# METODOS ALGEBRAICOS PARA RESOLVER ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES

TESIS QUE PRESENTA

**DAVID ELIZARRARAZ MARTINEZ**

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

Junio de 1999

ASESOR: DR. LUIS VERDE STAR

CASA ABIERTA AL TIEMPO

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

# MÉTODOS ALGEBRAICOS PARA RESOLVER ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES

TESIS QUE PRESENTA

**DAVID ELIZARRARAZ MARTINEZ**

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

Junio de 1999

ASESOR: Dr. LUIS VERDE STAR

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

**A mis padres**

## Agradecimientos

Agradezco ampliamente al Dr. Luis Verde Star, director de la tesis, por todas sus atenciones, su paciencia y sus consejos, los cuales hicieron posible llevar a cabo este trabajo.

Agradezco al Dr. Roberto Quezada Batalla, al Dr. Rafaél Felipe Monroy Pérez, a la Dra. Laura Ortiz Bobadilla y al Dr. Natig M. Atakishiyev por su labor de revisión de la tesis y sus valiosas sugerencias.

Deseo expresar un especial agradecimiento al CONACYT por la beca que se me otorgó para la realización del doctorado.

Finalmente, agradezco a Marisela su comprensión y apoyo que siempre me ha brindado.

# Índice


0 **Introducción** 5

1 **Diferencias Divididas y Funciones Racionales** 9

1.1 El álgebra de los funcionales de Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.2 El álgebra $\mathcal{R}$ de las funciones racionales propias . . . . . . . . . . . . . . . 12

1.2.1 Un producto interior sobre las funciones racionales . . . . . . . . 14

1.3 Diferencias divididas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

2 **Solución de Ecuaciones Funcionales Lineales por el Método de Diferencias Divididas** 19

2.1 Solución de Ecuaciones Funcionales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.2 Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.2.1 Solución de la ecuación homogénea . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.2.2 La Ecuación No Homogénea . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

2.3 Una clase de ecuaciones diferenciales que contiene a las ecuaciones de Euler y Chebyshev . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

2.3.1 La Ecuación Homogénea . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

2.3.2 La Ecuación no Homogénea . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

2.3.3 Ecuaciones de Chebyshev y Euler . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

2.4 Ecuaciones en Diferencias . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

2.4.1 Sucesiones linealmente recurrentes . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

2.4.2 El álgebra de las sucesiones c-recurrentes . . . . . . . . . . . . . 41

2.5 Observaciones finales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

3 **Operadores Similares y un Cálculo Funcional para el Operador Diferencial Lineal de Primer Orden** 45

3.1 Similaridad y ecuaciones equivalentes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

3.2 El modelo abstracto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

3.3 Operadores similares y convoluciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

3.4 Operador diferencial lineal general de primer orden . . . . . . . . . . . . 59

3.5 Ejemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**4 Diferencias Divididas Fraccionales** **67**

4.1 Diferencias Divididas Fraccionales y Polinomios Exponenciales Generalizados . . . 67

4.2 Aplicación a las ecuaciones diferenciales fraccionales . . . 76

4.3 La Ecuación de Laplace . . . 86

**5 Conclusiones** **93**

**Bibliografía** **97**

# Índice de símbolos especiales

$\mathcal{P}$, espacio vectorial complejo de los polinomios, 9
$\mathcal{P}^*$, espacio vectorial dual de $\mathcal{P}$, 9
$\mathcal{P}_n$, subespacio de $\mathcal{P}$ de los polinomios de grado menor o igual que $n$, 9
$\mathcal{P}_n^*$, dual de $\mathcal{P}_n$, 9
$T_{a,k}$, funcional de Taylor básico, 9
$\mathcal{T}$, espacio vectorial de los funcionales de Taylor, 10
$e_{a,k}$, polinomio exponencial básico, 11
$\mathcal{E}$, espacio vectorial de los cuasi-polinomios o polinomios exponenciales, 11
$r_{a,k}$, función racional básica, 11
$\mathcal{R}$, espacio vectorial de las funciones racionales propias, 11
$s_{a,k}$, sucesión linealmente recurrente básica, 11
$\mathcal{S}$, espacio vectorial de las sucesiones linealmente recurrentes, 11
$u$, polinomio mónico de grado $n+1$, 12
$q_{i,j}, L_{j,s}$, bases duales de $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{P}_n^*$, respectivamente, 12
$C(a,j;b,i)$, coeficiente de la fórmula de descomposición en fracciones parciales, 13
$\left\langle \frac{1}{u}, \cdot \right\rangle$, funcional de diferencias divididas con respecto a las raíces de $u$, 16
$u_k(z)$, polinomios de Horner asociados a $u$, 17
$\mathcal{K}_0$, espacio vectorial complejo de las funciones seccionalmente continuas en $(0,\infty)$, 29
$\mathcal{K}(J)$, espacio vectorial complejo de las funciones seccionalmente continuas en el intervalo $J$, 34
$E$, operador de avance, 38
$H_n(z)$, polinomios de Hermite, 63
$He_n(z;c)$, polinomios de Chebyshev-Hermite, 63
$\mathcal{C}, \mathcal{C}(\theta)$, trayectorias de Hankel, 68
$\tilde{\mathcal{E}}$, espacio vectorial de los polinomios exponenciales generalizados, 73
$L_\alpha$, operador de derivada fraccional de orden $\alpha$ definido en $\tilde{\mathcal{E}}$, 73
$\mathcal{A}$, espacio vectorial de las funciones seccionalmente continuas en el intervalo $(0,\infty)$ e integrables sobre cualquier subintervalo finito de $[0,\infty)$, 76
$I_\mu$, operador integral fraccional de Riemann-Liouville de orden $\mu$, 76
$D_\mu$, operador diferencial fraccional de Riemann-Liouville de orden $\mu$, 77
$E_{\alpha,\beta}(z)$, función de Mittag-Leffler biparamétrica, 79

# Capítulo 0

# Introducción

En diversas áreas de matemáticas y sus aplicaciones, la construcción de soluciones de ecuaciones funcionales lineales es una tarea muy importante. Los métodos que usualmente se aplican con este propósito están basados en la idea de una transformada integral como la de Laplace, Fourier, Mellin o la transformada z para el caso discreto; o bien en un cálculo operacional tipo Mikusiński. En este trabajo se presenta un método algebraico que permite encontrar soluciones explícitas de ecuaciones funcionales lineales. Este método separa los fundamentos algebraicos generales presentes en los métodos que emplean transformadas, de las propiedades analíticas que caracterizan cada método en particular. Lo que obtenemos es un marco algebraico unificado de los métodos de transformadas u operacionales que permite resolver cierta clase de ecuaciones básicas realizando solamente cálculos sencillos con funciones racionales y funcionales de Taylor.

A fin de aclarar un poco lo dicho en el párrafo anterior consideremos un ejemplo bien conocido. En el caso de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, la clase básica consiste de las ecuaciones no homogéneas de la forma

$$u(D)g(t) = f(t), \tag{1}$$

donde $u$ es un polinomio en la variable compleja $z$, $D = \frac{d}{dt}$ es el operador de diferenciación usual; $f$ es un polinomio exponencial dado, es decir, $f$ es una combinación lineal finita de productos de polinomios por funciones exponenciales; y $g$ es la función incógnita la cual debe satisfacer adicionalmente algunas condiciones iniciales prescritas. Este género de ecuaciones comunmente se resuelve utilizando el método de la transformada de Laplace. Nuestra teoría algebraica nos permitirá encontrar un inverso por la derecha $M$ del operador $u(D)$ que depende, de manera simple y explícita, del polinomio $u$ y la función $e^{zt}$. De este modo la determinación de la solución $g = Mf$, resulta ser un cálculo algebraico directo. Extendiendo el dominio de $M$, podemos resolver una clase más grande de ecuaciones. Un tal proceso de extensión pudiera requerir la introducción de integrales.

El operador $D$ en (1) puede ser reemplazado por un elemento $L$ de una clase más o menos general de operadores lineales que incluye operadores diferenciales o en diferencia con coeficientes variables. Por ejemplo, aparte de (1), algunas de las ecuaciones que pueden resolverse son las siguientes.

(i) *Ecuaciones en diferencias.*

$$u(L)g(k) = f(k), \qquad k \geq 0, k \in \mathbb{N},$$

donde $L$ es el operador definido por $Lg(k) = c(k)g(k+1)$, con $c(k)$ una sucesión dada, tal que $c(k) \neq 0$ para todo $k$.
(ii) *Ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias.*

$$\begin{array}{ll}
(a) & u(L)g(t) = f(t), \quad L = a(t)D + b(t), \\
(b) & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^k D^{n-k} y = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C} \\
(c) & (a_2 t + b_2)y''(t) + (a_1 t + b_1)y'(t) + (a_0 t + b_0)y(t) = 0, \qquad a_j \in \mathbb{C}; j = 0,1,2, \\
(d) & \{(1-t^2)D^2 - tD + n^2\}g(t) = F(t), \qquad n \in \mathbb{N}, \\
(e) & \{(1-t^2)^2 D^4 - 6t(1-t^2)D^3 + (7t^2-4)D^2 + tD - n^4\}g(t) = 0,
\end{array}$$

donde $t$ es una variable real o compleja y $D = \frac{d}{dt}$.
(iii) *El Problema de Cauchy para el Operador de Derivada Fraccional de Riemann-Liouville.*

$$u(D_\mu)g = f, \qquad \lim_{t \to 0} (D_{\mu-q-1} D_\mu^l g)(t) = d_{l,q},$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\eta = \begin{cases} [\mu] + 1, & \text{si } \mu \notin \mathbb{N}, \\ \mu, & \text{si } \mu \in \mathbb{N} \end{cases}$, $l = 0, 1, \ldots, n;\ q = 0, 1, \ldots, \eta - 1$.
(iv) *Ecuaciones matriciales.*

$$M'(t) = AM(t), \qquad M(0) = C,$$

donde $A$ y $C$ son matrices $m \times m$ dadas, y $M$ una matriz $m \times m$ a determinar.

La teoría que exhibimos se basa en la existencia de varios isomorfismos entre espacios vectoriales que aparecen naturalmente en distintas áreas de matemáticas y los cuales son realizaciones concretas del álgebra de Hopf dual del álgebra de Hopf de los polinomios en una variable. Entre tales álgebras tenemos las funciones racionales propias, introducidas en [11]; el álgebra de las sucesiones linealmente recurrentes, la cual fue estudiada en [18, 19, 20]; el álgebra de los cuasipolinomios o polinomios exponenciales, que son las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes, y el álgebra de operadores de avance invariantes, la cual es fundamental en el cálculo umbral. Omitiremos los aspectos del álgebra de Hopf del método; éstos y algunos resultados sobre convoluciones y productos interiores se encuentran en [11] y [12]. Asimismo pueden consultarse [9] y [10].

Puesto que el álgebra de las funciones racionales propias juega un papel central en el desarrollo que hacemos, necesitamos algunos resultados básicos acerca de diferencias divididas, las cuales son los funcionales que corresponden a los recíprocos de polinomios cuando las funciones racionales son consideradas como elementos de ciertos espacios duales. En el Capítulo 1 presentamos algunas propiedades de los funcionales de diferencias divididas y las funciones racionales.

En el Capítulo 2 damos una primera versión de nuestro método algebraico. Se usan funciones generadoras para la construcción de álgebras de funciones que son isomorfas, como espacios vectoriales, a las funciones racionales propias. Se emplean operadores adjuntos con respecto a una función generadora y se identifican las funciones racionales con funcionales lineales, como en la teoría de funcionales analíticos desarrollada por Fantappiè [4]. Adicionalmente se incluyen varios ejemplos.

En el Capítulo 3 damos un enfoque más algebraico y simplificado de nuestro método, el cual pone de manifiesto que éste puede ser empleado para resolver ecuaciones que involucran un operador lineal que se comporta como diferenciación en un cierto sentido del álgebra lineal y además facilita la determinación de un producto de convolución adecuado. Nuestra discusión en esta parte permite generalizar algunos resultados del capítulo anterior. Se exhiben otros ejemplos.

Concluimos nuestra exposición con el Capítulo 4 donde definimos los funcionales de diferencias divididas de orden fraccional y los polinomios exponenciales generalizados. Esto constituye una extensión de nuestra teoría que tiene aplicaciones interesantes. Una de ellas está relacionada con el Cálculo Fraccional, el cual en las últimas décadas ha sido considerado por muchos autores muy apropiado para la descripción de propiedades eléctricas y mecánicas de varios materiales reales, como los polímeros; así como de propiedades reológicas de rocas. Otros campos que requieren su uso son: la recientemente elaborada teoría de fractales [45]; los modelos ARMA fraccionales en análisis de series de tiempo discretas; procesos dinámicos en estructuras porosas y autosimilares y la teoría de control de sistemas dinámicos, cuando el sistema controlado y/o el controlador se describe por una ecuación diferencial fraccional. Para ver diversas aplicaciones puede consultarse [42]. En [46, 47] se dan consideraciones físicas fundamentales en favor del uso de modelos basados en derivadas de orden no entero. En general, las derivadas fraccionales proveen un instrumento excelente para la descripción de propiedades hereditarias y memorizables. Esta es la principal ventaja de dichas derivadas en comparación con los modelos clásicos de orden entero.

La modelación matemática y simulación de sistemas y procesos empleando derivadas fraccionales conducen naturalmente a una ecuación diferencial fraccional y a la necesidad de resolver tales ecuaciones. Sin embargo, ni en los trabajos más útiles sobre cálculo fraccional se encuentran métodos generales efectivos para resolverlas. En consecuencia, nuestra investigación en esta dirección resulta sumamente útil ya que reporta algunas simplificaciones del esquema planteado en el libro de Igor Podlubny [42], que emplea transformadas integrales.

Además, en este mismo capítulo mostramos cómo nuestra teoría puede aplicarse para obtener soluciones de otras ecuaciones diferenciales de orden dos con coeficientes variables.

Una buena parte del trabajo que exponemos aparece publicado en [9], [10], [12], [15], [16] y [17]. Algunas de nuestras ideas pueden ser muy útiles en cursos de ecuaciones diferenciales, sistemas lineales o álgebra lineal, ver [14].

Finalmente, queremos decir que la teoría que se da en esta tesis puede ser considerada como una contribución a los objetivos generales del Análisis Algebraico, debido en gran parte a Przeworska-Rolewicz [6]. Véase también el libro de Dimovski [3].

# Capítulo 1

# Diferencias Divididas y Funciones Racionales

En este capítulo se presentan conceptos y resultados que serán de utilidad para todo el desarrollo posterior.

En la Sección 1.1 definimos el espacio de los funcionales de Taylor y ciertos espacios vectoriales isomorfos a éste, construidos mediante lo que llamaremos una función generadora.

En la Sección 1.2 se establecen algunas propiedades de las funciones racionales propias, entre las cuales la fórmula de descomposición en fracciones parciales es una de las principales. Para más información ver [9].

En la Sección 1.2.1 definimos un producto interior sobre el espacio vectorial complejo de las funciones racionales y se mencionan sus características elementales. La estructura de álgebra de Hopf de dicho espacio y otros detalles pueden consultarse en [11].

Concluimos dando la definición del funcional de diferencias divididas y sus propiedades básicas en la Sección 1.3. Una discusión más amplia sobre este tema puede encontrarse en [8] y [9].

## 1.1 El álgebra de los funcionales de Taylor

Denotamos por $\mathcal{P}$ el espacio vectorial complejo de todos los polinomios en la variable $z$ y por $\mathcal{P}^*$ el espacio vectorial dual de $\mathcal{P}$. Para $n \geq 0$ el subespacio de $\mathcal{P}$ de todos los polinomios cuyo grado es menor o igual a $n$ se denota por $\mathcal{P}_n$, y su dual por $\mathcal{P}_n^*$.

Describiremos la dualidad de $\mathcal{P}^*$ y $\mathcal{P}$ mediante la notación

$$\langle L, p \rangle = Lp, \qquad L \in \mathcal{P}^*, \ p \in \mathcal{P}.$$

Los funcionales de Taylor básicos $T_{a,k}$ son los elementos de $\mathcal{P}^*$ definidos por

$$\langle T_{a,k}, p \rangle = \frac{1}{k!} D^k p(a), \qquad a \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{N}, \ p \in \mathcal{P}, \tag{1.1}$$

donde $D$ denota el operador usual de diferenciación. El espacio vectorial generado por los funcionales de Taylor básicos se denota por $\mathcal{T}$, y sus elementos son llamados funcionales de Taylor.

Definimos una multiplicación conmutativa $\star$ sobre $\mathcal{T}$ como

$$T_{a,k} \star T_{b,m} = \binom{k+m}{k} T_{a+b,k+m}. \tag{1.2}$$

Nótese que $T_{0,0}$ es el elemento unidad para la multiplicación $\star$.

La regla de Leibniz para diferenciación puede expresarse en la forma

$$\frac{D^n}{n!}(pq) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} p \, \frac{D^{n-k}}{(n-k)!} q, \tag{1.3}$$

y puesto que las evaluaciones son funcionales multiplicativas, obtenemos

$$\langle T_{a,n}, pq \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle T_{a,k}, p \rangle \langle T_{a,n-k}, q \rangle . \tag{1.4}$$

A la ecuación (1.4) le llamaremos regla de Leibniz para los funcionales de Taylor.

Sea $A$ un elemento de $\mathcal{T}$. Es claro que podemos escribir

$$A = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} T_{a_i,j}, \tag{1.5}$$

donde los $a_i$ son números complejos distintos, los $m_i$ son enteros positivos y los $c_{i,j}$ son coeficientes complejos. Defínase el polinomio

$$w(z) = \prod_{i=0}^{s} (z - a_i)^{m_i}, \tag{1.6}$$

y sea $n+1$ el grado de $w$.

De la regla de Leibniz (1.4) se sigue que

$$\langle T_{a_i,j}, pw \rangle = 0, \qquad 0 \le i \le s, \ 0 \le j < m_i, \ p \in \mathcal{P},$$

y entonces $\langle A, pw \rangle = 0$ para cualquier polinomio $p$. Esto significa que el ideal $w\mathcal{P}$ está contenido en el núcleo de $A$. El teorema de interpolación de Hermite [11] puede ser usado para mostrar que $\mathcal{T}$ es el conjunto de funcionales cuyos núcleos contienen un ideal de la forma $w\mathcal{P}$. En el contexto de la teoría de álgebras de Hopf, esto implica que $\mathcal{T}$ es el dual finito o continuo de los polinomios. Ver [12].

Los funcionales de Taylor pueden aplicarse a funciones más generales que polinomios, por ejemplo a funciones enteras o meromorfas. En el tratamiento tradicional de funciones generadoras, se aplica el funcional básico $T_{0,k}$ a una función $G(z)$ para extraer el coeficiente de $z^k$ en la serie de Taylor de $G$. Usaremos funciones generadoras en una forma ligeramente diferente.

Supóngase que $G(z,t)$ es una función de dos variables para la cual

$$g_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, G(z,t)\rangle, \qquad a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N},$$

es una función de $t$, bien definida para $t$ en algún dominio apropiado y tal que las funciones $g_{a,k}$ son linealmente independientes. Entonces el espacio vectorial complejo $\mathcal{G}$ generado por las $g_{a,k}$ es isomorfo a $\mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{G}$ es generado por $G(z,t)$. Obsérvese que podemos equipar a $\mathcal{G}$ con la multiplicación $\star$ por medio del isomorfismo entre $\mathcal{G}$ y $\mathcal{T}$. Veamos algunos ejemplos.

Si $G(z,t) = e^{zt}$, donde $z$ y $t$ son variables complejas, entonces

$$e_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, G(z,t)\rangle = \frac{t^k}{k!}e^{at}, \qquad a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ el espacio vectorial complejo generado por las funciones $e_{a,k}$. Los elementos de $\mathcal{E}$ son llamados *cuasi-polinomios o polinomios exponenciales.* La multiplicación natural de los elementos básicos $e_{a,k}$, considerados como funciones de $t$, conduce a

$$e_{a,k}e_{b,m} = \binom{k+m}{k} e_{a+b,k+m}, \tag{1.8}$$

que es precisamente la multiplicación $\star$.

Como un segundo ejemplo sea ahora $G(z,t) = (t-z)^{-1}$. En este caso tenemos

$$r_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, G(z,t)\rangle = \frac{1}{(t-a)^{1+k}}, \qquad a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Estas funciones racionales básicas forman una base para el espacio $\mathcal{R}$ de las *funciones racionales propias.*

La multiplicación $\star$ da como resultado

$$\frac{1}{(t-a)^{1+k}} \star \frac{1}{(t-b)^{1+m}} = \binom{k+m}{k}\frac{1}{(t-a-b)^{1+k+m}}, \tag{1.10}$$

que es la convolución de Hurwitz. Dicha convolución usualmente se describe en términos de series de potencias o integrales complejas. Ver [36], Sección 11.6.

Finalmente, sea $G(z,n) = z^n$. Aquí se reemplaza $t$ por la variable discreta $n$, que toma valores en los enteros no negativos. Obtenemos

$$s_{a,k}(n) = \langle T_{a,k}, G(z,n)\rangle = \binom{n}{k} a^{n-k}, \qquad a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Las sucesiones $s_{a,k}(n)$ generan el espacio vectorial complejo $\mathcal{S}$ de las *sucesiones linealmente recurrentes.* Estas son las soluciones de ecuaciones en diferencia lineales, homogéneas y con coeficientes constantes. Ver [9].

Un cálculo directo usando el teorema del binomio muestra que la multiplicación $\star$ en $\mathcal{S}$ coincide con la convolución de Cauchy en el espacio de las sucesiones, definida por

$$f \star g(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f(j) g(n-j). \tag{1.12}$$

La multiplicación natural de sucesiones como funciones complejas de $n$ es la multiplicación término a término, también conocida como el producto de Hadamard.

Obsérvese que los espacios $\mathcal{T}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{R}$, y $\mathcal{S}$ son todos isomorfos como espacios vectoriales complejos y que una multiplicación en cualquiera de ellos puede ser transferida a todos los demás. Es claro que podemos agrandar la lista de estructuras isomorfas, tomando otras funciones generadoras de interés. En los capítulos posteriores nos ocuparemos de dicha tarea.

Sea $\mathcal{B}$ el espacio vectorial complejo libre generado por $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$. Note que todos los espacios considerados anteriormente son isomorfos a $\mathcal{B}$. Diremos que cada uno de ellos es una realización concreta de $\mathcal{B}$.

## 1.2 El álgebra $\mathcal{R}$ de las funciones racionales propias

Sea $r \geq 0$, sean $a_0, a_1, \ldots, a_r$ números complejos distintos y $m_0, m_1, \ldots, m_r$ enteros positivos. Definimos $n + 1 = \sum m_i$ y

$$u(z) = \prod_{i=0}^{r} (z - a_i)^{m_i} = z^{n+1} + b_1 z^n + \cdots + b_{n+1}. \tag{1.13}$$

Denotamos por $\mathcal{I}$ el conjunto de índices

$$\mathcal{I} = \{(i,j) : 0 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq m_i - 1\},$$

y para cada $(i,j)$ en $\mathcal{I}$ sea

$$q_{i,j}(z) = \frac{u(z)}{(z - a_i)^{m_i - j}}. \tag{1.14}$$

Se observa que $q_{i,j}$ es un polinomio de grado menor o igual que $n$. Si $j > 0$ entonces $a_i$ es una raíz de $q_{i,j}$ de multiplicidad $j$. Además, $a_j$ no es una raíz de $q_{j,0}$. Definimos los funcionales lineales $L_{j,s}$ por

$$\langle L_{j,s}, p \rangle = \left\langle T_{a_j,s}, \frac{p}{q_{j,0}} \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P},\ (j,s) \in \mathcal{I}. \tag{1.15}$$

La función racional

$$\frac{q_{i,k}(z)}{q_{j,0}(z)} = \frac{(z - a_j)^{m_j}}{(z - a_i)^{m_i - k}}$$

tiene a $a_j$ como una raíz de multiplicidad $m_j$ si $i \neq j$, y es igual a $(z-a_j)^k$ si $i=j$. Por consiguiente, aplicando la regla de Leibniz para los funcionales de Taylor (1.4), concluimos que

$$\langle L_{i,j}, q_{k,s}\rangle = \delta_{(i,j),(k,s)}, \qquad (i,j),(k,s) \in \mathcal{I}. \tag{1.16}$$

Esta relación de biortogonalidad implica que $\{q_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{I}\}$ es una base para $\mathcal{P}_n$ y que $\{L_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{I}\}$ es la base dual correspondiente. En consecuencia

$$p(z) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} \langle L_{i,j}, p\rangle \; q_{i,j}(z), \qquad p \in \mathcal{P}_n. \tag{1.17}$$

Dividiendo (1.17) por $u(z)$ y usando (1.14) obtenemos la *fórmula de descomposicion en fracciones parciales* (DFP)

$$\frac{p(z)}{u(z)} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} \frac{\langle L_{i,j}, p\rangle}{(z-a_i)^{m_i-j}}, \qquad p \in \mathcal{P}_n. \tag{1.18}$$

Empleando la regla de Leibniz es fácil mostrar que $L_{i,j}$ es una combinación lineal finita de los funcionales $T_{a_i,j}$, de modo que es un elemento de $\mathcal{T}$.

De (1.18) es claro que $\mathcal{R}$ es el conjunto de funciones de la forma $p/u$, donde $p$ y $u$ son polinomios, $u$ es mónico con grado positivo y el grado de $p$ es estrictamente menor que el grado de $u$.

Definimos el funcional lineal $\phi$ sobre $\mathcal{R}$ por $\phi r_{a,k} = \delta_{0,k}$. La proposición siguiente es una propiedad importante de los residuos de las funciones racionales propias. La demostración se encuentra en [9].

**Proposición 1.2.1** *Sea $u$ un polinomio mónico de grado $n+1$ y sea $p$ un elemento de $\mathcal{P}_n$. Entonces*

$$\phi\frac{p}{u} = \sum \text{Residuos de } \frac{p}{u} = \langle T_{0,n}, p\rangle \,. \tag{1.19}$$

En particular, si $p(z) = d_n z^n + d_{n-1}z^{n-1} + \ldots + d_0$ es un elemento de $\mathcal{P}_n$, entonces

$$\phi\frac{p}{u} = \begin{cases} d_n, & \text{si } \operatorname{grad}(p) = n, \\ 0, & \text{si } \operatorname{grad}(p) < n. \end{cases}$$

Veamos ahora la multiplicación de elementos de $\mathcal{R}$, considerados como funciones de $t$. Tomando $u(z) = (z-a)^{1+k}(z-b)^{1+m}$, con $a \neq b$, $p(z) = 1$, y aplicando la fórmula DFP (1.18) obtenemos

$$r_{a,k} r_{b,m} = \sum_{j=0}^{k} C(a,j;b,m) r_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{m} C(b,j;a,k) r_{b,m-j}, \tag{1.20}$$

donde los coeficientes están dados por

$$C(a,j;b,i) = \langle T_{a,j}, r_{b,i}\rangle = (-1)^j \binom{j+i}{j} (a-b)^{-1-j-i}, \qquad a \neq b,\ i,j \in \mathbb{N}. \tag{1.21}$$

Note que $r_{a,k}r_{a,m} = r_{a,1+k+m}$.

La fórmula (1.20) define una multiplicación en cualquier realización concreta $\mathcal{G}$ de $\mathcal{B}$, reemplazando $r_{a,j}$ por la correspondiente función básica de $\mathcal{G}$. Por ejemplo, en el espacio $\mathcal{E}$ tal multiplicación coincide con el producto de convolución clásico de Duhamel, definido por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

el cual fácilmente se extiende al caso de valores complejos de $t$. Ver [10].

### 1.2.1 Un producto interior sobre las funciones racionales

Definiremos ahora un producto interior sobre el espacio vectorial complejo de las funciones racionales $\mathcal{Q}$.

Para $a \neq b$ tenemos

$$\langle T_{a,k}, r_{b,m}(t)\rangle = (-1)^k \binom{k+m}{k} \frac{1}{(a-b)^{1+k+m}}. \tag{1.23}$$

El funcional $T_{a,k}$ se extiende para ser un elemento de $\mathcal{R}^*$ definiendo

$$\langle T_{a,k}, r_{a,m}\rangle = 0, \qquad a \in \mathbb{C},\ k,m \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Por lo tanto, como elemento de $\mathcal{R}^*$, $T_{a,k}$ está dado por

$$\langle T_{a,k}, f(t)\rangle = \text{ Residuo en } a \text{ de } f(t)r_{a,k}(t), \tag{1.25}$$

y definimos el producto interior como

$$(r_{a,k}, r_{b,m}) = \text{ Residuo en } a \text{ de } r_{a,k}(t)r_{b,m}(t), \tag{1.26}$$

el cual es igual a cero si $a = b$ y coincide con el lado derecho de (1.23) si $a \neq b$.

