)$$

$$D_s = \frac{\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} (\mu_\beta + \mu_t) \Delta X}{(\delta Y)_s} \quad (5.43)$$

Finalmente el Peclet está definido por la relación entre el transporte convectivo y difusivo,

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e} \quad (5.44)$$

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} \quad (5.45)$$

$$Pe_n = \frac{F_n}{D_n} \quad (5.46)$$

$$Pe_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (5.47)$$

La ecuación discretizada queda como:

$$a_p U_P = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S + b \quad (5.48)$$

Donde se definen los coeficientes,

$$a_p = a_p^0 + a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \Delta X \Delta Y \quad (5.49)$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_{\beta,p}^0 \Delta X \Delta Y}{\Delta t} \quad (5.50)$$

$$b = S_C \Delta X \Delta Y + a_p^0 U_P^0 + M_A \quad (5.51)$$

Para cada variable se tiene una expresión similar a la Ecuación(5.31). El término fuente S de la Ecuación (5.21) y el término b de la Ecuación (5.48), también denominado fuente, requieren de un tratamiento especial para obtener y estabilidad a la solución y lograr convergencia. Patankar (1980) proporciona algunas reglas para la linealización de S , si la linealización es del tipo,

$$S = S_C + S_p U_P \quad (5.52)$$

S_p debe ser siempre negativo. Para las ecuaciones de transporte del medio poroso en el termino S_p se incluyen las correcciones de Darcy y Forccheimer (ver Apéndice B). En el termino

b se incluye a M_A . En general no existe un procedimiento riguroso para definir la expresión de las fuentes y la manera de asociar los términos no lineales de la ecuación diferencial requiere de la experiencia y de la prueba del método en cada caso. En el listado numérico de los autores del programa *Natcon* se encierra en la fuente b los términos de flotación, G_k , y de generación de energía cinética P_k en la ecuación discretizada correspondiente a la ecuaciones del modelo k - ε .

5.2.1 Algoritmo de solución.

En el algoritmo de solución se incluyen cada una de las ecuaciones discretizadas correspondientes a cada variable, U, V, Θ, k y ε mas una ecuación para la presión. El objetivo de esta ecuación es obtener un valor corregido de la presión e introducirlo en las dos ecuaciones de momentum. El campo de velocidad obtenido debe de satisfacer la ecuación de continuidad. Con la aplicación de una ecuación para la presión el campo de flujo se calcula utilizando el algoritmo de solución denominado SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). El algoritmo se presenta en la Figura 5.2.

En el estado transitorio el procedimiento se repite a cada intervalo de tiempo. En el Apéndice C se presenta un diagrama de flujo que se utiliza en el programa *Natcon* y *Cavpor*.

En el procedimiento de solución de las ecuaciones algebraicas lineales se utiliza el método numérico línea por línea de Gauss Seidel el cual emplea una combinación del algoritmo de la matriz tridiagonal (TDMA) y el método iterativo punto por punto de Gauss Seidel, este método es propuesto por Patankar (1980) y señala que existen ventajas en el manejo de las condiciones de frontera.

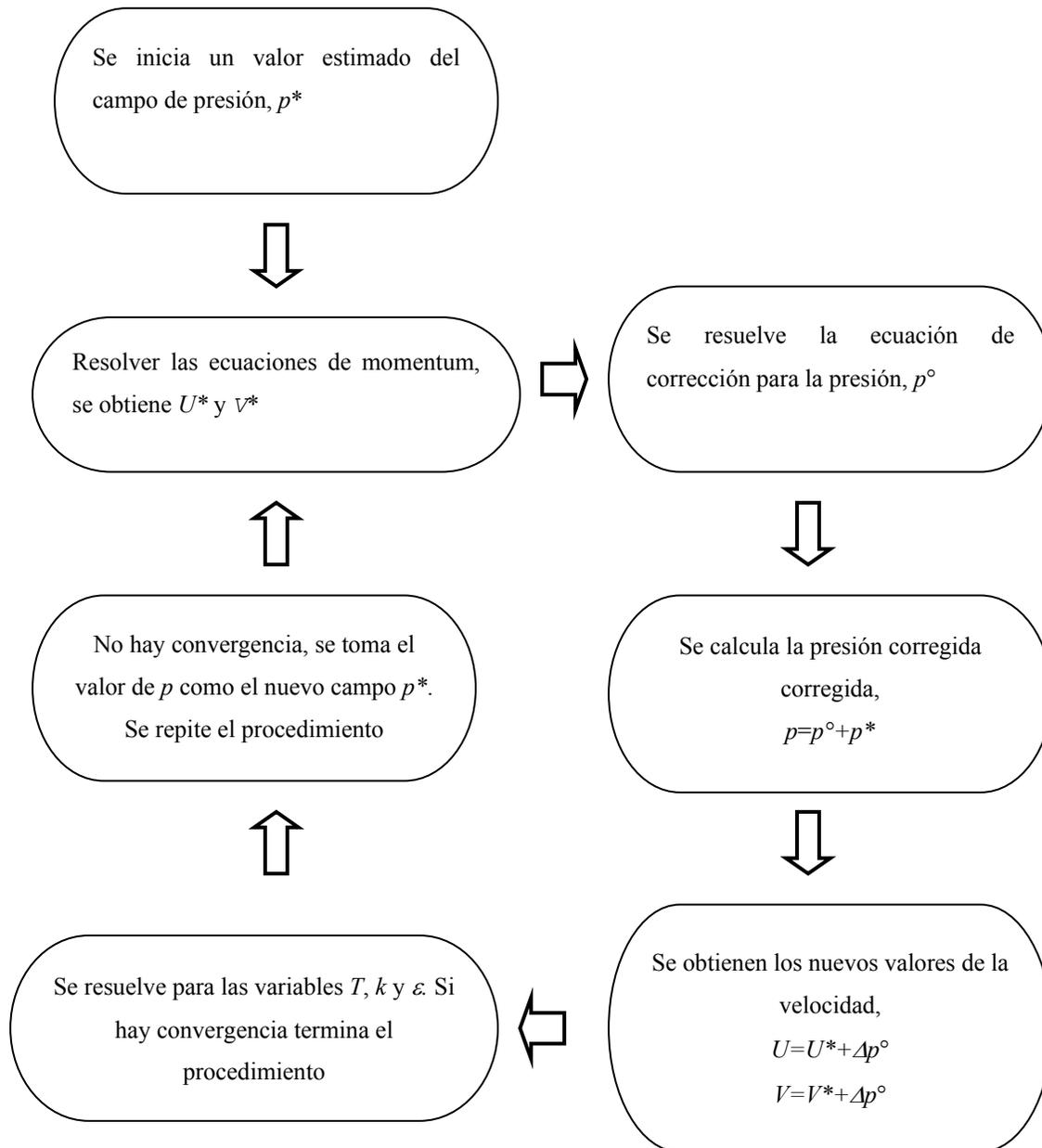


Figura 5.2. Algoritmo de solución SIMPLE

5.3 Parámetros numéricos

La solución numérica se inicia generando una malla numérica principal y una malla numérica escalonada. La distancia entre los nodos de la malla numérica principal tiene la característica de ser más corta cerca de las paredes, y más separada lejos de ésta. Cada nodo de la malla numérica principal está circunscrito por el volumen de control. La malla numérica escalonada define la posición de las caras del volumen de control además, se utiliza para los cálculos de variables vectoriales como es el campo de velocidad. Sobre los puntos principales de la malla se realiza el cálculo de las variables escalares; temperatura, energía cinética turbulenta y energía disipativa. El listado del programa junto la descripción del mismo se encuentran en el Apéndice B.

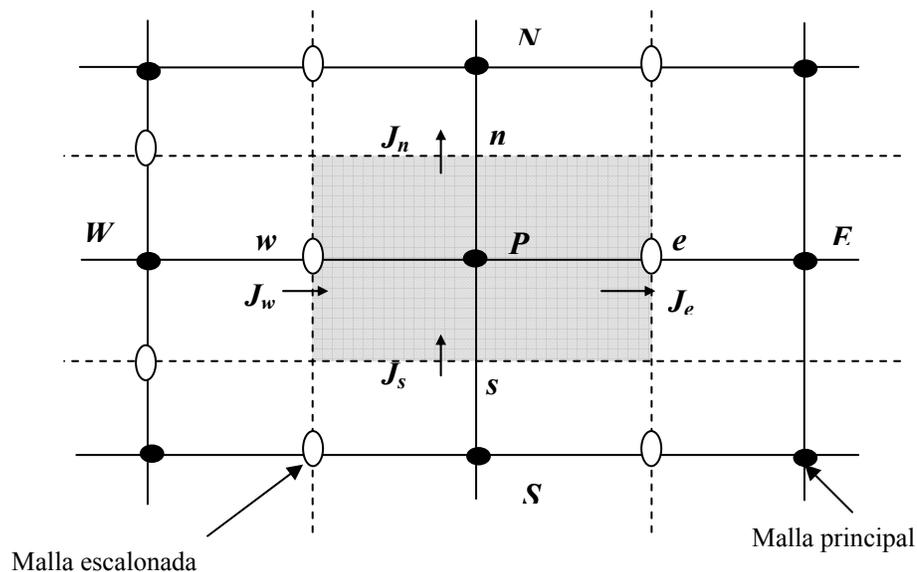


Figura 5.3 Nodos de la malla numérica

El criterio de convergencia que se utilizó es la suma de las fuentes normalizadas absolutas de masa, momentum y calor. El criterio consiste en que para cada volumen de control se ha alcanzado de manera individual el valor de tolerancia de 10^{-9} para todas las variables. La expresión es la siguiente,

$$\left| \frac{\sum_{i=2}^{NI-1} \sum_{j=2}^{NI-1} [\varphi_{i+1} A_e - \varphi_i A_w + \varphi_{j+1} A_n - \varphi_j A_s]}{(NI-2)(NI-2)} \right| \leq 10^{-9} \quad (5.53)$$

φ representa las distintas cantidades (temperatura, velocidad etc.), A_e , A_w , A_n y A_s representan las áreas de las caras del volumen de control. La normalización se obtiene dividiendo entre el número total de volúmenes de control generados con la malla escalonada.

La velocidad de cálculo para convergencia depende de los factores de subrelajación incluidos para cada variable. Para el cálculo de flujo laminar se utilizan valores de 0.5 para cada una de las variables, pero para el caso de flujo turbulento se necesita utilizar valores de subrelajación de 0.1 utilizando mayor tiempo de cálculo. Es posible que existan otros valores, sin embargo, en el presente trabajo estos fueron los valores utilizados en la convergencia. La manera de acelerar la convergencia es generar un campo de valores iniciales los que se guardan directamente en el archivo “Dumpor”, posteriormente se vuelve a realizar otra corrida del programa considerando como campo inicial el obtenido de la corrida anterior. Existe mayor dificultad en alcanzar la convergencia para valores de $Ra > 10^{10}$ por lo que se requirió hasta de tres corridas para lograr la convergencia.

Se probaron distintas cantidades de nodos para observar efecto de los residuales $10^2, 18^2, 34^2, 66^2, 80^2$. La característica de estos valores es que los puntos de malla principal para el valor de 10^2 están contenidos en la malla siguiente y sucesivamente. Para cálculos de flujo laminar existieron diferencias significativas entre las mallas de 10^2 y 34^2 . La diferencia de los campos de solución generados por las mallas de 34^2 y 66^2 son despreciables. Sin embargo, se utilizan mallas de 66^2 asegurando obtener mayor cantidad de datos en las paredes del sistema.

En el caso de los cálculos de flujo turbulento se hicieron comparaciones entre las mallas de 66^2 y 80^2 , no existiendo diferencias significativas. Se establece el uso de mallas de 80^2 para dibujar las isotermas y las líneas de corriente. Un parámetro de convergencia que también se utilizó fue el número de Nusselt (Nu) promedio en las paredes, el cual se obtuvo para cada par de valores de Da y Ra en cada malla.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

Se presentan los resultados obtenidos de la solución numérica del problema de transporte de calor por convección natural. Primero se muestran los resultados generados por el programa *Natcon* que resuelve el problema de la cavidad ocupada sólo por fluido. Posteriormente se muestran los resultados a partir del programa *Cavpor*, en el que se resuelve el problema descrito en el Planteamiento del Problema utilizando la aproximación de un solo dominio. Para cada caso se evalúa el número de Nusselt en las paredes verticales; y en el caso del problema de las dos regiones, fluido-medio poroso, se evalúa el número de Nusselt en la interfase. Los datos numéricos obtenidos se analizan utilizando las herramientas de software disponibles (Surfer 7.0, Origin 7.0 y Excel 2000) y para los cuales se obtiene el formato de los archivos donde se guardan los resultados. Todos los resultados se presentan resolviendo el estado estacionario.

6.1 Cavidad cuadrada: Fluido

El primer análisis de resultados se realiza a partir de los datos arrojados con el listado *Natcon*. Como se mencionó, el programa resuelve el problema de transporte en una cavidad cuadrada ocupada solamente por un fluido. Para conocer la funcionalidad del esquema numérico se analizan los resultados obtenidos describiendo el comportamiento del fluido en el sistema y se comparan los resultados con los reportados por diversos autores que han estudiado el mismo esquema físico.

Para lograr definir el régimen de flujo dentro de la cavidad, laminar y turbulento, se varía el número de Ra, el cual es un parámetro propio del problema de convección natural. De acuerdo con Henkes (1990) se considera flujo laminar para $Ra \leq 10^6$, y flujo turbulento completamente desarrollado para $Ra \geq 10^8$. La etapa de transición del flujo laminar a flujo turbulento está considerada entre los valores de Ra entre 10^6 y 10^8 . El número de Pr tiene un valor de 0.71 el cual es característico del aire al considerar que es el fluido que ocupa la cavidad. Se evalúa la densidad ρ_β , la viscosidad μ_β , la capacidad calorífica $C_{P\beta}$, y la conductividad térmica k_β a la temperatura de referencia, T_{ref} la cual es un promedio entre la temperatura caliente y

temperatura fría (Ver Apéndice A). El número de Ra es función de las propiedades del fluido, la diferencia de temperaturas, y la altura de la cavidad H . Los distintos valores de Ra se obtienen variando la altura de la cavidad manteniendo constantes todas las demás variables. En el Cuadro 6.1 se observa la relación entre la altura de la cavidad y el número de Ra, se observa que los distintos regímenes de flujo se obtienen variando solo la altura, H , de la cavidad.

Cuadro 6.1 Variación del número de Ra en función de la altura H .

Ra	H , altura (m)
10^3	0.0080
10^4	0.0170
10^5	0.0360
10^6	0.0790
10^8	0.3650
10^{10}	1.692
10^{12}	7.853

Los primeros resultados que se analizan son las líneas de corriente e isothermas para distintos valores de Ra y se observan en la Figura 6.1 y 6.2. Una característica del flujo laminar en una cavidad cerrada es la simetría, si f representa a cualquier variable, velocidad o temperatura, se cumple que,

$$f(X,Y)=f(L-X,H-Y) \quad (6.1)$$

Sin embargo, al incrementar el número de Ra se observa una ligera desviación de la simetría debido posiblemente a la diferencia significativa entre los valores del centro de la cavidad y los obtenidos dentro de la capa límite que se forma en la pared de la cavidad conforme se incrementa el Ra. Para valores de $Ra < 10^6$ aparece un vórtice central como característica del flujo recirculante presente en la cavidad. En el caso de las líneas de corriente se observa que al incrementar el Ra (10^5 y 10^6) el flujo se vuelve más intenso cerca de las paredes esto explica que la densidad de líneas de corriente aumente cerca de ésta; este efecto es indicativo de la capa límite formada por el movimiento convectivo del fluido en las paredes. Conforme el Ra se

incrementa, el vórtice presenta una geometría elíptica y finalmente se rompe en dos vórtices para un $Ra=10^5$ concentrándose el flujo en las paredes. La rotación del vórtice es en el sentido de las manecillas del reloj. En la Figura 6.2 se observan los mapas de contornos para $Ra>10^6$. Para llevar a cabo estos cálculos, se considera el flujo turbulento y se resuelven las ecuaciones del modelo $k-\varepsilon$. Cuando el $Ra>10^8$, las velocidades en la parte central de la cavidad son considerablemente menores comparadas con las velocidades cercanas a las paredes en donde se mueve el fluido más rápidamente.

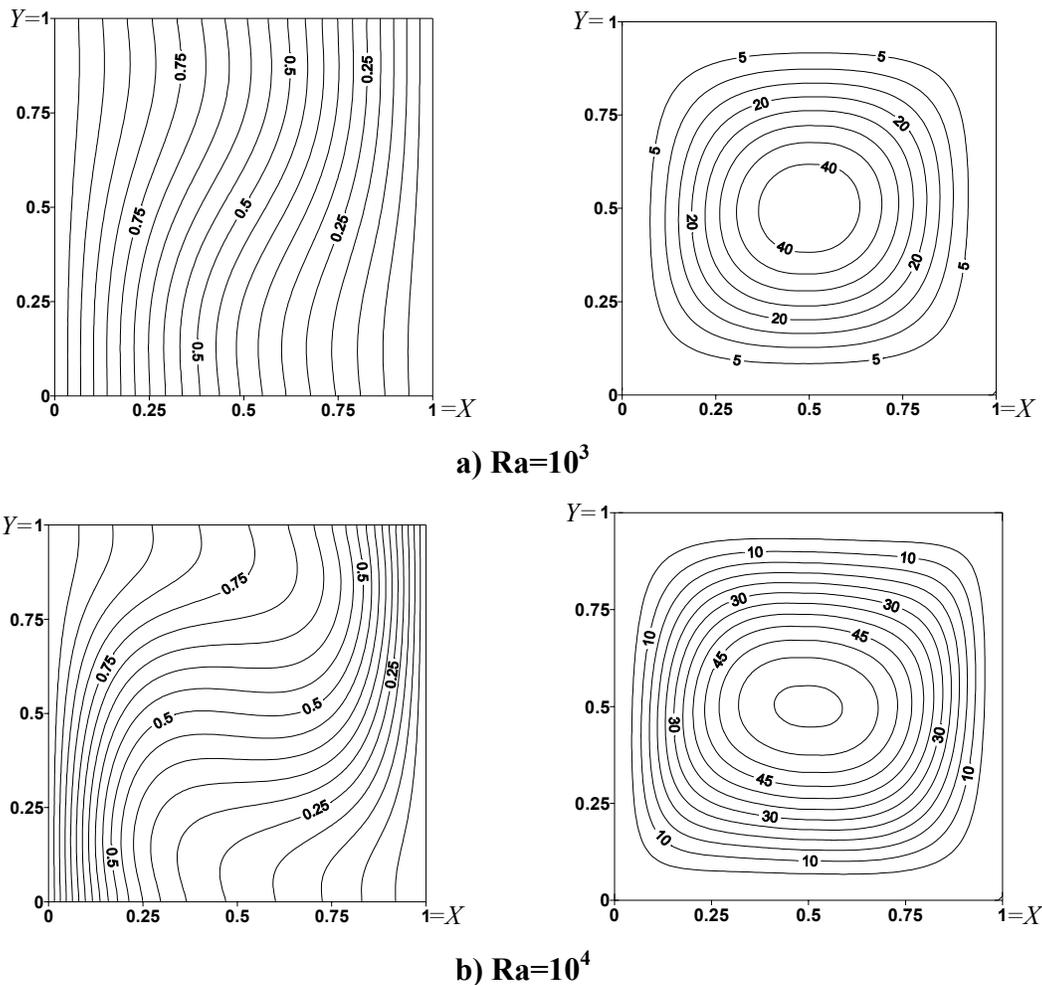


Figura 6.1. Isotermas (columna izquierda) y líneas de corriente (columna derecha). Cavidad con fluido, régimen laminar.

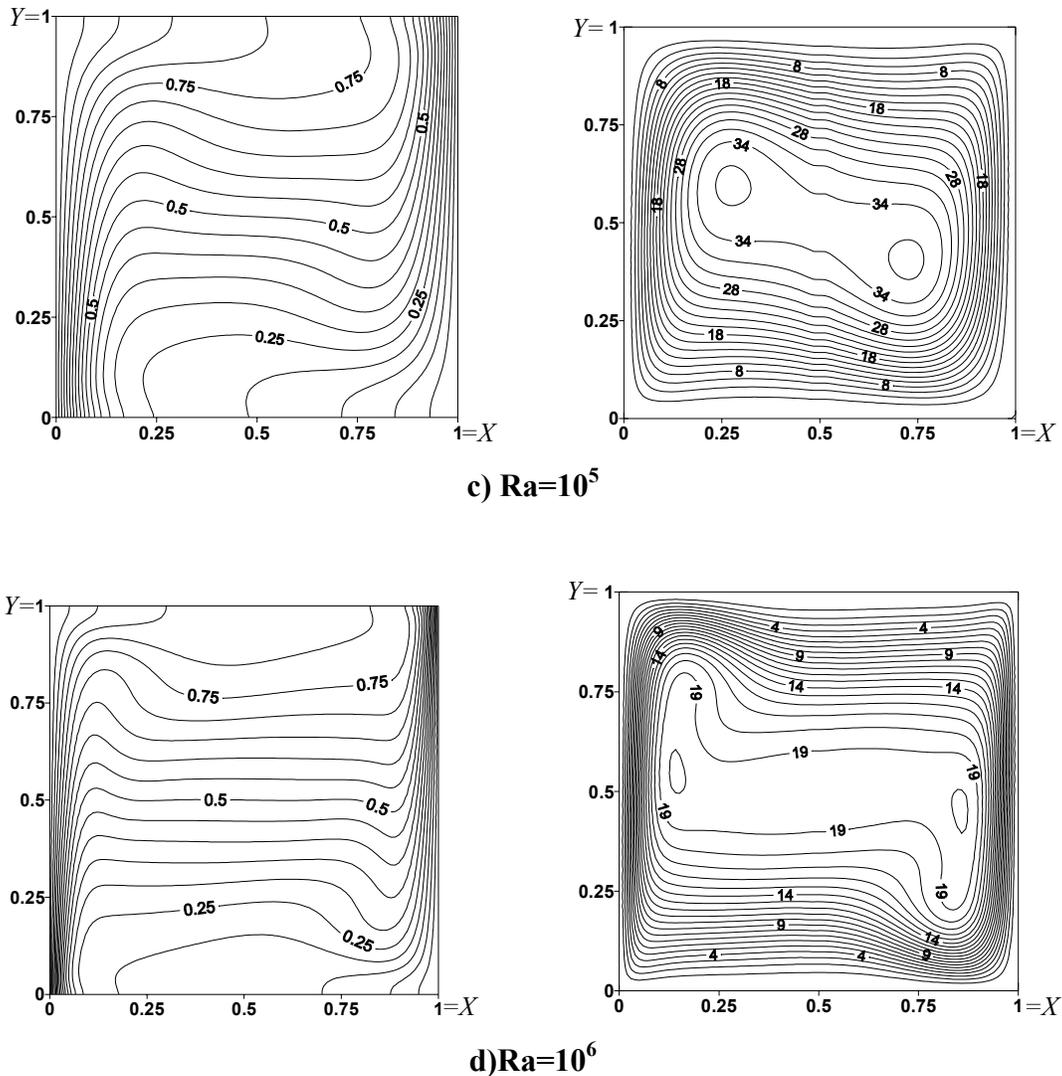


Figura 6.1 Continuación

Otra característica del flujo para Ra altos es la formación de vórtices, en las esquinas superior izquierda e inferior derecha. El flujo se concentra en las paredes lo que promueve la estratificación del flujo en la parte central de la cavidad. Esta es una característica importante del flujo dentro de la cavidad [Henkes,1990]

En el caso de la transferencia de calor, la geometría de las isotermas muestra cual es el mecanismo de transferencia dominante en la cavidad cuando se varía el número de Ra . Cuando el $Ra=10^3$ las isotermas son casi verticales debido a que existe principalmente una transferencia por conducción entre las paredes caliente y fría. Conforme la isoterma se va desplazando de la

posición vertical el mecanismo de conducción de calor se transforma a un mecanismo por convección.

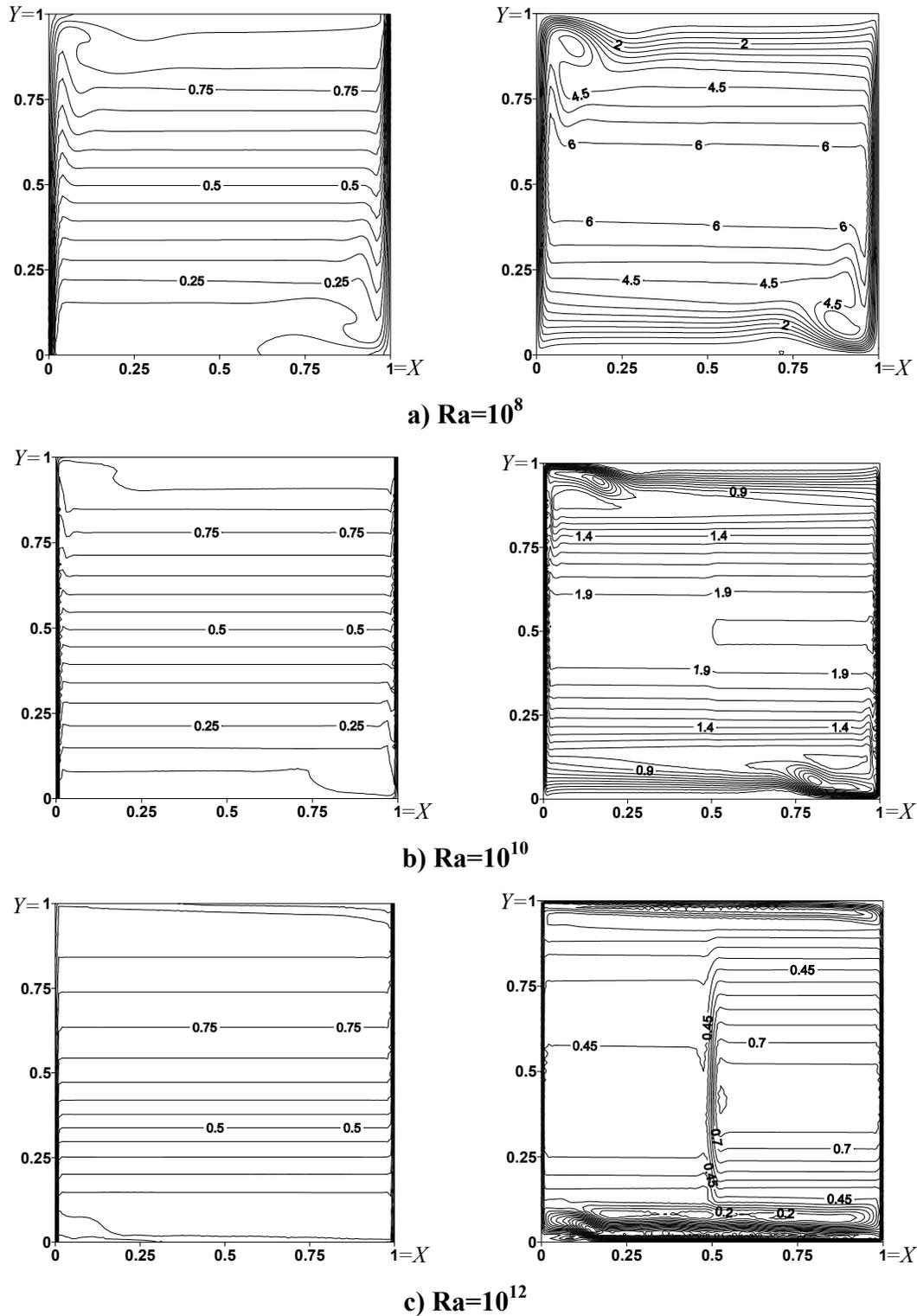


Figura 6.2. Isotermas y líneas de corriente. Cavity con fluido, régimen turbulento.

Con el incremento en el Ra el flujo de calor se vuelve principalmente convectivo y comienza la estratificación de la temperatura al centro de la cavidad y los cambios pronunciados de temperatura se dan más cerca de la pared. Con esto se puede suponer la disminución en el espesor de la capa límite térmica, siendo ésta la zona donde se tienen los cambios mayores. Se observa para $Ra=10^8$ la estratificación completa de la temperatura junto con la mayor densidad de líneas de corriente cerca de la pared. Los vórtices generados en las esquinas son característicos para $Ra>10^8$ [Ravi y col., (1994)].

También se muestran los perfiles de temperatura y velocidad sobre una posición media de la cavidad en las direcciones correspondientes. En los perfiles de temperatura (Figura 6.3 y 6.4) para flujo laminar se observa un rápido cambio en el mecanismo de transferencia de calor por conducción a mecanismo por convección. La variación da lugar desde un ángulo de 45° para la pendiente ($Ra=10^3$) hasta que la temperatura se vuelve horizontal en el centro de la cavidad. Los gradientes de temperatura se localizan en el interior de la capa límite la cual se desarrolla cerca de las paredes. Cerca del centro de la cavidad las isotermas cambian su pendiente y existe un vórtice a cada cambio. En el centro las isotermas son líneas horizontales lo que significa la estratificación del flujo. En la Figura 6.4 se observa que para un $Ra=10^{12}$ sobre el mismo plano de altura existen distintas temperaturas al centro de la cavidad. Los gradientes de temperatura se dan en una zona muy cercana a las paredes.

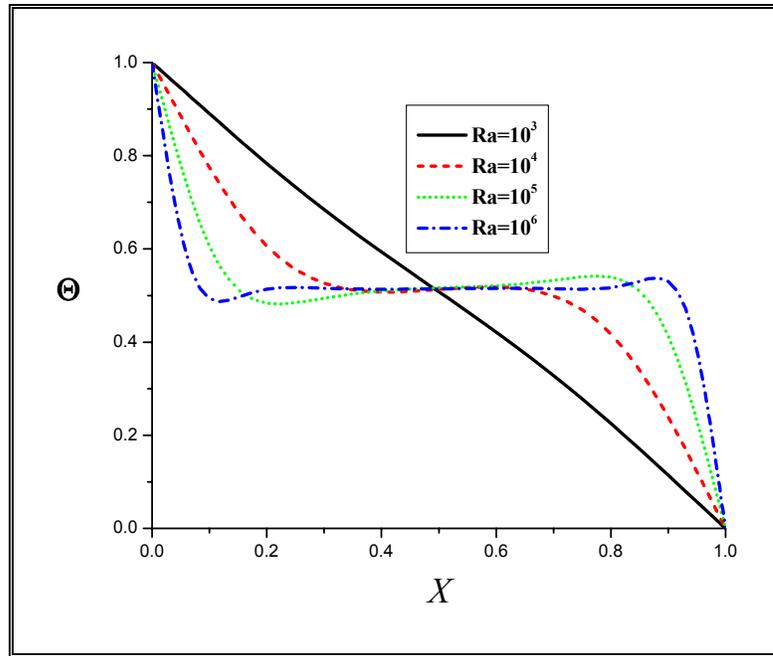


Figura 6.3. Perfil de temperatura, $Y=0.5$. Régimen laminar.

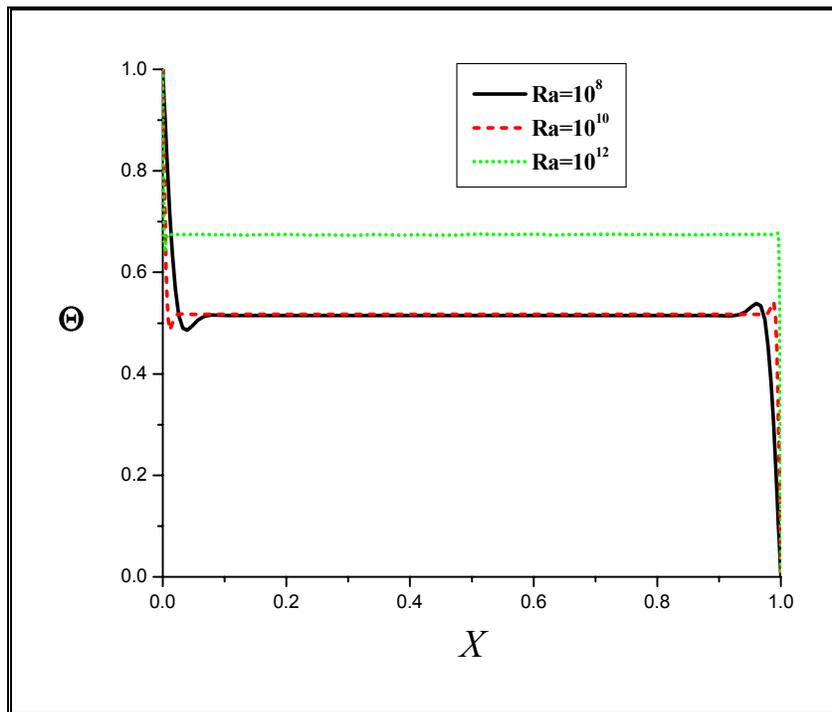


Figura 6.4. Perfil de temperatura, $Y=0.5$. Régimen turbulento.

En lo que respecta a los componentes de la velocidad se muestra que la velocidad V (en la dirección Y) para un flujo laminar (Figura 6.5) decrece gradualmente en la zona del centro de la

cavidad pero se incrementa en la zona de las paredes, este efecto representa el desarrollo de una capa límite cerca de las fronteras a lo largo de la pared vertical. La velocidad presenta valores negativos lo que indica el cambio de dirección. En el caso de flujo turbulento (Figura 6.6) los perfiles de velocidad son más agudos que en el caso laminar y se dan en una zona más cercana a la pared vertical, la velocidad al centro de la cavidad disminuye. Los resultados pueden ser comparados con los trabajos de Barakos y Assimacopoulos (1994), y Henkes (1991).

La componente de la velocidad U (componente en X) para flujo laminar (Figura 6.7) muestra un comportamiento distinto al de la velocidad V . Para $Ra=10^5$ y 10^6 no existen velocidades bajas en la zona del centro de la cavidad. Se observa un punto de inversión (señalado por I) a una altura media de la cavidad y conforme aumenta el número de Ra la velocidad máxima disminuye. La velocidad no se desplaza hacia las paredes de manera significativa como en el caso de la velocidad vertical. En el caso turbulento (Figura 6.8) la velocidad horizontal al centro de la cavidad disminuye considerablemente. Un efecto importante que se observa es la presencia de un máximo cerca de las paredes seguido de un mínimo de velocidad.

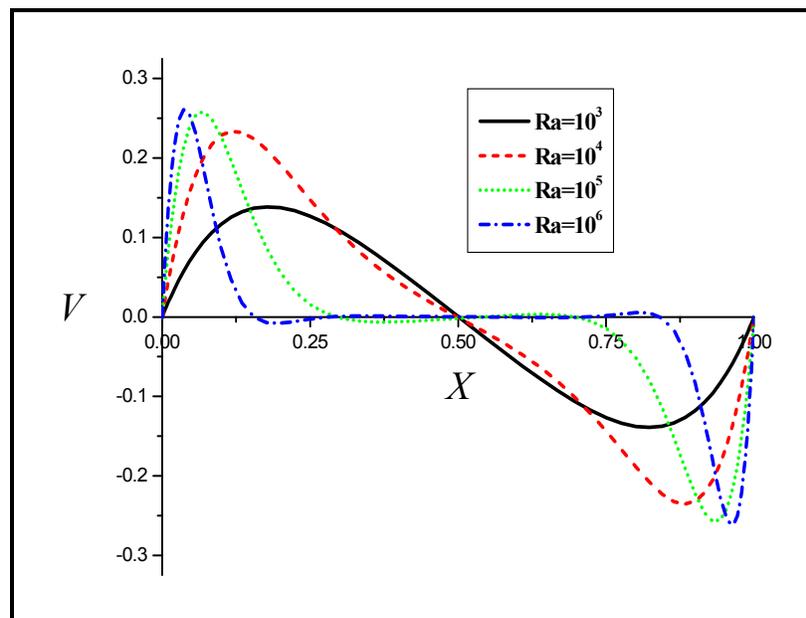


Figura 6.5 Perfil de la velocidad V , $Y=0.5$. Flujo laminar.

