

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE PROCESOS E HIDRAULICA

***ESTABILIZACIÓN A TIEMPO FINITO
DE TEMPERATURA EN UN
REACTOR POR LOTES***

TESIS QUE PRESENTA EL ALUMNO

I.Q. ROCÍO SOLAR GONZÁLEZ
99381781

PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS
(INGENIERÍA QUÍMICA)

ASESOR:

DR. JOSÉ DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

NOVIEMBRE 2001

Contenido.

Resumen General.....	1
----------------------	---

Capítulo 1. Introducción General

Resumen.....	3
1.1 Antecedentes.....	4
1.2 Motivación.....	7
1.3 Propuesta.....	8
1.4 Objetivos.....	10

Capítulo 2. Herramientas Teóricas

Resumen.....	11
2.1 Estabilidad.....	12
2.1.1 Criterio de Estabilidad de Sistemas Lineales.....	12
2.1.2 Criterio de Estabilidad de Lyapunov.....	14
2.1.3 Estabilidad a tiempo finito.....	17
2.2 Estimación de Incertidumbres.....	19
2.3 Prevención del reajuste excesivo.....	23

Capítulo 3. Reactor por Lotes

Resumen.....	27
3.1 Introducción.....	28
3.2 Modelo del Reactor por Lotes.....	29

Capítulo 4. Diseño de un Controlador Robusto

Resumen.....	32
4.1 Introducción.....	33
4.2 Diseño de un controlador retroalimentado exacto.....	33
4.3 Diseño de un controlador retroalimentado robusto.....	36
4.4 Estructura de control.....	40
4.5 Guías de sintonizado.....	42

Capítulo 5. Control Cascada

Resumen.....	44
5.1 Introducción.....	45
5.2 Control cascada en serie.....	46
5.3 Control cascada en paralelo.....	51
5.4 Diseño del control retroalimentado utilizando configuración cascada.....	52

Capítulo 6. Casos de Estudio

Resumen.....	56
6.1 Simulación numérica para el caso de estabilización a tiempo finito.....	57
6.1.1 Reacción consecutiva.....	57
6.2 Simulación numérica para el caso de control cascada.....	60
6.2.1 Reacción de pirólisis.....	60
Conclusiones.....	63
Apéndice.....	66
Referencias.....	72

Resumen General

Los reactores por lotes son una importante forma de operación en la industria química moderna, para la producción de pequeños volúmenes de sustancias especialmente químicas y farmacéuticas. Dichos reactores proporcionan diversas ventajas y atractivas opciones económicas. Sin embargo, los procesos por lotes también presentan interesantes problemas en modelación y control por su inherente naturaleza dinámica. Por lo tanto, existe una necesidad de diseñar estrategias de control robusto que proporcionen una estable y segura operación de esta clase de reactores, con una producción óptima.

Por tal motivo, el propósito de este trabajo es desarrollar una estrategia de control retroalimentado robusto que permita un seguimiento de trayectorias de temperatura y composición, y sea capaz de contrarrestar efectos de incertidumbres, estados no medidos y perturbaciones externas, que se presentan en los reactores por lotes.

Para lograr este fin, se desarrolla el siguiente trabajo de tesis, el cual se encuentra distribuido de la siguiente manera:

En la primera sección, se muestra una breve introducción de la importancia de los reactores por lotes a nivel industrial, así como los antecedentes que motivaron el desarrollo de esta tesis. Posteriormente, el planteamiento del problema se llevó a cabo mediante la propuesta del objetivo general y objetivos particulares los cuales se lograron alcanzar durante el transcurso del trabajo.

En una segunda sección, se muestran algunos de los conceptos teóricos que son fundamentales para el desarrollo de las estrategias de control. En la sección siguiente, se plantea el modelo dinámico general de un reactor por lotes que sirve como base para el desarrollo de las estrategias de control, y por consiguiente también una breve descripción de los parámetros involucrados en dicho modelo.

En la cuarta sección, se desarrolla el diseño de control retroalimentado para el reactor por lotes con estabilización a tiempo finito, en el cual el controlador está constituido por una función nominal de dinámica inversa que induce la convergencia en un tiempo finito, y un estimador de balance calorimétrico para compensar incertidumbres debido a concentraciones no medidas, reacciones cinéticas y parámetros de transferencia de calor. Posteriormente se muestra que el controlador retroalimentado propuesto puede verse como un controlador Proporcional Integral (PI) no lineal con un esquema de prevención de reajuste excesivo (*antireset windup*).

En la quinta sección, basándose en ideas de estimación de incertidumbres y compensación del error de modelado se implementa una configuración en cascada, con el propósito de diseñar un controlador que permita lograr controlar la composición de un reactor por lotes.

Posteriormente con el objetivo de ilustrar la flexibilidad de las estrategias de control y el funcionamiento del controlador se llevó a cabo la simulación numérica de dos casos de estudio obtenidos de la literatura.

Por último, se exponen las conclusiones que a lo largo del desarrollo de este trabajo se lograron obtener y las cuales favorecerán una muy útil herramienta en el área de investigación del control de procesos por lotes. Sin embargo, es necesario aclarar que aun quedan abiertas muchas preguntas importantes que necesitan de un trabajo adicional.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN GENERAL

Resumen

En este capítulo se presenta el planteamiento general del trabajo de tesis a desarrollar, mediante una introducción relacionada con la importancia de los reactores por lotes a nivel industrial, así como sus ventajas y características a considerar para el desarrollo de la estrategia de control. De igual forma se muestra de manera breve algunos antecedentes relacionados con el diseño de trayectorias de temperatura y estrategias de control planteados en la literatura por diferentes autores, y los cuales han sido motivantes para el desarrollo de este trabajo. Dentro de esta sección también se muestra la propuesta y contribución que se pretende lograr mediante el desarrollo de esta tesis, además del establecimiento de los objetivos a alcanzar en el transcurso de la misma.

1.1 Antecedentes

Los reactores por lotes son una forma importante de operación en la industria química moderna para la producción de pequeñas cantidades de sustancias o para la producción de sustancias diferentes utilizando el mismo equipo. En comparación con los reactores continuos, los reactores por lotes tienen la ventaja del pequeño costo de instalación, la flexibilidad de funcionamiento, y presentan mínimos problemas de escalamiento, permitiendo que las complejas síntesis químicas sean conducidas de la misma manera que en el laboratorio. Además los sistemas por lotes favorecen el llevar a cabo reacciones bajo condiciones estériles así como también el tratamiento de materiales peligrosos. Tienen la desventaja del elevado costo de funcionamiento y mano de obra; y el tiempo invertido para la carga, descarga y limpieza es consideradamente grande. La importancia de estas consideraciones radica en los costos que le ocasiona a la industria química, ya que ésta se encuentra influenciada por la rapidez de cambios en la demanda del mercado y en las ventajas de las nuevas tecnologías. Ejemplos de procesos en donde los reactores por lotes han resultado ser muy convenientes son: en productos alimenticios, farmacéuticos, pinturas, polímeros y especialmente químicos.

En la última década los problemas de control óptimo han recibido gran atención debido a la creciente demanda de sistemas de alta eficiencia y a la fácil disponibilidad de computación digital. Por lo que la teoría de control óptimo ha sido muy usada para derivar normas de operación en los reactores por lotes (Filippi-Bossy *et al.*, 1989). Debido a la complejidad de las mezclas reaccionantes y la dificultad para el funcionamiento en línea de mediciones de concentración, el diseño de operación óptima se ha enfocado al cálculo de perfiles óptimos de temperatura (Luus, 1994; Luus y Okongwu, 1999), los cuales proporcionan información útil, mediante informes del desarrollo esperado del sistema reaccionante, y muestran cómo la temperatura debe cambiar durante el curso de la reacción, para obtener la producción máxima o las características deseadas del producto final. Los diseños óptimos de trayectorias de temperatura son importantes en relación al control de calidad del producto, ya que si una trayectoria dada no se realiza apropiadamente, entonces se puede producir un material de especificación errónea. Por lo tanto, existe una necesidad de diseñar estrategias de control robusto que proporcionen una estable y segura operación de los reactores por lotes, con una producción óptima.

Puesto que la implementación a lazo abierto de perfiles óptimos de temperatura es muy sensible al error de modelado y a las perturbaciones (Lakshmanan y Arkun, 1999), la tendencia de la investigación en control de reactores por lotes se enfoca hacia el diseño eficiente de configuraciones de control retroalimentado (Kravaris y Chung, 1987), en donde el sistema siga una trayectoria predeterminada de

temperatura óptima. Nótese que la flexibilidad ofrecida por el reactor por lotes, origina un desafío para los problemas de control, debido a que éstos no son estacionarios, son no lineales y tienen un tiempo finito de duración dinámica. Debido a que en la operación de un reactor por lotes no existe estado estacionario, no se tiene una condición nominal con la cual los controladores puedan ser sintonizados. Además como la dinámica de los procesos por lotes varia con el tiempo, las variables de proceso, ganancias de proceso y constantes de tiempo también varían durante el ciclo del lote, dificultando por lo tanto su control. Por consiguiente, no se ha obtenido hasta ahora, una respuesta de control satisfactoria. Por otra parte, se reconoce que los controladores tradicionales PI/PID (proporcional-integral y proporcional-integral-derivativo, respectivamente), los cuales funcionan bastante bien para reactores continuos, proporcionan un funcionamiento pobre dada la naturaleza no estacionaria de estos reactores. De esta forma, para dirigir el problema de control de los reactores por lotes, se han propuesto muchas metodologías de diseño. Por ejemplo, Marroquin y Luyben (1973) evaluaron experimentalmente el uso de un controlador de temperatura no lineal para reactores por lotes y revelaron que los controladores no lineales pueden dar un mejor funcionamiento que los convencionales en lineal. Kravaris y Chung (1987) usaron una técnica de linealización de entrada/salida para construir un controlador no lineal, la cual fue empleada para una cierta clase de problemas de control en los reactores por lotes. Puesto que el controlador propuesto depende de la cancelación de la no linealidad sufre de robustez, debido al error de modelado y a perturbaciones no medibles. Rotsein y Lewin (1992) usaron una herramienta de estabilidad robusta (Morari y Zafriou, 1989) denominada control adaptivo para el diseño del control lineal de temperatura de un reactor por lotes inestable a lazo abierto. Los controladores resultantes fueron de tipo PI/PID los cuales pueden tolerar incertidumbres en la ganancia del proceso y la dinámica no modelada. Una desventaja de esta aproximación es que la identificación de un modelo lineal (dominio de Laplace (apéndice A)), en el cual el diseño de control robusto está basado, es una operación difícil, ya que el reactor por lotes no tiene una operación de estado estacionario, como ya se ha mencionado anteriormente. Jutan y Uppal (1984) usaron una aproximación de balance calorimétrico (Schuler y Schmidt, 1992) para estimar la cantidad de calor permitido dentro del reactor en cualquier momento en el tiempo. En conjunción con el controlador retroalimentado, la señal estimada fue usada para contrabalancear los efectos de la generación de calor de reacción. El funcionamiento de control reportado por los autores no fue satisfactorio en el sentido que el reactor no es llevado a la temperatura deseada. Cott y Macchieto (1989) mejoraron el diseño de control de Jutan usando un estimador de modelo base para el calor permitido dentro del

reactor. La parte retroalimentada del controlador fue diseñada del algoritmo del Modelo de Control Genérico (*generic model control GMC*)(Lee y Sullivan, 1988), el cual puede ser visto como un caso particular de la técnica general de dinámica inversa reportada por Kravaris y Chung (1987). Además el controlador mostró ser robusto con respecto a cambios en los parámetros y al desemparejamiento del modelo, sufriendo de una importante desventaja estructural. Es decir, contiene un estimador discreto el cual presenta una acción de tiempo integral discreta. Por otra parte, el algoritmo GMC presenta una acción integral clásica para compensar las incertidumbres en el parámetro de transferencia de calor y perturbaciones no medibles. Mostraremos en esta tesis que la incorporación de la acción integral clásica es redundante y sobreparametriza el controlador resultante. Recientemente, Chen y Peng (1998) propusieron una estrategia de control sencilla para el seguimiento de la trayectoria de temperatura. Contrariamente a la información previa, el propósito de la estrategia de control no es un modelo base, así que no explota la dinámica inherente de los reactores por lotes y conduce a conservar el funcionamiento a lazo cerrado. Por considerar que la ganancia del proceso y la “constante de tiempo” de este tipo de reactor varían con el tiempo, Lakshmanan y Arkun (1999) usaron modelos lineales los cuales describen localmente la dinámica del lote a lo largo de la trayectoria óptima. Como resultado, se usó un parámetro lineal variante del modelo, obtenido por interpolación entre estos múltiples modelos, para diseñar el modelo, de control predictivo que permita regular y fijar la especificación del producto al final del lote. La mejor crítica de esta aproximación es que los modelos lineales son obtenidos a lo largo de la trayectoria óptima, en este sentido, si el modelo del reactor por lotes contiene fuertes incertidumbres y el proceso está sujeto a perturbaciones, como es el caso en la práctica, la correspondiente trayectoria se desviará fuertemente de la trayectoria óptima calculada. Por tanto, esta desviación puede introducir fuertes incertidumbres en los modelos lineales.

1.2 Motivación

El diseño de control de temperatura para reactores por lotes ha mostrado su capacidad de funcionamiento robusto, pero todavía falta una mejor comprensión y sistematización en el sentido de la robustez que se encuentra orientada a la construcción de aproximaciones de control.

La sistematización es requerida para simplificar la construcción, la sintonización y el mantenimiento de los esquemas de control; la comprensión de esto es importante para calcular la capacidad básica y limitaciones en el diseño de control propuesto, para lograr un elevado funcionamiento con un adecuado nivel de robustez y margen de seguridad, y en principio, para extender la idea a otros procesos químicos.

El resultado reportado en la literatura constituye un interesante progreso, porque muestra cómo el diseño de control de temperatura puede ser mejorado empleando técnicas lineales o no lineales de control no causal. Sin embargo, para el desarrollo de una metodología de diseño de control con un procedimiento sistemático de construcción-sintonizado y una rigurosa teoría apoyada en el reciente desarrollo de ideas de control no lineal, el seguimiento subsecuente debe estar dirigido a: la condición de estabilidad robusta de lazo cerrado, su relación con el esquema de ganancia sintonizada, la identificación y caracterización del cambio de funcionamiento robusto que afectan el desarrollo altamente robusto, el diseño con entrada y estado de saturación, la extensión de la región de estabilidad robusta, la limitación funcional por la presencia de ruido y la interacción entre proceso y diseño de control. Esto motiva y justifica el presente trabajo, en donde algunos de los asuntos antes mencionados son estudiados.

1.3 Propuesta

En este trabajo se emplea una aproximación constructiva de control para estudiar el problema de control de temperatura para los reactores por lotes. Primero, se construye un controlador exacto de temperatura con dinámica inversa para inducir la convergencia a un tiempo finito de la temperatura del reactor, a la trayectoria de la temperatura de referencia. La estabilización a un tiempo finito es una propiedad deseable en reactores por lotes puesto que estos procesos tienen una norma de operación a tiempo finito. En este sentido, es importante disponer de controladores retroalimentados con garantía de convergencia a un tiempo finito. En un segundo paso, motivados por ideas de estimación calorimétrica (Jutan y Uppal, 1984; Schuler y Schmidt, 1992), un estimador robustamente convergente se construye para suponer en línea la razón de generación de calor e intercambio de temperatura y dinámica de balance de calor. Siguiendo las ideas de construcción del estimador base y compensación del error de modelado (Alvarez-Ramírez, 1999) para la aproximación del control no lineal, y mediante la combinación de una aproximación del controlador exacto de dinámica inversa y el estimador de balance calorimétrico, se desarrolla el propósito de controlar la medición de temperatura.

En los reactores por lotes industriales el control de composición es el más importante y desafiante problema de control, ya que presenta inherentes retardos debido a los dispositivos de medición, los cuales limitan seriamente el funcionamiento del controlador retroalimentado. Por lo cual, mediante el uso de una configuración cascada se pretende contrarrestar tales efectos, y de esta forma diseñar un sistema de control que permita controlar la composición en esta clase de reactores. Para lograr esto, se implementará una estructura en cascada donde el control de composición actuará como el controlador maestro, el cual proporciona la temperatura de referencia para el controlador esclavo, mientras que el controlador esclavo calculará la temperatura de entrada de la chaqueta para poder llevar a cabo el funcionamiento pedido por el controlador maestro.

Con respecto a los resultados existentes en la literatura, la contribución de este trabajo puede ser resumida como sigue:

- Se proporciona un diseño de control sistemático con un transparente procedimiento de construcción sintonizado. En particular, el uso de balances calorimétricos aproximados (Jutan y Uppal, 1984; Schuler y Schmidt, 1992) es sistematizado por la postura del problema de diseño del controlador dentro de un marco de constructivo de control (Sepulchre *et al.*, 1998).
- Se obtiene un controlador retroalimentado con capacidad de convergencia a un tiempo finito.

De este modo, el tiempo de convergencia de la temperatura del reactor puede ser prescrito por ajuste de un solo parámetro de control.

- El controlador resultante puede ser interpretado como un controlador PI no lineal, con acción integral no lineal que generaliza la configuración convencional del controlador PI.
- En el límite de una elevada razón de estimación, el propósito del controlador retroalimentado es recuperar el comportamiento del controlador exacto entrada/salida de dinámica inversa (Kravaris y Chung, 1987). Esta propiedad garantiza buen funcionamiento del controlador de temperatura del reactor por lotes a pesar del error de modelado y perturbaciones no medibles.

Se presentan ejemplos específicos para ilustrar estos efectos, y demostrar la versatilidad de los esquemas de control propuestos. Así, para la estabilización a tiempo finito se simula el comportamiento de una reacción química consecutiva exotérmica, $A \rightarrow B \rightarrow C$ que fue usada por Luyben y Marroquin (1973), como un ejemplo práctico de control para el estudio de modelos matemáticos reales, y en el cual se requiere maximizar la producción de un componente B.

El otro ejemplo mostrado para aplicar un controlador en cascada es un problema de pirólisis considerado por Wen y Yen (1977) para el estudio de control óptimo de la pirólisis del aceite keroseno. En este sistema toman lugar cinco reacciones químicas, en las cuales intervienen cuatro especies químicas y se requiere maximizar la producción de un componente c_2 .

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Obtener una estrategia de control retroalimentado robusto que permita un adecuado seguimiento de trayectorias de temperatura y composición en reactores por lotes, capaz de contrarrestar efectos de incertidumbres, estados no medibles y perturbaciones.

1.4.2 Objetivos Particulares

- Plantear un diseño de control sistemático con un adecuado procedimiento de construcción y sintonizado, mediante el uso de aproximaciones de balances calorimétricos.
- Obtener un controlador retroalimentado con capacidad de convergencia a un tiempo finito. Aquí, el tiempo de convergencia de la temperatura del reactor puede ser ajustado por un parámetro de control.
- Diseñar un controlador capaz de contrarrestar efectos de incertidumbres provocados por parámetros de reacción cinética y parámetros de transferencia de calor.
- Garantizar el buen funcionamiento del controlador propuesto para el reactor por lotes a pesar del error de modelado y perturbaciones no medibles.
- Basados en el diseño de control sistemático, implementar un sistema en cascada en donde un controlador de composición actúe como el controlador maestro proporcionando la temperatura de referencia para el controlador esclavo, el cual proporcione la entrada de control de la temperatura de chaqueta.
- Demostrar la versatilidad de los esquemas de control propuestos mediante ejemplos específicos que permitan el análisis del comportamiento y efectos de los controladores propuestos en este trabajo.

Capítulo 2

HERRAMIENTAS TEÓRICAS

Resumen

En este capítulo se presentan algunos conceptos teóricos que serán utilizados en los capítulos posteriores para el planteamiento del diseño de control. El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: en la primera sección se presentan conceptos relacionados con estabilidad que es una de las propiedades más importantes que un sistema de control debe poseer, y es por lo tanto un tema principal y fundamental en los sistemas de control no lineales; posteriormente en la segunda sección, se presenta el mecanismo de estimación de incertidumbres que será aplicado en el diseño del control y el cual induce cierta capacidad de robustez a perturbaciones externas, parámetros de incertidumbre y no linealidades dentro del sistema a controlar; y por último, en la tercera sección se muestra un esquema de prevención de reajuste excesivo que será aplicado en la estructura del controlador.

2.1 Estabilidad

La estabilidad de un sistema se determina por su respuesta a las entradas o las perturbaciones. Intuitivamente, un sistema estable es aquel que permanece en reposo a no ser que se excite por una fuente externa y en tal caso, volverá al reposo una vez que desaparezcan todas las excitaciones. La estabilidad (Distefano *et al.*, 1985) se puede definir exactamente, en términos de la respuesta al impulso de un sistema como sigue.

Definición: *Un sistema es estable si su respuesta al impulso tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito.*

Alternativamente, la definición de un sistema estable se puede basar en la respuesta del sistema a entradas limitadas, es decir, entradas cuyas magnitudes son inferiores a un valor finito para todo tiempo.

Definición: *Un sistema es estable, si cada entrada limitada produce una salida limitada.*

La consideración del grado de estabilidad de un sistema, a menudo proporciona una valiosa información sobre su comportamiento. Es decir, si un sistema es estable, ¿cuán cerca está de ser inestable? Este es el concepto de estabilidad relativa. Generalmente, la estabilidad relativa se expresa en términos de alguna variación permitida en un parámetro de un sistema particular, para la cual el sistema permanecerá estable.

La estabilidad es una de las propiedades más importantes que un sistema de control debe poseer, y es por lo tanto un tema principal y fundamental en los sistemas de control.

2.1.1 Criterio de Estabilidad para Sistemas Lineales

La respuesta de un sistema de control lineal a una cierta entrada se puede representar mediante la expresión

$$c(t) = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t} + \dots + b_n e^{r_n t} + (\text{términos de entrada})$$

donde:

$c(t)$ es la salida del sistema o variable controlada.

r_1, r_2, \dots, r_n son los valores eigenvalores o raíces de la ecuación característica del sistema.

Si se supone que los términos de entrada permanecen limitados conforme se incrementa el tiempo, la estabilidad del sistema requiere que también los términos de la respuesta sin forzamiento permanezcan limitados conforme se incrementa el tiempo; esto depende únicamente de las raíces de la ecuación característica, y se puede expresar como sigue:

Para raíces reales: Si $r < 0$, entonces $e^{rt} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$

Para raíces complejas: $r = \sigma + i\omega e^{rt} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)$

Si $\sigma < 0$, entonces $e^{\sigma t}(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$

En otras palabras, la parte real de las raíces complejas, así como las raíces reales, deben ser negativas para que los términos correspondientes de la respuesta tiendan a cero. A este resultado no lo afectan las raíces repetidas, ya que únicamente se introduce un polinomio de tiempo en la solución, que no suprime el efecto del término exponencial de decaimiento. Es de notar que, si cualquier raíz de la ecuación característica es un número real positivo o un número complejo con parte real positiva, en la respuesta ese término no estará limitado y la respuesta completa será limitada, aun cuando los demás términos tiendan a cero, esto lleva al siguiente enunciado del criterio de estabilidad:

Para que el sistema de control con retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben ser números reales negativos o números complejos con partes reales negativas.

Si ahora se define el plano complejo s como un espacio cartesiano bidimensional, con el eje horizontal para la parte real de las raíces y el vertical para la parte imaginaria, se puede hacer el siguiente enunciado gráfico del criterio de estabilidad:

Para que el sistema de control con retroalimentación sea estable, todas las raíces de su ecuación característica deben caer en la mitad izquierda del plano s , que también se conoce como "semiplano izquierdo".

Cabe hacer notar que ambos enunciados del criterio de estabilidad en el dominio de Laplace se aplican en generalmente a sistemas lineales invariantes en el tiempo. En cada caso la ecuación característica se obtiene por igualación a cero del denominador de la forma lineal de la función de transferencia del sistema. Sin embargo el proceso para aplicar este criterio es muy lento para polinomios de grado superior al segundo. Por lo tanto existen criterios de estabilidad más sencillos que pueden aplicarse, entre los cuales podemos mencionar el criterio de estabilidad de Nyquist y el de Routh.

2.1.2 Criterio de Estabilidad de Lyapunov

El criterio de Lyapunov es el método más general para determinar la estabilidad de sistemas no lineales y/o variables en el tiempo. En 1892, A.M. Lyapunov presentó dos métodos (llamados primer y segundo métodos), para determinar la estabilidad de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer método consiste en todos los procedimientos en los que se utiliza la forma explícita de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

El segundo método, en cambio, no requiere las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Es decir, utilizando el segundo método de Lyapunov se puede determinar la estabilidad de un sistema sin necesidad de resolver las ecuaciones de estado. Esto es bastante ventajoso, porque resolver ecuaciones de estado no lineales y/o variables en el tiempo suele ser muy difícil.

Sistema. El sistema a considerar está definido por

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.1-1)$$

donde x es un vector de estado (vector n -dimensional), y $f(x, t)$ es un vector n -dimensional cuyos elementos son funciones de x_1, x_2, \dots, x_n , y t . Se supone que el sistema de la ecuación (2.1-1), tiene una solución única que comienza en la condición inicial dada. La solución de la ecuación (2.1-1), se designa como $\phi(t; x_0, t_0)$, donde $x = x_0$, en $t = t_0$, y t es el tiempo observado. Por tanto,

$$\phi(t; x_0, t_0) = x_0$$

Estado de equilibrio. En el sistema de la ecuación (2.1-1) al estado x_e , donde

$$f(x_e, t) = 0 \quad \text{para todo } t \quad (2.1-2)$$

se le denomina estado de equilibrio del sistema. Si el sistema es lineal, invariante en el tiempo, es decir, si $f(x, t) = Ax$, entonces existe un solo estado de equilibrio si A es no singular, y hay infinitos estados de equilibrio. Estos estados corresponden a las soluciones constantes del sistema ($x = x_e$ para todo t). La determinación de los estados de equilibrio no incluye la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema, ecuación (2.1-1), sino solamente la solución de la ecuación (2.1-2).