La definición (1.26) y (1.23) implican que

$$(r_{a,k}, r_{b,m}) = -(r_{b,m}, r_{a,k}).$$

Extendiendo (1.26) linealmente obtenemos un producto interior indefinido y antisimétrico sobre $\mathcal{R}$.

Utilizando el algoritmo de la división para los polinomios, cada función racional se representa en forma única como la suma de un polinomio y una función racional propia. Por consiguiente $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$ como espacios vectoriales complejos y entonces el producto interior puede extenderse a todo $\mathcal{Q}$ de la manera siguiente. Definimos primero

$$(r_{a,k}, p) = \langle T_{a,k}, p\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}.$$

Así, $(f,p)$ está bien definido para $f$ en $\mathcal{R}$ y $p$ en $\mathcal{P}$. Luego, definimos

$$(p+f, q+g) = (f,q) - (g,p) + (f,g), \qquad p,q \in \mathcal{P},\ f,g \in \mathcal{R}. \tag{1.27}$$

Nótese que $(p,q) = 0$ para cualesquier polinomios $p$ y $q$. Además el producto interior sobre $\mathcal{Q}$ es anti -simétrico.

Con la notación de producto interior, para $a \neq b$, (1.20) se expresa como

$$r_{a,k}(t)r_{b,m}(t) = \sum_{j=0}^{k}(r_{a,j}, r_{b,m})r_{a,k-j}(t) + \sum_{j=0}^{m}(r_{b,j}, r_{a,k})r_{b,m-j}(t). \tag{1.28}$$

De un cálculo directo empleando (1.28) o la interpretación del producto interior en términos de residuos resulta

$$(r_{a,n}, r_{a,k}r_{b,m}) = (r_{a,n+k+1}, r_{b,m}).$$

También es fácil verificar que

$$(r_{a,k}(t), r_{b,m}(z-t)) = \binom{k+m}{k} r_{a+b,k+m}(z), \tag{1.29}$$

y, por linealidad, obtenemos

$$(f \star g)(z) = (f(t), g(z-t)), \qquad f, g \in \mathcal{R}. \tag{1.30}$$

## 1.3 Diferencias divididas

Continuaremos empleando la notación introducida en las secciones anteriores. Sea $u(z)$ un polinomio mónico de grado $n+1$, como se definió en (1.13), y sea $p$ un elemento de $\mathcal{P}_n$. De la fórmula DFP (1.18) observamos que el elemento de $\mathcal{T}$ que corresponde a $p/u$ bajo el isomorfismo natural entre $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$ es el funcional

$$A = A(p/u) = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \langle L_{i,k}, p\rangle \, T_{a_i, m_i-1-k}. \tag{1.31}$$

Decimos que una función $f$ de una variable compleja $t$ y con valores en los complejos está definida en las raíces de $u$ si y sólo si $\langle T_{a_i,k}, f\rangle$ está bien definido para $(i,k)$ en $\mathcal{I}$. Para cualquier función $f$ con esta propiedad tenemos

$$\langle A, f\rangle = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \langle L_{i,k}, p\rangle \langle T_{a_i,m_i-1-k}, f\rangle \,. \tag{1.32}$$

De aquí en adelante escribiremos $\langle p/u, f\rangle$ en lugar de $\langle A, f\rangle$. Es decir, identificamos $p/u$ con su imagen en $\mathcal{T}$ bajo el isomorfismo natural que manda $r_{a,k}$ a $T_{a,k}$, tal y como se hizo en la definición del producto interior sobre $\mathcal{R}$.

Empleando la definición de los $L_{i,k}$ y la regla de Leibniz en (1.32) resulta la igualdad

$$\left\langle \frac{p}{u}, f \right\rangle = \sum_{i=0}^{r} \langle L_{i,m_i-1}, pf\rangle \,, \tag{1.33}$$

que puede expresarse como

$$\left\langle \frac{p}{u}, f \right\rangle = \sum_{i=0}^{r} \text{ Residuo en } a_i \text{ de } \frac{pf}{u}, \tag{1.34}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son las raíces de $u$, ver (1.13).

El funcional lineal asociado con $1/u$ es llamado *el funcional de diferencias divididas* con respecto a las raíces de $u$. Si $f$ es una función definida en las raíces de $u$ entonces

$$\left\langle \frac{1}{u}, f \right\rangle = \sum_{i=0}^{r} \text{ Residuo en } a_i \text{ de } \frac{f}{u}. \tag{1.35}$$

Como parte final de esta sección enunciaremos algunas propiedades elementales de las diferencias divididas. La mayoría de ellas son consecuencias directas de (1.34). Las demostraciones pueden verse en [8] o [9].

Si $u$ tiene raíces simples $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $f$ está definida en las $a_i$ entonces

$$\left\langle \frac{1}{u}, f \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(a_i)}{u'(a_i)}. \tag{1.36}$$

Para cualquier polinomio mónico $u$ de grado $n+1$ tenemos

$$\left\langle \frac{1}{u(z)}, z^k \right\rangle = \delta_{n,k}, \qquad 0 \le k \le n, \tag{1.37}$$

y $\left\langle 1/u, z^k \right\rangle$ es un polinomio en las raíces de $u$ si $k > n$.

Si $f$ es una función definida en las raíces de $u$ entonces

$$\left\langle \frac{1}{u}, uf \right\rangle = 0. \tag{1.38}$$

Si $u$ y $v$ son polinomios mónicos de grado positivo y $f$ está definida en las raíces de $uv$ entonces

$$\left\langle \frac{1}{uv}, vf \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u}, f \right\rangle. \tag{1.39}$$

Si $u$ y $v$ no tienen raíces comunes y $f$ está definida en las raíces de $uv$ entonces

$$\left\langle \frac{1}{uv}, f \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u}, \frac{f}{v} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{v}, \frac{f}{u} \right\rangle. \tag{1.40}$$

Las fórmulas (1.39) y (1.40) se llaman las propiedades de reducción y descomposición de las diferencias divididas, respectivamente.

Si el grado de $u$ es $n+1$ y $f$ está definida en las raíces de $u$ tenemos

$$\left\langle \frac{p}{u}, f \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u}, pf \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_n. \tag{1.41}$$

Si $p/u$ pertenece a $\mathcal{R}$, $q$ es un polinomio y $f$ está definida en las raíces de $u$ entonces

$$\left\langle \frac{p}{u}, qf \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u}, pqf \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u}, rf \right\rangle = \left\langle \frac{r}{u}, f \right\rangle, \tag{1.42}$$

donde $pq = vu + r$, y el grado de $r$ es estrictamente menor que el grado de $u$. Es decir, $r$ es el residuo de $pq$ módulo $u$.

Para cualquier número complejo $a$ y cualquier entero no negativo $k$, tenemos

$$\left\langle \frac{1}{(z-a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle = \frac{t^k}{k!} e^{at}. \tag{1.43}$$

Definimos una sucesión de polinomios $u_k(z)$ como sigue: $u_0 = 1$ y

$$u_k(z) = z^k + b_1 z^{k-1} + \cdots + b_k, \qquad k \geq 1, \tag{1.44}$$

donde los $b_j$ son los coeficientes de $u$ introducidos en (1.13).

Los $u_k(z)$ son llamados polinomios de Horner asociados a $u(z)$. Claramente forman una base del espacio vectorial $\mathcal{P}$. Observamos que

$$u_{k+1}(z) = zu_k(z) + b_{k+1}, \qquad k \geq 0, \tag{1.45}$$

y ya que $b_j = 0$ para $j > n+1$, tenemos que $u_{n+1+k}(z) = z^k u(z)$ para $k \geq 0$. Estos polinomios satisfacen la propiedad de biortogonalidad

$$\left\langle \frac{z^k u_{n-j}(z)}{u(z)}, 1 \right\rangle = \delta_{j,k}, \qquad 0 \leq k \leq n,\ 0 \leq j \leq n. \tag{1.46}$$

# Capítulo 2

# Solución de Ecuaciones Funcionales Lineales por el Método de Diferencias Divididas

Muchos problemas de aplicaciones en diversas áreas se reducen a encontrar una función $f$ que satisface una ecuación de la forma

$$u(L)g = f,$$

donde $L$ es un operador lineal, $u$ es un polinomio mónico y $f$ una función dados.

En este capítulo se da un primer enfoque de nuestro método algebraico para resolver ecuaciones de esta clase.

En la Sección 2.1 se presenta el método, utilizando funcionales de diferencias divididas.

El resto de las secciones contienen varios ejemplos de interés, como el caso de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes (Sección 2.2), ecuaciones Eulerianas y la ecuación de Chebyshev (Sección 2.3) y ecuaciones en diferencias (Sección 2.4).

## 2.1 Solución de Ecuaciones Funcionales

Sea $\mathcal{G}$ una realización concreta de $\mathcal{B}$ y $G(z,t)$ una función generadora correspondiente, tal que los elementos de $\mathcal{G}$ son funciones con valores en los complejos y que están definidas sobre cierto conjunto abierto de números complejos. Luego, una base para $\mathcal{G}$ consiste de las funciones

$$g_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, G(z,t)\rangle, \qquad (a,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Identificamos $T_{a,k}$ con $r_{a,k}$ y escribimos $g_{a,k}(t) = \langle r_{a,k}(z), G(z,t)\rangle$. Por lo tanto tenemos un isomorfismo de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{G}$, que manda un elemento $p/u$ de $\mathcal{R}$ a la función

$$g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, G(z,t) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u(z)}, p(z)G(z,t) \right\rangle. \tag{2.2}$$

Supóngase que existe un operador lineal $L$, definido en algún espacio de funciones de $t$ apropiado, que satisface

$$L\ G(z,t) = zG(z,t), \tag{2.3}$$

donde $L$ actúa con respecto a $t$. En tal caso decimos que $L$ es el adjunto de la multiplicación por $z$ para la función generadora $G(z,t)$. Por ejemplo, para $G(z,t) = e^{zt}$ tenemos $L = D_t$, el operador de diferenciación usual, puesto que

$$D_t e^{zt} = ze^{zt}. \tag{2.4}$$

Note que esta relación es lo que hace que la transformada de Laplace sea una útil herramienta para resolver ecuaciones diferenciales lineales.

Para $G(z,n) = z^n$, la función generadora de $\mathcal{S}$, el operador $L$ es el operador de avance $E$, definido por $Ef(n) = f(n+1)$, y para $G(z,t) = e^{z \log t}$, $L$ es el operador $tD_t$, el cual está asociado con la transformada de Mellin y las soluciones de ecuaciones diferenciales Eulerianas. Ver Zemanian [28].

El concepto de operador adjunto con respecto a una función de dos variables es ciertamente antiguo. En [7] tales operadores adjuntos fueron usados para relacionar formas particulares del Cálculo Umbral con un álgebra de series de Laurent formales en varias variables. Freeman [5] desarrolló la teoría de operadores adjuntos en el contexto de series de potencias formales con coeficientes polinomiales.

Para cualquier polinomio $u$ (2.3) implica que

$$u(L)G(z,t) = u(z)G(z,t).$$

Sea $g(t)$ la función definida en (2.2). Se tiene que

$$L\ g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, L\ G(z,t) \right\rangle = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, zG(z,t) \right\rangle,$$

y por (1.42),

$$L\ g(t) = \left\langle \frac{r(z)}{u(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

donde $zp(z) = cu(z) + r(z), c \in \mathbb{C}$ y el grado de $r$ es estrictamente menor que el grado de $u$. En consecuencia $Lg$ es un elemento de $\mathcal{G}$.

Note que

$$Lg_{a,0} = \langle T_{a,0}, zG(z,t) \rangle = a \langle T_{a,0}, G(z,t) \rangle = ag_{a,0},$$

y para $k \geq 1$, de la Regla de Leibniz para los funcionales de Taylor (1.4) resulta

$$\begin{aligned} Lg_{a,k} &= \langle T_{a,k}, zG(z,t) \rangle \\ &= \langle aT_{a,k} + T_{a,k-1}, G(z,t) \rangle \\ &= ag_{a,k} + g_{a,k-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la acción del operador $L$ sobre la base $\{g_{a,k}\}$ de $\mathcal{G}$ está dada por la siguiente relación

$$Lg_{a,k}(t) = \begin{cases} ag_{a,0}(t), & \text{si } k = 0, \\ ag_{a,k}(t) + g_{a,k-1}(t), & \text{si } k > 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

**Proposición 2.1.1** *Sea $u(z)$ un polinomio mónico de grado $n+1$. Entonces el subespacio lineal de $\mathcal{G}$ que consta de los elementos $g$ que satisfacen la ecuación $u(L)g = 0$ es igual al conjunto*

$$\mathcal{G}(u) = \left\{ g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, G(z,t) \right\rangle : p \in \mathcal{P}_n \right\}. \tag{2.6}$$

*Demostración.* Sea $g$ en $\mathcal{G}(u)$. De (1.38) se tiene que

$$u(L)g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, u(z)G(z,t) \right\rangle = 0.$$

Por otra parte, si $g$ es un elemento de $\mathcal{G}$ tal que $u(L)g = 0$ entonces

$$g(t) = \left\langle \frac{q(z)}{v(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

para alguna función racional propia $q/v$, con $q$ y $v$ primos relativos. Usando la propiedad (1.42) tenemos

$$0 = u(L)g(t) = \left\langle \frac{q(z)}{v(z)}, u(z)G(z,t) \right\rangle = \left\langle \frac{r(z)}{v(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

donde $q(z)u(z) = c(z)v(z) + r(z)$, y el grado de $r$ es estrictamente menor que el grado de $v$. Puesto que el mapeo de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{G}$ descrito en (2.2) es un isomorfismo, debemos tener que $r/v = 0$. Luego $r = 0$ y $v$ divide a $qu$. Pero $q$ y $v$ son primos relativos, así que $v$ divide a $u$ y $u = vw$ para algún polinomio $w$. En consecuencia $q/v = qw/vw = qw/u$ y por lo tanto $g$ es un elemento de $\mathcal{G}(u)$. ∎

**Corolario 2.1.1** *Sea $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ una base de $\mathcal{P}_n$ y sea $u$ un polinomio mónico de grado $n+1$. Si definimos*

$$g_k(t) = \left\langle \frac{p_k(z)}{u(z)}, G(z,t) \right\rangle, \qquad 0 \leq k \leq n,$$

*entonces $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ es una base de $\mathcal{G}(u)$.*

Existen varias bases de $\mathcal{P}_n$, estrechamente relacionadas a $u(z)$, para las cuales las bases correspondientes de $\mathcal{G}(u)$ son relativamente simples. Ver [9] y [10].

Consideremos ahora la ecuación no homogénea

$$u(L)g(t) = f(t), \tag{2.7}$$

donde la función $f$ es un elemento dado de $\mathcal{G}$. Sea

$$f(t) = \left\langle \frac{q(z)}{v(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

con $q/v$ en $\mathcal{R}$ y $q$ y $v$ primos relativos.

Supóngase que

$$g(t) = \left\langle \frac{s(z)}{w(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

donde $s/w$ está en $\mathcal{R}$, es una solución de (2.7). Entonces

$$\left\langle \frac{s(z)}{w(z)}, u(z)G(z,t) \right\rangle = \left\langle \frac{q(z)}{v(z)}, G(z,t) \right\rangle. \tag{2.8}$$

Sea $su = pw + r$, con el grado de $r$ estrictamente menor que el grado de $w$. Aplicando (1.42) obtenemos que $r/w = q/v$ y por consiguiente cualquier función racional de la forma

$$\frac{s}{w} = \frac{pv + q}{uv}, \qquad p \in \mathcal{P},$$

corresponde a una solución $g$ de (2.7). Tomando $p = 0$ resulta $s/w = q/uv$. Por lo tanto

$$g(t) = \left\langle \frac{q(z)}{u(z)v(z)}, G(z,t) \right\rangle \tag{2.9}$$

es una solución particular de (2.7)

Denotemos con $*$ el producto de convolución en $\mathcal{G}$ que corresponde a la multiplicación de funciones racionales en $\mathcal{R}$. Esto significa que

$$g_{a,k}(t) * g_{b,m}(t) = \langle r_{a,k}(z) r_{b,m}(z), G(z,t) \rangle, \tag{2.10}$$

o bien, usando el isomorfismo de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{G}$ junto con (1.28), obtenemos

$$g_{a,k} * g_{b,m} = \sum_{j=0}^{k} (r_{a,j}, r_{b,m}) g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{m} (r_{b,j}, r_{a,k}) g_{b,m-j}. \tag{2.11}$$

Luego, con el producto de convolución es posible escribir (2.9) como $g(t) = f(t) * h(t)$, donde

$$h(t) = \left\langle \frac{1}{u(z)}, G(z,t) \right\rangle. \tag{2.12}$$

Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.2** *Para cualquier $f$ en $\mathcal{G}$ la función $g = f * h$, donde $h$ está definida en (2.12), es una solución particular de la ecuación (2.7).*

Puesto que

$$g_{a,0}(t) = \left\langle \frac{1}{z-a}, G(z,t) \right\rangle = \langle T_{a,0}, G(z,t) \rangle = G(a,t), \tag{2.13}$$

para todo número complejo $a$, podemos considerar $G(z,t) = g_{z,0}(t)$ y entonces

$$g(t) = f(t) * h(t) = f(t) * \left\langle \frac{1}{u(z)}, g_{z,0}(t) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u(z)}, f(t) * g_{z,0}(t) \right\rangle. \tag{2.14}$$

El intercambio de las operaciones se justifica facilmente utilizando la linealidad y el caso en el que $f$ y $1/u$ son elementos básicos de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{R}$, respectivamente.

Nótese que hemos demostrado que el mapeo lineal definido sobre $\mathcal{G}$ que manda $f$ a $f * h$, donde $h(t) = \langle 1/u(z), G(z,t) \rangle$, es un inverso por la derecha de $u(L)$.

**Proposición 2.1.3** *Para cualesquier $f$ y $g$ en $\mathcal{G}$ tenemos que*

$$L(f * g) = Lf * g + g\ \phi f, \tag{2.15}$$

*donde $\phi$ es el funcional definido sobre $\mathcal{G}$ por $\phi g_{a,k} = \delta_{0,k}$.*

*Demostración.*

Sean $f(t) = \langle p(z)/u(z), G(z,t) \rangle$ y $g(t) = \langle q(z)/v(z), G(z,t) \rangle$, con $p/u$ y $q/v$ en $\mathcal{R}$. Sea $zp(z) = cu(z) + r(z)$ donde $c$ es una constante y el grado de $r$ es menor que el grado de $u$. Puesto que $zp(z)q(z)/u(z)v(z)$ está en $\mathcal{R}$, de (1.42) se sigue que

$$L(f * g) = \left\langle \frac{p(z)q(z)}{u(z)v(z)}, zG(z,t) \right\rangle = \left\langle \frac{zp(z)q(z)}{u(z)v(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

y

$$Lf(t) = \left\langle \frac{r(z)}{u(z)}, G(z,t) \right\rangle.$$

Escribiendo

$$\frac{zp(z)q(z)}{u(z)v(z)} = c\ \frac{q(z)}{v(z)} + \frac{r(z)q(z)}{u(z)v(z)},$$

se obtiene

$$L(f * g) = c \left\langle \frac{q(z)}{v(z)}, G(z,t) \right\rangle + \left\langle \frac{r(z)q(z)}{u(z)v(z)}, G(z,t) \right\rangle,$$

y en consecuencia

$$L(f * g) = cg + Lf * g.$$

En virtud de (1.19) tenemos que

$$c = \sum \text{ Residuos de } \frac{p}{u} = \phi \frac{p}{u} = \phi f,$$

lo cual completa la demostración. ∎

De la Proposición (2.1.2) vemos que para resolver la ecuación (2.7) con una función $f(t)$ más general, necesitamos un espacio vectorial $\mathcal{H}$ que contenga a $\mathcal{G}$ y una extensión de la convolución $*$ a una forma bilineal $\tilde{*} : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Entonces, para cualquier $f$ en $\mathcal{H}$ el elemento $f \tilde{*} h$, con $h$ definida por (2.12), puede ser considerado como una solución generalizada de (2.7). En muchos casos, el encontrar una representación integral para la convolución $*$ sobre $\mathcal{G}$ provee un camino directo para construir la extensión $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

También es posible definir funciones del operador $L$ como sigue.

$$f(L)g_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, f(z)G(z,t)\rangle = \sum_{j=0}^{k} \langle T_{a,j}, f(z)\rangle\, g_{a,k-j}(t),$$

donde $f$ es alguna función apropiada. Por ejemplo, si $L = D$ y $G(z,t) = e^{zt}$ entonces, para $a \neq 0$ y un número complejo $\alpha$, tenemos

$$D^{\alpha}\left(\frac{t^k}{k!}e^{at}\right) = \left\langle T_{a,k}, z^{\alpha}e^{zt}\right\rangle = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j} a^{\alpha-j}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}e^{at}.$$

Esta idea nos será útil para desarrollar un cálculo fraccional en el Capítulo 4.

## 2.2 Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

Como una primera aplicación de nuestros resultados, en esta sección resolveremos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u(D)g(t) &= f(t) && (2.16)\\ g^{(k)}(0) &= c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n && (2.17)\end{aligned}$$

donde $D = \frac{d}{dt}$, $u$ es un polinomio de grado positivo como se definió en (1.13), los $c_k$ son números complejos dados, f es una función conocida y t es una variable real o compleja.

Iniciaremos con el estudio de la solución de la ecuación diferencial homogénea o reducida correspondiente a (2.16), es decir el caso en que $f(t) = 0$.

### 2.2.1 Solución de la ecuación homogénea

Una función $g$ con valores en los complejos que satisface la ecuación diferencial homogénea

$$u(D)g = 0 \qquad (2.18)$$

se llama un *cuasi-polinomio o polinomio exponencial asociado a* $u$. Denotaremos por $\mathcal{E}(u)$ al conjunto de tales funciones. Es claro que $\mathcal{E}(u)$ es un espacio vectorial complejo y que es un subespacio de $\mathcal{E}(qu)$ para cualquier polinomio $q$.

La ecuación (2.4) muestra que $D$ es el operador adjunto de la multiplicación por $z$ para la función generadora $G(z,t) = e^{zt}$ y de acuerdo con (1.7) dicha función genera al espacio de los cuasi-polinomios $\mathcal{E}$. Por consiguiente, como un caso particular de la Proposición 2.1.1 tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.1** *El subespacio lineal de $\mathcal{E}$ que consta de los elementos $g$ que satisfacen la ecuación $u(D)g(t)=0$ es el conjunto*

$$\mathcal{E}(u) = \left\{ g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle : p \in \mathcal{P}_n \right\}. \tag{2.19}$$

Note que si grad$(p) > n$, de (1.34) se sigue que

$$\left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle = \left\langle \frac{r(z)}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle,$$

donde $p(z) = q(z)u(z) + r(z)$, y $r$ pertenece a $\mathcal{P}_n$. Esto nos dice que la función

$$g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle,$$

es un elemento de $\mathcal{E}(u)$ para todo polinomio $p$. Compárese con la Proposición 3.1 en [10].

Definimos el mapeo lineal $\mathcal{L}_u$ de $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{E}(u)$ por

$$\mathcal{L}_u p(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_n. \tag{2.20}$$

Consideremos la base de $\mathcal{P}_n$ que consiste de los polinomios de Horner $u_k(z)$ definidos en (1.44). Del Corolario 2.1.1 se concluye que las funciones

$$g_j(t) = \mathcal{L}_u u_{n-j}(z), \qquad 0 \leq j \leq n,$$

forman una base de $\mathcal{E}(u)$. Luego, la función

$$v(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j g_j(t) \tag{2.21}$$

es una solución de (2.18), para cualesquier números complejos $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Adicionalmente, empleando la relación de biortogonalidad (1.46) vemos que

$$v^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{n} c_j \left\langle \frac{z^k u_{n-j}(z)}{u(z)}, 1 \right\rangle = c_k. \tag{2.22}$$

De esta manera, hemos encontrado la solución del problema homogéneo de Cauchy.

**Proposición 2.2.2** *Sean $c_0, c_1, \ldots, c_n$ números complejos dados. Entonces el único elemento $v$ de $\mathcal{E}(u)$ que satisface $v^{(k)}(0) = c_k$, para $0 \leq k \leq n$, está dado por (2.21).*

**Corolario 2.2.1** *El mapeo $\mathcal{L}_u$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales y su inverso está dado por*

$$\mathcal{L}_u^{-1} f = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) u_{n-j}, \qquad f \in \mathcal{E}(u). \tag{2.23}$$

Sea $k' = m_i - 1 - k$. Los polinomios $q_{i,k'}$, con $(i,k)$ en $\mathcal{I}$, constituyen una base de $\mathcal{P}_n$; por lo cual las funciones $\mathcal{L}_u q_{i,k'}$ forman una base de $\mathcal{E}(u)$. De (1.14) y (1.43) resulta

$$\mathcal{L}_u q_{i,k'} = \left\langle \frac{1}{(z-a_i)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle = \frac{t^k}{k!} e^{a_i t}, \qquad (i,k) \in \mathcal{I}$$

Usando esta fórmula y (1.17) llegamos a la expresión.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u p(t) &= \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \langle L_{i,k'}, p \rangle \, \mathcal{L}_u q_{i,k'} \\ &= \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \langle L_{i,k'}, p \rangle \frac{t^k}{k!} e^{a_i t}, \qquad p \in \mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la siguiente.

**Proposición 2.2.3** *Sea $p$ un elemento de $\mathcal{P}_n$. Entonces*

$$\mathcal{L}_u p(t) = \sum_{i=0}^{r} p_i(t) e^{a_i t},$$

*donde*

$$p_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i - 1} \langle L_{i,k'}, p \rangle \frac{t^k}{k!}, \qquad 0 \leq i \leq r.$$

Combinando la Proposición (2.2.2) y (1.17) obtenemos la proposición que sigue.

**Proposición 2.2.4** *Sea $f$ un elemento de $\mathcal{E}(u)$. Entonces*

$$f(t) = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} a_{i,k} \frac{t^k}{k!} e^{a_i t}, \tag{2.24}$$

*donde*

$$a_{i,k} = \sum_{s=0}^{n} f^{(s)}(0) \langle L_{i,k'}, u_{n-s} \rangle, \qquad (i,k) \in \mathcal{I} \tag{2.25}$$

Esta proposición nos permite expresar la solución $v(t)$ del problema homogéneo de Cauchy (2.18)-(2.17) en términos de la base de $\mathcal{E}$ dada en (1.7) como

$$v(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} c_j b_{i,j,k} \frac{t^k}{k!} e^{a_i t}, \tag{2.26}$$

donde los coeficientes $b_{i,j,k} = \langle L_{i,m_i-1-k}, u_{n-j}\rangle$ están determinados por la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{u_{n-j}(z)}{u(z)} = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \frac{b_{i,j,k}}{(z-a_i)^{1+k}}. \tag{2.27}$$

**Corolario 2.2.2** *Sea $f$ una función de la forma*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{s} p_i(t) e^{y_i t},$$

*donde los $y_i$ son números distintos, los $p_i$ son polinomios con* $\mathrm{grad}(p_i) = j_i - 1$ *y* $\sum j_i = m+1$. *Entonces $f$ es un cuasi-polinomio y $f(t) = \mathcal{L}_u F$ donde*

$$\begin{aligned} u(z) &= \prod_{i=0}^{s} (z-y_i)^{j_i}, \\ F(z) &= \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(0) u_{n-m}(z), \end{aligned}$$

*y los $u_k$ son los polinomios de Horner de $u$.*

La propiedad de reducción de las diferencias divididas (1.39) nos lleva al siguiente resultado.

**Corolario 2.2.3** *Sea $F$ un elemento de $\mathcal{P}_n$ y sea $f(t) = \mathcal{L}_u F$. Sea $v$ el máximo común divisor de $u$ y $F$ y definamos $w$ y $q$ por las relaciones $u = wv$ y $F = qv$. Entonces $f(t) = \mathcal{L}_u q$.*

### 2.2.2 La Ecuación No Homogénea

Empezaremos considerando la ecuación diferencial

$$u(D)g(t) = f(t) \tag{2.28}$$

donde $g$ es una función desconocida, $u$ es un polinomio mónico igual que antes y $f$ es un cuasi-polinomio. Entonces existe un polinomio mónico $w$ tal que $f$ está en $\mathcal{E}(w)$ y $f = \mathcal{L}_w F$ para algún polinomio $F$ cuyo grado es estrictamente menor que el grado de $w$. Por la propiedad de reducción de las diferencias divididas podemos suponer que $w$ y $F$ son primos relativos.

Sea $G/v$ en $\mathcal{R}$. Observemos que si $h(t) = \mathcal{L}_v G$ es otro cuasi-polinomio y $*$ denota el producto de convolución en el espacio $\mathcal{E}$ definido en (2.10), entonces

$$(f * h)(t) = \mathcal{L}_w F * \mathcal{L}_v G = \mathcal{L}_{vw} FG. \tag{2.29}$$

Luego, como una consecuencia directa de la Proposición (2.1.2) y utilizando (2.29) tenemos.