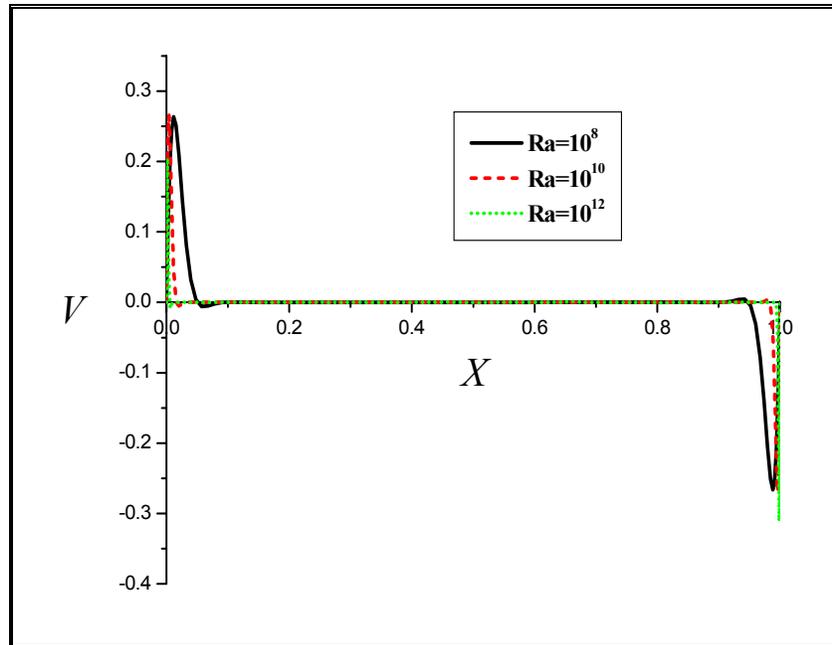


Figura 6.6 Perfil de la velocidad V , $Y=0.5$. Flujo turbulento.

Es posible que este efecto se deba a la diferencia de velocidades entre las capas de fluido adyacentes en esa zona. El comportamiento se observa en la pared superior e inferior. La velocidad máxima que se observa en el flujo laminar es aproximadamente de un orden de magnitud mayor comparada con la velocidad máxima del caso turbulento.

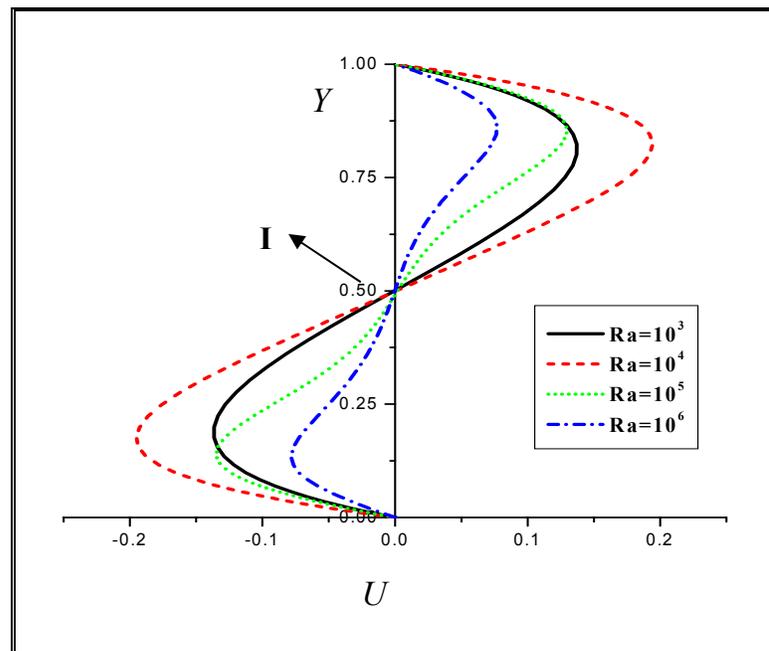


Figura 6.7. Perfil de la velocidad U , $X=0.5$. Flujo laminar.

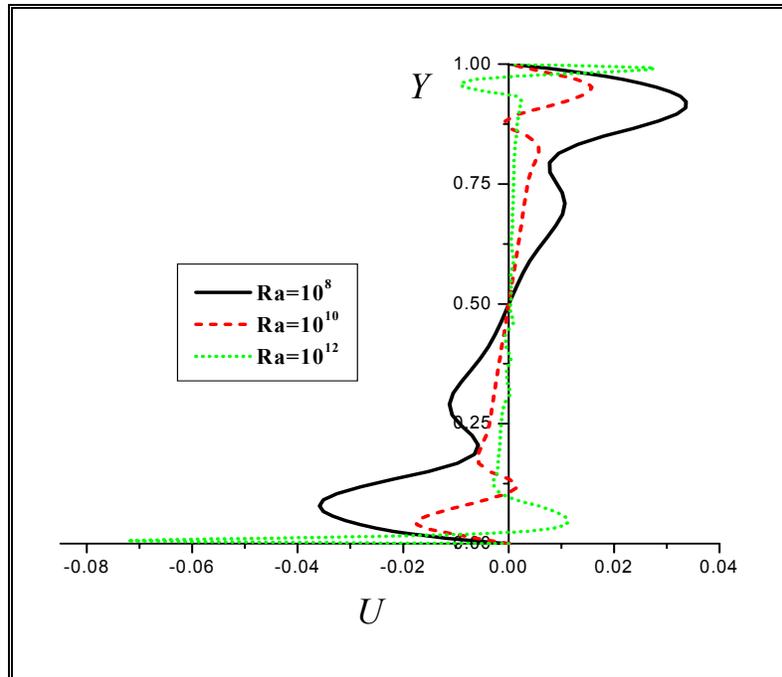


Figura 6.8 Perfil de la velocidad U , $X=0.5$. Flujo turbulento.

El número de Nusselt (Nu) se utiliza como un parámetro para estimar la tasa de transferencia de calor. También se ocupa como un valor representativo del flujo en la cavidad y el cual es útil para la comparación entre los distintos estudios. En las Figuras 6.9 y 6.10 se observa el Nu local para la pared caliente y la pared fría respectivamente. Se observa un comportamiento simétrico en el Nu entre la pared caliente y la pared fría. Conforme aumenta el valor del número de Ra se incrementa el valor del número de Nu , esto es el transporte de calor por convección es el transporte dominante. Los valores máximos se alcanzan en los extremos de la cavidad lo que indica que en esta zona el transporte de calor es mayormente convectivo.

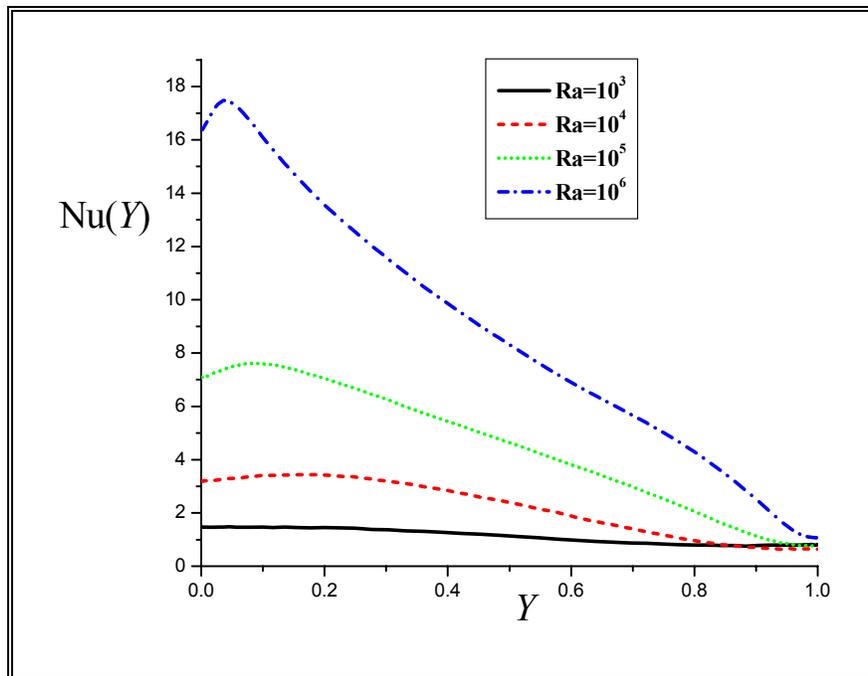


Figura 6.9. Nusselt local en la pared caliente, $X=0$. Régimen laminar

De manera comparativa se realiza el cálculo del Nu promedio en las paredes para cada valor del Ra. Conforme aumenta el Ra aumenta el valor de Nu en la cavidad, esto indica que la transferencia de calor es mayormente convectivo. El comportamiento es similar en el caso laminar y turbulento, sin embargo para el caso turbulento el Nu es de un orden de magnitud mayor que en el caso laminar. Se observa un efecto que cerca de las paredes los cambios son mayores.

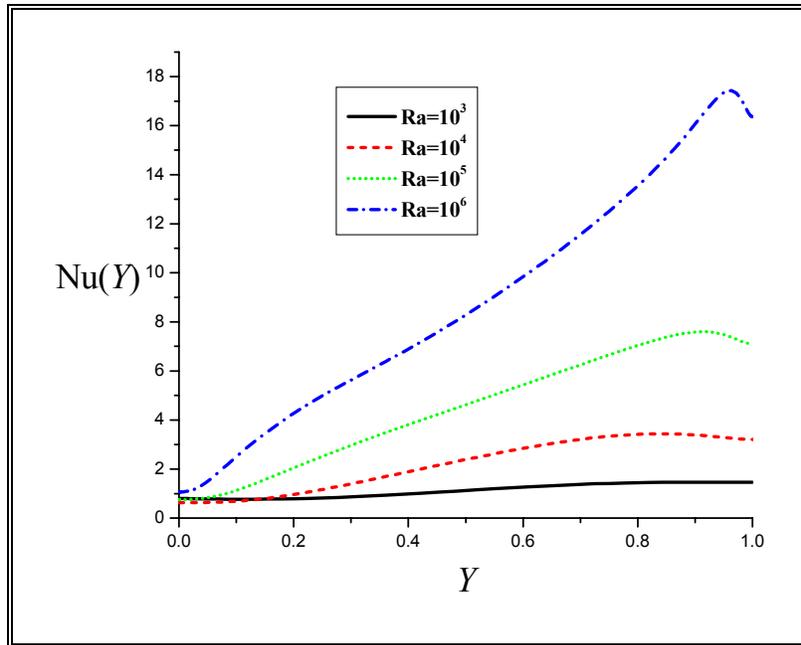


Figura 6.10. Nusselt local en la pared fría, $X=1$. Régimen laminar

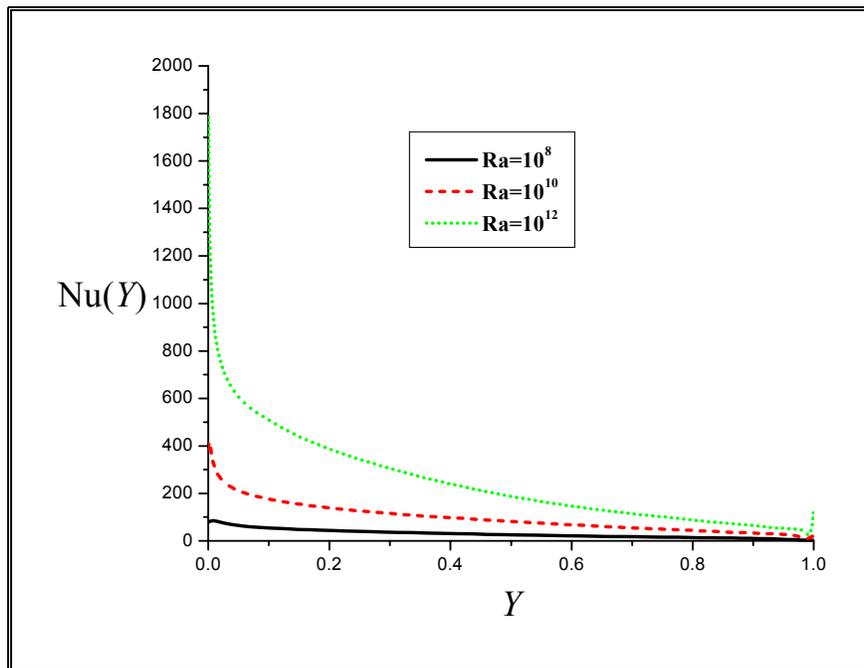


Figura 6.11. Nusselt local en la pared caliente, $X=1$. Régimen turbulento

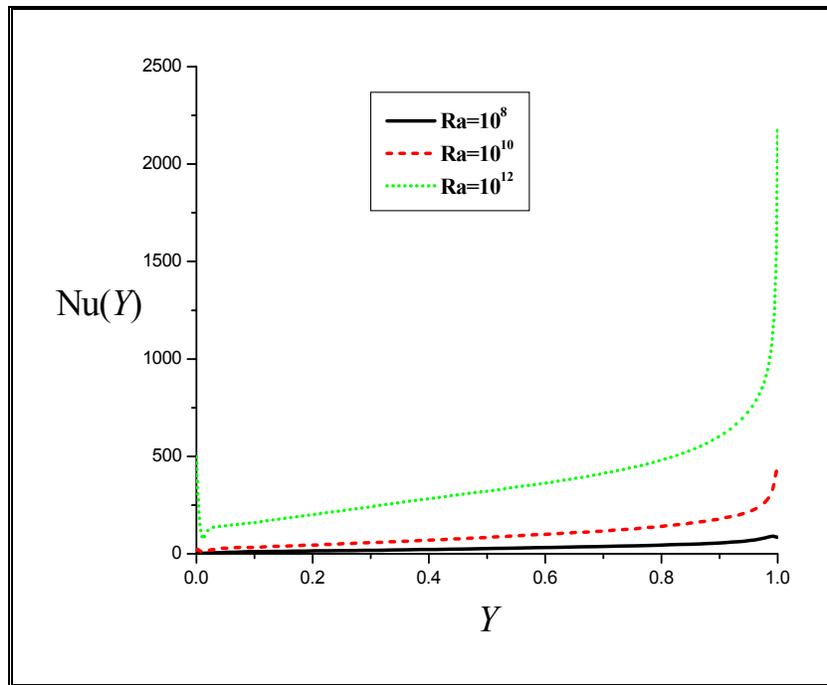


Figura 6.12. Nusselt local en la pared fría, $X=1$. Régimen turbulento

Utilizando los resultados del Cuadro 6.2 se pueden obtener la correlación de Nu en función de Ra y poder llevar a cabo las comparaciones con trabajos anteriores.

Cuadro 6.2 Nusselt promedio en las paredes del sistema.

Ra	Nu	
	Pared caliente X=0	Pared fría X=1.0
10^3	1.123	1.121
10^4	2.208	2.211
10^5	4.485	4.487
10^6	8.775	8.775
10^8	29.85	30.3
10^{10}	136.67	141.97
10^{12}	850	846.9

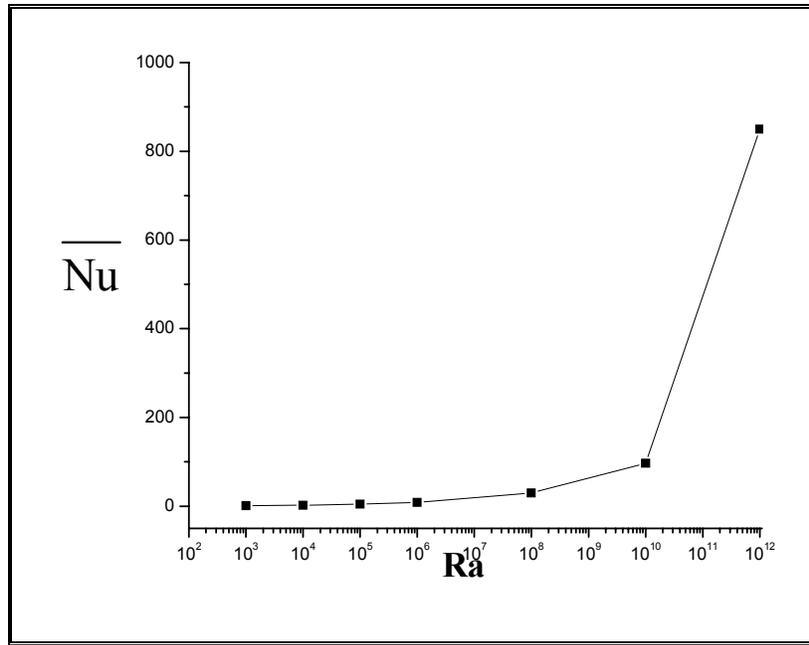


Figura 6.13. Nusselt promedio vs. Rayleigh.

Las correlaciones se expresan de la forma potencial,

$$Nu = aRa^b \tag{6.2}$$

Los valores de a y b se comparan con el trabajo de Barakos *y col.* (1994) y Markatos y Pericleous (1984) en donde se utiliza un esquema numérico distinto al utilizado en el presente trabajo. En la Cuadro 6.3 se comparan los valores de las correlaciones para una altura de medio poroso. Para el flujo laminar se observan similitudes con las soluciones previas.

Cuadro 6.3. Comparación los valores a y b de las correlación $Nu=aRa^b$.

	a	b	Error (%)	Intervalo
	a y b			
Este trabajo	0.142	0.298		$10^3 < Ra < 10^6$
Barakos y col. (1994)	0.142	0.299	0 y 0	$10^3 < Ra < 10^6$
Este trabajo	0.078	0.331		$10^6 < Ra < 10^{12}$
Markatos y Pericleous (1984)	0.082	0.329	4.8 y 0.6	$10^6 < Ra < 10^{12}$

6.2 Cavity cuadrada: fluido-medio poroso

6.2.1 Flujo laminar

Como se mencionó anteriormente el primer trabajo donde se realiza un estudio experimental y numérico de una cavity ocupada parcialmente por un medio poroso es el trabajo de Beckerman y *col.* (1998). Este autor caracteriza el flujo en el sistema considerado una configuración similar al presente trabajo y lo compara con sus resultados experimentales. En su trabajo los autores describen el efecto del flujo en la cavity y el medio poroso, sus resultados pueden compararse con los resultados obtenidos utilizando el programa *Cavpor* obteniendo resultados aproximados. Considerando un régimen laminar con valores de $Ra=10^4, 10^5, 10^6$ y valores de $Da= 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$, se varía la altura del medio poroso y se analiza el comportamiento del flujo, el número de Pr se mantiene constante. En la tabla se resumen los valores de Ra, Da y Y_{PH} para las distintas corridas realizadas.

Cuadro 6.4. Variación de los parámetros de Ra y Da.

Da	Ra	Y_{PH}
10^{-3}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.25
10^{-3}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.5
10^{-3}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.75
10^{-4}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.25
10^{-4}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.5
10^{-4}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.75
10^{-5}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.25
10^{-5}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.5
10^{-5}	$10^4, 10^5, 10^6$	0.75

En la Figura 6.14 se puede observar el efecto del incremento del número de Ra para la cavity cuando se incluye un medio poroso. Al incrementar el número de Ra existen un incremento en el transporte convectivo indicado por la estratificación de las isothermas tanto en la región fluida como en la región porosa. El vórtice de máximo valor se desplaza del centro de la

cavidad. De igual manera se presenta desplazamiento del flujo hacia las paredes concentrándose cerca de éstas.

En la Figura 6.15 se observa que conforme aumenta la altura Y_{PH} disminuye el valor de la línea de flujo máxima en el centro de la cavidad indicando una disminución en el flujo recirculante. Se rompe el efecto del vórtice elíptico para una altura de $Y_{PH}=0.75$ además de existir un desplazamiento del vórtice central hacia la parte superior de la cavidad rompiendo con la simetría, la concentración de líneas disminuye lo que indica menor movimiento cerca de las paredes, comparado con el caso cuando se tiene solo fluido en la cavidad.

Se observa también que al incluir el medio poroso las isothermas presentan un patrón vertical y más espaciado en la zona porosa, lo que significa que en el medio poroso existe disminución de la transferencia de calor por convección. También existe una disminución de las líneas de corriente de máximo valor y un alargamiento lo que indica menor movimiento en el centro de la cavidad comparado con el caso cuando se tiene solo fluido en la cavidad.

Revisando el efecto de la permeabilidad se comparan las isothermas y líneas de corriente en la Figura 6.16. Manteniendo el Ra constante se observa que al disminuir la permeabilidad del medio poroso existe menos flujo en la región porosa. Esto se observa cualitativamente al disminuir la densidad de líneas de corriente en la región porosa. Respecto a la distribución de temperaturas existe una modificación en el patrón de las isothermas. Para la menor permeabilidad existe un efecto en la transferencia por convección observándose un patrón vertical de isothermas indicando transporte principalmente por conducción. También se observa que el fluido queda “confinado” en la región fluida.

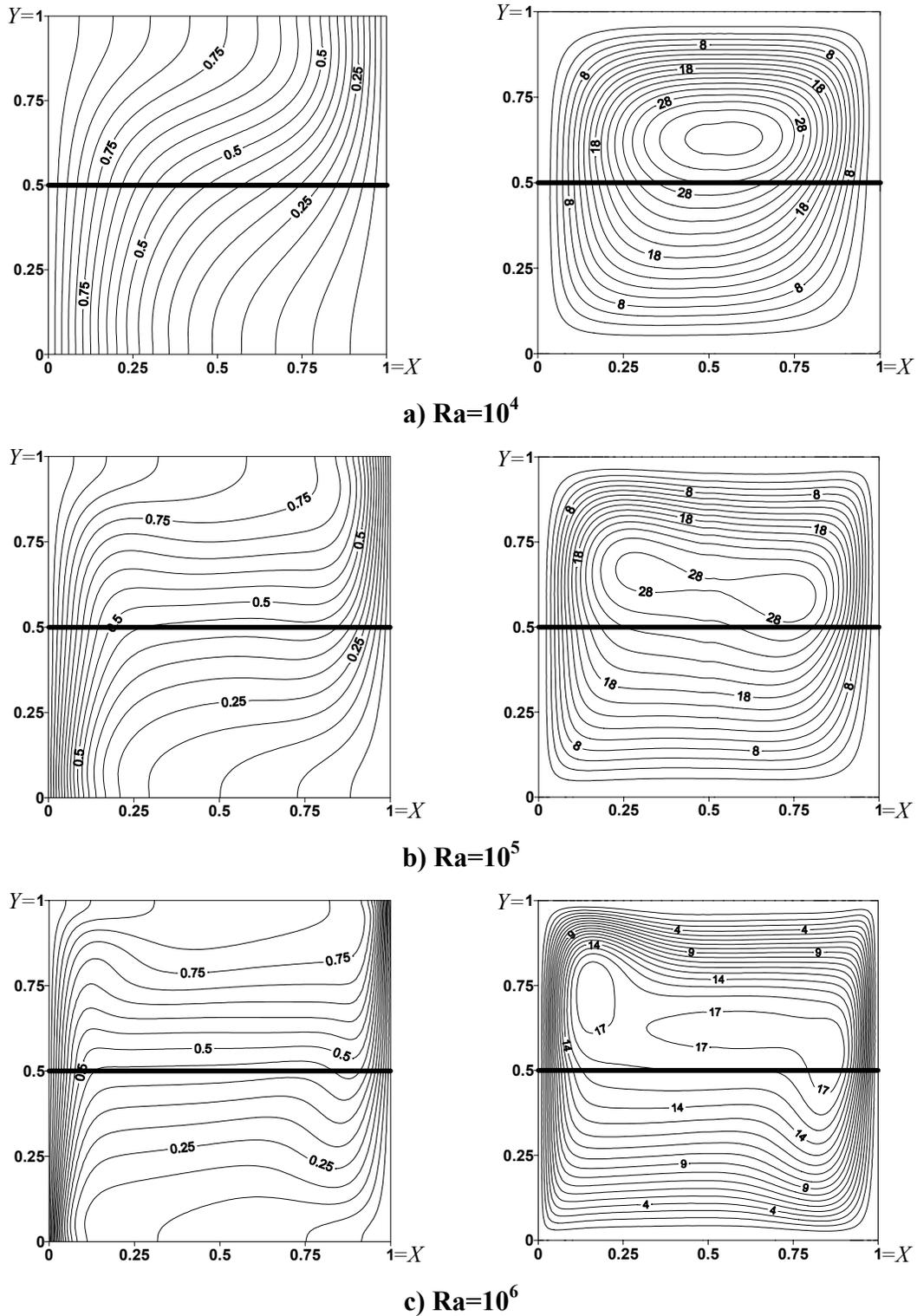


Figura 6.14 Isotermas (columna izquierda) y líneas de corriente (columna derecha). $Y_{PH}=0.5$, $Da=10^{-3}$.

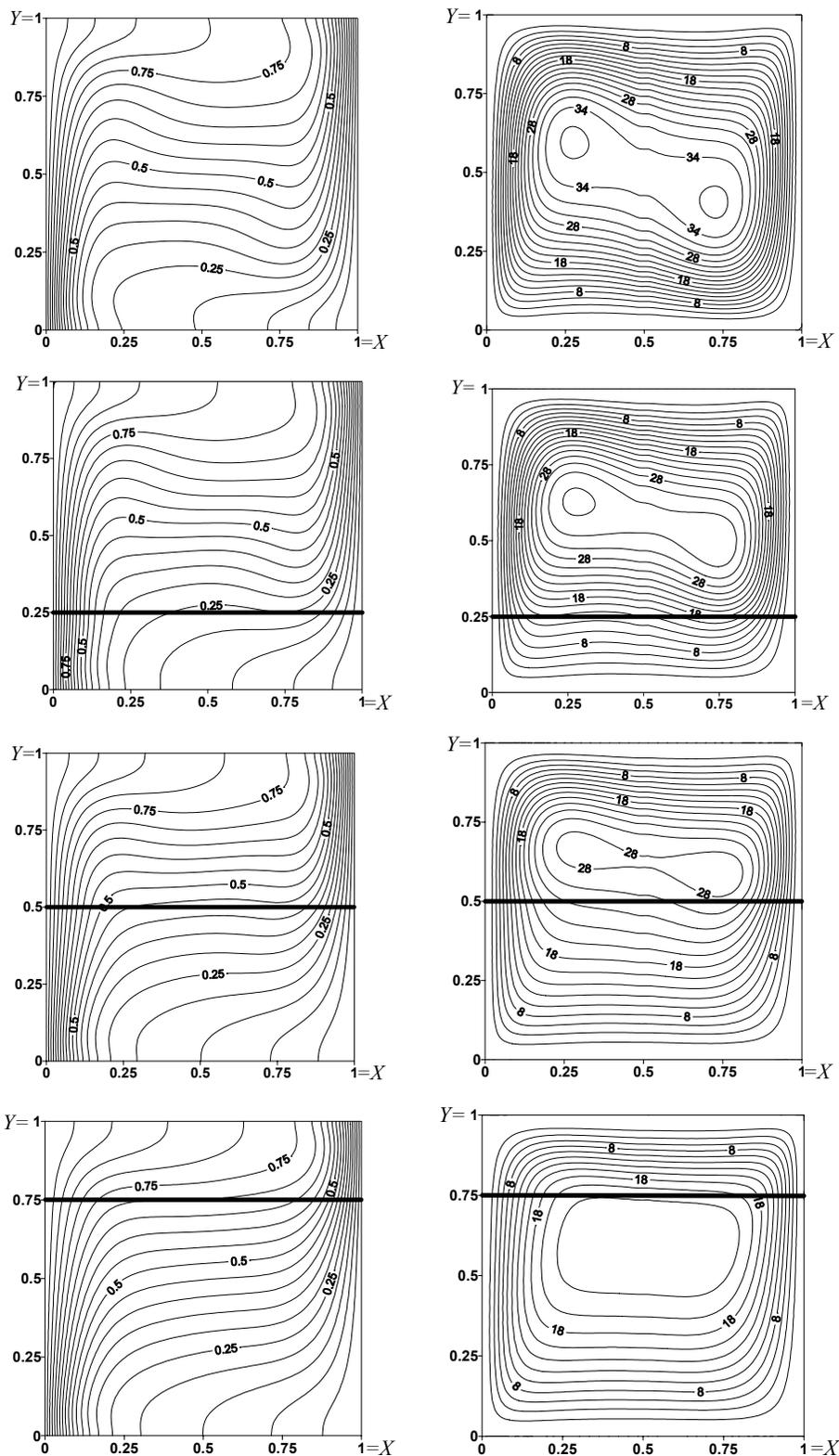


Figura 6.15 Efecto de la altura del medio poroso. $Ra=10^5, Da=10^{-3}$

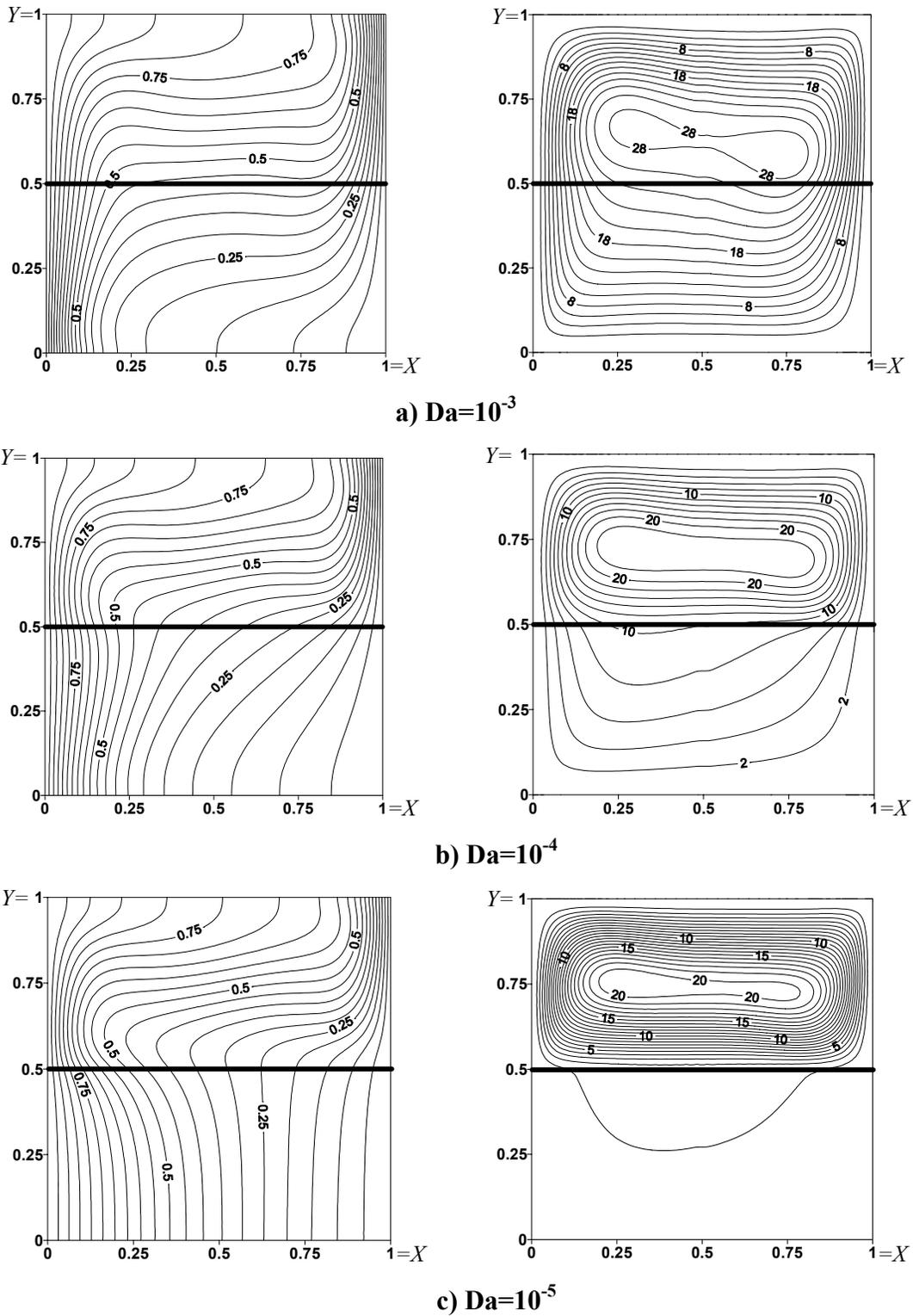


Figura 6.16. Efecto del número de Darcy. $Ra=10^5$, $Y_{PH}=0.5$.

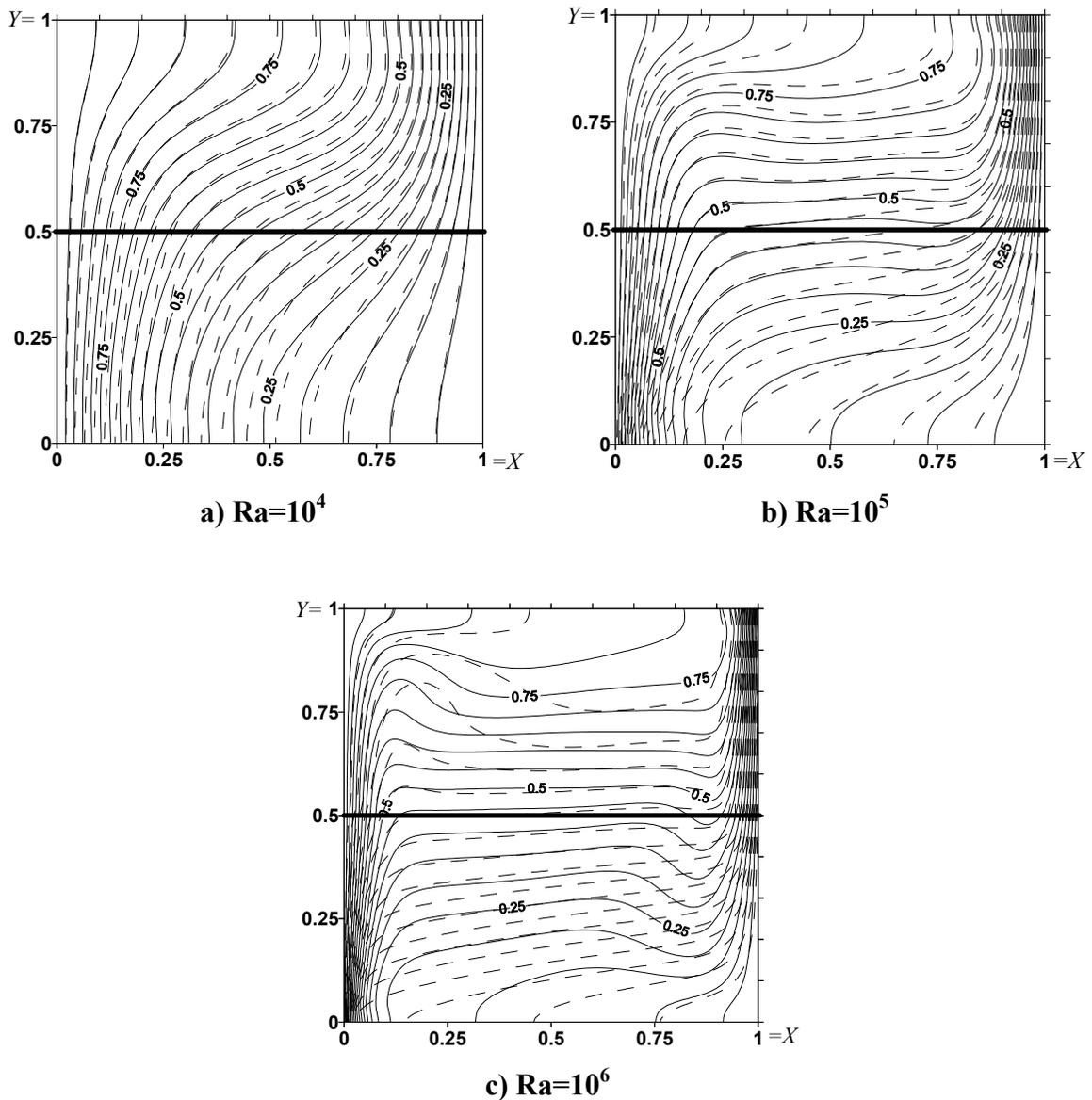


Figura 6.17. Isothermas para un valor de $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$. Las líneas continuas corresponden a este trabajo, las líneas punteadas corresponden al trabajo de Valencia y Ochoa (2001)

En las Figura 6.17 y 6.18, se comparan las isothermas obtenidas usando la aproximación de un solo dominio (este trabajo) y la aproximación de dos dominios acoplado el sistema de ecuaciones utilizando la condición de deslizamiento Beavers y Joseph [Valencia y Ochoa (2001)] para un régimen laminar.