Cualquier estado de equilibrio aislado (es decir, aislado de cualquier otro) se puede desplazar al

origen de coordenadas o $f(0, t) = 0$, mediante una traslación de coordenadas.

Estabilidad en el sentido de Lyapunov. A continuación, se designará una región esférica de radio k , alrededor de un estado de equilibrio x_e como

$$\|x - x_e\| \leq k$$

donde $\|x - x_e\|$, se denomina norma euclidiana, que se define por

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Sea $S(\delta)$ la región que contiene todos los puntos tales que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

y $S(\epsilon)$ la región que contiene todos los puntos tales que

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

Se dice que un estado de equilibrio x_e , del sistema de la ecuación (2.1-1) es estable en el sentido de Lyapunov si, para cada rango de $S(\epsilon)$, existe una $S(\delta)$ tal que las trayectorias que se inician en $S(\delta)$ no salgan de $S(\epsilon)$ al crecer t indefinidamente. El número real δ depende de ϵ , y en general, también depende de t_0 . Si δ no depende de t_0 , se dice que el estado de equilibrio es uniformemente estable.

Lo que se estableció es que se comienza por elegir la región $S(\epsilon)$, y para cada $S(\epsilon)$, debe tener una región $S(\delta)$ tal que las trayectorias que comienzan en el interior de $S(\delta)$, no abandonan a $S(\epsilon)$ al incrementar t en forma indefinida.

Estabilidad asintótica. Se dice que un estado de equilibrio x_e del sistema de la ecuación (2.1-1) es asintóticamente estable, si es estable en el sentido de Lyapunov y si toda solución que sale desde el interior de $S(\delta)$ converge hacia x_e , sin abandonar $S(\epsilon)$, al crecer t indefinidamente.

En la práctica, la estabilidad asintótica es más importante que la sola estabilidad. También, como la estabilidad asintótica es un concepto local, el mero establecimiento de la estabilidad asintótica, puede no significar que el sistema opere adecuadamente. Por lo general se requiere algún conocimiento sobre el tamaño de la región más grande de estabilidad asintótica. Esta región se denomina *dominio*

de atracción. Es la parte del espacio de estado en la que se originan los trayectos asintóticamente estables. En otras palabras, cada trayecto que se inicia en el dominio de atracción es asintóticamente estable.

Estabilidad asintótica en forma total. Si la estabilidad asintótica se mantiene en todos los estados (todos los puntos en el espacio de estado) desde los que se originan las trayectorias, se dice que el estado de equilibrio es asintóticamente estable en forma total. Esto es, el estado de equilibrio x_e del sistema dado por la ecuación (2.1-1), se dice que es asintóticamente estable en forma total si es estable y si toda solución converge hacia x_e , al incrementar t indefinidamente. Obviamente, para que haya estabilidad asintótica en forma total, es condición necesaria que haya un solo estado de equilibrio en todo el espacio de estado.

En problemas de ingeniería de control la estabilidad asintótica en forma total es una cualidad deseable. Si el estado de equilibrio no es asintótica en forma total, el problema se torna en cómo determinar la mayor región de estabilidad asintótica, lo cual suele ser muy difícil. Para fines prácticos, sin embargo, basta determinar una región de estabilidad suficientemente grande como para que la perturbación no la exceda.

Inestabilidad. Se dice que un estado de equilibrio x_e es inestable si para algún número real $\epsilon > 0$ y para cualquier número real $\delta > 0$, por pequeño que sea, siempre hay un estado x_0 en $S(\delta)$, tal que la trayectoria que comienza en este estado sale de $S(\epsilon)$.

Representación gráfica de estabilidad, estabilidad asintótica, e inestabilidad. Una representación gráfica de las definiciones dadas, aclarará estos conceptos.

Se considera el caso bidimensional. En las Figuras 2-1(a), (b) y (c) se observan estados de equilibrio y trayectorias típicas correspondientes a estabilidad, estabilidad asintótica, e inestabilidad, respectivamente. En la Figura 2-1(a), (b) y (c), la región $S(\delta)$ limita el estado inicial x_0 , y la región $S(\epsilon)$ corresponde al límite para la trayectoria que sale de x_0 .

Nótese que las definiciones dadas no especifican la región exacta de las condiciones iniciales permisibles. Por tanto, aplicar las definiciones cerca del estado de equilibrio, menos $S(\epsilon)$ corresponde al estado completo del plano.

Nótese que en la Figura 2-1(c), la trayectoria sale de $S(\epsilon)$, e implica que el estado de equilibrio es inestable. Sin embargo, no se puede decir que el trayecto vaya al infinito, ya que puede tender a un ciclo límite fuera de la región $S(\epsilon)$. (Si un sistema lineal invariante en el tiempo, es inestable, los trayectos que salen desde cerca del estado de equilibrio inestable van al infinito. Pero en el caso de

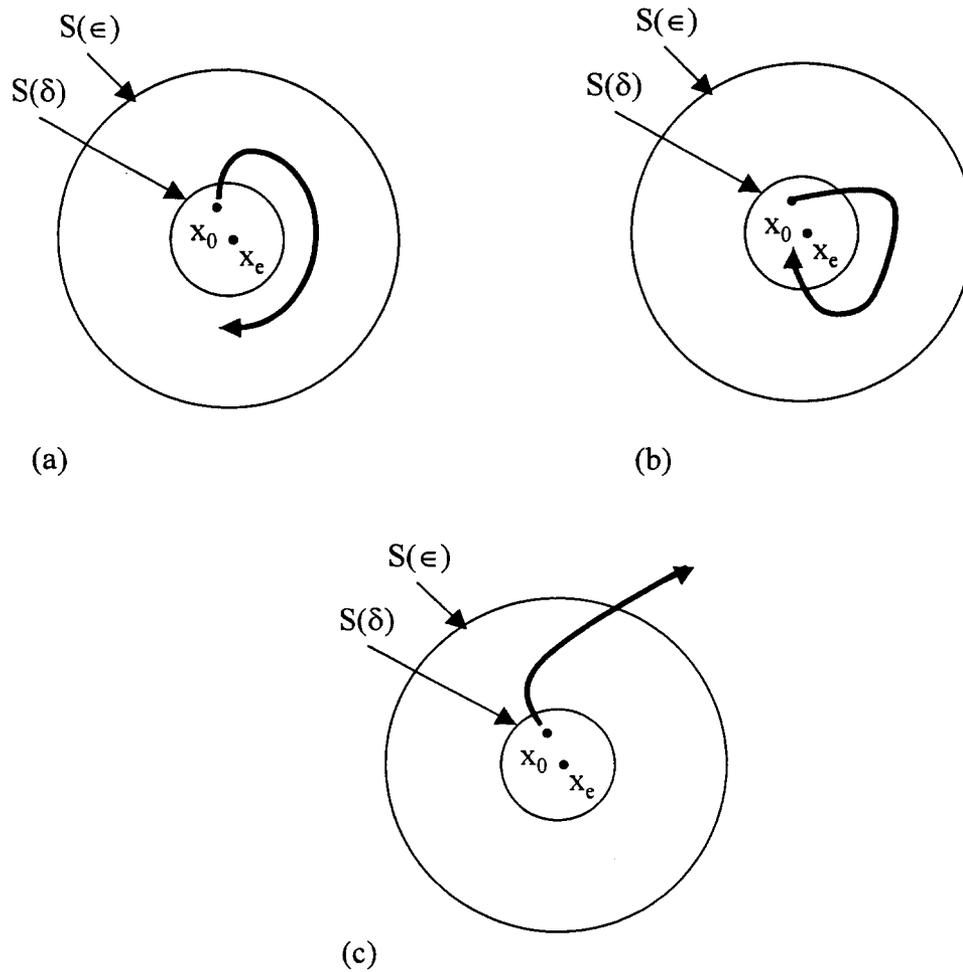


Figura 2-1. (a) Estado de equilibrio estable y una trayectoria representativa; (b) estado de equilibrio asintóticamente estable y una trayectoria representativa; (c) estado de equilibrio inestable y una trayectoria representativa.

sistemas no lineales, esto no es necesariamente cierto). Nótese que estas definiciones, no son los únicos conceptos de estabilidad de un estado de equilibrio. De hecho, en la literatura se dispone de otros caminos.

2.1.3 Estabilidad a Tiempo Finito

Muchas de las técnicas disponibles para la estabilización retroalimentada conducen a sistemas de lazo cerrado con dinámica de Lipschitz. La convergencia en tales sistemas está en la mejor exponencial con ajuste a tiempo infinito. En otras palabras, ninguna de las soluciones comienza en una vecindad en el origen, convergiendo al origen a tiempo finito (Bath y Bernstein, 1998). En efecto, la convergencia finita implica soluciones no únicas (en tiempo inverso) lo cual no es posible en la presencia de dinámicas continuas de Lipschitz.

Las leyes de control retroalimentado para estabilización a tiempo finito pueden ser obtenidas de una síntesis óptima. Un ejemplo bien conocido es el controlador de tiempo óptimo bang-bang. La minimización de ciertas funcionalidades no cuadráticas sujetas a saturación restringen la entrada de control produciendo la estabilización en tiempo finito del controlador retroalimentado. Esta propiedad del controlador de tiempo óptimo se usa para derivar un controlador retroalimentado con estabilización a tiempo finito, aplicado a incertidumbres escalares de segundo orden. Para el caso de ciertas condiciones iniciales, algunos de los controladores producen funciones de control con un número infinito de discontinuidades. En la implementación práctica, los controladores retroalimentados discontinuos pueden llevar a modificar su comportamiento debido a incertidumbres de la planta o imperfecciones en la medición. Tales controladores además pueden provocar dinámicas no modeladas de alta frecuencia cuando son usados, por ejemplo, para las estructuras de control amortiguado ligeramente.

Considere el sistema

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \tag{2.1-3}$$

donde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en una vecindad \mathcal{D} del origen y $f(0) = 0$. Una función continuamente diferenciable $y : I \rightarrow \mathcal{D}$ se dice es una solución de (2.1-3) en el intervalo de $I \subseteq \mathbb{R}$ si y satisface (2.1-3) para todo $t \in I$. La continuidad de f implica que para todo $x \in \mathcal{D}$, existe $\tau_0 < 0 < \tau_1$ y una solución $y(\cdot)$ de (2.1-3) definida en (τ_0, τ_1) tal que $y(0) = x$. Denotamos la solución única $y(\cdot)$ de (2.1-3) satisfaciendo $y(0) = x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ por $\rho_{(\cdot)}(x)$, que es, $\rho_t(x) = y(t)$.

Definición: El origen se dice es un equilibrio estable de tiempo finito de (2.1-3) si existe una vecindad abierta $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}$ del origen y una función $T : \mathcal{N} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$, denominado tiempo de resolución, tal que satisfagan las siguientes afirmaciones.

- **Convergencia en tiempo finito:** Para todo $x \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, $\rho_t(x)$ es definido para $t \in [0, T(x))$ $\rho_t(x) \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, para $t \in [0, T(x))$, y $\lim_{t \rightarrow T} \rho_t(x) = 0$.
- **Estabilidad de Lyapunov:** Para todo conjunto \mathcal{U}_δ tal que $0 \in \mathcal{U}_\delta \subseteq \mathcal{N}$ y tal que para todo $x \in \mathcal{U}_\delta \setminus \{0\}$, $\rho_t(x) \in \mathcal{U}_\epsilon$ para $t \in [0, T(x))$.

El origen será un equilibrio globalmente estable a tiempo finito si es un equilibrio estable a tiempo finito y $\mathcal{D} = \mathcal{N} = \mathbb{R}^n$.

Teorema : Suponer que existe una función continuamente diferenciable $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, con números reales $k > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, y una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ del origen tal que V es positiva definida en \mathcal{U} y $\dot{V} + kV^\alpha$ es negativa semidefinida en \mathcal{U} , donde $\dot{V}(x) = \frac{\delta V}{\delta x}(x)f(x)$. Entonces el origen es un equilibrio estable a tiempo finito de (2.1-3). Además, si T es la resolución del tiempo, entonces $T(x) < \frac{1}{k(1-\alpha)}V(x)^{1-\alpha}$ para todo x en alguna vecindad del origen.

2.2 Estimación de Incertidumbres

Resulta de suma importancia en el diseño de controladores linealizados, el papel de la acción integral para sistemas con incertidumbres y perturbaciones externas. Específicamente, la acción integral es interpretada como un compensador del error de modelado, el cual induce a cierta capacidad de robustez frente a perturbaciones externas, incertidumbres y no linealidades en el sistema a controlar (Alvarez-Ramírez *et al.*, 1998). El desarrollo de una parametrización de la ganancia del controlador y el tiempo integral en términos de estimación y constantes de tiempo nominal a lazo cerrado, permiten que el papel del tiempo integral en la robustez de los sistemas de lazo cerrado sea aclarado.

Se considera que un modelo lineal de la planta está dado por

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{\bar{b}e^{-\bar{D}s}}{s + \bar{a}}$$

donde \bar{a} , \bar{b} , y \bar{D} son estimados de los parámetros actuales de la planta. Este modelo puede ser obtenido de la linealización de un modelo no lineal o de los datos de la planta. Este tipo de modelo es capaz de representar la dinámica de muchos procesos sobre la frecuencia de interés para el diseño de control retroalimentado (Luyben, 1990). Las columnas de destilación (Morari y Zafriou, 1989) e intercambiadores de calor son ejemplos de procesos cuya dinámica puede ser representada por este modelo. Si $a > 0$, la planta es estable. Si $a = 0$, la planta es un integrador. Si $a < 0$, la planta es inestable.

Las siguientes propiedades son consideradas:

Propiedad 1 : Por simplicidad, $D = 0$ se supone en una primera etapa. Es interesante notar que el término de retardo en el modelo del proceso puede ser visto como un multiplicativo del modelo de incertidumbre, el cual limita el diseño de banda ancha del lazo de control retroalimentado.

Propiedad 2 : La señal de la ganancia de alta frecuencia b es conocida.

Propiedad 3 : La planta es afectada por no linealidades no modeladas $\rho(y)$ y perturbaciones externas $\pi(t)$ con variación de límites (es decir, $|\pi^{(1)}| \leq \delta_1$, donde $\pi^{(1)}$ denota la variación de $\pi(t)$). Esta es una suposición real. En efecto, las no linealidades están siempre presentes y no pueden ser removidas durante la linealización del proceso. Bajo la suposición anterior, la planta bajo consideración puede ser representada como

$$\dot{y} = ay + \rho(y) + \pi(t) + bu \tag{2.2-1}$$

El objetivo del control es hacer que la salida de la planta siga una referencia y_{ref} . Se define el error de regulación $x(t) = y_{ref} - y(t)$. Si el término $-ay_{ref}$ es tomado como una constante perturbada que puede ser incluida en $d(t)$, la planta (2.2-1) puede ser reescrita como

$$\dot{x} = ax + \sigma(t) + d(t) - bu \quad (2.2-2)$$

donde $\sigma(x) = -\rho(y_{ref} - x)$ y $d(t) = -\pi(t) - ay_{ref}$. Nótese que la linealización nominal de esta planta es $\dot{x} = \bar{a}x - \bar{b}u$.

Si un diseño del controlador PI $C(s) = U(s)/X(s) = Kp(1 + 1/T_I s)$ está basado en la planta nominal $\dot{x} = \bar{a}x - \bar{b}u$ y es usado para controlar la planta actual (2.2-2), el sistema de lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - bKp)x - bK_I z + \sigma(x) + d(t) \\ \dot{z} &= x \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

donde $K_I = Kp/\tau_I$ es la ganancia integral. Supóngase que un objetivo de control es reducir los efectos de las perturbaciones externas $d(t)$ en el error de regulación $x(t)$, mientras se mantiene la estabilidad a lazo cerrado. Una práctica común para lograr este objetivo es inducir una transitoriedad rápida incrementando la magnitud de las ganancias Kp y K_I del controlador PI. Esta práctica no tiene una base formal y puede conducir a efectos adversos. En efecto, se ha mostrado que si la no linealidad es severa (por ejemplo, $\sigma(x) = x^3$) la región de estabilidad del sistema de la forma (2.2-3) desaparece a medida que la magnitud de Kp y K_I son excesivamente grandes.

Puesto que todos los sistemas prácticos están sujetos a no linealidades no modeladas, una linealización del diseño de control, como en el caso de los controladores PI, puede ser diseñado para tratar con esta clase de incertidumbres.

Se diseñará un controlador lineal con capacidad para tratar las no linealidades no modeladas $\sigma(y)$ y perturbaciones no medidas $d(t)$. Describimos el sistema (2.2-2) como

$$\dot{x} = \bar{a}x + \phi(x, u, d) - \bar{b}u \quad (2.2-4)$$

donde $\phi(x, u, d) = \Delta ax + \sigma(x) + d(t) - \Delta bu$, $\Delta a = a - \bar{a}$, y $\Delta b = b - \bar{b}$. La función $\phi(x, u, d)$ contiene todos los términos de incertidumbre del sistema (2.2-2). En realidad, $\phi(x, u, d)$ es el error de modelado inducido por perturbaciones externas y no linealidades no modeladas. Si $\phi(x, u, d) = 0$, el

modelo nominal $\dot{x} = \bar{a}x - \bar{b}u$ es obtenido, además la incertidumbre $\phi(x, u, d)$ que afecta la planta lineal $\dot{x} = \bar{a}x - \bar{b}x$, es persistente y de naturaleza retroalimentada. Aunque estas perturbaciones de planta no son del tipo ordinario considerado, manipuladas por controladores lineales estándar, su rechazo es de mayor importancia para asegurar una operación estable a lazo cerrado. Definamos una extensión de estados $\eta \in R$. El sistema (2.2-4) es equivalente a lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \bar{a}x + \eta - \bar{b}u \\ \dot{\eta} &= \psi(x, \eta, \mathcal{U}, \mathcal{D})\end{aligned}\tag{2.2-5}$$

donde $\mathcal{U} = (u, u^{(1)})$, $\mathcal{D} = (d, d^{(1)})$, y $u^{(1)}$ y $d^{(1)}$ denotan la derivada de tiempo de u y d , respectivamente. La función $\psi(x, \eta, \mathcal{U}, \mathcal{D})$ es la derivada de tiempo. Si un controlador estabiliza la extensión del sistema (2.2-5), entonces tal controlador además estabiliza la planta actual (2.2-2). La representación del estado aumentado (2.2-5) es un punto aparte de este diseño de control.

Sea $a_c < 0$ un polo prescrito de lazo cerrado o, equivalentemente, sea $\tau_c = -a_c^{-1}$ una constante de tiempo prescrita de lazo cerrado. Un controlador retroalimentado para el sistema (2.2-5) está dado por

$$u = -[(a_c - \bar{a})x - \eta] / \bar{b}\tag{2.2-6}$$

así el comportamiento de lazo cerrado está gobernado por $\dot{x} = a_c x = -\tau_c^{-1}x$. Puesto que el estado aumentado η (equivalentemente el error de modelado $\phi(x, u, d)$) es desconocido, el control retroalimentado (2.2-6) no puede ser implementado. Por lo tanto, un procedimiento para estimar η es requerido. Para este fin, remarcamos la siguiente propiedad del sistema (2.2-5):

“La dinámica del estado aumentado $\eta(t)$ puede ser reconstruido de la dinámica de las señales de salida $y(t)$ y entrada $u(t)$. De hecho, notamos que $\eta(t) = \dot{x}(t) - \bar{a}x(t) + \bar{b}u(t)$. Así, $\eta(t)$ puede ser reconstruido usando mediciones de $x(t)$, $u(t)$ y un derivador para realizar $\dot{x}(t)$ ”.

Puesto que la derivación perfecta no puede ser realizada en la práctica, la alternativa más común es usar observadores para estimar los estados no medidos. Sea $\bar{\eta}(t)$ un estimado de $\eta(t)$. Cuando es recordado que $\eta = \dot{x} - \bar{a}x + \bar{b}u$, el siguiente observador de orden reducido es propuesto como un

estimador del error de modelado

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\eta}} &= (\eta - \bar{\eta})/\tau_e \\ &= (\dot{x} + \bar{a}x + bu - \bar{\eta})/\tau_e\end{aligned}\tag{2.2-7}$$

donde $\tau_e > 0$ es la constante de tiempo de estimación, la cual es un parámetro ajustable. Puesto que $\phi(x, u, d)$ es desconocido, $\psi(x, \eta, \mathcal{U}, \mathcal{D})$ es también desconocido. Este término no fue considerado en la construcción del estimador (2.2-7). Nótese que a causa de la convergencia asintótica de $\bar{\eta}$ a cero (2.2-7), $\bar{\eta}$ reconstruye asintóticamente la señal del error de modelado η .

Puesto que \dot{x} está en el lado derecho de (2.2-7), introducimos la variable $w = -\tau_e \bar{\eta} + x$. Consecuentemente, el estimador (2.2-7) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \bar{a}x + bu - \bar{\eta} \\ \bar{\eta} &= (x - w)/\tau_e\end{aligned}\tag{2.2-8}$$

Dada la regulación de error $x(t)$ y la señal de entrada $u(t)$, el filtro de primer orden (2.2-8) proporciona un estimado $\bar{\eta}$ del error de modelado $\eta = \phi(x, u, d) = \Delta ax - \Delta bu + \sigma(x) + d$. De (2.2-6), la correspondiente señal de control es

$$u = -[(a_c - \bar{a})x - \bar{\eta}]/\bar{b} = [(\tau_c^{-1} + \bar{a})x + \bar{\eta}]/\bar{b}\tag{2.2-9}$$

El estimador (2.2-8) junto con la retroalimentación (2.2-9) comprenden el diseño de control. El estimador (2.2-8) proporciona el estimado $\bar{\eta}$, el cual es subsecuentemente usado en (2.2-9) para contrarrestar los efectos del error de modelado $\eta = \Delta ax - \Delta bu + \sigma(x) + d$. De esta forma, si $\bar{\eta}$ reconstruye asintóticamente la señal del error de modelado η , la planta (2.2-2) bajo el controlador consistente de (2.2-8) y (2.2-9) se comportará como un sistema asintóticamente estable (Alvarez-Ramírez *et al.*, 1998) $\dot{x} = a_c x = -\tau_c^{-1}x$. Estas ideas de estimación de incertidumbres serán aplicadas en los capítulos posteriores para el diseño de la estrategias de control.

2.3 Prevención del Reajuste Excesivo (Reset Windup)

La acción de integración o de reajuste es necesaria para eliminar la desviación o error de estado estacionario en los controladores por retroalimentación (Smith y Corripio, 1991). Uno de los perjuicios que se tienen con esta ventaja es el “reajuste excesivo” o sobrepaso excesivo de la variable controlada, cuando la señal de salida del controlador regresa a su rango normal después de un período de saturación. A esto se debe que se requiera cambiar a “manual” los controladores durante el arranque o parada del proceso, ya que bajo esas condiciones es cuando los controladores se saturan con más frecuencia. Se dice que el controlador se satura cuando su señal de salida está en o fuera de los límites de operación de la válvula de control o elemento final de control; cuando esto ocurre, se interrumpe el circuito de control y la variable controlada se desvía del punto de control, como se podría esperar. Como consecuencia de la acción de integración, se puede requerir una gran desviación en la dirección contraria para regresar la salida del controlador a su rango normal de operación. El reajuste excesivo es esta incapacidad para que el controlador se pueda recuperar rápidamente de una condición de saturación.

A fin de repasar el concepto de reajuste excesivo, a continuación se considera el arranque del tanque calentado por vapor que se esboza en la Figura 2-2a. Se utiliza un controlador proporcional-integral (PI) con retroalimentación (TIC) para controlar la temperatura en el tanque, mediante el ajuste de la válvula de control del vapor. Los instrumentos son neumáticos con un rango normal de 3 a 15 psi y una presión de alimentación de 20 psig. Si el controlador se deja en automático durante el arranque, su salida se va al valor máximo, 20 psig de la presión de alimentación, a causa de la acción de integración, debido a que la temperatura permanece debajo del punto de régimen durante un largo período. En la Figura 2-2b, se ilustra el registro de tiempo durante el arranque del proceso. Al inicio la válvula de vapor se abre totalmente, mientras la variable de salida del controlador está al valor de la presión de alimentación, que es de 20 psig. A pesar de que el controlador se satura, la válvula de vapor se mantiene abierta; esta estrategia es la correcta para calentar en tiempo mínimo el contenido del tanque hasta el punto de control. El problema de exceso empieza a aparecer cuando la temperatura del tanque alcanza el punto de control (punto de régimen, referencia o fijación) y en ese instante la salida del controlador es

$$\begin{aligned}m(t) &= \bar{m} + k_c e(t) + \frac{k_c}{\tau_I} \int e(t) dt \\ &= 20 \text{ psig}\end{aligned}$$

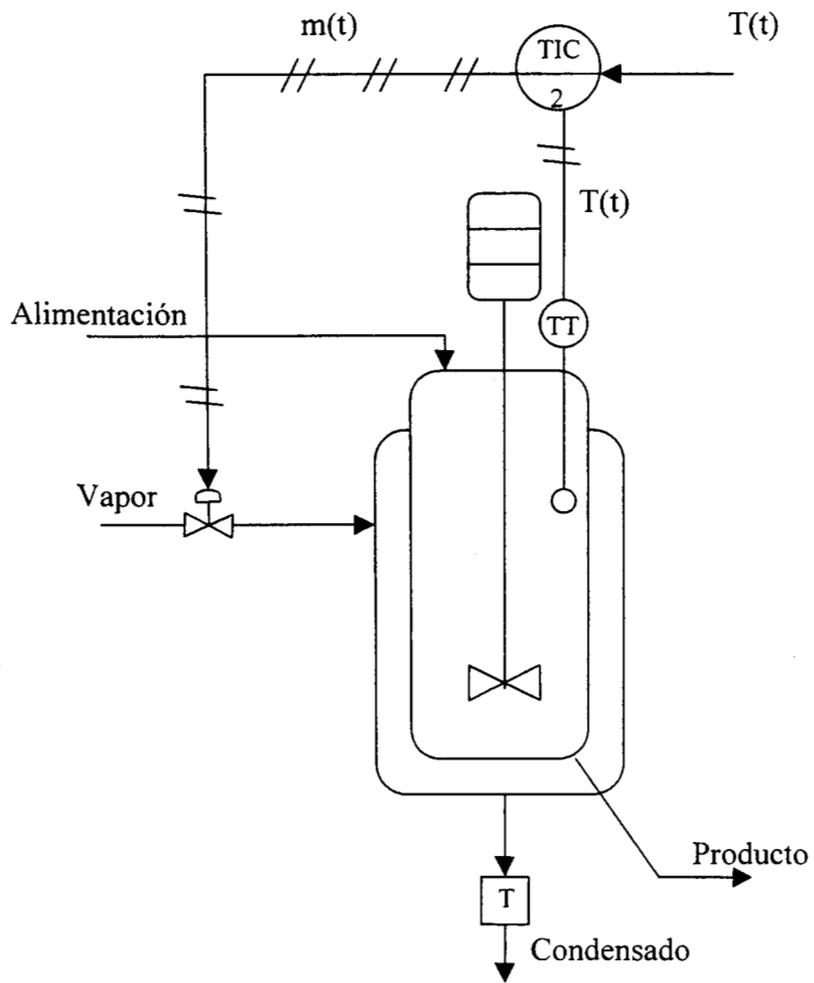


Figura 2-2a. Tanque calentado por vapor.