**Proposición 2.2.5** *Una solución particular de la ecuación (2.28) está dada por $g_p = \mathcal{L}_{uw} F$, donde $w$ y $F$ son polinomios tales que $f = \mathcal{L}_w F$.*

Si $u$ y $F$ tienen un factor común $q$, con $\text{grad}(q) > 0$, sean $v = u/q$ y $G = F/q$. Aplicando la propiedad de reducción (1.39) resulta que $g_p = \mathcal{L}_{vw} G$.

Recuérdese además que el Corolario 2.2.2 nos proporciona $F$ y $w$ cuando $f(t)$ está dada como una combinación lineal de productos de polinomios por exponenciales.

La propiedad de descomposición de las diferencias divididas (1.40) nos conduce al siguiente.

**Corolario 2.2.4** *Bajo las hipótesis de la proposición anterior, si $u$ y $w$ son primos relativos, entonces la solución particular de la ecuación (2.28) dada por $g_p = \mathcal{L}_{uw} F$, puede escribirse en forma única como $g_p = g_1 + g_2$, donde $g_1$ pertenece a $\mathcal{E}(u)$, $g_2$ pertenece a $\mathcal{E}(w)$,*

$$g_1(t) = \left\langle \frac{1}{u(z)}, \frac{F(z)}{w(z)} e^{zt} \right\rangle \tag{2.30}$$

*y*

$$g_2(t) = \left\langle \frac{1}{w(z)}, \frac{F(z)}{u(z)} e^{zt} \right\rangle. \tag{2.31}$$

Este corolario afirma que siempre que $u$ y $w$ son primos relativos entonces $\mathcal{E}(uw)$ es la suma directa de $\mathcal{E}(u)$ y $\mathcal{E}(w)$. Note que la función racional $F/w$ de (2.30) puede ser reemplazada por el polinomio que interpola a $F/w$ en las raíces de $u$. De igual manera $F/u$ puede sustituirse por un polinomio.

Por otra parte, (1.19) y (1.34) implican que la solución particular $g_p$ satisface las condiciones

$$g_p^{(k)}(0) = \left\langle \frac{z^k F(z)}{u(z)w(z)}, 1 \right\rangle = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.32}$$

puesto que $\text{grad}(uw) - \text{grad}(z^k F) \geq 2$.

Combinando la Proposición 2.2.2 y (2.32) encontramos la solución del problema de Cauchy en el espacio de los cuasi-polinomios.

**Proposición 2.2.6** *Si $f = \mathcal{L}_w F$ es un cuasi-polinomio, la solución única del problema de Cauchy (2.16)-(2.17) en el espacio $\mathcal{E}$ puede expresarse como*

$$g(t) = \mathcal{L}_{uw} F + v(t), \tag{2.33}$$

*donde la función $v$ está dada por (2.21) o (2.26).*

Es claro también que para una $f$ como en la proposición anterior la solución general de (2.16) es de la forma

$$g(t) = \mathcal{L}_{uw}F + \mathcal{L}_u H = \mathcal{L}_{uw}\{F + wH\}, \qquad H \in \mathcal{P}_n.$$

Consideremos ahora otra clase de ecuaciones no homogéneas que aparecen con frecuencia en las aplicaciones; ver [25, 26, 27]. Para el resto de esta sección $t$ denotará una variable real y $u$ será, como siempre, un polinomio mónico de grado $n+1$. Denotamos por $\mathcal{K}_0$ al espacio vectorial complejo de las funciones de variable real, con valores en los complejos y que son seccionalmente continuas para $t \geq 0$. Encontraremos una solución particular de la ecuación

$$u(D)g(t) = f(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.34}$$

donde la función $f(t)$ es un elemento dado de $\mathcal{K}_0$.

Para cualesquier funciones $f$ y $h$ en $\mathcal{K}_0$ *el producto de convolución de Duhamel* $f * h$ se define por

$$(f * h)(t) = \int_0^t f(t-y)h(y)dy, \qquad t \geq 0. \tag{2.35}$$

Es bien sabido que la convolución de Duhamel es una operación conmutativa, asociativa y distributiva en $\mathcal{K}_0$. Ver [3].

El lema que sigue es otra propiedad bien conocida de la convolución de Duhamel. Para una demostración en un marco ligeramente distinto ver [29], Capítulo III, Teorema C.2.1.

**Lema 2.2.1** *Sean $f$ y $h$ en $\mathcal{K}_0$ y supóngase que $h(t)$ es continuamente diferenciable para $t \geq 0$. Entonces*

$$D(f * h)(t) = f(t) * h'(t) + f(t)h(0). \tag{2.36}$$

**Teorema 2.2.1** *Sea $u$ un polinomio mónico de grado $n+1$ y sea $f$ un elemento de $\mathcal{K}_0$. Defínase $g_p$ por*

$$g_p(t) = f(t) * \varphi(t), \tag{2.37}$$

*donde $\varphi(t) = \langle 1/u(z), e^{zt}\rangle$ y la convolución se calcula con respecto a $t$. Entonces $g_p$ es una solución particular de (2.34).*

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre $n$. Si $n = 0$ entonces $u(z) = z - a$ para algún número complejo $a$ y

$$\left\langle \frac{1}{z-a}, e^{zt} \right\rangle = e^{at}.$$

Por el Lema anterior tenemos

$$D\{f(t) * e^{at}\} = f(t) * ae^{at} + f(t),$$

y en consecuencia

$$(D - aI)\{f(t) * e^{at}\} = f(t).$$

Supóngase ahora que $k \geq 1$ y que el teorema es válido para cualquier $u$ de grado $k$. Sea $p(z)$ un polinomio mónico de grado $k+1$. Entonces, podemos escribir

$$p(z) = (z - a)u(z),$$

donde $a$ es un número complejo y $u$ es un polinomio mónico de grado $k$. Sea

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) * \left\langle \frac{1}{p(z)}, e^{zt} \right\rangle \\ &= f(t) * \left\langle \frac{1}{(z-a)u(z)}, e^{zt} \right\rangle \end{aligned}$$

Nuevamente, usando el Lema 2.2.1 obtenemos

$$(D - aI)g(t) = f(t) * \left\langle \frac{1}{(z-a)u(z)}, (z-a)e^{zt} \right\rangle + f(t)\epsilon_0 \left\langle \frac{1}{p(z)}, e^{zt} \right\rangle \tag{2.38}$$

donde $\epsilon_0$ denota la evaluación en $t = 0$. Pero

$$\epsilon_0 \left\langle \frac{1}{p(z)}, e^{zt} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{p(z)}, 1 \right\rangle = 0,$$

puesto que $\text{grad}(p) = k + 1 \geq 2$.

Aplicando la propiedad de reducción de las diferencias divididas (1.39) resulta

$$\left\langle \frac{1}{(z-a)u(z)}, (z-a)e^{zt} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle.$$

Por lo tanto (2.38) se reduce a

$$(D - aI)g(t) = f(t) * \left\langle \frac{1}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle,$$

y entonces

$$\begin{aligned} p(D)g(t) &= u(D)(D - aI)g(t) \\ &= u(D)\left\{ f(t) * \left\langle \frac{1}{u(z)}, e^{zt} \right\rangle \right\} \\ &= f(t). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la hipótesis de inducción. ∎

Finalmente, apuntamos que la ecuación (2.29) que nos da la convolución en $\mathcal{E}$, sigue siendo válida si $*$ denota la convolución de Duhamel. La demostración de esta aseveración se encuentra en [10], Teorema 4.2.

## 2.3 Una clase de ecuaciones diferenciales que contiene a las ecuaciones de Euler y Chebyshev

Sea $U$ un subconjunto de números reales o complejos. Sea $h$ una función diferenciable en $U$ tal que $h'(t)$ no se anula en $U$, $h(t_0) = 0$ para algún $t_0$ en $U$ y la función inversa de $h$ bajo la composición, denotada por $\tilde{h}$, existe y está definida en $h(U)$.

En esta sección estudiamos las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$u(L)g(t) = f(t), \tag{2.39}$$

donde $g$ es una función incógnita, $u$ es un polinomio no cero, $f$ es una función dada, $t$ es una variable real o compleja y $L$ es el operador definido por

$$L = \frac{1}{h'(t)}D. \tag{2.40}$$

Las ecuaciones de Chebyshev y Euler son de este tipo.

Sea $G(z,t) = e^{zh(t)}$, donde $z$ y $t$ son variables complejas, entonces

$$L\ G(z,t) = zG(z,t).$$

Es decir, el operador $L$ definido en (2.40) es el adjunto de la multiplicación por $z$ con respecto a la función generadora $G(z,t) = e^{zh(t)}$. Sea $\mathcal{H}$ el espacio vectorial complejo generado por las funciones

$$h_{a,k}(t) = \left\langle T_{a,k}, e^{zh(t)} \right\rangle = \frac{[h(t)]^k}{k!}e^{ah(t)}, \qquad (a,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}. \tag{2.41}$$

Claramente $\mathcal{H}$ es otra realización concreta de $\mathcal{B}$. Por consiguiente los resultados que se presentan a continuación son consecuencias inmediatas de la teoría general expuesta en la Sección 2.1 y constituyen una primera generalización de nuestros resultados concernientes a las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes (el caso en que $h(t) = t$). Debido a la similitud con estos últimos, solamente los enunciaremos, sin dar las demostraciones. Ver [15].

### 2.3.1 La Ecuación Homogénea

**Proposición 2.3.1** *Sea $u(z)$ un polinomio mónico de grado $n+1$. Entonces el subespacio lineal de $\mathcal{H}$ que consiste de los elementos $g$ que satisfacen la ecuación $u(L)g(t) = 0$ es igual al conjunto*

$$\mathcal{H}(u) = \left\{ g(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zh(t)} \right\rangle : p \in \mathcal{P}_n \right\}. \tag{2.42}$$

**Corolario 2.3.1** *Las funciones*

$$h_j(t) = \left\langle \frac{u_{n-j}(z)}{u(z)}, e^{zh(t)} \right\rangle, \qquad 0 \le j \le n,$$

*forman una base del espacio vectorial* $\mathcal{H}(u)$.

**Corolario 2.3.2** *Sean* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *números dados y* $F(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j u_{n-j}(z)$. *Entonces, el único elemento* $f$ *de* $\mathcal{H}(u)$ *que satisface* $L^k f(t)|_{t=t_0} = c_k$, *para* $0 \le k \le n$, *está dado por*

$$f(t) = \left\langle \frac{F(z)}{u(z)}, e^{zh(t)} \right\rangle = \sum_{j=0}^{n} c_j h_j(t).$$

Sean $p$ y $w$ polinomios tales que $p - w = qu$ para algún polinomio $q$, entonces

$$\left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zh(t)} \right\rangle = \left\langle \frac{w(z)}{u(z)}, e^{zh(t)} \right\rangle.$$

En particular, dado $p$ podemos tomar a $w$ como el residuo de $p$ módulo $u$, el cual es un elemento de $\mathcal{P}_n$.

Definimos el mapeo lineal $\tilde{\mathcal{L}}_u$ de $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{H}(u)$ como

$$\tilde{\mathcal{L}}_u\, p(t) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{zh(t)} \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_n.$$

**Corolario 2.3.3** *El mapeo* $\tilde{\mathcal{L}}_u$ *es un isomorfismo entre espacios vectoriales y su inverso está dado por*

$$\tilde{\mathcal{L}}_u^{-1}\, g = \sum_{j=0}^{n} [L^j g(t)]_{t=t_0}\, u_{n-j}(t), \qquad g \in \mathcal{H}(u).$$

Las funciones $\tilde{\mathcal{L}}_u\, q_{i,k'}$, donde $k' = m_i - 1 - k$, forman una base del espacio vectorial $\mathcal{H}(u)$. Un cálculo simple usando (1.34) nos conduce a

$$\tilde{\mathcal{L}}_u\, q_{i,k'}(t) = \frac{[h(t)]^k}{k!} e^{a_i h(t)}, \qquad (i,k) \in \mathcal{I}.$$

De esta fórmula y (1.17) concluimos la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.2** *Sea* $p$ *un elemento de* $\mathcal{P}_n$. *Entonces*

$$\tilde{\mathcal{L}}_u\, p(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i(t) e^{a_i h(t)}$$

*donde*

$$p_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i - 1} L_{i,k'} p\, \frac{[h(t)]^k}{k!}, \qquad 0 \le i \le r.$$

Combinando el Corolario 2.3.2 y (1.17) obtenemos.

**Proposición 2.3.3** *Sea $f$ un elemento de $\mathcal{H}(u)$. Entonces*

$$f(t) = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} a_{i,k} \frac{[h(t)]^k}{k!} e^{a_i h(t)}, \tag{2.43}$$

*donde*

$$a_{i,k} = \sum_{s=0}^{n} [L^s\ f(t)]_{t=t_0} L_{i,k'} u_{n-s}, \qquad (i,k)\in\mathcal{I}. \tag{2.44}$$

**Corolario 2.3.4** *Sea $f$ una función de la forma*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{s} p_i(h(t)) e^{y_i h(t)},$$

*donde los $y_i$ son números distintos, los $p_i$ son polinomios tales que* $\operatorname{grad}(p_i) = j_i - 1$ *y* $\sum j_i = m+1$. *Entonces $f$ es un elemento de $\mathcal{H}(u)$ y $f(t) = \tilde{\mathcal{L}}_u F$ con*

$$u(z) = \prod_{i=0}^{s} (z-y_i)^{j_i},$$

*y*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{m} [L^k\ f(t)]_{t=t_0} u_{m-k}(z).$$

### 2.3.2 La Ecuación no Homogénea

Consideremos ahora la ecuación no homogénea (2.39).

**Proposición 2.3.4** *Sea $F/w$ una función racional propia, $f = \tilde{\mathcal{L}}_w F$ un elemento de $\mathcal{H}$ y definamos la función $\varphi(t) = \left\langle 1/u(z), e^{zh(t)} \right\rangle$. Entonces*

$$g_p(t) = (f*\varphi)(t) = \tilde{\mathcal{L}}_{uw} F,$$

*es una solución particular de la ecuación $u(L)g = f$.*

En consecuencia, dada una función $f$ como en la proposición anterior, la solución única en el espacio $\mathcal{H}$ del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u(L)g(t) &= f(t), \\ L^k g(t)|_{t=t_0} &= c_k, \qquad 0\le k\le n, \end{aligned}$$

puede expresarse como

$$g(t) = \tilde{\mathcal{L}}_{uw} F + \tilde{v}(t), \tag{2.45}$$

donde

$$\tilde{v}(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j h_j(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} c_j b_{i,j,k} \frac{[h(t)]^k}{k!} e^{a_i h(t)}$$

con los coeficientes $b_{i,j,k}$ dados por la descomposición en fracciones parciales (2.27).

A fin de resolver ecuaciones no homogenéas con una función $f$ más general en el lado derecho, daremos una representación integral de la convolución. Para ello supondremos que $t$ es una variable real, $h$ es una función diferenciable sobre un intervalo $J$ tal que $h(t_0) = 0$ para algún $t_0$ en $J$ y $h'(t)$ es continua y no se anula en $J$. Denotamos por $\mathcal{K}(J)$ al espacio vectorial complejo de las funciones con valores en $\mathbb{C}$ y que son seccionalmente continuas en $J$.

Para cualquier par de funciones $f$ y $g$ en $\mathcal{K}(J)$ definimos el producto de convolución $f * g$ con respecto al operador $L$ como

$$(f * g)(t) = \int_{t_0}^{t} f(y) g\Big(\tilde{h}(h(t) - h(y))\Big) h'(y)\, dy, \qquad t \in I. \tag{2.46}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \tilde{h}(h(t) - h(y))$ en (2.46), podemos ver que la convolución con respecto al operador $L$ es una operación conmutativa. Asimismo, un cálculo directo nos lleva al siguiente resultado.

**Proposición 2.3.5** *Sean $f$ y $g$ en $\mathcal{K}(J)$ y supóngase que $g$ es continuamente diferenciable sobre $J$. Entonces*

$$L(f * g)(t) = f(t) * Lg(t) + f(t) g(t_0)$$

Usando esta propiedad obtenemos un resultado análogo a la Proposición 2.3.4. La demostración es similar a la del Teorema 2.2.1

**Proposición 2.3.6** *Sea $u$ un polinomio mónico de grado $n+1$ y sea $f$ un elemento de $\mathcal{K}(J)$. Defínase $g_p$ por*

$$g_p(t) = f(t) * \varphi(t)$$

*donde $\varphi(t) = \left\langle 1/u(z), e^{zh(t)} \right\rangle$ y la convolución se calcula con respecto a $t$. Entonces $g_p$ es una solución particular de la ecuación $u(L)g(t) = f(t)$.*

### 2.3.3 Ecuaciones de Chebyshev y Euler

Con objeto de ilustrar nuestros resultados previos, en esta sección encontraremos las soluciones de varias ecuaciones diferenciales.

Sea $u$ el polinomio de grado $n+1$ definido en (1.13). Consideremos primero la ecuación diferencial lineal

$$u(L_1) g(t) = F(t), \tag{2.47}$$

donde $g(t)$ es la función incógnita, $F(t)$ es una función dada y $L_1$ es el operador diferencial obtenido de (2.40) con $h(t) = -\arccos t$, es decir $L_1 = (1-t^2)^{1/2} D$. La función generadora correspondiente a este operador es $G_1(z,t) = e^{-z \arccos t}$. Obsérvese que el operador diferencial $L_1^2$ está relacionado con la transformada de Chebyshev; ver [28].

Si $F = 0$, de acuerdo con (2.43) y (2.44), la solución general de la ecuación (2.47) tiene la forma

$$g(t) = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} (-1)^k a_{i,k} \frac{(\arccos t)^k}{k!} e^{-a_i \arccos t}$$

donde

$$a_{i,k} = \sum_{s=0}^{n} [L_1^s\, g(t)]_{t=1} L_{i,k'} u_{n-s}$$

En este caso $\mathcal{K}(J)$ es el espacio vectorial complejo de las funciones $F(t)$ con valores en $\mathbb{C}$ y que son seccionalmente continuas en el intervalo $J = (-1,1)$. Para cualesquier funciones $f$ y $g$ en $\mathcal{K}(J)$ el producto de convolución (2.46) se expresa como

$$(f * g)(t) = \int_1^t f\left(ty + \sqrt{(1-t^2)(1-y^2)}\right) \frac{g(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy. \tag{2.48}$$

Por lo tanto, si $F$ es un elemento de $\mathcal{K}(J)$, entonces una solución particular de (2.47) puede obtenerse usando la Proposición 2.3.6 y (2.48).

La ecuación de Chebyshev

$$[(1-t^2)D^2 - tD + n^2]g(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

se escribe como

$$w(L_1)g(t) = 0 \tag{2.49}$$

donde $w(z) = z^2 + n^2$. La propiedad (1.36) de las diferencias divididas y (2.42) implican que su solución general está dada por

$$g(t) = \frac{p(ni)e^{-ni \arccos t}}{2ni} - \frac{p(-ni)e^{ni \arccos t}}{2ni}, \tag{2.50}$$

donde $p(z)$ es cualquier polinomio en $\mathcal{P}_1$.

Si hacemos $p(z) = z$ en (2.50), obtenemos el polinomio de Chebyshev de grado $n$, $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$. Esto es

$$T_n(t) = \left\langle \frac{z}{z^2+n^2}, e^{-z \arccos t} \right\rangle. \tag{2.51}$$

Sea $F$ la función definida por

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t \leq 0, \\ t, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Deseamos construir una solución particular $g_p(t)$ de la ecuación diferencial no homogénea $w(L_1)g(t) = F(t)$. Primero determinamos

$$\varphi(t) = \left\langle \frac{1}{w(z)}, e^{-z \arccos t} \right\rangle = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n \arccos t).$$

Luego

$$\begin{aligned} g_p(t) &= F(t) * \varphi(t) \\ &= -\frac{1}{n}\int_1^t F\left(ty + \sqrt{(1-t^2)(1-y^2)}\right)\frac{\operatorname{sen}(n \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}}dy. \end{aligned}$$

Realizando la integración, obtenemos

$$g_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\pi\sqrt{1-t^2} - 2t), & n = 1, \\ -\frac{1}{n(n^2-1)}\{\operatorname{sen}(n \arccos \sqrt{1-t^2}) + n\cos(n \arccos t)\}, & n > 1, \end{cases}$$

para $t$ en $(-1, 0)$, y

$$g_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2} \arccos t, & n = 1, \\ \frac{1}{n^2-1}\{t - \cos(n \arccos t)\}, & n > 1, \end{cases}$$

si $t$ está en $[0, 1)$.

También es posible resolver ecuaciones diferenciales de orden mayor que dos. Por ejemplo la ecuación

$$\{(1-t^2)^2 D^4 - 6t(1-t^2)D^3 + (7t^2-4)D^2 + tD - n^4\}g(t) = 0$$

es equivalente a

$$u(L_1)g(t) = 0,$$

donde $u(z) = z^4 - n^4$. Por consiguiente, si $p(z)$ es cualquier elemento de $\mathcal{P}_3$, la solución general de esta ecuación se expresa como

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{i}{4n^3}\{p(ni)e^{-ni \arccos t} - p(-ni)e^{ni \arccos t}\} \\ &\quad + \frac{1}{4n^3}\{p(n)e^{-n \arccos t} - p(-n)e^{n \arccos t}\}, \end{aligned}$$

De manera parecida, podemos encontrar soluciones de ecuaciones de la forma

$$u(L_2)g(t) = F(t), \tag{2.52}$$

donde $L_2 = tD$ y $F$ es una función apropiada. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones de Euler. El operador diferencial $L_2$ está relacionado con la transformada de Mellin. Si $F = 0$ la solución de (2.52) es

$$g(t) = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} a_{i,k}\frac{(\ln t)^k}{k!}t^{a_i},$$

con

$$a_{i,k} = \sum_{s=0}^{n} [L_2^s\ g(t)]_{t=1} L_{i,k'} u_{n-s}.$$

En este caso una representación integral de la convolución viene dada por

$$(f * g)(t) = \int_1^t f\Big(\frac{t}{y}\Big) \frac{g(y)}{y} dy \tag{2.53}$$

para cualesquier funciones $f$ y $g$ de variable real, con valores en los complejos y seccionalmente continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$.

Por último, notemos que de (2.40) es posible obtener otros operadores de interés. Por ejemplo, para las funciones

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{at+b}{ct+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \\ h(t) &= \arctan t, \\ h(t) &= t^{1/n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \\ h(t) &= \ln|\csc t - \cot t| \end{aligned}$$

tenemos los operadores

$$\begin{aligned} L &= \frac{(ct+d)^2}{ad-bc} D, \\ L &= (1+t^2)D, \\ L &= nt^{\frac{n-1}{n}} D, \\ L &= (\mathrm{sen} t)D \end{aligned}$$

respectivamente.

## 2.4 Ecuaciones en Diferencias

Como ejemplos adicionales de nuestro marco teórico general, aquí damos la versión discreta de los resultados presentados en las dos secciones anteriores. En primer lugar estudiamos las ecuaciones en diferencias lineales y con coeficientes constantes, cuyas soluciones, las sucesiones linealmente recurrentes, tienen numerosas aplicaciones en diversas áreas. En [18] se halla el enfoque de álgebra de Hopf y muchas referencias. Para ecuaciones en diferencia pueden consultarse [21], [22] y [23]. Posteriormente discutimos una clase de ecuaciones en diferencias con coeficientes variables que incluyen a las de coeficientes constantes. Ver [9] y [13].

### 2.4.1 Sucesiones linealmente recurrentes

Sea $f$ una funcion definida sobre $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$. El operador de avance $E$ manda $f$ a la sucesión $Ef$ definida por $Ef(k) = f(k+1)$.

Una sucesión $f$ con valores en $\mathbb{C}$ que satisface $u(E)f = 0$, para algún polinomio no cero $u$, se llama una *sucesión linealmente recurrente* asociada a $u$. El conjunto de estas sucesiones será denotado como $\mathcal{S}(u)$. Nótese que $\mathcal{S}(u)$ es un espacio vectorial complejo y que es un subespacio de $\mathcal{S}(qu)$ para cada polinomio $q$.

Se tiene que $Ez^k = z \cdot z^k$, asi que $E$ es el operador adjunto de multiplicación por $z$ de la función generadora $G(z,k) = z^k$, la cual genera al espacio $\mathcal{S}$ de las sucesiones linealmente recurrentes. Luego, de la Proposición 2.1.1 tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.1** *Sea $u$ un polinomio mónico de grado $n+1$. El subespacio lineal de $\mathcal{S}$ que consiste de los elementos $g$ que satisfacen la ecuación homogénea $u(E)g(k)=0$ es el conjunto*

$$\mathcal{S}(u) = \left\{ g(k) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, z^k \right\rangle : p \in \mathcal{P}_n \right\}. \tag{2.54}$$

En analogía con el caso continuo se tiene que la sucesión

$$f(k) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, z^k \right\rangle$$

es un elemento de $\mathcal{S}(u)$ para todo polinomio $p$.

Definimos el mapeo lineal $\mathcal{M}_u : \mathcal{P}_n \to \mathcal{S}(u)$ mediante la ecuación

$$\mathcal{M}_u p(k) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, z^k \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_n. \tag{2.55}$$

Del Corolario 2.1.1 concluimos la proposición que sigue.

**Proposición 2.4.2** *Las sucesiones linealmente recurrentes $g_j = \mathcal{M}_u u_{n-j}$, para $0 \leq j \leq n$, forman una base del espacio vectorial $\mathcal{S}(u)$.*

De esta proposición y empleando la relación de biortogonalidad (1.46) obtenemos inmediatamente el siguiente.

**Corolario 2.4.1** *Sean $c_0, c_1, \ldots, c_n$ números complejos . Entonces el único elemento $f$ de $\mathcal{S}(u)$ que satisface $f(k) = c_k$, para $0 \leq k \leq n$, está dado por $f = \mathcal{M}_u F$, donde*

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j u_{n-j}(z).$$

**Corolario 2.4.2** *El mapeo $\mathcal{M}_u$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales y su inverso está dado por*

$$\mathcal{M}_u^{-1} f = \sum_{j=0}^{n} f(j) u_{n-j}, \qquad f \in \mathcal{S}(u) \tag{2.56}$$

Para $(i,j)$ en $\mathcal{I}$, un cálculo sencillo usando (1.34) nos conduce a una expresión explícita de $\mathcal{M}_u\, q_{i,j'}$ de la forma

$$\mathcal{M}_u\, q_{i,j'}(k) = \left\langle \frac{1}{(z-a_i)^{1+j}}, z^k \right\rangle = \binom{k}{j} a_i^{k-j}, \qquad k \geq 0.$$

Sea $g$ en $\mathcal{P}_n$. De la fórmula anterior y (1.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u g &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} L_{i,j'} g \mathcal{M}_u q_{i,j'} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} L_{i,j'} g \binom{k}{j} a_i^{k-j}. \end{aligned}$$

Concluimos la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.3** *Sea $g$ un elemento de $\mathcal{P}_n$. Entonces*

$$\mathcal{M}_u g = \sum_{i=0}^{r} p_i(k) a_i^{k-j}, \qquad k \geq 0$$

*donde*

$$p_i(k) = \sum_{j=0}^{m_i-1} L_{i,j'} g \binom{k}{j}, \qquad k \geq 0.$$

Combinando el Corolario 2.4.1 y (1.17) obtenemos la proposición que sigue.

**Proposición 2.4.4** *Sea $f$ un elemento de $\mathcal{S}(u)$. Entonces*

$$f(k) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} a_{i,j} \binom{k}{j} a_i^{k-j}, \qquad k \geq 0 \tag{2.57}$$

*donde*

$$a_{i,j} = \sum_{s=0}^{n} f(s) L_{i,j'} u_{n-s}, \qquad (i,j) \in \mathcal{I}. \tag{2.58}$$

**Corolario 2.4.3** *Sea $f$ una sucesión dada en la forma*

$$f(k) = \sum_{i=0}^{s} p_i(k) y_i^k, \qquad k \geq 0$$

*donde los $y_i$ son números distintos, los $p_i$ son polinomios tales que* $\mathrm{grad}(p_i) = j_i - 1$ *y* $\sum j_i = m+1$. *Entonces $f$ es una sucesión linealmente recurrente y $f = \mathcal{M}_u F$ con*

$$u(z) = \prod_{i=0}^{s} (z - y_i)^{j_i},$$

*y*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{m} f(k) u_{m-k}(z).$$

La propiedad de reducción de las diferencias divididas nos conduce al siguiente resultado.