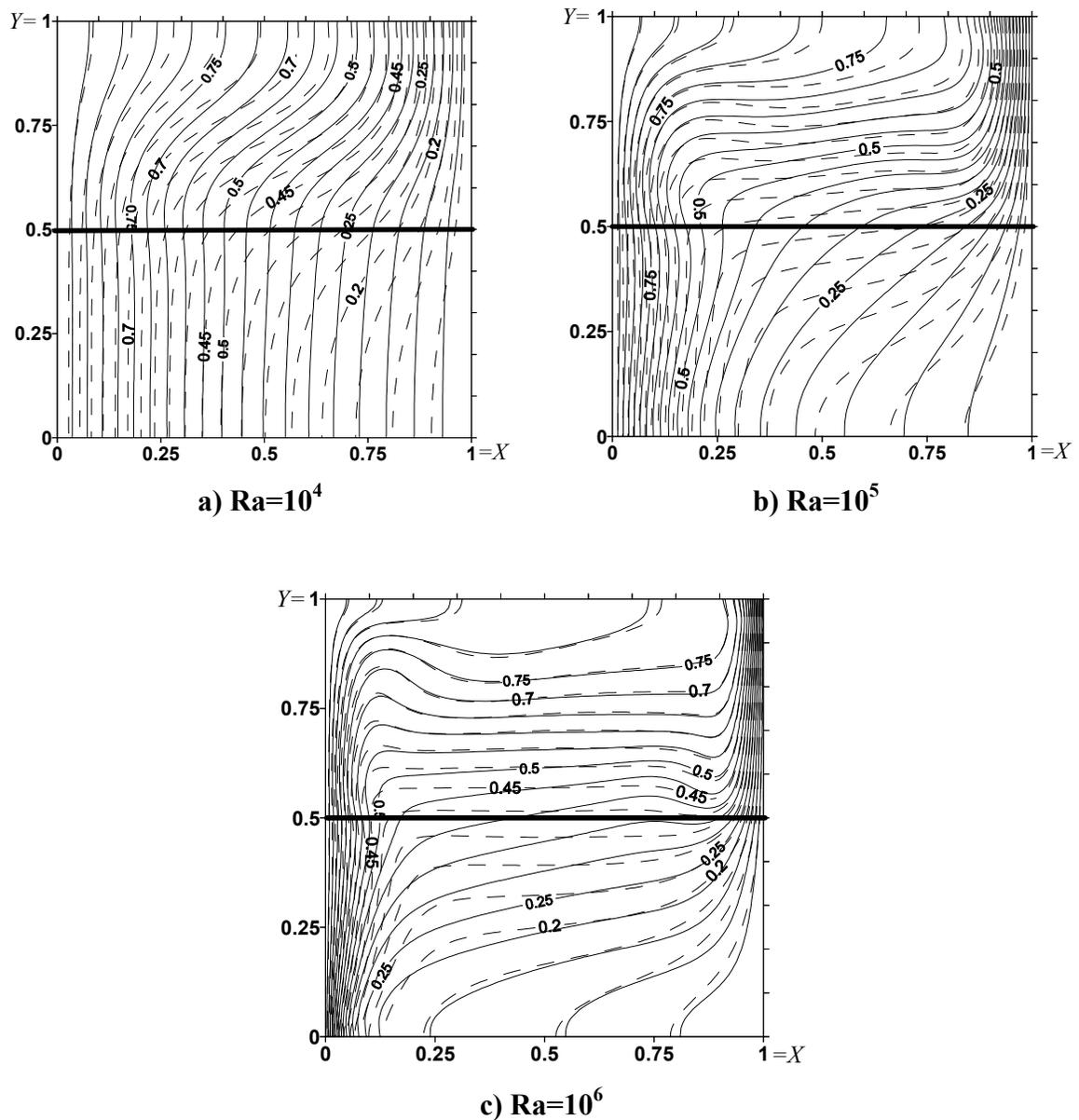


Figura 6.18. Isothermas para un valor de $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$. Las líneas continuas corresponden a este trabajo, las líneas punteadas corresponden al trabajo de Valencia y Ochoa (2001)

Se observa una diferencia significativa principalmente dentro de la zona de la región porosa, ésta diferencia se incrementa cuando la permeabilidad del medio poroso disminuye Figura 6.18. La diferencia es mayor en la zona del centro de la cavidad, cerca de las paredes se puede predecir un comportamiento similar utilizando ambas aproximaciones para resolver el sistema.

De manera similar se puede llevar a cabo un análisis del perfil de temperatura a una altura media en la cavidad. En las Figuras 6.19-6.21 se confirma que el efecto de disminuir la permeabilidad disminuye la transferencia de calor por convección. El gradiente de temperatura se da a lo largo de toda la cavidad conforme disminuye la permeabilidad. Al aumentar el Ra se observa que el gradiente de temperatura es mayor cerca de las paredes cuando $Da=10^{-3}$, lo que no sucede cuando ha disminuido el valor de Da indicando el efecto del transporte por conducción.

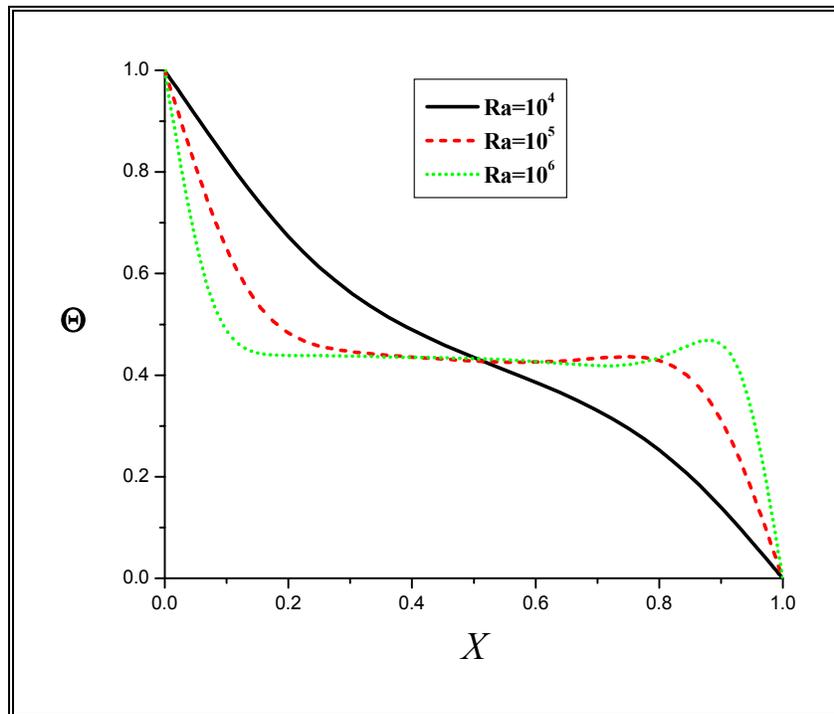


Figura 6.19. Flujo laminar, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

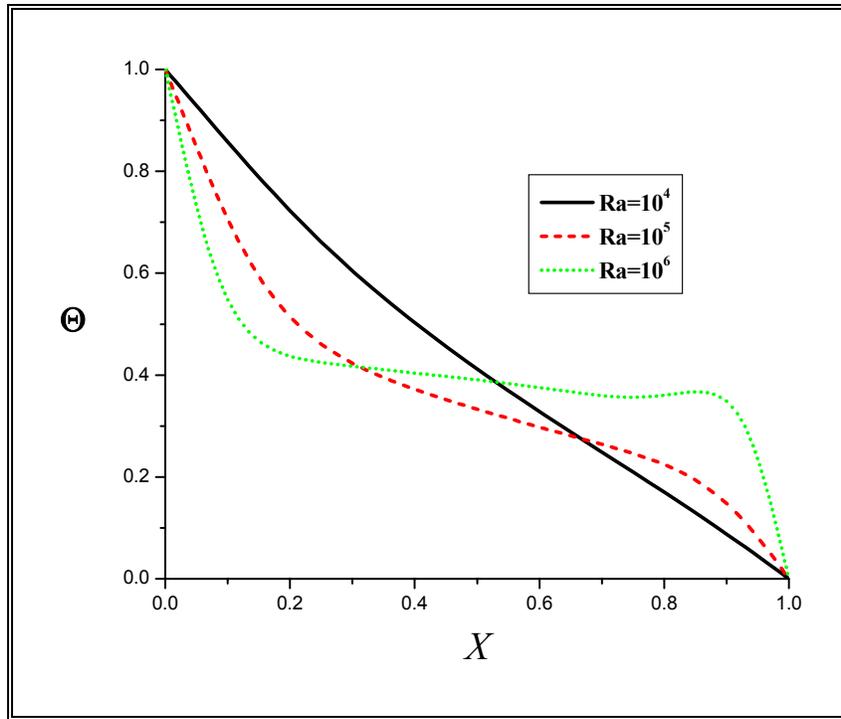


Figura 6.20. Flujo laminar, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

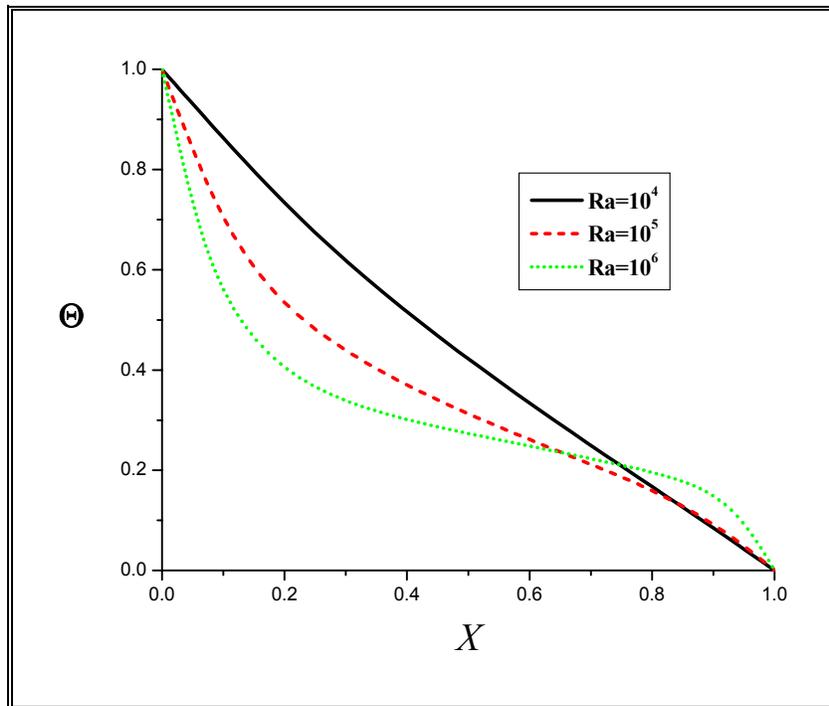


Figura 6.21. Flujo laminar, $Da=10^{-5}$, $Y_{PH}=0.5$

También se puede observar el perfil de velocidad horizontal a la interfase. En las Figuras 6.22 -6.24 se observa un comportamiento similar a la velocidad en la cavidad con solo fluido, existe una disminución significativa de la velocidad máxima conforme disminuye la permeabilidad.

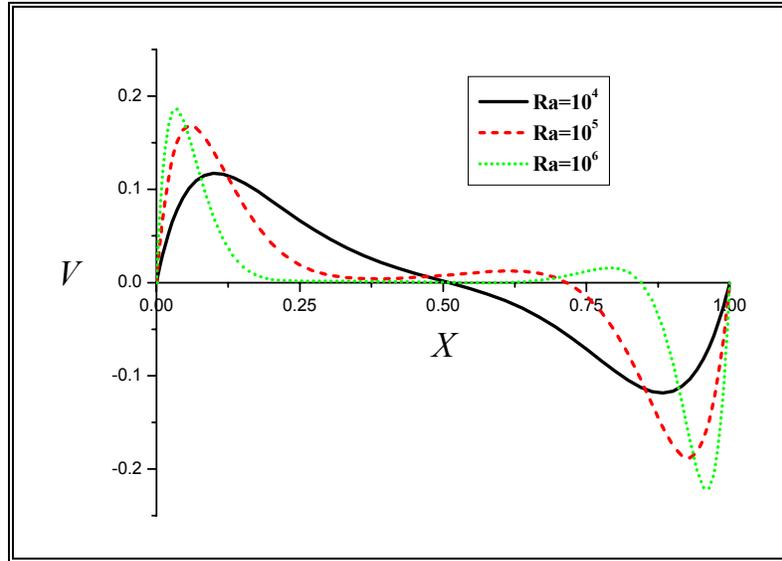


Figura 6.22. Flujo laminar, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

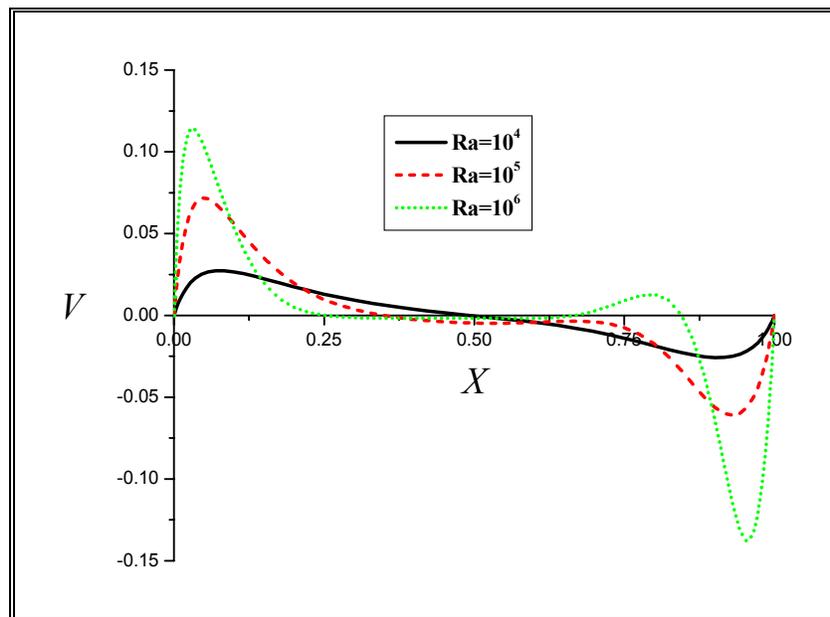


Figura 6.23. Flujo laminar, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

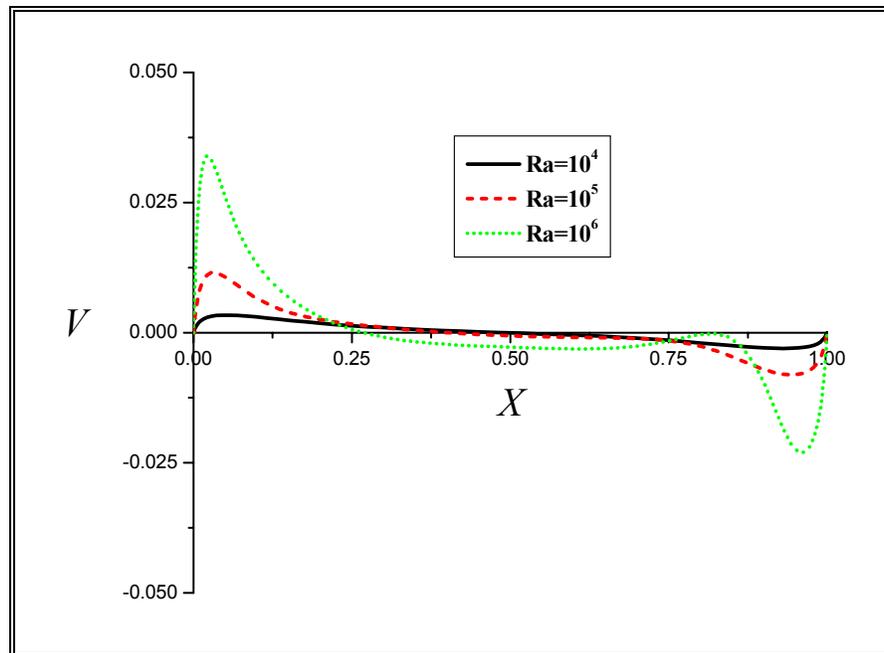


Figura 6.24. Flujo laminar, $Da=10^{-5}$, $Y_{PH}=0.5$

Tal vez el efecto más importante es el que se observa en la velocidad tangencial a la interfase. Como se observó en la cavidad vacía el flujo horizontal es completamente parabólico existiendo un punto de inversión a una altura media de la cavidad. La presencia del medio poroso modifica el comportamiento del flujo tangencial. En las Figuras 6.25-6.27 se observa como se modifica el flujo al variar la permeabilidad del medio. Entre menor sea la permeabilidad, la velocidad en el medio poroso disminuye considerablemente en comparación con la del fluido, esto concuerda con lo que se observa en el patrón de líneas de corriente cuando disminuye la densidad de líneas en el medio poroso. De acuerdo con lo que se mencionó anteriormente Beavers y Joseph (1967) proponen que existe una capa límite dentro del medio poroso, en la zona de la inter-región, donde la velocidad disminuye drásticamente hasta alcanzar un valor de la velocidad de filtrado, esto es la velocidad que se obtiene de resolver la ecuación de Darcy. A diferencia del flujo esquematizado en la Figura 3.1, dentro de la zona porosa, lejos de la inter-región, existe un ligero incremento de la velocidad cerca de la pared inferior del sistema. La magnitud de esta velocidad puede ser significativamente menor para valores de $Da=10^{-3}$ y 10^{-4} comparada con la velocidad de en la región fluida.

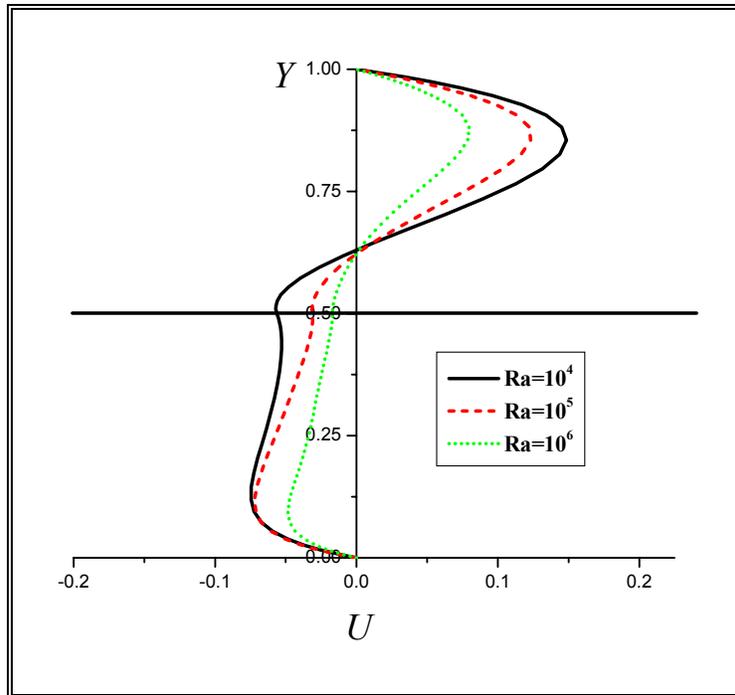


Figura 6.25. Flujo laminar, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

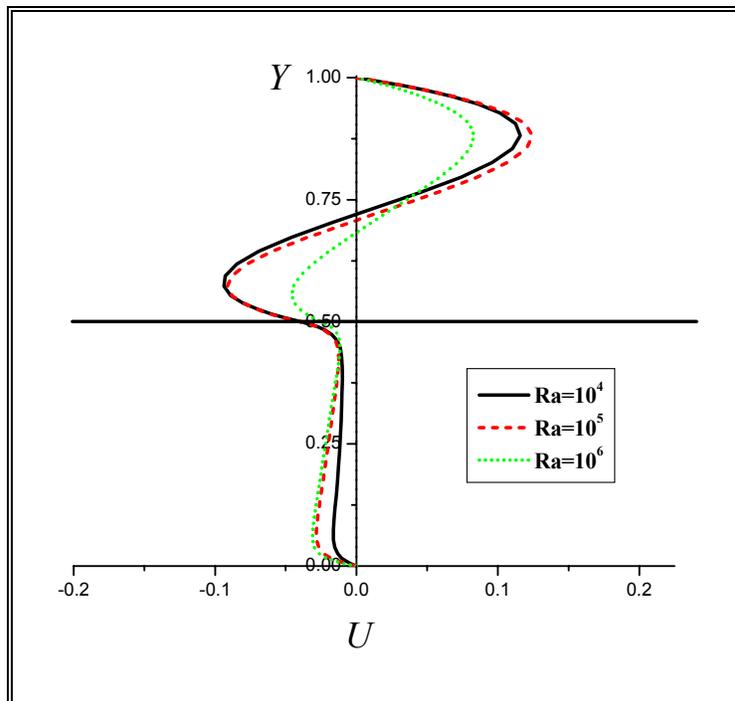


Figura 6.26 Flujo laminar, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

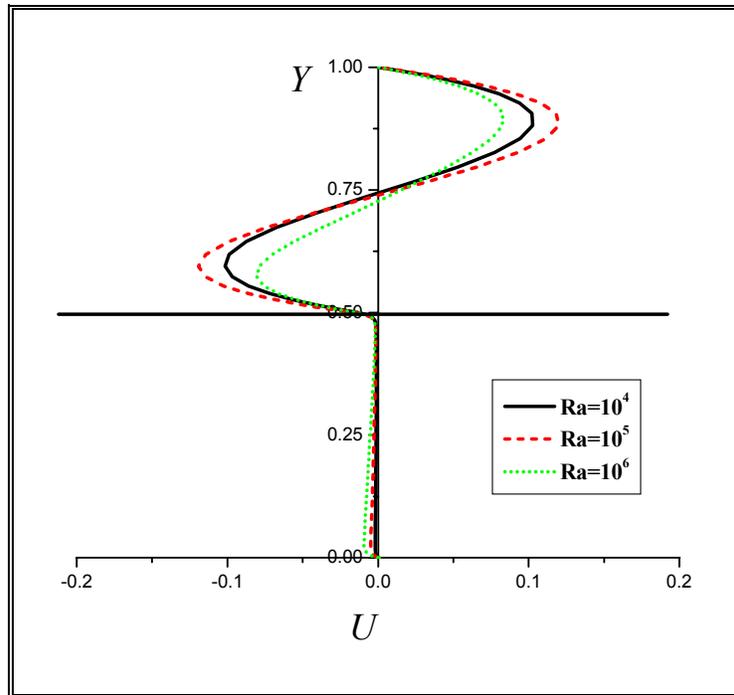


Figura 6.27 Flujo laminar, $Da=10^{-5}$, $Y_{PH}=0.5$

6.2.2 Flujo turbulento

El listado *Cavpor* es una modificación del listado *Natcon*, y como se mencionó anteriormente, de este último listado se obtuvieron los resultados presentados en la sección anterior. Para el caso del cálculo con valores de Ra mayores de 10^6 se utiliza la aproximación de flujo turbulento activando las ecuaciones del modelo $k-\varepsilon$ para números de Reynolds pequeños. El listado se modificó agregando los términos adicionales de Darcy y Forchheimer para el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$, siguiendo las aproximaciones de Prescott e Incropera (1995), Chen, Li y Thorpe (1998).

En la Figura 6.28 se muestran las isothermas y las líneas de corriente para el caso turbulento. En las isothermas se observa la estratificación de la temperatura en la cavidad. Comparando las isothermas con las de la cavidad Figura 6.2 se observa que disminuye la intensidad del vórtice en las esquinas superiores e inferiores. También se observa el efecto de capa límite con el incremento de la densidad de líneas en el flujo. Conforme aumenta el número de Ra existe la aparición del vórtice con la misma cualidad de la turbulencia pero disminuye su intensidad en el medio poroso.

Revisando el efecto de la permeabilidad (Figura 6.29) el comportamiento es similar al del caso laminar: un efecto en la disminución de la turbulencia pero con una mayor distribución de flujo dentro del medio poroso.

Por otro lado en la Figura 6.30 se observa el efecto de la altura del medio poroso. Se observa la existencia de la estratificación de temperatura con el subsiguiente desplazamiento de las isothermas lo que indica que es mayor el gradiente dentro de la región fluida. La estratificación del medio indica que existe menor movimiento del fluido en el centro de la cavidad e indica también que el transporte convectivo entre la pared caliente y la pared fría es mínimo. La conducción de calor es favorable en la dirección vertical

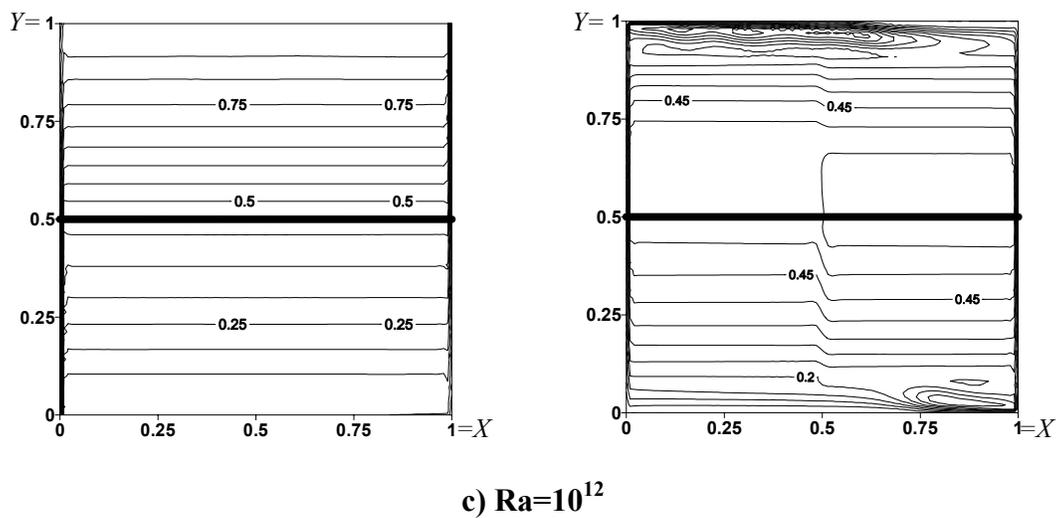
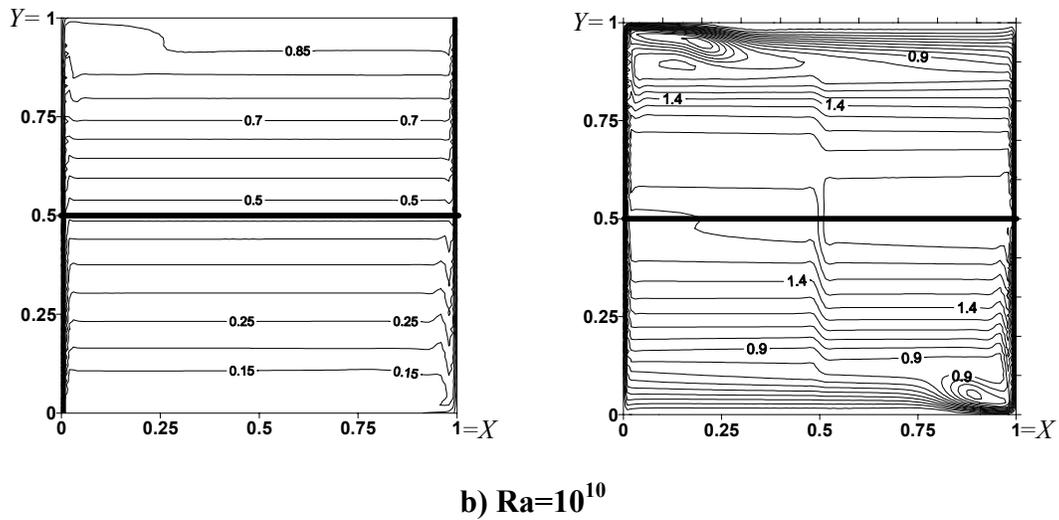
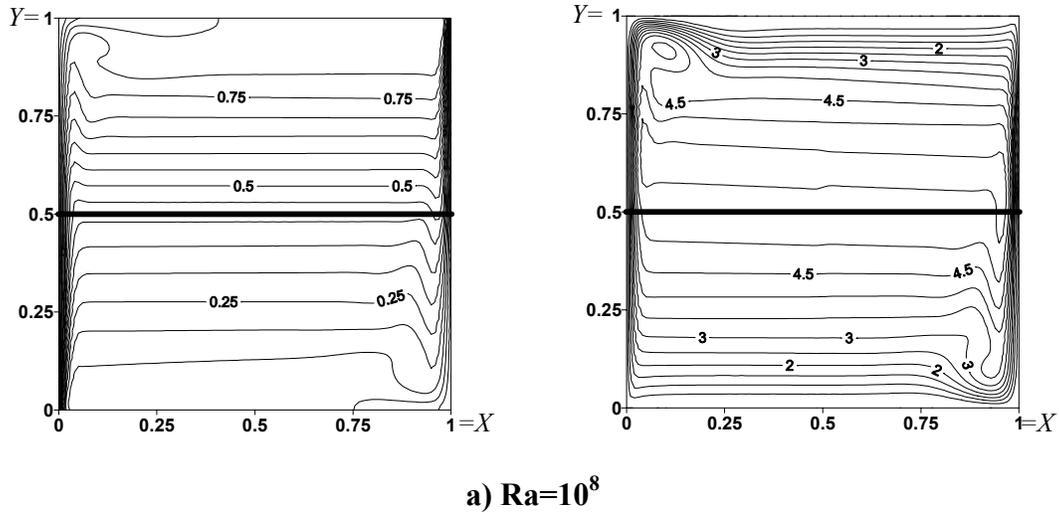


Figura 6.28 Isothermas (columna izquierda) y líneas de corriente (columna derecha). $Y_{PH}=0.5$, $Da=10^{-3}$.

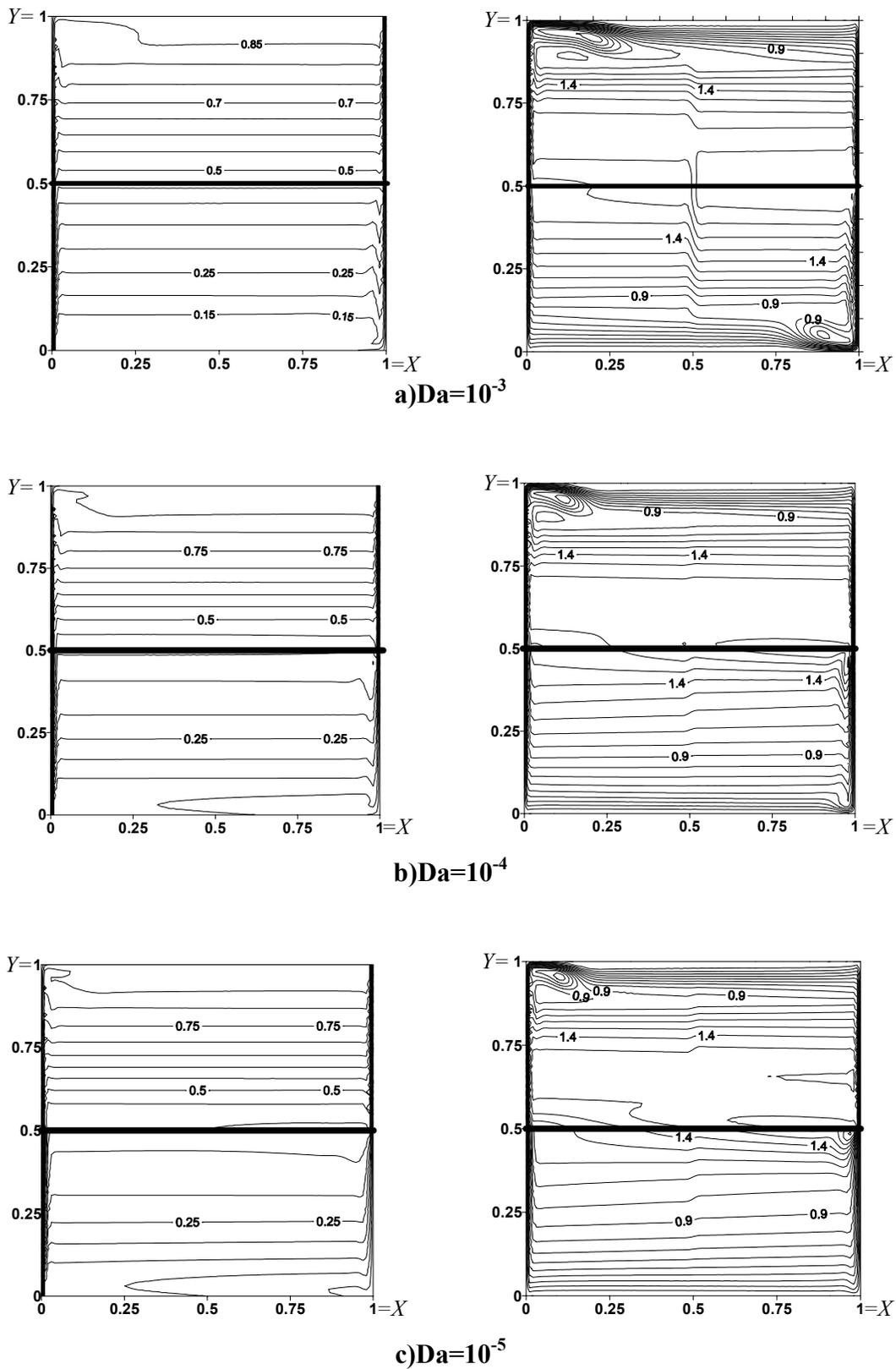


Figura 6.29 Isotermas y líneas de corriente, $Y_{PH}=0.5$, $Ra=10^{10}$.

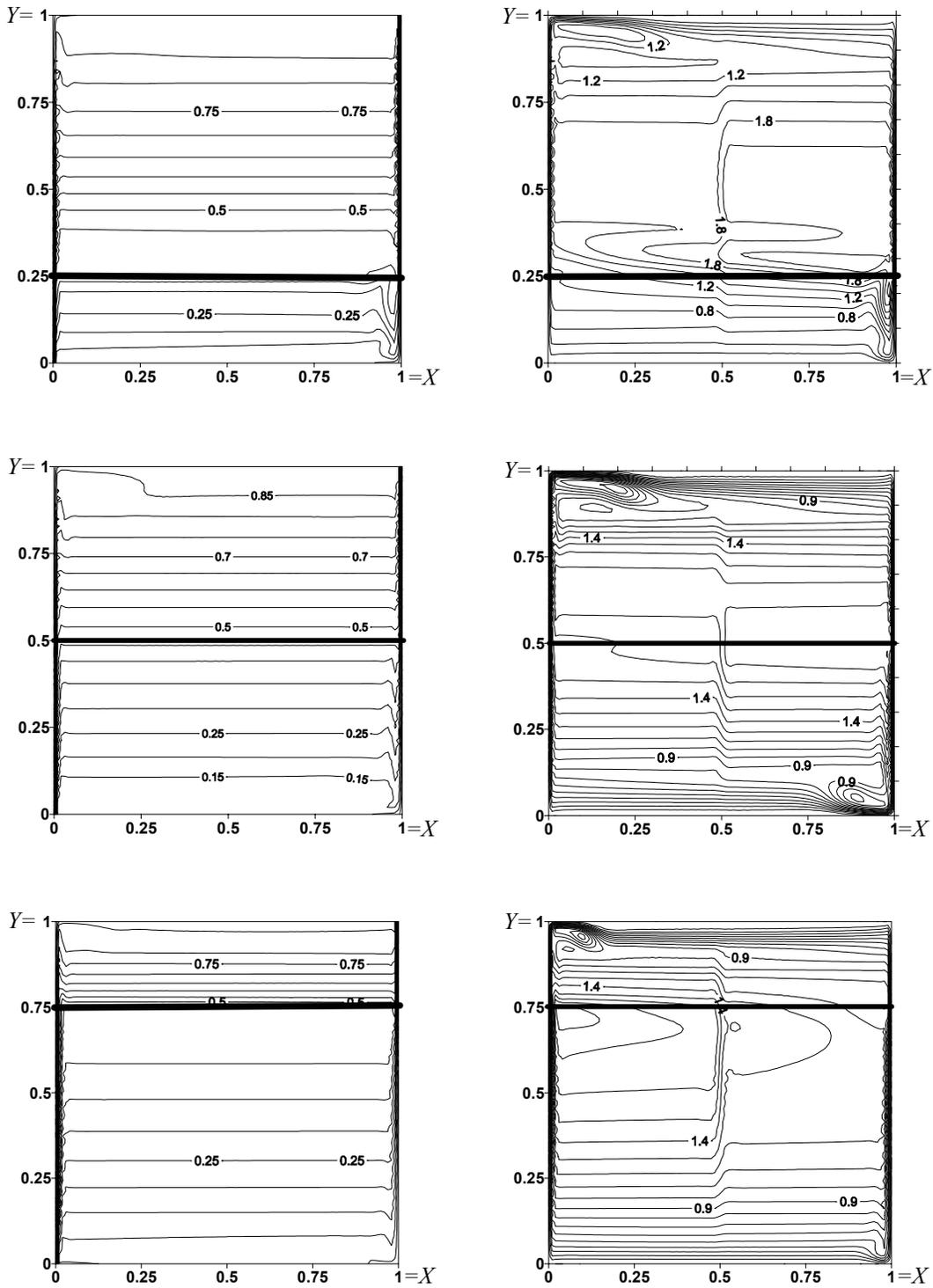


Figura 6.30 Efecto de la variación de la altura del medio poroso. $Ra=10^{10}$, $Da=10^{-4}$

Por otro lado también se observa la estratificación de la temperatura en las Figuras 6.31-6.33. También se observa que los gradientes de temperatura se dan en una zona muy cercana a la pared, en el centro de la cavidad la temperatura permanece constante.