Esto se debe a que, con la acción de integración, la salida del controlador se lleva al valor de la presión de alimentación. (Se notará que esto equivale a igualar con 20 psig el valor de desviación y el término de integración a cero.) Puesto que la válvula de control del vapor no se empieza a cerrar sino hasta que la salida del controlador alcanza 15 psig, se requiere un error negativo grande para provocar un descenso de 5 psig en la salida del controlador. Por ejemplo, cuando se tiene únicamente acción proporcional y se supone una banda de proporcionalidad de 25 % ($k_c = 4$), el error mínimo requerido para empezar a cerrar la válvula es

$$m = 20 + k_c e \text{ psig}$$

$$e = \frac{m-20}{k_c} = \frac{15-20}{4} = -1.25 \text{ psig (-10.4 \% de rango)}$$

Éste es un error significativo e indica que la temperatura continuará subiendo por arriba del punto de control mientras la válvula de vapor permanezca completamente abierta; parecerá que el controlador no responde a la elevación en la temperatura, entonces se dice que esta “excedido”.

Con la acción de integración se puede empezar a reducir la salida del controlador tan pronto como el error se hace negativo, de manera que el error puede alcanzar un pico con valor inferior al que se estimó con anterioridad (-10.4 %). Sin embargo, si no fuera por la acción de integración, en primer lugar, el valor de desviación \bar{m} no hubiera llegado a 20 psig. La fórmula para un controlador proporcional es

$$m(t) = \bar{m} + k_c e(t)$$

Si se considera un valor de desviación \bar{m} de 9, con el controlador proporcional se empieza a cerrar la válvula de vapor antes de que la temperatura alcance el punto de control. Por lo tanto, la acción de integración es la causa de que exista un gran sobrepaso de temperatura, como se ilustra en la Figura 2-2b y, puesto que ese efecto es altamente indeseable ¿cómo se puede evitar?

Una forma de evitar el gran sobrepaso que ocasiona el reajuste excesivo es mantener el controlador en manual hasta que la temperatura llegue al punto de control y cambiarlo entonces a automático. En este caso la válvula de vapor se mantiene completamente abierta mediante el ajuste manual de la salida del controlador a 15 psig, con lo cual se garantiza que la válvula de control se comenzará a

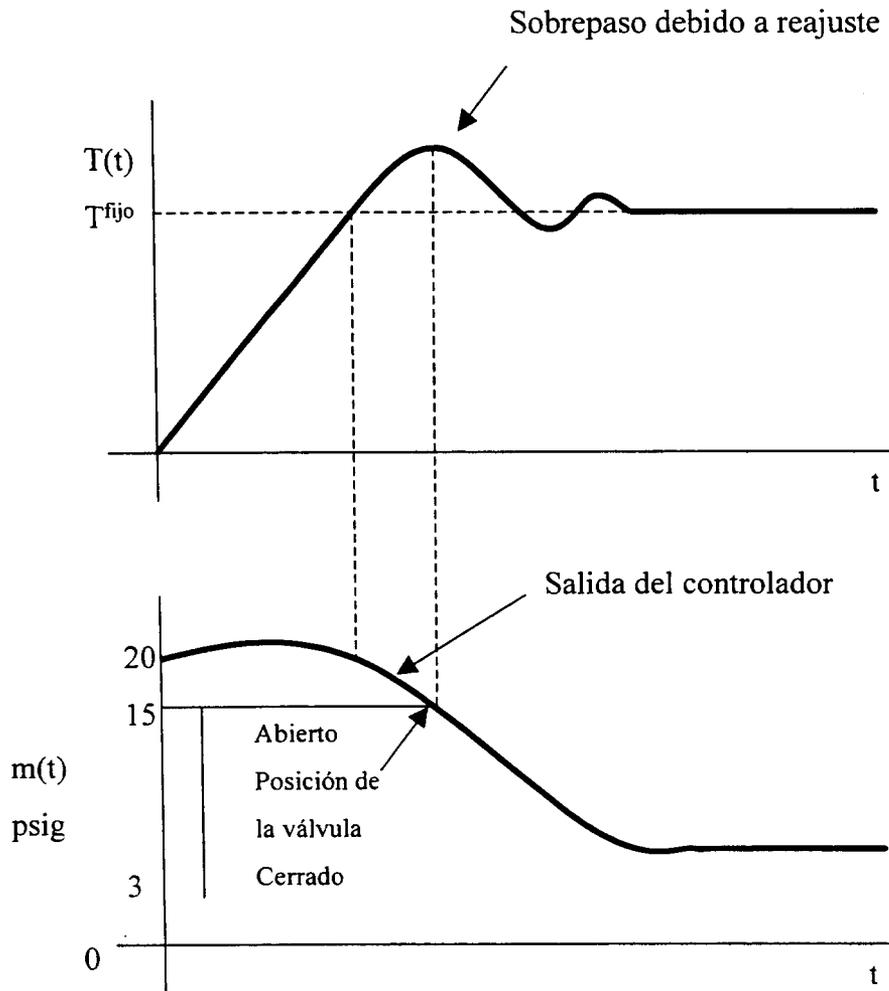


Figura 2-2b. Reajuste excesivo al inicializar el tanque calentado por vapor.

cerrar tan pronto como el controlador se cambia a automático. Una segunda alternativa es instalar un limitador de la salida del controlador para evitar que llegue a valores más allá del rango de la válvula de control, es decir, arriba de 15 psig o abajo de 3 psig, para observar si esto funciona se divide el diagrama de bloques del controlador del controlador en sus respectivas partes. La función de transferencia del controlador PI se expresa mediante

$$\begin{aligned} M(s) &= k_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} \right] E(s) \\ &= k_c E(s) + M_I(s) \end{aligned}$$

donde:

$$M_I(s) = \frac{1}{\tau_I s} k_c E(s)$$

En la Figura 2-3a se ilustra una construcción directa con base en esta función de transferencia, en diagrama de bloques. En el diagrama se muestra por qué al instalar un limitador a la salida del controlador no se evita el problema de exceso: la salida de la acción de interacción, $M_I(s)$, aún se irá más allá de los límites de la salida del controlador y causará el exceso. En otras palabras, para evitar el exceso, se debe limitar de alguna manera la salida de la acción de integración. En los controladores analógicos neumáticos y electrónicos se logra esta limitación de una manera muy ingeniosa: primero, a partir de la definición $M_I(s)$, se tiene

$$\tau_I s M_I(s) = k_c E(s)$$

Al resolver para $k_c E(s)$, de la ecuación anterior, se tiene

$$k_c E(s) = M(s) - M_I(s)$$

De combinar las dos ecuaciones anteriores y reordenar, resulta

$$M_I(s) = \left[\frac{1}{\tau_I s + 1} \right] M(s)$$

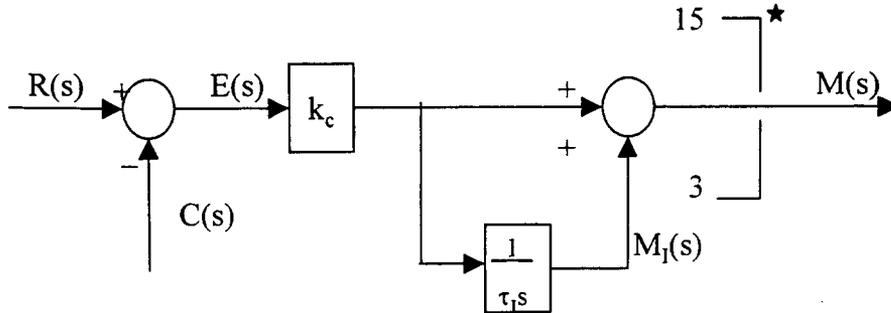
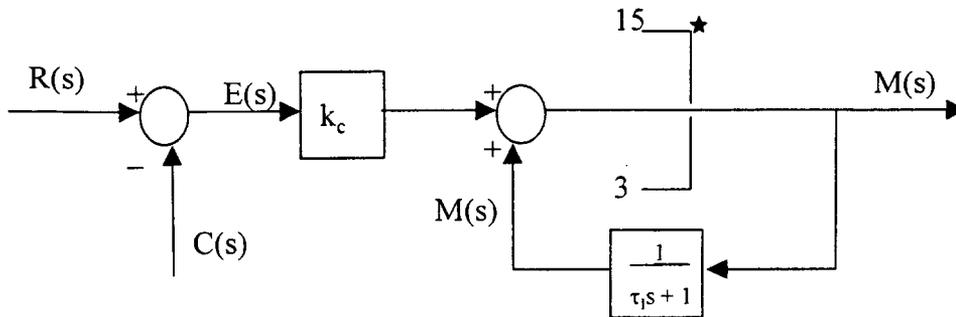


Figura 2-3a. La implantación directa de un controlador PI es difícil de limitar.



★ Limitador de la señal absoluta.

Figura 2-3b. La implantación del reajuste por retroalimentación de un controlador PI es fácil de limitar.

Esta construcción para la acción de integración se representa en el diagrama de bloques de la Figura 2-3b, en el cual se puede observar que, si el limitador se coloca como se muestra, $M_I(s)$ se limita automáticamente. Esto se debe a que $M_I(s)$ siempre está en retardo a $M(s)$, con una ganancia de 1.0 y una constante de tiempo ajustable τ_I ; por lo tanto, nunca estará fuera del rango a que se limita $M(s)$. En otras palabras, si $M(s)$ alcanza uno de sus límites, $M_I(s)$ se acercará a ese límite, es decir, 15 psig; entonces, en el momento en que el error se vuelve negativo, la salida del controlador se hace

$$m(t) = 15 + k_c e(t) < 15 \text{ psig} \quad \text{ya que } e(t) < 0$$

Esto es, la salida del controlador llega fuera del límite y cierra la válvula de control, en el instante en que la variable controlada pasa por el punto de control. Se observa que en estado estable el error debe ser cero, ya que

$$M = M_I = M_I + k_c e \quad \text{donde } e = 0$$

Y, por lo tanto, no debe existir desviación.

El limitador que se muestra en la Figura 2-3b se conoce algunas veces como “conmutador por lotes” (*batch switch*) porque en los procesos por lotes se presentan situaciones de exceso con suficiente frecuencia como para justificar el gasto extra por el limitador. Actualmente, en los controladores que se construyen con microprocesadores, el limitador es una característica de control estándar.

La estructura de “retroalimentación de reajuste” de la Figura 2-3b tiene la ventaja que proporciona, de una manera muy limpia y directa, la eliminación del reajuste excesivo en los sistemas de control por superposición y en cascada.

Capítulo 3

REACTOR POR LOTES

Resumen

Los procesos por lotes son algunos de los problemas más interesantes y desafiantes en modelación y control por su inherente naturaleza dinámica. Dentro de este capítulo se indicarán brevemente algunas de las características más importantes de los reactores por lotes así como el planteamiento del modelo dinámico general para este tipo de reactores, además se presenta la descripción de los parámetros involucrados en dicho modelo. Resulta de gran interés este capítulo para el desarrollo del trabajo, puesto que será el sistema sometido a estudio y en el cual se pretende aplicar el diseño de control que posteriormente será descrito.

3.1 Introducción

Los procesos por lotes son algunos de los problemas más interesantes y desafiantes en modelación y control por su inherente naturaleza dinámica. Aunque muchos procesos químicos a gran escala han tradicionalmente sido operados de manera continua, muchos otros procesos por lotes todavía son usados en la producción de pequeños volúmenes especialmente químicos y farmacéuticos. Estos reactores se caracterizan por la variación en el grado de reacción y en las propiedades de la mezcla reaccionante con el transcurso del tiempo. Además, los reactores químicos por lotes tienen inherentes ventajas cinéticas sobre los reactores continuos para algunas reacciones (principalmente aquellas con constantes de velocidad lentas). La forma en que operan esta clase de reactores se puede describir de la siguiente manera, se agrega una carga de reactantes que se lleva hasta la temperatura de reacción, se mantiene en estas condiciones por un determinado tiempo, y después se extrae el producto de la reacción. Refiriéndonos al comportamiento de temperatura dentro del reactor, el calor inicial de la temperatura ambiente y la subsecuente temperatura de control en los reactores por lotes exotérmicos ha probado ser un difícil problema de control, porque la cantidad de calor liberado por la mezcla reaccionante puede incrementarse rápidamente, la reacción por lo tanto se vuelve inestable y causa que la temperatura se dispare si el calor generado excede la capacidad de enfriamiento del reactor. Este disparo puede obviamente causar grandes riesgos al personal de la planta y equipo, y puede además en el peor de los casos, resultar en una pérdida del lote. Por lo tanto, resulta necesario un cuidadoso control de los cambios en la temperatura del reactor para obtener una producción segura y con calidad.

La flexibilidad ofrecida por el reactor por lotes, además, origina un desafío para los problemas de control, debido a que éstos no son estacionarios, son no lineales y tienen un tiempo finito de duración dinámica. Dado que en la operación de un reactor por lotes no existe estado estacionario, no se tiene una condición específica con la cual los controladores puedan ser sintonizados. Por consiguiente, no se ha obtenido, hasta ahora, una respuesta de control satisfactoria. Por otra parte, se reconoce que los controladores tradicionales PI/PID (proporcional-integral y proporcional-integral-derivativo respectivamente), los cuales funcionan bastante bien para los reactores continuos, proporcionan un funcionamiento pobre dada la naturaleza no estacionaria de los reactores por lotes. Para dirigir el problema de control en este tipo de reactores, se han propuesto muchas metodologías de diseño, pero todavía falta una mejor comprensión y sistematización en el sentido de la robustez que se encuentra orientada a la construcción de aproximaciones de control.

3.2 Modelo del Reactor por Lotes

El punto de partida para realizar el planteamiento del modelo de un reactor por lotes, es un balance de materia referido a cualquier reactante o producto. Por consiguiente, tenemos

$$\begin{pmatrix} \text{caudal de} \\ \text{entrada en} \\ \text{el elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{caudal de} \\ \text{salida de} \\ \text{reactante} \\ \text{del elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{caudal perdido de} \\ \text{reactante debido a} \\ \text{la reacción química} \\ \text{en el elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{caudal de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de reactante} \\ \text{en el elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix}$$

Cuando la composición en el reactor es uniforme (independiente de la posición), el balance de materia puede hacerse refiriéndolo a todo el reactor. Cuando la composición no es uniforme, el balance de materia ha de referirse a un elemento diferencial de volumen y después se efectuará la integración extendida a todo el reactor para las condiciones apropiadas de flujo y concentración. Como en un reactor por lotes la composición es uniforme en cada instante, podemos efectuar el balance referido a todo el reactor. Teniendo en cuenta que durante la reacción no entra ni sale fluido del sistema. Por lo tanto tenemos

$$+ \begin{pmatrix} \text{Velocidad de desaparición} \\ \text{del reactante } i \text{ en el} \\ \text{reactor debido a} \\ \text{reacción química} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \text{Velocidad de acumulación} \\ \text{del reactante } i \\ \text{en el reactor} \end{pmatrix}$$

En las reacciones no isotérmicas ha de emplearse el balance calorífico juntamente con el de materia. Es decir,

$$\begin{pmatrix} \text{flujo de} \\ \text{entrada de} \\ \text{energía calorífica} \\ \text{al elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{flujo de salida} \\ \text{de energía} \\ \text{calorífica} \\ \text{del elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{desaparición de ener-} \\ \text{gía calorífica por} \\ \text{reacción química} \\ \text{en el elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{acumulación} \\ \text{de energía} \\ \text{calorífica en} \\ \text{el elemento} \\ \text{de volumen} \end{pmatrix}$$

Este balance puede referirse a un elemento de volumen diferencial del reactor, según las circuns-

tancias. Así en un proceso por lotes la ecuación de balance de calor se reduce a

$$\begin{pmatrix} \text{Energía transferida de} \\ \text{los alrededores al ele-} \\ \text{mento de volumen} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Acumulación de ener-} \\ \text{gía en el elemento de} \\ \text{volumen} \end{pmatrix}$$

El balance de materia y el balance de calor están interrelacionados por sus terceros términos, debido a que el efecto calorífico está originado por la propia reacción.

Con base en el planteamiento de estos balances generales para los reactores, es posible plantear nuestro modelo del reactor por lotes en el cual m reacciones toman lugar involucrando n ($n > m$) especies químicas. Los balances de masa y energía de la reacción química del sistema llevan al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= Er(c, T) \\ \dot{T} &= H^T r(c, T) + \gamma(c, T, t) [u - T] \end{aligned} \tag{3.1}$$

con condiciones iniciales $c(0) = c_0$ y $T(0) = T_0$. En este sistema:

- $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector de concentración de la especie química involucrada.
- $r(c, T) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de la reacción cinética.
- $E \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es la matriz estequiométrica.
- $H \in \mathbb{R}^m$ es el vector de la constante de entalpía de reacción.
- $\gamma(c, T, t)$ es el parámetro de transferencia de calor.
- u es la temperatura de la chaqueta, la cual se toma como la entrada de control.

Una operación factible del reactor por lotes requiere que $\gamma(c, T, t) > 0$, así en el resto del trabajo se asumirá que $\gamma(c, T, t) \neq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{R}$, y $t \geq 0$. Del principio de Conservación de Masa (Gavalas, 1968; Feinberg, 1987) existe un vector positivo $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $w^T E = 0$. La igualdad $w^T E = 0$ establece que lo que es producido por la reacción del sistema no es más grande que lo consumido. Como consecuencia, puede ser mostrado que el conjunto polihédrico $\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{R}^n : \omega^T c \geq 0, c_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ es positivamente invariante de acuerdo con la dinámica del reactor por

lotes (Gavalas, 1968; Feinberg, 1987). Por lo tanto, de ahora en adelante en este trabajo el vector de concentración c estará restringido a los límites y al conjunto cerrado C .

Fuertes no linealidades en el modelo (3.1) son introducidas por la reacción cinética $r(c, T)$. Comúnmente, la funcionalidad de la reacción cinética en c es de tipo polinomial o racional (Lagmuir). Además, la funcionalidad en T es del tipo de Arrhenius es decir,

$$k_i = k_{i0} \exp(-E_i/RT)$$

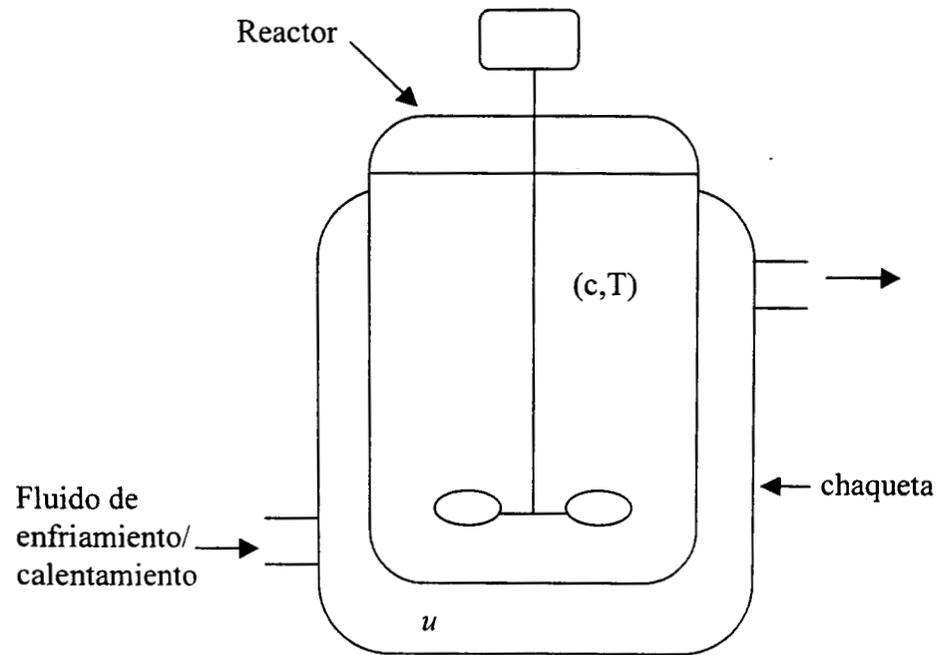
en donde

- $E_A > 0$ es la energía de activación y
- $R_g > 0$ es una constante universal de los gases.
- k_{i0} se denomina como el factor de frecuencia.
- k_i es el coeficiente cinético.

Esta expresión se ajusta bien a datos experimentales en un amplio intervalo de temperaturas y, desde diferentes puntos de vista, se considera como una primera aproximación adecuada para el estudio del efecto de la temperatura sobre la ecuación cinética.

Las clases de reactores por lotes modelados por (3.1) incluyen importantes procesos industriales, tales como reactores de polimerización (Kozub y McGregor, 1992) y cristalizadores (Miller y Rawlings, 1994).

Una operación típica de un reactor por lotes puede ser descrito como sigue: los reactivos y catalizadores son adicionados dentro del reactor (ver Figura 3-1), y la temperatura del reactor T hace seguir una trayectoria prescrita $T_r(t)$ (comúnmente óptima) por manipulación de la temperatura de chaqueta u . Primeramente, la temperatura del reactor arranca con una condición inicial T_0 , tal que una norma de control debe asegurar la trayectoria de temperatura en el sentido que $T(t) \rightarrow T_r(t)$ lo más rápido posible. De este modo, el controlador de temperatura resultante en el reactor tiene un mejor efecto en los niveles de productos del reactor. Por ejemplo, una norma de temperatura óptima para un tiempo mínimo, conversión deseada y cadenas moleculares largas se obtiene en concentraciones iniciales diferentes (Gentric *et al.*, 1999).



c : Concentración del sistema.

T : Temperatura del reactor.

u : Temperatura de la chaqueta.

Figura 3-1. Diagrama de un Reactor por Lotes.

Capítulo 4

DISEÑO DE UN CONTROLADOR ROBUSTO

Resumen

En el este capítulo se presenta el diseño del controlador usado para lograr una estabilización a tiempo finito del reactor por lotes. Este capítulo se encuentra distribuido de la siguiente manera, primeramente se plantea, un controlador exacto de temperatura con dinámica inversa para inducir la convergencia a un tiempo finito de la temperatura del reactor a la trayectoria de la temperatura de referencia. En un segundo término, motivados por ideas de estimación calorimétrica, se construye el estimador robustamente convergente para suponer en línea la razón de generación de calor e intercambio de temperatura y dinámica de balance de calor. Siguiendo las ideas de construcción del estimador base y compensación del error de modelado para la aproximación del control no lineal, y mediante la combinación de una aproximación del controlador exacto de dinámica inversa y el estimador de balance calorimétrico, se desarrolla el propósito de controlar la medición de temperatura.

4.1 Introducción

Desde el punto de vista del control, las mayores fuentes de incertidumbres son la reacción cinética $r(c, T)$ y el parámetro de transferencia de calor $\gamma(c, T, t)$. Ya que por una parte, la función $r(c, T)$ es pobremente conocida en aplicaciones industriales y aunque $r(c, T)$ sea conocido, el vector de composición c esta raramente disponible para mediciones. De esta forma, uno considera que el vector de reacción cinética $r(c, T)$ no se encuentra disponible para el diseño del control retroalimentado. Por otra parte, el parámetro de transferencia de calor $\gamma(c, T, t)$ puede desplegar una compleja funcionalidad con respecto a la concentración, a la temperatura y al tiempo debido a cambios en el área de transferencia de calor, viscosidad, densidad, etc. Además, las mediciones completas de concentración son raramente hechas en la industria porque los mecanismos de medición son caros o tienen grandes tiempos de retardo. De este modo, un controlador de temperatura para un reactor por lotes debe enfrentar problemas de robustez en contra de la funcionalidad de incertidumbres y estados no medidos. En consecuencia, se supondrá que sólo la temperatura del reactor y la chaqueta están disponibles para medición.