**Corolario 2.4.4** *Sea $F$ un elemento de $\mathcal{P}_n$ y sea $f = \mathcal{M}_u F$. Sea $v$ el máximo común divisor de $u$ y $F$ y definamos $w$ y $q$ por las relaciones $u = wv$ y $F = qv$. Entonces $f = \mathcal{M}_u q$.*

Sea $f$ una sucesión linealmente recurrente. Entonces, existen polinomios $w$ y $F$ con $\mathrm{grad}(F) < \mathrm{grad}(w)$ tales que $f = \mathcal{M}_w F$. Nuevamente, por la propiedad de reducción, podemos suponer que $w$ y $F$ son primos relativos. Sea $u$ un polinomio de grado $n+1$. Consideremos la ecuación en diferencias no homogénea

$$u(E)g(k) = f(k), \qquad k \geq 0, \tag{2.59}$$

donde $g$ es una sucesión desconocida.

De la Proposición (2.1.2) tenemos.

**Proposición 2.4.5** *Una solución particular de la ecuación (2.59) está dada por $g_p = \mathcal{M}_{uw} F$.*

Note que si $u$ y $F$ tienen un factor común $q$, con $\mathrm{grad}(q) > 0$, entonces $g_p = \mathcal{M}_{vw} G$, donde $v = u/q$ y $G = F/q$.

Además el Corolario 2.4.3 nos proporciona $F$ y $w$ cuando $f(k)$ está dada como una combinación lineal de productos de polinomios por exponenciales de $k$.

La propiedad de descomposición de las diferencias divididas (1.40) nos conduce al siguiente.

**Corolario 2.4.5** *Si $u$ y $w$ son primos relativos, entonces la solución particular de la ecuación (2.59) dada por $g_p = \mathcal{M}_{uw} F$, puede escribirse en forma única como $g_p = g_1 + g_2$, donde $g_1$ pertenece a $\mathcal{S}(u)$, $g_2$ pertenece a $\mathcal{S}(w)$,*

$$g_1(k) = \left\langle \frac{1}{u(z)}, z^k \frac{F(z)}{w(z)} \right\rangle, \qquad k \geq 0 \tag{2.60}$$

*y*

$$g_2(k) = \left\langle \frac{1}{w(z)}, z^k \frac{F(z)}{u(z)} \right\rangle. \qquad k \geq 0. \tag{2.61}$$

Este corolario nos dice que si $u$ y $w$ son primos relativos entonces $\mathcal{S}(uw)$ es la suma directa de $\mathcal{S}(u)$ y $\mathcal{S}(w)$. Obsérvese que es posible reemplazar la función racional $F/w$ de (2.60) por el polinomio que interpola a $F/w$ en las raíces de $u$. Asimismo $F/u$ puede sustituirse por un polinomio.

Por otra parte, (1.19) y (1.34) implican que la solución particular $g_p$ satisface las condiciones

$$g_p(j) = \left\langle \frac{z^j F(z)}{u(z)w(z)}, 1 \right\rangle = 0, \qquad 0 \leq j \leq n, \tag{2.62}$$

puesto que $\text{grad}(uw) - \text{grad}(z^k F) \geq 2$.

Sea $f$ como en (2.59). Combinando la Proposición 2.4.1 y (2.62) concluimos que la solución en $\mathcal{S}$ del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u(E)g(k) &= f(k), \qquad k \geq 0, \\ g(j) &= c_j, \qquad 0 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

puede expresarse como

$$g(t) = \mathcal{M}_{uw}F + v(k),$$

donde

$$v(k) = \sum_{j=0}^{n} c_j g_j(k) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{(i,l)\in\mathcal{I}} c_j b_{i,j,l} \binom{k}{l} a_i^{k-l}.$$

Es claro también que la solución general de (2.59) es de la forma

$$g(t) = \mathcal{M}_{uw}F + \mathcal{M}_u H = \mathcal{M}_{uw}\{F + wH\}, \qquad H \in \mathcal{P}_n.$$

## 2.4.2 El álgebra de las sucesiones c-recurrentes

Veamos ahora el caso discreto de los resultados principales de la Sección 2.3, esto es, cuando la variable t se reemplaza por la variable discreta $k$. Continuaremos empleando la notación introducida anteriormente.

Sea $c(k)$ una sucesión de números complejos tal que $c(k) \neq 0$ para $k$ en $\mathbb{N}$. Denotemos con $C(k)$ a la sucesión dada por

$$C(k) = \frac{1}{c(0)c(1)\cdots c(k-1)}, \qquad k \geq 1, \tag{2.63}$$

y $C(0) = 1$. Sea $G(z,k) = C(k)z^k$, para $(z,k)$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$. Definimos las funciones

$$g_{a,j}(k) = \langle T_{a,j}, G(z,k)\rangle = C(k)\binom{k}{j} z^{k-j}, \qquad a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.64}$$

Sea $\mathcal{S}_c$ el espacio vectorial complejo generado por las sucesiones $g_{a,j}$. Note que $\mathcal{S}_c$ coincide con el álgebra $\mathcal{S}$ de las sucesiones linealmente recurrentes si $c(k) = 1$ para toda $k$ en $\mathbb{N}$. Llamaremos a $\mathcal{S}_c$ el álgebra de las sucesiones c-recurrentes. Además es claro que el mapeo que manda la función racional propia $p/w$ a la sucesión

$$g(k) = \left\langle \frac{p(z)}{w(z)}, G(z,k) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{w(z)}, p(z)G(z,k) \right\rangle, \tag{2.65}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}_c$. La multiplicación $\star$ definida como

$$g_{a,j} \star g_{b,m} = \binom{j+m}{j} g_{a+b,j+m},$$

hace de $\mathcal{S}_c$ otra realización concreta de $\mathcal{B}$ y por ende es isomorfa a $\mathcal{T}$ y a $\mathcal{R}$ con la convolución de Hurwitz. Un cálculo simple nos lleva a

$$(f \star g)(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{C(k)}{C(j)C(k-j)} f(j) g(k-j), \qquad f, g \in \mathcal{S}_c, \tag{2.66}$$

que es una convolución de Cauchy generalizada para sucesiones.

Sea $L$ el operador definido por $Lf(k) = c(k)Ef(k) = c(k)f(k+1)$, para cualquier sucesión $f$. Usando la relación $c(k)C(k+1) = C(k)$ vemos que $LG(z,k) = zG(z,k)$; es decir $L$ es el operador adjunto de multiplicación por $z$ con respecto a $G$ y por lo tanto tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 2.4.6** *Sea $u(z)$ un polinomio mónico de grado $n+1$. Entonces el subespacio lineal de $\mathcal{S}_c$ que consiste de los elementos $g$ que satisfacen la ecuación $u(L)g(t) = 0$ es igual al conjunto*

$$\mathcal{S}_c(u) = \left\{ g(k) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, C(k)z^k \right\rangle : p \in \mathcal{P}_n \right\}. \tag{2.67}$$

Definimos el mapeo lineal $\tilde{\mathcal{M}}_u : \mathcal{P}_n \to \mathcal{S}_c(u)$ por

$$\tilde{\mathcal{M}}_u p(k) = \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, C(k)z^k \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_n. \tag{2.68}$$

**Corolario 2.4.6** *Las sucesiones $g_j = \tilde{\mathcal{M}}_u u_{n-j}$, para $0 \leq j \leq n$, forman una base del espacio vectorial $\mathcal{S}_c(u)$.*

**Corolario 2.4.7** *Sean $d_0, d_1, \ldots, d_n$ números complejos dados. Entonces, la solución de $u(L)g = 0$ que satisface $g(j) = d_j$, para $0 \leq j \leq n$, está dada por $g = \tilde{\mathcal{M}}_u p$, donde*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{d_j}{C(j)} u_{n-j}(z)$$

**Corolario 2.4.8** *El mapeo $\tilde{\mathcal{M}}_u$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales y su inverso está dado por*

$$\tilde{\mathcal{M}}_u^{-1} g = \sum_{j=0}^{n} \frac{g(j)}{C(j)} u_{n-j}, \qquad g \in \mathcal{S}_c(u) \tag{2.69}$$

Para $(i,j)$ en $\mathcal{I}$, de (1.34) resulta

$$\tilde{\mathcal{M}}_u \, q_{i,j'}(k) = \left\langle \frac{1}{(z-a_i)^{1+j}}, C(k)z^k \right\rangle = \binom{k}{j} C(k) a_i^{k-j}, \qquad k \geq 0.$$

Esta fórmula nos lleva a la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.7** *Sea $g$ un elemento de $\mathcal{P}_n$. Entonces*

$$\tilde{\mathcal{M}}_u g = \sum_{i=0}^{r} p_i(k) a_i^{k-j}, \qquad k \geq 0$$

*donde*

$$p_i(k) = \sum_{j=0}^{m_i-1} L_{i,j'} g \binom{k}{j} C(k), \qquad k \geq 0.$$

Combinando el Corolario 2.4.7 y (1.17) obtenemos la proposición que sigue.

**Proposición 2.4.8** *Sea $f$ un elemento de $\mathcal{S}_c(u)$. Entonces*

$$f(k) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} a_{i,j} \binom{k}{j} C(k) a_i^{k-j}, \qquad k \geq 0 \tag{2.70}$$

*donde*

$$a_{i,j} = \sum_{s=0}^{n} \frac{f(s)}{C(s)} L_{i,j'} u_{n-s}, \qquad (i,j) \in \mathcal{I}. \tag{2.71}$$

**Corolario 2.4.9** *Sea $f$ una sucesión dada en la forma*

$$f(k) = \sum_{i=0}^{s} p_i(k) C(k) y_i^k, \qquad k \geq 0$$

*donde los $y_i$ son números distintos, los $p_i$ son polinomios tales que* $\mathrm{grad}(p_i) = j_i - 1$, *$\sum j_i = m + 1$ y $C(k)$ es una sucesión dada por (2.63). Entonces $f$ es un elemento de $\mathcal{S}_c(u)$ y $f = \tilde{\mathcal{M}}_u F$ con*

$$u(z) = \prod_{i=0}^{s} (z - y_i)^{j_i},$$

*y*

$$F(z) = \sum_{l=0}^{m} \frac{f(l)}{C(l)} u_{m-l}(z).$$

Consideremos ahora la ecuación no homogénea

$$u(L) g(k) = f(k), \tag{2.72}$$

donde la sucesión $f$ es un elemento dado de $\mathcal{S}_c$ y en consecuencia es de la forma $f(k) = \left\langle q(z)/v(z), C(k) z^k \right\rangle$, donde $q/v$ está en $\mathcal{R}$ y $q$ y $v$ son primos relativos.

Denotemos con $*$ el producto de convolución en $\mathcal{S}_c$ que corresponde a la multiplicación de funciones racionales en $\mathcal{R}$. Si definimos la función $h$ por

$$h(k) = \left\langle \frac{1}{u(z)}, C(k) z^k \right\rangle, \tag{2.73}$$

entonces tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.9** *Para cualquier $f$ en $\mathcal{S}_c$ la función $g_p = f * h$, con $h$ definida por (2.73), es una solución particular de la ecuación no homogénea (2.72).*

Note que el mapeo lineal sobre $\mathcal{S}_c$ que manda $f$ a $f * h$, donde $h$ está definida en (2.73), es un inverso por la derecha de $u(L)$. Esto significa que $h(k)$ es una función de Green para el problema (2.72). Ver [24] para resultados relacionados.

**Proposición 2.4.10** *Para cualesquier $f$ y $g$ en $\mathcal{S}_c$ tenemos*

$$L(f * g) = Lf * g + gf(0). \tag{2.74}$$

## 2.5 Observaciones finales

Los resultados de la Sección 2.1 pueden emplearse para encontrar un espacio adecuado de funciones que contenga las soluciones de ecuaciones lineales asociadas con un operador dado $L$. Como se vio, el problema principal radica en encontrar una función generadora $G(z,t)$ tal que $L_t G = zG$. Una vez que encontramos $G$, tenemos el álgebra $\mathcal{G}$ y la convolución definida sobre $\mathcal{G}$ en forma puramente algebraica . En algunos casos podría ser necesario completar $\mathcal{G}$ con respecto a alguna topología apropiada y extender el producto de convolución al espacio completo. Para este fin, sería útil dar una representación integral de la convolución, como se ejemplificó en las Secciones 2.2 y 2.3. Estas ideas pueden proveer un método alternativo a algunos de los problemas de construir inversos derechos de operadores considerados por Dimovski [3] y para la construcción de transformadas integrales. Ver Zemanian [28].

La idea de introducir una multiplicación en un espacio de funcionales lineales aparece en [1], asi como una correspondencia natural entre espacios lineales de operadores y funcionales lineales. En [2] se introduce la representación de operadores sobre el espacio de polinomios como operadores diferenciales de orden infinito con coeficientes variables.

Nuestros métodos pueden utilizarse también para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones funcionales. En [10] y [13] se consideran ecuaciones matriciales diferenciales y en diferencia.

# Capítulo 3

# Operadores Similares y un Cálculo Funcional para el Operador Diferencial Lineal de Primer Orden

Sean $\mathcal{G}$ un espacio vectorial complejo, $L : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ un operador lineal, $u(z)$ un polinomio mónico de grado positivo y $f$ un elemento dado de $\mathcal{G}$. En la Sección 2.1 encontramos el espacio de soluciones de la ecuación lineal

$$u(L)g = f, \tag{3.1}$$

empleando diferencias divididas. En este capítulo se presenta un enfoque más algebraico y simplificado de nuestro método, tomando como base la ecuación (2.5). Mediante éste, se clarifica el papel de la convolución en los métodos clásicos operacionales y que usan transformadas y resulta más sencilla la construcción de un producto de convolución adecuado para un operador dado, lo cual es uno de los problemas principales en el libro de Dimovski [3]. Asimismo, hace posible dar en forma explícita la solución general de cualquier ecuación funcional que sea "similar" a una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

Nuestra motivación proviene de las ideas del álgebra lineal que sirven como fundamento de los métodos para resolver ecuaciones lineales utilizando transformadas. Para ilustrar cómo el concepto de similaridad puede emplearse con la finalidad de obtener un marco abstracto para nuestros resultados principales, en la Sección 3.1 usamos una versión algebraica simplificada de la transformada de Laplace. En la Sección 3.2 presentamos la teoría general tomando como modelo los resultados de la sección previa. También, proporcionamos demostraciones directas de los resultados principales en el marco teórico general, sin necesidad de hacer uso de la similaridad o propiedades particulares del espacio vectorial de los operadores lineales.

En la sección 3.3 usamos la similaridad para mostrar que nuestros métodos generales pueden aplicarse a una clase grande de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. En la sección 3.4 aplicamos los métodos a ecuaciones de la forma $u(L_1)g = f$

donde $L_1 = a(t)D+b(t)I$ es un operador diferencial lineal de primer orden con coeficientes variables, generalizando así los resultados de la Sección 2.3. En la Sección 3.5 damos varios ejemplos concretos y algunos criterios para determinar si un operador diferencial de segundo orden con coeficientes variables dado puede escribirse en la forma $u(L_1)$. Entre los ejemplos incluimos la llamada ecuación diferencial lineal binomial de orden $n$, que está relacionada con los polinomios de Hermite, y una clase de ecuaciones diferenciales que pueden resolverse mediante un cálculo operacional que utiliza la transformada de Weierstrass.

## 3.1 Similaridad y ecuaciones equivalentes

Sean $X$ y $Y$ conjuntos no vacíos, $T : X \to Y$ una función biyectiva, $f : X \to X$ una función y $b$ un elemento dado de $X$. Defínase $S = \{x \in X : f(x) = b\}$. Sea $F : Y \to Y$ definida por $F = T \circ f \circ T^{-1}$ y sea $U = \{y \in Y : F(y) = T(b)\}$. Usando solamente propiedades básicas de la composición de funciones, es fácil ver que $S = T^{-1}(U)$ y $U = T(S)$. Por lo tanto, encontrar el conjunto solución $S$ es equivalente a hallar el conjunto $U$. En otras palabras, resolver la ecuación $f(x) = b$ en el conjunto $X$ es equivalente a resolver $F(y) = T(b)$ en el conjunto $Y$. En ciertas situaciones concretas uno de los problemas se considera más fácil que el otro. Por ejemplo, supóngase que con el objeto de resolver $f(x) = b$ aplicamos la transformada $T$ produciendo la ecuación transformada $F(y) = T(b)$, la cual es más fácil de resolver. Entonces, de alguna manera se determina el conjunto solución $U$ y finalmente el conjunto $S$ se obtiene aplicando la transformada inversa $T^{-1}$ a los elementos de $U$. Este es el fundamento de los métodos de transformadas, como la transformada de Laplace para ecuaciones diferenciales y la transformada $z$ para ecuaciones en diferencia. Por supuesto, tales ideas conducen a un método general que resulte de utilidad, solamente si las operaciones necesarias para calcular las imágenes bajo $T$ y $T^{-1}$ pueden hacerse en forma relativamente simple.

Usaremos una versión algebraica de la transformada de Laplace para ilustrar nuestras ideas principales. Consideremos las funciones básicas $e_{a,k}$ y $r_{a,k}$ de los espacios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{R}$ definidas en (1.7) y (1.9), respectivamente. El mapeo biyectivo $T$ entre las bases de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{R}$, definido por $Te_{a,k} = r_{a,k}$, se extiende linealmente a un isomorfismo entre espacios vectoriales $T : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$.

El operador de diferenciación usual $D$ satisface

$$De_{a,k} = \begin{cases} ae_{a,0}, & \text{si } k = 0, \\ ae_{a,k} + e_{a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Definimos el operador lineal $H$ sobre el espacio $\mathcal{R}$ por

$$Hr_{a,k} = \begin{cases} ar_{a,0}, & \text{si } k = 0, \\ ar_{a,k} + r_{a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Se tiene que $D = T^{-1}HT$. Luego, para cualquier polinomio $u$ el operador diferencial $u(D)$, el cual actúa sobre el espacio $\mathcal{E}$, es similar al operador $u(H)$, que actúa sobre $\mathcal{R}$. Un cálculo simple nos permite ver que $Hr_{a,k}(z) = zr_{a,k}(z)$, para $k \geq 1$ y $Hr_{a,0}(z) = zr_{a,0} - 1$. Esto muestra que la acción de $H$ sobre las funciones racionales propias es la multiplicación por $z$ seguida de la proyección sobre el espacio $\mathcal{R}$. Asi que, para $g$ en $\mathcal{R}$ y $k \geq 0$, $H^k g(z)$ es igual a la parte racional propia de la función racional $z^k g(z)$. Es decir, $H^k g(z)$ es $z^k g(z)$ reducida módulo los polinomios.

Sean $u$ un polinomio mónico de grado positivo y $f$ un elemento dado de $\mathcal{E}$. Entonces, resolver la ecuación diferencial

$$u(D)y = f \tag{3.4}$$

en el espacio $\mathcal{E}$ es equivalente a encontrar funciones racionales propias $g$ que satisfagan la ecuación $u(H)g(z) = Tf$, la cual puede escribirse en la forma

$$u(z)g(z) \equiv Tf \pmod{\mathcal{P}}. \tag{3.5}$$

Es claro que el conjunto solución de (3.5) es

$$U = \left\{ g = \frac{Tf}{u} + \frac{p}{u} : p \in \mathcal{P} \text{ y } \frac{p}{u} \in \mathcal{R} \right\}. \tag{3.6}$$

El método usual de la transformada de Laplace da el conjunto de soluciones de (3.4) en la forma $S = T^{-1}(U)$. La herramienta principal para calcular las imágenes bajo $T^{-1}$ es la fórmula de descomposición en fracciones parciales. Una vez que se tiene un elemento $g$ de $U$ representado como una combinación lineal de funciones racionales básicas, el aplicar $T^{-1}$ consiste simplemente en sustituir cada $r_{a,k}$ que aparece en la expresión de $g$ por el correspondiente polinomio exponencial básico $e_{a,k}$.

Note que el procedimiento descrito arriba para encontrar las soluciones de (3.4) no requiere representar al mapeo $T$ como una transformada integral. Una de las principales limitaciones en la generalidad de la ecuación (3.4) es la condición de que la función $f$ debe ser un elemento de $\mathcal{E}$. Esta limitación será eliminada más adelante. Primero encontraremos una descripción de la construcción del conjunto $U$ en términos de operaciones con funciones racionales propias básicas y entonces usaremos la similaridad para traducir la construcción a una que pueda hacerse enteramente en el espacio $\mathcal{E}$, sin usar los mapeos $T$ y $T^{-1}$. La equivalencia lógica de las ecuaciones (3.4) y (3.5) hace posible este objetivo.

Observemos que $Tf/u$ está en $\mathcal{R}$, puesto que $Tf$ lo está. Además $p/u$ pertenece a $\mathcal{R}$ si y sólo si $p$ es un polinomio cuyo grado es estrictamente menor que el grado de $u$.

Sea $u(z)$ un polinomio de grado $n+1$, como se definió en (1.13). Puesto que los elementos del conjunto $U$, definido en (3.6), son de la forma $g = (Tf)/u + p/u$, donde $p$ está en $\mathcal{P}_n$, la fórmula de descomposición en fracciones parciales DFP (1.18) nos da a $p/u$ como una combinación lineal de funciones racionales básicas. El término $(Tf)/u$ es un producto de elementos de $\mathcal{R}$ y también puede expresarse como una combinación de funciones racionales básicas mediante la DFP.

Tomando $p = 1$ en la fórmula DFP obtenemos

$$\frac{1}{u(z)} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_j - 1} \alpha_{j,k} r_{a_j,k}(z), \tag{3.7}$$

donde

$$\alpha_{j,k} = L_{j,m_j-1-k}1. \tag{3.8}$$

Nótese que los coeficientes $\alpha_{j,k}$ dependen solamente de las raíces de $u(z)$ y sus multiplicidades.

Multiplicando (3.7) por $u(z)$ y usando que

$$q_{j,m_j-1-k} = \frac{u(z)}{(z-a_j)^{1+k}}, \qquad 0 \le j \le r, 0 \le k \le m_j - 1,$$

obtenemos la identidad polinomial

$$\sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} q_{j,m_j-1-k}(z) = 1. \tag{3.9}$$

Ahora podemos describir la construcción de los elementos del conjunto $U$ en términos de funciones racionales propias básicas. Tenemos que $f$ es una combinación lineal finita de funciones del tipo $e_{b,j}(t)$, puesto que $f$ está en $\mathcal{E}$, y en consecuencia $Tf$ es una combinación lineal de funciones $r_{b,j}(z)$. Por lo tanto cada solución $g$ de la ecuación (2.4) tiene la forma

$$g(z) = \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} r_{a_j,k}(z)\ Tf(z) + \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{j,k} r_{a_j,k}(z), \tag{3.10}$$

donde los coeficientes $\beta_{j,k}$ son números complejos arbitrarios.

Queremos pasar (3.10) a la ecuación correspondiente para $T^{-1}g$ en el espacio $\mathcal{E}$. En lugar de realizar la multiplicación en el primer término de (3.10) y luego aplicar $T^{-1}$, podemos hacer uso del producto de convolución en $\mathcal{E}$ que corresponde a la multiplicación en $\mathcal{R}$. Dicha convolución $*$ se define de acuerdo con (2.11) como

$$e_{a,k} * e_{b,m} = \sum_{j=0}^{k} C(a,j;b,m) e_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{m} C(b,j;a,k) e_{b,m-j}, \tag{3.11}$$

donde los coeficientes funcionales están dados en (1.21). Esto claramente implica que

$$f * h = T^{-1}(Tf\,Th), \qquad f, h \in \mathcal{E}, \tag{3.12}$$

donde la multiplicación en el lado derecho es multiplicación de funciones racionales. Ahora aplicamos $T^{-1}$ a (3.10) para determinar las soluciones de la ecuación (3.4) más fácilmente. Tenemos así el siguiente.

**Teorema 3.1.1** *Sea $f$ un elemento dado de $\mathcal{E}$. La solución general de la ecuación diferencial $u(D)y(t) = f(t)$ es*

$$y(t) = f(t) * h_u(t) + \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{j,k} e_{a_j,k}(t), \tag{3.13}$$

*donde*

$$h_u(t) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} e_{a_j,k}(t),$$

*los* $\alpha_{j,k}$ *están definidos en (3.8), y los* $\beta_{j,k}$ *son números complejos arbitrarios.*

Para calcular el lado derecho de (3.13) necesitamos solamente la representación de $f$ como una combinación lineal de polinomios exponenciales básicos, determinar los números $\alpha_{j,k}$, los cuales dependen únicamente del polinomio $u$ y la fórmula de convolución (3.11). Todo esto puede hacerse sin siquiera mencionar el mapeo $T$.

Note que en el lado derecho de (3.13) el último término es la solución general de la ecuación homogénea $u(D)y = 0$ y el primer término es una solución particular de la ecuación no homogénea $u(D)y = f$. Además $h_u = T^{-1}(1/u)$.

**Corolario 3.1.1** *El mapeo lineal sobre el espacio* $\mathcal{E}$ *que manda* $f$ *a* $f * h_u$ *es un inverso por la derecha del operador* $u(D)$.

## 3.2 El modelo abstracto

En esta sección usamos como modelo los resultados precedentes acerca del espacio $\mathcal{E}$ de los polinomios exponenciales y obtenemos extensiones de los resultados principales en un marco teórico muy general. Aunque el uso de la similaridad proporciona una demostración casi trivial de nuestros resultados, preferimos dar pruebas directas en las que se emplean únicamente propiedades básicas de polinomios y funciones racionales, las cuales también son de gran utilidad para obtener generalizaciones importantes.

Sea $\mathcal{G}$ un espacio vectorial complejo que tiene una base $\{g_{a,k} : (a,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}\}$. Definimos el producto de convolución conmutativo $*$ sobre $\mathcal{G}$ como sigue. Si $a \neq b$

$$g_{a,k} * g_{b,m} = \sum_{j=0}^{k} C(a,j;b,m) g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{m} C(b,j;a,k) g_{b,m-j}, \tag{3.14}$$

donde los coeficientes funcionales están definidos en (1.21) y

$$g_{a,k} * g_{a,m} = g_{a,1+k+m}, \qquad k,m \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Los coeficientes del producto de convolución (3.14) satisfacen las relaciones que se dan en los siguientes dos lemas.

**Lema 3.2.1** *Sean* $a$ *y* $b$ *números complejos y* $j$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $j \geq 1$. *Entonces*
(i) $bC(b,0;a,0) = 1 + aC(b,0;a,0)$.
(ii) $bC(b,j;a,0) + C(b,j-1;a,0) = aC(b,j;a,0)$.

*Demostración.*
(i) De (1.21) tenemos que

$$bC(b,0;a,0) = \frac{b}{b-a} = 1 + \frac{a}{b-a} = 1 + aC(b,0;a,0)$$

(ii) Nuevamente, de (1.21) se tiene que

$$\begin{aligned} bC(b,j;a,0) + C(b,j-1;a,0) &= \frac{(-1)^j b}{(b-a)^{1+j}} + \frac{(-1)^{j-1}}{(b-a)^j} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}(-b+b-a)}{(b-a)^{1+j}} \\ &= \frac{(-1)^j a}{(b-a)^{1+j}} \\ &= aC(b,j;a,0). \end{aligned}$$

■

**Lema 3.2.2** *Sean $a, b$ en $\mathbb{C}$ y $j, k$ en $\mathbb{N}$ con $j, k \geq 1$. Entonces*
(i) $bC(b,0;a,k) = C(b,0;a,k-1) + aC(b,0;a,k)$.
(ii) $bC(b,j;a,k) + C(b,j-1;a,k) = aC(b,j;a,k) + C(b,j;a,k-1)$.