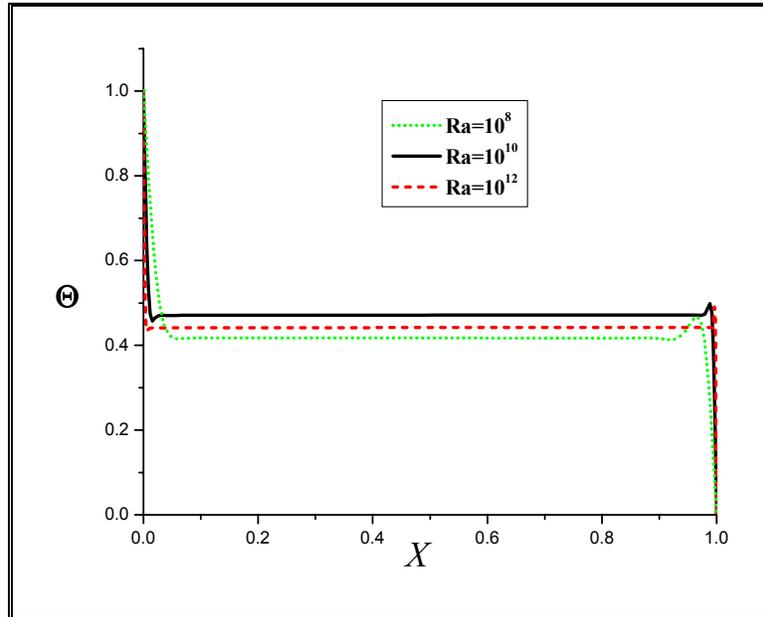


Figura 6.31. Perfil de temperaturas. $Y=0.5$, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

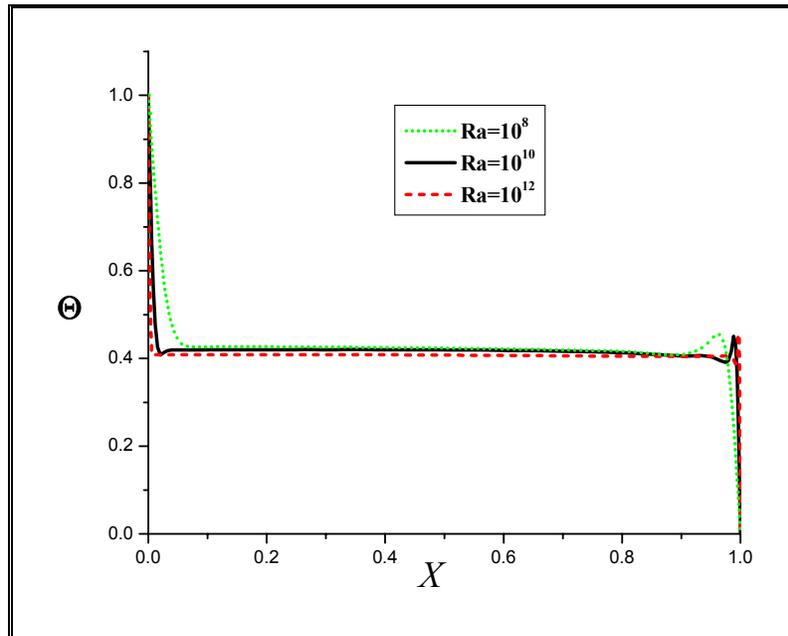


Figura 6.32. Perfil de temperaturas. $Y=0.5$, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

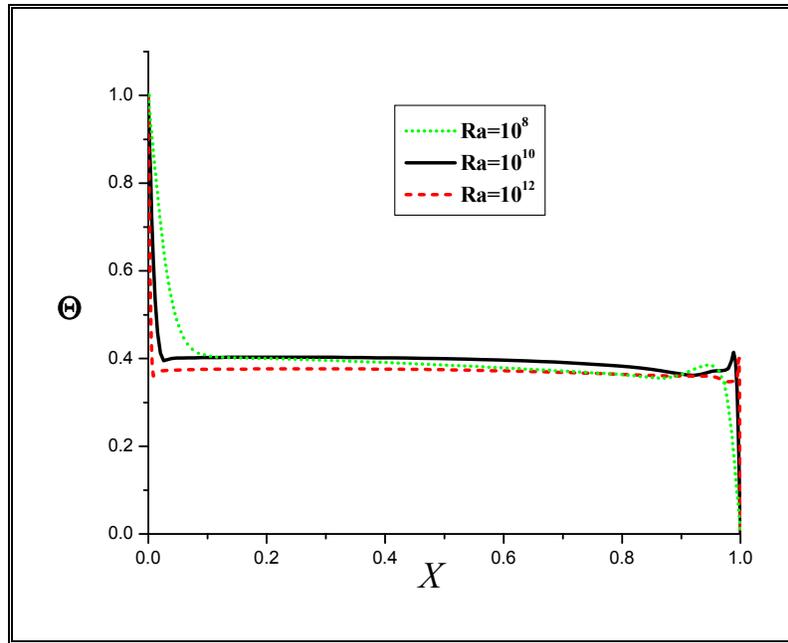


Figura 6.33. Perfil de temperaturas. $Y=0.5$, $Da=10^{-5}$, $Y_{PH}=0.5$

De igual manera se observa la velocidad en la dirección Y . Se observa una disminución de la velocidad conforme aumenta la permeabilidad del medio poroso.

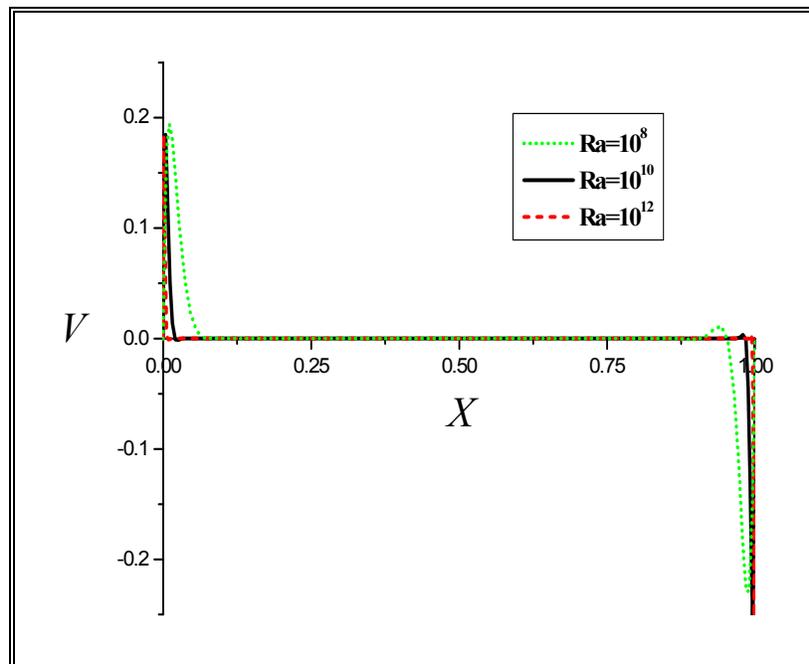


Figura 6.34. Perfil de la velocidad V . $Y=0.5$, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

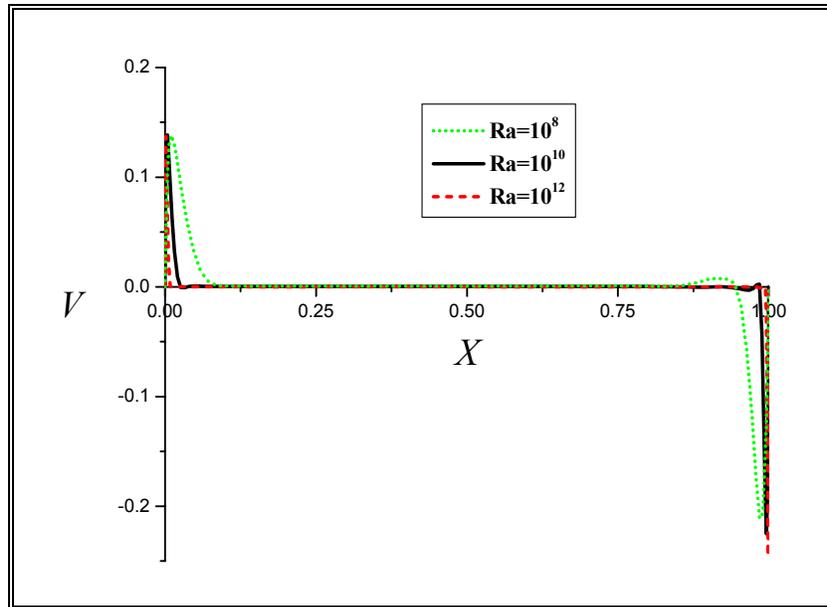


Figura 6.35. Perfil de la velocidad V . $Y=0.5$, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

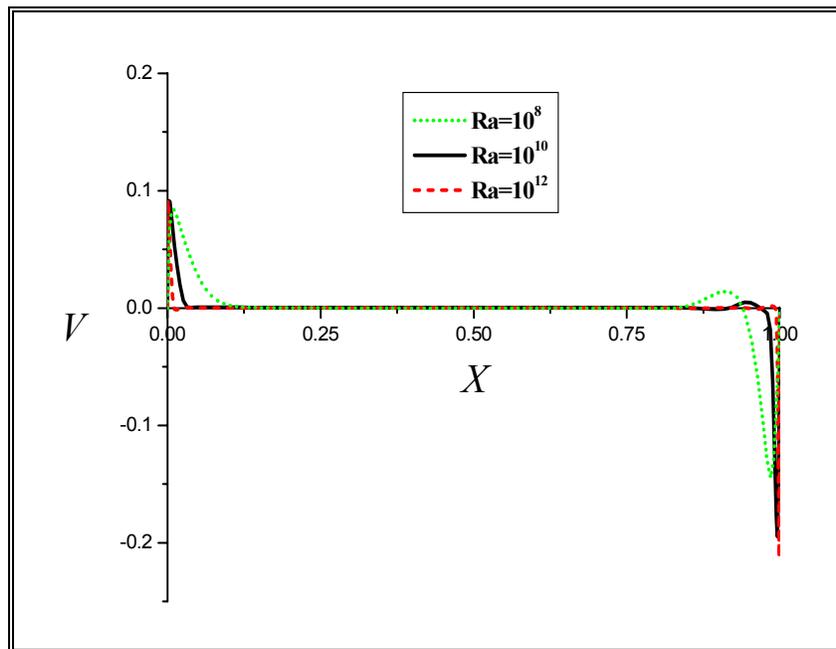


Figura 6.36. Perfil de la velocidad V . $Y=0.5$, $Da=10^{-5}$, $Y_{PH}=0.5$

De igual manera para la velocidad en la dirección X se observa un efecto interesante, comparando las Figuras 6.37-6.39 con la Figura 6.8 se observa el efecto de los esfuerzos cortantes sobre la distribución de la velocidad cercana a la pared superior e inferior pero con una

disminución de la velocidad por efecto de la presencia del medio poroso. Conforme disminuye la permeabilidad en la interfase se tiene un comportamiento similar de la velocidad al de las paredes.

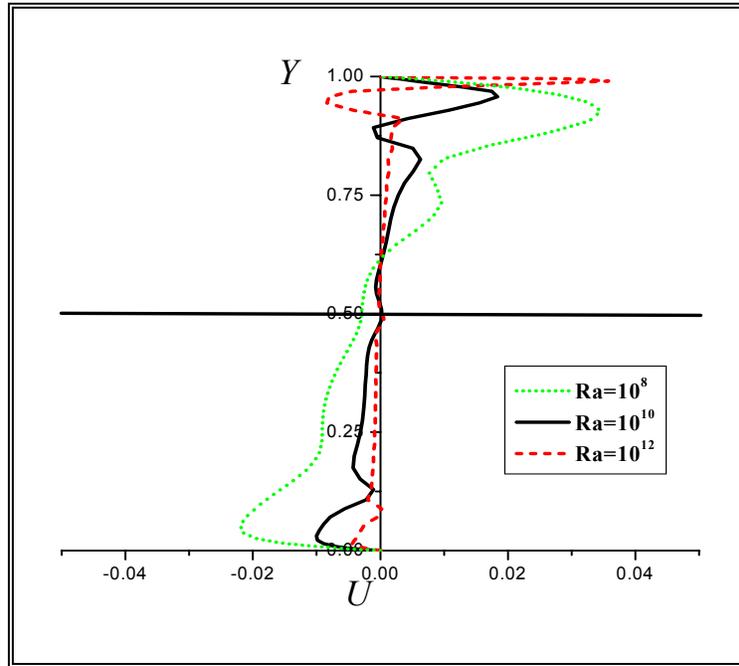


Figura 6.37. Perfil de la velocidad U . $X=0.5$, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

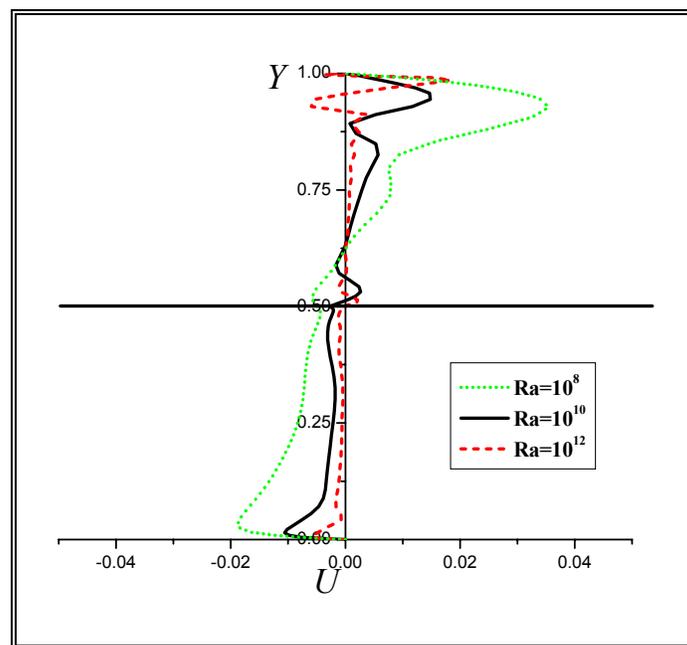


Figura 6.38. Perfil de la velocidad U . $X=0.5$, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

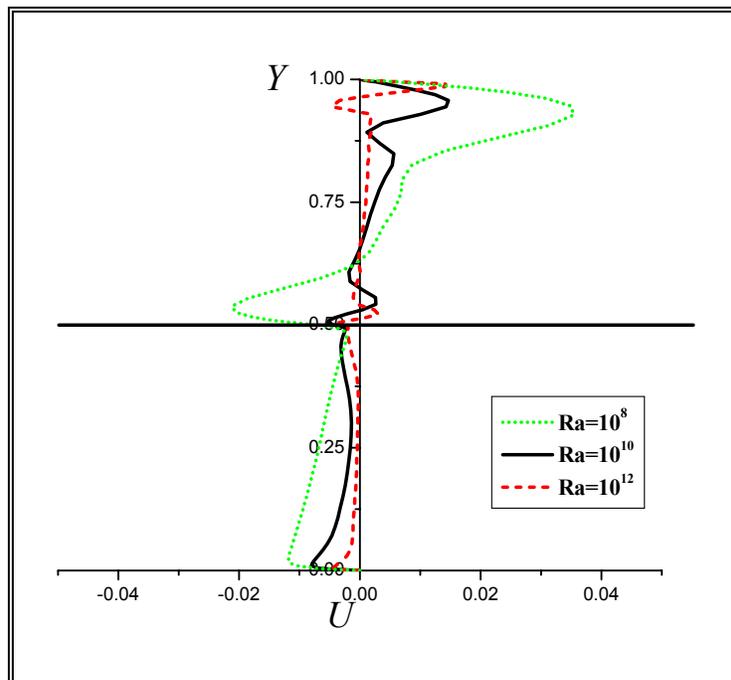


Figura 6.39. Perfil de la velocidad U . $X=0.5$, $Da=10^{-5}$, $Y_{PH}=0.5$

6.2.3 Número de Nusselt en las paredes.

Con el perfil de temperaturas de la solución se estima el número de Nusselt local y promedio en la pared caliente y la pared fría definidos por las ecuaciones (4.41) y (4.42) respectivamente. Este parámetro además de ser de utilidad práctica en ingeniería se utiliza como parámetro de comparación entre soluciones de sistemas de dos regiones considerando la aproximación de uno o dos dominios. Al respecto, Valencia y Ochoa (2001) utilizaron la formulación vorticidad-vector potencial para resolver el problema tridimensional en una cavidad cuadrada fluido-medio poroso utilizando la aproximación de dos dominios. Sus resultados fueron comparados con los obtenidos por Singh y col. (1993), quienes utilizaron la aproximación de un solo dominio. Existe una diferencia en las predicciones entre ambas aproximaciones. En este caso en las figuras 6.40, 6.41, 6.44 y 6.45 se comparan los valores del Nu local entre este trabajo y el de Valencia y Ochoa (2001). Se observa que existe una diferencia entre las predicciones del valor de Nu local en la pared.

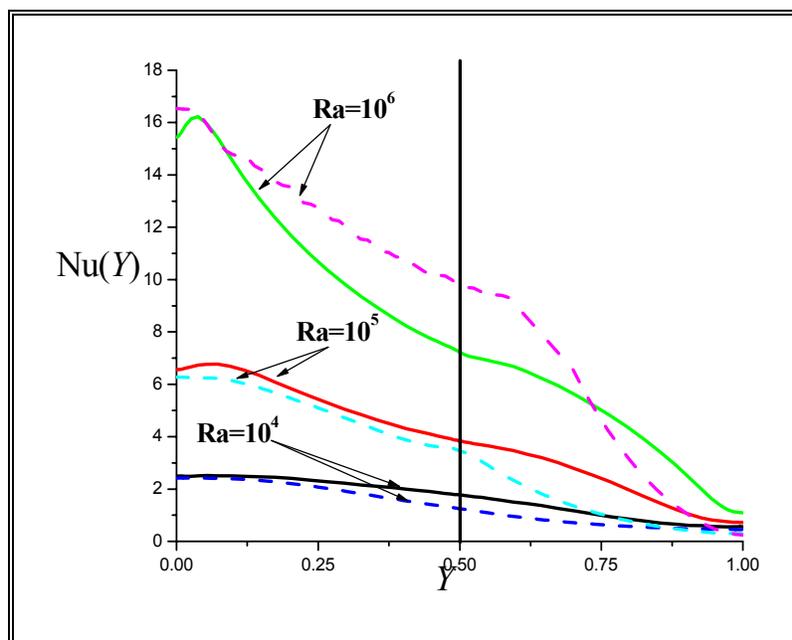


Figura 6.40. Nusselt local en la pared caliente, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$. Las líneas continuas corresponden a este trabajo, las líneas punteadas corresponden al trabajo de Valencia y Ochoa (2001)

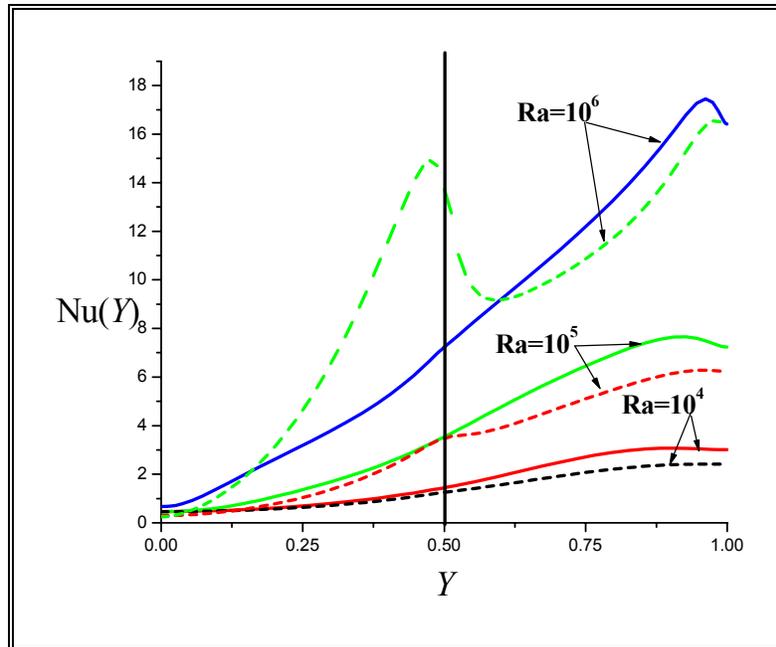


Figura 6.41. Nusselt local en la pared fría, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$. Las líneas continuas corresponden a este trabajo, las líneas punteadas corresponden al trabajo de Valencia y Ochoa (2001)

En lo que respecta al Nusselt local en las paredes para $Ra > 10^6$ se observa un comportamiento análogo al del régimen laminar: un incremento del número de Nusselt conforme aumenta el Ra . Otras características son los cambios súbitos dentro de una región próxima a las paredes superior e inferior.

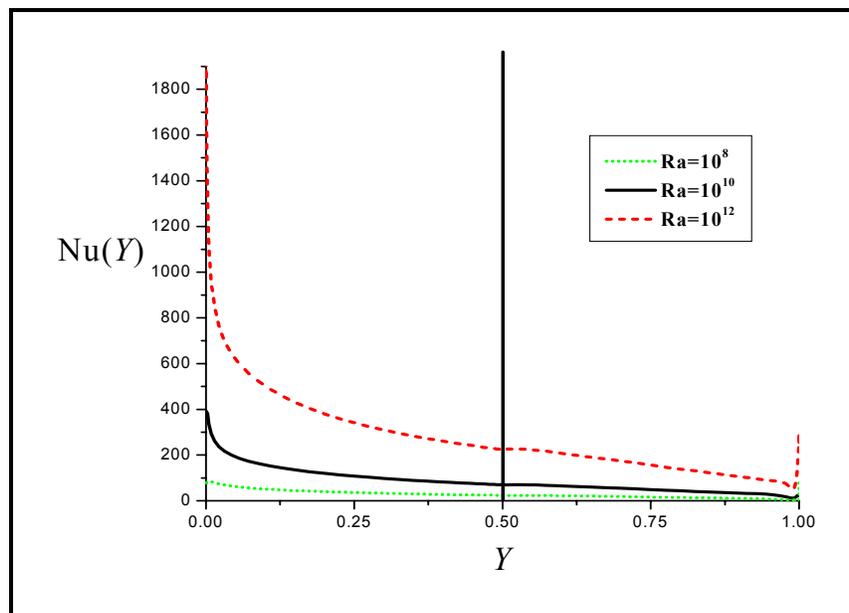


Figura 6.42. Nusselt local en la pared caliente, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

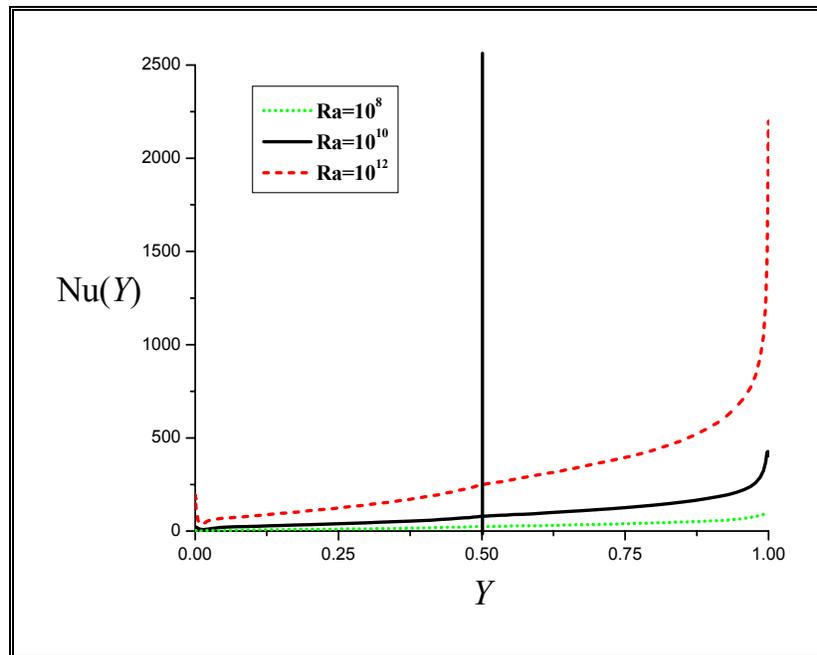


Figura 6.43. Nusselt en la pared fría, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$

Al disminuir la permeabilidad (figuras 6.44-6.47) se observa la aparición de un máximo en la región fluida para $Ra >$ de 10^4 , lo que indica que existe mayor transporte de calor por convección en la región fluida en una zona cercana a la interfase.

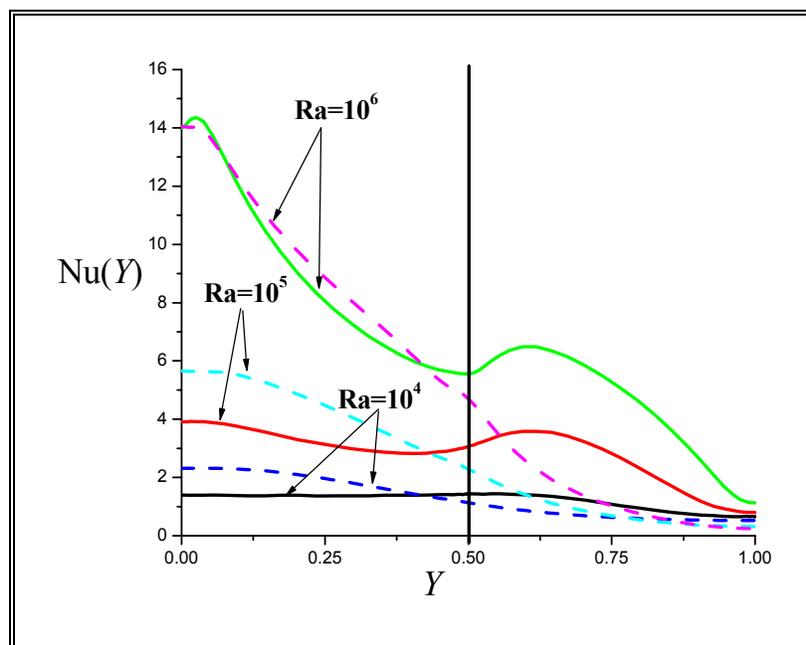


Figura 6.44. Nusselt local en la pared caliente, Da^{-4} , $Y_{PH}=0.5$ Nusselt local en la pared caliente, $Da=10^{-3}$, $Y_{PH}=0.5$. Las líneas continuas corresponden a este trabajo, las líneas punteadas corresponden al trabajo de Valencia y Ochoa (2001)

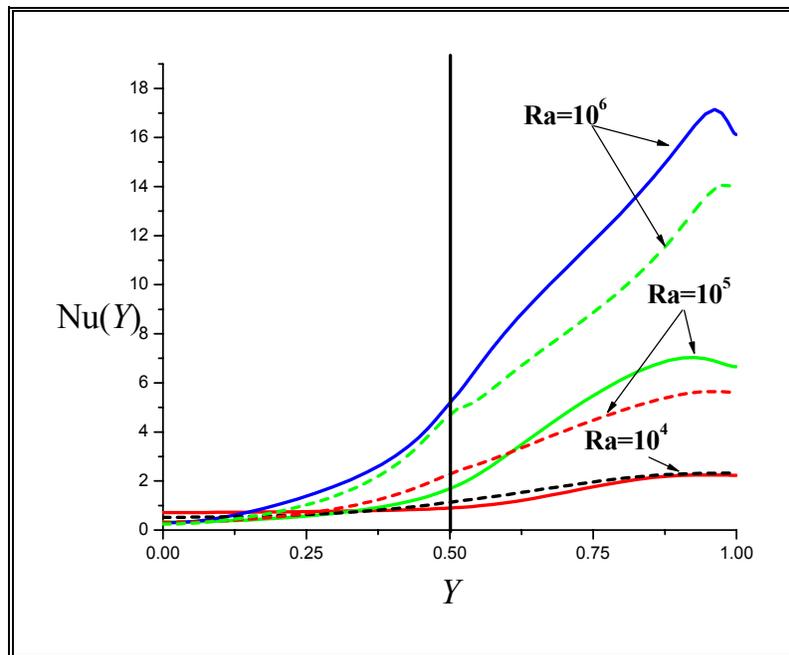


Figura 6.45. Nusselt local en la pared fría, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$ Nusselt local en la pared caliente, $Da=10^{-3}$, $Y_{HP}=0.5$. Las líneas continuas corresponden a este trabajo, las líneas punteadas corresponden al trabajo de Valencia y Ochoa (2001)

El comportamiento dentro de un máximo en la región fluida también se puede observar en las Figuras 6.46 y 6.47, sin embargo no es tan significativo como en el caso laminar.

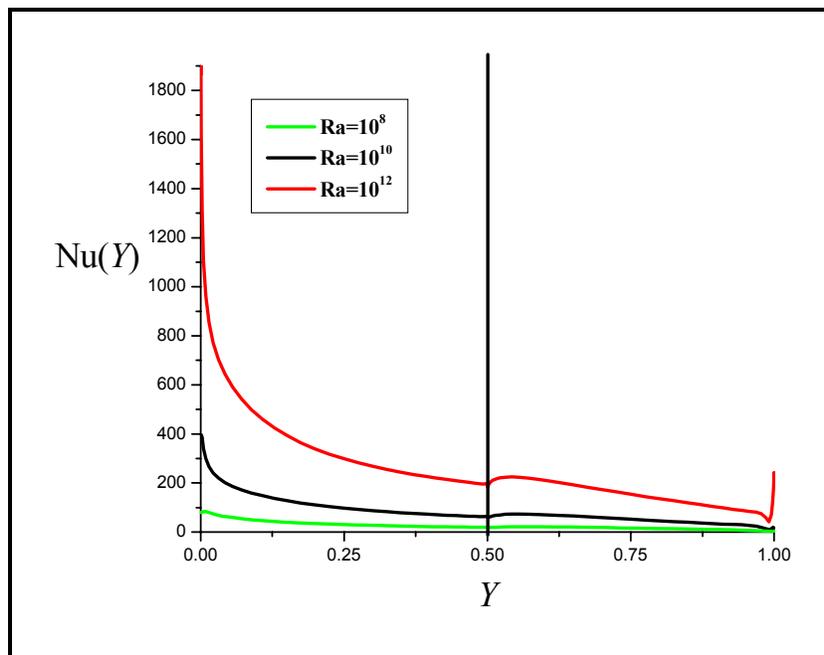


Figura 6.46. Nusselt local en la pared caliente, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

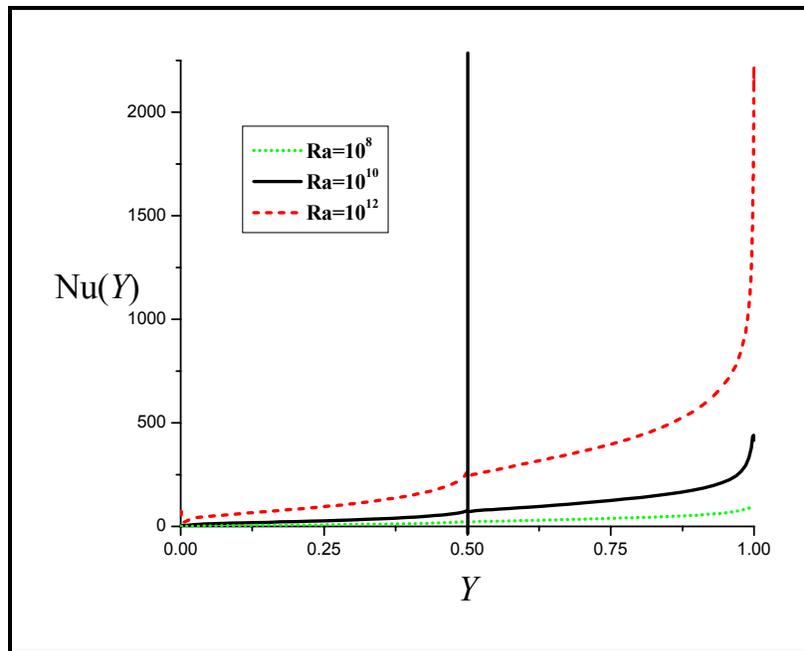


Figura 6.47. Nusselt local en la pared fría, $Da=10^{-4}$, $Y_{PH}=0.5$

Las predicciones del número de Nusselt promedio en las paredes se muestran en el Cuadro 6.5. Existen discrepancias en el número de Nusselt entre la pared fría y la pared caliente para $Ra > 10^8$, sin embargo estas no son mayores al 5% de error por lo que se consideran los valores de la pared caliente para realizar las correlaciones.

Cuadro 6.5. Nusselt promedio en las paredes caliente y fría. $Y_{PH}=0.5$

	Nu	
	Pared caliente X=0	Pared fría X=1.0
Da=10⁻³		
Ra=10 ⁴	1.653	1.653
Ra=10 ⁵	3.861	3.855
Ra=10 ⁶	7.914	7.884
Ra=10 ⁸	27.91	27.49
Ra=10 ¹⁰	86.65	91.46
Ra=10 ¹²	278.7	291.1
Da=10⁻⁴		
Ra=10 ⁴	1.225	1.225
Ra=10 ⁵	2.862	2.871
Ra=10 ⁶	6.72	6.748
Ra=10 ⁸	25.69	25.93
Ra=10 ¹⁰	84.36	85.71
Ra=10 ¹²	261.8	279.5
Da=10⁻⁵		
Ra=10 ⁴	1.161	1.157
Ra=10 ⁵	2.442	2.445
Ra=10 ⁶	5.181	5.216
Ra=10 ⁸	22.75	22.93
Ra=10 ¹⁰	77.5	80
Ra=10 ¹²	272.5	262.4

La correlación tiene la forma potencial de la Ecuación. (6.2), el Nu es función del Ra . Los datos se comparan con los trabajos mencionados anteriormente. Los valores son para un caso bidimensional. Del Cuadro 6.6 se observan diferencias entre los valores de a y b , y no se observa un comportamiento comparativo que pudiera contribuir a definir cual de las aproximaciones utilizadas en la solución (uno o dos dominios) se acerca a la solución del presente trabajo.

Cuadro 6.6. Comparación de los valores de a y b de la correlación $Nu=aRa^b$. $Y_{PH}=0.5$

	$Da=10^{-3}$		$Da=10^{-4}$		$Da=10^{-5}$		Intervalo
	a	b	a	b	a	b	
Este trabajo	0.0737	0.3401	0.0407	0.3696	0.0582	0.3248	$10^4 < Ra < 10^6$
Valencia y Ochoa (2001)	0.0322	0.4237	0.0824	0.3206	-----	-----	$10^4 < Ra < 10^6$
Singh y col. (1993)	0.0724	0.3394	0.0885	0.3105	-----	-----	$10^4 < Ra < 10^6$
Este trabajo	0.1599	0.2735	0.1054	0.2886	0.0825	0.2967	$10^4 < Ra < 10^{12}$

6.2.4 Número de Nusselt en la interfase.

Para cumplir con los objetivos del presente trabajo se realizan los cálculos del número de Nusselt en la interfase. En las figuras 6.49-6.54 se grafica el número de Nu local en la interfase calculado por la relación (4.47). En las Figuras 6.49-6.51 se observa el comportamiento del Nu local en la inter-región cuando disminuye la permeabilidad. Para describir el comportamiento de la transferencia de calor en esta zona es necesario esquematizar el perfil de temperatura estimado en la interfase. Cuando el gradiente es positivo existe una transferencia de calor de la interfase hacia la región porosa (Ver Figura 6.48). El caso contrario, cuando el signo del gradiente es negativo existe una transferencia de calor de la interfase hacia la región fluida.