4.2 Diseño de un Controlador Retroalimentado Exacto

En esta sección, se señalará el control de temperatura de un reactor por lotes con conocimiento completo del sistema dinámico. Esto es, se supondrá que la reacción cinética $r(c, T, t)$ y el parámetro de transferencia de calor $\gamma(c, T, t)$ son conocidos, y que todas las entradas del vector de concentración c son medibles. Por supuesto, el controlador resultante no se puede implementar debido a la falta de información completa, sin embargo será usado como un paso intermedio en el control práctico, que será diseñado en la siguiente sección.

Suponiendo que la temperatura de referencia $T_r(t)$ y su primera derivada \dot{T}_r están uniformemente limitadas para todo $t \geq 0$. Sea $e(t) = T(t) - T_r(t)$ la trayectoria del error de temperatura. Puesto que el reactor por lotes tiene un proceso de duración finita, con tiempo $T_{BR} > 0$, vemos natural requerir una dinámica del error con convergencia en tiempo finito. Estas clases de controladores han ganado mucha atención esta última década (Bath y Bernstein, 1998) por una razón principal: algunas propiedades robustas suceden incluso si algunas veces la propiedad de convergencia finita se pierde (Perruquetti y Drakunov, 2000). El problema de diseñar un controlador robusto a tiempo finito general para sistemas no lineales de la forma $\dot{x} = f(x, u)$ no es una fácil tarea. A continuación, se mostrará que para la

estabilización de la temperatura este problema puede ser dirigido por medio de una aproximación de control de dinámica inversa dotado con un cierto tipo de estimación no paramétrica.

Ya que en una aproximación (Cott y Machietto, 1989) GMC (Lee y Sullivan, 1988), se considera la siguiente dinámica *deseada* para la regulación del error de temperatura $e(t)$:

$$\dot{e} = F(e), e(0) = e_0 \quad (4.1)$$

en donde la función $F(e)$ se selecciona de modo tal que, para alguna condición inicial $e_0 \in \mathbb{R}$, la solución $e(t; e_0)$ converge al origen en un tiempo finito, es decir $T_{FT} > \infty$. Para alcanzar la estabilidad a un tiempo finito, los valores propios de la parte “linealizada” de $F(e)$ tienden a $-\infty$ conforme el estado tiende a cero. Como consecuencia de una apropiada “asignación de los valores propios”, $F(e)$ llega a ser Lipschitz al tiempo que el error e tiende a cero.

La función seleccionada puede ser continua o discontinua. Ejemplos de funciones de estabilidad a tiempo finito son las siguientes:

- *Ejemplo discontinuo*: $F(e) = -K_{FT} \text{sign}(e)$, donde K_{FT} es una constante positiva prescrita.

La solución de (4.1) es

$$e(t) = \begin{cases} -K_{FT}t + e_0 & \text{si } e_0 > 0 \\ +K_{FT}t + e_0 & \text{si } e_0 < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Para un parámetro dado K_{FT} , el tiempo de convergencia T_{FT} está dado por

$$T_{FT} = \frac{|e_0|}{K_{FT}} \quad (4.3)$$

Para las condiciones iniciales en un conjunto compacto dado $\Omega_e \subset \mathbb{R}$, el tiempo de convergencia máximo, denotado por T_{CT}^{\max} , está dado por

$$T_{FT}^{\max} = \max_{e_0 \in \Omega_e} \left(\frac{|e_0|}{K_{FT}} \right) \quad (4.4)$$

Además, T_{FT}^{\max} depende inversamente de K_{FT} ; es decir, a mayor valor de K_{FT} , menor el valor de T_{FT}^{\max} . De esta forma, el seguimiento de la dinámica del error (4.1) asegura la convergencia de la temperatura del reactor $T(t)$ a la temperatura de referencia $T_r(t)$ en un tiempo no mayor que T_{FT}^{\max} .

- *Ejemplo continuo:* $F(e) = -K_{FT} |e|^{-1/n}$, $n > 1$ y n impar. Por ejemplo, la solución de $\dot{e} = -K_{FT} |e|^{-1/3}$ son $e(t) = \text{sign}(e_0) \left[|x_0|^{1/3} - K_{FT} t/3 \right]^3$, si $0 < t < 3 |x_0|^{1/3} / K_{FT}$, y $e(t) = 0$ si $t \geq 3 |x_0|^{1/3} / K_{FT}$. Así, convergen en un tiempo finito al origen, con $T_{FT} = 3 |x_0|^{1/3} / K_{FT}$.

Para obtener la entrada de control que proporciona la dinámica del error (4.1), notamos que la dinámica deseada de temperatura se escribe como

$$\dot{T} = F(e) + \dot{T}_r \quad (4.5)$$

Igualando la dinámica actual del reactor (3.1) a la deseada (4.5) obtenemos la función exacta del controlador retroalimentado $\phi^{ex}(c, T, t)$ dado por Kravaris y Chung (1987)

$$u = \phi^{ex}(c, T, t) \stackrel{def}{=} T + \left[\dot{T}_r - H^T r(c, T) + F(e) \right] / \gamma(c, T, t) \quad (4.6)$$

Donde $u = \phi^{ex}(c, T, t)$ es usada en (3.1), y la correspondiente dinámica de lazo cerrado del reactor por lotes es

$$\begin{aligned} \dot{c} &= Er(c, T) \\ \dot{T} &= F(e) + \dot{T}_r \end{aligned}$$

La estabilidad de la dinámica del error (4.1) asegura que $T(t) \rightarrow T_r(t)$. Una vez que la convergencia de temperatura se ha llevado a cabo, la concentración dinámica se gobierna por el sistema

$$\dot{c} = Er(c, T) \quad (4.7)$$

Suponiendo que la trayectoria $T_r(t)$ está uniformemente limitada para todo $t \geq 0$. Puesto que $r(c, T)$ es una función suave en sus argumentos, esto implica que $Er(c(t), T_r(t))$ está uniformemente limitada para todo $t \geq 0$. De los argumentos anteriores, se concluye que el control retroalimentado exacto $u = \phi^{ex}(c, T, t)$ garantiza el seguimiento a tiempo finito de la trayectoria de temperatura de referencia $T_r(t)$ con estabilidad completa del controlador del reactor por lotes (es decir, todos los estados del controlador del reactor permanecen uniformemente limitados).

4.3 Diseño de un Controlador Retroalimentado Robusto

Desafortunadamente, la entrada de un controlador retroalimentado exacto $u = \phi^{ex}(c, T, t)$ no puede ser implementada como suposición por la falta de mediciones de concentración e incertidumbres en las funciones $r(c, T)$ y $\gamma(c, T, t)$. Para superar este problema, un controlador retroalimentado robusto semejante en la estructura al controlador retroalimentado exacto $u = \phi^{ex}(c, T, t)$ será diseñado a continuación.

Sea $\bar{\gamma}(T, t) > 0$ un estimado del parámetro de transferencia de calor $\gamma(T, t)$. Nótese que $\bar{\gamma}(T, t)$ depende sólo de la temperatura y el tiempo. En particular, $\bar{\gamma}(T, t)$ puede ser una *constante* positiva reflejando un valor medio de tiempo de la función del parámetro actual de transferencia de calor $\gamma(T, t)$. Puesto que c no está disponible para medición y $r(c, T)$ es una función de incertidumbre, considerando el peor caso de diseño de control, se asume que la reacción cinética $r(c, T)$ es desconocida. Se presenta la función del error de modelado $\eta(c, T, u, t)$ como sigue:

$$\eta(c, T, u, t) \stackrel{def}{=} H^T r(c, T) + \Delta\gamma(c, T, t)(u - T) \quad (4.8)$$

donde $\Delta\gamma(c, T, t) = \gamma(c, T, t) - \bar{\gamma}(T, t)$. La dinámica de temperatura del reactor puede ser descrito como

$$\dot{T} = \eta(c, T, u, t) + \bar{\gamma}(T, t)(u - T) \quad (4.9)$$

Igualando la dinámica (4.9) a la temperatura de la dinámica deseada (4.5), la correspondiente entrada de control de dinámica inversa es (Kravaris y Chung, 1987)

$$\begin{aligned}
u &= \varphi(\eta(c, T, u, t), T, t) \\
&\stackrel{def}{=} T + \left[\dot{T}_r - \eta(c, T, u, t) + F(e) \right] / \bar{\gamma}(T, t)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Nótese que la entrada de control (4.10) esta implícitamente definida en el sentido que u depende de sí misma, puesto que el $\gamma(c, T, t)$ está limitado lejos de cero, la igualdad $u = \varphi(\eta(c, T, u, t), T, t)$ puede ser fácilmente solucionada para u , para obtener que $u = \phi^{ex}(c, T, t)$. Esto es, la igualdad

$$\phi^{ex}(c, T, t) = \varphi(\eta(c, T, \phi^{ex}(c, T, t), t), T, t) \tag{4.11}$$

se satisface. De este modo, la entrada de control de dinámica inversa $u = \varphi(\eta(c, T, u, t), T, t)$ es una versión implícita de la función exacta de control retroalimentado $u = \phi^{ex}(c, T, t)$. Esta representación implica que la función exacta de dinámica inversa (4.6) será el punto de partida para la construcción del control robusto.

Puesto que la función del error de modelado $\eta(c, T, u, t)$ es desconocida, una versión práctica de la función retroalimentada implícita (4.10) y por consiguiente la función retroalimentada exacta $u = \phi^{ex}(c, T, t)$, es obtenida si un estimado $\bar{\eta}(t)$ de $\eta(c, T, u, t)$ puede ser proporcionado. Por lo tanto, el control retroalimentado práctico, denotado por $\varphi^{pr}(\bar{\eta}, T, t)$ llega a ser

$$\begin{aligned}
u &= \varphi^{pr}(\bar{\eta}, T, t) \\
&\stackrel{def}{=} T + \left[\dot{T}_r - \bar{\eta} + F(e) \right] / \bar{\gamma}(T, t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Dadas las mediciones de temperatura $\{T(t), u(t)\}$, la modelación de la señal de error $\eta(t) = \eta(c(t), T(t), u(t), t)$ puede ser obtenida via un balance calorimétrico (Jutan y Uppal, 1987; Schuler y Schmidt, 1992) en el reactor, dando la siguiente expresión:

$$\eta(t) = \dot{T} - \bar{\gamma}(T(t), t)(u(t) - T(t)) \tag{4.13}$$

La temperatura exacta de la derivada de T no puede ser obtenida puesto que su cálculo requiere información anticipada (es decir, es una operación no causal). De esta forma, el estimado $\bar{\eta}(t)$ puede ser obtenido si una estimación práctica (causal) de la derivada es proporcionada.

Para este fin, se usa el estimador de filtro base:

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1}(\eta - \bar{\eta}) \quad (4.14)$$

donde $\tau_e > 0$ es una constante de estimación. Nótese que, si $\bar{\eta}(0) = 0$, el estimador (4.14) puede ser escrito como

$$\bar{\eta}(s) = \frac{1}{\tau_e s + 1} \eta(s) \quad (4.15)$$

donde s es la variable de Laplace. Esto es, el estimado $\bar{\eta}(t)$ es una versión filtrada (pasa-bajo) de la señal actual $\eta(t)$. Para implementar el estimador (4.14), el balance calorimétrico (4.13) puede ser usado en (4.14) para obtener

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1} \left[\dot{T} - \bar{\gamma}(T, t)(u - T) - \bar{\eta} \right] \quad (4.16)$$

Ahora introducimos la variable $w \stackrel{def}{=} \tau_e \bar{\eta} - T$. Consecuentemente, el estimador (4.16) es equivalente al siguiente sistema:

$$\dot{w} = -\bar{\gamma}(T, t)(u - T) - \tau_e^{-1}(w + T), \quad w(0) = w_0 \quad (4.17)$$

donde la señal estimada es calculada de la siguiente forma

$$\bar{\eta} = \tau_e^{-1}(w + T) \quad (4.18)$$

Resumiendo, la propuesta del controlador retroalimentado está compuesta por la aproximación de la función de dinámica inversa $u = \varphi^{pr}(\bar{\eta}, T, t)$ dada por (4.12), y el estimador del error de modelado (4.17),(4.18); es decir

$$\begin{aligned} u &= T + \left[T_r - \bar{\eta} + F(e) \right] / \bar{\gamma}(T, t) \\ \dot{w} &= -\bar{\gamma}(T, t)(u - T) - \tau_e^{-1}(w + T), \quad w(0) = w_0 \\ \bar{\eta} &= \tau_e^{-1}(w + T) \end{aligned}$$

De (4.15), conocemos que $\bar{\eta}(s) \rightarrow \eta(s)$ a medida que $\tau_e \rightarrow 0$. Esto es, el valor más pequeño de la constante de tiempo de estimación, da la mayor rapidez de convergencia para el estimado de la señal del error de modelado $\bar{\eta}(t)$ al actual $\eta(t)$. Como $\bar{\eta}(t)$ converge a $\eta(t)$, la función retroalimentada práctica $\varphi^{pr}(\bar{\eta}, T, t)$ también converge a la dinámica inversa $\varphi(\eta(c, T, u, t), T, t)$. Por otra parte, puesto que $\varphi(\eta(c, T, u, t), T, t)$ es una versión implícita de la función retroalimentada exacta $\phi^{ex}(c, T, t)$ se concluye que el controlador retroalimentado práctico dado por (4.12), (4.17), y (4.18) converge y recobra el funcionamiento del controlador retroalimentado exacto $\phi^{ex}(c, T, t)$ a medida que $\tau_e \rightarrow 0$. Este es un interesante efecto que será explotado para proporcionar guías de sintonizado fáciles de usar.

Finalmente, presentamos algunos comentarios en la implementación del controlador propuesto:

- a) Si el coeficiente de calor $\gamma(c, T, t)$ es conocido, la función del error de modelado $\eta(c, T, u, t)$ es exactamente el calor liberado por la reacción $H^T r(c, T)$. En este caso, la estimación del error de modelado (4.17), (4.18) puede ser vista como una continuación de la versión del estimador de tiempo discreto propuesto por Cott y Macchieto (1989).
- b) Las funciones retroalimentadas discontinuas $F(e)$ tales como $K_{FT} \text{sign}(e)$ puede inducir efectos indeseables en el lazo de control, tales como la oscilación en la entrada de control. Estos problemas se reducen si se usa una aproximación continua de la función sign , puesto que $\text{sign}(T - T_r) \approx \tanh(\alpha(T - T_r))$. Y en el límite $\alpha \rightarrow 0$, la función $\tanh(\alpha(T - T_r))$ converge uniformemente a la función sign .
- c) Los reactores por lotes industriales están equipados con chaquetas o serpentines, por lo que la variable actual manipulada es la cantidad de flujo del fluido enfriante o de calentamiento. Bajo esta situación, el controlador de temperatura se puede implementar en una configuración cascada donde el controlador propuesto (4.12), (4.17) y (4.18) será el controlador maestro el cual proporciona la temperatura de referencia de la chaqueta para el controlador esclavo (Russo y Bequette, 1997; Tyner y Soroush, 1999). De esta forma, el controlador esclavo manipula la cantidad de flujo del fluido enfriante o de calentamiento para llevar a cabo el funcionamiento pedido por el controlador maestro (propuesto en este trabajo).
- d) Las mediciones de temperatura comúnmente contiene ruido dinámico. Puesto que el estimador de balance calorimétrico (4.17), (4.18) debe ser de naturaleza de alta ganancia, la función retroalimentada discontinua semejante a $\text{sign}(T - T_r)$ puede producir oscilación, y por lo tanto una gran acción de control (alta frecuencia). Este efecto adverso puede reducirse con un prefiltra-

miento de la medición de temperatura para remover los componentes de alta frecuencia. Otra aproximación puede ser el uso de filtros pasa-bajo en la salida del controlador como sigue:

$$u_f = \frac{1}{\tau_f s + 1} u$$

donde u_f es la entrada de control filtrado y τ_f es la constante de tiempo del filtro. Donde τ_f es grande, y el cambio abrupto en u puede ser prevenido. Sin embargo, si τ_f es demasiado pequeña, la diferencia entre u y u_f puede llegar a ser demasiado grande y la desviación del comportamiento del sistema de convergencia finita más pronunciado. Como una regla heurística, se sugiere que τ_f no sea más grande que el tiempo de convergencia prescrito T_{FT} .

- e) En este trabajo, por simplicidad en la presentación, se ha restringido a reactores por lotes. Sin embargo, el propósito de la metodología de diseño de control robusto puede ser fácilmente extendida a lo largo de la misma línea a reactores químicos semi-lotes.

4.4 Estructura de Control

El control retroalimentado propuesto (4.12),(4.13),(4.18) despliega una interesante estructura, la cual puede ser interpretada como un tipo de controlador PI no lineal equipado con un esquema de anti-reajuste excesivo (*antireset windup* ARW). Puesto que la magnitudes restringidas en la entrada de control están siempre presentes en la situación práctica, $u_c = \varphi^{pr}(\bar{\eta}, T, t)$ será la entrada de control *calculada*, y $u = \text{Sat}(u_c; u_{\min}, u_{\max})$ será la entrada de control actual, es decir,

$$u = \begin{cases} u_{\min} & \text{si } u_c \leq u_{\min} \\ u_c & \text{si } u_{\min} < u_c < u_{\max} \\ u_{\max} & \text{si } u_c \geq u_{\max} \end{cases}$$

donde u_{\max} y u_{\min} son respectivamente los límites de entrada de control máxima y mínima. La ecuación (4.16) puede ser reescrita como

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1} \left[\dot{T} - \bar{\gamma}(T, t)(u_c - T) - \bar{\eta} - \bar{\gamma}(T, t)(u - u_c) \right]$$

en la cual, cuando $u_c = \varphi^{pr}(\bar{\eta}, T, t)$ es usada, la ecuación se vuelve

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1} \left[\dot{T} - \dot{T}_r - F(e) - \bar{\gamma}(T, t)(u - u_c) \right]$$

Recordando que $e = T - T_r$, una integración directa de las anteriores ecuaciones nos da

$$\bar{\eta}(t) = \tau_e^{-1} e - e_0 - \int_0^t F(e(\sigma)) d\sigma - \int_0^t \bar{\gamma}(T(\sigma), \sigma) [u(\sigma) - u_c(\sigma)] d\sigma \quad (4.20)$$

donde σ es una variable de integración simulada. La ecuación (4.20) puede ser usada en (4.12) para obtener la siguiente expresión del cálculo de la entrada de control:

$$u_c = \underbrace{\psi(T, T_r, t)}_{\text{Término de precompensación}} - \underbrace{K_{LP} e}_{\text{Acción proporcional lineal}} - \underbrace{K_{NPF}(e)}_{\text{Acción proporcional no lineal}} - \underbrace{K_{NI} \int_0^t F(e(\sigma)) d\sigma}_{\text{Acción integral no lineal}} + \underbrace{K_{ARW} \int_0^t \bar{\gamma}(T(\sigma), \sigma) [u(\sigma) - u_c(\sigma)] d\sigma}_{\text{Esquema de ARW}} \quad (4.21)$$

donde el término de precompensación está dado por

$$\psi(T, T_r, t) = \left[\bar{\gamma}(T, t)T + \dot{T}_r - \tau_e^{-1} e_0 \right] / \bar{\gamma}(T, t) \quad (4.22)$$

y las ganancias proporcional lineal K_{LP} , proporcional no lineal K_{NPF} e integral no lineal K_{NI} están dadas por

$$\begin{aligned} K_{LP} &= \bar{\gamma}(T, t)^{-1} \tau_e^{-1} \\ K_{NPF} &= -\bar{\gamma}(T, t)^{-1} \\ K_{NI} &= -\bar{\gamma}(T, t)^{-1} \tau_e^{-1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

El ARW de la ganancia K_{ARW} está dado por

$$K_{ARW} = \bar{\gamma}(T, t)^{-1} \tau_e^{-1} \quad (4.24)$$

Si el parámetro estimado de transferencia de calor $\bar{\gamma}(T, t)$ es constante, es decir $\bar{\gamma}$ el esquema de

ARW reduce simplemente a

$$K_{ARW} \int_0^t [u(\sigma) - u_c(\sigma)] d\sigma$$

con

$$K_{ARW} = \tau_e^{-1}$$

Los cálculos anteriores muestran que el controlador retroalimentado propuesto es un tipo de control PI no lineal dotado con un esquema natural de **ARW** de naturaleza retroalimentada. De este modo, cuando la entrada de control está saturada, la señal retroalimentada $K_{ARW} \int_0^t \bar{\gamma}(T(\sigma), \sigma)[u(\sigma) - u_c(\sigma)] d\sigma$ conduce el error $u - u_c$ a cero recalculando u_c , ya que la salida del controlador alcanza exactamente el límite de saturación. Esto previene al controlador de un sobrepaso (Kothare *et al.*, 1994). Cuando la entrada de control no está saturada, $u = u_c$ y la acción **ARW** no tiene efectos en el lazo de control.

Nótese que la acción integral $\int_0^t F(e(\sigma))d\sigma$ es causada por la estimación del error de modelado (4.17),(4.18). Esta acción integral no lineal presenta la capacidad de robustez de la retroalimentación propuesta por la reacción cinética desconocida y la incertidumbre de los parámetros de transferencia de calor. De esta forma, otra acción integral, como la hecha por Cott y Macchietto (1989), sería redundante en el sentido que no adiciona nuevas estructuras dentro del controlador retroalimentado. Esto puede ser visto si un modelo de convergencia asintótica con $\dot{e} = K_{AT}e$ es usado en vez de uno de convergencia finita $\dot{e} = F(e)$. Puede mostrarse que el correspondiente controlador es equivalente a un controlador PI lineal (Alvarez-Ramírez *et al.*, 1998), donde la acción integral tradicional es inducida por el correspondiente estimador de balance calorimétrico.

4.5 Guías de Sintonizado

La propiedad de convergencia en tiempo finito del controlador retroalimentado $u = \phi^{ex}(c, T, t)$, y la configuración de estimación del balance calorimétrico sugiere que la sintonización del sistema de control de temperatura del reactor por lotes procede según los siguientes pasos:

- a) Determinar el valor de la función $F(e)$ hasta un punto donde una respuesta nominal satisfactoria sea obtenida. Por ejemplo, si $F(e) = \text{sign}(e)$ da un conjunto nominal Ω de condiciones iniciales, se opta por la ganancia K_{FT} del Modelo de Control Genérico, tal que el tiempo de convergencia máximo T_{CT}^{\max} (ver ecuación (4.4)) no sea más grande que el prescrito.

- b) Optar por un valor suficientemente pequeño de la constante de estimación τ_e tal que la convergencia $\bar{\eta}(t) \rightarrow \eta(t)$ sea más rápida que el tiempo de convergencia nominal T_{CT}^{\max} . La regla $\tau_e < 0.2 T_{CT}^{\max}$ es sugerida.

Una importante ventaja de la configuración de control propuesta es que su sintonizado puede ser hecho en dos pasos: en el primero, el comportamiento de la entrada/salida nominal de lazo cerrado es especificada via la selección de $F(e)$; en el segundo paso, la sintonización del control depende sólo de un parámetro τ_e . Por consiguiente, un valor pequeño de τ_e , aproximará el comportamiento del controlador de temperatura al inducido por el controlador retroalimentado exacto de dinámica inversa (4.6). Mientras estas guías de sintonizado sean claramente recordadas en la práctica, los siguientes comentarios serán ordenados.

- 1) Contrariamente a lo que sucede en las configuraciones estándar de PI, con adopción de la configuración propuesta de PI, el aprovechamiento del funcionamiento (via la selección de la función $F(e)$) puede ahora ser visto como un desacoplamiento de las modificaciones requeridas para la reducción de sensibilidad (via la sintonización para la estimación de la constante de tiempo) y *viceversa*.
- 2) La sintonización para la constante de tiempo de estimación τ_e es particularmente fácil de llevar a cabo en vista de lo hecho, hasta el punto donde la influencia de la dinámica no modelada y ruido medido ya no sea insignificante, y la función es mejorada monotónicamente con τ_e^{-1} .

Capítulo 5

CONTROL CASCADA

Resumen

En este capítulo se presenta los conceptos necesarios de estructura en cascada aplicados al diseño de un sistema de control. La organización del capítulo se llevó a cabo de la siguiente manera: en una primera sección se muestran los conceptos fundamentales que se aplican en el desarrollo de una estructura en cascada, así como la diferencia entre un control cascada en serie y en paralelo y las características más importantes de este tipo de sistemas. Posteriormente, se muestra el modelo desarrollado para el reactor por lotes especificando las características del controlador de composición que actuará como controlador maestro y el controlador de temperatura el cual actuará como control esclavo.

5.1 Introducción

Uno de los conceptos más utilizados en la industria es el control cascada, su estructura está formada por dos controladores retroalimentados (Luyben, 1990), en el cual la salida del controlador primario (o maestro) modifica el punto de referencia del controlador secundario (o esclavo).

El control cascada tiene dos propósitos principales: (1) eliminar los efectos de algunas perturbaciones, y (2) aprovechar el funcionamiento dinámico del lazo de control.

Para ilustrar los efectos de rechazo en las perturbaciones, consideremos el rehervidor de la columna de destilación mostrado en la Figura 5-1a. Supongamos que la presión de suministro de vapor aumenta. La presión sobre la válvula de control es grande, así que el flujo de vapor se incrementará. Con un controlador de temperatura simple, no habrá corrección hasta que la alta presión del flujo de vapor, incremente el contenido de los fondos y la temperatura del plato en el cual se está realizando la medición aumente. Por lo que el sistema es perturbado por un aumento en la presión de vapor.