*Demostración.*
(i) Para $k \geq 1$, de (1.21) se sigue que

$$\begin{aligned} bC(b,0;a,k) &= \frac{b}{(b-a)^{1+k}} \\ &= \frac{1}{(b-a)^{1+(k-1)}} + \frac{a}{(b-a)^{1+k}} \\ &= C(b,0;a,k-1) + aC(b,0;a,k) \end{aligned}$$

(ii)Usando (1.21) junto con una identidad binomial bien conocida, resulta
$bC(b,j;a,k) + C(b,j-1;a,k) =$

$$\begin{aligned} &= (-1)^j \binom{j+k}{j} b(b-a)^{-1-j-k} + (-1)^{j-1}\binom{j+k-1}{j-1}(b-a)^{-j-k} \\ &= (-1)^j \binom{j+k}{j} b(b-a)^{-1-j-k} + (-1)^{j-1}\left[\binom{j+k}{j} - \binom{j+k-1}{j}\right](b-a)^{-j-k} \\ &= (-1)^{j-1}\binom{j+k}{j}(b-a)^{-1-j-k}(-b+b-a) + (-1)^j\binom{j+k-1}{j}(b-a)^{-j-k} \\ &= a(-1)^j\binom{j+k}{j}(b-a)^{-1-j-k} + (-1)^j\binom{j+k-1}{j}(b-a)^{-1-j-(k-1)} \\ &= aC(b,j;a,k) + C(b,j;a,k-1). \end{aligned}$$

■

El mapeo lineal $L : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ se define por

$$Lg_{a,k} = \begin{cases} ag_{a,0}, & \text{si } k = 0, \\ ag_{a,k} + g_{a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

Para cualquier $a$ en $\mathbb{C}$ es obvio que

$$(L - aI)g_{a,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0, \\ g_{a,k-1}, & \text{si } k \geq 1, \end{cases} \tag{3.17}$$

y en consecuencia

$$(L - aI)^{1+m} g_{a,k} = 0, \qquad m \geq k. \tag{3.18}$$

**Lema 3.2.3** *Sean $a, b$ en $\mathbb{C}$ y $k$ en $\mathbb{N}$ dados. Entonces, para cualquier $m$ en $\mathbb{N}$ se cumple que*

$$(L - aI)^m g_{b,k} = \sum_{j=0}^{s} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} g_{b,k-j}, \tag{3.19}$$

*donde $s = \min\{m, k\}$.*

*Demostración.*
Haremos la demostración por inducción sobre $m$. Para $m = 0$ la ecuación (3.19) claramente es válida, ya que se reduce a la igualdad trivial $g_{b,k} = g_{b,k}$.
Supongamos que (3.19) se cumple para todo entero $m \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} (L - aI)^{m+1} g_{b,k} &= (L - aI)(L - aI)^m g_{b,k} \\ &= (L - aI) \sum_{j=0}^{s} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} g_{b,k-j}, \end{aligned}$$

donde $s = \min\{m, k\}$.
Hay dos casos que considerar. Si $m < k$, entonces $s = m$ y aplicando (3.16) obtenemos

$$\begin{aligned} (L - aI)^{m+1} g_{b,k} &= (L - aI) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} g_{b,k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} [(b-a) g_{b,k-j} + g_{b,k-j-1}] \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} g_{b,k-(j+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} \\ &= (b-a)^{m+1} g_{b,k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \left[ \binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} \right] (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} + g_{b,k-m-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b-a)^{m+1} g_{b,k} + \sum_{j=1}^{m} \binom{m+1}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} + g_{b,k-m-1} \\
&= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j}
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si $k \leq m$ entonces $s = k$ y otra vez de (3.16) se sigue que

$$
\begin{aligned}
(L-aI)^{m+1} g_{b,k} &= (L-aI) \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} g_{b,k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} (b-a)^{m-j} [(b-a) g_{b,k-j} + g_{b,k-j-1}] + \binom{m}{k} (b-a)^{m-k+1} g_{b,0} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} + \sum_{j=1}^{k} \binom{m}{j-1} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} \\
&= (b-a)^{m+1} g_{b,k} + \sum_{j=1}^{k} \left[ \binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} \right] (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} \\
&= (b-a)^{m+1} g_{b,k} + \sum_{j=1}^{k} \binom{m+1}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{m+1}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j}.
\end{aligned}
$$

Luego, si $s' = \min\{k, m+1\}$, tenemos que

$$
(L-aI)^{m+1} g_{b,k} = \sum_{j=0}^{s'} \binom{m+1}{j} (b-a)^{m+1-j} g_{b,k-j},
$$

lo cual muestra que (3.19) sigue siendo válida para $m+1$.

Por lo tanto del principio de inducción matemática y lo anterior concluimos que la ecuación (3.19) se cumple para todo $m$ en $\mathbb{N}$. ■

Note que para $a \neq b$, (3.19) implica que

$$
(L-aI)^m g_{b,k} \neq 0, \qquad m, k \in \mathbb{N}. \tag{3.20}
$$

**Proposición 3.2.1** *Sean $a$ y $b$ números complejos y sean $k$ y $m$ dos enteros no negativos. Entonces*

$$
L(g_{a,k} * g_{b,m}) = (L g_{a,k}) * g_{b,m} + g_{b,m} \Phi g_{a,k}, \tag{3.21}
$$

*donde $\Phi$ es el funcional lineal definido sobre $\mathcal{G}$ como $\Phi g_{a,k} = \delta_{0,k}$.*

*Demostración.* Veamos primero el caso en que $k = 0$. De (3.14) y (3.16) se sigue que

$$\begin{aligned}
L(g_{a,0} * g_{b,m}) &= C(a,0;b,m)Lg_{a,0} + \sum_{j=0}^{m} C(b,j;a,0)Lg_{b,m-j} \\
&= aC(a,0;b,m)g_{a,0} + \sum_{j=0}^{m-1} C(b,j;a,0)(bg_{b,m-j} + g_{b,m-j-1}) \\
&\quad + bC(b,m;a,0)g_{b,0} \\
&= aC(a,0;b,m)g_{a,0} + \sum_{j=0}^{m} bC(b,j;a,0)g_{b,m-j} + \sum_{j=0}^{m-1} C(b,j;a,0)g_{b,m-j-1} \\
&= aC(a,0;b,m)g_{a,0} + \sum_{j=1}^{m}[bC(b,j;a,0) + C(b,j-1;a,0)]g_{b,m-j} \\
&\quad + bC(b,0;a,0)g_{b,m},
\end{aligned}$$

y empleando el Lema 3.2.1 en la última igualdad, resulta

$$\begin{aligned}
L(g_{a,0} * g_{b,m}) &= aC(a,o;b,m)g_{a,0} + \sum_{j=1}^{m} aC(b,j;a,0)g_{b,m-j} + [1 + aC(b,0;a,0)]g_{b,m} \\
&= aC(a,0;b,m)g_{a,0} + \sum_{j=0}^{m} aC(b,j;a,0)g_{b,m-j} + g_{b,m} \\
&= ag_{a,0} * g_{b,m} + g_{b,m} \\
&= (Lg_{a,0}) * g_{b,m} + g_{b,m}.
\end{aligned}$$

Con esto concluye la demostración para este caso. Sea ahora $k \geq 1$. De (3.14) y (3.16) tenemos

$$\begin{aligned}
L(g_{a,k} * g_{b,m}) &= \sum_{j=0}^{k} C(a,j;b,m)Lg_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{m} C(b,j;a,k)Lg_{b,m-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} C(a,j;b,m)[ag_{a,k-j} + g_{a,k-j-1}] + aC(a,k;b,m)g_{a,0} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{m-1} C(b,j;a,k)[bg_{b,m-j} + g_{b,m-j-1}] + bC(b,m;a,k)g_{b,0} \\
&= \sum_{j=0}^{k} aC(a,j;b,m)g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} C(a,j;b,m)g_{a,k-1-j} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{m} bC(b,j;a,k)g_{b,m-j} + \sum_{j=0}^{m-1} C(b,j;a,k)g_{b,m-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} aC(a,j;b,m)g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} C(a,j;b,m)g_{a,k-1-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{j=0}^{m} bC(b,j;a,k)g_{b,m-j} + \sum_{j=1}^{m} C(b,j-1;a,k)g_{b,m-j} \\
= & \sum_{j=0}^{k} aC(a,j;b,m)g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} C(a,j;b,m)g_{a,k-1-j} \\
&+\sum_{j=1}^{m}[bC(b,j;a,k) + C(b,j-1;a,k)]g_{b,m-j} + bC(b,0;a,k)g_{b,m}.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.2.2 en el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
L(g_{a,k} * g_{b,m}) &= \sum_{j=0}^{k} aC(a,j;b,m)g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} C(a,j;b,m)g_{a,k-1-j} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{m}[aC(b,j;a,k) + C(b,j;a,k-1)]g_{b,m-j} \\
&\quad +[C(b,0;a,k-1) + aC(b,0;a,k)]g_{b,m} \\
&= \sum_{j=0}^{k} aC(a,j;b,m)g_{a,k-j} + \sum_{j=0}^{m} aC(b,j;a,k)g_{b,m-j} \\
&\quad +\sum_{j=0}^{k-1} C(a,j;b,m)g_{a,k-1-j} + \sum_{j=0}^{m} C(b,j;a,k-1)g_{b,m-j} \\
&= ag_{a,k} * g_{b,m} + g_{a,k-1} * g_{b,m} \\
&= [ag_{a,k} + g_{a,k-1}] * g_{b,m} \\
&= (Lg_{a,k}) * g_{b,m},
\end{aligned}$$

con lo cual se completa la demostración. ■

Extendiendo por linealidad la propiedad (3.21) encontramos que

$$L(g * f) = (Lg) * f + f\Phi g, \qquad f, g \in \mathcal{G}. \tag{3.22}$$

**Lema 3.2.4** *Sean $a$ en $\mathbb{C}$, $k$ en $\mathbb{N}$ y $f$ un elemento cualquiera de $\mathcal{G}$. Entonces*

$$(L - aI)^{1+k}(g_{a,k} * f) = f. \tag{3.23}$$

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 0$, usando (3.21), tenemos que

$$\begin{aligned}
(L - aI)(g_{a,0} * f) &= L(g_{a,0} * f) - ag_{a,0} * f \\
&= (Lg_{a,0}) * f + f - ag_{a,0} * f \\
&= ag_{a,0} * f + f - ag_{a,0} * f \\
&= f.
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación (3.23) se satisface cuando $k = 0$. Supóngase por inducción que (3.23) es válida para cualquier $k \geq 1$. Entonces empleando nuevamente (3.21) junto con (3.16) obtenemos

$$\begin{aligned}(L-aI)^{1+k+1}(g_{a,k+1} * f) &= (L-aI)^k(L-aI)(g_{a,k+1} * f)\\ &= (L-aI)^k[L(g_{a,k+1} * f) - ag_{a,k+1} * f]\\ &= (L-aI)^k[(Lg_{a,k+1}) * f - ag_{a,k+1} * f]\\ &= (L-aI)^k[ag_{a,k+1} * f + g_{a,k} * f - ag_{a,k+1} * f]\\ &= (L-aI)^k g_{a,k} * f\\ &= f.\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la hipótesis de inducción. ■

Sea $u(z)$ un polinomio mónico de grado positivo como en (1.13). Entonces, de acuerdo con (3.7), la descomposición en fracciones parciales para $1/u$ es

$$\frac{1}{u(z)} = \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} r_{a_j,k}(z).$$

Definimos la función $h_u$ en $\mathcal{G}$ como

$$h_u = \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} g_{a_j,k}. \tag{3.24}$$

Transportando por similaridad el Teorema 3.1.1 al presente marco obtenemos.

**Teorema 3.2.1** *Sea $f$ un elemento dado de $\mathcal{G}$ y sea $u$ un polinomio igual que antes. Entonces, la solución general de la ecuación $u(L)g = f$ es*

$$g = h_u * f + \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{j,k} g_{a_j,k}, \tag{3.25}$$

*donde $h_u$ está definida en (3.24) y los coeficientes $\beta_{j,k}$ son números complejos arbitrarios.*

*Demostración:* La definición (1.14) de los polinomios $q_{j,k}$ nos conduce a la igualdad

$$u(z) = q_{j,m_j-1-k}(z)(z-a_j)^{1+k}, \qquad 0 \leq j \leq d,\ 0 \leq k \leq m_j - 1,$$

y entonces tenemos las factorizaciones

$$u(L) = q_{j,m_j-1-k}(L)(L-a_jI)^{1+k}, \qquad 0 \leq j \leq d,\ 0 \leq k \leq m_j - 1. \tag{3.26}$$

Luego, de (3.18) resulta

$$u(L)g_{a_j,k} = 0, \qquad 0 \leq j \leq d,\ 0 \leq k \leq m_j - 1, \tag{3.27}$$

y por (3.23)

$$(L - a_j I)^{1+k}(g_{a_j,k} * f) = f.$$

Notemos que (3.20) y (3.27) implican que $\{g_{a_j,k} : 0 \le j \le d,\ 0 \le k \le m_j - 1\}$ es una base del kernel de $u(L)$. Por lo tanto, para cualquier $g$ dada por (3.25) se tiene que $u(L)g = u(L)(h_u * f)$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} u(L)(h_u * f) &= \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} u(L)(g_{a_j,k} * f) \\ &= \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} q_{j,m_j-1-k}(L)(L - a_j I)^{1+k}(g_{a_j,k} * f) \\ &= \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} q_{j,m_j-1-k}(L) f \\ &= If. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado la identidad polinomial (3.9). ∎

Supóngase ahora que la convolución $*$ puede extenderse a un mapeo bilineal conmutativo $*$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{K}$ a $\mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio vectorial complejo que contiene a $\mathcal{G}$. Vemos que (3.22) nos permite extender la definición del operador $L$ al conjunto de elementos de la forma $g * f$, con $g$ en $\mathcal{G}$ y $f$ en $\mathcal{K}$. De la demostración del teorema es claro que el cálculo que conduce a la ecuación $u(L)(h_u * f) = f$ no requiere la aplicación de $L$ a $f$. Si $g$ es un elemento de $\mathcal{G}$ tal que $\Phi g = 0$ y $f$ está en $\mathcal{K}$ entonces $L^m(g * f) = (L^m g) * f$ y así

$$w(L)(g * f) = (w(L)g) * f, \qquad w \in \mathcal{P}.$$

Bajo el isomorfismo natural entre los espacios $\mathcal{G}$ y $\mathcal{R}$, que manda $g_{a,k}$ a $r_{a,k}$, el funcional $\Phi$ definido sobre $\mathcal{G}$ coincide con el funcional $\phi$ definido sobre $\mathcal{R}$ en la Sección 1.2. Luego, de la Proposición 1.2.1, para cualquier polinomio $u$ cuyo grado sea mayor o igual que dos tenemos que $\phi(1/u) = 0$ y en consecuencia $\Phi h_u = 0$. Puesto que $L(g_{a,0} * f) = a g_{a,0} * f + f$ es claro que $L^2(g_{a,0} * f)$ está definido si y sólo si $Lf$ se define. Estas observaciones con relación a las extensiones de $*$ muestran que podemos generalizar el Teorema 3.2.1 y obtener el siguiente.

**Corolario 3.2.1** *Sea $f$ un elemento dado de $\mathcal{K}$ y sea $u$ como antes. Entonces la solución general de la ecuación $u(L)g = f$ es*

$$g = h_u * f + \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{j,k} g_{a_j,k}, \tag{3.28}$$

*donde $h_u$ es la función definida en (3.24) y los $\beta_{j,k}$ son números arbitrarios.*

Note que el elemento $h_u$ es una suerte de "Función de Green" para el operador $u(L)$.

Los ejemplos dados en las Secciones 2.2 y 2.3 ilustran como la convolución puede extenderse a un espacio más grande.

El enfoque que acabamos de presentar de nuestro método, puede resumirse como sigue. Empezamos con un espacio vectorial $\mathcal{G}$ que tiene una base $\{g_{a,k}\}$ y entonces definimos en (3.16) el operador $L$ en términos de su acción sobre la base. Este enfoque es más algebraico que el que se da en la Sección 2.1. En dicha sección iniciamos con un operador lineal $L$ que actúa sobre cierto espacio de funciones de una variable $t$ y entonces construimos el espacio $\mathcal{G}$ y la base $\{g_{a,k}\}$ para la cual (3.16) se cumple. La manera como esto se hizo fue encontrando primero una función $G(z,t)$ de dos variables, definida sobre algún dominio apropiado, que satisface

$$LG(z,t) = zG(z,t), \tag{3.29}$$

donde $L$ actúa con respecto a $t$, considerando $z$ como un parámetro. Luego, definimos las funciones

$$g_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, G(z,t)\rangle\,, \qquad (a,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}, \tag{3.30}$$

donde el funcional de Taylor actúa con respecto a $z$. Estas satisfacen la condición (3.16), como se muestra en (2.5), y generan al espacio vectorial $\mathcal{G}$.

Uno de estos enfoques o ambos, según sea más conveniente, pueden emplearse para resolver una ecuación funcional lineal dada.

## 3.3 Operadores similares y convoluciones

Usando el espacio de los polinomios exponenciales y el concepto de similaridad podemos construir muchos otros ejemplos interesantes. Supóngase que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ es un isomorfismo lineal de un espacio $\mathcal{H}$ de funciones definidas en algún subconjunto de $\mathbb{R}$, sobre el espacio $\mathcal{E}$ de los polinomios exponenciales. Luego, el operador $L = A^{-1}DA$ manda $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ y las funciones $h_{a,k} = A^{-1}e_{a,k}$ forman una base de $\mathcal{H}$. Denotemos por $\odot$ la convolución sobre $\mathcal{H}$. Entonces tenemos que

$$h \odot f = A^{-1}(Ah * Af), \qquad h, f \in \mathcal{H}, \tag{3.31}$$

donde $*$ denota la convolución sobre $\mathcal{E}$. Ver [3]. Note que para cada operador apropiado $A$, la ecuación (3.31) también proporciona una representación integral para $\odot$. Es claro de las definiciones que

$$L(h \odot f) = (Lh) \odot f + f\Phi h, \qquad h, f \in \mathcal{H}, \tag{3.32}$$

donde la funcional $\Phi$ se define sobre $\mathcal{H}$ por $\Phi h = \Phi(Ah) = (Ah)(0)$, puesto que la funcional $\Phi$ sobre $\mathcal{E}$ es evaluación en cero (véase el Lema 2.2.1). Usaremos el mismo símbolo $\Phi$ para denotar la funcional correspondiente sobre cualquier espacio isomorfo a $\mathcal{E}$.

A continuación consideramos una clase importante de ejemplos relacionados con la idea de cambio de variables en ecuaciones diferenciales. Sea $\beta(t)$ una función definida en un intervalo $J = (c, d)$ que contiene al cero y tal que su inversa bajo la composición, denotada por $\tilde{\beta}(t)$, existe. Sea $\alpha(t)$ una función definida sobre $J$ con la propiedad de que $\alpha(t) \neq 0$ para todo $t$ en $J$. Denotemos por $S_\beta$ el operador de substitución de $t$ por $\beta(t)$, y por $M_\alpha$ el operador de multiplicación por $\alpha(t)$. Entonces el operador $L$ definido como

$$L = M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} D S_\beta M_\alpha \tag{3.33}$$

es similar al operador diferencial $D$. En este caso la base para el espacio $\mathcal{H}$ es el conjunto de funciones

$$h_{a,k} = M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} e_{a,k} = \frac{1}{\alpha(t)} \frac{[\tilde{\beta}(t)]^k}{k!} \exp\left(a\tilde{\beta}(t)\right). \tag{3.34}$$

De (3.31) vemos que la convolución $\odot$ asociada con el operador $L$ es

$$f \odot h = M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} \{(S_\beta M_\alpha f) * (S_\beta M_\alpha h)\},$$

donde $*$ es la convolución de Duhamel. Por lo tanto

$$(f \odot h)(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \int_{\beta(0)}^{t} \alpha\Big(\beta(\tilde{\beta}(t) - \tilde{\beta}(y))\Big)\, f\Big(\beta(\tilde{\beta}(t) - \tilde{\beta}(y))\Big)\, \alpha(y) h(y) \tilde{\beta}'(y) dy. \tag{3.35}$$

Esta representación integral puede usarse para definir la convolución $\odot$ de funciones en un espacio más grande que $\mathcal{H}$, de manera parecida a como se hizo en las Secciones 2.2 y 2.3.

Usando algunas propiedades básicas de la convolución de Duhamel es fácil ver que $\odot$ es una operación conmutativa y que satisface la siguiente propiedad.

**Proposición 3.3.1** *Sean $\alpha$ y $\beta$ como antes, $f$ una función seccionalmente continua en el intervalo $J = (c, d)$ y sea $h$ una función continuamente diferenciable sobre $J$. Entonces*

$$L(f \odot h)(t) = f(t) \odot Lh(t) + f(t) h(\beta_0) \alpha(\beta_0), \tag{3.36}$$

*donde $\beta_0 = \beta(0)$.*

*Demostración.* Usando (2.36) resulta

$$\begin{aligned} L(f \odot h)(t) &= L M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} \{(S_\beta M_\alpha f) * (S_\beta M_\alpha h)\} \\ &= M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} D \{(S_\beta M_\alpha f) * (S_\beta M_\alpha h)\} \\ &= M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} \{(S_\beta M_\alpha f) * (D S_\beta M_\alpha h) + \alpha(\beta_0) h(\beta_0) S_\beta M_\alpha f(t)\} \\ &= M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} \{(S_\beta M_\alpha f) * (S_\beta M_\alpha L h)\} + f(t) h(\beta_0) \alpha(\beta_0) \\ &= f(t) \odot L h(t) + f(t) h(\beta_0) \alpha(\beta_0). \end{aligned}$$

■

Observemos que podemos aplicar el Corolario 3.2.1 para encontrar las soluciones de ecuaciones de la forma $u(L)g = f$, donde $L$ es un operador dado por (3.33) y $f$ es como en la Proposición 3.3.1.

## 3.4 Operador diferencial lineal general de primer orden

En esta sección consideramos algunas propiedades elementales del operador diferencial lineal general de primer orden $L_1$, definido por

$$L_1 = a(t)D + b(t)I, \tag{3.37}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en un intervalo $J = (c, d)$ y $a(t) \neq 0$ para t en $J$. Un cálculo simple nos conduce a la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.1** *Sean $r(t)$ y $s(t)$ funciones diferenciables definidas sobre $J$ tales que*

$$r'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, \qquad s'(t) = \frac{1}{a(t)}. \tag{3.38}$$

*Entonces $L_1$ es el operador adjunto de la multiplicación por $z$ de la función generadora $G(z,t) = \exp\big(zs(t) - r(t)\big)$, es decir*

$$L_1 G(z,t) = zG(z,t). \tag{3.39}$$

De la función generadora $G(z,t)$ obtenemos las funciones

$$g_{a,k}(t) = \langle T_{a,k}, G(z,t)\rangle = e^{-r(t)}\frac{(s(t))^k}{k!}e^{as(t)}, \qquad (a,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}. \tag{3.40}$$

Estas funciones generan un espacio vectorial $\mathcal{G}$, otra realización concreta de $\mathcal{B}$, y satisfacen

$$L_1 g_{a,k} = \begin{cases} a g_{a,0}, & \text{si } k = 0, \\ a g_{a,k} + g_{a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{3.41}$$

Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 3.2.1 para resolver ecuaciones de la forma $u(L_1)g = f$, para $f$ en $\mathcal{G}$. Mostraremos en seguida que $L_1$ es similar al operador diferencial $D$.

Si $L$ es un operador similar a $D$ dado por (3.33) entonces realizando las operaciones indicadas por cada uno de los operadores que aparecen en esta ecuación llegamos a

$$Ly(t) = \beta'(\tilde{\beta}(t))y'(t) + \beta'(\tilde{\beta}(t))\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y(t),$$

es decir

$$L = \frac{1}{\tilde{\beta}'(t)}D + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)\tilde{\beta}'(t)}I.$$

De esta expresión y (3.37), obtenemos inmediatamente la siguiente proposición.

**Proposición 3.4.2** *Sea $L_1$ el operador diferencial definido por (3.37) y sean $r(t)$ y $s(t)$ funciones que satisfacen (3.38). Supóngase que $s(t)$ tiene una función inversa bajo la composición, la cual denotamos por $\tilde{s}(t)$. Entonces $L_1$ puede escribirse como*

$$L_1 = M_\alpha^{-1} S_{\tilde{\beta}} D S_\beta M_\alpha,$$

*donde $\beta(t) = \tilde{s}(t)$ y $\alpha(t) = e^{r(t)}$.*

Por lo tanto el operador $L_1$ es similar a $D$.

**Corolario 3.4.1** *Si $s(t_0) = 0$ para algún $t_0$ en $J$, entonces la convolución $\odot$ para el operador $L_1$ es*

$$(f \odot h)(t) = e^{-r(t)} \int_{t_0}^{t} \exp\Big\{r\Big(\tilde{s}(s(t) - s(y))\Big)\Big\} f\Big(\tilde{s}(s(t) - s(y))\Big) e^{r(y)} h(y) s'(y) dy \tag{3.42}$$

*y*

$$L_1(f \odot h)(t) = f(t) \odot L_1 h(t) + f(t) h(t_0) e^{r(t_0)} \tag{3.43}$$

*para $h$ en $\mathcal{G}$ y una función $f$ apropiada.*

## 3.5 Ejemplos

Sea $u(z) = z^2 + b_1 z + b_2$ un polinomio mónico de grado dos y sea $L_1$ el operador diferencial definido en (3.37). Entonces

$$u(L_1) = a^2(t) D^2 + a(t)\{a'(t) + 2b(t) + b_1\} D + \{b^2(t) + a(t) b'(t) + b_1 b(t) + b_2\} I. \tag{3.44}$$

Usando esta ecuación caracterizamos dos tipos de ecuaciones diferenciales que pueden resolverse usando el método descrito en las secciones anteriores.

**Proposición 3.5.1** *La ecuación diferential*

$$y''(t) + p(t) y'(t) + q(t) y(t) = 0, \tag{3.45}$$

*puede escribirse en la forma $u(L) = 0$, donde $u(z) = z^2 + b_1 z + b_2$, $L = D + b(t)$ y $b(t) = (p(t) - b_1)/2$, si y sólo si*

$$p^2(t) + 2p'(t) - 4q(t) = b_1^2 - 4b_2.$$

*Demostración.* Sea $L$ el operador diferencial definido por $L = D + b(t)$. Empleando la ecuación (3.44) vemos que

$$u(L) = D^2 + \{2b(t) + b_1\} D + \{b^2(t) + b'(t) + b_1 b(t) + b_2\} I. \tag{3.46}$$

Si hacemos $b(t) = (p(t) - b_1)/2$, entonces el coeficiente de $I$ en el lado derecho de la igualdad anterior se reduce a

$$\begin{aligned} b^2(t) + b'(t) + b_1 b(t) + b_2 &= \frac{[p(t) - b_1]^2}{4} + \frac{p'(t)}{2} + \frac{b_1[p(t) - b_1]}{2} + b_2 \\ &= \frac{1}{4}[p^2(t) + 2p'(t) - b_1^2 + 4b_2]. \end{aligned}$$

Luego, comparando (3.45) y (3.46), se concluye que la ecuación (3.45) puede escribirse en la forma $u(L) = 0$ si y sólo si se satisface la condición

$$q(t) = \frac{1}{4}[p^2(t) + 2p'(t) - b_1^2 + 4b_2],$$

o bien

$$p^2(t) + 2p'(t) - 4q(t) = b_1^2 - 4b_2.$$

■

**Proposición 3.5.2** *Sean $L = a(t)D$ y $u(z) = z^2 + d_1 z + d_2^2$ un polinomio mónico de grado dos con $d_2 \neq 0$. Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación*

$$y''(t) + f(t)y'(t) + g^2(t)y(t) = 0, \tag{3.47}$$

*pueda expresarse como $u(L) = 0$ es*

$$\frac{f(t)g(t) + g'(t)}{g^2(t)} = \frac{d_1}{d_2}.$$

*En tal caso $a(t) = d_2/g(t)$.*

*Demostración.* Sea $L = a(t)D$. De (3.44) tenemos que

$$u(L) = a^2(t)D^2 + a(t)[a'(t) + d_1]D + d_2 I,$$

de modo que la ecuación diferencial $u(L)y = 0$ es equivalente a

$$y'' + \frac{a'(t) + d_1}{a(t)}y' + \frac{d_2^2}{a^2(t)}y = 0. \tag{3.48}$$

Hagamos $a(t) = d_2/g(t)$, entonces

$$\frac{a'(t) + d_1}{a(t)} = \frac{d_1 g^2(t) - d_2 g'(t)}{d_2 g(t)},$$

y

$$\frac{d_2^2}{a^2(t)} = g^2(t).$$

En consecuencia, las ecuaciones (3.47) (3.48) son iguales si y sólo si se cumple que

$$f(t) = \frac{d_1 g^2(t) - d_2 g'(t)}{d_2 g(t)},$$

o sea

$$\frac{f(t)g(t) + g'(t)}{g^2(t)} = \frac{d_1}{d_2}.$$

■

Ejemplo 1. Sean $\alpha$, $\beta$ en $\mathbb{C}$ y consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + (2\alpha t + \beta)y' + \alpha t(\alpha t + \beta)y = 0, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{3.49}$$

En este caso $p(t) = 2\alpha t + \beta$, $q(t) = \alpha t(\alpha t + \beta)$, y

$$p^2(t) + 2p'(t) - 4q(t) = 4\alpha + \beta^2.$$

Por lo tanto es posible aplicar la Proposición 3.5.1 para resolver la ecuación. Los valores de $b_1$ y $b_2$ pueden seleccionarse de varias maneras a fin de satisfacer la condición $b_1^2 - 4b_2 = 4\alpha + \beta^2$. Sean $b_1 = 0$, $b_2 = -(\alpha + \beta^2/4)$, $u(z) = z^2 - (\alpha + \beta^2/4)$ y $L = D + (\alpha t + \frac{\beta}{2})$. Entonces la ecuación (3.49) toma la forma $u(L)y = 0$. Por lo tanto su solución general está dada por

$$y(t) = C_1 \exp\Big\{a_0 t - \frac{1}{\alpha}\Big(\alpha t + \frac{\beta}{2}\Big)^2\Big\} + C_2 \exp\Big\{a_1 t - \frac{1}{\alpha}\Big(\alpha t + \frac{\beta}{2}\Big)^2\Big\},$$

donde $a_0, a_1$ son las raíces del polinomio $u(z)$ y $C_1, C_2$ son números complejos arbitrarios.