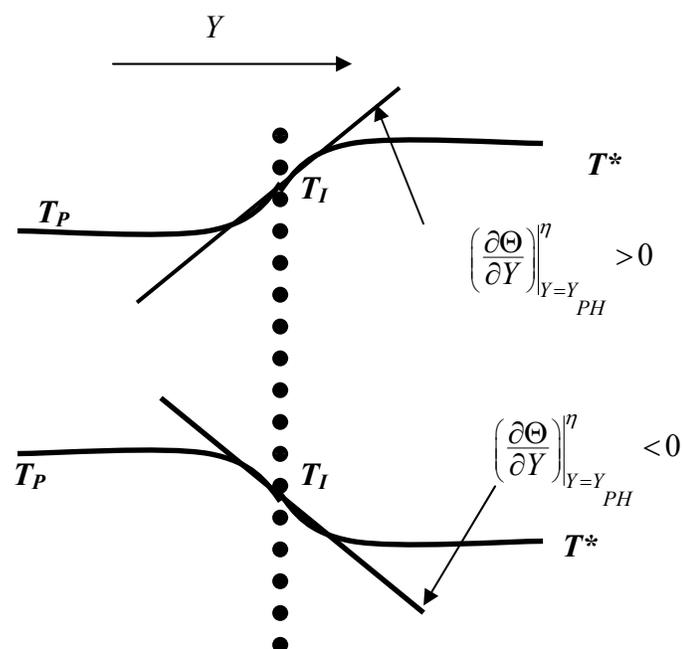


Figura 6.48 Región de la interfase, $Y=Y_{PH}$

Para $Da=10^{-3}$ se observa que el calor se transfiere la región fluida hacia la región porosa en todo el dominio de la interfase. Conforme disminuye el Da la transferencia de calor se presenta principalmente en las paredes. Los cambios de signo indican que el medio poroso en la interfase funciona como una fuente de calor cerca de la pared caliente. Cerca de la pared fría aparece el efecto contrario, el efecto de un sumidero de calor. Como se observó en las líneas de corriente, al disminuir la permeabilidad el flujo queda confinado en la región fluida. A mayor intensidad de flujo el transporte convectivo de calor aumenta al igual que el Nu local de la interfase en la zona de mayor flujo.

Por efecto de la estratificación de la temperatura cuando $Ra > 10^6$ se observa en las Figuras 6.52-6.54 que la transferencia de calor es constante en la zona del centro de la cavidad. Al igual que los cambios de velocidad, los efectos de la transferencia se dan cerca de las paredes del sistema donde se presentan máximos y mínimos del valor del gradiente.

También se observa un incremento en la transferencia de calor por convección en la zona cercana a las paredes conforme disminuye la permeabilidad.

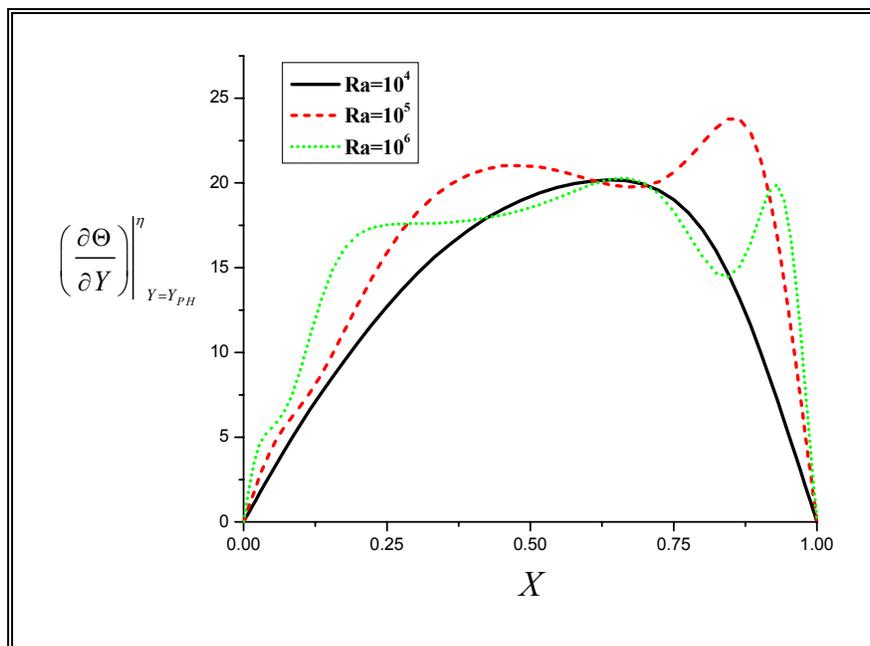


Figura 6.49. Nusselt local en la interfase, $Da=10^{-3}$ $Y_{PH}=0.5$

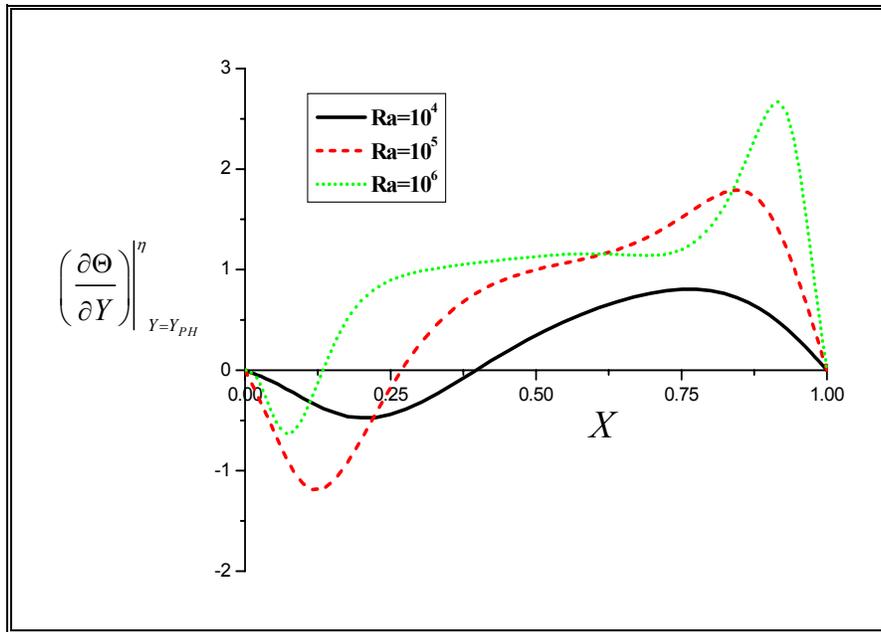


Figura 6.50. Nusselt local en la interfase, $Da=10^{-4}$ $Y_{PH}=0.5$

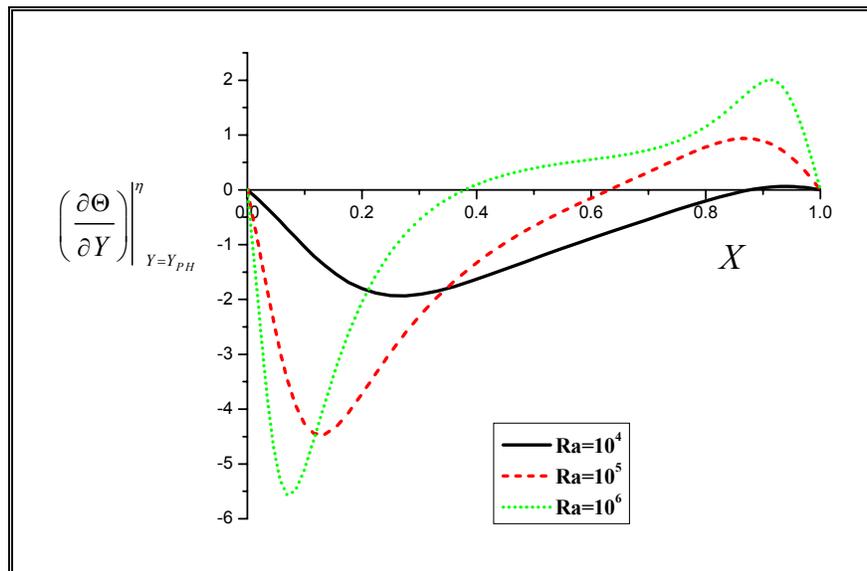


Figura 6.51. Nusselt local en la interfase, $Da=10^{-5}$ $Y_{PH}=0.5$

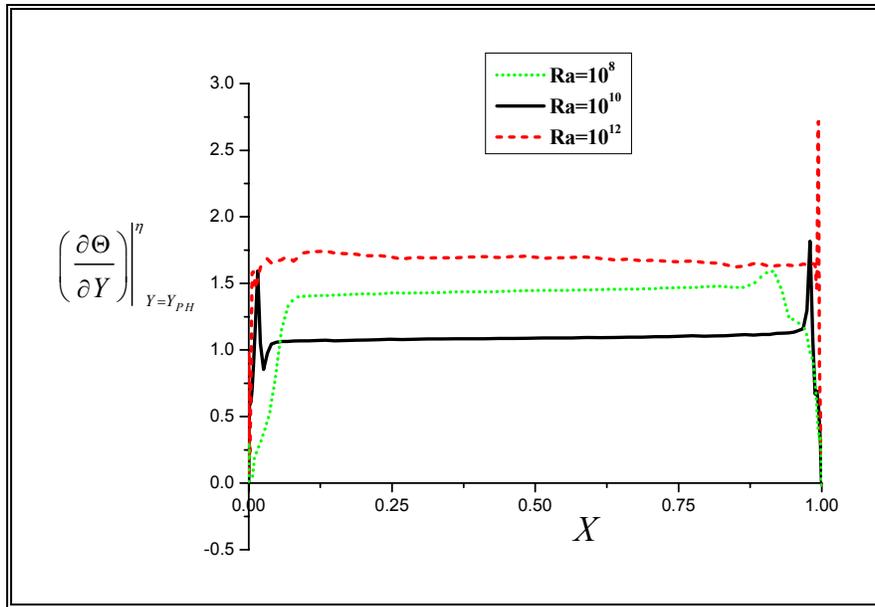


Figura 6.52. Nusselt local en la interfase, $Da=10^{-3}$ $Y_{PH}=0.5$

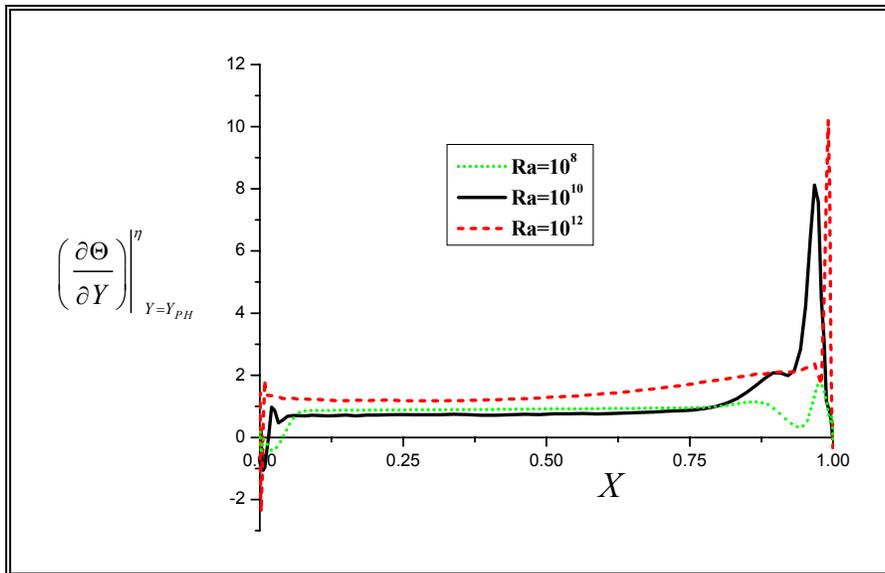


Figura 6.53. Nusselt local en la interfase, $Da=10^{-4}$ $Y_{PH}=0.5$

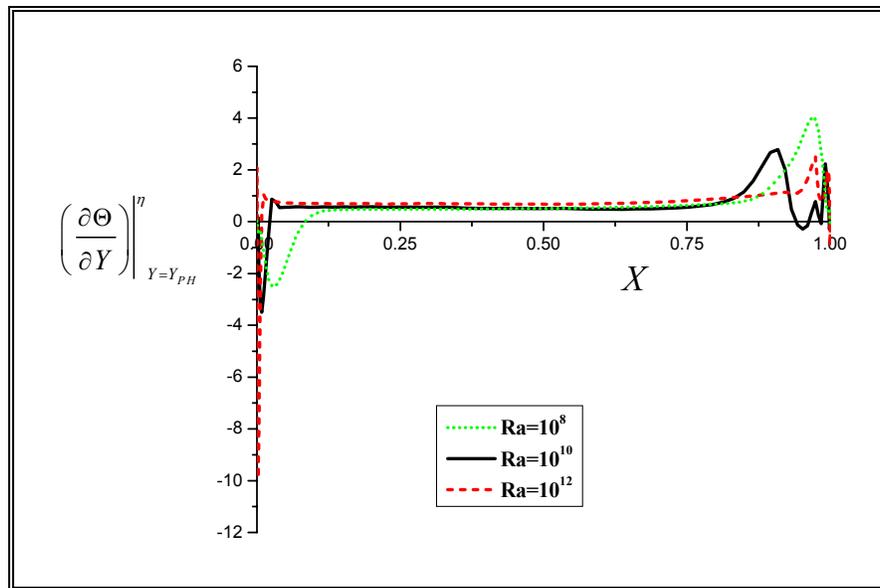


Figura 6.54. Nusselt local en la interfase, $Da=10^{-5}$ $Y_{PH}=0.5$

Considerando el área bajo las curvas descritas en las figuras 6.49-6.54 se puede obtener un valor promedio del Nu en la interfase. Estos valores se presentan en el Cuadro 6.7. Cuando el $Da=10^{-5}$ el valor del Nu promedio neto es negativo, lo que la intensidad del flujo en la región fluida debido a la poca penetración del mismo, conduciendo de forma más efectiva el calor de la zona de la inter-región al interior de la región fluida. Las condiciones en la interfase para la transferencia de calor son las de continuidad en el flux. El número de Nu promedio calculado por las Ecuación (4.48) refleja este comportamiento para valores de Ra en flujo laminar. Sin embargo, al disminuir la permeabilidad el valor promedio de Nu en la región porosa difiere del valor de la región fluida, esto debido a que dentro de la región porosa este existiendo un efecto conductivo importante que esté modificando la aproximación del campo de temperaturas descrito en la Figura 6.48 con el cual se predice el Nu.

Cuadro 6.7 Número de Nusselt promedio en la interfase, \overline{Nu}_{int} , $Y_{PH} = 0.5$

Da=10⁻³	
Ra=10 ⁴	1.501
Ra=10 ⁵	1.345
Ra=10 ⁶	1.274
Ra=10 ⁸	1.362
Ra=10 ¹⁰	1.524
Ra=10 ¹²	1.666
Da=10⁻⁴	
Ra=10 ⁴	0.4282
Ra=10 ⁵	0.9804
Ra=10 ⁶	1.101
Ra=10 ⁸	0.9751
Ra=10 ¹⁰	1.369
Ra=10 ¹²	1.659
Da=10⁻⁵	
Ra=10 ⁴	0.9389
Ra=10 ⁵	1.496
Ra=10 ⁶	1.413
Ra=10 ⁸	0.9271
Ra=10 ¹⁰	1.157
Ra=10 ¹²	1.701

De manera comparativa se grafican los valores de Nu promedio. De la Figura 6.55 se describe el efecto del transporte convectivo de la interfase hacia el interior de la región fluida. Se observa que para un Da de 10⁻³ y valores de Ra < 10⁸ disminuye el efecto de transferencia de calor convectivo debido a que hay mayor penetración de flujo dentro de la región porosa. Conforme

disminuye la permeabilidad el transporte convectivo de la inter-región al interior de la región fluida aumenta conforme aumenta el Ra, debido al confinamiento del flujo dentro de la región fluida.

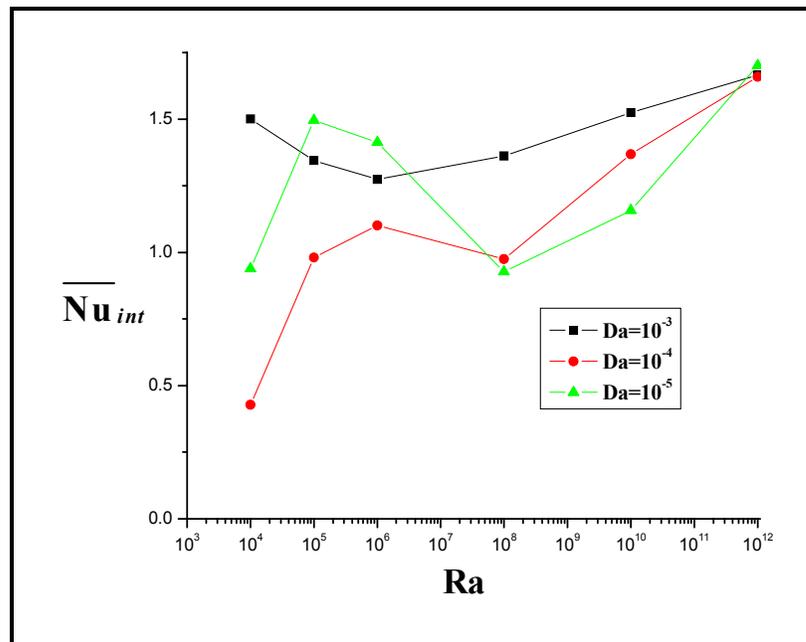


Figura 6.55. Nusselt promedio en la interfase. $Y_{PH}=0.5$

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

Con los listados de los programas *Natcon* y *Cavpor* facilitados por Graham Torpe y *col.* (1999), en este trabajo se realizaron estimaciones numéricas del número de Nusselt para un sistema de dos regiones, fluido-medio poroso. El sistema consiste en una cavidad cuadrada donde el movimiento del fluido se produce por un mecanismo de convección natural al aplicar una diferencia de temperaturas.

Para lograr entender el algoritmo de solución de los listados *Natcon* y *Cavpor* se comprendió la teoría detrás del método numérico utilizado. Este método basado en la formulación de un volumen de control y desarrollado por Patankar (1980) ha adquirido gran importancia debido a la aplicación en la solución del modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ generando soluciones favorables. Al respecto, el programa *Natcon* contiene en su listado el planteamiento del modelo de turbulencia para números de Reynolds pequeños. En el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ además de resolverse las ecuaciones de momentum y energía se resuelven dos ecuaciones extras de transporte que son utilizadas para estimar, la energía cinética turbulenta k y la energía disipativa turbulenta, ε . Diversos autores han abordado el problema de transporte de calor y masa total en una cavidad cuadrada considerando dos regímenes de flujo, laminar y turbulento. Para avanzar en la comprensión de la solución se realizó una comparación entre los cálculos del número de Nu, las líneas de corriente y las isothermas obtenidos a partir del programa *Natcon* y los reportados en la literatura, encontrándose una aproximación satisfactoria tanto en la caracterización del flujo como en los cálculos del número de Nusselt en las paredes del sistema. Se observa que al incrementar el Ra existe la aparición de vórtices en las paredes superior e inferior. Además de que los mayores gradientes se presentan en las zonas cercanas a la pared fría y caliente.

El programa *Cavpor* resuelve el problema de transporte de calor en una cavidad cuadrada parcialmente ocupada por un medio poroso dando origen a un sistema de dos regiones. Revisando la teoría detrás del problema de convección natural en una cavidad cuadrada se encontró que existen dos aproximaciones para resolver un sistema de dos regiones. La diferencia

entre estas aproximaciones es la forma de acoplar las ecuaciones de transporte que modelan la región fluida y la región porosa. Con la aproximación de un solo dominio utilizada en el programa *Cavpor* se implementa un modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ el cual considera los efectos del medio poroso. Los resultados obtenidos se comparan con los resultados reportados por Beckermann *y col.* (1988) para valores de Ra de $10^4, 10^5$ y 10^6 , se caracterizan el flujo en la cavidad y se observa que conforme aumenta el Rayleigh, aumenta la intensidad de flujo en las dos regiones, pero ésta intensidad disminuye conforme disminuye el número de Darcy. En lo que respecta al cálculo del número de Nusselt en las paredes del sistema, estos resultados se comparan con los obtenidos por Valencia y Ochoa (2001) para la aproximación de dos dominios, y por Singh *y col.* (1994) con la aproximación de un solo dominio. Existen discrepancias en las predicciones del Nusselt promedio en las paredes del sistema lo que confirma la necesidad de llevar a cabo trabajo experimental para indicar cual es la aproximación correcta para modelar el sistema de dos regiones.

Para caracterizar el flujo cuando se incrementa el Ra (de 10^8 a 10^{12}) se comparan los patrones de las isotermas y líneas de corriente con los patrones obtenidos cuando se tiene la cavidad ocupada solamente por fluido. Se observa que la presencia de un medio poroso disminuye la presencia de vórtices dentro de la región porosa. Además de que los mayores gradientes de temperatura y de la velocidad vertical se dan cerca de las paredes del sistema. También se obtuvieron los perfiles de la velocidad tangencial a la interfase. En estos perfiles se observa el efecto del medio poroso en el flujo horizontal presentándose una disminución del flujo dentro de la de capa límite en la zona de la inter-región.

Extendiendo el análisis de resultados y como parte de los objetivos de este trabajo se calculó el número de Nusselt en la interfase del sistema. Como primera aproximación se cumplen las condiciones de frontera de continuidad en el flux de calor para el caso laminar. El comportamiento del Nusselt en la interfase predice el efecto de la convección en la transferencia de calor de la interfase hacia la región fluida. Conforme disminuye la permeabilidad se observa la transferencia de calor por conducción en el medio poroso produce un efecto de fuentes de calor y sumideros de calor en las zonas cercanas a las paredes caliente y fría sobre la interfase del

sistema. Al incrementar el Rayleigh a valores mayores de 10^6 existen variaciones del Nusselt en las zonas de capa límite en las paredes del sistema.

Las predicciones de flujo y distribución de temperatura obtenidos con la solución numérica caracterizan el comportamiento del flujo en la cavidad y se obtienen de una manera cualitativa y cuantitativa los parámetros de transferencia de calor en las fronteras del sistema, paredes e interfase. Sin embargo, es necesario trabajo experimental orientado a obtener las distribuciones de temperatura y velocidades promedio con los cuales se podría discernir entre el uso de modelos de turbulencia en medios porosos y entre las aproximaciones de uno y dos dominios. Contribuyendo a un avance en la definición de condiciones de frontera adecuadas para la interfase fluido-medio poroso y que sigue siendo un tópico de estudio actual.

BIBLIOGRAFÍA

- Abbot, M.B., and Basco, D.R.,(1992)., *Computational Fluid Dynamics*, Ed. Longman.
- Ahmed N., and Sunada D.K.,(1969), “Nonlinear Flow in Porous Media”, *ASCE Journal of the Hydraulics Division*, **95**, HY 6, p. 1847-1857.
- Anderson D.A., Tannehill J.C. and Pletcher, R.H., (1984), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere, New York.
- Antohe,B. and Lage, J.L., (1997), “A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **40**, pp. 3013-3024.
- Arpaci S.V. and Lasen S. P (1984), *Convection Heat Transfer*, Ed. Prentice Hall, U.S.A
- Arreola, T.A, (1990), “Recuperación de petróleo en medios porosos por inyección de CO₂”, *Revista del IMP*, **XXII**(4).
- Barakos, G., Mitsoulis, E. and Assimacopoulos, D.,(1994), “Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **18**, p. 695-719.
- Bear J. (1972), *Dynamics of fluids in porous media*, Ed. Dover, New York, E.U.A.
- Beavers, G.S, and Joseph, D.D., (1967), “Boundary conditions at a naturally permeable wall”. *J. Fluid Mech.* **30** , 197-207
- Beckermann, C., Viskanta,R. and Ramadhyani, S.,(1987), “Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure”, *J.Heat Transfer*, **109**, pp. 363-370
- Beckermann, C., Viskanta,R. and Ramadhyani, S.,(1988), “Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid porous layer”, *J.Fluid Mech.*, **186**, pp. 257-284
- Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, (2001), E.N., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Inc..
- Boussinesq, T.V., (1877), *Mém. Prés. Acad. Sci.*, 3a ed. Paris,**23**,46.
- Brinkman, H.C. (1947), “A calculation of viscous force exerted by flowing fluid on a dense swarm of particles”, *Applied Science Research*, **A1**, 27-34.

Carberry, J., (1976), *Chemical and Catalytic Reaction Engineering*, Mc Graw-Hill Book Company,.

Carbonell, R.G. and Whitaker, S., (1984), "Heat and Mass Transport in porous media", *Mechanics of Fluid in Porous Media*, J Bear y My Corapcioglu (eds), Martinus, Bruselas pp 121-198.

Chen, L., Li, Y., and Thorpe, G.R. (1998). "High Rayleigh number natural convection in an enclosures containing a porous layer ". *11th International Heat Transfer Conference*, Seoul Korea, August.

Chien, K. Y.,(1982),"Predictions of channel and boundary layer flows with a low Reynolds number turbulence model". *AIAA Journal*, **20**, 33-38.

Cruz, H.J. y Pérez, R. C.,(1990),"Desplazamiento de fluidos en medios porosos fracturados como un proceso de convección- dispersión", *Revista del IMP*, **XXII**(2).

Dybbs, A. and Edwards,R.V.,(1979), "A new look at porous media fluid mechanism-Darcy to turbulent". *In Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media.*, ed J. Bear and Nijhoff. Holanda,18,199-254

Ferziger J.H.,(1983), "Higher-level simulations of turbulent flows". In Esser J.A. (eds) *Computational methods for turbulent, transonic and viscous flow*. Hemisphere, New York, pp.93-182

Ferziger J.H. and Milovac, P., (1996), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Germany.

Fisher, K.M.,(1981), "The effect of fluid flow on solidification on industrial castings and ingots" *Physico ChemicalHydrodynamics*, **2**, pp. 311-326.

Goeckner, B.A., Helmich, D.R., McCarthy, T.A., Arinez, J.M., Peard, T.E., Peters, P.E., Brewater, M.Q., and Buckius R.O., (1992), "Radiative heat trsnfer augmentation of natural gas flames in radiant tube burners with porous ceramic inserts", *Experimental Thermal Fluid Science*,**5**,p. 848-860

Goldstein S., (1965), *Modern development in fluid Mechanics*, Dover Series,Oxford Univ. Press, 1938, **Vol.II**.

Henkes, R.A.W.M, Van der Vlught F.F. and Hoogendoorn, C.J.,(1991), "Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds- number turbulent models", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **34**,(2), pp. 377-388.

Hagen, G., (1839), "Über die Bewegung des Wasser in engen zylindrischen Röhren", **46**, p. 423-442

- Hayashi J.A., Agustín, R.A. and Soria, A., (2001a), "Spontaneous imbibition process in H-S cells", *AICHE Journal*, **47**, p. 1513-1523
- Hayashi J.A., (2001b), "Procesos de imbibición espontánea en celdas H-S", Tesis de Doctorado Universidad Autonoma Metropolitana Iztapalapa.
- Hinze, J.O., (1975), *Turbulence*. Mc Graw Hill, New York.
- Hsu C.T and Cheng P., (1990), "Thermal dispersion in a porous medium", *International Journal of Heat and Mass Transfer* **33**, 1587-1597
- Jones, W. P. and Launder, B. E. (1973) "The Prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **15**, 301-314.
- Katz, A.J. and Thompson, A.H.,(1986), "Quantitative prediction of permeability in porous rock", *Phys. Rev.*, **B34**, pp.8179-8181.
- Kaviany,M.,(1985), "Laminar Flow trough a porous channel bounded by isothermal parallel plates", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **28**,pp. 851-858.
- Kaviany M., (1994), *Principles of Convective Heat Tranfer*, Ed. Springer-Verlag, New York.
- Keller, L. and Friedmann, A., (1924), "Differential gleichungen für die turbulente Bewegung einer Kompressiblne Flüssigkeit", *Proc.First Int. Congress Appl. Mech.*, 395-405.
- Klanstrever, C., (1997), *Engineering Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, USA.
- Kolmogorov, A.N.,(1941), *Compt. Rend. Acad. Sci.*,USSR, **30**:301
- Lage, J.L., (1996) Comments on "The effect of turbulence on solidification of a binary metal alloy with electromagnetic stirring". *ASME J. Heat Transfer*, **117**, p. 716-724.
- Lage, J.L.,(1997), "The fundamental theory of flow through permeable media from Darcy to turbulence". (Eds.In D.B Ingham & I. Pop), *Transport Phenomena in Porous Media*. Oxford: Pergamon. pp 1-30.
- Launder, B. and Spalding, D.B., (1974), *The numerical computation of turbulent flows*, *Computer Methods of Applied Mechanics Engineering*,**3**,269-289.
- Lesieur, M., (1987), *Turbulence in Fluids*, Ed. Nijhoff, Amsterdam..
- Leslie D.C, (1982), "Simulation methods for turbulent flows". In Morton K.W, Bairnes M.J (eds) *Numerical methods for fluid dynamics*. Academic Press, London , p.63-68.
- Lim, I.G. and Mathews, R.D. (1993), "Development of a model for turbulent combustion within porous inert media", *Transport Phenomena in Thermal Engineering* , 1; (eds. J.S. Lee, S.H. Chung and K.Y.Kim), p 631-636,Begell House, New York .

Markatos, N.C. and Pericleous, K.A.,(1984), “Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **27**, p. 755-772.

Mayer, M. and Miller, C. (1996), “The influence of mass transfer characteristic and porous media heterogeneity on no aqueous phase dissolution”, *Water Resour. Re.* **32**(6),1551-1567.

Macdonald et al. (1979), Flow trough porous media- Ergun equation revisited. *Industrial Engineering and Chemical Fundamentals*, 18, pp. 199-208

Masouka, T. and Takatsu Y. (1996). “Turbulence model for flow through porous media”. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **39**, p. 2803-2809.

Mickley, M.K., Smith, K.A. and Korchak E.I., (1965), “Fluid flow in packed beds”, *Chemical Engineering Science*,**20**, pp. 237-246.

Neale, G. and Nader, W., (1974),”Practical significance of Brinkman’s extension of Darcy’s Law: coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium”, *Can.J.Chemical Engineering*,**52**, 475-482.

Nield, D.A and Bejan A.,(1992), *Convection in porous Media*. Ed. Springer –Verlag. NewYork.1992.

Ochoa Tapia J.A. and Whitaker S.,(1995a) “Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I: Theoretical development. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **38**, pp. 2635-2646.

Ochoa Tapia J.A. and Whitaker S.,(1995b), “Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II: Comparison with experiment . *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **38**. pp. 2647-2655.

Ochoa Tapia J.A. and Whitaker S.,(1997) “Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. **40**, p. 2691-2707

Ochoa Tapia J.A. and Whitaker S.(1998a), “Momentum jump conditions at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: Inertial Effects”. *Journal of Porous Media*, **1**(3). pp. 201-217

Ochoa Tapia J.A. and Whitaker S.,(1998b) “Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: The One-Equation Model”, *Journal of Porous Media*. **1**(1), p. 31-46

Patankar,S.V.,(1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere/Mc Graw Hill, New York.

Pedras, M.H.J. and de Lemos M.J.S., (2000), “On the definition of turbulent kinetics energy for flow in porous media”, *Int.Comm. Heat Mass Transfer*, **27**, p. 211-220.

Pedras, M.H.J., and de Lemos, M.J.S, (2001), “Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through deformable porous media”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **44**, pp. 1081-1093.

Prakash, M., Turan, Ö.F., and Thorpe, G.R. (1999a), “A CFD study of natural heat and mass transfer in respiring hygroscopic porous media”. *Proceedings the 2nd international conference on CFD in minerals and process industry*. Melbourne, Australia. , pp. 157-162.

Prakash, M., Turan, Ö.F., and Thorpe, G.R. (1999b), “Program Natcon: for the numerical solution of natural convection in a rectangular cavity”. Victoria University SOBE Research Report, Australia.

Prakash, M., Turan, Ö.F., and Thorpe, G.R. (2000), “The effect of Forchheimer modification on modeling turbulence above and within a porous medium”. Victoria University SOBE Research Report, Australia.

Prandtl, L., (1945), “Über ein neues formelsystem für die ausgebildete turbulenz”, *Nach. Akad Wiss Göttingen Math-Phys Klasse*, p. 6

Prescott, P.J. and Incropera, F.P. (1995), “The effect of turbulence on solidification of binary metal alloy with electromagnetic stirring”. *ASME Journal of Heat Transfer*, **117**, 716-724.

Ravi M.R., Henkes W.M. and Hoogendoorn C.J., (1994), “On the high Rayleigh number structure of steady laminar natural convection flow in a square cavity””, *Journal of Fluids Mechanics*, **262**, p. 325-251

Reynolds O., (1895) , “On the Dynamics theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion”. *Philosophical transaction of the Royal Society of London*, Series A, **186**:123

Rodi W. (1980), “Turbulence models and their applications in hydraulics”. IAHR Monograph, Junio .

Saffman, P., (1971), “On the boundary condition at the surface of porous medium”, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 93-101

Sahraoui, M. and Kaviany, M., (1993), “Slip and no Slip temperature boundary conditions at the interface of porous, plain media: Conduction”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, **36**, pp. 1019-1033.

Sahraoui, M. and Kaviany, M., (1994), “Slip and no Slip temperature boundary conditions at the interface of porous, plain media: Convection”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, **37**, pp. 1029-1044.

Schlichting, H., (1968), *Boundary Layer Theory*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 6th ed., New York.

Sim, Y. and Chrysikopolous, V. (1996), "One-dimensional virus transport in porous media with time dependent inactivation rate coefficient", *Water Resour. Res.*, **32**(8),2067-2611

Singh, A.K., Leonardi, E. and Thorpe G.R., (1993), "Three-dimensional Natural Convection in a confined Fluid Overlaying a porous layer", *ASME J. Heat Mass Transfer*, **115**, 631-638.

Smith, E.A. y Sokhansanj, S.,(1989), "Natural convection and temperature of stored produce, a theoretical analysis" *Can. Agric. Eng.*, **32**, pp. 91-97.

Smith, J.M. (1991) *Ingeniería de la Cinética Química*, Mc Graw Hill Book Company, Sexta Impresión, México.

Speziale, C.G., (1987), "On nonlinear k-l and k- ϵ models for turbulence" , *Journal of Fluids Mechanics*, 178, pp. 459-475.

Thompson, A., Shafer, A. and Smith, R. (1996), "Impacts of physical and chemical heterogeneity on contaminant transport in sandy porous media", *Water Resour. Re.* **32**(4),801-818.

Tennekes, H., Lumley, J.L, (1972), *A first course in turbulence*, MIT Press, Cambridge.

Townsend, A.A., (1976), *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Ed. Cambridge University, Londres.

Treybal, R.R.,(1980), *Mass Transfer Operations*, Mc Graw-Hil, New York.

Vafai, K. and Kim, S.J. (1990), "Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer- an exact solution, *Int. J. Heat Fluid Flow* **11**, 254-256.

Vafai, K. and Tien, C.L., (1981), "Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media ", *International Journal of Heat and Mass Transfer* **24**, 195-203

Vafai, K. and Thiyagaraja, R.,(1987), "Analysis of flow and heat transfer at the interface region of a porous medium". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **30**, pp.1391-1405.

Valencia, J.J. and Ochoa, J.A.,(1995), "Transporte convectivo en almacenamiento de granos alimenticios: esquema numérico", *Avances en Ingeniería Química*,

Valencia J.J and Ochoa J.A.,(2001), "A study of buoyancy-driven flow in a confined fluid overlying a porous layer". *International Journal of Heat and Mass Transfer* **44**, 195-203

Valencia, J.J., Espinosa Paredes, G. and Ochoa Tapia J.A., (2002), " Mass transfer jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid". Accepted for publication in *Journal of Porous Media*.

Vazquez, R., (1996) "Turbulent flow past a backward- facing step: A evaluation of Yang-Shih model", MAE577 Project, Arizona State University

Whitaker, S., (1981), *Introduction to Fluid Mechanics*, R.E. Krieger Pub. Co., Malabar Florida.

Whitaker, S., (1986), "Flow in porous media I: A Theoretical Derivation of Darcy's Law", *Transport In Porous media*, **1**, p. 3-25.

Whitaker, S., (1996), "The Forchheimer Equation: A Theoretical Development ", *Transport In Porous media*, **25**, p. 27-61.

Whitaker, S., (1999), *Theory and applications of transport in porous media: The Method of Volume Averaging*, **Vol. 13**, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Wilcox, D. C., (1993), *Turbulence Modelling for CFD*, DCW Industries, La Canada, 1993.