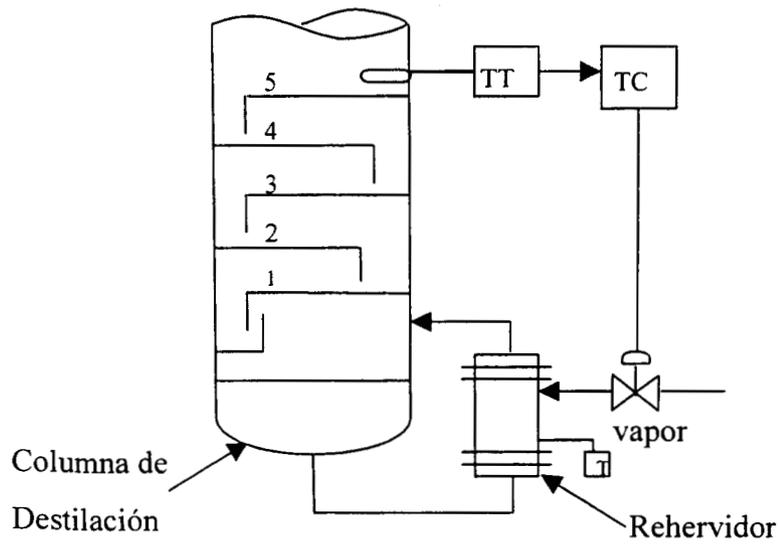
Con el sistema de control cascada, el controlador de flujo de vapor inmediatamente observará el incremento en el flujo de vapor y hará que la válvula de vapor se accione para retornar el flujo de vapor hasta el punto de referencia. Por lo tanto el rehervidor y la columna se verán mínimamente afectados por la perturbación en el suministro de vapor.

En la Figura 5-1b se muestra otro sistema en donde el control cascada es comúnmente usado. El controlador de temperatura en el reactor se considera como primario; mientras que el controlador de la temperatura en la chaqueta será el secundario. El control de la temperatura en el reactor elimina las perturbaciones en la temperatura de entrada del agua de enfriamiento y en el suministro de vapor debido a la incorporación del sistema en cascada.

Este sistema además permite ilustrar el mejoramiento en el funcionamiento dinámico que el control cascada puede proporcionar para algunos sistemas. La constante de tiempo de lazo cerrado de la temperatura del reactor será mas pequeña cuando el sistema en cascada sea usado, que cuando el tiempo característico generado por una estructura simple de control, genere la acción de control directamente sobre la válvula de admisión de refrigerante.

Los dos sistemas estudiados anteriormente son sistemas cascada en serie porque la variable manipulada afecta a la variable de control secundaria, y ésta a su vez afecta a la variable primaria. En un sistema cascada en paralelo la variable manipulada afecta directamente a la variable de control en el lazo primario y a la variable de control del lazo secundario. Por lo tanto, los dos procesos son básicamente diferentes resultando también características dinámicas diferentes.

Lazo simple convencional



Lazo de control cascada

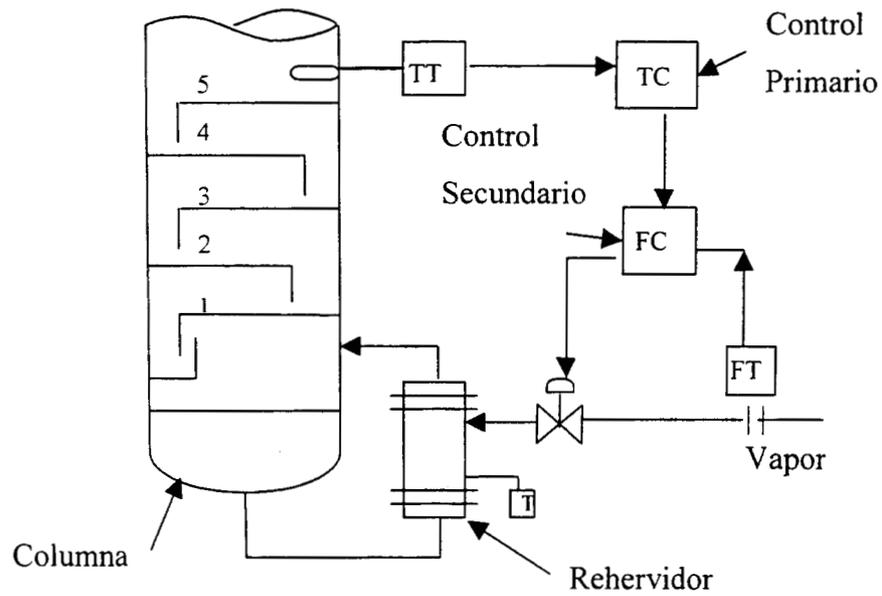
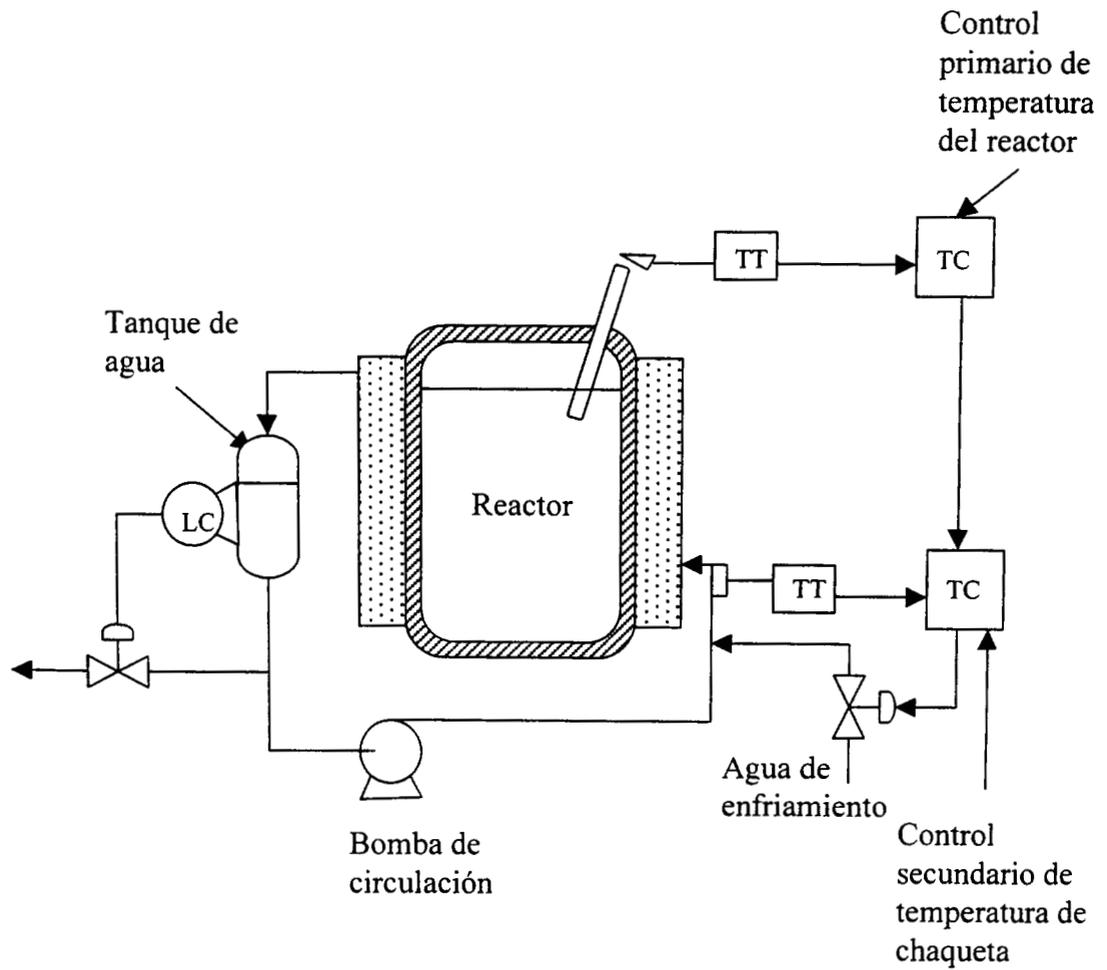


Figura 5-1 a. Control de Temperatura en una Columna de Destilación.



TT = Transmisor de Temperatura
 TC = Controlador de Temperatura
 LC = Controlador de Nivel

Figura 5-1b. Control de Temperatura de un CSTR.

De lo anterior se observa que existen dos tipos de estructuras que se pueden aplicar al control cascada. Si la variable manipulada afecta una variable, y esa variable afecta una segunda variable controlada, la estructura se denomina control cascada en *serie*. Si la variable manipulada afecta a ambas variables directamente, la estructura se denomina control en *paralelo* (Luyben, 1990).

5.2 Control Cascada en Serie

La Figura 5-2a muestra un proceso a lazo abierto en el cual dos funciones de transferencia G_1 y G_2 están conectadas en serie. La variable manipulada M entra a G_1 y produce un cambio en X_1 . La variable X_1 entonces entra a G_2 y cambia X_2 .

La Figura 5-2b muestra el sistema de control retroalimentado convencional, donde un simple controlador mide la variable controlada X_2 y cambia la variable manipulada M . La ecuación característica de lazo cerrado para este sistema se desarrolla de la siguiente manera

$$1 + G_{1(s)}G_{2(s)}B_{(s)} = 0 \quad (5.1)$$

La Figura 5-2c muestra un sistema de cascada en serie. Hay ahora dos controladores. El controlador secundario B_1 ajusta a M para controlar la variable secundaria X_1 . La señal de punto de control (*setpoint*) X_1^{set} para el controlador B_1 viene del controlador primario, es decir, la salida del controlador primario B_2 es el *setpoint* para el controlador B_1 . El punto de control del controlador B_2 es X_2^{set} .

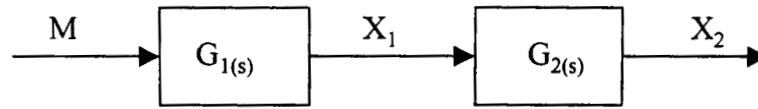
La ecuación característica de lazo cerrado para este sistema no es la misma que la dada en la ecuación (5.1). Para derivar cuál es, primero observemos el lazo secundario. La ecuación que describe este sistema de lazo cerrado es

$$X_1 = \frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} X_1^{set} \quad (5.2)$$

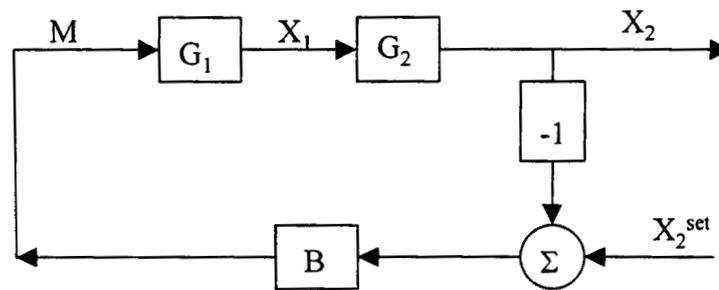
Así, para diseñar el controlador secundario B_1 usamos la característica de lazo cerrado

$$1 + G_1 B_1 = 0 \quad (5.3)$$

(a) Proceso a lazo abierto



(b) Control retroalimentado



(c) Cascada en serie

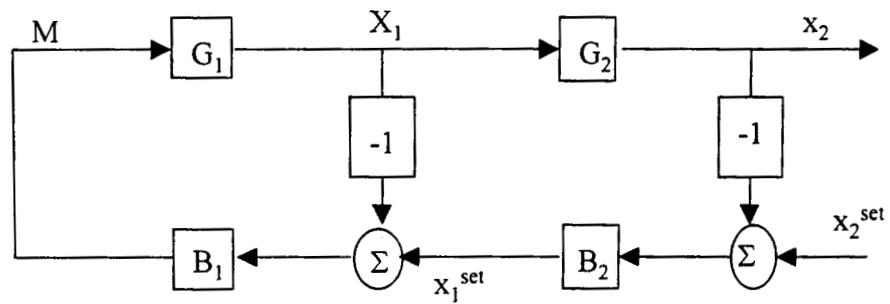


Figura 5-2. Cascada en Serie.

Observamos que la variable de salida controlada es X_2 . La Figura 5-2d muestra el diagrama de bloques reducido del sistema en la forma convencional. Podemos deducir la ecuación característica de lazo cerrado de este sistema por inspección.

$$1 + G_2 B_2 \left(\frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} \right) = 0 \quad (5.4)$$

Sin embargo, derivamos rigurosamente

$$X_2 = G_2 X_1 \quad (5.5)$$

Substituyendo para X_1 de la ecuación (11.2) tenemos

$$X_2 = G_2 \frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} X_1^{set} \quad (5.6)$$

Pero X_1^{set} es la salida del controlador B_2 .

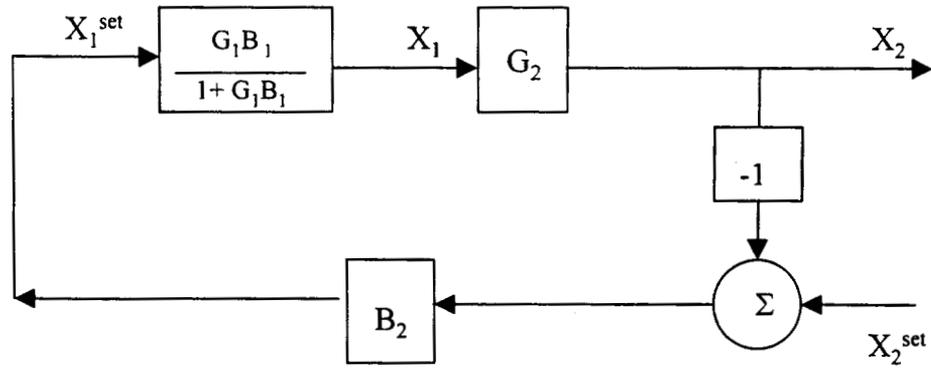
$$X_1^{set} = B_2 (X_2^{set} - X_2) \quad (5.7)$$

Combinando ecuaciones (5.6) y (5.7) tenemos

$$X_2 = G_2 \left(\frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} \right) B_2 (X_1^{set} - X_2)$$

$$X_2 \left[1 + G_2 B_2 \left(\frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} \right) \right] = G_2 B_2 \left(\frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} \right) X_2^{set}$$

(d) Diagrama de bloques



(e) Ejemplo

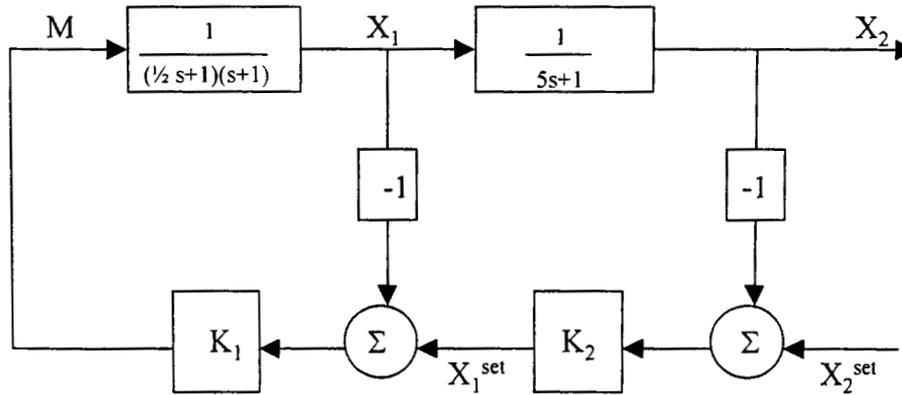


Figura 5-2. Cascada en Serie.

Rearreglando

$$X_2 = \frac{G_2 B_2 [G_1 B_1 / (1 + G_1 B_1)]}{1 + G_2 B_2 [G_1 B_1 / (1 + G_1 B_1)]} X_2^{set} \quad (5.8)$$

Así, en la ecuación (5.4) tenemos la ecuación característica de lazo cerrado de estos sistemas cascada en serie. Un pequeño rearrreglo adicional conduce a una forma equivalente de la ecuación (5.8).

$$X_2 = \frac{G_1 G_2 B_1 B_2}{1 + G_1 B_1 (1 + G_2 B_2)} X_2^{set} \quad (5.9)$$

Alternativamente, una ecuación característica de lazo cerrado equivalente es

$$1 + G_1 B_1 (1 + G_2 B_2) = 0 \quad (5.10)$$

Las raíces de esta ecuación dictarán la dinámica del sistema cascada en serie. Nótese que ambas funciones de transferencia de lazo abierto están implicadas como los controladores. La ecuación (5.4) es un poco más conveniente de usar que la ecuación (5.10) porque podemos plantear raíces locales, variando la ganancia del controlador B_2 , después que los parámetros del controlador B_2 han sido especificados.

Ejemplo. Consideremos el proceso de un sistema de control cascada en serie mostrado en la Figura 5-2e. El controlador secundario B_1 y el controlador secundario B_1 son proporcionales.

$$B_1 = K_1 \quad B_2 = K_2$$

En este ejemplo

$$G_1 = \frac{1}{(\frac{1}{2}s+1)(s+1)} \quad G_2 = \frac{1}{5s+1}$$

(a) *Control Convencional.* Primeramente observamos que un controlador proporcional simple (k_c) manipula M para controlar X_2^{set} . La ecuación característica de lazo cerrado es

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}s + 1\right)(s + 1)(5s + 1)} k_c = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{5}{2}s^3 + 8s^2 + \frac{13}{2}s + 1 + k_c = 0 \quad (5.12)$$

Resolviendo para la última ganancia y frecuencia, sustituimos iw por s .

$$\begin{aligned} -i\frac{5}{2}w^3 - 8w^2 + i\frac{13}{2}w + 1 + k_c &= 0 \\ [-8w^2 + 1 + k_c] + i\left[\frac{13}{2}w - \frac{5}{2}w^3\right] &= 0 + i0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Solucionando las dos ecuaciones simultáneamente, las dos incógnitas dadas son

$$k_u = \frac{99}{5} \quad \text{y} \quad w_u = \sqrt{\frac{13}{5}}$$

(b) *Diseño del lazo secundario (esclavo).* Se selecciona un coeficiente de amortiguamiento a lazo cerrado para el lazo secundario de 0.707 y se calcula el valor requerido de k_1 . La ecuación característica de lazo cerrado para el lazo esclavo es

$$1 + k_1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}s + 1\right)(s + 1)} = 0 = \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 1 + k_1 \quad (5.14)$$

Solucionando para el lazo cerrado las raíces están dadas por

$$s = -\frac{3}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{8k_1 - 1} \quad (5.15)$$

Para tener un coeficiente de amortiguamiento de 0.707 las raíces deben estar situadas dentro de una línea radial cuyo ángulo con la abscisa es $\cos^{-1} 0.707 = 45^\circ$. En esta línea la parte real y la imaginaria de las raíces son iguales. Así para un coeficiente de amortiguamiento de 0.707

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{8k_1 - 1} \Rightarrow k_1 = \frac{5}{4} \quad (5.16)$$

Ahora la relación entre el lazo cerrado X_1 y el X_2^{set} es

$$X_1 = \frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} X_1^{set} = \frac{[1 / (\frac{1}{2}s + 1)(s + 1)]^{\frac{5}{4}}}{1 + [[1 / (\frac{1}{2}s + 1)(s + 1)]^{\frac{5}{4}}]} X_1^{set} \quad (5.17)$$

$$X_1 = \frac{\frac{5}{2}}{s^2 + 3s + \frac{9}{2}} X_1^{set} \quad (5.18)$$

(c) *Diseño del lazo primario (maestro)*. La ecuación característica de lazo cerrado para el lazo maestro es

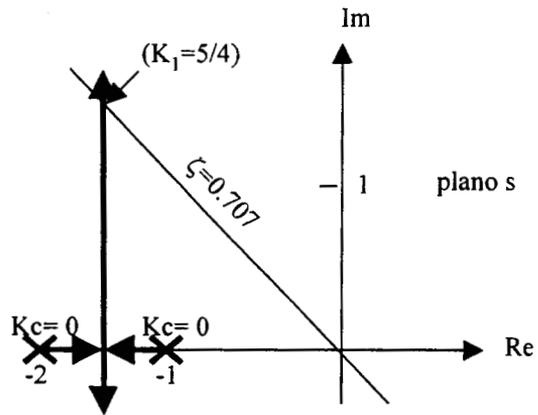
$$1 + G_2 B_2 \left(\frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} \right) = 1 + \frac{k_2}{5s + 1} \frac{\frac{5}{2}}{s^2 + 3s + \frac{9}{2}} = 0 \quad (5.19)$$

$$5s^3 + 16s^2 + \frac{51}{2}s + \frac{9}{2} + \frac{5}{2}k_2 = 0 \quad (5.20)$$

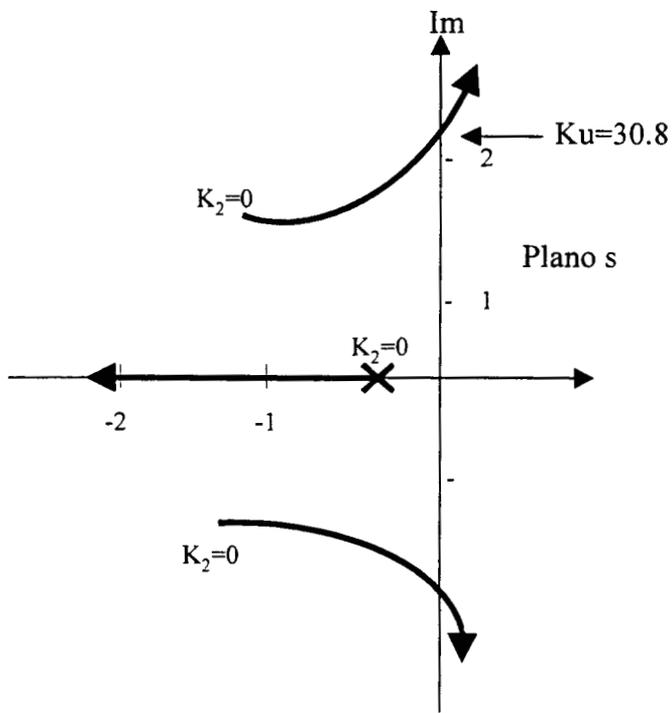
Si resolvemos para la última ganancia k_u y frecuencia w_u por sustitución de w_i de s obtenemos

$$k_u = 30.8 \quad w_u = \sqrt{5.1} = 2.26$$

Esto es útil para comparar estos valores con los obtenidos del control convencional; $k_u = 19.8$ y $w_u = 1.61$. Podemos ver que los resultados del control cascada tienen una mayor ganancia y una menor constante de tiempo (el recíproco de la frecuencia). La Figura 5-3b nos muestra una raíz local en el plano para el controlador primario con una ganancia de $\frac{5}{4}$ para el controlador secundario.



(a) Raíces locales para el lazo secundario



(b) Raíces locales para el lazo primario

Figura 5-3. Raíces locales.

5.3 Control Cascada en Paralelo

La Figura (5-4a) muestra un proceso donde la variable manipulada afecta las dos variables controladas X_1 y X_2 en paralelo. Un ejemplo importante es en el control de columnas de destilación, donde el reflujo afecta a la composición del destilado y la temperatura de las bandejas. Los procesos tienen una estructura en paralelo y esto conduce al sistema de control cascada en paralelo.

Si se usa sólo un controlador simple B_2 para controlar X_2 por manipulación de M y la ecuación característica de lazo cerrado es la convencional

$$1 + G_{2(s)}B_{2(s)} = 0 \quad (5.21)$$

Sin embargo, si un sistema de control cascada es usado, como el diagrama de la Figura 5-4b, la ecuación característica de lazo cerrado no está dada por la ecuación (5.21). Para derivarlo, empecemos con el lazo secundario

$$X_1 = G_1 M = G_1 B_1 (X_1^{set} - X_1) \quad (5.22)$$

$$X_1 = \frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} X_1^{set} \quad (5.23)$$

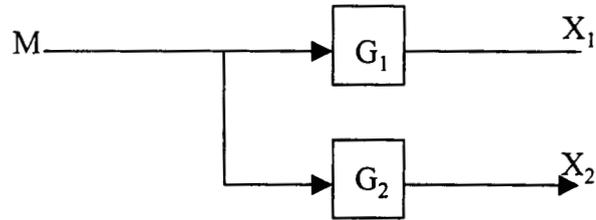
Combinando las ecuaciones (5.22) y (5.23) tenemos la relación del lazo cerrado entre M y X_1^{set}

$$M = \frac{1}{G_1} X_1 = \frac{1}{G_1} \frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} X_1^{set} = \frac{B_1}{1 + G_1 B_1} X_1^{set} \quad (5.24)$$

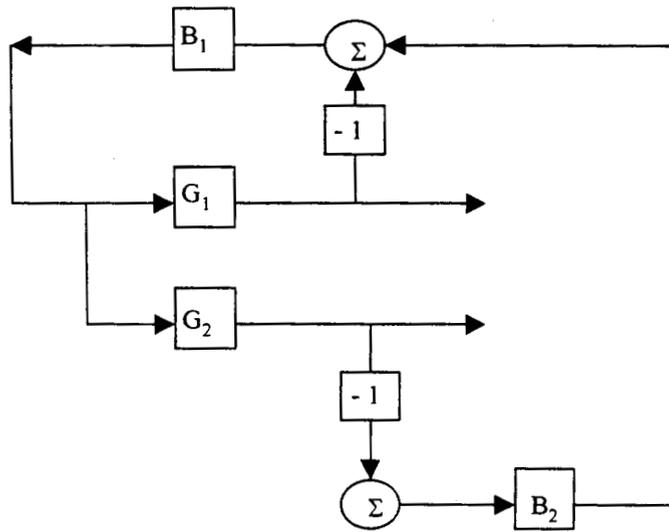
Ahora solucionamos para el lazo cerrado la función de transferencia para el lazo primario con el lazo secundario en automático. La Figura 5-4c muestra el diagrama de bloques simplificado. Por inspección podemos ver que la ecuación característica de lazo cerrado es

$$1 + G_2 B_2 \left(\frac{G_1 B_1}{1 + G_1 B_1} \right) = 0 \quad (5.25)$$

(a) Proceso a lazo abierto



(b) Control cascada en paralelo



(c) Diagrama de bloques

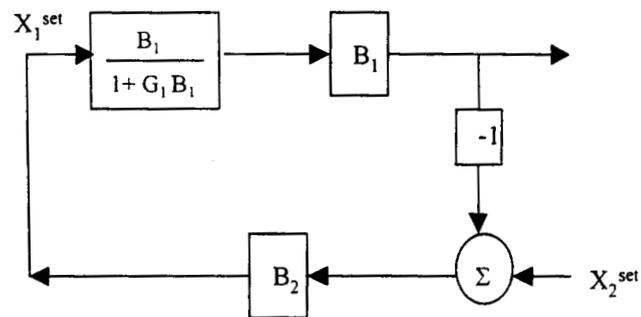


Figura 5-4. Control Cascada en Paralelo.