Ejemplo 2. Para la ecuación diferencial

$$ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3 y = 0, \qquad 0 < t < \infty, \tag{3.50}$$

si denotamos $f(t) = (t^2 - 1)/t$ y $g(t) = t$, entonces

$$\frac{f(t)g(t) + g'(t)}{g^2(t)} = 1.$$

Esto significa que la hipótesis de la Proposición 3.5.2 se satisface. Escogemos $d_1$ y $d_2$ tales que $d_1/d_2 = 1$, por ejemplo $d_1 = d_2 = 2$. Luego, la ecuación diferencial puede escribirse como $u(L)y = 0$, con $L = (1/t)D$ y $u(z) = z^2 + 2z + 4$. Por lo tanto la solución general de (3.50) es

$$y(t) = C_1 \exp\Big(a_0 \frac{t^2}{2}\Big) + C_2 \exp\Big(a_1 \frac{t^2}{2}\Big),$$

donde $a_0 = -1 - \sqrt{3}i, a_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $C_1, C_2$ son cualesquier números complejos. Consideremos ahora la ecuación no homogénea

$$y'' + \frac{(t^2 - 1)}{t} y' + t^2 y = t^2, \qquad t > 0. \tag{3.51}$$

Para el operador $L = (1/t)D$ una representación integral de la convolución correspondiente es

$$(h * F)(t) = \int_0^t F\left(\sqrt{t^2 - y^2}\right) h(y) y dy. \tag{3.52}$$

Ya que $u(z) = z^2 + 2z + 4$, operaciones algebraicas sencillas dan como resultado

$$h_u(t) = \mu\left\{\exp\left(\frac{a_1}{2}t^2\right) - \exp\left(\frac{a_0}{2}t^2\right)\right\},$$

donde $\mu = -(\sqrt{3}/6)i$. Sea $F(t) = t^2$, la función en el lado derecho de (3.51). Entonces una solución particular de (3.51) es

$$(h_u * F)(t) = \mu \int_0^t (t^2 - y^2)\left\{\exp\left(\frac{a_1}{2}t^2\right) - \exp\left(\frac{a_0}{2}t^2\right)\right\} y dy.$$

Usando integración por partes obtenemos

$$(h_u * F)(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 1) + \frac{\mu}{8}\left\{a_0^2 \exp\left(\frac{a_1}{2}t^2\right) - a_1^2 \exp\left(\frac{a_0}{2}t^2\right)\right\}.$$

De manera similar podemos resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
y'' + ty' + e^{-t^2} y &= 0 \\
y'' + (\tan t)y' + (\frac{3}{4}\sec^2 t)y &= 0 \\
y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{4t^2}y &= 0 \\
y'' + (\cos t)y' - \frac{1}{4}\operatorname{sen} t(\operatorname{sen} t + 2)y &= 0.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Consideremos ahora una clase de ecuaciones diferenciales lineales fácilmente reconocibles. Para $(c, n)$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$ , la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^k D^{n-k} y = 0 \tag{3.53}$$

se llama la *ecuación diferencial lineal binomial de orden n.* Esta ecuación ha sido estudiada por varios autores. Ver [30, 32, 33].

Denotemos por $H_n(z)$ a los polinomios de Hermite usuales y por $He_n(z; c)$ a los polinomios de Chebyshev-Hermite, que se definen como

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!} (2z)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!(-1)^k}{(n-2k)!k!} (2z)^{n-2k}$$

y

$$He_n(z; c) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{c}{2}\right)^k z^{n-2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!(-c)^k}{2^k(n-2k)!k!} z^{n-2k},$$

respectivamente. Es fácil ver que estas familias de polinomios se relacionan de la siguiente manera

$$He_n(z;c) = \left(\frac{c}{2}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2c}}\right). \tag{3.54}$$

Los polinomios $H_n(z)$ satisfacen la relación de recurrencia

$$H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z) \qquad n \geq 1,$$

a partir de la cual, junto con (3.54), se sigue que

$$\begin{aligned}
He_{n+1}(z;c) &= \left(\frac{c}{2}\right)^{(n+1)/2} H_{n+1}\left(\frac{z}{\sqrt{2c}}\right) \\
&= \left(\frac{c}{2}\right)^{(n+1)/2} \left[\frac{2z}{\sqrt{2c}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2c}}\right) - 2nH_{n-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2c}}\right)\right] \\
&= z\left(\frac{c}{2}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2c}}\right) - nc\left(\frac{c}{2}\right)^{(n-1)/2} H_{n-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2c}}\right).
\end{aligned}$$

Es decir, los polinomios $He_n(z;c)$ cumplen la relación de recurrencia

$$He_{n+1}(z;c) = zHe_n(z;c) - ncHe_{n-1}(z;c) \qquad n \geq 1. \tag{3.55}$$

Probaremos una identidad que generaliza algunas identidades de operadores dadas por Klamkin [32] y Chatterjea [30].

**Lema 3.5.1** *Sean $c$ en $\mathbb{C}$, $n$ en $\mathbb{N}$ y $He_n(z;c)$ el polinomio de Chebyshev-Hermite de grado $n$. Entonces*

$$He_n(D + ctI; c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^k D^{n-k}, \tag{3.56}$$

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción sobre $n$. La identidad (3.56) claramente se cumple para $n = 0$, ya que en este caso se reduce a $I = I$.

Supóngase que (3.56) es válida para todo entero $n$ mayor o igual que uno. Usando la relación de recurrencia (3.55) y la hipótesis de inducción resulta

$$\begin{aligned}
He_{n+1}(D + ctI; c) &= (D + ctI)He_n(D + ctI; c) - ncHe_{n-1}(D + ctI; c) \\
&= (D + ctI)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^k D^{n-k} - nc\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (ct)^k D^{n-1-k} \\
&= D^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left[(ct)^k D^{n+1-k} + kc^k t^{k-1} D^{n-k}\right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^{k+1} D^{n-k} - nc\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (ct)^k D^{n-1-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ct)^k D^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ct)^{k+1}D^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kc^k t^{k-1}D^{n-k} - nc\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(ct)^k D^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ct)^k D^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(ct)^k D^{n+1-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kc^k t^{k-1}D^{n-k} - nc\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(ct)^{k-1}D^{n-k} \\
&= D^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right](ct)^k D^{n+1-k} + (ct)^{n+1}I \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left[k\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-1}\right]c^k t^{k-1}D^{n-k} \\
&= D^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(ct)^k D^{n+1-k} + (ct)^{n+1}I \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(ct)^k D^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

En la penúltima igualdad hemos usado una identidad binomial y el hecho de que

$$k\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-1} = \frac{kn!}{(n-k)!k!} - \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = 0.$$

■

La identidad (3.56) implica que el operador diferencial de (3.53) es un polinomio en el operator $L_1 = D + ctI$. Aplicando la Proposición 3.4.1 encontramos que la función generadora para $L_1$ es

$$G(z,t,c) = \exp\Big(zt - \frac{c}{2}t^2\Big).$$

Como además las raíces $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ del polinomio de Chebyshev-Hermite son distintas, se concluye que las funciones

$$g_k(t) = \langle T_{\mu_k,0}, G(z,t,c)\rangle = G(\mu_k,t,c), \qquad k = 1,2,\ldots,n,$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial binomial (3.53).

Notemos que cualquier identitidad del tipo

$$w\Big(a(t)D + b(t)I\Big) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)D^{n-k}, \qquad (3.57)$$

donde $w$ es un polinomio y $a$, $b$ y $f_k$ son funciones de $t$, nos permiten resolver ecuaciones diferenciales de la forma $u(L)y = 0$, donde $L$ es el operador en el lado derecho de la ecuación (3.57) y $u$ es un polinomio. Varias identidades de esta clase han sido obtenidas en [31] y [34].

EJEMPLO 4. Hagamos $a(t) = -2$ y $b(t) = t$ en (3.37) y sea $L_1$ el operador definido por $L_1 = -2D_t + tI$, el cual está relacionado con la transformada de Weierstrass. Ver [28]. En este caso, de las ecuaciones (3.38) tenemos

$$r'(t) = -\frac{t}{2}, \qquad s'(t) = -\frac{1}{2},$$

y entonces

$$r(t) = -\frac{t^2}{4}, \qquad s(t) = -\frac{t}{2}.$$

Luego, de la Proposición 3.4.1 se sigue que $L_1$ es el operador adjunto de la multiplicación por $z$ para la función generadora

$$\tilde{G}(z,t) = \exp\left(-\frac{zt}{2} + \frac{t^2}{4}\right),$$

y por consiguiente también lo es de cualquier función de la forma $h(z)\tilde{G}(z,t)$, donde $h$ es una función que depende únicamente de $z$. En particular, tomemos la función generadora

$$G(z,t) = e^{-z^2/4}\tilde{G}(z,t) = e^{(z-t)^2/4},$$

cuyo recíproco es precisamente el kernel de la transformada integral de Weierstrass.

Usando el Corolario 3.4.1 y los cálculos anteriores vemos que una representación integral de la convolución es

$$(f * h)(t) = -\frac{e^{t^2/4}}{2}\int_0^t \exp\left\{-\frac{y^2 + (t-y)^2}{4}\right\} f(t-y)h(y)dy.$$

Sean $u$ un polinomio de grado $n+1$ como antes y $f$ una función seccionalmente continua en un intervalo cualquiera que no contenga al cero. Usando nuestros resultados encontramos directamente que la solución general de la ecuación

$$u(t - 2D_t)g(t) = f(t), \qquad t > 0,$$

puede expresarse en la forma

$$g(t) = (h_u * f)(t) + \left\langle \frac{p(z)}{u(z)}, e^{(z-t)^2/4} \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_n,$$

o bien

$$g(t) = (h_u * f)(t) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_i - 1} \beta_{i,k} g_{a_i,k}$$

donde

$$g_{a,k} = \left\langle T_{a,k}, e^{(z-t)^2/4} \right\rangle,$$

$h_u$ está dada por (3.24) y los coeficientes $\beta_{i,k}$ son números complejos arbitrarios.

# Capítulo 4

# Diferencias Divididas Fraccionales

En este capítulo extendemos nuestra teoría introduciendo diferencias divididas de orden fraccional y polinomios exponenciales generalizados.

En la Sección 4.1 usamos una integral de contorno de Hankel que representa al recíproco de la función Gamma para definir diferencias divididas generalizadas, un operador de diferenciación fraccional $L_\mu$ relacionado con el operador de Weyl y una familia de funciones que forman una base de un espacio vectorial $\tilde{\mathcal{E}}$ de polinomios exponenciales generalizados.

Empleando el Teorema 3.2.1 encontramos una fórmula explícita para la solución general de ecuaciones de la forma $u(L_\mu)g = f$, donde $u$ es un polinomio y $f$ es un elemento dado de $\tilde{\mathcal{E}}$.

En la Sección 4.2 describimos las relaciones de nuestros polinomios exponenciales generalizados con las funciones de Mittag-Leffler biparamétricas y mostramos que nuestro operador $L_\mu$ coincide con el operador de derivada fraccional usual de Riemann-Liouville $D_\mu$ sobre cierto subespacio de $\tilde{\mathcal{E}}$. También aplicamos nuestro método (Sección 4.1) al resolver un problema de Cauchy con valores en la frontera para $D_\mu$, que fue estudiado por Luchko y Srivastava [39, 40] usando un cálculo operacional tipo Mikusiński.

En la Sección 4.3 encontramos soluciones de la ecuación diferencial de Laplace usando nuestros resultados y como casos particulares de ésta, resolvemos las ecuaciones de Bessel, Laguerre e Hipergeométrica Confluente. Dichas ecuaciones fueron resueltas con un método operacional tipo Mikusiński por Yosida [37].

## 4.1 Diferencias Divididas Fraccionales y Polinomios Exponenciales Generalizados

En esta sección generalizaremos (1.43) y definiremos un nuevo espacio de funciones $\tilde{\mathcal{E}}$ como una extensión del espacio $\mathcal{E}$ de los cuasi-polinomios. Después de esto daremos una clase de ecuaciones funcionales cuyas soluciones son precisamente los elementos de $\tilde{\mathcal{E}}$.

Hermann Hankel demostró que el recíproco de la función Gamma puede representarse

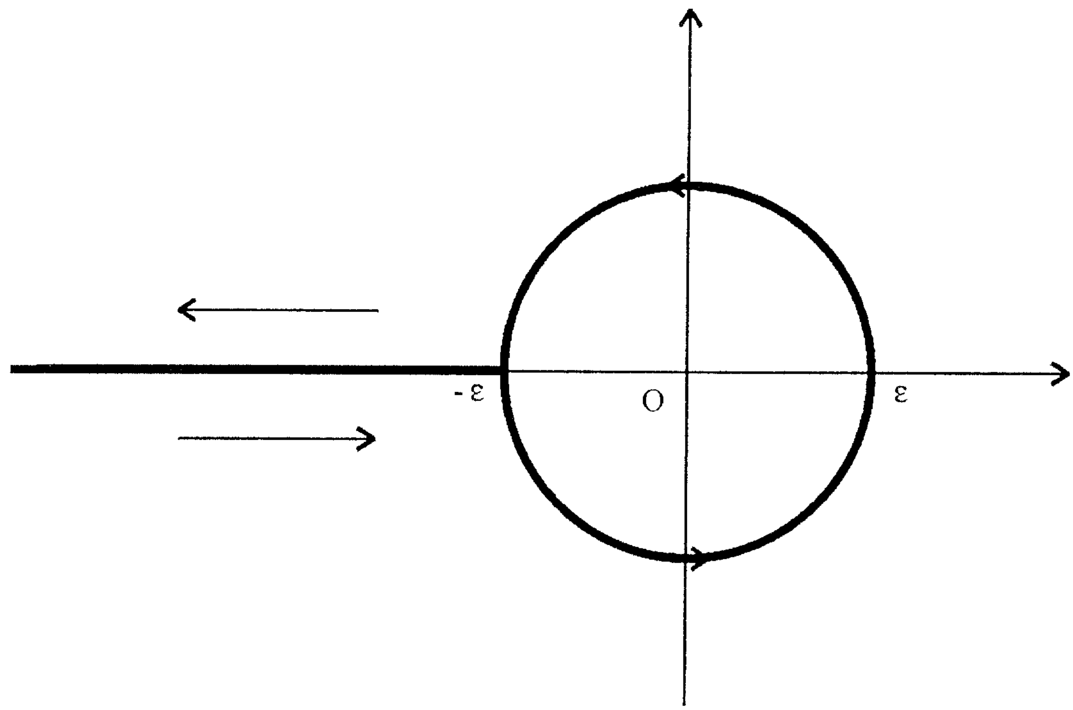


Figura 4.1: Trayectoria de Hankel $\mathcal{C}$.

mediante la siguiente integral de contorno (ver [48] p. 234 y [35] p. 324)

$$\frac{1}{\Gamma(b)} = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^b} dz, \qquad b \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Aquí, cortamos el plano complejo $z$ a lo largo del eje real negativo y definimos

$$z^{-b} = e^{-b \log z},$$

tomando la parte imaginaria de $\log z$ entre $-\pi$ y $\pi$. El contorno de integración $\mathcal{C}$ sigue el borde inferior del corte desde $-\infty$ a $-\epsilon$, con $\epsilon > 0$, va alrededor de la circunferencia $|z| = \epsilon$ en el sentido positivo y finalmente sigue el borde superior del corte desde $-\epsilon$ hasta $-\infty$ (figura 4.1).

La integral no depende del valor de $\epsilon$ y para cualquier $\theta$ tal que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\mathcal{C}$ se puede reemplazar por el circuito $\mathcal{C}(\theta)$ que consta del rayo rectilíneo $\arg z = -\theta$, $|z| \geq \epsilon$, del arco de la circunferencia $|z| = \epsilon$ que se define por la condición $|\arg z| \leq \theta$ y del rayo rectilíneo $\arg z = \theta$, $|z| \geq \epsilon$, que es simétrico al primero respecto del eje real (figura 4.2). La curva $\mathcal{C}$ en (4.1) corresponde al caso límite cuando $\theta$ tiende a $\pi$. Llamaremos a una curva de esta clase una trayectoria de Hankel alrededor del origen.

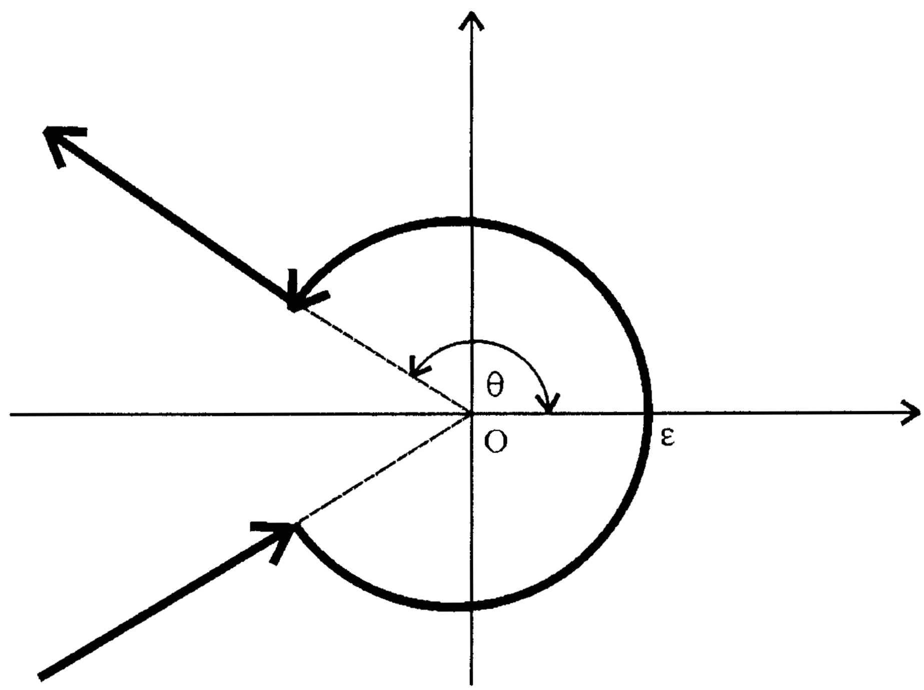


Figura 4.2: Trayectoria de Hankel $C(\theta)$.

Sean $a, t$ en $\mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ dados. Denotemos por $\beta$ a la curva que consta del rayo que pasa por $a$, definido por $\arg z = \pi - \arg t$, $|z - a| \geq \epsilon$, recorrido en dirección hacia $a$, de la circunferencia $|z - a| = \epsilon$ orientada positivamente y otra vez del mismo rayo pero orientado en sentido opuesto (figura 4.3). Es decir, $\beta$ se obtiene de trasladar y rotar una trayectoria de Hankel.

Consideremos la integral

$$I(t,b) = \frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{e^{zt}}{(z-a)^{1+b}}dz, \qquad b \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Sea $\varphi(z) = t(z-a)$. Haciendo el cambio de variable $w = \varphi(z)$ y empleando (4.1) en la igualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned} I(t,b) &= \frac{t^b e^{at}}{2\pi i}\int_\beta \frac{e^{t(z-a)}}{[t(z-a)]^{1+b}}tdz \\ &= \frac{t^b e^{at}}{2\pi i}\int_\beta \frac{e^{\varphi(z)}}{[\varphi(z)]^{1+b}}\varphi'(z)dz \end{aligned}$$

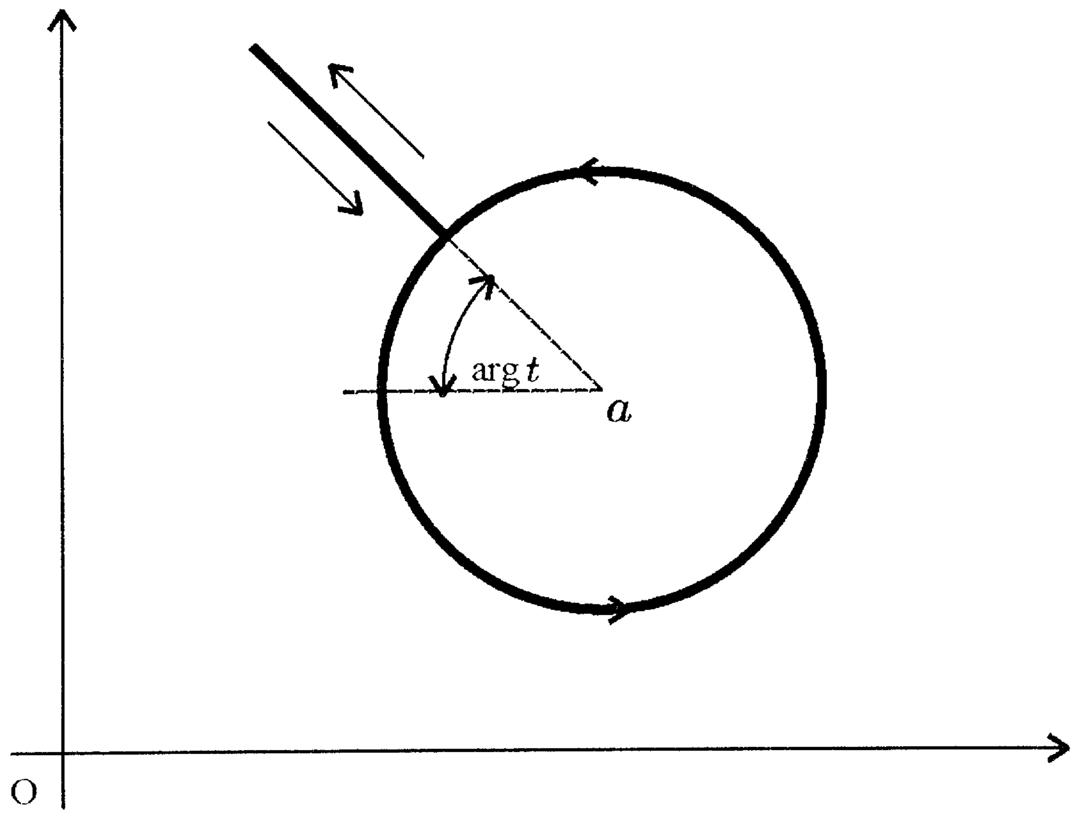


Figura 4.3: Trayectoria de Hankel rotada y trasladada.

$$= \frac{t^b e^{at}}{2\pi i} \int_{\varphi\circ\beta} \frac{e^w}{w^{1+b}} dw.$$

Es claro que en la integral (4.2) también podría emplearse una curva como la de la figura 4.2, centrada en $a$ y girada. En el caso en que $t$ es un número real positivo no hay rotación.

De esta forma encontramos que

$$\left\langle \frac{1}{(z-a)^{1+\mu}}, e^{zt} \right\rangle = \frac{t^\mu}{\Gamma(1+\mu)} e^{at}, \quad a, \mu \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

tomando el contorno de integración como una trayectoria de Hankel alrededor de $a$ y rotada. Note que (4.3) es una extensión de (1.43).

Por otra parte, del Teorema del Residuo podemos escribir la ecuación (1.34) en la forma

$$\left\langle \frac{p}{u}, f \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{p(z) f(z)}{u(z)} dz, \qquad p \in \mathcal{P}_n \tag{4.4}$$

donde $f$ es una función definida en las raíces de $u$, $\gamma$ es una curva cerrada simple, rectificable y orientada positivamente (scroc, ver [48] p. 172, 241) la cual encierra a las raíces de $u$, que son $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Así que si $f$ es una función analítica sobre un conjunto $U \subset \mathbb{C}$, $h$ es una función analítica sobre $U$ excepto por singularidades aisladas $z_0, z_1, \ldots, z_n$ y $\gamma$ es una scroc en $U$ tal que $z_0, z_1, \ldots, z_n$ se localizan en su interior, definimos

$$\langle h(z), f(z)\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)f(z)dz. \tag{4.5}$$

Esta expresión generaliza (1.43).

Es fácil probar que

$$\langle h(z), f'(z)\rangle = \langle -h'(z), f(z)\rangle \tag{4.6}$$

y que se cumplen propiedades análogas a (1.36)-(1.42).

**Proposición 4.1.1** *Sean $b$ y $t$ números complejos arbitrarios y $z$ en el conjunto $\mathbb{C} - \{x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -1, y = 0\}$. Entonces*

$$\left\langle (1+z)^b, e^{zt}\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}\frac{t^{k-b-1}}{\Gamma(k-b)}. \tag{4.7}$$

*Demostración.* Sean $b$ y $z$ números complejos con $|z| < 1$. Por el teorema del binomio (ver [37] p. 39) tenemos

$$(1+z)^b = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}z^k$$

donde

$$\binom{b}{k} = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1$$

y $\binom{b}{0} = 1$. Luego, si $b$ y $z$ son números complejos con $|z| > 1$, se tiene que

$$(1+z)^b = z^b\left(1+\frac{1}{z}\right)^b = z^b\sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}\frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}\frac{1}{z^{k-b}}.$$

Por lo tanto, usando (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle (1+z)^b, e^{zt}\right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}\frac{1}{z^{k-b}}, e^{zt}\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}\left\langle \frac{1}{z^{k-b}}, e^{zt}\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{b}{k}\frac{t^{k-b-1}}{\Gamma(k-b)}.
\end{aligned}$$

■

Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos distintos que no son cero y sea $V$ el conjunto de números complejos $z = x + iy$ que consiste de todo el plano complejo excepto los rayos $y = \operatorname{Im} z_1, x \leq \operatorname{Re} z_1$ y $y = \operatorname{Im} z_2, x \leq \operatorname{Re} z_2$. A continuación daremos otro resultado, semejante a (4.7), que nos será de utilidad mas adelante. El contorno de integracion al que se hace mención en la definición (4.5) es, en este caso, una trayectoria de Hankel en el conjunto $\tilde{V} = \{z \in V : |z| > \max\{|z_1|, |z_2|\}$.

**Proposición 4.1.2** *Sean $z_1, z_2$ y $\tilde{V}$ como en el párrafo anterior. Si $\lambda$ y $\delta$ están en $\mathbb{C}$ y $z$ en $\tilde{V}$, entonces*

$$\left\langle (z - z_1)^\lambda (z - z_2)^\delta, e^{zt} \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \frac{t^{k-\lambda-\delta-1}}{\Gamma(k - \lambda - \delta)}, \tag{4.8}$$

*donde*

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{\lambda}{j} \binom{\delta}{k-j} z_1^j z_2^{k-j}. \tag{4.9}$$

*Demostración.* Para $z$ en $\tilde{V}$, del teorema del binomio tenemos que

$$\begin{aligned}
(z - z_1)^\lambda (z - z_2)^\delta &= z^{\lambda+\delta} \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)^\lambda \left(1 - \frac{z_2}{z}\right)^\delta \\
&= z^{\lambda+\delta} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\lambda}{j} \frac{z_1^j}{z^j} \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\delta}{m} \frac{z_2^m}{z^m} \right\},
\end{aligned}$$

y multiplicando las series resulta

$$(z - z_1)^\lambda (z - z_2)^\delta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \frac{1}{z^{k-\lambda-\delta}},$$

con los coeficientes $c_k$ dados por (4.9). Luego, empleando (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle (z - z_1)^\lambda (z - z_2)^\delta, e^{zt} \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \left\langle \frac{1}{z^{k-\lambda-\delta}}, e^{zt} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \frac{t^{k-\lambda-\delta-1}}{\Gamma(k - \lambda - \delta)}.
\end{aligned}$$

∎

Obsérvese que si $z_1 z_2 = 0$ o $z_1 = z_2$, entonces podemos usar (4.7) con el fin de dar una representación en serie para el lado izquierdo de la ecuación (4.8).

Definimos en seguida una familia de funciones mediante la cual generalizamos nuestros resultados previos y que contiene a los polinomios exponenciales.

Sea $\mu$ un número real positivo. Para $a$ en $\mathbb{C}$, $\lambda$ en $\mathbb{R}$ y $k$ en $\mathbb{N}$ definimos las funciones

$$G_\lambda(a,t) = \left\langle \frac{z^\lambda}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle \tag{4.10}$$

y

$$g_{\lambda,a,k}(t) = T_{a,k} G_\lambda(x,t), \tag{4.11}$$

donde el funcional de Taylor actúa con respecto a $x$. Ahora $z$ está en el conjunto $U$ definido por

$$U = \{z \in \mathbb{C} : z^\mu \neq a\} - \{x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\}. \tag{4.12}$$

La trayectoria de integración es una curva de Hankel en $U$ que inicia y termina en $-\infty$ y encierra el disco $|z| \leq |a|^{1/\mu}$ orientado positivamente: $-\pi \leq \arg t \leq \pi$ sobre $\mathbb{C}$.