Yang, Z and Shih, T.H. "New time scale based model for near-wall turbulence", *AIAA Journal*, **31**(7), pp. 163-171

NOMENCLATURA

- $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_i$ vector velocidad promedio , $i=\omega, \eta$, [m/h]
- T_β Temperatura promedio , $i=\omega, \eta$, [K]
- k energía cinética turbulenta, $i=\omega, \eta$, [m²/h²]
- ε energía disipativa turbulenta, $i=\omega, \eta$, [m²/h³]
- P presión, [Pa]
- Ra número de Rayleigh para el fluido.
- Da número de Darcy.
- Pr número de Prandtl del fluido.
- h coeficiente de transferencia de calor convectivo , [Cal/m² K]
- $K_{\beta\omega}$ permeabilidad, [m]
- $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}, C_{\mu}, f_1, f_2, f_\mu$ son constantes empíricas de turbulencia.
- u^τ velocidad de fricción cerca de la pared
- \mathbf{n}_w vector normal a la pared
- $\mathbf{n}_{\omega\eta}$ vector normal a la superficie que forma la interregión.
- $\mathbf{t}_{\omega\eta}$ vector tangencial a la superficie que forma la interregión.
- y^\bullet distancia de la pared
- C_F coeficiente de Forchheimer
- $C_{p\beta}$ capacidad calorífica, [Cal/Kg K]
- k_η conductividad calorífica de la región fluida, [Cal/m h]
- k_ω conductividad calorífica de la región porosa, [Cal/m h]
- g constante de aceleración gravitacional, [m/h²]

Símbolos griegos

- μ_t viscosidad turbulenta, [Kg/m h]
- σ_T número de Prandtl turbulento para T .
- σ_ε número de Prandtl turbulento para ε .
- σ_k número de Prandtl turbulento para k .

ϕ	porosidad
ρ	densidad del fluido
μ	viscosidad del fluido, [Kg/m h]
κ	constante de Von Karman.
λ	coeficiente de expansión térmica,[1/K]

Subíndices

ω	en la región porosa
β	fase fluida
η	en la región fluida

APÉNDICE A

ECUACIONES ADIMENSIONALES

El análisis se está llevando a cabo en dos dimensiones por lo que se tienen los componentes del campo de velocidad en la dirección x y y . Haciendo uso de las condiciones de continuidad en las velocidades la notación de las velocidades se simplifica de la manera siguiente:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \Big|_x = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \Big|_x = u \quad (\text{A.1})$$

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \Big|_y = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \Big|_y = v \quad (\text{A.2})$$

Para el campo de temperaturas,

$$\langle T_\beta \rangle_\eta = \langle T_\beta \rangle_\omega = \langle T \rangle \quad (\text{A.3})$$

Se escogen las variables adimensionales para las ecuaciones de transporte y disminuir el número de parámetros necesarios para caracterizar el flujo del sistema. Así,

Para la velocidad,

$$U = \frac{u}{u_{ref}} \quad (\text{A.4})$$

$$V = \frac{v}{u_{ref}} \quad (\text{A.5})$$

El tiempo,

$$\tau = \frac{t}{t_{ref}} \quad (\text{A.6})$$

La presión,

$$P = \frac{P}{P_{ref}} \quad (\text{A.7})$$

La distancia,

$$X = \frac{x}{H} \quad (\text{A.8})$$

$$Y = \frac{y}{H} \quad (\text{A.9})$$

Las viscosidades y la densidad del fluido,

$$\mu = \frac{\mu_\beta}{\mu_{ref}} \quad (\text{A.10})$$

$$\rho = \frac{\rho_\beta}{\rho_{ref}} \quad (\text{A.11})$$

$$\mu_t = \frac{\mu_\tau}{\mu_{ref}} \quad (\text{A.12})$$

La temperatura,

$$\Theta = \frac{\langle T_\beta \rangle - T_{ref}}{T_H - T_c} \quad (\text{A.13})$$

Para la energía cinética y la turbulencia,

$$\langle k \rangle_\eta = \langle k \rangle_\omega = \frac{k}{k_{ref}} \quad (\text{A.14})$$

$$\langle \varepsilon \rangle_\eta = \langle \varepsilon \rangle_\omega = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ref}} \quad (\text{A.15})$$

Haciendo un análisis dimensional igualando el término de flotación y el término convectivo se tiene el valor de referencia de la velocidad en función de parámetros del sistema como lo son:

$$u_{ref} = \sqrt{g \lambda_\beta \Delta T H} \quad (\text{A.16})$$

De igual manera se tiene para el tiempo y la presión:

$$t = \frac{H}{u_{ref}} \quad (\text{A.17})$$

$$p_{ref} = \rho_{ref} u_{ref}^2 \quad (\text{A.18})$$

Los valores de referencia para las cantidades de turbulencia también se escriben usando la velocidad,

$$k_{ref} = u_{ref}^2 \quad (A.19)$$

$$\varepsilon_{ref} = \frac{u_{ref}^3}{H} \quad (A.20)$$

el valor de referencia a la que se evalúan la densidad y la viscosidad es un promedio de las temperaturas en las paredes del sistema. La temperatura de referencia es:

$$T_{ref} = \frac{T_C + T_F}{2} \quad (A.21)$$

A.1 Ecuaciones de transporte para la región Fluida

A.1.1 Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\beta u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_\beta v}{\partial y} = 0 \quad (A.22)$$

Se sustituyen las variables adimensionales,

$$\frac{\rho_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref}}{H} u_{ref} \frac{\partial \rho U}{\partial X} + \frac{\rho_{ref}}{H} u_{ref} \frac{\partial \rho V}{\partial Y} = 0 \quad (A.23)$$

Finalmente se tiene la ecuación adimensional de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U}{\partial X} + \frac{\partial \rho V}{\partial Y} = 0 \quad (A.24)$$

A.1.2 Ecuación de momentum en la dirección x

Partiendo de la ecuación de Navier Stokes para un fluido incompresible,

$$\rho_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \right) = -\nabla P_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta + \mathbf{j} \cdot \left[\mathbf{g} \rho_\beta \lambda_\beta \left(\langle T_\beta \rangle_\eta - T_{ref} \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

Utilizando las expresiones (A.1) y (A.2) se puede escribir la ecuación de momentum en la dirección x como:

$$\rho_\beta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_\beta u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_\beta v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_\beta \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_\beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{A.26})$$

Introduciendo las variables adimensionales,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{t_{ref}} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{p_{ref}}{H} \frac{\partial P}{\partial X} \\ + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Utilizando (A.17) y (A.18),

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu_\beta \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \\ + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \\ + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Haciendo uso de las definiciones de los números adimensionales característicos para el transporte convectivo natural,

$$\text{Ra} = \frac{\rho_{\beta} g \Delta T \lambda_{\beta} H^3}{\alpha_{\beta} \mu_{\beta}} \quad (\text{A.30})$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu_{\beta}}{\rho_{\beta} \alpha_T} \quad (\text{A.31})$$

Dividiendo (A.29) entre (A.31)

$$\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} = \frac{\rho_{\beta}^2 g \Delta T \lambda_{\beta} H^3}{\mu_{\beta}^2} \quad (\text{A.32})$$

Obteniendo la raíz en ambos lados de la ecuación,

$$\sqrt{\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\beta}^2 g \Delta T \lambda_{\beta} H^3}{\mu_{\beta}^2}} = \frac{\rho_{\beta} H \sqrt{g \Delta T \lambda_{\beta} H}}{\mu_{\beta}} = \frac{\rho_{\beta} H u_{ref}}{\mu_{\beta}} \quad (\text{A.33})$$

Evaluando los valores de referencia,

$$\sqrt{\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}} = \frac{\rho_{ref} H u_{ref}}{\mu_{ref}} \quad (\text{A.34})$$

Introduciendo esta definición a la Ecuación (A.28) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Esta expresión es la ecuación de movimiento adimensional en la dirección x . Esta misma expresión será útil para estudiar la turbulencia. Para esto, el término de la viscosidad se divide en

dos contribuciones, la viscosidad del fluido y la viscosidad turbulenta; también escrita en forma adimensional. Finalmente la ecuación de momentum en la dirección x queda como:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_\tau) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A1.3 Ecuaciones de momentum en la dirección y .

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_\beta u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_\beta v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_\beta \left(2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_\beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \rho_\beta g \lambda_\beta (T - T_{ref}) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Introduciendo las variables adimensionales,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{t_{ref}} \rho \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \\ + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \rho_{ref} \rho \Delta T g \lambda_\beta \Theta \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial V}{\partial X} + \rho V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \\ + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{H}{u_{ref}^2} \rho g \Delta T \lambda_\beta \Theta \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Utilizando (A.34) se escribe,

$$\rho \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial V}{\partial X} + \rho V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \rho \Theta \quad (\text{A.40})$$

Nuevamente se introduce la viscosidad turbulenta quedando la ecuación como:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial V}{\partial X} + \rho V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \rho \Theta \quad (\text{A.41})$$

A1.4 Ecuación de energía

Considerando el equilibrio térmico, se puede expresar la ecuación de energía con la notación siguiente,

$$\rho_\beta C_{p\beta} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_\beta C_{p\beta} U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_\beta C_{p\beta} V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_\eta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_\eta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.42})$$

Despejando $\rho_\beta C_{p\beta}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_\eta}{\rho_\beta C_{p\beta}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k_\eta}{\rho_\beta C_{p\beta}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.43})$$

Introduciendo la definición de difusividad térmica en la ecuación (A.43),

$$\alpha_T = \frac{k_\eta}{\rho_\beta C_p} \quad (\text{A.44})$$

Con esta expresión el balance de energía se arregla como,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_T \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.45})$$

La ecuación de energía se acopla a las ecuaciones de momentum y de turbulencia, para lograr hacer esto de igual manera se utiliza la definición de viscosidad turbulenta. Para hacerlo se define la difusividad térmica, en función del Prandtl,

$$\alpha_T = \frac{\mu_\beta}{\rho_\beta \text{Pr}} \quad (\text{A.46})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.45),

$$\rho_\beta \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_\beta U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_\beta V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_\beta}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_\beta}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.47})$$

Escribiendo la ecuación en variables adimensionales e introduciendo la viscosidad turbulenta,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} u_{ref} (T_h - T_c)}{t_{ref}} \rho_\beta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref} u_{ref} (T_h - T_c)}{H} \rho_\beta U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \frac{\rho_{ref} u_{ref} (T_h - T_c)}{H} \rho_\beta V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \\ = \frac{\mu_{ref} (Th - Tc)}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\frac{\mu_\beta}{\text{Pr}} + \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \right] + \frac{\mu_{ref} (Th - Tc)}{H^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{\mu_\beta}{\text{Pr}} + \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Reacomodando términos,

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left(\frac{\mu_{ref}}{H^2} \right) \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \right] + \\ + \left(\frac{\mu_{ref}}{H^2} \right) \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Realizando álgebra para agrupar parámetros,

$$\rho \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left(\frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \right] + \left(\frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_\tau}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (A.50)$$

Manipulando los parámetros adimensionales (A.30) y (A.31) ,

$$\sqrt{Ra Pr} = \sqrt{\frac{\rho_\beta^2 g \lambda_\beta \Delta T H^3 Pr}{\mu_\beta^2}} \quad (A.51)$$

$$\sqrt{Ra Pr} = \frac{\rho_\beta H Pr \sqrt{g \lambda_\beta \Delta T H}}{\mu_\beta} = \frac{\rho_\beta H Pr u_{ref}}{\mu_\beta} \quad (A.52)$$

Utilizando esta relación se tiene finalmente,

$$\rho \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau Pr}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau Pr}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (A.53)$$

A1.5 Ecuación de energía cinética turbulenta

$$\rho_\beta \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial t} + \rho_\beta u \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial x} + \rho_\beta v \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial y} \right] + P'_k + G'_k - \rho_\beta \langle \varepsilon \rangle_\eta \quad (A.54)$$

Usando las variables adimensionales (A.4)-(A.12),

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{t_{ref}} \rho \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{H} \rho U \frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{H} \rho V \frac{\partial k}{\partial Y} = \left(\frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{H^2} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \\ + \left(\frac{\mu_{ref} u_{ref}^2}{H^2} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + \left[P'_k + G'_k - \frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{H} \rho \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (A.55)$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial k}{\partial Y} = \left(\frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \left(\frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + \\ + \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^3} \right) \left[P'_k + G'_k - \frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{H} \rho \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (A.56)$$

Introduciendo la relación (A.32),

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial k}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + \\ + \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^3} \right) \left[P'_k + G'_k - \rho \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (A.57)$$

(A)

Desarrollando el término (A) de la Ecuación (A.57) que contiene el término de producción P_k , de flotación G_k .

Para la producción P_k ,

$$P_k = \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^3} \right) P'_k = \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^3} \right) \left(\frac{u_{ref}^2 \mu_{ref}}{H^2} \right) \mu_\tau \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (A.58)$$

$$P_k = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \mu_\tau \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (A.59)$$

Considerando la flotación G_k ,

$$G_k = \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^3} \right) G'_k = - \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^3} \right) \left(\frac{\mu_{ref} g \lambda_\beta (T_h - T_c)}{H} \right) \frac{\mu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = - \left(\frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \right) \frac{\mu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \quad (A.60)$$

$$G_k = - \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \frac{\mu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \quad (A.61)$$

La viscosidad turbulenta es función de la energía cinética y disipativa,

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \frac{\langle k \rangle_\eta^2}{\langle \varepsilon \rangle_\eta} = \left(\frac{u_{ref}^4 H \rho_{ref}}{u_{ref}^3 \mu_{ref}} \right) C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (A.62)$$

$$\mu_t = \sqrt{\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}} C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (A.63)$$

Resumiendo la ecuación para la energía cinética queda como:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho V \frac{\partial k}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + [P_k + G_k - \rho \varepsilon] \quad (A.64)$$

A1.6 Para la disipación viscosa.

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial t} + \rho_\beta u \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial x} + \rho_\beta v \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial y} \right] + \\ + \left[C_{\varepsilon 1} f_1 (P'_k + C_{\varepsilon 2} G'_k) - C_{\varepsilon 2} f_2 \langle \varepsilon \rangle_\eta \right] \frac{\langle \varepsilon \rangle_\eta}{\langle k \rangle_\eta} \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Introduciendo las variables adimensionales,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{ref} u_{ref}}{H t_{ref}} \right) \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \left(\frac{\rho_{ref} u_{ref}^4}{H^2} \right) \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \left(\frac{\rho_{ref} u_{ref}^4}{H^2} \right) \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = \left(\frac{\mu_{ref} u_{ref}^3}{H^3} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \\ + \left(\frac{\mu_{ref} u_{ref}^3}{H^3} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \\ + \left[C_{\varepsilon 1} f_1 (P'_k + C_{\varepsilon 2} G'_k) - \left(\frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{H} \right) C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon \right] \left(\frac{u_{ref}}{H} \right) \frac{\varepsilon}{k} \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = \left(\frac{\mu_{ref}}{\rho_{ref} H u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \left(\frac{\mu_{ref}}{\rho_{ref} H u_{ref}} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \\ + \left[C_{\varepsilon 1} f_1 (P'_k + C_{\varepsilon 2} G'_k) - \left(\frac{\rho_{ref} u_{ref}^3}{H} \right) C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon \right] \left(\frac{H^2}{\rho_{ref} u_{ref}^4} \right) \left(\frac{u_{ref}}{H} \right) \frac{\varepsilon}{k} \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Utilizando la expresión (A.33),

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = \sqrt{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \sqrt{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \\ + \left[C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + C_{\varepsilon 2} G_k) - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon \right] \frac{\varepsilon}{k} + E \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

A.2. Región porosa

A2.1 La ecuación de continuidad es similar a la ecuación de la región fluida.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U}{\partial X} + \frac{\partial \rho V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A.69})$$

A2.2 Ecuación de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento mantienen expresiones análogas a las de la región fluida excepto en los dos últimos términos, que corresponden a la corrección de Forchheimer y el término de Darcy.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} u_{ref}}{t_{ref}} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\rho_{ref} u_{ref}^2}{H} \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{p_{ref}}{H} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu_{\beta} \frac{\partial U}{\partial X} \right] \\ & + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu_{\beta} \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \frac{\mu_{ref} u_{ref}}{H^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu_{\beta} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] - \\ & - \mu_{ref} u_{ref} \frac{\mu \varepsilon_{\beta}}{K_{\omega \eta}} U - \mu_{ref} \rho_{ref} \frac{\rho \varepsilon_{\beta}}{K_{\omega \eta}^{1/2}} Q U \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

De manera similar se agrupan parámetros,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ & + \frac{\mu_{ref}}{H \rho_{ref} u_{ref}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] - \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^2} \right) \mu_{ref} u_{ref} \frac{\mu \varepsilon_{\beta}}{K_{\omega \eta}} U - \\ & - \left(\frac{H}{\rho_{ref} u_{ref}^2} \right) \mu_{ref} \rho_{ref} \frac{\rho \varepsilon_{\beta} C_F}{K_{\omega \eta}^{1/2}} Q U \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Introduciendo la expresión (A.34),

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right] +$$

$$+\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] - \left(\frac{\mu_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}} \right) \frac{H}{K_{\omega\eta}} \mu \varepsilon_{\beta} U - \left(\frac{H}{K_{\omega\eta}^{1/2}} \right) \rho \varepsilon_{\beta} C_F Q U \quad (\text{A.72})$$

Para el medio poroso se definen un nuevo número adimensional, el número de Darcy,

$$Da = \frac{K_{\omega\eta}}{H^2} \quad (\text{A.73})$$

Considerando la viscosidad turbulenta se tiene la ecuación final para la ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial U}{\partial X} + \rho V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_{\tau}) \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_{\tau}) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_{\tau}) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{Da} \mu \varepsilon_{\beta} U - \frac{1}{\sqrt{Da}} \rho \varepsilon_{\beta} C_F Q U \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Se puede observar que las ecuaciones (A.36) y (A.74) son semejantes, excepto por los dos últimos términos. Esto se deriva de considerar la continuidad, generándose una expresión similar para todo el dominio la cual contiene términos que se activan dependiendo de a región donde se encuentre el método de solución.

A2.3. De igual manera para la velocidad en y ,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial V}{\partial X} + \rho V \frac{\partial V}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_{\tau}) \frac{\partial V}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[(\mu + \mu_{\tau}) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu + \mu_{\tau}) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \rho \Theta - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{Da} \mu \varepsilon_{\beta} V - \frac{1}{\sqrt{Da}} \rho \varepsilon_{\beta} C_F Q V \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

La ecuación de energía mantiene la misma expresión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_{\tau} \text{Pr}}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_{\tau} \text{Pr}}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.76})$$

A2.4 La ecuación de la energía cinética contiene también los términos que consideran el medio poroso,

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial t} + \rho_\beta u \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial x} + \rho_\beta v \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle k \rangle_\eta}{\partial y} \right] + \\ + P'_k + G'_k - \rho'_\beta \langle \varepsilon \rangle_\eta + D' - 2 \frac{\varepsilon_\beta \mu_\beta}{K_{\beta\omega}} \langle k \rangle_\omega - \frac{8}{3} \frac{\varepsilon_\beta \rho_\beta C_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} U \langle k \rangle_\omega \quad (\text{A.77}) \end{aligned}$$

Escribiendo en forma adimensional,

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial k}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + \\ + [P_k + G_k - \rho\varepsilon + D] - 2 \left(\frac{H}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^3} \right) (\mu_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2) \frac{\varepsilon_\beta \mu}{K_{\beta\omega}} k - \frac{8}{3} \left(\frac{H}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^3} \right) (\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2) \frac{\varepsilon_\beta \rho C_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} Qk \quad (\text{A.78}) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial k}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + \\ + [P_k + G_k - \rho\varepsilon + D] - 2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \varepsilon_\beta \mu k - 6 \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \varepsilon_\beta \rho C_F Qk \quad (\text{A.79}) \end{aligned}$$

A2.5 El procedimiento es similar para la energía disipativa,

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial t} + \rho_\beta u \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial x} + \rho_\beta v \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_\eta}{\partial y} \right] + \\ + \left[C_{\varepsilon 1} f_1 (P'_k + C_{\varepsilon 2} G'_k) - C_{\varepsilon 2} f_2 \langle \varepsilon \rangle_\eta \right] \frac{\langle \varepsilon \rangle_\eta}{\langle k \rangle_\eta} + E' - 2 \frac{\varepsilon_\beta \mu_\beta}{K_{\omega\eta}} \langle \varepsilon \rangle_\omega - \frac{8}{3} \varepsilon_\beta \frac{C_F}{K_{\omega\eta}^{1/2}} U \langle \varepsilon \rangle_\omega \quad (\text{A.80}) \end{aligned}$$

Usando las variables adimensionales,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = & \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + C_{\varepsilon 2} G_k) \frac{\varepsilon}{k} - \\ & - (C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} + E - 2 \left(\frac{H^2}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^4} \right) \left(\frac{\mu_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^3}{H} \right) \frac{\varepsilon_\beta \mu_\beta}{K_{\beta\omega}} \varepsilon - \frac{8}{3} \left(\frac{H^2}{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^4} \right) \left(\frac{\rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^4}{H} \right) \varepsilon_\beta \frac{\rho C_F}{K_{\beta\omega}^{1/2}} Q \varepsilon \quad (\text{A.81}) \end{aligned}$$

Se tiene la expresión final,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = & \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu_\beta + \frac{\mu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \\ & + [C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + C_{\varepsilon 2} G_k) - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} + E - 2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \varepsilon_\beta \mu_\beta \varepsilon - \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \varepsilon_\beta \rho C_F Q \varepsilon \quad (\text{A.82}) \end{aligned}$$

APÉNDICE B

LISTADO DEL PROGRAMA

En el listado del programa se identifican trece subrutinas y una rutina principal. Para poder ejecutar el programa se requieren tres archivos: el archivo “Cavpor.for” el cual contiene el listado del programa; el archivo “Commonpor.h”, en este archivo se declaran las variables del tipo “Common”; y finalmente el archivo “Inpor.dat” a través del cual se leen los valores de entrada para variables y parámetros.

PROGRAM MAIN. En esta primera secuencia del listado se llaman a las subrutinas, se evalúan los valores de convergencia y se estructura el ciclo iterativo para el cálculo del estado transitorio.

READDATA. La subrutina se utiliza para la lectura de los datos de entrada contenidos en el archivo “Inpor.dat”. También se genera en esta subrutina la malla numérica.

INIT. Se inicializan las variables de temperatura, velocidad, presión y se establece la geometría del volumen de control.

PROPS. Tal como lo plantea el modelo de turbulencia, la viscosidad turbulenta es una función de k y ε , en esta subrutina se calcula la viscosidad turbulenta tomando en cuenta esta funcionalidad.

UPDATE. Con esta subrutina se actualizan los valores de las variables durante el ciclo iterativo de cálculo.

CALCU, CALCV, CALCP, CALT, CALTE, CALCED. Estas subrutinas calculan las variables V, U, P', T, k y ε , respectivamente.

LISOLV. Esta subrutina se utiliza para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones algebraicas lineales derivadas del proceso de discretización para cada ecuación de transporte.

BOUND. Contiene las condiciones de frontera para cada variable.

DUMP. Con esta subrutina se guardan los valores de la solución obtenida en el archivo Dump.

B.1 Archivo de entrada Inpor

En este archivo se leen los parámetros físicos del sistema, los números adimensionales de Ra, Da, Pr, al igual que los parámetros numéricos, número de nodos de la malla numérica, factores de subrelajación, entre otros. También, contiene los valores para las variables de tipo lógico las cuales permiten al programa activar subrutinas para calcular un estado de flujo turbulento o laminar, y para un estado estacionario o transitorio.

El significado de cada variable del archivo de entrada “Inpor.dat” se describe a continuación.

GREAT. Representa el número más grande permitido en los cálculos y que en ocasiones se usará como comparación. También, tiene el propósito especial de asignar un valor definido para el caso de que una variable requiere de un valor infinito; esto cuando se presente el caso de $\varepsilon \rightarrow \infty$, por ejemplo.

NITER. Es el contador de iteraciones espaciales para cada intervalo de tiempo, y su valor se imprime en la pantalla del sistema operativo MS-DOS.

SMALL. De manera similar al valor de **GREAT**, representa el número más pequeño permitido en los cálculos y prevenir la división entre cero.

NFTSTP. Cuando se calcula el estado transitorio este valor indica donde debe iniciarse el contador para los cálculos iterativos temporales.

NLTSTP. Este valor indica el último intervalo temporal de cálculo del ciclo iterativo.

STEADY. Es una variable del tipo lógico que adquiere el valor **TRUE** para generar el estado estable y un valor **FALSE** para los cálculos del estado transitorio

TFIRST. Es la condición de valor inicial, por ejemplo, $t=0$

NI y **NJ.** Son el número total de puntos de la malla en la dirección x y y respectivamente.

IT y **JT.** Son los valores máximos que **NI** y **NJ** pueden tener. Si **NI** y **NJ** exceden el valor de **IT** y **JT** respectivamente, se debe de asignar nuevos valores a **IT** y **JT**.

NSWPU, NSWPV, NSWPP, NSWPK, NSWPD, NSWPT. Son el número total de iteraciones usadas para resolver por Gauss-Seidel el sistema de ecuaciones lineales para u , v , p' , k , ε y T respectivamente. Estos valores se utilizan en el calculo para iterar utilizando la subrutina **LISOLV**.

ELBYH. Representa la relación entre la longitud y la altura de la cavidad, L/H .

PBYH. Es la fracción de la cavidad ocupada por el medio poroso.

INCALU, INCALV, INCALP, INCALK, INCALD, INPRO, INCALT. Son variables de tipo lógico y activan las subrutinas **CALCU, CALCV, CALCP, CALCTE, CALCED, PROPS, CALCT** respectivamente

INCALB. Es una variable de tipo lógico que activa los términos de flotación de la ecuación de momentum en la dirección y

INHYP, INCE. Son variables de tipo lógico que activan el esquema híbrido o central para los coeficientes convectivos, respectivamente.

VALUE. Si el valor de esta variable es igual a uno el programa utilizara como campo inicial el valor de **SMALL** e inicializa cada variable en el programa dentro de la subrutina **INIT**. Si su valor es igual a cero, el programa utiliza como campo inicial los valores guardados en el archivo **DUMP**.

DENSIT. Densidad del fluido

PRANDL. Número de Prandtl del fluido

VISCOS. Viscosidad del fluido

TSTEP. Representa el incremento en el tiempo para cada intervalo temporal en los cálculos del estado transitorio, ejemplo $\Delta t=0.25$.

RKAY. El valor de permeabilidad del medio poroso.

POR. Porosidad.

CF. Coeficiente de Forchheimer, c_F .

CMU. Constante del modelo de turbulencia, c_{μ} .

CD. Factor de descarga, f_{μ} .

C1. Constante del modelo de turbulencia, $c_{\varepsilon 1}$.

C2. Constante del modelo de turbulencia, $c_{\varepsilon 2}$.

CAPPA. Constante de Von Kármán, κ .

ELOG. Representa c^{κ} donde c esta dado por $\ln c=5.5$ y κ es la constante de Von Kármán

PRTE. Representa σ_κ .

PRANDT. Representa el número de Prandtl turbulento, σ_T .

F1. Factor de amortiguamiento o apagado, f_1 .

F2. Factor de amortiguamiento o apagado, f_2 .

TH. Temperatura de la pared caliente, T_h .

TC. Temperatura de la pared fría, T_c .

QGENER. Generación de calor que, para el presente análisis, es cero.

CPP. Capacidad calorífica del fluido, C_p .

RALI. Número de Rayleigh

IPREF, JPREF. Posición del valor de referencia para la presión deseada.

MAXIT. Máximo número de iteraciones en cada ciclo iterativo. Si se realizan los cálculos en estado estable, este número indica el número máximo de iteraciones.

IMON, JMON. Monitoreo de localización para diferentes variables

URFU. Factor de subrelajación para u .

URFV. Factor de subrelajación para v .

URFP. Factor de subrelajación para p' .

URFE. Factor de subrelajación para ε .

URFK. Factor de subrelajación para k .

URFT. Factor de subrelajación para T .

URFG. Factor de subrelajación para μ/Pr o $(\mu+\mu_t)/Pr$.

URFVIS. Factor de sub-relajación para μ o $(\mu+\mu_t)$.

INDPRI. Número de iteraciones después de las cuales las etiquetas se imprimen en la pantalla.

SORMAX. Valor para el criterio de convergencia.

El texto del archivo “Inpor.dat” es el siguiente:

Valores de entrada para el programa Cavpor

*****Valores Preliminares*****

C PARAMETROS DE COMPARACIÓN (GREAT) E INTERVALOS DE ITERACIÓN

GREAT	NITER	SMALL	NFTSTP	NLTSTP	STEADY	TFIRST
1.E20	0	1.E-20	1	100	.FALSE.	0.
IT	JT					
150	150					

C NUMERO DE ITERACIONES POR VARIABLE

NSWPU	NSWPV	NSWPP	NSWPK	NSWPD	NSWPT
1	1	3	1	1	1

C PARAMETROS PARA DEFINIR LA MALLA

NI	NJ
10	10
ELBYH	PBYH
1	0.5

C SELECCION DE LA VARIABLE DEPENDIENTE A CALCULAR

INCALU	INCALV	INCALP	INCALK	INCALD	INPRO	INCALT
.TRUE.	.TRUE.	.TRUE.	.FALSE.	.FALSE.	.TRUE.	.TRUE.
INCALB	INHY	INCEN	VALUE			
.TRUE.	.FALSE.	.TRUE.	1.			

C PROPIEDADES DEL FLUIDO

DENSIT	PRANDL	VISCOS
1.2	0.71	1.85E-5

C INCREMENTO EN EL TIEMPO PARA CADA INTERVALO

TSTEP
0.25

C CANTIDADES DEL MEDIO POROSO

RKAY	POR				
3.56E-6	0.4				
RKX	RKY	RPX	RPY	RMU	CF
0.01	0.01	1.0	1.0	1.0	0.565

C CONTANTES DE TURBULENCIA

CMU	CD	C1	C2	CAPPA	ELOG	PRTE	PRANDT
0.09	1.00	1.44	1.92	.41	9.0	1.0	0.9
F1	F2						
1.00	1.00						

C VALORES DE FRONTERA

TH	TC
40	30

C VALORES DE Ra Y GENERACION DE CALOR

QGENER	CPP	RALI
0.	1006.	1.E5

C POSICION DE LOS VALORES DE REFERENCIA PARA EL CALCULO DE LA PRESIÓN

IPREF JPREF
2 2

C FACTORES DE SUBRELAJACIÓN Y VALORES PARA EL MONITOREO DEL PROGRAMA

MAXIT	IMON	JMON	URFU	URFV
10000	10	10	0.1	0.1
URFP	URFE	URFK	URFT	URFG
0.2	0.3	0.3	0.8	0.5
URFVIS	INDPRI	SORMAX		
0.5	100	0.00000001		

B.2 Rutina principal

El programa principal se encarga de llamar a las subrutinas para el cálculo de cada una de las variables. De acuerdo con el algoritmo de solución, SIMPLE, se genera el método iterativo temporal para el cálculo del estado transitorio, siguiendo el orden en la estructura de solución. En este programa principal se encuentran las subrutinas para el cálculo del número de Nusselt y las líneas de corriente.

LISTADO:

```

PROGRAM CAVPOR
CHARACTER*24 HEDU,HEDV,HEDP,HEDT,HEDK,HEDD,HEDM,HEDA,HEDB,
HEDSF
INCLUDE 'commonpor.h'
LOGICAL INCALU,INCALV,INCALP,INPRO,INCALK,INCALD,
1 INCALB,INCALT,INHY,INCEN,STEADY

```

Creación de los archivos los archivos de salida. Se abren los archivos para guardar la salida de resultados.

```

OPEN(6,FILE='TEAPOR.DAT')
OPEN(7,FILE='CONPOR.DAT')
OPEN(8,FILE='TECPOR.DAT')
OPEN(9,FILE='NUSSELT.DAT')
OPEN(10,FILE='DUMPOR',FORM='UNFORMATTED')

```

Se llama a la subrutina que genera la malla numérica principal, y realiza el cálculo de algunos parámetros.

```
CALL READDATA
```

Se genera la malla escalonada.

```
CALL INIT
```

Se inicializan las variables con los datos del archivo Dump o se mantienen los valores predeterminados de la subrutina INIT.

```

RESORU=0.
RESORV=0.
RESORM=0.
RESORT=0.
RESORK=0.
RESORE=0.
IF(VALUE.EQ.0) THEN
READ(10)((U(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)

```

```

READ(10)((V(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
READ(10)((P(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  READ(10)((T(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
READ(10)((TE(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
READ(10)((ED(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
READ(10)((DEN(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
READ(10)((GAMH(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
READ(10)((VIS(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
END IF
REWIND 10
IF(INCALU) CALL UPDATE(U,UO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALV) CALL UPDATE(V,VO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALK) CALL UPDATE(TE,TEO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALD) CALL UPDATE(ED,EDO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALT) CALL UPDATE(T,TO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALT) CALL UPDATE(DEN,DENO,NI,NJ,IT,JT)

```

Salidas iniciales, valores de los parámetros adimensionales.

```

WRITE(6,210)
WRITE(6,230) RALI
WRITE(6,223) PRANDL
WRITE(6,260) DENSIT
WRITE(6,250) VISCOS
WRITE(6,222) TH,TC
WRITE(6,224) DAR

```

Aquí se inician los cálculos iterativos para cada intervalo de tiempo. Se establece la condición de inicial, ej.: $t=0$ (TFIRST).

```

TIME=TFIRST
DO 3000 ITSTEP=NFTSTP,NLTSTP !NUMERO DE CICLOS PARA CALCULOS TRANSITORIOS
DT(ITSTEP)=TSTEP
IF(.NOT.STEADY) TIME=TIME+DT(ITSTEP)

```

Lazo de iteración para cada intervalo de tiempo cuando se calcula el estado transitorio.

```

WRITE(*,310) IMON,JMON
300 NITER=NITER+1
IF(INCALU) CALL CALCU
IF(INCALV) CALL CALCV
IF(INCALP) CALL CALCP
IF(INCALK) CALL CALCTE
IF(INCALD) CALL CALCED
IF(INCALT) CALL CALCT
IF(INPRO) CALL PROPS

```

Salida intermedia a pantalla MS-DOS.

```

RESORM=RESORM/((NI-2)*(NJ-2))
RESORU=RESORU/((NI-3)*(NJ-2))
RESORV=RESORV/((NI-2)*(NJ-3))
RESORT=RESORT/((NI-2)*(NJ-2))

```

```

RESORK=RESORK/((NI-2)*(NJ-2))
RESORE=RESORE/((NI-2)*(NJ-2))
WRITE(*,311) NITER,RESORU,RESORV,RESORM,RESORT,RESORK,RESORE
1      ,U(IMON,JMON),V(IMON,JMON),P(IMON,JMON),T(IMON,JMON),
1      TE(IMON,NJM1),ED(IMON,NJM1)
IF(MOD(NITER,INDPRI).NE.0) GO TO 301
WRITE(*,310) IMON,JMON

```

Prueba de los criterios de convergencia.

```

301 SORCE=AMAX1(RESORM,RESORU,RESORV,RESORT)
   IF(NITER.EQ.MAXIT) GOTO 302
   IF(SORCE.GT.SORMAX) GOTO 300
   IF(NITER.LE.20) GOTO 300
302 IF(.NOT.STEADY) THEN
   WRITE(*,407)ITSTEP

```

Actualización de las variables para el siguiente intervalo de tiempo.

```

IF(INCALU) CALL UPDATE(U,UO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALV) CALL UPDATE(V,VO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALK) CALL UPDATE(TE,TEO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALD) CALL UPDATE(ED,EDO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALT) CALL UPDATE(T,TO,NI,NJ,IT,JT)
IF(INCALT) CALL UPDATE(DEN,DENO,NI,NJ,IT,JT)
END IF
3000 CONTINUE !Termina el ciclo iterativo
           !Se tienen los valores finales de convergencia

```

Se realizan las operaciones finales. Se llaman a las subrutinas para el cálculo del número de Nusselt.

```

CALL DUMP !(NI,NJ,U,V,P,T,TE,ED,DEN,GAMH,VIS)
CALL NUSSELT !(NI,NJ,T,X,Y,XU,YV,SNS)
CALL STREAMF !(NI,NJ,X,Y,XU,YV,SEW,U,V,SF)
CALL BALANCE !(NI,NJ,X,Y,XU,YV,SEW,U,V,SF)
CALL INTERFASE !(NI,NJ,X,Y,XU,YV,SEW,U,V,SF)

```

Salida de resultados a archivo.

```

   WRITE (13,*) ' Y(J) X(I) GAMH(I,J)'
   DO 120 J=1,NJ
   DO 120 I=1,NI
       WRITE (13,503) Y(J),X(I),GAMH(I,J)
120 CONTINUE
   WRITE(8,*)"X" "Y" "T" "U" "V" "P" "SF" "DEN" "TE" "ED"
   DO 502 J=1,NJ
   DO 502 I=1,NI
502 WRITE(8,503)X(I),Y(J),T(I,J),UN(I,J),VN(I,J),P(I,J),SF(I,J),
   1DEN(I,J),TE(I,J),ED(I,J)

   WRITE(14,*)"X" "Y" "T" "U" "V" "P" "SF" "DEN" "TE" "ED"
   DO 525 I=1,NI

```

```

DO 525 J=1,NJ
525 WRITE(14,503)X(I),Y(J),T(I,J),UN(I,J),VN(I,J),P(I,J),SF(I,J),
1DEN(I,J),TE(I,J),ED(I,J)

```

Formatos para los valores de salida

```

210 FORMAT('TURBULENT FLOW IN A CAVITY ')
222 FORMAT(//'THERMAL BOUNDARY CONDITIONS ARE - - -'//
11H0,25X,'SIDE WALL TEMPERATURES = '2(1PE11.3)//
11H0,25X,'ADIABATIC TOP AND BOTTOM WALLS '/')
223 FORMAT('PRANDTL NUMBER',T60,1H=,3X,1PE11.3)
224 FORMAT('DARCY NUMBER',T60,1H=,3X,1PE11.3)
230 FORMAT('RAYLEIGH NUMBER ',T60,1H=,3X,1PE11.3)
250 FORMAT('LAMINAR VISCOSITY ',T60,1H=,3X,1PE11.3)
260 FORMAT('FLUID DENSITY ',T60,1H=,3X,1PE11.3)
310 FORMAT(1H0,'ITER ',I-----ABSOLUTE RESIDUAL SOURCE SUM
1S-----I I-----FIELD VALUES AT MONITORING LOCATION,'
2(',I2,',',I2,)','-----I' / 2X,'NO.',3X,'UMOM',6X,'VMOM',6X,'MA
3SS',6X,'ENER',6X,'TKIN',6X,'DISP',10X,'U',9X,'V',9X,'P',9X,'T',9X,
4'K',9X,'D'/)
311 FORMAT(1H ,I8,4X,1P6E10.3,3X,1P6E10.3)
402 FORMAT(///5X,7X,5HY(J),6X,'NUSSELT NO.')
```

```

403 FORMAT(5X,1PE11.3,2X,1PE11.3)
404 FORMAT('AVERAGE NUSSELT NUMBER',5X,'UMAX',5X,'VMAX',5X,'HEIGHT'
1 ,5X,'LENGTH')
405 FORMAT(/5X,1PE12.5,4X,1PE11.3,3X,1PE11.3,3X,1PE11.3,3X,1PE11.3)
406 FORMAT(1H ,1PE12.5,4X,1PE12.5,4X,1PE12.5,4X,1PE12.5)
407 FORMAT(1H ,I6)
503 FORMAT(1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,
12X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3)
END

```

B.3 Subrutina READDATA

Con esta subrutina se leen los valores de l archivo “Inpor.dat” y se genera la malla numérica principal.