Nótese la diferencia entre las ecuaciones características de control cascada en serie [ecuación (5.4)] y el cascada en paralelo [ecuación (5.25)].

5.4 Diseño de Control Retroalimentado para el Reactor por Lotes utilizando Configuración en Cascada

Como se menciona anteriormente el comportamiento de una de las configuraciones en cascada ocurre cuando dos controladores operan en serie. Para el caso de un reactor por lotes en el cual el controlador de composición es el control maestro, la temperatura de salida se convierte en el valor de referencia del controlador de temperatura ó control esclavo (Luyben, 1990). El propósito del control esclavo entonces será corregir las perturbaciones, antes de que éstas afecten el sistema maestro.

De este modo, basándonos en ideas de estimación base y compensación del error de modelado no lineal (Alvarez-Ramírez *et al.*, 1998), de manera similar a como fué planteado el diseño de control para el caso de estabilización a tiempo finito en un reactor por lotes, se procede al diseño del control retroalimentado utilizando una configuración en cascada, utilizando un controlador de composición que actúa como lazo maestro y un controlador de temperatura que actúa como lazo esclavo.

La función del error de modelado η se presenta de la siguiente forma

$$\eta = \dot{e} - \Delta kpT \quad (5.26)$$

en donde $\Delta kp = kp - \overline{kp}$ y el valor de η es desconocido.

La dinámica de concentración del reactor puede ser descrita como

$$\dot{e} = \eta - \overline{kp}T \quad (5.27)$$

mientras que el comportamiento de concentración esperado será de la siguiente forma

$$\dot{e} = -\tau_c^{-1}e \quad (5.28)$$

en donde, para garantizar una convergencia asintótica el valor de la constante de tiempo a lazo cerrado debe ser $\tau_c > 0$.

Puesto que la solución del error $e(t) = \exp(-\tau_c/t)e(0)$, y por lo tanto en el $\lim e(t) = 0$, cuando

$t \rightarrow 0$. De esta forma, igualando las ecuaciones (5.27) y (5.28), la dinámica de la entrada de control es

$$T^{id} = [-\eta - \tau_c^{-1}e] / \overline{kp}$$

Sin embargo dado que la función η es desconocida, y depende del valor de T resulta necesario para la solución de esta ecuación, un procedimiento de estimación que permita obtener un valor aproximado de la temperatura, mediante un estimado $\bar{\eta}$ el cual no depende de la temperatura y que se convertirá en el punto de referencia para el controlador esclavo que posteriormente será descrito. Por lo tanto nuestra ecuación toma la forma

$$T^{ref} = [-\bar{\eta} - \tau_c^{-1}e] / \overline{kp} \quad (5.29)$$

El valor estimado $\bar{\eta}$ puede ser obtenido como se mencionó en el planteamiento del diseño de control a tiempo finito, mediante la derivada del estimado, para lo cual se usa un estimador de filtro

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1}(\eta - \bar{\eta}) \quad (5.30)$$

donde $\tau_e > 0$ es una constante de tiempo de estimación. Si $\bar{\eta}(0) = 0$, el estimador puede ser escrito como

$$\bar{\eta}(s) = \frac{1}{\tau_e s + 1} \eta(s)$$

donde s es la variable de Laplace. Esto es, el estimado $\bar{\eta}(t)$ es una versión de filtro pasa-bajo de la señal actual de $\eta(t)$. Para implementar el estimador, se puede hacer uso del balance de composición para obtener

$$\dot{\bar{\eta}} = [\dot{e} - \overline{kp}T^{ref} - \bar{\eta}] / \tau_e \quad (5.31)$$

En este momento se introduce la variable $w \stackrel{def}{=} \tau_e \bar{\eta} - e$.

En consecuencia el estimador anterior es equivalente al siguiente sistema

$$\dot{w} = -\bar{\eta} - \bar{kp}T^{ref} \quad (5.32)$$

en donde $w(0) = w_0$. Por lo tanto, la señal estimada es calculada de la siguiente manera

$$\bar{\eta} = \tau_e^{-1}(w + e) \quad (5.33)$$

Por lo tanto, el controlador maestro para una estructura en cascada se presenta de manera resumida mediante las ecuaciones (5.29), (5.32) y (5.33)

$$\begin{aligned} T^{ref} &= [-\bar{\eta} - \tau_c^{-1}e] / \bar{kp} \\ \dot{w} &= -\bar{\eta} - \bar{kp}T^{ref} \\ \bar{\eta} &= \tau_e^{-1}(w + e) \end{aligned}$$

Para el diseño del control esclavo, en el cual se pretende realizar el control de temperatura de forma tal que permita evitar perturbaciones antes de que estas afecten el lazo maestro, el desarrollo se efectúa de forma similar al presentado anteriormente por lo que el planteamiento se hará de manera resumida.

La función del error de modelado está dada por

$$\eta \stackrel{def}{=} H^T r(c, T) + \Delta\gamma(c, T, t)(u - T) \quad (5.34)$$

donde $\Delta\gamma(c, T, t) = \gamma(c, T, t) - \bar{\gamma}(T, t)$. La dinámica de temperatura del reactor es descrita como

$$\dot{e} = \eta(c, T, u, t) + \bar{\gamma}(T, t)(u - T) \quad (5.35)$$

La dinámica deseada de la temperatura es mostrada por la siguiente ecuación

$$\dot{e} = -\tau_c^{-1}e \quad (5.36)$$

en donde el valor de $\tau_c > 0$. Por lo que igualando la ecuaciones (5.35) y (5.36) es posible obtener la correspondiente dinámica de control

$$u = T^{ref} - [\bar{\eta} + \tau_c e] / \bar{\gamma}(T, t) \quad (5.37)$$

Para obtener el valor de u resulta necesario, como se ha visto anteriormente, la introducción del estimado $\bar{\eta}(t)$ mediante su derivada, como a continuación se muestra

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1}(\eta - \bar{\eta}) \quad (5.38)$$

Por lo tanto mediante la implementación del estimador y el balance carolimétrico se obtiene

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1} [\dot{e} - \bar{\gamma}(T, t)(u - T) - \bar{\eta}] \quad (5.39)$$

Introduciendo la variable $w \stackrel{def}{=} \tau_e \bar{\eta} - e$. Por lo tanto, la ecuación (5.39) será equivalente al siguiente sistema

$$\dot{w} = -\bar{\gamma}(T, t)(u - T) - \tau_e^{-1}(w + T), w(0) = w_0 \quad (5.40)$$

y la señal estimada será calculada de la siguiente forma

$$\bar{\eta} = \tau_e^{-1}(w + T) \quad (5.41)$$

Por lo tanto, las ecuaciones que plantean la estructura del control esclavo se resumen a continuación

$$\begin{aligned} u &= T^{ref} - [\bar{\eta} + \tau_c e] / \bar{\gamma}(T, t) \\ \dot{w} &= -\bar{\gamma}(T, t)(u - T) - \tau_e^{-1}(w + T), w(0) = w_0 \\ \bar{\eta} &= \tau_e^{-1}(w + T) \end{aligned}$$

En donde $\bar{\eta}(s) \rightarrow \eta(s)$ a medida que $\tau_e \rightarrow 0$. Es decir, para valores más pequeños de la constante de tiempo de estimación, la convergencia de la señal del error de modelado estimado $\bar{\eta}(t)$ a la actual $\eta(t)$ ocurre de manera más rápida.

Capítulo 6

CASOS DE ESTUDIO

Resumen

Dentro de este capítulo se presentan las simulaciones numéricas aplicadas a dos casos de estudio, con el objetivo de analizar el comportamiento de las estrategias de control planteadas en los capítulos anteriores, lo cual permitirá conocer el alcance y limitaciones que los controladores muestren durante su funcionamiento ante casos prácticos. Los sistemas a analizar corresponden al seguimiento de temperatura de un reactor por lotes en el que se está efectuando una reacción consecutiva, mientras que en el segundo caso se estudia una reacción de pirólisis, en la cual mediante una estructura en cascada se hace un control de composición para el reactor. Ambos sistemas ya han sido estudiados por diversos autores para la optimización de sistemas de control en reactores por lotes.

6.1 Simulación Numérica para el Caso de Estabilización a Tiempo Finito

6.1.1 Reacción Consecutiva

Para ilustrar el funcionamiento de la propuesta de controlador retroalimentado robusto, consideremos la reacción química exotérmica consecutiva $A \rightarrow B \rightarrow C$ en un reactor por lotes, que fue considerada por Marroquin y Luyben (1987). Cada paso de la reacción se supone que es de primer orden:

$$r(c, T) = \begin{pmatrix} r_1(c, T) \\ r_2(c, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 c_1 \\ k_1 c_1 - k_2 c_2 \end{pmatrix}$$

donde c_1 y c_2 son respectivamente las concentraciones (mol/l) del reactivo A y el producto deseado B. Las constantes de velocidad están dadas por

$$k_1 = 5.35 \times 10^{10} \exp\left(\frac{-9000}{T}\right) \text{ min}^{-1}$$

y

$$k_2 = 4.61 \times 10^{17} \exp\left(\frac{-15000}{T}\right) \text{ min}^{-1}$$

Para el balance de energía, los parámetros son $H_1 = 18.9 \text{ m}^3\text{K/mol}$, $H_2 = 12.65 \text{ m}^3\text{K/mol}$, y $\gamma(c, T, t) = 200.0 \text{ min}^{-1}$. El tiempo de residencia es especificado como $T_f = 30 \text{ min}$.

a) *Estrategia a Temperatura Constante.* Para demostrar la versatilidad y generalidad de la propuesta del esquema de control, consideremos el caso de un sistema de temperatura constante con $T_r = 330 \text{ K}$. Las condiciones iniciales son $c_1(0) = 0.95$, $c_2(0) = 0.05$, y $T(0) = 310 \text{ K}$. El tiempo de convergencia deseado es $T_{CT} = 5 \text{ min}$. El error discontinuo de la función $F(e) = K_{FT} \text{sign}(e)$ fue implementado via la aproximación de $\tanh(\alpha e)$, $\alpha > 5$. Puesto que $|e(0)| = 20$, $K_{FT} = 4 \text{ K/min}$ es seleccionado (ver ecuación (4.3)). Los límites de la entrada de control son $u_{\min} = 300 \text{ K}$ y $u_{\max} = 400 \text{ K}$. La Figura 6-1 presenta el funcionamiento del control para tres diferentes valores de la constante de tiempo de estimación τ_e . Por comparación, el funcionamiento del controlador retroalimentado exacto (de dinámica inversa) $u = \phi^{ex}(c, T, t)$ está mostrado también. Como se esperaba, el más pequeño valor de τ_e , aproximará el funcionamiento del control al del controlador retroalimentado exacto de dinámica inversa ecuación (4.6). De este modo, el tiempo

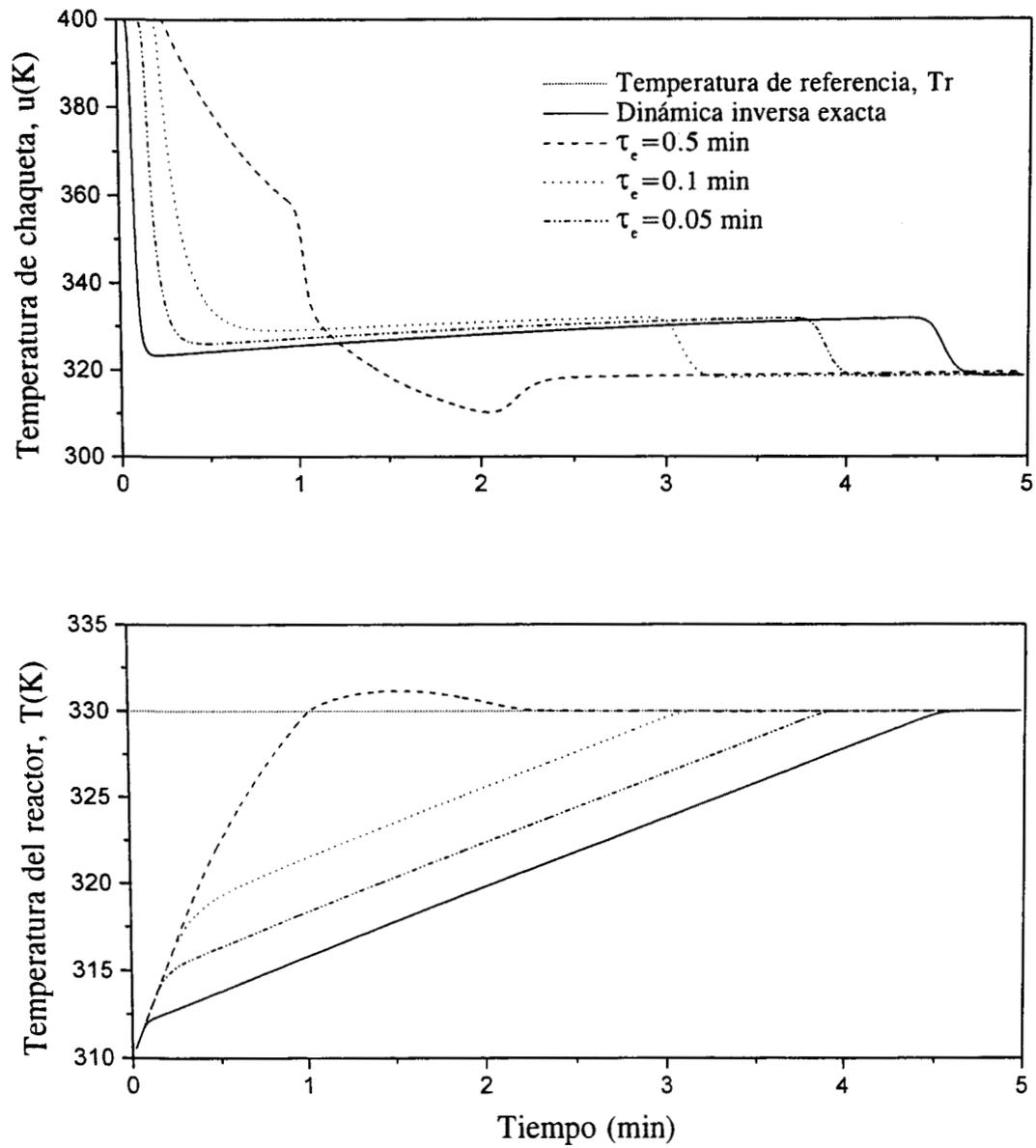


Figura 6-1. Desempeño del controlador para tres valores de constante de estimación y dinámica inversa exacta.

de convergencia prescrito $T_{FT} = 5$ min alcanzado con τ_e tiende a cero. Nótese que, aunque el modelo del error estimado es de naturaleza convergente asintótica, el controlador completo no pierde la propiedad de convergencia a tiempo finito. De este modo, la propuesta del controlador de tiempo finito muestra una buena robustez del margen de estabilidad para el error de modelado. El buen funcionamiento del controlador propuesto es proporcionado por la modelación en línea del error estimado que puede predecir la rapidez con la cual se combinan el calor de reacción y la incertidumbre del calor transferido que es difundido en el reactor. Para ilustrar los efectos de la medición del ruido y las perturbaciones en la medición de la temperatura, consideramos que la temperatura medida T_m está contaminada con una perturbación simulada de ± 2 K ya que $\sum_{j=1}^{10} a_j \sin(\omega_j t) + v(t)$, donde $v(t)$ es una señal estocástica (alta frecuencia). La Figura 6-2a muestra la salida del controlador, la cual contiene componentes de alta frecuencia con excesiva amplitud. Por supuesto, semejante comportamiento dinámico de la temperatura de la chaqueta no puede ser realizado en la práctica. Intuitivamente, la efectividad de la entrada de control que provee el seguimiento de la temperatura es la media dinámica de tal señal de alta frecuencia, la cual puede ser obtenida con un filtro de pasa-bajo. La Figura 6-2b muestra la temperatura de la chaqueta filtrada u_f obtenida con el filtro de pasa-bajo (ver ecuación (4.19)) con $\tau_e = 4$ min. En este caso, muchos componentes de alta frecuencia inducidos por la oscilación de la retroalimentación $\text{sign}(T - T_r)$ son removidos.

- b) *Estrategia de Temperatura Óptima.* En el esquema de la reacción consecutiva se requiere maximizar la producción del componente deseado B. De esta forma, el funcionamiento indicado para ser maximizado es la concentración del componente B a un tiempo final específico, es decir, $I = c_2(T_f)$. Luus y Okongwu (1999) usaron una estrategia de control continuo lineal por tramos (*piecewise*) para encontrar la trayectoria de la temperatura óptima, la cual llegue a ser la temperatura de referencia $T_r(t)$ para el controlador retroalimentado robusto propuesto. La trayectoria óptima calculada por Luus y Okongwu (1999) es correlacionada como

$$T_r(t) = 345.9 - 5.6t + 0.69t^2 - 0.0417t^3 + 1.18 \times 10^{-3}t^4 - 1.26 \times 10^{-5}t^5$$

Para simular la operación industrial de un reactor por lotes, un período de precalentamiento de

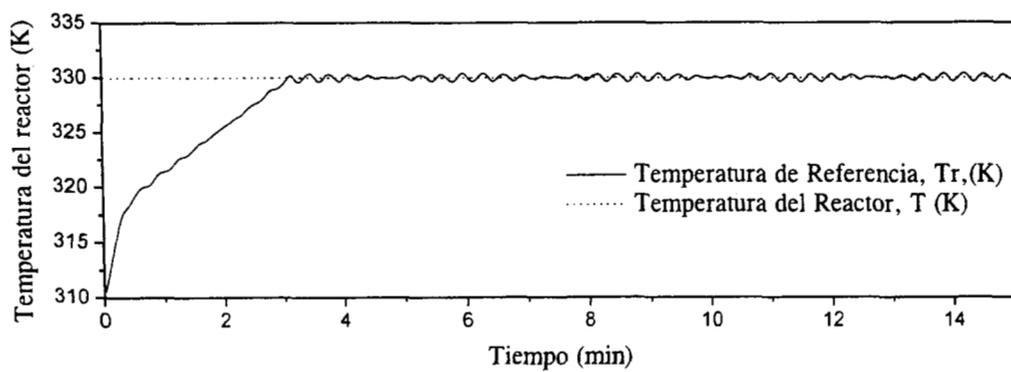
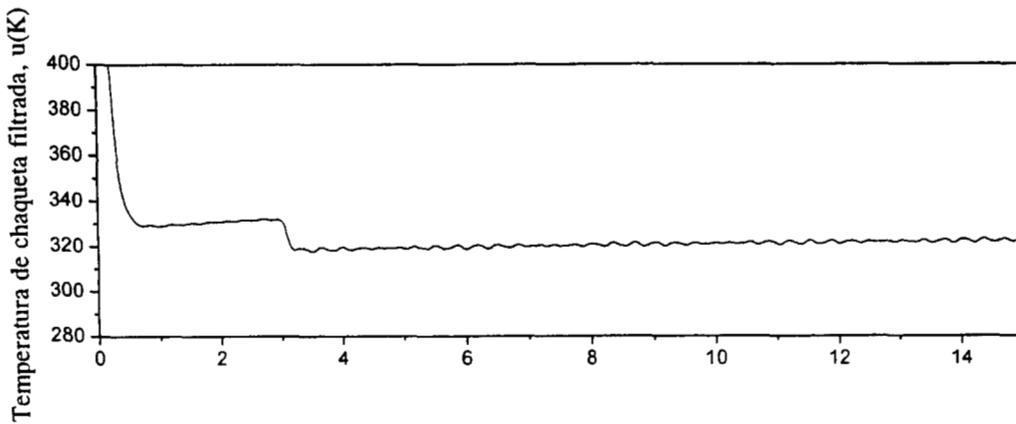
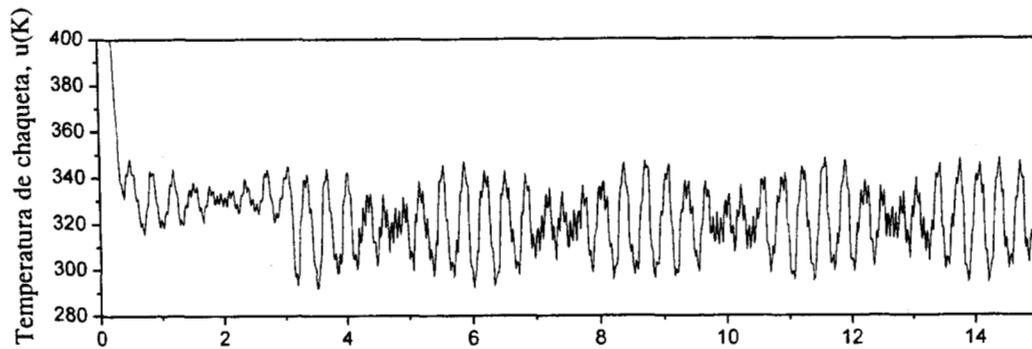


Figura 6-2. Comparación de comportamiento del controlador con componentes de alta frecuencia y comportamiento de la temperatura de chaqueta con la adición de un filtro pasa-bajo.

5 min es considerado, para tomar la temperatura de mezclado de $T_r = 345.9$. Una vez que la temperatura del reactor ha alcanzado la temperatura óptima inicial, el reactor por lotes experimenta el período de reacción. Para $\tau_e = 0.2$ min (ver guías de sintonizado), la Figura 6-3 muestra la respuesta del reactor controlado. Nótese que el pequeño sobrepaso en $t = 5$ min es inducido por el arranque de la reacción. La temperatura del reactor converge a la trayectoria de referencia en alrededor de 3 min gracias a la convergencia retroalimentada de tiempo finito $K_{FT} \text{sign}(T - T_r)$ y al estimador del balance calorimétrico (4.17) y (4.18), el cual proporciona un estimado en línea de la señal del error de modelado $\eta(t)$. El fracaso en la reacción de operación puede aparecer debido a la complejidad de los esquemas de reacción. Mostramos que el controlador propuesto es capaz de proporcionar protección contra las fallas moderadas. La Figura 6-4 presenta el funcionamiento del control cuando un -20% de cambio escalón en el parámetro cinético k_2 con $t = 10$ min y un -25% de cambio escalón en el parámetro de transferencia de calor $\gamma(c, T, t)$ con $t = 15$ min están presentes. El controlador es capaz de contrarrestar los efectos adversos de esos cambios escalón dentro de un período de tiempo no mayor que 2 min.

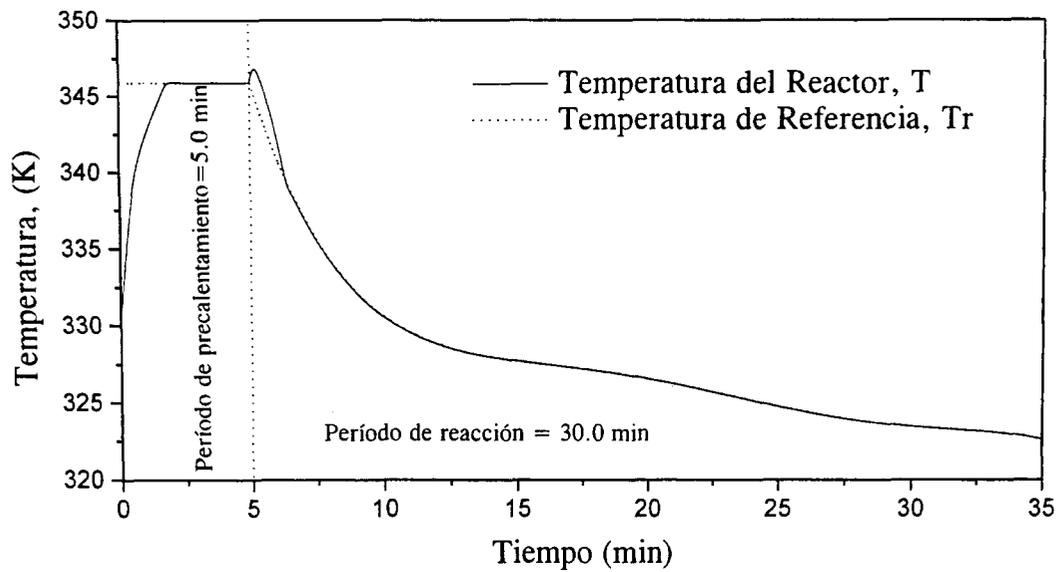
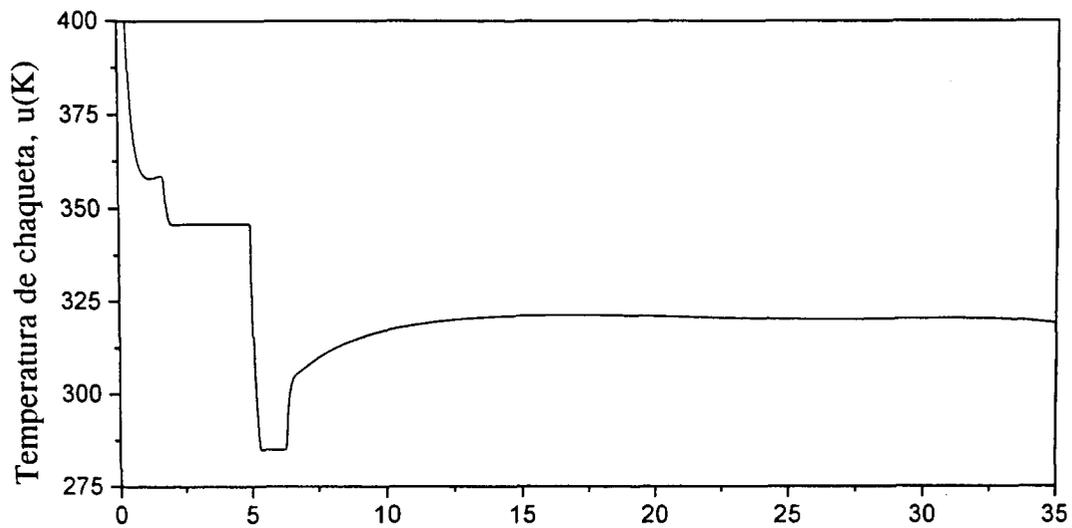


Figura 6-3. Comparación del desempeño del controlador con una trayectoria de temperatura óptima propuesta.