Denotamos por $\tilde{\mathcal{E}}$ al espacio vectorial complejo generado por las funciones $g_{j,a,k}$, para $(j,a,k)$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, y para cada entero fijo $j_0$, $\tilde{\mathcal{E}}_{j_0}$ denota el subespacio generado por las funciones $g_{j,a,k}$, para $j = 0, 1, \ldots, j_0$ y $(a,k)$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{N}$.

Note que

$$g_{\lambda,a,k}(t) = \left\langle \frac{z^\lambda}{(z^\mu - a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle. \tag{4.13}$$

En particular, si $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ entonces

$$g_{0,a,k}(t) = \left\langle \frac{1}{(z-a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle = \frac{t^k}{k!} e^{at}.$$

Debido a esto, decimos que los elementos de $\tilde{\mathcal{E}}$ son *polinomios exponenciales generalizados.*

Si $\lambda < \mu$ y $\mu > 0$ veremos en la próxima sección que $g_{\lambda,a,k}$ puede expresarse en términos de una función biparamétrica de Mittag-Leffler. Si $\lambda \geq \mu$ entonces $g_{\lambda,a,k}$ contiene adicionalmente una combinación lineal de potencias de $t$ con exponentes que son menores o iguales que $-1$.

Concluimos esta sección introduciendo una clase de ecuaciones funcionales cuyo espacio de soluciones es $\tilde{\mathcal{E}}$. Para $\alpha > 0$ definimos el operador lineal $L_\alpha$ sobre $\tilde{\mathcal{E}}$ por

$$L_\alpha g_{j,a,k}(t) = \left\langle \frac{z^j}{(z^\mu - a)^{1+k}}, z^\alpha e^{zt} \right\rangle. \tag{4.14}$$

Estudiaremos las soluciones de ecuaciones de la forma

$$u(L_\mu) g(t) = f(t), \tag{4.15}$$

donde $g$ es una función desconocida, u es un polinomio de grado positivo como en (1.13), $t$ es una variable real o compleja y $f$ es un elemento de $\tilde{\mathcal{E}}$.

Mostramos primero que el operador $L_\mu$ es un mapeo lineal del espacio $\tilde{\mathcal{E}}$ en sí mismo, es decir $L_\mu : \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}}$. Si $k = 0$ tenemos

$$L_\mu g_{j,a,0}(t) = \left\langle \frac{z^{j+\mu}}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle = \left\langle z^j + \frac{a z^j}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle = a g_{j,a,0}(t),$$

puesto que $\langle z^j, e^{zt}\rangle = 0$ para todo $j$ en $\mathbb{N}$, por la propiedad (1.38). Si $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} L_\mu g_{j,a,k}(t) &= \left\langle \frac{z^{j+\mu}}{(z^\mu - a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{az^j}{(z^\mu - a)^{1+k}} + \frac{z^j}{(z^\mu - a)^k}, e^{zt} \right\rangle \\ &= ag_{j,a,k}(t) + g_{j,a,k-1}(t). \end{aligned}$$

En consecuencia el operador $L_\mu$ tiene la propiedad (compárese con la ecuación (3.16))

$$L_\mu g_{j,a,k} = \begin{cases} ag_{j,a,0}, & \text{si } k = 0, \\ ag_{j,a,k} + g_{j,a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{4.16}$$

Generalizamos (4.16) en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.3** *Sean $j, q$ y $k$ en $\mathbb{Z}$ con $k \geq 1$. Entonces*

$$L_{\mu-q-1} g_{j,a,k} = \begin{cases} ag_{j-q-1,a,0}, & \text{si } k = 0,\ j \geq q+1, \\ \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)} + ag_{j-q-1,a,0}, & \text{si } k = 0,\ j \leq q, \\ ag_{j-q-1,a,k} + g_{j-q-1,a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

*Demostración.* Veamos primero el caso $k = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} L_{\mu-q-1} g_{j,a,0}(t) &= \left\langle \frac{z^{j+\mu-q-1}}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle \\ &= \left\langle z^{j-q-1} + \frac{az^{j-q-1}}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle \\ &= \left\langle z^{j-q-1}, e^{zt} \right\rangle + a\left\langle \frac{z^{j-q-1}}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle. \end{aligned}$$

Pero $\langle z^{j-q-1}, e^{zt}\rangle = 0$ si $j \geq q+1$; mientras que

$$\left\langle z^{j-q-1}, e^{zt} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{z^{1+q-j}}, e^{zt} \right\rangle = \frac{t^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)}.$$

si $j \leq q$. Luego

$$L_{\mu-q-1} g_{j,a,0}(t) = \begin{cases} ag_{j-q-1,a,0}, & \text{si } j \geq q+1, \\ \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)} + ag_{j-q-1,a,0}, & \text{si } j \leq q. \end{cases}$$

Por otra parte, sea $k \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
L_{\mu-q-1}g_{j,a,k}(t) &= \left\langle \frac{z^{j+\mu-q-1}}{(z^\mu - a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{z^{j-q-1}(z^\mu - a + a)}{(z^\mu - a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{z^{j-q-1}}{(z^\mu - a)^{k}}, e^{zt} \right\rangle + a \left\langle \frac{z^{j-q-1}}{(z^\mu - a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle \\
&= a g_{j-q-1,a,k}(t) + g_{j-q-1,a,k-1}(t).
\end{aligned}$$

■

Definimos el producto de convolución conmutativo $*$ sobre $\tilde{\mathcal{E}}$ como sigue. Sean $i, j, k$, y $m$ en $\mathbb{N}$ y sean $a, b$ números complejos. Si $a \neq b$ definimos

$$g_{i,a,k} * g_{j,b,m} = \sum_{l=0}^{k} C(a, l; b, m) g_{i+j,a,k-l} + \sum_{l=0}^{m} C(b, l; a, k) g_{i+j,b,m-l}, \tag{4.18}$$

donde los coeficientes funcionales están definidos en (1.21), y

$$g_{i,a,k} * g_{j,a,m} = g_{i+j,a,1+k+m}. \tag{4.19}$$

Para cualquier $a$ en $\mathbb{C}$ es claro que

$$(L_\mu - aI) g_{j,a,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 0, \\ g_{j,a,k-1}, & \text{si } k \geq 1, \end{cases} \tag{4.20}$$

y así

$$(L_\mu - aI)^{1+m} g_{j,a,k} = 0, \qquad m \geq k. \tag{4.21}$$

De manera parecida a como se demostró (3.19) es fácil ver que

$$(L_\mu - aI)^m g_{j,b,k} = \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} (b-a)^{m-i} g_{j,b,k-i}, \tag{4.22}$$

donde $s = \min\{m, k\}$. Por lo tanto, para $a \neq b$ tenemos

$$(L_\mu - aI)^m g_{j,b,k} \neq 0, \qquad j, k, m \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Un cálculo directo como en (3.21) nos lleva a

$$L_\mu(g_{0,a,k} * g_{j,b,m}) = (L_\mu g_{0,a,k}) * g_{j,b,m} + g_{j,b,m} \Phi g_{0,a,k}, \tag{4.24}$$

donde $\Phi$ es el funcional lineal definido sobre $\tilde{\mathcal{E}}$ por $\Phi g_{j,a,k} = \delta_{0,k}$. Por linealidad obtenemos

$$L_\mu(g * f) = (L_\mu g) * f + f \Phi g, \qquad f \in \tilde{\mathcal{E}},\ g \in \tilde{\mathcal{E}}_0. \tag{4.25}$$

En forma análoga a como se estableció (3.23), también por inducción es fácil probar que

$$(L_\mu - aI)^{1+k}(g_{0,a,k} * f) = f, \qquad (a,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N},\ f \in \tilde{\mathcal{E}}. \tag{4.26}$$

Sea $u(z)$ un polinomio mónico de grado positivo como en (1.13). Recordemos que de acuerdo con (3.7) la descomposición en fracciones parciales para $1/u$ es

$$\frac{1}{u(z)} = \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k} r_{a_i,k}(z).$$

Definimos ahora la función

$$h_u = \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k} g_{0,a_i,k}. \tag{4.27}$$

Luego, como un caso particular del Teorema 3.2.1 obtenemos

**Teorema 4.1.1** *Sea $f$ un elemento dado de $\tilde{\mathcal{E}}$ y sea $u$ un polinomio igual que siempre. Entonces la solución general de la ecuación $u(L_\mu)g = f$ es*

$$g = h_u * f + \tilde{g}, \tag{4.28}$$

*donde $h_u$ está definida en (4.27) y $\tilde{g}$ es cualquier elemento del subespacio de $\tilde{\mathcal{E}}$ generado por $\{g_{j,a_i,k} : j \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le r,\ 0 \le k \le m_i - 1\}$.*

## 4.2 Aplicación a las ecuaciones diferenciales fraccionales

Iniciaremos esta sección dando algunos conceptos y teoremas básicos del cálculo fraccional. La teoría y aplicaciones generales pueden consultarse en [41, 42, 43, 44].

Denotemos por $\mathcal{A}$ al espacio vectorial de funciones que son seccionalmente continuas en el intervalo $J' = (0, \infty)$ e integrables sobre cualquier subintervalo finito de $J = [0, \infty)$.

Sea $\mu$ un número real positivo y $f$ en $\mathcal{A}$. El operador $I_\mu$ definido por

$$(I_\mu f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-\xi)^{\mu-1} f(\xi) d\xi, \qquad t > 0, \tag{4.29}$$

se llama el *operador integral fraccional de Riemann-Liouville* de orden $\mu$.

Si $f$ es una función continua, tomando el límite cuando $\mu$ tiende a cero por la derecha se encuentra que [42]

$$\lim_{\mu \to 0^+} (I_\mu f)(t) = f(t).$$

En consecuencia, se define

$$(I_0 f)(t) = f(t), \tag{4.30}$$

sobre el espacio de las funciones continuas en $J$.

En particular se tiene que

$$I_\mu t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} t^{\lambda+\mu} \qquad \mu > 0, \lambda > -1, t > 0.$$

**Teorema 4.2.1** *Si $f$ es una función continua en $J$ y $\lambda, \mu$ son números reales positivos, entonces*

$$I_\mu[I_\lambda f(t)] = I_{\mu+\lambda} f(t) = I_\lambda[I_\mu f(t)].$$

Sea $\mu > 0$ y denotemos por $\eta$ al menor entero mayor o igual que $\mu$, es decir

$$\eta = \begin{cases} [\mu]+1, & \text{si } \mu \notin \mathbb{N}, \\ \mu, & \text{si } \mu \in \mathbb{N} \end{cases}. \tag{4.31}$$

El *operador diferencial fraccional de Riemann-Liouville* de orden $\mu$, denotado por $D_\mu$, se define como

$$(D_\mu f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^\eta (I_{\eta-\mu} f)(t), \qquad t > 0. \tag{4.32}$$

Para una función $f$ en $\mathcal{A}$, $D_\mu f$ se llama la *derivada fraccional de $f$ de orden $\mu$*, si es que existe. Por supuesto, si $\mu$ es un entero positivo, digamos $j$, entonces $D_j f$ puede existir para $t > 0$ aun si $f$ no pertenece a la clase $\mathcal{A}$. Por ejemplo, sea $f(t) = t^{-1}$. Pero, si $f$ es continua y $j$ veces derivable en J, ciertamente está en $\mathcal{A}$ y de (4.30) resulta

$$D_j f(t) = \frac{d^j}{dt^j} I_0 f(t) = \frac{d^j f(t)}{dt^j} = f^{(j)}(t),$$

lo cual significa que para $t > 0$ la derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $\mu = j$ coincide con la derivada convencional de orden $j$.

Cabe sealar que en algunos libros se escoge $\eta = [\mu] + 1$, que difiere de la defínción (4.31) únicamente cuando $\mu$ es un número entero. En este caso, si $\mu = j$ y $f$ tiene $j$ derivadas continuas en $J$, entonces $f$ pertenece a $\mathcal{A}$ y de la relación

$$D_j f(t) = D^{j+1} \int_0^t f(\xi) d\xi = f^{(j)}(t),$$

vemos que nuevamente (4.32) está de acuerdo con la definición usual de la derivada ordinaria.

Un cálculo directo muestra que

$$D_\mu t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} t^{\lambda-\mu}, \qquad \lambda > -1, \mu > 0, t > 0.$$

Diremos que una función $f$ es de clase $\mathcal{F}$ si es de la forma

$$f(t) = t^\lambda \zeta(t), \tag{4.33}$$

o

$$f(t) = t^{\lambda}(\log t)\zeta(t), \tag{4.34}$$

donde $\lambda > -1$ y $\zeta(t)$ es una función analítica en una vecindad del origen.

Ahora, si $\zeta(t)$ tiene un radio de convergencia finito, $f$ no pertenece a $\mathcal{A}$, puesto que no está definida sobre $J$. Podemos evitar esta dificultad de la siguiente manera. Supóngase que $R$ es el radio de convergencia (finito) de $\zeta(t)$. Sea $X$ un número positivo menor que $R$. Entonces si definimos $\zeta(t)$ como cero para $t \geq X$, vemos que $f(t)$ es ahora de clase $\mathcal{A}$. Usando este artificio, en el caso en que $\zeta(t)$ no es una función entera, diremos que $\mathcal{F}$ es una subclase de $\mathcal{A}$. Puede demostrarse que si $f$ está en $\mathcal{F}$, entonces $I_{\mu}f$ y $D_{\mu}f$ existen para cualquier $\mu > 0$.

**Teorema 4.2.2** *Sea $f$ en $\mathcal{F}$. Si $f$ está dada por (4.33), con*

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

*entonces*

$$D_{\mu}f(t) = t^{\lambda-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma(k+\lambda+1-\mu)} t^k. \tag{4.35}$$

**Teorema 4.2.3** *Sea $f$ en $\mathcal{F}$. Es decir, $f(t)$ es de la forma (4.33) o (4.34), donde $\lambda > -1$ y*

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

*tiene un radio de convergencia $R > 0$. Sea $X$ un número positivo menor que $R$. Entonces*

$$D_{\nu}[D_{\mu}f(t)] = D_{\nu+\mu}f(t) \tag{4.36}$$

*para todo $t$ en $(0, X]$ si*
*(a) $\mu < \lambda + 1$ y $\nu$ es arbitrario, o*
*(b) $\mu \geq \lambda + 1$, $\nu$ es arbitrario y $a_k = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, \eta - 1$, donde $\eta$ es el menor entero mayor o igual que $\mu$, definido por (4.31).*

Del teorema anterior queda claro que la relación $D_{\nu}[D_{\mu}] = D_{\nu+\mu}$ no se cumple en general .

En esta sección estudiamos las soluciones de las ecuaciones diferenciales fraccionales de la forma

$$u(D_{\mu})g(t) = f(t), \tag{4.37}$$

donde $u$ es un polinomio no cero dado en (1.13), t es una variable real o compleja y denotamos por $D_{\mu}^{k}$ la composición de $k$ operadores diferenciales fraccionales de Riemann-Liouville.

Una *función de Mittag-Leffler biparamétrica* se define por la serie

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \tag{4.38}$$

o equivalentemente por la integral

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{\alpha-\beta} e^t}{t^\alpha - z}\, dt, \tag{4.39}$$

donde la trayectoria de integración $C$ es una trayectoria de Hankel como en (4.10) y (4.11). Ver [38], vol. 3. Hay algunas relaciones con otras funciones conocidas, dadas en esta misma referencia (sección 18.1):

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z, \qquad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{2,1}(z) &= \cosh\sqrt{z}, \qquad E_{2,2}(z) = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \\ E_{1/2,1}(\sqrt{z}) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z} \operatorname{erfc}(-\sqrt{z}) \end{aligned}$$

Las siguientes dos proposiciones relacionan nuestros resultados de la sección previa con los conceptos que acabamos de dar.

**Proposición 4.2.1** *Sean $\mu$ y $\lambda$ números reales tales que $\mu > 0$ y $\lambda < \mu$. Entonces*

$$g_{\lambda,a,k}(t) = \frac{t^{\mu(k+1)-\lambda-1}}{k!} E^{(k)}_{\mu,\mu-\lambda}(at^\mu), \tag{4.40}$$

*donde*

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(y) = \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!\, y^j}{j!\, \Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)}.$$

*Demostración.* Para $z$ en el conjunto $U$ definido en (4.12) y tal que $|z| > |a|^{1/\mu}$, tenemos

$$\frac{1}{z^\mu - a} = \frac{1}{z^\mu(1 - az^{-\mu})} = \frac{1}{z^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z^\mu}\right)^k,$$

así que

$$\frac{z^\lambda}{z^\mu - a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{\mu k + \mu - \lambda}},$$

y usando (4.10) y (4.3) obtenemos

$$G_\lambda(a,t) = \left\langle \frac{z^\lambda}{z^\mu - a}, e^{zt} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{a^k}{z^{\mu k+\mu-\lambda}}, e^{zt} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^{\mu k+\mu-\lambda-1}}{\Gamma(\mu k+\mu-\lambda)} \\
&= t^{\mu-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^{\mu})^k}{\Gamma(\mu k+\mu-\lambda)},
\end{aligned}$$

es decir

$$G_\lambda(a,t) = t^{\mu-\lambda-1} E_{\mu,\mu-\lambda}(at^{\mu}). \tag{4.41}$$

De (4.41) y (4.11) obtenemos (4.40). ■

La Proposición 4.2.1 puede escribirse en términos de las funciones $E^{\rho}_{\alpha,\beta}$, definidas en [39] por

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \rho \in \mathbb{N},$$

ya que

$$\frac{1}{\rho!} E^{(\rho)}_{\alpha,\beta}(z) = E^{\rho+1}_{\alpha,\alpha\rho+\beta}(z).$$

Supóngase que $\lambda$ es real y que $\lambda \geq \mu$. Sea $l_0$ el menor entero tal que $l_0\mu \leq \lambda < (l_0+1)\mu$, y defínase $\alpha = \lambda - l_0\mu$. Así que $\lambda = l_0\mu + \alpha$, con $0 \leq \alpha < \mu$ y

$$\frac{z^\lambda}{z^\mu - a} = \frac{z^\alpha (z^\mu)^{l_0}}{z^\mu - a} = \sum_{l=0}^{l_0-1} a^{l_0-1-l} z^{\mu l+\alpha} + \frac{a^{l_0} z^\alpha}{z^\mu - a},$$

Usando (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
G_\lambda(a,t) &= \sum_{l=0}^{l_0-1} a^{l_0-1-l} \left\langle z^{\mu l+\alpha}, e^{zt} \right\rangle + a^{l_0} t^{\mu-\alpha-1} E_{\mu,\mu-\alpha}(at^\mu) \\
&= \sum_{l=0}^{l_0-1} \frac{a^{l_0-1-l} t^{-\mu l-\alpha-1}}{\Gamma(-\mu l-\alpha)} + a^{l_0} t^{\mu-\alpha-1} E_{\mu,\mu-\alpha}(at^\mu).
\end{aligned}$$

La última expresión, junto con (4.11), muestran que la función $g_{\lambda,a,k}$ contiene una combinación lineal de potencias de t con exponentes que son menores o iguales que $-1$, y en consecuencia $D_\mu g_{\lambda,a,k}$ no existe si $\lambda \geq \mu$.

Un cálculo directo empleando (4.32) y (4.40) permite ver que las funciones $g_{j,a,k}$ con $j$ en $\mathbb{N}$ y $0 \leq j < \mu$, satisfacen la siguiente propiedad.

**Proposición 4.2.2** *Sea $D_\mu$ el operador diferencial fraccional de Riemann-Liouville de orden $\mu$ y sea $j$ en $\mathbb{N}$, con $j < \mu$. Entonces*

$$D_\mu g_{j,a,k} = \begin{cases} a g_{j,a,0}, & \text{si } k = 0, \\ a g_{j,a,k} + g_{j,a,k-1}, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{4.42}$$

*Demostración.* Tenemos que

$$g_{j,a,k}(t) = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{a^{m-k} t^{m\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(m\mu+\mu-j)}.$$

Si $k = 0$ entonces, aplicando (4.35) resulta

$$D_\mu g_{j,a,0}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m t^{m\mu-j-1}}{\Gamma(m\mu-j)} = a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} = a g_{j,a,0}(t).$$

Ahora, para $k \geq 1$ usando nuevamente (4.35) tenemos

$$\begin{aligned}
D_\mu g_{j,a,k}(t) &= \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{a^{m-k} t^{m\mu-j-1}}{\Gamma(m\mu-j)} \\
&= \sum_{i=k-1}^{\infty} \binom{i+1}{k} \frac{a^{i+1-k} t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i+1}{k} \frac{a^{i+1-k} t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} + \frac{t^{k\mu-j-1}}{\Gamma(k\mu-j)} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} \frac{a^{i+1-k} t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} + \\
&\qquad \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k-1} \frac{a^{i+1-k} t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} + \frac{t^{k\mu-j-1}}{\Gamma(k\mu-j)} \\
&= a \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} \frac{a^{i-k} t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} + \\
&\qquad \sum_{i=k-1}^{\infty} \binom{i}{k-1} \frac{a^{i-(k-1)} t^{i\mu+\mu-j-1}}{\Gamma(i\mu+\mu-j)} \\
&= a g_{j,a,k}(t) + g_{j,a,k-1}(t).
\end{aligned}$$

■

Note que usando (4.42) repetidas veces es posible calcular $D^i_\mu g_{j,a,k}$, para $i \geq 1$, en términos de las funciones $g_{j,a,m}$, con $0 \leq m \leq k$. Sea $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$ el espacio vectorial complejo generado por las funciones $g_{j,a,k}$, con $(j,a,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq \eta - 1$. Entonces $D_\mu : \tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1} \to \tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$. Además, la Proposición 4.2.2 nos dice que $D_\mu = L_\mu$ sobre $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$, donde $L_\mu$ se definió en (4.14). Por lo tanto del Teorema 4.1.1 obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.1** *Sea $f$ un elemento dado de $\tilde{\mathcal{E}}$ y sea el polinomio $u$ como antes. Entonces la solución general de la ecuación $u(D_\mu)g = f$ es*

$$g = h_u * f + \sum_{j=0}^{\eta-1} \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_i-1} \beta_{j,i,k} g_{j,a_i,k}, \tag{4.43}$$

*donde $h_u$ está definida en (4.27) y los coeficientes $\beta_{j,i,k}$ son números complejos arbitrarios.*

Un cálculo directo, utilizando (4.35), muestra que $D_{\mu-q-1} = L_{\mu-q-1}$ sobre $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$ para $q = 0, 1, \ldots, \eta - 1$. De esto, (4.40) y (4.17) concluimos que

$$\lim_{t\to 0} D_{\mu-q-1} g_{j,a,k}(t) = \delta_{(j,k),(q,0)}. \tag{4.44}$$

Aplicaremos nuestros resultados previos para resolver el problema

$$u(D_\mu)g = f, \qquad \lim_{t\to 0}(D_{\mu-q-1}D^l_\mu g)(t) = d_{l,q}, \tag{4.45}$$

donde $l = 0, 1, \ldots, n$; $q = 0, 1, \ldots, \eta - 1$ y $f \in \tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$. El problema 4.45 se llama un *problema de Cauchy con valores en la frontera para el operador de derivada fraccional de Riemann-Liouville* $D_\mu$. Si $\mu = 1$ éste se reduce al bien conocido problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de orden $n + 1$ con coeficientes constantes, el cual examinamos en la Sección 2.2, ver [10]. Primero, daremos un resultado acerca de la solución particular de la ecuación.

**Proposición 4.2.3** *Sea $h_u$ como antes. Entonces*

$$\lim_{t\to 0}(D_{\mu-q-1}D^l_\mu h_u * f)(t) = 0, \tag{4.46}$$

*para cualquier $f$ en $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$ y $l = 0, 1, \ldots, n$; $q = 0, 1, \ldots, \eta - 1$.*

*Demostración.* Tenemos que

$$g_{j,a,k}(t) = \left\langle \frac{z^j}{(z^\mu - a)^{1+k}}, e^{zt} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{(x - a_i)^{1+k}}, \left\langle \frac{z^j}{z^\mu - x}, e^{zt} \right\rangle_z \right\rangle_x,$$

es decir

$$g_{j,a,k}(t) = \left\langle \frac{1}{(x - a_i)^{1+k}}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle. \tag{4.47}$$

De (4.47) y (4.18) es fácil ver que

$$(g_{i,a,k} * g_{j,b,m})(t) = \left\langle \frac{1}{(x-a)^{1+k}(x-b)^{1+m}}, g_{i+j,x,0}(t) \right\rangle.$$

Sea $f$ un elemento de $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$. Entonces

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\eta-1} \sum_{(m,l)\in\mathcal{J}} c_{j,l,m} g_{j,d_m,l}(t), \qquad c_{j,l,m} \in \mathbb{C},$$

para algún conjunto de índices del tipo $\mathcal{J} = \{(m,l) : 0 \le m \le s,\ 0 \le l \le l_m - 1\}$, o equivalentemente

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=0}^{\eta-1} \sum_{(m,l)\in\mathcal{J}} c_{j,l,m} \left\langle \frac{1}{(x-d_m)^{1+l}}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\eta-1} e_j \left\langle \frac{p(x)}{v(x)}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle, \end{aligned}$$

donde $p/v$ es un elemento de $\mathcal{R}$ y los $e_j$'s son números complejos. Además

$$h_u = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \alpha_{i,k} g_{0,a_i,k} = \left\langle \frac{1}{u(x)}, g_{0,x,0}(t) \right\rangle,$$

así que

$$h_u * f = \sum_{j=0}^{\eta-1} \sum_{(i,k)\in\mathcal{I},(m,l)\in\mathcal{J}} \alpha_{i,k} c_{j,l,m} \left\langle \frac{1}{(x-a_i)^{1+k}(x-d_m)^{1+l}}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle$$

o

$$h_u * f = \sum_{j=0}^{\eta-1} e_j \left\langle \frac{p(x)}{u(x)v(x)}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle. \tag{4.48}$$

Por consiguiente, utilizando (4.44) obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}(D_{\mu-q-1} D_\mu^l h_u * f)(t) &= \lim_{t\to 0} D_{\mu-q-1} \sum_{j=0}^{\eta-1} e_j \left\langle \frac{p(x)}{u(x)v(x)}, x^l g_{j,x,0}(t) \right\rangle \\
&= e_q \left\langle \frac{x^l p(x)}{u(x)v(x)}, 1 \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la Proposición 1.2.1, ya que $\operatorname{grad}(uv) - \operatorname{grad}(x^l p) \geq 2$. ∎

Podemos escribir la solución (4.43) en una forma diferente e interesante. Sea $G$ una función del tipo

$$G(x,t) = \sum_{j=0}^{\eta-1} c_j g_{j,x,0}(t), \tag{4.49}$$

donde los coeficientes $c_j$ son números complejos arbitrarios y $x$ y $t$ son variables reales o complejas. Entonces

$$D_\mu G(x,t) = xG(x,t), \tag{4.50}$$

puesto que $D_\mu g_{j,x,0} = x g_{j,x,0}$ para $j = 0, 1, \ldots, \eta-1$. Luego, $G(x,t)$ es una función generadora para $D_\mu$ y en consecuencia, por la Proposición 2.1.1, la solución general de la ecuación homogénea $u(D_\mu)y = 0$ puede expresarse como

$$y(t) = \left\langle \frac{p(x)}{u(x)}, G(x,t) \right\rangle, \qquad p \in P_n. \tag{4.51}$$

Sean $u_k(x)$ los polinomios de Horner asociados a $u$ definidos en (1.44). En particular, consideremos la solución

$$v(t) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{\eta-1} d_{m,j} \left\langle \frac{u_{n-m}(x)}{u(x)}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle. \tag{4.52}$$

Entonces

$$D_\mu^l v(t) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{\eta-1} d_{m,j} \left\langle \frac{u_{n-m}(x)}{u(x)}, x^l g_{j,x,0}(t) \right\rangle,$$

y usando (4.44) y la propiedad de biortogonalidad (1.46) resulta

$$\lim_{t\to 0}(D_{\mu-q-1} D_\mu^l v)(t) = \sum_{m=0}^{n} d_{m,q} \left\langle \frac{u_{n-m}(x)}{u(x)}, x^l \right\rangle = d_{l,q}. \tag{4.53}$$

En consecuencia $v(t)$ es la solución en el espacio $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$ del problema de Cauchy correspondiente a (4.45) con $f = 0$.