El listado de la subrutina **READDATA** es el siguiente:

```

SUBROUTINE READDATA
INCLUDE 'commonpor.h'
LOGICAL INCALU,INCALV,INCALP,INPRO,INCALK,INCALD,
1    INCALB,INCALT,INH,INCEN,STEADY
OPEN(2,FILE='inpor.dat')
READ(2,'(////)')
READ(2,*)GREAT,NITER,SMALL,NFTSTP,NLTSTP,STEADY,TFIRST
WRITE(*,*)"GREAT NITER SMALL NFTSTP NLTSTP STEADY TFIRST"
WRITE(*,*)GREAT,NITER,SMALL,NFTSTP,NLTSTP,STEADY,TFIRST
READ(2,*)
IF(STEADY)NFTSTP=1
IF(STEADY)NLTSTP=1
IF(STEADY) DT(1)=GREAT
READ(2,*)IT,JT
WRITE(*,*)"IT JT"
WRITE(*,*)IT,JT
READ(2,'(/)')
READ(2,*)NSWPU,NSWPV,NSWPP,NSWPK,NSWPD,NSWPT
WRITE(*,*)"NSWPU NSWPV NSWPP NSWPK NSWPD NSWPT"
WRITE(*,*)NSWPU,NSWPV,NSWPP,NSWPK,NSWPD,NSWPT
READ(2,'(/)')
READ(2,*)NI,NJ
WRITE(*,*)"NI NJ "
WRITE(*,*)NI,NJ
READ(2,*)
READ(2,*)ELBYH,PBYH
WRITE(*,*)"ELBYH PBYH"
WRITE(*,*)ELBYH,PBYH
READ(2,'(/)')
READ(2,*)INCALU,INCALV,INCALP,INCALK,INCALD,INPRO,INCALT
WRITE(*,*)"INCALU INCALV INCALP INCALK INCALD INPRO INCALT"
WRITE(*,*)INCALU,INCALV,INCALP,INCALK,INCALD,INPRO,INCALT
READ(2,*)
READ(2,*)INCALB,INH,INCEN,VALUE
WRITE(*,*)"INCALB INH INCEN VALUE"
WRITE(*,*)INCALB,INH,INCEN,VALUE
READ(2,'(/)')
READ(2,*)DENSIT,PRANDL,VISCOS
WRITE(*,*)"DENSIT PRANDL VISCOS"
WRITE(*,*)DENSIT,PRANDL,VISCOS

```

Cálculo de la difusividad térmica del fluido ALPHAF, definida por $\alpha = \frac{\mu}{\rho Pr}$,

```

ALPHAF=VISCOS/(DENSIT*PRANDL)
READ(2,'(/)')
READ(2,*)TSTEP
WRITE(*,*)"TSTEP"
WRITE(*,*)TSTEP
READ(2,'(/)')

```

```

READ(2,*)RKAY,POR
WRITE(*,*)"RKAY POR"
WRITE(*,*)RKAY,POR
READ(2,*)
READ(2,*)RKX,RKY,RPX,RPY,RMU,CF
WRITE(*,*)"RKX RKY RPX RPY RMU CF"
WRITE(*,*)RKX,RKY,RPX,RPY,RMU,CF
READ(2,'/')
READ(2,*)CMU,CD,C1,C2,CAPPA,ELOG,PRTE,PRANDT
WRITE(*,*)"CMU CD C1 C2 CAPPA ELOG PRTE PRANDT"
WRITE(*,*)CMU,CD,C1,C2,CAPPA,ELOG,PRTE,PRANDT
READ(2,*)
READ(2,*)F1,F2
WRITE(*,*)"F1,F2"
WRITE(*,*)F1,F2

```

Cálculo del número de Prandtl σ_ε representado por PRED,

```

PRED=CAPPA*CAPPA/(C2-C1)/(CMU**.5)
PFUN=PRANDL/PRANDT
PFUN=9.24*(PFUN**0.75-1.0)*(1.0+0.28*EXP(-0.007*PFUN))
READ(2,'/')
READ(2,*)TH,TC
WRITE(*,*)"TH TC"
WRITE(*,*)TH,TC
READ(2,'/')
READ(2,*)QGENER,CPP,RALI
WRITE(*,*)"QGENER CPP RALI"
WRITE(*,*)QGENER,CPP,RALI

```

Cálculo de T_{ref} (TERF), β (expansión térmica, BEITA) y ΔT (DELT),

```

TREF=TC+(TH-TC)/2
BEITA=1/(273.15+TREF)
DELT=TH-TC
READ(2,'/')
READ(2,*)JPREF,JPREF
WRITE(*,*)"JPREF JPREF"
WRITE(*,*)JPREF,JPREF
READ(2,'/')

```

Variables de monitoreo.

```

IMON=INT(NI/2)
JMON=INT(NJ/2)
READ(2,'/')
READ(2,*)MAXIT,URFU,URFV
WRITE(*,*)"MAXIT IMON JMON URFU URFV"
WRITE(*,*)MAXIT,IMON,JMON,URFU,URFV
READ(2,*)
READ(2,*)URFP,URFE,URFK,URFT,URFG
WRITE(*,*)"URFP URFE URFK URFT,URFG"
WRITE(*,*)URFP,URFE,URFK,URFT,URFG
READ(2,*)
READ(2,*)URFVIS,INDPRI,SORMAX
WRITE(*,*)"URFVIS INDPRI SORMAX"
WRITE(*,*)URFVIS,INDPRI,SORMAX

```

La dimensión de la cavidad se calcula en función de las propiedades del fluido. EL, representa la longitud de la cavidad; DAR el número de Darcy.

La altura se calcula con la siguiente expresión:

$$H = \left(\frac{Ra * \mu * \alpha}{\rho * g * \beta * \Delta T} \right)^{0.3333}$$

Experimentalmente Beckermann (1988) propone que se mantenga la temperatura en las paredes y se modifique el tamaño de la cavidad, en este sentido se calcula la altura en función del Ra.

Cálculo de la altura H.

```
H=(RALI*VISCOS*ALPHAF)/(DENSIT*9.81*BEITA*DELT)**0.3333
EL=H*ELBYH
DAR=RKAY/H**2
```

Inicia la generación de la malla escalonada.

```
NIM1=NI-1
NJM1=NJ-1
NIM2=NI-2
NJM2=NJ-2
DO 101 I=2,NI
```

Posiciones de la malla escalonada en la dirección x.

```
XU(I)=ELBYH*((I-2)/FLOAT(NIM2)-1/(2*3.14159)*SIN(2*3.14159*(I-2)
1/FLOAT(NIM2)))
101 CONTINUE
```

Posiciones de la malla escalonada en la dirección y para la región porosa.

```
NJP=NJ/2+1
NJPM2=NJP-2
DO 105 J=2,NJP
YV(J)=PBYH*((J-2)/FLOAT(NJPM2)-1/(2*3.14159)*SIN(2*3.14159*(J-2)
1/FLOAT(NJPM2)))
105 CONTINUE
```

Posiciones de la malla escalonada en la dirección y para la región fluida.

```
DO 106 J=NJP,NJ
YV(J)=(1.-PBYH)*((J-NJP)/FLOAT(NJ-NJP)-1/(2*3.14159)
1*SIN(2*3.14159*(J-NJP)/FLOAT(NJ-NJP)))+PBYH
106 CONTINUE
```

Cálculo del parámetro adimensional, u_{ref} ,

```
UREF=ALPHAF*(PRANDL*RALI)**0.5/H
```

R1 y R2 son los números adimensionales dados por $\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$ y $\sqrt{Pr Ra}$, respectivamente. Estos números aparecen en las ecuaciones de transporte adimensionales.

```
R1=(PRANDL/RALI)**0.5
R2=(PRANDL*RALI)**0.5
```

CLOSE(2)
RETURN
END

B.4 Subrutina INIT

Los puntos principales se generan en esta subrutina. Para facilitar la aplicación de las condiciones de frontera para la velocidad, de no-deslizamiento e impermeabilidad, las paredes de la cavidad se localizan en puntos escalonados, lo que corresponde a los vectores. Por lo tanto $XU(2)$, $XU(NI)$, $YV(2)$ e $YV(NJ)$ se localizan en las paredes de la cavidad. Los puntos principales $X(1)$, $X(NI)$, $Y(1)$ e $Y(NJ)$ se igualan con $XU(2)$, $XU(NI)$, $YV(2)$ y $YV(NJ)$ respectivamente. $XU(1)$, $YU(1)$ son denominados puntos ficticios y no se utilizan para cálculos de las variables. Estas localizaciones sirven para el uso de las condiciones de frontera de la temperatura en la pared.

El listado de la subrutina es el siguiente:

```
INCLUDE 'common.h'
```

Cálculo de la malla principal.

```
X(1)=XU(2)
X(NI)=XU(NI)
DO 101 I=2,NIM1
101 X(I)=0.5*(XU(I+1)+XU(I))
Y(1)=YV(2)
Y(NJ)=YV(NJ)
DO 102 J=2,NJM1
102 Y(J)=0.5*(YV(J+1)+YV(J))
```

$DXPW(I)$, es la distancia entre dos puntos principales de la malla en la dirección x . Comenzando desde $X(2)$ hasta $X(NI)$.

$DXEP(I)$, es la distancia entre dos puntos de la malla principal en la dirección x . Comenzando desde $X(1)$ hasta $X(NIM1)$.

```
DXPW(1)=0.0
DXEP(NI)=0.0
DO 103 I=1,NIM1
DXEP(I)=X(I+1)-X(I)
103 DXPW(I+1)=DXEP(I)
```

$DYPS(J)$, es la distancia entre dos puntos de la malla principal en la dirección y . Comenzando desde $Y(2)$ hasta $Y(NJ)$.

$DYNP(J)$, es la distancia entre dos puntos de la malla principal en la dirección y . Comenzando desde $Y(1)$ hasta $Y(NJM1)$.

```
DYPS(1)=0.0
DYNP(NJ)=0.0
```

```

DO 104 J=1,NJM1
DYNP(J)=Y(J+1)-Y(J)
104 DYPS(J+1)=DYNP(J)

```

DXPWU(I), es la distancia entre dos puntos de la malla escalonada en la dirección x. Comenzando desde XU(3) hasta XU(NI).

DXEPU(I), es la distancia entre dos puntos de la malla escalonada en la dirección x. Comenzando desde XU(2) hasta XU(NIM1).

```

DXPWU(1)=0.0
DXPWU(2)=0.0
DXEPU(1)=0.0
DXEPU(NI)=0.0
DO 105 I=2,NIM1
DXEPU(I)=XU(I+1)-XU(I)
105 DXPWU(I+1)=DXEPU(I)

```

DYPSV(J), es la distancia entre dos puntos de la malla escalonada en la dirección y. Comenzando desde YV(3) hasta YV(NJ)

DYNPV(J), es la distancia entre dos puntos de la malla escalonada en la dirección y. Comenzando desde YV(2) hasta YV(NJM1)

```

DYPSV(1)=0.0
DYPSV(2)=0.0
DYNPV(1)=0.0
DYNPV(NJ)=0.0
DO 106 J=2,NJM1
DYNPV(J)=YV(J+1)-YV(J)
106 DYPSV(J+1)=DYNPV(J)

```

SEW(I), área asociada con el volumen de control no escalonado en la dirección x.

```

DO 107 I=1,NI
107 SEW(I)=DXEPU(I)

```

SNS(J), área asociada con el volumen de control no escalonado en la dirección y.

```

DO 108 J=1,NJ
108 SNS(J)=DYNPV(J)

```

SEWU(I), área asociada con el volumen de control escalonado en la dirección x.

```

DO 109 I=1,NI
109 SEWU(I)=DXPW(I)
DO 110 J=1,NJ

```

SNSV(J), área asociada con el volumen de control escalonado en la dirección y

110 SNSV(J)=DYPS(J)

Dentro de la subrutina **INIT** después de realizarse el cálculo de las posiciones geométricas de los volúmenes de control se inicializan las variables. Todas las variables se igualan al valor mas pequeño dado por la entrada **SMALL**, leído del archivo “Inpor.dat”, y el cual es usado para generar un campo de valores iniciales y prevenir la división entre cero. Los valores UO(I,J), VO(I,J), PO(I,J), TO(I,J), TEO(I,J), EDO(I,J), DENO(I,J), corresponden al intervalo de tiempo previo.

Inicialización de las variables.

```
DO 200 I=1,NI
DO 200 J=1,NJ
U(I,J)=SMALL
UO(I,J)=SMALL
V(I,J)=SMALL
VO(I,J)=SMALL
P(I,J)=SMALL
PO(I,J)=SMALL
PP(I,J)=SMALL
T(I,J)=0.5
TO(I,J)=0.5
TE(I,J)=SMALL
TEO(I,J)=SMALL
ED(I,J)=SMALL
EDO(I,J)=SMALL
DEN(I,J)=1.0+SMALL
DENO(I,J)=1.0+SMALL
VIS(I,J)=1.0+SMALL
GAMH(I,J)=1.0+SMALL
```

DU(I,J) y DV(I,J) son cantidades asociadas a la ecuación de corrección de la velocidad, la cual se discute mas adelante.

```
DU(I,J)=0.0
DV(I,J)=0.0
```

SU(I,J), representa el termino fuente y el cual es equivalente al término b de la ecuación discretizada general.

```
SU(I,J)=0.0
```

SP(I,J) representa a S_p en la ecuación lineal del término fuente, $\hat{S} = S_C + S_p$.

```
SP(I,J)=0.0
200 CONTINUE
DO 201 J=1,NJ
T(1,J)=1.0
201 T(NI,J)=0.0
RETURN
END
```

B.4 Subrutina PROPS . Modificación a las propiedades del fluido.

El cálculo de la viscosidad turbulenta μ_t que se suma a la viscosidad del fluido puede considerarse como una modificación en la propiedad del fluido. En esta subrutina se realiza el cálculo de la viscosidad turbulenta y en el caso de ser necesario en esta subrutina se puede implementar la modificación de otras propiedades como la densidad o la conductividad del material.

```

SUBROUTINE PROPS
  INCLUDE 'common.h'
  DO 100 I=2,NIM1
  DO 100 J=2,NJM1
  VISOLD=VIS(I,J)
  GAMHOLD=GAMH(I,J)
  IF(ED(I,J).EQ.0) GOTO 102
  VIS(I,J)=(1/R1)*DEN(I,J)*TE(I,J)**2*CMU*CD/ED(I,J)+1.0
  GO TO 101
102 VIS(I,J)=1.0
101 VIS(I,J)=URFVIS*VIS(I,J)+(1.-URFVIS)*VISOLD
  GAMH(I,J)=1.0+(VIS(I,J)-1.0)*PRANDL/PRANDT
  GAMH(I,J)=URFG*GAMH(I,J)+(1.-URFG)*GAMHOLD
100 CONTINUE
  RETURN
  END

```

GAMH(I,J) representa al término de viscosidad para la ecuación de energía, $GAMH(I,J) = (\mu + \frac{\mu_t Pr}{\sigma_T})$. VISOLD y GAMHOLD almacenan los valores de VIS(I;J) y

GAMH(I;J) de la iteración previa. La viscosidad turbulenta está incorporada en la definición de VIS(I;J). La viscosidad turbulenta tiene la siguiente forma:

$$\mu_t = \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

VIS(I,J) representa la suma total de la viscosidad del fluido y la viscosidad turbulenta. Si ED(I,J), la disipación viscosa es igual a cero, no hay turbulencia, por lo tanto VIS(I,J) es igual a la viscosidad del fluido. Cuando existe el cálculo de turbulencia URFVIS representa el factor de subrelajación para la viscosidad. URFG representa el factor de subrelajación para GAMH(I,J).

B.5 Subrutina UPDATE. Actualización de variables.

Cuando se calcula el estado transitorio se requiere de la solución obtenida en el intervalo de tiempo anterior. Los valores de convergencia de la solución de la iteración previa son almacenados como, UO(I,J) para la velocidad u , VO(I,J) para la velocidad v , PO(I,J) para la presión, DENO(I,J) para la densidad, TO(I,J) para la temperatura, TEO(I,J) para la energía cinética turbulenta, EDO(I,J) para la energía disipativa. Por lo tanto las variables son actualizadas después de cada iteración temporal para la siguiente iteración. En esta subrutina PHI(I,J) representa cualquier variable: u , v , T , P , k , ε o para la densidad del fluido. PHIO(I,J) representa el valor de la misma variable pero en el intervalo de tiempo anterior.

```

SUBROUTINE UPDATE(PHI,PHIO,NI,NJ,IT,JT)
  DIMENSION PHI(80,80),PHIO(80,80)
  NIM1=NI-1
  NJM1=NJ-1
  DO 100 I=2,NIM1
  DO 100 J=2,NJM1
  100 PHIO(I,J)=PHI(I,J)
  RETURN
  END

```

B.6 Subrutina CALCU. Cálculo de la ecuación de momentum en la dirección x.

En esta subrutina El contador I comienza desde 3 debido a la malla escalonada. Si se iniciara con I=2 al manejar los valores para obtener los valores de los coeficientes en las caras del volumen de control se tendrían puntos falsos.

```

SUBROUTINE CALCU
  INCLUDE 'commonpor.h'
  LOGICAL INHY,INCEN,STEADY
  DO 100 I=3,NIM1
  DO 101 J=2,NJM1

```

AREANS representa una área escalonada en la dirección x . AREAEW representa una área no escalonada en la dirección y . VOL representa el volumen del volumen de control.

Cálculo del volumen y área del volumen de control.

```

  AREANS=SEWU(I)
  AREAEW=SNS(J)
  VOL=SEWU(I)*SNS(J)

```

Los coeficientes convectivos se calculan en las caras del volumen de control. La velocidad u esta escalonada en la dirección x por lo tanto debe tomarse en cuenta la interpolación apropiada de los

valores de la densidad y la velocidad v . Dependiendo del dominio donde se estén llevando los cálculos, se activaran términos adicionales para considerar el medio poroso. CN,CS,CE,CW representan a F_n, F_s, F_e, F_w , respectivamente.

Cálculo de los coeficientes convectivos, F_e, F_w, F_n, F_s

```
GN=0.5*(DEN(I,J+1)+DEN(I,J))*V(I,J+1)
GNW=0.5*(DEN(I-1,J)+DEN(I-1,J+1))*V(I-1,J+1)
GS=0.5*(DEN(I,J-1)+DEN(I,J))*V(I,J)
GSW=0.5*(DEN(I-1,J)+DEN(I-1,J-1))*V(I-1,J)
GE=0.5*(DEN(I+1,J)+DEN(I,J))*U(I+1,J)
GP=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I-1,J))*U(I,J)
GW=0.5*(DEN(I-1,J)+DEN(I-2,J))*U(I-1,J)
```

Para el medio fluido

```
NJP=NJ/2+1
IF(J.GE.NJP) THEN
CN=0.5*(GN+GNW)*AREAN
CS=0.5*(GS+GSW)*AREAS
CE=0.5*(GE+GP)*AREA EW
CW=0.5*(GP+GW)*AREA EW
ELSE
```

Cuando se considera el medio poroso, el coeficiente definido por las ecuaciones se dividen entre la porosidad.

Para el medio poroso

```
CN=0.5*(GN+GNW)*AREAN/POR
CS=0.5*(GS+GSW)*AREAS/POR
CE=0.5*(GE+GP)*AREA EW/POR
CW=0.5*(GP+GW)*AREA EW/POR
END IF
```

En el cálculo de los coeficientes D_e, D_w, D_n, D_s difusivos se interpola el valor de la viscosidad representada por $VIS(I,J)$. Esta viscosidad representa la viscosidad para un flujo laminar o para un flujo turbulento. R_1 , es el factor $\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}$ el cual proviene de la adimensionalización. De manera similar que en el caso de los términos convectivos, para considerar el medio poroso se multiplica por un factor RMU.

```
VISN=0.25*(VIS(I,J)+VIS(I,J+1)+VIS(I-1,J)+VIS(I-1,J+1))
VISS=0.25*(VIS(I,J)+VIS(I,J-1)+VIS(I-1,J)+VIS(I-1,J-1))
```

Para el medio fluido

```

NJP=NJ/2+1
IF(J.GE.NJP) THEN
DN=R1*VISN*AREAN/DYNP(J)
DS=R1*VISS*AREAS/DYPS(J)
DE=R1*VIS(I,J)*AREA EW/DXEPU(I)
DW=R1*VIS(I-1,J)*AREA EW/DXPWU(I)
ELSE

```

Para el medio poroso

```

DN=RMU*R1*VISN*AREAN/DYNP(J)
DS=RMU*R1*VISS*AREAS/DYPS(J)
DE=RMU*R1*VIS(I,J)*AREA EW/DXEPU(I)
DW=RMU*R1*VIS(I-1,J)*AREA EW/DXPWU(I)
END IF

```

Los coeficientes principales a_E , a_W , a_N y a_S son evaluados dependiendo del tipo de esquema de discretización usado. Se utilizan tanto el esquema híbrido (INHY) o el esquema central (INCEN), Patankar (1980).

Para el esquema híbrido la función $A(|P|) = \llbracket 0, 1 - 0.5|P| \rrbracket$

```

IF (INHY) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CN/DN))+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CS/DS))+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CE/DE))+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CW/DW))+AMAX1(CW,0.)
END IF

```

Para el esquema de potencias la función $A(|P|) = \llbracket 0, 1 - 0.1|P|^5 \rrbracket$

```

IF (INPOT) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CN/DN))**5)+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CS/DS))**5)+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CE/DE))**5)+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CW/DW))**5)+AMAX1(CW,0.)
END IF

```

Para el término fuente S , $CPO*U(I,J)$ representa $S_C \Delta x \Delta y$ y $SP(I;J)$ representa $S_P \Delta x \Delta y$. El gradiente de la presión no esta incluido en el término fuente, esto es por que el campo de presión necesita ser calculado de manera independiente. El gradiente de la presión esta incluido en $SU(I;J)$ que representa el termino b de la ecuación discretizada. El gradiente de presión esta dado por $DU(I,J)*(P(I-1,J)-P(I,J))$.

Si la variable lógica STEADY es igual a TRUE implica la resolver el problema en estado estable

y se omite el término dependiente del tiempo. APO(I,J) representa a $a_p^0 = \frac{\rho_{\beta,p}^0 \Delta X \Delta Y}{\Delta t}$,

El parámetro SMP resulta como un residuo del cálculo de los coeficiente convectivos F .

```
IF(STEADY)THEN
APO(I,J)=0.0
ELSE
APO(I,J)=DENO(I,J)*VOL/DT(ITSTEP)
END IF
SMP=CN-CS+CE-CW
CP=AMAX1(0.0,SMP)
CPO=CP
```

SU(I,J) representa el término fuente $b = S_c \Delta X \Delta Y + a_p^0 U_p^0 - \frac{\partial P}{\partial x}$

```
DU(I,J)=AREAEW
SU(I,J)=CPO*U(I,J)+DU(I,J)*(P(I-1,J)-P(I,J))+APO(I,J)*UO(I,J)
SP(I,J)=-CP
```

El término extra para dar estabilidad a la solución numérica $\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$ se

introduce en la variable SU(I,J).

```
DUDXP =(U(I+1,J)-U(I,J))/DXEPU(I)
DUDXM =(U(I,J)-U(I-1,J))/DXPWU(I)
SU(I,J)=SU(I,J)+R1*(VIS(I,J)*DUDXP-VIS(I-1,J)*DUDXM)/SEWU(I)*VOL
GAMP =0.25*(VIS(I,J)+VIS(I-1,J)+VIS(I,J+1)+VIS(I-1,J+1))
DVDXP =(V(I,J+1)-V(I-1,J+1))/DXPW(I)
GAMM =0.25*(VIS(I,J)+VIS(I-1,J)+VIS(I,J-1)+VIS(I-1,J-1))
DVDXM =(V(I,J)-V(I-1,J))/DXPW(I)
SU(I,J)=SU(I,J)+R1*(GAMP*DVDXP-GAMM*DVDXM)/SNS(J)*VOL
```

Los términos de Darcy o Forchheimer se incluyen en la parte variable de la fuente S , esto es, Sp .

```
NJP=NJ/2+1
IF(J.LT.NJP) THEN
VUD=0.25*(V(I-1,J+1)+V(I+1,J+1)+V(I-1,J-1)+V(I+1,J-1))
SP(I,J)=SP(I,J)-((R1/DAR)*RPX+(CF/DAR**0.5)*RPX**0.5
1*(VUD**2+(U(I,J)**2)**0.5)*POR*VOL
END IF
101 CONTINUE
100 CONTINUE
```

Se introducen las condiciones de frontera del sistema llamando a la subrutina,

```
CALL MODU
```

El término fuente residual RESORU da una idea acerca de la convergencia de la solución. RESORU es la diferencia en el término fuente total entre dos intervalos de iteración consecutiva.

```

RESORU=0.0
DO 300 I=3,NIM1
DO 301 J=2,NJM1
AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)+APO(I,J)-SP(I,J)
DU(I,J)=DU(I,J)/AP(I,J)
RESOR=AN(I,J)*U(I,J+1)+AS(I,J)*U(I,J-1)+AE(I,J)*U(I+1,J)
1  +AW(I,J)*U(I-1,J)-AP(I,J)*U(I,J)+SU(I,J)
VOL=SEW(I)*SNS(J)
SORVOL=GREAT*VOL
IF(-SP(I,J).GT.0.5*SORVOL) RESOR=RESOR/SORVOL
RESORU=RESORU+ABS(RESOR)

```

Se utiliza un factor de subrelajación entre cada iteración para asegurar la convergencia de los valores, aunque esto implica mayor tiempo de ejecución del programa. El método de subrelajación es usado en el presente programa, URFU representa el factor de subrelajación usado para la velocidad u . Este factor esta entre 0 y 1.

```

AP(I,J)=AP(I,J)/URFU
SU(I,J)=SU(I,J)+(1.-URFU)*AP(I,J)*U(I,J)
DU(I,J)=DU(I,J)*URFU
301 CONTINUE
300 CONTINUE

```

Se llama a la Subrutina LISOLV la cual se usa para resolver el conjunto de ecuaciones discretizadas provenientes de la ecuación de momentum . NSWPU representa el número de veces que se llamará a la subrutina para el cálculo de las ecuaciones discretizadas.

```

DO 400 N=1,NSWPU
400 CALL LISOLV(3,2,NI,NJ,IT,JT,U)
RETURN
END

```

B.7 Subrutina CALCV. Cálculo de la ecuación de momentum en la dirección y.

Esta subrutina se utiliza para calcular la ecuación de momentum en la dirección y, es muy similar en su estructura a la subrutina CALCU. Sin embargo, se debe de recordar que los puntos de la malla donde se calcula la velocidad v_y , están escalonados en la dirección y. Un término extra se incluye al término b , el término de flotación. El contador J comienza desde el valor de tres para efectos de evaluación de las condiciones de frontera y los promedios. Para $J=2$ los puntos de malla son puntos no válidos.

```
INCLUDE 'common.h'
LOGICAL INCALB,INHY,INCEN,STEADY
DO 100 I=2,NIM1
DO 101 J=3,NJM1
```

Cálculo del área y volumen del elemento de control.

```
AREANS=SEW(I)
AREAEW=SNSV(J)
VOL=SEW(I)*SNSV(J)
```

Cálculo de los coeficientes convectivos, F_e, F_w, F_n, F_s

```
GN=0.5*(DEN(I,J+1)+DEN(I,J))*V(I,J+1)
GP=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J-1))*V(I,J)
GS=0.5*(DEN(I,J-1)+DEN(I,J-2))*V(I,J-1)
GE=0.5*(DEN(I+1,J)+DEN(I,J))*U(I+1,J)
GSE=0.5*(DEN(I,J-1)+DEN(I+1,J-1))*U(I+1,J-1)
GW=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I-1,J))*U(I,J)
GSW=0.5*(DEN(I,J-1)+DEN(I-1,J-1))*U(I,J-1)
CN=0.5*(GN+GP)*AREANS
CS=0.5*(GP+GS)*AREANS
CE=0.5*(GE+GSE)*AREAEW
CW=0.5*(GW+GSW)*AREAEW
```

Cálculo de los coeficientes de difusión, D_e, D_w, D_n, D_s .

```
WISE=0.25*(VIS(I,J)+VIS(I+1,J)+VIS(I,J-1)+VIS(I+1,J-1))
VISW=0.25*(VIS(I,J)+VIS(I-1,J)+VIS(I,J-1)+VIS(I-1,J-1))
DN=R1*VIS(I,J)*AREANS/DYNPV(J)
DS=R1*VIS(I,J-1)*AREANS/DYPSV(J)
DE=R1*WISE*AREAEW/DXEP(I)
DW=R1*VISW*AREAEW/DXPW(I)
```

Para el esquema híbrido la función $A(|P|) = \llbracket 0, 1 - 0.5|P| \rrbracket$

```
IF (INHY) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CN/DN))+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CS/DS))+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CE/DE))+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CW/DW))+AMAX1(CW,0.)
```

END IF

Para el esquema de potencias la función $A(|P|) = \left[0, 1 - 0.1|P|^5\right]$

```
IF (INPOT) THEN
  AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CN/DN))**5)+AMAX1(-CN,0.)
  AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CS/DS))**5)+AMAX1(CS,0.)
  AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CE/DE))**5)+AMAX1(-CE,0.)
  AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CW/DW))**5)+AMAX1(CW,0.)
END IF
```

Cálculo del término fuente. $SU(I,J)$ representa el término fuente $b = S_c \Delta X \Delta Y + a_p V_p^0 - \frac{\partial P}{\partial x}$.

```
IF(STEADY) THEN
  APO(I,J)=0.0
ELSE
  APO(I,J)=DEN(I,J)*VOL/DT(ITSTEP)
END IF
SMP=CN-CS+CE-CW
CP=AMAX1(0.0,SMP)
CPO=CP
DV(I,J)=AREANS
SU(I,J)=CPO*V(I,J)+DV(I,J)*(P(I,J-1)-P(I,J))+APO(I,J)*VO(I,J)
```

El término de flotación está incluido en la fuente $SU(I;J)$. En el cálculo de flotación es necesario establecer la temperatura de referencia, $TREF$, sin embargo de las ecuaciones adimensionales este valor no se encuentra en la ecuación. Para mantener generalidad en el método se expresa el valor de referencia de manera explícita. Para efectos de cálculo hay que tomar en cuenta el escalonamiento de la malla, la temperatura T tiene un valor interpolado en el término $BOUYA$.

```
TREF=0.0
IF (INCALB) THEN
  BOUYA=(0.5*(T(I,J)+T(I,J-1))-TREF)
  SU(I,J)=SU(I,J)+BOUYA*VOL
END IF
SP(I,J)=-CP
```

C Aquí se introduce el término extra retenido para la estabilidad numérica,

$$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

```
DUDYP =(U(I+1,J)-U(I+1,J-1))/DYPS(J)
GAMP =0.25*(VIS(I,J)+VIS(I+1,J)+VIS(I,J-1)+VIS(I+1,J-1))
GAMM =0.25*(VIS(I,J)+VIS(I-1,J)+VIS(I,J-1)+VIS(I-1,J-1))
DUDYM =(U(I,J)-U(I,J-1))/DYPS(J)
SU(I,J)=SU(I,J)+R1*(GAMP*DUDYP-GAMM*DUDYM)/SEW(I)*VOL
```

```

DVDYP =(V(I,J+1)-V(I,J))/DYNPV(J)
RGAMP =VIS(I,J)
DVDYM =(V(I,J)-V(I,J-1))/DYPSV(J)
RGAMM =VIS(I,J-1)
SU(I,J) =SU(I,J)+R1*(RGAMP*DVDYP-RGAMM*DVDYM)/SNSV(J)*VOL

```

Los términos de Darcy o Forchheimer se incluyen en la parte variable de la fuente S , esto es, S_p .

```

NJP=NJ/2+1
IF(J.LT.NJP) THEN
UVD=0.25*(U(I-1,J+1)+U(I+1,J+1)+U(I-1,J-1)+U(I+1,J-1))
SP(I,J)=SP(I,J)-((R1/DAR)*RPY+(CF/DAR**0.5)*RPY**0.5
1*(UVD**2+(V(I,J))**2)**0.5)*POR*VOL
END IF
101 CONTINUE
100 CONTINUE

```

Se introducen las condiciones de frontera.

```
CALL MODV
```

Cálculo de los valores residuales y suma final de los coeficientes. RESORV representa el término fuente residual para la ecuación de momentum en la dirección y .

```

RESORV=0.0
DO 300 I=2,NIM1
DO 301 J=3,NJM1
AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)+APO(I,J)-SP(I,J)
DV(I,J)=DV(I,J)/AP(I,J)
RESOR=AN(I,J)*V(I,J+1)+AS(I,J)*V(I,J-1)+AE(I,J)*V(I+1,J)
1 +AW(I,J)*V(I-1,J)-AP(I,J)*V(I,J)+SU(I,J)
VOL=SEW(I)*SNS(J)
SORVOL=GREAT*VOL
IF(-SP(I,J).GT.0.5*SORVOL) RESOR=RESOR/SORVOL
RESORV=RESORV+ABS(RESOR)

```

Para acelerar la convergencia se utiliza el método de subrelajación. URFV representa el factor de subrelajación para la velocidad en la dirección y .

```

AP(I,J)=AP(I,J)/URFV
SU(I,J)=SU(I,J)+(1.-URFV)*AP(I,J)*V(I,J)
DV(I,J)=DV(I,J)*URFV
301 CONTINUE
300 CONTINUE

```

Nuevamente se llama a la subrutina LISOLV para resolver la ecuación de momentum en la dirección y . NSWPV representa el número de iteraciones internas usadas por v .

```

DO 400 N=1,NSWPV
400 CALL LISOLV(2,3,NI,NJ,IT,JT,V)
RETURN

```

END

B.8 Subrutina CALCT. Ecuación de energía térmica

El campo de temperatura se resuelve haciendo uso de la ecuación de energía térmica. La temperatura es una variable escalar y se calcula en puntos principales de la malla. Esta ecuación se resuelve de manera acoplada.

```
SUBROUTINE CALCT
  INCLUDE 'common.h'
  LOGICAL INHY, INCEN, STEADY
  DO 100 I=2, NIM1
  DO 101 J=2, NJM1
```

Para el cálculo se utilizan las áreas y los volúmenes no escalonados, diferentes a los utilizados por las velocidades.

```
  AREANS=SEW(I)
  AREAEW=SNS(J)
  VOL=SNS(J)*SEW(I)
```

Por tratarse de puntos no escalonados la velocidad no es necesario llevar a cabo interpolaciones como en el caso de las subrutinas CALU y CALV.

```
  GN=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J+1))*V(I,J+1)
  GS=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J-1))*V(I,J)
  GE=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I+1,J))*U(I+1,J)
  GW=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I-1,J))*U(I,J)
  CN=GN*AREANS
  CS=GS*AREANS
  CE=GE*AREAEW
  CW=GW*AREAEW
```

Cálculo de los coeficientes de difusión. $R2$, representa el factor no adimensional $\sqrt{Pr Ra}$.

```
  GAMN=0.5*(GAMH(I,J)+GAMH(I,J+1))
  GAMS=0.5*(GAMH(I,J)+GAMH(I,J-1))
  GAME=0.5*(GAMH(I,J)+GAMH(I+1,J))
  GAMW=0.5*(GAMH(I,J)+GAMH(I-1,J))
  DN=(1/R2)*GAMN*AREANS/DYNP(J)
  DS=(1/R2)*GAMS*AREANS/DYPS(J)
  DE=(1/R2)*GAME*AREAEW/DXEP(I)
  DW=(1/R2)*GAMW*AREAEW/DXPW(I)
```

Para el esquema híbrido la función $A(|P|) = \llbracket 0, 1 - 0.5|P| \rrbracket$

```
  IF (INHY) THEN
  AN(I,J)=DN*AMAX1(0., 1-0.5*ABS(CN/DN))+AMAX1(-CN, 0.)
  AS(I,J)=DS*AMAX1(0., 1-0.5*ABS(CS/DS))+AMAX1(CS, 0.)
  AE(I,J)=DE*AMAX1(0., 1-0.5*ABS(CE/DE))+AMAX1(-CE, 0.)
```

```
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CW/DW))+AMAX1(CW,0.)
END IF
```

Para el esquema de potencias la función $A(|P|) = \left[0, 1 - 0.1|P|^5\right]$

```
IF (INPOT) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CN/DN))**5)+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CS/DS))**5)+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CE/DE))**5)+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CW/DW))**5)+AMAX1(CW,0.)
END IF
```

Cálculo del término fuente y transitorio

```
SMP=CN-CS+CE-CW
CP=AMAX1(0.0,SMP)
CPO=CP
IF(STEADY) THEN
APO(I,J)=0.0

ELSE
APO(I,J)=DEN(I,J)*VOL/DT(ITSTEP)
END IF
SU(I,J)=CPO*T(I,J)+APO(I,J)*TO(I,J)
SP(I,J)=-CP
101 CONTINUE
100 CONTINUE
```

El comando ENTRY MODT contiene la información acerca de las condiciones de frontera para T .

```
CALL MODT
```

RESORT, representa el término residual para la energía térmica.

```
RESORT=0.0
DO 300 I=2,NIM1
DO 301 J=2,NJM1
AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)+APO(I,J)-SP(I,J)
RESOR=AN(I,J)*T(I,J+1)+AS(I,J)*T(I,J-1)+AE(I,J)*T(I+1,J)
1 +AW(I,J)*T(I-1,J)-AP(I,J)*T(I,J)+SU(I,J)
VOL=SEW(I)*SNS(J)
SORVOL=GREAT*VOL
IF(-SP(I,J).GT.0.5*SORVOL) RESOR=RESOR/SORVOL
RESORT=RESORT+ABS(RESOR)
```

URFT, representa el factor de subrelajación para la temperatura.

```
AP(I,J)=AP(I,J)/URFT
SU(I,J)=SU(I,J)+(1.0-URFT)*AP(I,J)*T(I,J)
301 CONTINUE
300 CONTINUE
```

NSWPT, representa el número de iteraciones internas aplicadas a la ecuación de energía.

```
DO 400 N=1,NSWPT
400 CALL LISOLV(2,2,NI,NJ,IT,JT,T)
RETURN
END
```

B.9 Subrutina CALCTE. Ecuación para la energía cinética turbulenta.