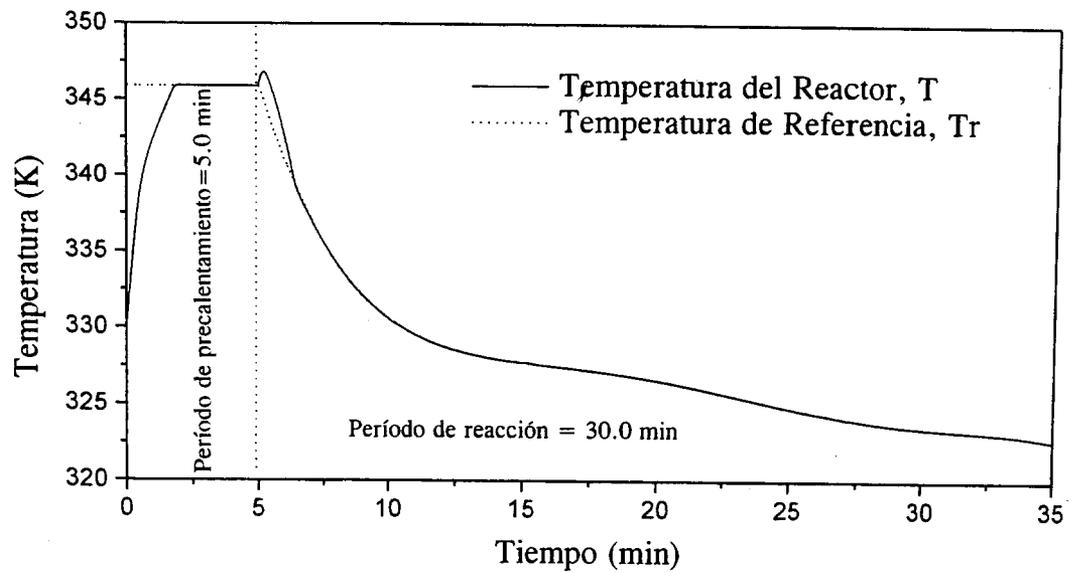
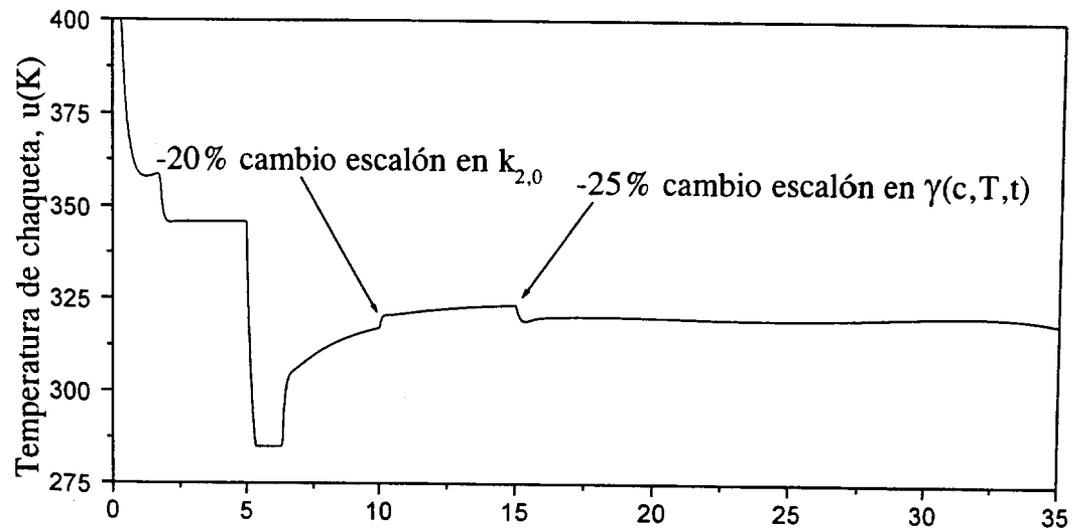


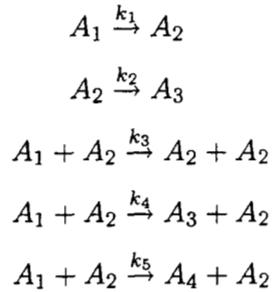
Figura 6-4. Desempeño del controlador considerando incertidumbres en el parámetro cinético y en el parámetro de transferencia de calor.

6.2 Simulación Numérica para el Caso de Control Cascada

6.2.1 Reacción de Pirólisis

Con el objetivo de ilustrar el funcionamiento de la configuración de control propuesta, se consideró el problema del betún pirólitico (Luus y Okongwu, 1999) considerado para el estudio de control óptimo por Wen y Yen (1977), así como por Rosen y Luus (1989).

La pirólisis del aceite keroseno es una muy compleja reacción o grupo de reacciones que resultan de la producción de hidrocarburos y sus derivados. En investigaciones previas se ha llegado a la conclusión de que un sobrecalentamiento descompone al keroseno, mediante una reacción consecutiva, en material soluble de benceno (betún pirólitico); el cual a su vez se descompone para formar los productos finales de aceite, gas y residuos carbonosos. Este sistema comprende cinco reacciones químicas, en las cuales toman lugar cuatro especies químicas, dadas por las siguientes ecuaciones:



donde A_1 es el keroseno, A_2 es el betún pirólitico (materia orgánica soluble que se forma durante el calentamiento de un aceite), A_3 es aceite y gas, y A_4 es el carbón orgánico residual.

Este sistema de descomposición es representado por las siguientes ecuaciones para la concentración:

$$r(c, T) = \begin{pmatrix} r_1(c, T) \\ r_2(c, T) \\ r_3(c, T) \\ r_4(c, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 x_1 - (k_3 + k_4 + k_5) x_1 x_2 \\ k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_3 x_1 x_2 \\ k_2 x_2 + k_4 x_1 x_2 \\ k_5 x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

La constantes específicas de k_i pueden ser expresadas en términos de la ecuación de Arrhenius como:

$$k_i = k_{i0} \exp(-E_i/RT), (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

donde k_{i0} es el factor de frecuencia y E_i es la energía de activación, los datos necesarios están dados en la Tabla 1.

Tabla 1. Energías de activación y factores de frecuencia.

Reacción	Energía de activación $E, Kcal/gmol$	Exponente de factor de frecuencia, e^{k_0}
$A_1 \rightarrow A_2$	20.3	8.86
$A_2 \rightarrow A_3$	37.4	24.25
$A_1 + A_2 \rightarrow A_2 + A_2$	33.8	23.67
$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_2$	28.2	18.75
$A_1 + A_2 \rightarrow A_4 + A_2$	31.0	20.70

Para el balance de energía, el parámetro $H = 602.4 KJ/mol$ y el valor del parámetro de transferencia de calor es $\gamma(c, T, t) = 2000.0 \text{ min}^{-1}$. El tiempo de residencia del reactor por lotes es especificado como $T_f = 15.0 \text{ min}$.

Para demostrar la versatilidad del esquema de control, se consideran el siguiente caso en donde las condiciones iniciales son: $c_1 = 1.0$, $c_2 = 0.0$, $c_3 = 0.0$, $c_4 = 0.0$, y $T(0) = 698 \text{ K}$. Se requiere maximizar la producción del componente deseado c_2 (betún pirólitico), es decir $I = c_2(T_f)$. La Figura 6-5 muestra el comportamiento dinámico del sistema a lazo abierto para la temperatura del reactor y la composición de c_2 , en el cual la acción de control es independiente de la salida. En la Figura 6-6 se muestra el comportamiento del sistema aplicando el controlador en cascada, en donde intervienen los parámetros de constante de tiempo característico del sistema $\tau_c = 0.2$ y constante de tiempo de estimación $\tau_e = 0.1$ para el control maestro, mientras que para el control esclavo se tomaron los

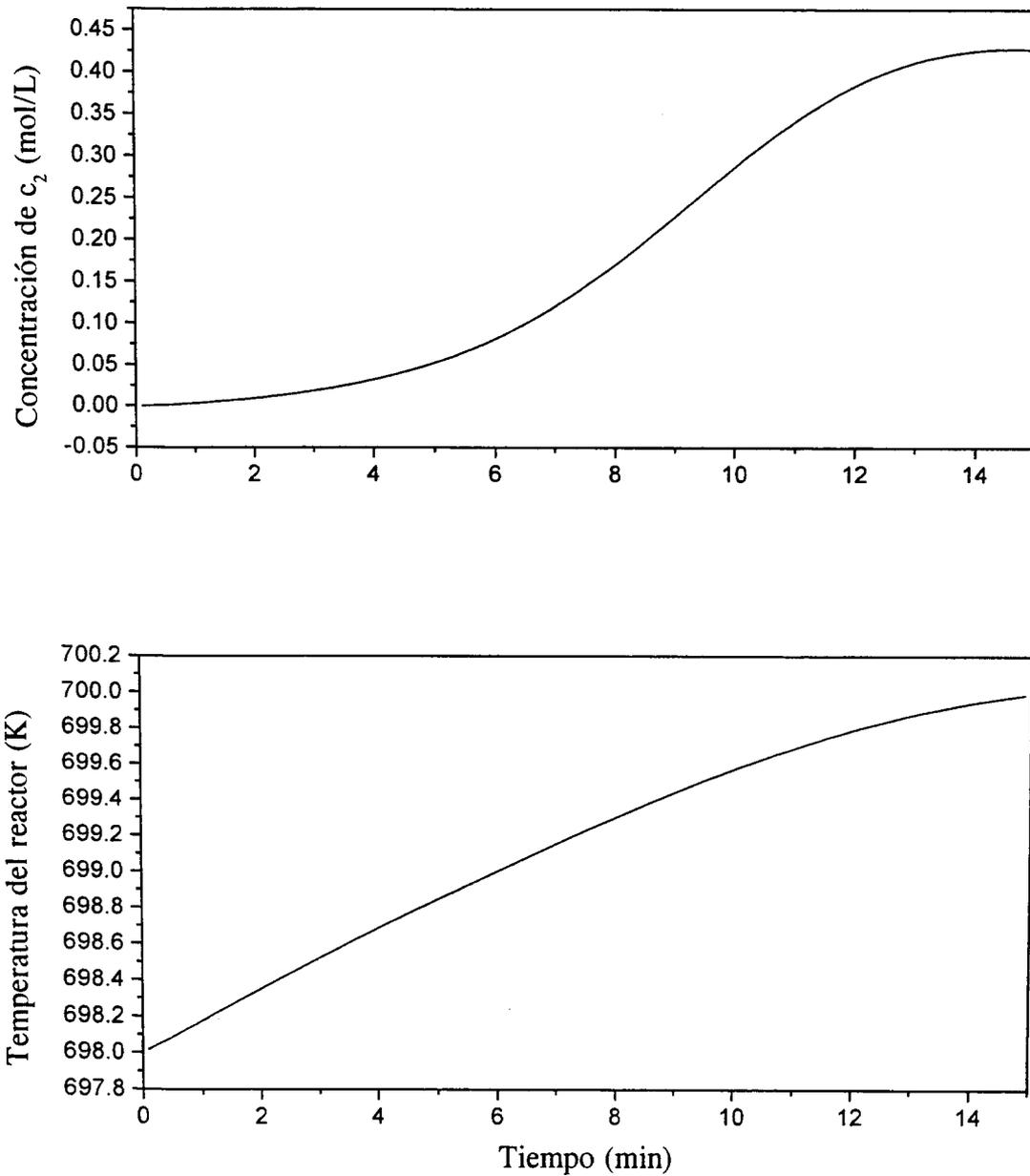


Figura 6-5. Comportamiento del sistema a lazo abierto con condiciones iniciales de $c_1=1.0, c_2=0.0, c_3=0.0$ y $c_4=0.0$ y una temperatura inicial de $T(0) = 698$ k.

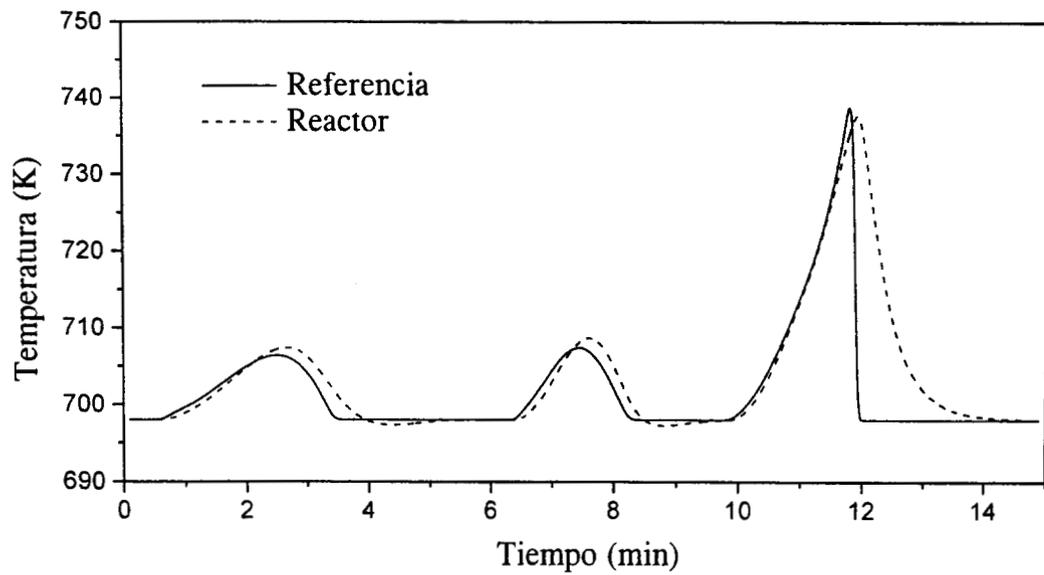
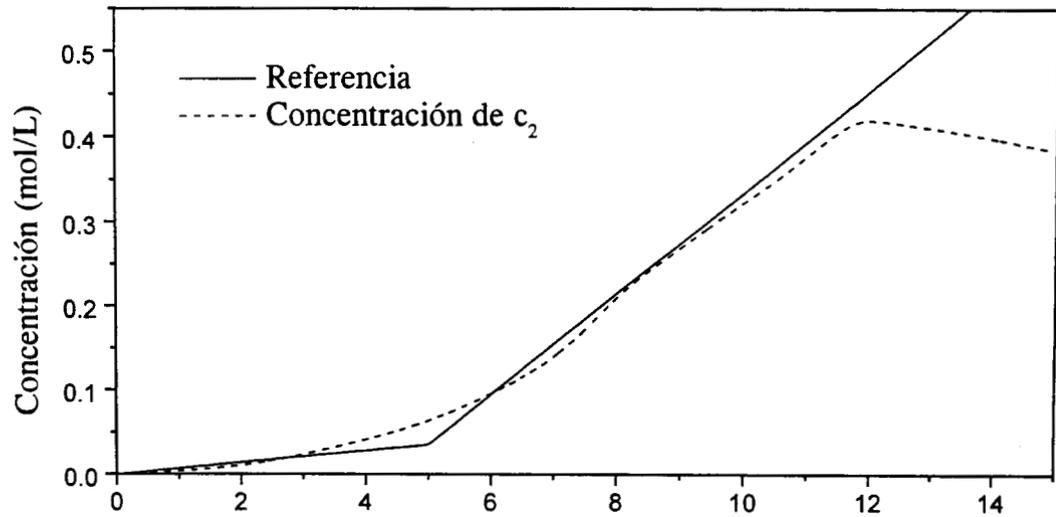


Figura 6-6. Comportamiento del controlador aplicando una configuración cascada en serie.

siguientes parámetros $\tau_c = 0.5$ y $\tau_e = 0.1$, puesto que estos parámetros logran ajustar al controlador de manera eficiente con la trayectoria de referencia. Es posible observar en el gráfico de composición, que el controlador solo sigue la referencia hasta aproximadamente un tiempo de 12 minutos, esto se debe a que es el tiempo en el que la concentración del betún pirólitico alcanza su valor máximo, es decir todo el keroseno ha sido convertido a betún, comenzando ahora la descomposición del betún en aceites, gas y residuos carbonosos, por esta razón el controlador deja de seguir en este momento la trayectoria de referencia, es decir el controlador se satura en este punto. En la Figura 6-7a se presenta el funcionamiento de la configuración cascada a diferentes valores de la constante de estimación τ_e , por lo que puede observarse que conforme disminuye el valor de τ_e el funcionamiento del sistema de lazo maestro y esclavo se aproximan al sistema de referencia. Mientras que la Figura 6-7b muestra el desempeño del controlador a tres valores diferentes de τ_c , observándose que la velocidad de convergencia del sistema de lazo cerrado se incrementa monótonicamente con el valor de τ_c . Puesto que en la configuración en cascada el sistema actúa de forma rápida ocasionando grandes esfuerzos de control que se reflejan en sobredisparos dentro del sistema es necesarios el uso de saturaciones dentro de los lazos de control. En la Figura 6-8 puede observarse que el comportamiento más cercano a la referencia en el caso de la saturación de la temperatura de la chaqueta en el lazo esclavo, es el de intervalo superior, puesto que existirá un mayor rango de temperatura en donde puede actuar el controlador. Para ilustrar los efectos de la medición del ruido y las perturbaciones en la medición de la temperatura dentro del lazo esclavo, consideramos que la temperatura medida T_m está contaminada con una perturbación simulada de ± 2 K ya que $\sum_{j=1}^{10} a_j \sin(\varpi_j t) + v(t)$, donde $v(t)$ es una señal estocástica (alta frecuencia). La Figura 6-9 muestra la salida del controlador, la cual contiene componentes de alta frecuencia con excesiva amplitud. La efectividad de la entrada de control que provee el seguimiento de la temperatura es la media dinámica de tal señal de alta frecuencia, la cual puede ser obtenida con un filtro de pasa-bajo. Sin embargo, la configuración cascada logra contrarrestar esta clase de perturbaciones ocasionadas por la señal de ruido como puede observarse en la gráfica de temperatura, sin que estas perturbaciones logren afectar el lazo primario como se observa en el gráfico de composición ya que la trayectoria de composición no se ve alterada por esta clase de perturbaciones.

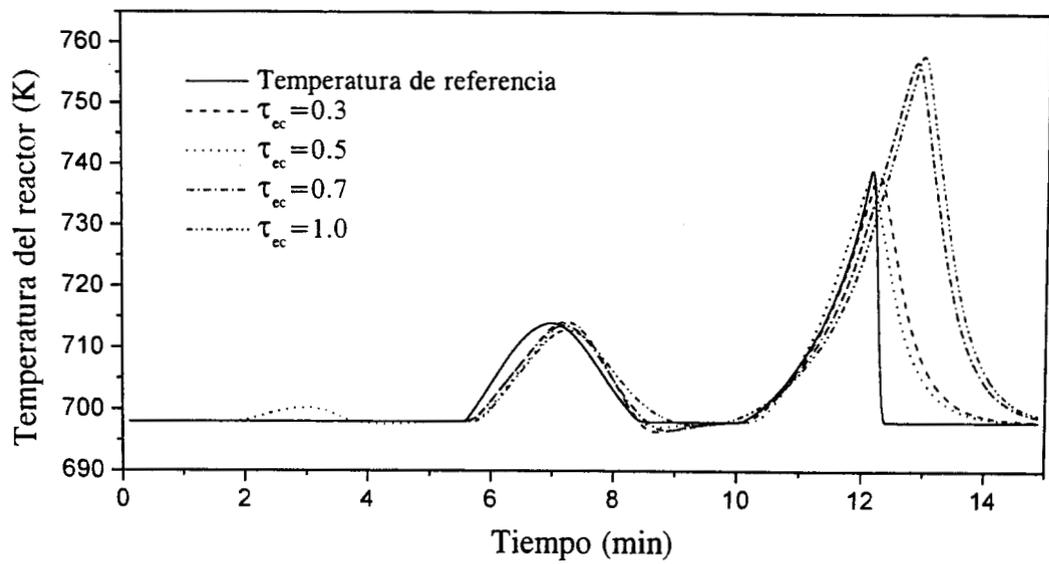
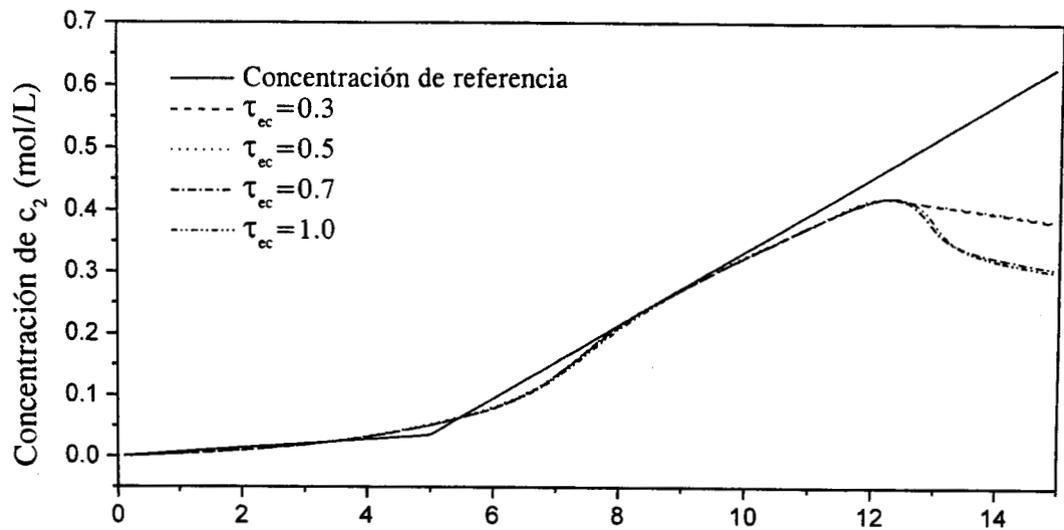


Figura 6-7a. Comportamiento del control cascada para tres valores de la constante de estimación τ_e en el lazo maestro.

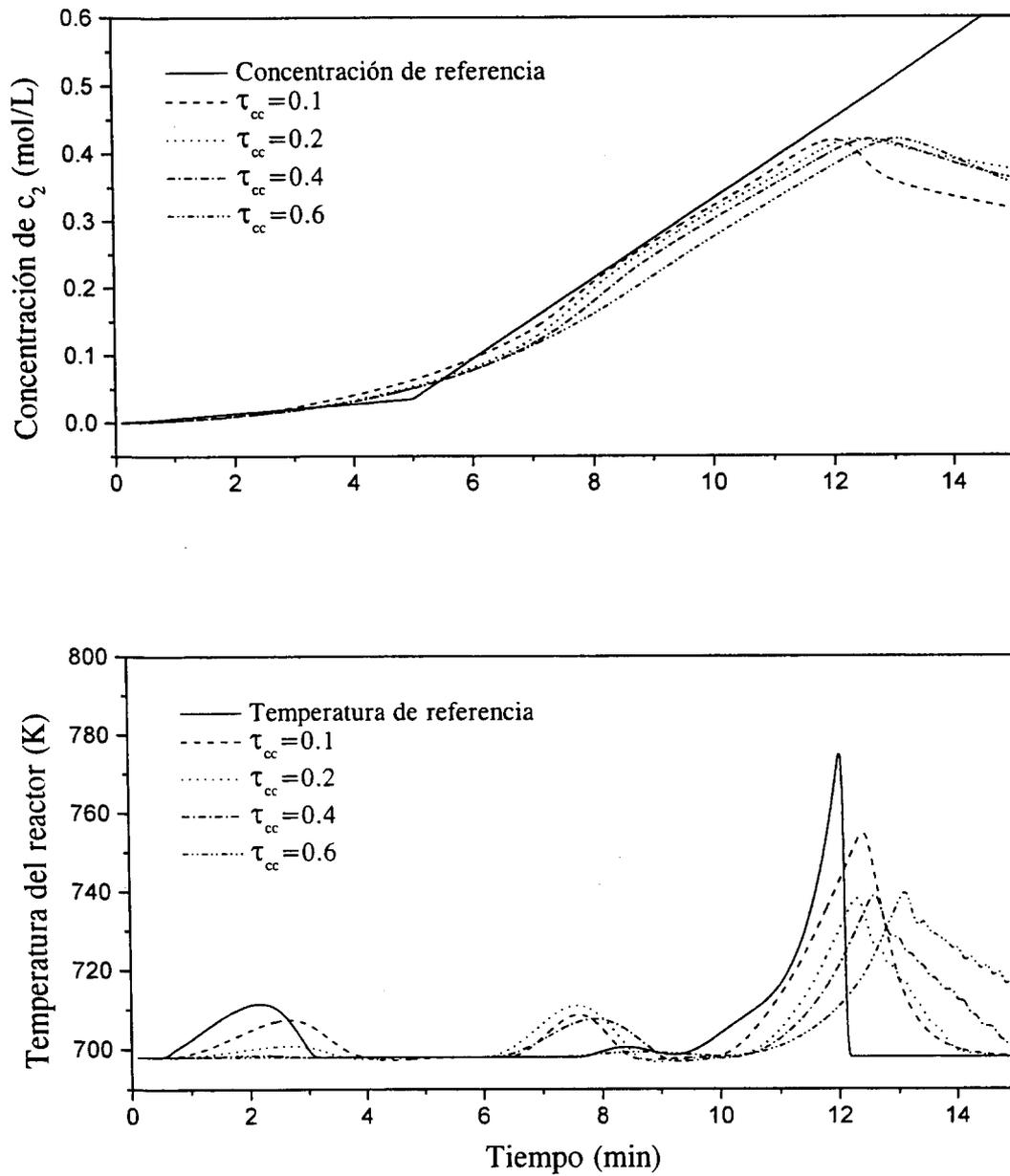


Figura 6-7b. Comportamiento del control cascada para tres valores de la constante de tiempo en el lazo maestro.