Por la fórmula DFP (1.18) también se tiene que

$$\frac{u_{n-m}(x)}{u(x)} = \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} \frac{b_{i,k,m}}{(x-a_i)^{1+k}},$$

donde $b_{i,k,m} = \langle L_{i,m_i-1-k}, u_{n-m}\rangle$. Así que

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{u_{n-m}(x)}{u(x)}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle &= \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} b_{i,k,m} \left\langle \frac{1}{(x-a_i)^{1+k}}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{(i,k)\in\mathcal{I}} b_{i,k,m} g_{j,a_i,k}(t),\end{aligned}$$

y

$$v(t) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{\eta-1} \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_i-1} d_{m,j} b_{i,k,m} g_{j,a_i,k}(t). \tag{4.54}$$

Combinando la Proposición 4.2.3 y (4.53) obtenemos la siguiente.

**Proposición 4.2.4** *La solución única del problema de Cauchy con valores en la frontera (4.45) en el espacio $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$ puede representarse en la forma*

$$g(t) = (h_u * f)(t) + v(t), \tag{4.55}$$

*donde la función $v(t)$ está dada por (4.52) o (4.54) .*

Se sabe que los operadores diferenciales $D_\mu^i$ y $D_{i\mu}$, para $i = 2, 3, \ldots, n+1$ son distintos. Sin embargo, de (4.48) se tiene que

$$D_\mu^i (h_u * f)(t) = \sum_{j=0}^{\eta-1} e_j \left\langle \frac{x^i p(x)}{u(x)v(x)}, g_{j,x,0}(t) \right\rangle,$$

y un cálculo directo nos conduce a

$$D_{i\mu} g_{j,x,0}(t) = \sum_{m=0}^{i-2} f_{i,j,m}(t) x^m + x^i g_{j,x,0}(t),$$

donde

$$f_{i,j,m}(t) = \frac{t^{(m-i+1)\mu-j-1}}{\Gamma(\mu(m-i+1)-j)},$$

así, usando (4.48) nuevamente resulta

$$D_{i\mu}(h_u * f)(t) = \sum_{j=0}^{\eta-1}\sum_{m=0}^{i-2} e_j f_{i,j,m}(t)\left\langle \frac{x^m p(x)}{u(x)v(x)}, 1\right\rangle + D^i_\mu(h_u * f)(t).$$

Pero

$$\left\langle \frac{x^m p(x)}{u(x)v(x)}, 1\right\rangle = 0,$$

para $m = 0, 1, \ldots, i-2$; $i = 2, 3, \ldots, n+1$. Por lo tanto

$$D^i_\mu(h_u * f)(t) = D_{i\mu}(h_u * f)(t) \tag{4.56}$$

y obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.2** *Sea $f$ una función en $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$. La solución única del problema con valores en la frontera*

$$\sum_{i=0}^{n+1} b_i(D_{(n+1-i)\mu}y)(t) = f(t), \qquad \lim_{t\to 0}(D_{l\mu+\mu-q-1}y)(t) = 0, \tag{4.57}$$

*para $l = 0, 1, \ldots, n$ y $q = 0, 1, \ldots, \eta - 1$ puede expresarse como*

$$y(t) = (h_u * f)(t), \tag{4.58}$$

*donde $b_0 = 1$ y $u$, $h_u$ están definidos en (1.13) y (4.27), respectivamente.*

A continuación resolveremos dos problemas tomados de [39]. En ambos ejemplos supondremos que la función $f$ en el lado derecho de la ecuación pertenece a $\tilde{\mathcal{E}}_{\eta-1}$.
EJEMPLO 1. Para $\alpha$ en $\mathbb{C}$ consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$(D_\mu y)(t) - \alpha y(t) = f(t), \qquad \lim_{t\to 0}(D_{\mu-q-1}y)(t) = d_q, \tag{4.59}$$

donde los $d_q$ son números complejos arbitrarios y $q = 0, 1, \ldots, \eta - 1$. Aplicamos la Proposición 4.2.4 con $u(z) = z - \alpha$. En este caso

$$h_u(t) = g_{0,\alpha,0}(t) = t^{\mu-1}E_{\mu,\mu}(\alpha t^\mu),$$

y utilizando (4.54) podemos escribir la solución de (4.59) como

$$y(t) = (g_{0,\alpha,0} * f)(t) + \sum_{j=0}^{\eta-1} d_j g_{j,\alpha,0}(t).$$

EJEMPLO 2. Para el problema

$$(D_{\frac{3}{2}}y)(t) - \alpha y'(t) + \beta^2(D_{\frac{1}{2}}y)(t) - \alpha\beta y(x) = f(t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \tag{4.60}$$

$$\lim_{t\to 0}(D_{-\frac{1}{2}})y(t) = \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0}(D_{\frac{1}{2}})y(t) = 0,$$

podemos emplear el Corolario 4.2.2 con $u(z) = z^3 - \alpha z^2 + \beta^2 z - \alpha\beta^2$ y $\mu = 1/2$ para encontrar su solución. Tenemos que

$$\frac{1}{u(z)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-i\beta} + \frac{C}{z+i\beta},$$

donde $A = 1/(\alpha^2+\beta^2), B = -1/2(\beta^2 + i\alpha\beta), C = 1/2(-\beta^2 + i\alpha\beta)$. Así que

$$\begin{aligned} h_u &= Ag_{0,\alpha,0}(t) + Bg_{0,i\beta,0}(t) + Cg_{0,-i\beta,0}(t) \\ &= t^{-1/2}[AE_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\alpha t^{1/2}) + BE_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(i\beta t^{1/2}) + CE_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-i\beta t^{1/2})]. \end{aligned}$$

Usando (4.40) es fácil ver que

$$\begin{aligned} Bg_{0,i\beta,0}(t) + Cg_{0,-i\beta,0}(t) &= -A\left\langle \frac{z^{1/2}+\alpha}{z+\beta^2}, e^{zt}\right\rangle, \\ &= -A[t^{-1/2}E_{1,\frac{1}{2}}(-\beta^2 t) + \alpha E_{1,1}(-\beta^2 t)], \end{aligned}$$

entonces, alternativamente tenemos (ver [39])

$$h_u = A[t^{-1/2}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\alpha t^{1/2}) - t^{-1/2}E_{1,\frac{1}{2}}(-\beta^2 t) - \alpha E_{1,1}(-\beta^2 t)].$$

La solución está dada por (4.24).

Concluimos esta sección recordando que, como se mostró en el Capítulo 2, nuestros resultados pueden aplicarse para hallar la solución de una ecuación con una función $f$ mas general en su lado derecho, con tal que tengamos una representación integral para la convolución. Ver [39].

## 4.3 La Ecuación de Laplace

En esta sección consideramos la ecuación diferencial

$$(a_2t + b_2)y''(t) + (a_1t + b_1)y'(t) + (a_0t + b_0)y(t) = 0, \tag{4.61}$$

donde $a_k, b_k$ son números complejos dados para $k = 0, 1, 2$ y $a_2 \neq 0$. Dicha ecuación se llama Ecuación de Laplace en honor a Pierre Simon de Laplace (1749-1827), quien la estudió en su tratado "*Theórie analityque des probabilités*" de 1817.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b_2 = 0$, tomando a $t + b_2/a_2$ como una nueva variable. De modo que nos concentraremos en la ecuación diferencial

$$a_2ty''(t) + (a_1t + b_1)y'(t) + (a_0t + b_0)y(t) = 0, \tag{4.62}$$

con $a_2 \neq 0$, en el dominio $t \geq 0$.

Definimos los polinomios $P$ y $Q$ por $P(z) = b_1 z + b_0$ y $Q(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, y el operador diferencial de segundo orden $L$ por $L = P(D) + tQ(D)$. Luego, la ecuación (4.62) puede escribirse como

$$Ly = [P(D) + tQ(D)]y = 0. \tag{4.63}$$

Buscamos una solución de (4.63) de la forma

$$g(t) = \left\langle h(z), e^{zt} \right\rangle, \tag{4.64}$$

para una función apropiada $h$. En primer lugar nótese que

$$\begin{aligned} Lg &= \left\langle h(z), [P(z) + tQ(z)]e^{zt} \right\rangle \\ &= \left\langle h(z), [P(z) + Q(z)D_z]e^{zt} \right\rangle \\ &= \left\langle -D_z Q(z)h(z) + P(z)h(z), e^{zt} \right\rangle. \end{aligned}$$

Entonces, la función $g$ dada en (4.64) es una solución de (4.63) si $h$ es una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$-D_z Q(z)h(z) + P(z)h(z) = 0,$$

o equivalentemente

$$D_z h(z) + \frac{Q'(z) - P(z)}{Q(z)} h(z) = 0. \tag{4.65}$$

Resolviendo (4.65) obtenemos

$$h(z) = Ce^{-H(z)}, \tag{4.66}$$

donde $C$ es una constante arbitraria y $H$ es una función tal que

$$H'(z) = \frac{Q'(z) - P(z)}{Q(z)} = -\frac{(-2a_2 + b_1)z - a_1 + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}.$$

La función $H$ puede hallarse por integración simple. Hay dos casos que analizar, dependiendo de si las raíces de $Q$ son distintas o iguales.

**Teorema 4.3.1** *Si la ecuación $Q(z) = 0$ tiene raíces distintas $z_1$ y $z_2$, entonces la función*

$$g(t) = \left\langle K(z - z_1)^A (z - z_2)^B, e^{zt} \right\rangle, \tag{4.67}$$

*es una solución de la ecuación (4.62) para cualquier constante $K$, donde $A$ y $B$ están determinadas por la descomposición en fracciones parciales*

$$\frac{(-2a_2 + b_1)z - a_1 + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}.$$

*Demostración.* En este caso tenemos

$$H'(z) = -\frac{A}{z-z_1} - \frac{B}{z-z_2},$$

así que

$$H(z) = -\ln|K(z-z_1)^A(z-z_2)^B|,$$

donde $K$ es una constante arbitraria. Usando esta expresión junto con (4.64) y (4.66) establecemos (4.67). ■

Usando la Proposición 4.1.2, la solución (4.67) se representa mediante la serie de potencias

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k \frac{t^{k-A-B-1}}{\Gamma(k-A-B)},$$

con

$$c_k = \sum_{j=0}^{k}\binom{A}{j}\binom{B}{k-j} z_1^j z_2^{k-j}.$$

EJEMPLO 1. *La ecuación diferencial hipergeométrica confluente.*

$$ty'' + (c-t)y' - ay = 0, \qquad a, c \in \mathbb{C}. \tag{4.68}$$

En este caso $a_2 = 1, b_2 = 0, a_1 = -1, b_1 = c, a_0 = 0$ y $b_0 = -a$, por lo cual

$$-H'(z) = \frac{(-2+c)z + 1 - a}{z^2 - z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}.$$

Un cálculo simple nos permite encontrar que $A = a-1$ y $B = c-a-1$. De (4.67), la función

$$g(t) = K\left\langle z^{a-1}(z-1)^{c-a-1}, e^{zt}\right\rangle,$$

es una solución de (4.68). Ahora bien, del teorema del binomio se tiene que

$$\begin{aligned} z^{a-1}(z-1)^{c-a-1} &= z^{a-1}z^{c-a-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{c-a-1} \\ &= z^{c-2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{c-a-1} \\ &= z^{c-2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{c-a-1}{k}\frac{(-1)^k}{z^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{c-a-1}{k}\frac{(-1)^k}{z^{k+2-c}}, \end{aligned}$$

para $|z| < 1$. Luego

$$g(t) = K\sum_{k=0}^{\infty}\binom{c-a-1}{k}\left\langle\frac{(-1)^k}{z^{k+2-c}}, e^{zt}\right\rangle = K\sum_{k=0}^{\infty}\binom{c-a-1}{k}\frac{(-1)^k t^{k+1-c}}{\Gamma(k+2-c)}.$$

Si $\mathrm{Re}(1-c)>0$ o $1-c=0$, tenemos

$$\binom{c-a-1}{k}\frac{(-1)^k t^{k+1-c}}{\Gamma(k+2-c)}=\frac{(a-c+1)(a-c+2)\cdots(a-c+k)}{\Gamma(2-c)(2-c+1)\cdots(2-c+k-1)},$$

y entonces

$$y_{c,a}(t)=t^{1-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a-c+1)(a-c+2)\cdots(a-c+k)}{\Gamma(2-c)(2-c+1)\cdots(2-c+k-1)}\frac{t^k}{k!},$$

es solución para $t>0$.

EJEMPLO 2. *La ecuación diferencial de Laguerre.*

$$ty''-(t+\alpha-1)y'+(\alpha+\lambda)y=0 \qquad \alpha,\lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.69}$$

Esta es esencialmente la misma ecuación del ejemplo 1. En efecto, si en (4.68) hacemos $c=1-\alpha$ y $a=-\alpha-\lambda$, obtenemos (4.69). Por consiguiente una solución es

$$y_{\alpha,\lambda}(t)=K\left\langle z^{-1-\alpha-\lambda}(z-1)^{\lambda},e^{zt}\right\rangle.$$

Pero

$$z^{-1-\alpha-\lambda}(z-1)^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lambda}{k}\frac{(-1)^k}{z^{k+\alpha+1}},$$

por lo cual

$$y_{\alpha,\lambda}(t)=K\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lambda}{k}\frac{(-1)^k t^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Observamos que $t^{-\alpha}y_{\alpha,\lambda}$ se reduce a un polinomio en $t$ si y solo si $\lambda$ está en $\mathbb{N}$. Además, cuando $\lambda=n$ y $K=\Gamma(\alpha+n+1)/\Gamma(n+1)$, obtenemos el *$n$-ésimo polinomio de Laguerre de orden $\alpha$*,

$$\begin{aligned}L_n^{(\alpha)}(t) &= t^{-\alpha}y_{\alpha,n}\\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-t)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-t)^k}{k!},\end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(k+\alpha+1)}\\ &=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)((n-k)!)\Gamma(\alpha+k+1)}\\ &=\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos la función de Bessel de la primera clase y orden $\alpha$ ($\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ o $\alpha = 0$)

$$\mathrm{J}_\alpha(t) = t^{-\alpha} y_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha},$$

la cual satisface la ecuación diferencial de Bessel original, para $t > 0$.

Para el segundo caso tenemos el siguiente.

**Teorema 4.3.2** *Si la ecuación $Q(z) = 0$ tiene una raíz doble $a$, entonces la función*

$$g(t) = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B^k}{k!\Gamma(k-A)} t^{k-A-1}, \tag{4.72}$$

*es una solución de la ecuación (4.62) para cualquier constante $K$, donde $A$ y $B$ están determinadas por la descomposición en fracciones parciales*

$$\frac{(-2a_2 + b_1)z - a_1 + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{(z-a)^2}.$$

*Demostración.* Ahora tenemos que

$$H(z) = -\ln|C_1(z-a)^A| + \frac{B}{z-a}, \qquad C_1 \in \mathbb{C},$$

por lo cual

$$h(z) = K e^{-B/(z-a)}(z-a)^A, \qquad K \in \mathbb{C}.$$

Expandiendo $h$ en una serie de potencias de $z - a$ encontramos que

$$h(z) = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B^k}{k!(z-a)^{k-A}},$$

y utilizando (4.64) y (4.3) obtenemos (4.72). ■

EJEMPLO 4. En la ecuación diferencial

$$\alpha t y'' + y = 0, \qquad t > 0,$$

tenemos que $a_2 = \alpha, b_2 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, a_0 = 0$ y $b_0 = 1$. Entonces

$$-H'(z) = \frac{-2\alpha z + 1}{\alpha z^2} = -\frac{2}{z} + \frac{1}{\alpha z^2}.$$

y en consecuencia $A = -2, B = 1/\alpha$. De (4.72), una solución de la ecuación es

$$y(t) = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k!\alpha^k \Gamma(k+2)} = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{(k+1)(k!)^2 \alpha^k},$$

donde $K$ es una constante arbitraria.

# Capítulo 5

# Conclusiones

La teoría algebraica que hemos expuesto nos permite encontrar soluciones, en un espacio vectorial adecuado, de ecuaciones funcionales de la forma

$$u(L)g = f, \tag{5.1}$$

donde $u$ es un polinomio de grado positivo, $L$ es un operador lineal y $f$ una función dados. En los Capítulos 2 a 4 se estudiaron varios problemas concretos que ilustran algunas aplicaciones de nuestro método. No hemos pretendido presentarlas todas, ya que es una técnica bastante general, cuyos alcances se extienden al combinar las ideas sobre funciones generadoras, operadores similares y del operador diferencial de orden $\alpha$, con $\alpha > 0$; acerca de lo cual hay todavía mucho por hacer. Por ejemplo, consideremos el operador diferencial de orden dos

$$L_\mu = D^2 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}, \qquad \mu > 0, x > 0.$$

Es claro que la ecuación de Bessel (4.70)

$$B_\mu g + g = 0, \tag{5.2}$$

donde $B_\mu = D^2 + x^{-1}D - x^{-2}\mu^2$, se escribe en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{x}} L_\mu \sqrt{x} g + g = 0.$$

Se observa que $B_\mu$ y $L_\mu$ son operadores similares. Luego, si $J_\mu$ denota a la función de Bessel de la primera clase de orden $\mu$, se tiene que

$$L_\mu \sqrt{x} J_\mu(x) = -\sqrt{x} J_\mu(x). \tag{5.3}$$

Denotemos por $G_\mu(z,t)$ al kernel de la transformada de Hankel, es decir la función de dos variables definida por

$$G_\mu(z,t) = \sqrt{zt} J_\mu(zt), \qquad z,t > 0.$$

Haciendo el cambio de variable $x = zt$ en (5.3), se obtiene que

$$L_\mu G_\mu(z,t) = -z^2 G_\mu(z,t),$$

donde $L_\mu$ actúa con respecto a $t$. En consecuencia, si $w$ es un polinomio mónico de grado $n+1$ que no tiene raíces en el intervalo $(-\infty, 0]$, de la Proposición 2.1.1 concluimos que la función

$$g_\mu(t) = \left\langle \frac{p(z)}{w(-z^2)}, G_\mu(z,t) \right\rangle, \qquad p \in \mathcal{P}_{2n+1},$$

es una solución de la ecuación diferencial $w(L_\mu)g = 0$. Nótese que debido a la similaridad entre $B_\mu$ y $L_\mu$, otra clase de ecuaciones que podemos resolver son las ecuaciones diferenciales de la forma $w(B_\mu)g = 0$. Ver [28].

Una futura labor sería examinar otras ecuaciones del tipo (5.1), que involucran operadores diferenciales o en diferencia de orden mayor o igual que dos; como el operador diferencial $L = \phi(t)D\psi(t)D$, para funciones $\phi$ y $\psi$ dadas, o los operadores en diferencia $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ definidos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}f(n) &= \frac{f(n+1) + f(n-1)}{2}, \\
\mathcal{V}f(n) &= \frac{f(n+1) + 2nf(n-1)}{2}, \\
\mathcal{W}f(n) &= -(n+1)f(n+1) + (2n+1)f(n) - nf(n-1),
\end{aligned}$$

los cuales están relacionados con algunas familias de polinomios ortogonales conocidas.

En las Proposiciones 3.5.1 y 3.5.2 se enuncian dos casos simples de cuándo una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables puede escribirse en la forma (5.1), para algún polinomio de grado dos y un operador diferencial $L$ de primer orden. Sin embargo, un problema fundamental que no hemos considerado aquí es el siguiente. Dado un operador diferencial (o en diferencias) lineal $A$ con coeficientes variables, determinar si es posible escribirlo en la forma $A = u(L)$, donde $u$ es un polinomio y $L$ un operador que satisface la condición (3.16) sobre algún espacio apropiado. Esto pudiera estar relacionado con la teoría diferencial de Galois.

Por otro lado, en la Sección 4.2 vimos que nuestro método se aplica de manera muy natural para resolver las ecuaciones diferenciales fraccionales secuenciales. Ver [41]. Como continuación de esta parte pensaríamos en extender nuestros resultados para estudiar ecuaciones diferenciales fraccionales de la forma

$$a_m D_{m\mu} y + a_{m-1} D_{(m-1)\mu} y + \ldots + a_1 D_\mu y + a_0 y = f(t), \qquad \mu > 0, m \in \mathbb{N},$$

o aún más general, del tipo

$$a_m D_{\beta_m} y + a_{m-1} D_{\beta_{m-1}} y + \ldots + a_1 D_{\beta_1} y + a_0 y D_{\beta_0} y = f(t), \qquad m \in \mathbb{N},$$

donde $D_\nu$ denota al operador de derivada fraccional usual de Riemann-Liouville, los $a_k's$ están en $\mathbb{C}$ y $\{\beta_k\}_{k=0}^m$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos.

Dichas ecuaciones han sido resueltas empleando la transformada de Laplace. Ver [41] y [42]. Por supuesto, dentro de este tema, también falta considerar otros operadores diferenciales fraccionales, como el de Weyl.

Otra tarea que queda por realizarse es la generalización de nuestro método algebraico al caso de $n$ variables. Hay una extensión directa tomando $\mathbb{C}^n \times \mathbb{N}^n$ como una base para un álgebra y usando funciones generadoras de dos variables en $\mathbb{C}^n$. Sin embargo, la versión general en $n$ variables es probablemente mucho más complicada, puesto que ésta requeriría una teoría algebraica de residuos en $n$ variables. Los avances en esta dirección podrían simplificar algunos de los resultados sobre transformadas integrales multidimensionales que están contenidos en [49].

Finalmente cabe resaltar el valor teórico de algunos de nuestros resultados. En general, nuestro método proporciona una simplificación importante de aquellos que emplean transformadas integrales y de los métodos operacionales, como los que son tipo Mikusiński.

En lo particular, tenemos los siguientes comentarios. El producto interior que definimos sobre $\mathcal{R}$ puede usarse como un fundamento algebraico para el estudio de funciones analíticas. El álgebra de operadores de avance invariantes y algunas generalizaciones pueden proveer un método interesante del Cálculo Umbral, ver [12].

Como se vió en algunos ejemplos de los Capítulos 2 y 3, la construcción de una convolución apropiada para un operador diferencial dado, se simplifica usando isomorfismos entre espacios vectoriales. Una manera de detectar posibles pares de espacios isomorfos consiste en analizar las transformadas integrales ya estudiadas.

En nuestro trabajo se puso de manifiesto una característica interesante de las funciones de Mittag-Leffler. Al examinar las ecuaciones (4.13) y (4.40) nos damos cuenta de que una generalización muy natural del espacio de los cuasi-polinomios es el espacio generado por las funciones $g_{\lambda,a,k}$ dadas en (4.40), precisamente en términos de funciones de Mittag-Leffler.

Las ideas usadas en la Sección 4.3, para obtener soluciones de la ecuación de Laplace, pueden extenderse si en (4.64) ponemos una función de dos variables $G(z,t)$ en lugar de la exponencial $e^{zt}$. De este modo es posible considerar otras ecuaciones. Por ejemplo, para la ecuación diferencial de Gauss o hipergeométrica,

$$t(1-t)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t]y' - \alpha\beta y = 0,$$

donde $\alpha, \beta$ y $\gamma$ son constantes, hacemos $G(z,t) = (t-z)^{-\lambda-1}$, con $\lambda$ un parámetro a determinar. Entonces, nuestro método nos conduce directamente a una representación integral de sus soluciones, las llamadas funciones hipergeométricas que comunmente se denotan por $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$.

# Bibliografía


[1] R.C. Buck, Operator algebras and dual spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 681–687 .

[2] R.C. Buck, Expansion theorems for analytic functions I, in *Lectures on functions of a complex variable*, W. Kaplan, Ed., U. of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1955.

[3] I.H. Dimovski, *Convolutional Calculus,* 2nd. Ed. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[4] L. Fantappiè, I funzionali analitici, *Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma*, Ser. 2, Vol. IV, (1925–26), 34–93 .

[5] J.M. Freeman, Transforms of operators on $K[x][[t]]$, *Congr. Numerantium,* **48** (1985), 115–132 .

[6] D. Przeworska-Rolewicz, *Algebraic Analysis,* PWN-Polish Sci. Publ. Warsaw, D. Reidel, Dordrecht-Boston MA, 1988.

[7] L. Verde-Star, Dual operators and Lagrange inversion in several variables, *Adv. in Math.* **58** (1985), 89–108 .

[8] L. Verde-Star, Divided differences and combinatorial identities, *Stud. Appl. Math.* **85** (1991), 215–242.

[9] L. Verde-Star, Divided differences and linearly recurrent sequences, *Stud. Appl. Math.* **95** (1995), 433–456.

[10] L. Verde-Star, Solution of linear differential equations by the method of divided differences, *Adv. Appl. Math.* **16** (1995), 484–508.

[11] L. Verde-Star, A Hopf algebra structure on rational functions, *Adv. Math.* **116** (1995), 377–388.

[12] L. Verde-Star, An algebraic approach to convolutions and transform methods, *Adv. Appl. Math.* **19** (1997), 117–143.

[13] L. Verde-Star, Taylor functionals and the solution of linear difference equations, *Applications of Fibonacci numbers,* Vol. 7 (Graz, 1996), 449–462, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, **1998**.

[14] L. Verde-Star, Solving linear differential-like equations, *Amer. Math. Month.* to appear.

[15] D. Elizarraraz and L. Verde-Star, On a class of differential equations that contains the equations of Euler and Chebyshev, *Adv. Appl. Math.* **19** (1997), 514–528.

[16] D. Elizarraraz and L. Verde-Star, Similar operators and a functional calculus for the first order linear differential operator, *Adv. Appl. Math.* **22** (1999), 29–47.

[17] D. Elizarraraz and L. Verde-Star, Fractional divided differences and the solution of differential equations of fractional order, *Adv. Appl. Math.* , to appear.

[18] L. Cerlienco, M. Mignotte and F. Piras, Suites récurrentes linéaires, *L' Enseignement Math.* **33** (1987), 67–108.

[19] W. Chin and J. Goldman, Bialgebras of linearly recursive sequences, *Comm. Algebra,* **21** (1993), 3935–3952.

[20] B. Peterson and E. J. Taft, The Hopf algebra of linearly recursive sequences, *Aequationes Math.* **20** (1980), 1–17.

[21] R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities*, M. Dekker, New York, 1992.

[22] R. E. Mickens, *Difference equations*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1987.

[23] K. S. Miller, *Linear Difference Equations,* Benjamin, New York, 1968.

[24] A. Peterson and J. Schneider, *The Cauchy function for n-th order linear difference equations,* Rocky Mountain J. of Math **25** (1995), 441–457.

[25] M. Braun, *Differential equations and their applications*, Fourth edition, Springer-Verlag, New York, 1993.

[26] K. Ogata, *System Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

[27] M. Tenenbaum and H. Pollard, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1985.

[28] A.H. Zemanian, *Generalized Integral Transforms*, Dover, New York, 1987.

[29] T. P. G. Liverman, *Generalized Functions and Direct Operational Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[30] S. K. Chatterjea, On the $n$-th order linear differential equation and Hermite polynomials, *Yokohama Math. J.* **16** (1968), 75–76.

[31] S. K. Chatterjea and H. M. Srivastava, Operational representations for the classical Hermite polynomials, *Stud. Appl. Math.* **83** (1990), 319–328.

[32] M. S. Klamkin, On the $n$-th order linear differential equation, *Am. Math. Monthly*, **74** (1967), 1215–1216.

[33] O. V. Viskov, Linear differential equations of binomial form, *Math. Notes,* **52** (1992), 738-740.

[34] O. V. Viskov and H. M. Srivastava, New approaches to certain identities involving differential operators, *J. Math. Anal. Appl.* **186** (1994), 1-10.

[35] E. Hille, *Analytic Function Theory,* Vol. I, Blaisdell, New York, NY, 1965.

[36] E. Hille, *Analytic Function Theory,* Vol. II, Blaisdell, New York, NY, 1962.

[37] K. Yoshida, *Operational Calculus,* Springer-Verlag, New York, NY, 1984.

[38] A. Erdélyi. *Higher transcendental functions*, Vol.1-3, McGraw-Hill, New York, NY, 1955.

[39] Yu. F. Luchko and H. M. Srivastava, The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus, *Computers Math. Applic.* **29** (1995), 73–85.

[40] Semen B. Yakubovich and Yu. F. Luchko, *The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions,* Mathematics and its Applications, 287. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[41] K. S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,* John Wiley & Sons. Inc., New York, NY, 1993.

[42] Igor Podlubny, *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications,* Academic Press, San Diego, 1999. Mathematics in science and engineering; v. 198.

[43] K. B. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus,* Academic Press, New York, NY, 1974.

[44] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications,* Gordon and Breach, New York, NY, 1993.

[45] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature,* Freeman, San Francisco, 1982.

[46] M. Caputo and F. Mainardi, A new dissipation model based on memory mechanism, *Pure and Applied Geophysics,* **91**, no.8 (1971), 134–147.

[47] S. Westerlund, *Casuality,* report no.940426, University of Kalmar, 1994.

[48] A. Markushevich, *Analytic function theory,* Vol. II, MIR, Moscow, 1990.

[49] Yu.A. Brychkov, H.-J. Glaeske, A.P. Prudnikov, Vu Kim Tuan, *Multidimensional Integral Transformations,* Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, 1992.