La energía turbulenta cinética, k , es una variable escalar y se calcula en posiciones no escalonadas. La ecuación adimensional es:

$$\rho_\beta \frac{\partial k}{\partial \tau} + \rho_\beta U \frac{\partial k}{\partial X} + \rho_\beta V \frac{\partial k}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Y} \right] + [P_k + G_k - \rho \varepsilon + D] - 2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \frac{1}{\text{Da}} \varepsilon_\beta \mu k - 6 \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} \varepsilon_\beta \rho C_F Q k$$

```
SUBROUTINE CALCTE
INCLUDE 'common.h'
LOGICAL INCALB,INHY,INCEN,STEADY
```

PRTE, representa al número de turbulencia σ_k .

```
PRTE=1.0
DO 100 I=2,NIM1
DO 101 J=2,NJM1
```

Cálculo del volumen y área del volumen de control.

```
AREANS=SEW(I)
AREA EW=SNS(J)
VOL=SNS(J)*SEW(I)
```

Cálculo de los coeficientes convectivos.

```
GN=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J+1))*V(I,J+1)
GS=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J-1))*V(I,J)
GE=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I+1,J))*U(I+1,J)
GW=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I-1,J))*U(I,J)
CN=GN*AREANS
CS=GS*AREANS
CE=GE*AREA EW
CW=GW*AREA EW
```

Cálculo de los coeficientes difusivos. VIS(I,J) representa el término de viscosidad del fluido más la viscosidad turbulenta, mientras que el término:

$$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right]$$

tiene la viscosidad del fluido y turbulenta

como dos cantidades separadas.

```
GAMN=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I,J+1)-2.0)/PRTE+R1
GAMS=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I,J-1)-2.0)/PRTE+R1
GAME=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I+1,J)-2.0)/PRTE+R1
GAMW=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I-1,J)-2.0)/PRTE+R1
DN=GAMN*AREANS/DYNP(J)
DS=GAMS*AREANS/DYPS(J)
DE=GAME*AREAEW/DXEP(I)
DW=GAMW*AREAEW/DXPW(I)
```

Términos fuentes y transitorios.

```
SMP=CN-CS+CE-CW
CP=AMAX1(0.0,SMP)
CPO=CP
DUDX=(U(I+1,J)-U(I,J))/SEW(I)
DVDY=(V(I,J+1)-V(I,J))/SNS(J)
DUDY=((U(I,J)+U(I+1,J)+U(I,J+1)+U(I+1,J+1))/4.-(U(I,J)+U(I+1,J)+
1U(I,J-1)+U(I+1,J-1))/4.)/SNS(J)
DVDX=((V(I,J)+V(I,J+1)+V(I+1,J)+V(I+1,J+1))/4.-(V(I,J)+V(I,J+1)+V(
1I-1,J)+V(I-1,J+1))/4.)/SEW(I)
```

GEN(I,J), representa el término,

$$P_k = \mu_t \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right).$$

Se observa que solamente la viscosidad

turbulenta se utiliza para la multiplicación. Se añade el factor 1.E-8 con el fin de evitar la multiplicación por cero.

```
GEN(I,J)=R1*(2.*(DUDX**2+DVDY**2)+(DUDY+DVDX)**2)
1*(VIS(I,J)-1.0+1.E-8)
```

Término de flotación. GENB(I,J) representa el término: $G_k = -\frac{l}{\sqrt{Pr Ra}} \frac{\mu_t}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial y}$

```
DTDY=(T(I,J+1)-T(I,J))/DYPS(J)
GENB(I,J)=-(1/R2)*(VIS(I,J)-1.0+1.E-8)*PRANDL*DTDY/PRANDT
```

Rescribiendo los esquemas híbrido y central,

```
IF (INHY) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CN/DN))+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CS/DS))+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CE/DE))+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CW/DW))+AMAX1(CW,0.)
```

END IF

Para el esquema de potencias la función $A(|P|) = \left[0, 1 - 0.1|P|^5\right]$

```
IF (INPOT) THEN
  AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CN/DN))**5)+AMAX1(-CN,0.)
  AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CS/DS))**5)+AMAX1(CS,0.)
  AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CE/DE))**5)+AMAX1(-CE,0.)
  AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CW/DW))**5)+AMAX1(CW,0.)
END IF
```

Cálculo del término transitorio.

```
END IF
IF(STEADY) THEN
  APO(I,J)=0.0
ELSE
  APO(I,J)=DEN(I,J)*VOL/DT(ITSTEP)
ENDIF
SU(I,J)=CPO*TE(I,J)+APO(I,J)*TEO(I,J)
SU(I,J)=SU(I,J)+GEN(I,J)*VOL
IF (INCALB) THEN
  SU(I,J)=SU(I,J)+GENB(I,J)*VOL
END IF
SP(I,J)=-CP
```

El término $\rho\varepsilon$ esta incluido como una variable que es parte del término fuente, esto es, como S_p .

Se observa que la relación $\mu_t = \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ se utiliza para expresar a $\rho\varepsilon$ como

$\sqrt{\frac{Ra}{Pr}} c_\mu f_\mu \rho^2 \frac{k^2}{\mu_t}$. Este procedimiento se adopta para incrementar la estabilidad numérica. El

factor 1.E-8 esta incluido en $\mu_t = (\text{VIS}(I,J) - 1.0)$ con el fin de evitar la división entre cero.

```
SP(I,J)=SP(I,J)-(1/R1)*CD*CMU*DEN(I,J)**2*TE(I,J)*VOL
1/(VIS(I,J)-1.0+1.E-8)
```

Consideración de los términos propios para el medio poroso.

```
NJP=NJ/2+1
IF(J.LT.NJP) THEN
  SP1(I,J)=SP1(I,J)-2*((R1/DAR)*TE(I,J)*RPX)*POR*VOL-6*(CF/DAR**0.5)
  1*RPY**0.5*TE(I,J)*((U(I,J)**2+V(I,J)**2)**0.5)*POR*VOL
101 CONTINUE
100 CONTINUE
```

El comando ENTRY MODTE tiene información de las condiciones de frontera para la energía cinética turbulenta.

CALL MODTE

RESORK, representa el término fuente residual para k .

```
RESORK=0.0
DO 300 I=2,NIM1
DO 301 J=2,NJM1
AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)+APO(I,J)-SP(I,J)
RESOR=AN(I,J)*TE(I,J+1)+AS(I,J)*TE(I,J-1)+AE(I,J)*TE(I+1,J)
1  +AW(I,J)*TE(I-1,J)-AP(I,J)*TE(I,J)+SU(I,J)
VOL=SEW(I)*SNS(J)
SORVOL=GREAT*VOL
IF(-SP(I,J).GT.0.5*SORVOL) RESOR=RESOR/SORVOL
RESORK=RESORK+ABS(RESOR)
```

URFK, representa el factor de subrelajación para k .

```
AP(I,J)=AP(I,J)/URFK
SU(I,J)=SU(I,J)+(1.-URFK)*AP(I,J)*TE(I,J)
301 CONTINUE
300 CONTINUE
```

NSWPK, representa el número de iteraciones internas usadas para resolver el sistema de ecuaciones de la energía cinética turbulenta.

```
DO 400 N=1,NSWPK
400 CALL LISOLV(2,2,NI,NJ,IT,JT,TE)
DO 401 I=2,NIM1
DO 401 J=2,NJM1
401 TE(I,J)=AMAX1(TE(I,J),SMALL)
RETURN
END
```

B.10 Subrutina CALCED. Ecuación para la energía disipativa turbulenta.

También la energía disipativa, ε , es una escalar, por lo tanto se calcula en las posiciones no escalonadas.

```
SUBROUTINE CALCED
INCLUDE 'common.h'
LOGICAL INCALB,INHY,INCEN,STEADY
DO 100 I=2,NIM1
DO 101 J=2,NJM1
```

Cálculo del volumen y área del volumen de control.

```
AREANS=SEW(I)
AREAEW=SNS(J)
VOL=SNS(J)*SEW(I)
```

Cálculo de los coeficientes convectivos.

```

GN=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J+1))*V(I,J+1)
GS=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I,J-1))*V(I,J)
GE=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I+1,J))*U(I+1,J)
GW=0.5*(DEN(I,J)+DEN(I-1,J))*U(I,J)
CN=GN*AREANS
CS=GS*AREANS
CE=GE*AREA EW
CW=GW*AREA EW

```

Cálculo de los coeficientes difusivos. El término de difusión

$\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right]$ tiene la viscosidad del fluido y la viscosidad

del remolino como entidades separadas.

```

GAMN=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I,J+1)-2.0)/PRED+R1
GAMS=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I,J-1)-2.0)/PRED+R1
GAME=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I+1,J)-2.0)/PRED+R1
GAMW=R1*0.5*(VIS(I,J)+VIS(I-1,J)-2.0)/PRED+R1
DN=GAMN*AREANS/DYNP(J)
DS=GAMS*AREANS/DYPS(J)
DE=GAME*AREA EW/DXEP(I)
DW=GAMW*AREA EW/DXPW(I)

```

Términos fuentes y transitorios.

```

SMP=CN-CS+CE-CW
CP=AMAX1(0.0,SMP)
CPO=CP

```

Rescribiendo los esquemas híbrido y central,

```

IF (INHY) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CN/DN))+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CS/DS))+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CE/DE))+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,1-0.5*ABS(CW/DW))+AMAX1(CW,0.)
END IF

```

Para el esquema de potencias la función $A(|P|) = \left[0, 1 - 0.1|P|^5 \right]$

```

IF (INPOT) THEN
AN(I,J)=DN*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CN/DN))**5)+AMAX1(-CN,0.)
AS(I,J)=DS*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CS/DS))**5)+AMAX1(CS,0.)
AE(I,J)=DE*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CE/DE))**5)+AMAX1(-CE,0.)
AW(I,J)=DW*AMAX1(0.,(1-0.1*ABS(CW/DW))**5)+AMAX1(CW,0.)
END IF

```

Cálculo del término transitorio.

```

IF(STEADY) THEN
APO(I,J)=0.0

```

```

ELSE
SU(I,J)=CPO*ED(I,J)+APO(I,J)*EDO(I,J)
END IF

```

El coeficiente $c_{\varepsilon 3}$ no tiene la forma universalmente aceptada. La expresión que se utiliza es la sugerida por Henkes (1990), esto es, $c_{\varepsilon 3} = \tanh|v/u|$.

```

C3=ABS((V(I,J)+V(I,J+1))/(U(I,J)+U(I+1,J)))
C3=TANH(C3)

```

$c_{\varepsilon 1} f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k}$ a ser suma a SU(I,J). Se observa que el término $\frac{\varepsilon}{k}$ no se usa directamente. De hecho la

relación $\mu_t = \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \rho c_{\mu} f_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon}$ es utilizada para escribir $\frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \rho c_{\mu} f_{\mu} \frac{k}{\mu_t}$. Este procedimiento

se implementa para mejorar la estabilidad numérica.

```

SU(I,J)=SU(I,J)+(1/R1)*C1*F1*CMU*CD*DEN(I,J)*GEN(I,J)*VOL
1*TE(I,J)/(VIS(I,J)-1.0+1.E-8)

```

Representa la suma del término $\rho c_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon \frac{\varepsilon}{k}$. Ningún cambio se ha hecho para representar este término.

```

SP(I,J)=SP(I,J)-C2*F2*DEN(I,J)*ED(I,J)*VOL/TE(I,J)

```

Consideración de los términos propios para el medio poroso.

```

NJP=NJ/2+1
IF(J.LT.NJP) THEN
SP1(I,J)=SP1(I,J)-2*((R1/DAR)*TE(I,J)*RPX)*POR*VOL-6*(CF/DAR**0.5)
1*RPY**0.5*TE(I,J)*((U(I,J)**2+V(I,J)**2)**0.5)*POR*VOL

101 CONTINUE
100 CONTINUE

```

El comando ENTRY MODED tiene información referente a las condiciones de frontera para ε .

```

CALL MODED

```

RESORE, representa el término residual fuente para ε .

```

RESORE=0.0
DO 300 I=2,NIM1
DO 301 J=2,NJM1
AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)+APO(I,J)-SP(I,J)
RESOR=AN(I,J)*ED(I,J+1)+AS(I,J)*ED(I,J-1)+AE(I,J)*ED(I+1,J)
1+AW(I,J)*ED(I-1,J)-AP(I,J)*ED(I,J)+SU(I,J)
VOL=SNS(J)*SEW(I)

```

```

SORVOL=GREAT*VOL
IF(-SP(I,J).GT.0.5*SORVOL) RESOR=RESOR/SORVOL
RESORE=RESORE+ABS(RESOR)

```

URFE, representa el factor de subrelajación para energía de disipación turbulenta ED(I,J).

```

AP(I,J)=AP(I,J)/URFE
SU(I,J)=SU(I,J)+(1.-URFE)*AP(I,J)*ED(I,J)
301 CONTINUE
300 CONTINUE

```

NSWPD, representa el número de iteraciones internas usadas para calcular ED(I,J),

```

DO 400 N=1,NSWPD
400 CALL LISOLV(2,2,NI,NJ,IT,JT,ED)
DO 401 I=2,NIM1
DO 401 J=2,NJM1
401 ED(I,J)=AMAX1(ED(I,J),SMALL)
RETURN
END

```

B.11 Subrutina PROMOD. Condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera están especificadas a través de esta subrutina. La subrutina tiene diferentes subsecciones donde se encuentran especificadas las condiciones de frontera para cada variable. Para ingresar a cada subsección se usa un comando de Fortran 77 denominado ENTRY.

```

SUBROUTINE PROMOD
INCLUDE 'common.h'

```

En esta sección se puede introducir cambios específicos en las propiedades del fluido.

```

ENTRY MODPRO
RETURN

```

Condiciones de frontera para la velocidad u . Son las condiciones de no-deslizamiento e impermeabilidad aplicadas a las paredes.

```

ENTRY MODU

```

Pared superior

```

J=NJM1
DO 210 I=3,NIM1
210 U(I,J+1)=0.0

```

Pared oeste. I=2 representa la pared oeste debido a que la velocidad u esta calculada en la malla escalonad en la dirección x .

```
I=3
DO 213 J=2,NJM1
213 U(I-1,J)=0.0
```

Pared inferior.

```
J=2
DO 214 I=3,NIM1
214 U(I,J-1)=0.0
```

Pared Este.

```
I=NIM1
DO 217 J=2,NJM1
217 U(I+1,J)=0.0
RETURN
```

Condiciones de frontera para la velocidad v . Se aplican las condiciones de frontera de no-deslizamiento e impermeabilidad se aplican en la pared.

```
ENTRY MODV
```

Pared Oeste.

```
I=2
DO 310 J=3,NJM1
310 V(I-1,J)=0.0
```

Pared superior

```
J=NJM1
DO 313 I=2,NIM1
313 V(I,J+1)=0.0
```

Pared Este.

```
I=NIM1
DO 314 J=3,NJM1
314 V(I+1,J)=0.0
```

Pared inferior. J=2 representa la pared inferior debido a que la velocidad v se calcula en las posiciones escalonadas de la malla en la dirección y .

```
J=3
DO 317 I=2,NIM1
```

```
317 V(I,J-1)=0.0
RETURN
```

No se aplica ninguna condición de frontera para la presión aquí. Por lo tanto no se necesitan modificaciones para la ecuación de corrección de la presión.

```
ENTRY MODP
RETURN
```

Condiciones de frontera para la temperatura T . Las paredes horizontales son adiabáticas, mientras que las paredes verticales esta a temperatura constante.

```
ENTRY MODT
```

Pared superior (adiabática). La condición de frontera adiabática: $\partial T / \partial y = 0$ en $y=0$ y $y=H$, son aproximadas por series de Taylor de primer orden.

```
J=NJM1
DO 500 I=2,NIM1
T(I,J+1)=T(I,J)
500 AN(I,J)=0.0
```

Pared Oeste (Temperatura constante TH).

```
I=2
DO 501 J=2,NJM1
T(I-1,J)=1.0
501 CONTINUE
```

Pared inferior (adiabática)

```
J=2
DO 504 I=2,NIM1
T(I,J-1)=T(I,J)
504 AS(I,J)=0.0
```

Pared Este (Temperatura constante TC)

```
I=NIM1
DO 505 J=2,NJM1
T(I+1,J)=0.0
505 CONTINUE
RETURN
```

Condiciones de frontera para la energía cinética k . Se puede utilizar la condición de frontera natural de k la cual es cero en la pared. Esto es bastante directo. Para el programa se utiliza un tipo de condición de frontera desarrollado por Wilcox (1993) que disminuye las perturbaciones.

Esta condición de frontera esta dada por la ecuación $k = \frac{(u^*)^2}{\sqrt{c_\mu f_\mu}}$, donde u^* es la velocidad de

fricción cerca de la pared .

ENTRY MODTE

Pared superior

```
J=NJM1
YP=YV(NJ)-Y(NJM1)
DO 610 I=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(U(I,J))/YP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
610 TE(I,J)=USTAR**2/SQRT(CMU*CD)
```

Pared Oeste.

```
I=2
XP=X(2)-XU(2)
DO 620 J=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(V(I,J))/XP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
620 TE(I,J)=USTAR**2/SQRT(CMU*CD)
```

Pared inferior

```
J=2
YP=Y(2)-YV(2)
DO 630 I=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(U(I,J))/YP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
630 TE(I,J)=USTAR**2/SQRT(CMU*CD)
```

Pared Este.

```
I=NIM1
XP=XU(NI)-X(NIM1)
DO 640 J=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(V(I,J))/XP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
640 TE(I,J)=USTAR**2/SQRT(CMU*CD)
RETURN
```

Condiciones de frontera para la energía disipativa ε . Para ε no existe una condición natural de

frontera. Por lo tanto se utiliza la condición derivada de la teoría de la perturbación $\varepsilon = \frac{(u^*)^3}{\kappa y^*}$,

donde κ es la constante de von Kármán, y^* es la distancia normal a la pared donde se aplica. Nuevamente esta condición de frontera es aplicada en el primer punto interno de la malla.

ENTRY MODED

Pared superior

```

YP=YV(NJ)-Y(NJM1)
J=NJM1
DO 710 I=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(U(I,J))/YP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
710 ED(I,J)=USTAR**3/(CAPPA*YP)

```

Pared Oeste.

```

XP=X(2)-XU(2)
I=2
DO 720 J=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(V(I,J))/XP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
720 ED(I,J)=USTAR**3/(CAPPA*XP)

```

Pared inferior

```

YP=Y(2)-YV(2)
J=2
DO 730 I=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(U(I,J))/YP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
730 ED(I,J)=USTAR**3/(CAPPA*YP)

```

Pared Este.

```

XP=XU(NI)-X(NIM1)
I=NIM1
DO 740 J=2,NJM1
TAU=1.0*ABS(V(I,J))/XP
USTAR=R1**0.5*SQRT(TAU/DEN(I,J))
740 ED(I,J)=USTAR**3/(CAPPA*XP)
RETURN
END

```

B.12 Subrutina DUMP.

Puesto que el número de iteraciones requeridas para la solución convergente no se pueden conocer de antemano se debe facilitar un campo calculado previamente para iteraciones posteriores. Esto se logra por medio de la subrutina **DUMP**. La solución obtenida después de un número predeterminado de iteraciones o después de satisfacer un criterio de convergencia, lo que

ocurra primero, se almacena en forma binaria en un archivo llamado DUMP. Con este procedimiento se previene cualquier pérdida de información debida a truncamiento. Así entonces, este archivo DUMP puede llamarse para cálculos posteriores.

```

SUBROUTINE DUMP(NI,NJ,U,V,P,T,TE,ED,DEN,GAMH,VIS)
  DIMENSION U(80,80),V(80,80),P(80,80),T(80,80),TE(80,80)
  I,ED(80,80),DEN(80,80),GAMH(80,80),VIS(80,80)
  WRITE(10)((U(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((V(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((P(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((T(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((TE(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((ED(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((DEN(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((GAMH(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  WRITE(10)((VIS(I,J),I=1,NI),J=1,NJ)
  RETURN
END

```

B.13 Subrutina NUSSELT.

En esta subrutina están incluidos los cálculos para el Nu promedio y local en las paredes del sistema.

```

SUBROUTINE NUSSELT
  INCLUDE 'commonpor.h'
  WRITE (11,*) 'NUSSGLOBAL'

```

Nusselt promedio en la pared caliente, $X=0$.

```

  NJP=NJ/2+1
  DX1=X(2)-XU(2)
  DX2=X(3)-X(2)
  DX=DX1+DX2
  SUMNF=0.0
  SUMN=0.0
  DO 481 J=1, NJ
    IF(J.GE.NJP) THEN
      HFLUXNF=(0.5*(GAMH(2,J)+GAMH(3,J))*(T(2,J)*DX**2-T(3,J)*DX1**2
      1-1.0*(DX**2-DX1**2))/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
    ELSE
      HFLUXNF=RKX*(0.5*(GAMH(3,J)+GAMH(2,J))*(T(2,J)*DX**2
      1-T(3,J)*DX1**2-1.0*(DX**2-DX1**2))/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
    END IF
    ANUNF=-(HFLUXNF)
    ANUNT=ANUNF*SNS(J)
    SUMNF=SUMNF+ANUNT
  481 CONTINUE
  SUMN=SUMN+SUMNF

```

```
WRITE (11,*) 'EN X=O'
WRITE (11,503) SUMN
```

Nusselt promedio en la pared caliente, $X=1$.

```
SUMNF=0.0
SUMN=0.0
NJP=NJ/2+1
DX1=XU(NI)-X(NI-1)
DX2=X(NI-1)-X(NI-2)
DX=DX1+DX2
DO 482 J=1,NJ
  IF(J.GE.NJP) THEN
    HFLUXNF=(0.5*(GAMH(NI-2,J)+GAMH(NI-1,J)))
      1*(T(NI-1,J)*DX**2-T(NI-2,J)*DX**2)/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
  ELSE
    HFLUXNF=RKX*(0.5*(GAMH(NI-2,J)+GAMH(NI-1,J)))*(T(NI-1,J)
      1*DX**2-T(NI-2,J)*DX**2)/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
  END IF
  ANUNF=(HFLUXNF)
  ANUNT=ANUNF*SNS(J)
  SUMNF=SUMNF+ANUNT
482 CONTINUE
SUMN=SUMN+SUMNF
WRITE (11,*) 'EN X=L'
WRITE (11,503) SUMN
```

Nusselt local en las paredes.

```
WRITE (12,*) 'PARED CALIENTE , X=0'
WRITE (12,*) ' Y NUSSELT LOCAL'
NJP=NJ/2+1
DO 488 J=2,NJM1
  IF(J.GE.NJP) THEN
    HFLUXNFH=(0.5*(GAMH(2,J)+GAMH(3,J)))*(T(2,J)*DX**2-T(3,J)*DX1**2
      1-T(1,J)*(DX**2-DX1**2))/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
  ELSE
    HFLUXNFH=RKX*(0.5*(GAMH(2,J)+GAMH(3,J)))*(T(2,J)*DX**2
      1-T(3,J)*DX1**2-T(1,J)*(DX**2-DX1**2))/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
  END IF
  ANUNH=-(HFLUXNFH)
  WRITE (12,503) Y(J),ANUNH
488 CONTINUE
*****
WRITE (12,*) 'PARED FRIA , X=1'
WRITE (12,*) ' Y NUSSELT LOCAL'
NJP=NJ/2+1

DO 489 J=1,NJ
  IF(J.GE.NJP) THEN
    HFLUXNC=(0.5*(GAMH(NI-2,J)+GAMH(NI-1,J)))*(T(NI-1,J)*DX**2
      1-T(NI-2,J)*DX1**2)/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
  ELSE
    HFLUXNC=RKX*(0.5*(GAMH(NI-2,J)+GAMH(NI-1,J)))*(T(NI-1,J)*DX**2
      1-T(NI-2,J)*DX1**2)/(DX1*DX**2-DX*DX1**2)
```

```

      END IF
      ANUNC=(HFLUXNC)
      WRITE (12,503) Y(J),ANUNC
489 CONTINUE
503 FORMAT(1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,
      12X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3)
      RETURN
      END

```

B.13 Subrutina NUSSELT.

Esta subrutina calcula el número de Nusselt en la interfase.

```

SUBROUTINE INTERFASE
  INCLUDE 'commonpor.h'

```

```

      NUSSI=0.0
      DELTA=TH-TC
      SUMNF=0.0
      SUMN=0.0
      ANI=0.0
      NJP=NJ/2+1
      NJP1=NJP+1
      NJP2=NJP+2
      DY1=Y(NJP1)-YV(NJP)
      DY2=Y(NJP2)-Y(NJP1)
      DY=DY1+DY2
      TPROM=0.0

```

De acuerdo con las definiciones del número de Nusselt se calcula la temperatura en la interfase T_i .

```

      WRITE (15,*) 'TEMPERATURA EN LA INTERFASE'
      WRITE (15,*) 'X T'
      DO 303 I=1,NI
        TI(I,NJP)=(T(I,NJP)+T(I,NJP1))/2
      WRITE(15,503) X(I),TI(I,NJP)
303 CONTINUE

```

Cálculo del Nu en la interfase, local y promedio del lado de la región fluida.

```

      WRITE (15,*) 'NUSSELT LOCAL EN LA INTERFASE'
      DO 302 I=1,NIM1
        DO 301 J=NJP2,NJ
          TPROM=TPROM+T(I,J)
301 CONTINUE
          TPROM=TPROM/(NJ-NJP2)
          DELTAT=(DELTA/(TI(I,NJP)-TPROM))
          GAMHI=0.5*(GAMH(I,NJP1)+GAMH(I,NJP2))
          DELTGAMH=DELTAT*GAMHI
          ANI=(T(I,NJP1)*DY**2-T(I,NJP2)*DY1**2-TI(I,NJP)*(DY**2-DY1**2))

```

```

1/(DY1*DY**2-DY*DY1**2)
ANI=ANI*DELTGAMH
ANUSSI=-(ANI)
ANUSSIT=ANUSSI*SEW(I)
SUMNF=SUMNF+ANUSSIT
WRITE (15,503) X(I),ANUSSI
302 CONTINUE
SUMN=SUMN+SUMNF
WRITE (15,*) 'NUSELT PROMEDIO INTERFACIAL'
WRITE (15,503) SUMN

```

Cálculo del Nu en la interfase, local y promedio del lado de la región porosa.

```

ANIP=0.0
DELTAP=TH-TC
SUMNFP=0.0
SUMNP=0.0
ANI=0.0
NJP=NJ/2+1
NJPM1=NJP-1
NJPM2=NJP-2
DY1=YV(NJP)-Y(NJPM1)
DY2=Y(NJPM2)-Y(NJPM1)
DY=DY1+DY2
TPROMP=0.0
WRITE (15,*) 'NUSELT LOCAL EN LA INTERFASE'

DO 309 I=1,NIM1
DO 308 J=1,NJPM2
TPROMP=TPROMP+T(I,J)
308 CONTINUE
TPROMP=TPROMP/(NJPM2)
DELTATP=(DELTA/(TI(I,NJP)-TPROM))
GAMHIP=0.5*(GAMH(I,NJPM1)+GAMH(I,NJPM2))
DELTGAMHP=DELTATP*GAMHIP
ANIP=(T(I,NJPM1)*DY**2-T(I,NJPM2)*DY1**2-TI(I,NJP)*(DY**2-DY1**2))
1/(DY1*DY**2-DY*DY1**2)
ANIP=ANIP*DELTGAMHP
ANUSSIP=-(ANIP)
ANUSSITP=ANUSSIP*SEW(I)
SUMNFP=SUMNFP+ANUSSITP
WRITE (15,503) X(I),ANUSSIP
309 CONTINUE
SUMNP=SUMNP+SUMNFP
WRITE (15,*) 'NUSELT PROMEDIO INTERFACIAL EN EL MP'
WRITE (15,503) SUMNP
503 FORMAT(1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3,
12X,1PE11.3,2X,1PE11.3,2X,1PE11.3)
RETURN
END

```

APÉNDICE C

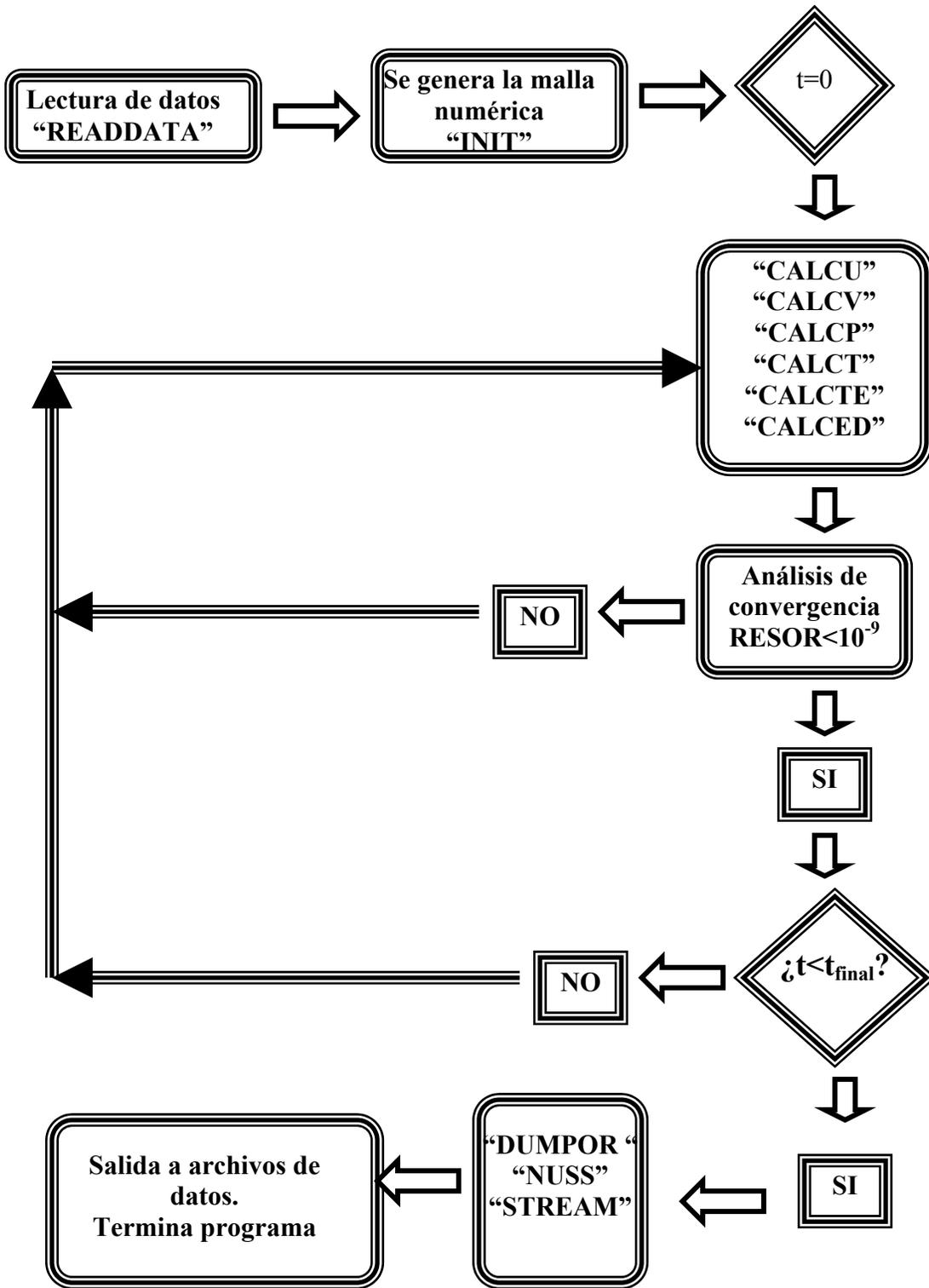


Figura C.1 Diagrama de flujo del programa Cavpor.