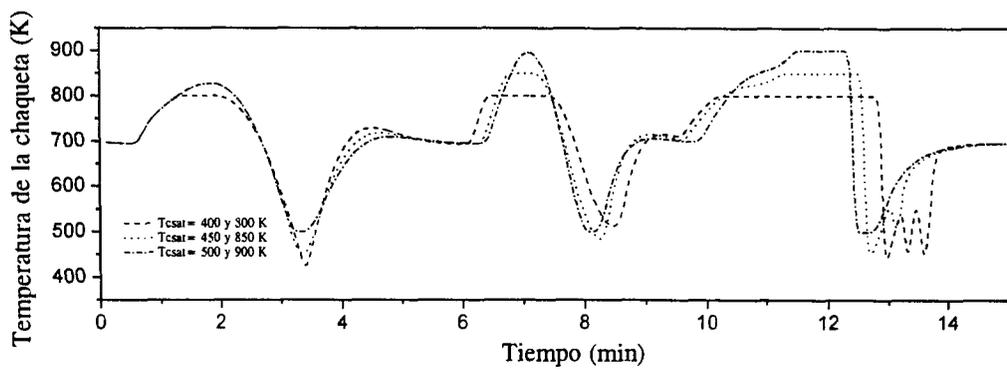
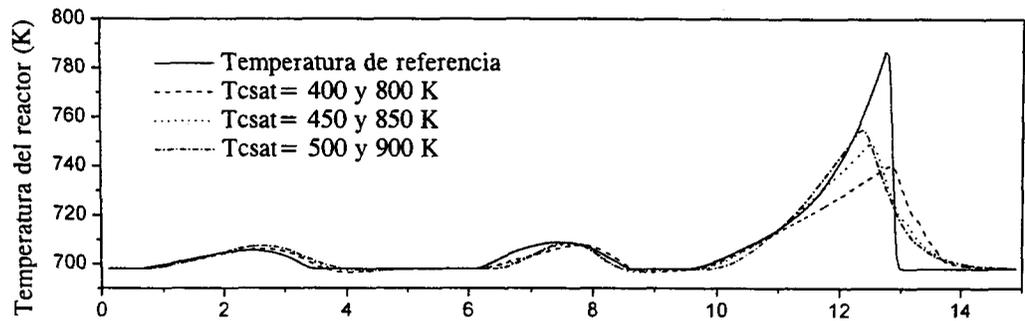
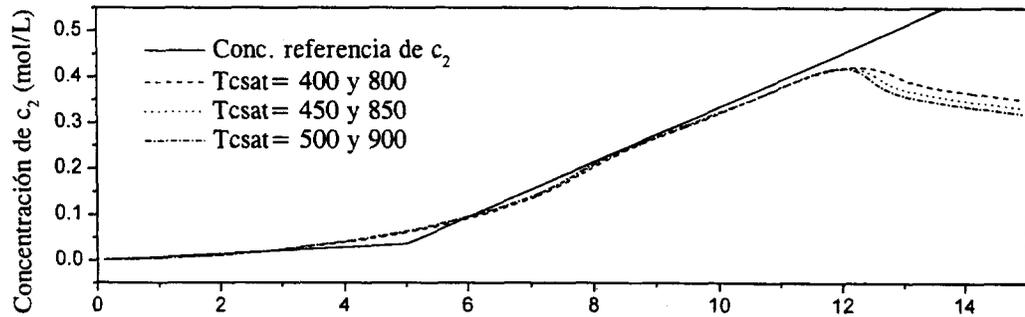


Figura 6-8. Efecto del cambio de saturación en la temperatura de chaqueta del control cascada.

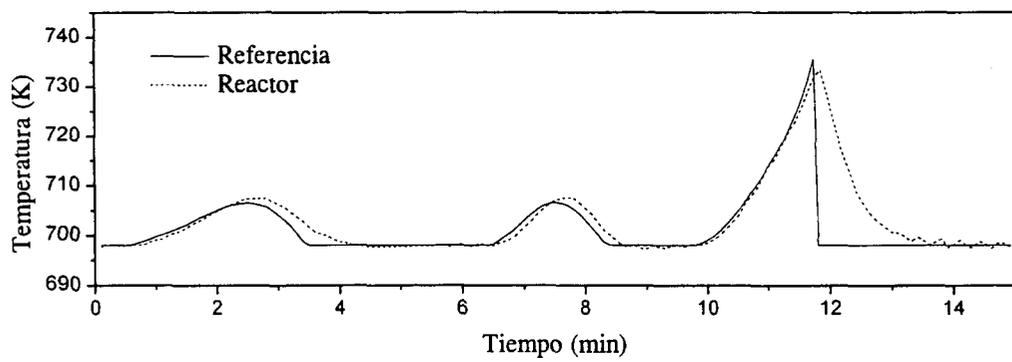
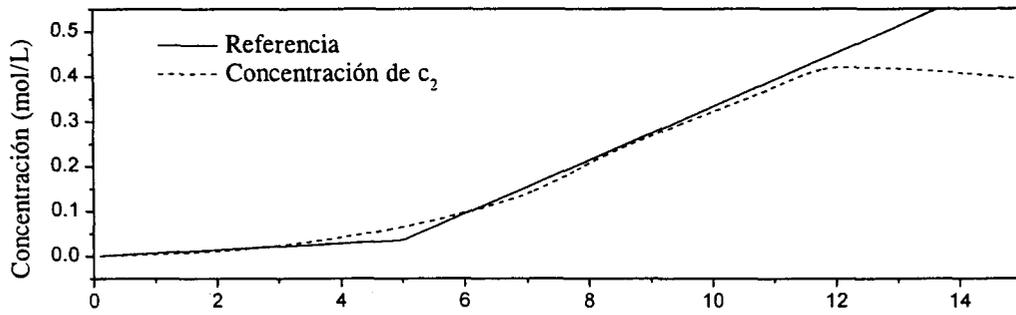
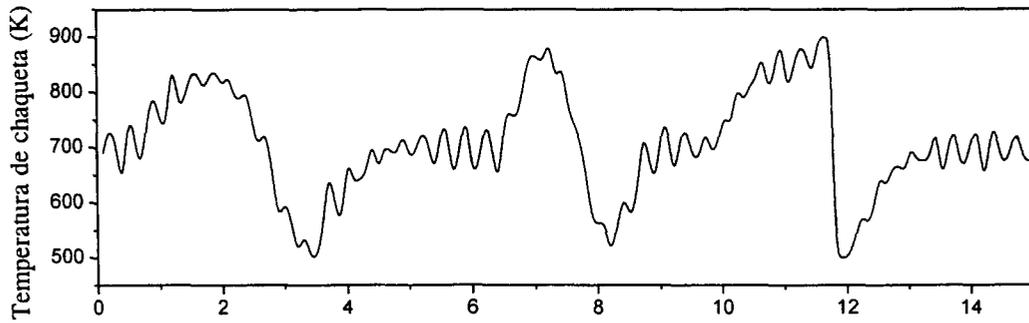


Figura 6-9. Comportamiento del controlador ante perturbaciones en la medición de temperatura.

CONCLUSIONES

Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de este trabajo respecto al diseño del sistema de control para lograr la estabilización a tiempo finito de un reactor por lotes. Por otra parte también se muestran las conclusiones obtenidas del planteamiento de una configuración cascada con el objetivo de lograr diseñar un controlador que permita controlar la composición dentro de esta clase de equipos.

Las conclusiones del presente trabajo se muestran a continuación:

- (a) Una estrategia de control robusto en tiempo finito para el seguimiento de trayectorias en reactores por lotes, con un procedimiento de construcción y sintonizado es proporcionado. En este sentido, el tiempo de convergencia de la temperatura del reactor puede ser prescrito por ajuste de un solo parámetro de control.
- (b) El diseño de control robusto usa un algoritmo de balance calorimétrico para estimar el error de modelado contrarrestando sus efectos via una estabilización retroalimentada a tiempo finito. El balance calorimétrico presenta en forma natural una acción integral, lo cual induce a la capacidad de robustez del controlador resultante.
- (c) El controlador resultante es capaz de enfrentar incertidumbres debido a la reacción cinética y a los parámetros de transferencia de calor, y perturbaciones no medibles.
- (d) El controlador resultante puede ser interpretado como un controlador PI no lineal, con acción integral no lineal que generaliza la configuración convencional del controlador PI.

- (e) En el límite de una elevada razón de estimación, el propósito del controlador retroalimentado es recuperar el comportamiento del controlador exacto entrada/salida de dinámica inversa. Esta propiedad garantiza un buen funcionamiento del controlador de temperatura del reactor por lotes a pesar del error de modelado y perturbaciones no medibles.
- (f) Se implementó una configuración cascada en el diseño de un sistema de control de composición, la cual permitió contrarrestar los efectos ocasionados por los inherentes retardos presentados por los dispositivos de medición que limitan seriamente el funcionamiento del controlador retroalimentado.
- (d) En la configuración cascada la construcción de incertidumbres se llevó a cabo mediante el uso de estimadores, en los cuales se implementó la definición de una nueva variable que contiene la derivada en tiempo del estado medido. Además, realizan una buena reconstrucción de las incertidumbres a pesar de las altas no linealidades producidas por la expresión de Arrhenius.
- (h) El uso de saturaciones dentro de los lazos de control en la configuración cascada, se debe a que este tipo de sistemas actúan de manera rápida ocasionando un gran esfuerzo de control que se refleja en sobredisparos.
- (i) El uso del controlador tipo cascada en reactores por lotes para el control de composición usando técnicas de estimación de incertidumbres en este sistema no lineal, asegura una convergencia asintóticamente estable y un desempeño robusto a incertidumbres paramétricas y de modelado.

Las estrategias de control propuestas en este trabajo tienen gran importancia puesto que las aproximaciones de control proporcionan una útil herramienta en el área de investigación del control de procesos por lotes. Sin embargo, aun quedan abiertas muchas preguntas importantes que necesitan de un trabajo adicional. Por ejemplo, para apreciar la capacidad básica y límites de los esquemas de control propuestos, se requiere una rigurosa prueba de estabilidad de los efectos en el sistema de lazo cerrado y los efectos de la medición de ruido. Además, el control de composición es también un problema desafiante ya que los inherentes retardos presentados por los dispositivos de medición limitan seriamente el funcionamiento del controlador retroalimentado. Este problema es muy importante puesto que la composición es la operación principal a controlar dentro de un reactor.

Apéndice

A. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace se define de la siguiente manera:

Definición A.1: Sea $f(t)$ una función real de una variable real t definida para $t > 0$. Entonces

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) \equiv \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\epsilon}^T f(t)e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad 0 < \epsilon < T$$

es lo que se llama la transformada de Laplace de $f(t)$. s es una variable compleja definida por $s \equiv \sigma + jw$, donde σ y w son variables reales y $j = \sqrt{-1}$.

Obsérvese que el límite inferior de la integral es $T = \epsilon > 0$. Esta definición del límite inferior algunas veces es útil cuando se trabaja con funciones que son discontinuas en $t = 0$. Cuando se hace uso explícito de este límite, se abrevia como $t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \equiv 0^+$, como se muestra en la integral.

La variable real t siempre denota tiempo.

Definición A.2. Si $f(t)$ se define y con valor único para $t > 0$, y $F(\sigma)$ es absolutamente convergente para algún número real σ_0 , es decir,

$$\int_{0^+}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\epsilon}^T |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < +\infty, \quad 0 < \epsilon < T$$

entonces $f(t)$ es transformable para $\text{Re}(s) > \sigma_0$.

En la aplicación de la transformada de Laplace al diseño de sistemas de control, las funciones del tiempo son las variables del sistema, inclusive la variable manipulada y la controlada, las señales del transmisor, las perturbaciones, las posiciones de la válvula de control, el flujo a través de las válvulas de control y cualquier otra variable o señal intermedia. Por lo tanto, es muy importante darse cuenta que la transformada de Laplace se aplica a las variables y señales, y no a los procesos o instrumentos.

Propiedades de la transformada de Laplace.

Si una función $f(t)$ tiene transformada de Laplace, la transformada de la función $kf(t)$, donde k es una constante, está dada por

$$\mathcal{L}[kf(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] = kF(s)$$

En forma similar, la *propiedad distributiva* es válida para la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t) + g(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \\ &= F(s) + G(s)\end{aligned}$$

Teorema de la diferenciación real. Establece la relación de la transformada de Laplace de una función con la de su derivada.

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Teorema de la integración real. Establece la relación entre la transformada de una función y la de su integral.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Teorema de la diferenciación compleja. Facilita la evaluación de las transformadas que implican la variable de tiempo t

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Teorema de la traslación real. En este teorema se trabaja con la traslación de una función en el eje del tiempo.

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

Teorema de la traslación completa. Facilita la evaluación de la transformada de funciones que implican al tiempo como exponente.

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a)$$

Teorema del valor final. Es útil para calcular el valor final de una función a partir de una función de su transformada.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Teorema del valor inicial. Es útil para calcular el valor inicial de una función a partir de su transformada.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

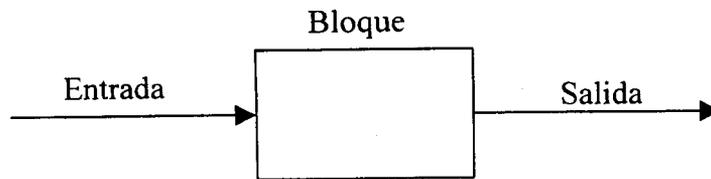
B. Diagramas de bloques

Un diagrama de bloques es una representación visual simplificada de la relación de causa y efecto que existe entre la entrada y la salida de un sistema físico. El diagrama suministra un método útil y conveniente para caracterizar las relaciones funcionales entre los diferentes componentes de un sistema de control. Los componentes del sistema se conocen alternativamente con el nombre de elementos del sistema. La forma más sencilla del diagrama en bloque es el bloque simple que lleva una entrada y una salida (ver Figura A-B1(a)).

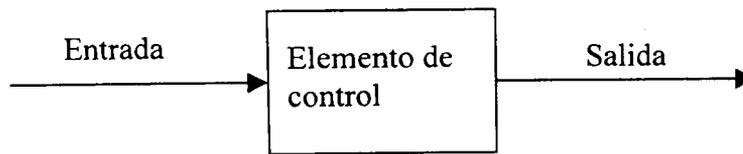
El interior del rectángulo que representa al bloque generalmente contiene la descripción o el nombre del elemento, o el símbolo de la operación matemática que se ejecuta sobre la entrada, con el fin de obtener la salida. Las flechas representan, en general, el flujo de información; representan las variables del proceso o las señales de control; cada punta de flecha indica la dirección del flujo de información. En la Figura A-B1(b) y (c) se muestran algunos ejemplos sencillos de los diagramas de bloques.

Las operaciones de adición y sustracción tienen una representación especial. El bloque se cambia por un pequeño círculo, llamado punto de suma con el signo apropiado, más o menos, acompañando las flechas que llegan al círculo. La salida es la suma algebraica de las entradas. Cualquier número de entradas se puede aplicar al punto de suma. En la Figura A-B2 pueden observarse algunas operaciones comunes.

(a)



(b)



(c)

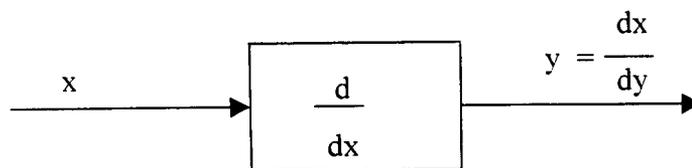
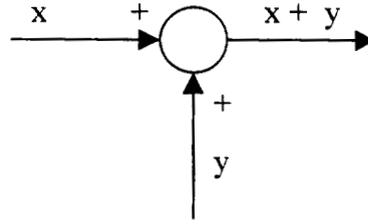
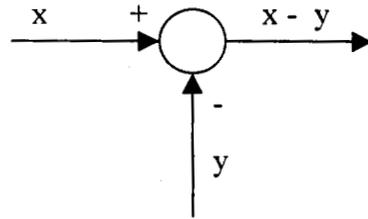


Figura A-B1. (a) Forma más sencilla del diagrama en bloque. (b) y (c) Ejemplos de los diagramas en bloque.

(a)



(b)



(c)

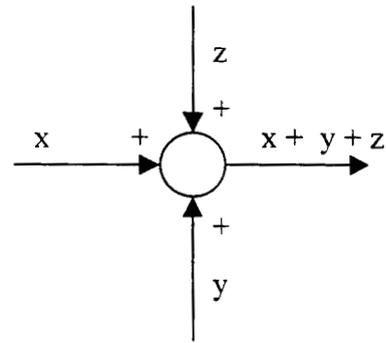


Figura A-B2. (a) Operación de adición. (b) Operación de sustracción. (c) Ejemplo de adición con tres entradas.

C. Control no lineal

Puesto que muchos de los procesos de ingeniería química son no lineales, existen ventajas para el uso de controladores no lineales en algunos sistemas. La idea es modificar la acción del controlador de alguna manera para compensar la no linealidad de los procesos.

Por ejemplo, podríamos usar un controlador de ganancia variable en el cual la ganancia K_c varía con la magnitud del error.

$$K_c = K_{c0}(1 + b|E|)$$

donde:

K_{c0} es la ganancia del controlador con error cero.

$|E|$ es la magnitud absoluta del error.

b es la constante ajustable.

Esto permitirá usar un valor bajo de ganancia así que el sistema es estable cerca del punto sobre un amplio rango de niveles de operación con cambiantes ganancias de proceso. Cuando el proceso es perturbado en el punto de referencia, la ganancia se incrementará. El sistema puede ser de lazo cerrado inestable en algún punto. Pero la inestabilidad está en la manera de manipular el lazo rápidamente para regresar a la región del punto de referencia estable.

Otra ventaja de esta clase de controladores no lineales es que la baja ganancia en el punto de referencia reduce los efectos de ruido.

El parámetro b puede ser diferente para errores positivos y negativos si la no linealidad de los procesos es diferente para cambios de incremento o decrecimiento. Por ejemplo, en columnas de destilación un cambio en la variable manipulada modifica la composición del producto en dirección de la alta pureza teniendo menos efecto en cambios en relación a bajas purezas. Estos controladores de alta ganancia pueden ser usados con productos de alta pureza y los de baja ganancia pueden ser usados para productos de menor pureza.

Otro tipo de control no lineal puede ser alcanzado usando transformaciones no lineales de las variables controladas. Por ejemplo, en el control de reactores químicos la velocidad de reacción puede ser controlada en vez de la temperatura. Las dos están, por supuesto, relacionadas a través de la relación exponencial de la temperatura. En columnas de destilación de alta pureza, una transformación del tipo mostrado anteriormente pueden algunas veces ser usados para "linealizar" la señal de composición y produce un mejor control el cual todavía usa un controlador convencional lineal

$$(x_D)_{TR} = \frac{1-x_D}{1-x_D^{set}}$$

$$(x_B)_{TR} = \frac{x_B}{x_B^{set}}$$

donde el subíndice TR indica la variable transformada.

Referencias

- Alvarez-Ramírez, J.; Morales, A. and Cervantes I. Robust proportional-integral control, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **37**, 4740-4747, **1998**.
- Alvarez-Ramírez, J. Adaptive control of feedback linearizable systems: a modeling error compensation approach. *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, **9**, 361-377, **1999**.
- Bath, S.P. and Bernstein, D.S. Continuous finite-time stabilization of translational and rotational double integrators, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **43**, 678-682, **1998**.
- Chen, Ch-T. and Peng, Sh-T. A simple adaptive control strategy for temperature trajectory tracking in batch processes, *Can. J. Chem. Eng.*, **76**, 1118-1127, **1998**.
- Cott, B.J. and Macchietto, S. Temperature control of exothermic batch reactors using generic model control, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **28**, 1177-1184, **1989**.
- Distefano, J.; Stubberrud, A.R. and Williams, I.J., *Teoría y problemas de retroalimentación y sistemas de control*, Ed. Limusa, México, D.F., **1985**.
- Feinberg, M. Chemical reaction network structure and the stability of isothermal reactors-I The deficiency zero and deficiency one theorems, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 2229-2268, **1987**.
- Filippi-Bossy, C.; Bordet, J.; Villermaux, J.; Marchal-Brassely, S.; Georgakis, C. Batch reactor optimization by use of tendency models, *Comp. Chem. Eng.*, **13**, 57-47, **1998**.
- Gavalas, G.R. *Nonlinear Differential Equations of Chemical Reacting Systems*, Springer-Verlag, New York, **1968**.
- Gentric, C.; Pla F.; Lafiti, M.A. and Corriou, J.P., Optimization and non-linear control of a batch emulsion polymerization reactor, *Chem. Eng. J.*, **75**, 31-46, **1999**.
- Jutan, A. and Uppal, A. Combined feedforward-feedback servo control scheme for an exothermic batch reactor, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, **23**, 597-602, **1984**.
- Katsuhiko, O. *Ingeniería de Control Moderna*, 2a Ed.; Prentice-Hall Hispanoamericana: México, D.F., **1990**.

- Kothare, M.V.; Campo, P.J.; Morari, M. and Nett, C.N. A unified framework for the study of anti-windup designs, *Automatica*, *30*, 1869-1883, **1994**.
- Kozub, D.J. and McGregor, J.F. State estimation for semibatch polymerization reactors, *Chem. Eng. Sci.*, *47*, 1047-1062, **1992**.
- Kravaris, C. and Chung, C.B. Nonlinear state feedback synthesis by global input/output linearization, *AIChE J.*, *33*, 592-603, **1987**.
- Lakshmanan, N.M.; Arkun, Y. Estimation and model predictive control of non-linear processes using linear parameter varying models, *Int. J. Contr.*, *72*, 659-675, **1999**.
- Lee, P.L.; Sullivan, G.R. Generic model control, *Comp. Chem. Eng.*, *12*, 573-598, **1998**.
- Luus, R. On the optimization of oil shale pyrolysis, *Chem. Eng. Sci.*, *33* 1403-1404, **1978**.
- Luus, R. Optimal control of batch reactors by iterative dynamic programming, *J. Process Control*, *4*, 218-226, **1994**.
- Luus, R. and Okongwu O.N., Towards practical optimal control of batch reactors, *Chem. Eng. J.*, *75*, 1-9, **1999**.
- Luyben, W.L. *Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*, 2a Ed.; McGraw-Hill: New York, **1990**.
- Marroquin, G. and Luyben, W.L. Practical control studies of batch reactors using realistic mathematical models, *Chem.Eng.Sci.*, *28*, 993-1003, **1973**.
- Miller, S.M. and Rawlings, J.B. Model identification and control strategies for batch cooling crystallizers, *AIChE J.*, *40*, 1312-1326, **1994**.
- Morari, M.; Zafriou, E. *Robust Process Control*, Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, **1989**.
- Perruquetti, W. and Drakunov, S. Finite time stability and stabilization, *Proc. 39th. IEEE Conf. Decision and Control*, Sydney, **2000**.
- Rosen, O.; Luus, R. Sensitivity of optimal control to final state specification by a combined continuation and no linear programming approach, *Chem. Eng. Sci.*, *44*, 2527-2534, **1989**.

- Rotstein, G.T. and Lewin, D.R. Control of an unstable batch chemical reactor, *Comp. Chem. Eng.*, *16*, 27-49, **1992**.
- Russo, L.R.; Bequette, B.W. State space versus input/output representations for cascade control of unstable systems, *Ind. Eng. Chem. Res.*, *36*, 2271-2278, **1997**.
- Schuler, H.; Schmidt, Ch.-U. Calorimetric-state estimators for chemical reactor diagnosis and control: review of methods and applications, *Chem. Eng. Sci.*, *47*, 899-915, **1992**.
- Sepulchre R.; Janković, M. and Kokotović, P. *Constructive Nonlinear Control*, Springer, London, **1997**.
- Smith, C.A. and Corripio, A.B. *Control Automático de Procesos*, Ed. Limusa, México, D.F., **1991**.
- Tyner, D.; Soroush, M.; Grady, M.C. Adaptive temperature control of multiproduct jacketed reactors, *Ind. Eng. Chem. Res.*, *38*, 4337-4344, **1999**.
- Wen, C.S. and Yen, T.F. Optimization of oil shale pyrolysis, *Chem. Eng. Sci.*, *32*, 346-349, **1977**.